课程编号：MTH07034　　北京理工大学 2015-2016 学年第二学期

2015 级离散数学期末试题答案及评分标准（A 卷）

班级＿＿＿＿＿　学号＿＿＿＿＿　姓名＿＿＿＿＿　成绩＿＿＿＿＿

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	总分
得分									

1. 选择题（共 10 题，每题 1 分）

1).B　2).C　3).B　4).C　5).B

6). D　7). C　8).C　9).A　10). B

2. 判断题（共 10 题，每题 1 分，真为"T"，假为"F"）

1).T　2).F　3).T　4).F　5).F

6).F　7). T　8). T　9).F　10). T

3. 填空题（共 10 题，每题 3 分）

1) 011 101 111（每个 1 分）
2) $q\vee r\vee\neg s$
3) 1
4) $(F(a)\wedge F(b))\wedge(G(a)\vee G(b))\rightarrow H(y)$
5) $\forall x\forall y\forall t\,((F(x,z)\rightarrow G(y))\rightarrow H(t,z))$（两次错扣 1 分，后面变量错扣 1 分）
6) 452
7) {{1,2},{3},{4}}（每个 1 分）
8) 5，6，7，8，9（每 2 个 1 分）
9) {<1,2>,<1,3>,<3,2>}（每个 1 分）
10) $\aleph_0$

4. （10 分）

答：（A）$F\Leftrightarrow(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge q\wedge\neg r)$

$\Leftrightarrow(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(p\wedge q\wedge\neg r)$

$\Leftrightarrow m_1 \vee m_3 \vee m_4 \vee m_6$（8 分）

（B） $F \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee$

$(\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r)$

$\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r)$

$\vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r)$

$\Leftrightarrow (\neg p \wedge r) \vee (p \wedge \neg r)$

$\Leftrightarrow \neg (\neg (\neg p \wedge r) \wedge \neg (p \wedge \neg r))$（2 分）

5. （10 分）

符号化：4 分

$\forall x(P(x) \to R(x)), \forall x(R(x) \wedge V(x) \to S(x)), \exists x(P(x) \wedge V(x) \wedge U(x))$

结论：$\exists x(P(x) \wedge S(x) \wedge U(x))$

证明：6 分

1)	$\forall x(R(x) \wedge V(x) \to S(x))$,	前提引入
2)	$R(x) \wedge V(x) \to S(x)$	1) $\forall$-
3)	$\forall x(P(x) \to R(x))$	前提引入
4)	$P(x) \to R(x)$	3) $\forall$-
5)	$P(x) \wedge V(x) \wedge U(x) \to P(x) \wedge U(x)$	化简
6)	$P(x) \wedge V(x) \wedge U(x) \to V(x)$	化简
7)	$P(x) \wedge V(x) \wedge U(x) \to P(x)$	化简
8)	$P(x) \wedge V(x) \wedge U(x) \to R(x)$	4）7）假言推理
9)	$(P(x) \wedge V(x) \wedge U(x) \to V(x)) \wedge (P(x) \wedge V(x) \wedge U(x) \to R(x))$	6)8)合取
10)	$P(x) \wedge V(x) \wedge U(x) \to R(x) \wedge V(x)$	9)置换
11)	$P(x) \wedge V(x) \wedge U(x) \to S(x)$	2)10)假言推理
12)	$(P(x) \wedge V(x) \wedge U(x) \to P(x) \wedge U(x)) \wedge (P(x) \wedge V(x) \wedge U(x) \to S(x))$	5)11)合取
13)	$P(x) \wedge V(x) \wedge U(x) \to P(x) \wedge S(x) \wedge U(x)$	12)置换
14)	$P(x) \wedge V(x) \wedge U(x) \to \exists x(P(x) \wedge S(x) \wedge U(x))$	13)$\exists$+
15)	$\exists x(P(x) \wedge V(x) \wedge U(x)) \to \exists x(P(x) \wedge S(x) \wedge U(x))$	14)$\exists$-
16)	$\exists x(P(x) \wedge V(x) \wedge U(x))$	前提引入
17)	$\exists x(P(x) \wedge S(x) \wedge U(x))$	15)16)假言推理

6. （10 分）

解、(1) $\forall x \in N, x+x$ 是偶数，有 xRx，R 自反.　　(2 分)

若$<x,y>\in R$，即 $x+y$ 是偶数，则 $y+x$ 是偶数，有$<y,x>\in R$，R 对称.　　(2 分)

若$<x,y>\in R$，$<y,z>\in R$，即 $x+y$ 是偶数，$y+z$ 是偶数，$x+z=(x+y)+(y+z)-2y$ 是偶数，有$<x,z>\in R$，R 满足传递性.　　(2 分)

因此，R 是一个等价关系.

(2) 关系 R 的等价类有：$[1]_R=\{1,3,5,...\}$，$[0]_R=\{0,2,4,6...\}$.　　(4 分)

7.　（10 分）

证明：

构造函数 $f: A\to B$ 如下：

$$f(x)=\begin{cases} 1 & x=1/2 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} & x=\left(\frac{1}{2}\right)^{n},\ n>1 \\ x & \text{其它} \end{cases}$$

可以证明 f 是一个双射函数，所以 A 与 B 等势.

8.　（10 分）

（1）证明：

任取 $f\in B^A$，对于任意的 $x\in A$，有 $f(x)\in B$，由函数的定义知，$f(x)=f(x)$，即 fRf，所以 R 具有自反性.　　(2 分)

任取 $f, g\in B^A$，若 fRg 且 gRf，则对于任意的 $x\in A$，都有 $f(x)\in B$，$g(x)\in B$，且 $f(x)\le g(x)$，$g(x)\le f(x)$. 因为$<B,\le>$是偏序集，所以$\le$具有反对称性，因此有 $f(x)=g(x)$. 根据函数的定义知 $f=g$. 所以 R 是反对称的.　　(2 分)

任取 $f, g, h\in B^A$，若 fRg 且 gRh，则对于任意的 $x\in A$，都有 $f(x), g(x), h(x)\in B$，且有 $f(x)\le g(x)$，$g(x)\le h(x)$. 因为$<B,\le>$是偏序集，所以$\le$具有传递性，因此有 $f(x)\le h(x)$，即 fRh. 所以 R 是传递的.　　(2 分)

因此 R 为 B^A 上的偏序关系.

(2) 偏序集$<B^A, R>$中的最大元为：$f(x)=b$.　　(4 分)