概率论与数理统计

第 1 讲

样本空间与随机事件

一. 确定性现象

在一定条件下必然发生（出现）某一结果的现象。

例 如

在地球上，太阳从东方升起；上抛物体一定下落；

在一个标准大气压下，水加热到100°会沸腾；

平面三角形的内角和为180°；

同性电荷一定不互相吸引。

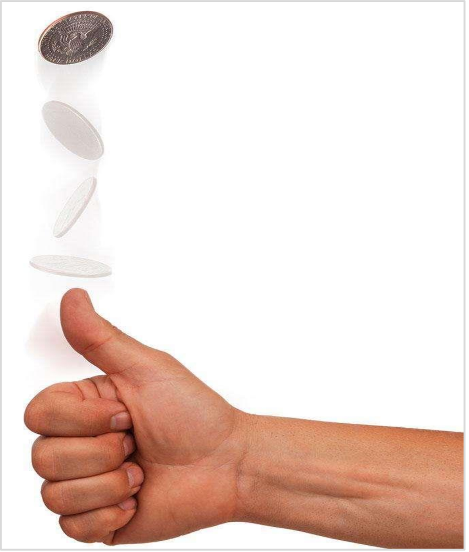
特点：在相同条件下，重复进行试验或观察，它的结果总是确定不变的。

二. 随机现象

在相同的条件下，重复进行试验或观察，它的结果未必是相同的。

且要求能够明确知道这类现象的所有可能的结果。

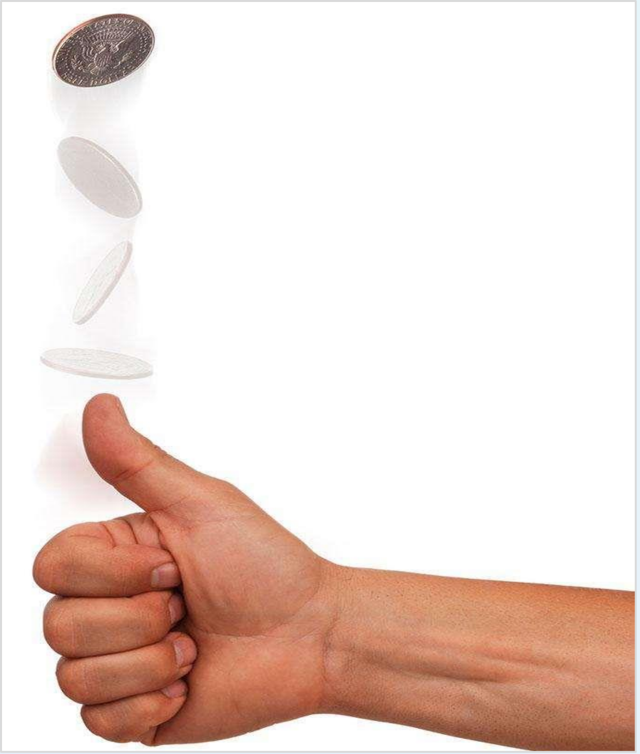
例如



随机现象是不是没有规律可言? 否

在一定条件下对随机现象进行大量观察会发现某种规律性.

例如：抛掷硬币的试验



多次抛掷同一枚硬币，观察到正面朝上的次数大致占一半。

例如：火炮在一定条件下的射击试验

个别炮弹的弹着点可能偏离目标而有随机性的误差，但大量炮弹的弹着点则表现出一定的规律性，如一定的命中率，一定的分布规律等等。

二. 随机现象

随机现象

- 就一次试验而言　偶然性，随机性，不可预测性
- 就大量试验而言　一定规律性

这种在大量重复试验或观察中，所呈现出的规律性称之为统计规律性。

二. 随机现象

正是由于随机现象在大量试验下呈现出统计规律性，由此确定了概率论研究随机现象独特的方法。

它不是企图追索出现每一结果的一切物理因素，从而像研究确定性现象那样确定无疑地预报出在哪些条件下出现某一确定的结果，而是通过对随机现象的大量试验，揭示其统计规律性。

概率论与数理统计是研究和揭示随机现象统计规律性的一门数学学科。

起源于赌博

一种看似无益的活动（赌博），可以产生人类文明极为有价值的副产物

三. 随机试验（Random Experiment）

对随机现象进行一次观察或试验，统称为随机试验，简称试验，用E表示。

例 如

E_1：掷一枚硬币，观测正面H、反面T出现的情况；

E_2：将一枚硬币抛掷三次，观测正面H、反面T出现的情况；

E_3：将一枚硬币抛掷三次，观测出现正面的次数；

不同的试验由试验条件和观测目的加以区分

三. 随机试验（Random Experiment）

特 点：

1. 试验可以在相同的条件下重复进行； **可重复性**

2. 每次试验的全部可能结果不止一个，并且在试验之前能够明确知道所有可能的结果； **可预知性**

3. 每次试验必发生全部可能结果中的一个且仅发生一个，但在进行某次试验前，不能确定哪个结果会出现。 **随机性**

关于可预知性做一个简短的说明

在不少情况下，我们不能确切知道一个试验的全部可能结果，但可以知道它不超出某个范围，这时可以用这个范围作为该试验的全部可能结果。

例 如

E_4: 某网站每天被点击的次数

不容易确定网站的点击次数上限的确切值，但它肯定是自然数中的某个值，因此可以将试验的可能结果取为所有的自然数。

三. 随机试验（Random Experiment）

在不少情况下，我们不能确切知道一个试验的全部可能结果，但可以知道它不超出某个范围，这时可以用这个范围作为该试验的全部可能结果。

例如

E_5: 某一地区明天下午5：00之前的降雨量（以毫米为单位）

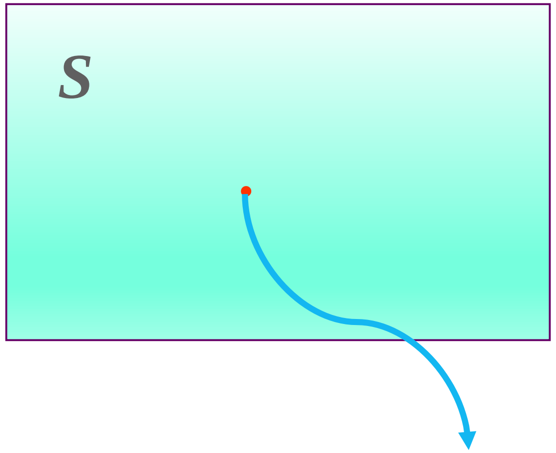
无法确定降雨量的确切范围，但可以把这个范围取为（$0,+\infty$），它总能包含一切可能的试验结果，尽管我们明知某些结果不会发生，如降雨量大于100000。

四. 样本空间

随机试验E的所有可能结果组成的集合，称为E的样本空间，用S表示，记为

$$S=\{\omega \mid \omega\text{为}E\text{的可能结果}\}$$

样本空间的元素ω称为样本点



样本点ω

注意：样本点ω的完备性和互斥性特点

四. 样本空间

E_1：掷一枚硬币，观测正面H、反面T出现的情况；

用ω_1表示正面H朝上，ω_2表示反面T 朝上

$S_1=\{\omega_1，\omega_2\}$　　$S_1=\{$正面，反面$\}$　　$S_1 = \{ H, T \}$

E_2：将一枚硬币抛掷三次，观测正面H 、反面T出现的情况；

$S_2 = \{ HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT \}$

E_3：将一枚硬币抛掷三次，观测出现正面的次数；

$S_3 = \{ 0, 1, 2, 3 \}$

四. 样本空间

E_4：掷一枚骰子，观测出现的点数；

$S_4 = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$

E_5：某网站每天被点击的次数；

$S_5 = \{ 0, 1, 2, 3, ... \}$

E_6：在一批灯泡中任意抽取一只，测试其寿命；

用t表示取出的电子元件的寿命，则 $S_6 = \{ t \mid t \geq 0 \}$

四. 样本空间

E_7：某一地区明天下午5：00之前的降雨量（以毫米为单位）；

用x表示降雨量，则 $S_7=\{x|\ x\geq 0\}$

E_8：在一批炮弹中任意抽取一枚射击，观测其弹着点的位置。

用(x, y)表示弹着点的位置，设射击目标为坐标原点，则

$$S_8=\{\ (x, y)|(x, y)\in G\subset R^2\ \}$$

在进行随机试验时，人们常关心的是试验全部可能结果中的某一确定部分，也即满足某种条件的那些样本点所组成的集合。

例 如

在E_6中，若规定某种灯泡的寿命(小时)小于8000为次品，我们常关心灯泡的寿命是否为$t \geq 8000$。满足这一条件的样本点组成S的一个子集。

$$A = \{ t \mid t \geq 8000 \}$$

这样的子集称为随机事件

五. 随机事件

随机试验E的样本空间的某些子集称为随机事件，简称为事件。它常用大写字母A，B，C 等表示。

注 意

1. 任意随机事件都是样本空间的某一个子集。反之，不一定成立。
2. 当S中包含的样本点的个数为有限个或无穷可数个时，一般认为S的所有子集都是事件；当S中的样本点的个数为无穷不可数时，有些S的子集必须排除在外，但这种情况在实际中几乎不会遇到。

五. 随机事件

事件的发生： 在一次试验中，事件A发生的含义是，当且仅当A中一个样本点发生或出现。事件A发生也称为事件A出现。

例 如　E_4：掷一枚骰子，观测出现的点数。

则样本空间为：$S_4 = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$

定义事件A表示掷出偶数点，用S的子集可表示为：$A = \{ 2, 4, 6 \}$

若在一次试验中，掷出的点数为2，4，6中的一个，则此次试验事件A发生；若掷出的点数为1，3，5中的一个，则此次试验事件A不发生。

五. 随机事件

必然事件

S： 在每次试验中必出现S中一个样本点，即在每次试验中S必发生

不可能事件

ϕ：在每次试验中，所出现的样本点都不在ϕ中，即在每次试验中ϕ都不发生

基本事件

由一个样本点组成的单点集，记为$\{\omega\}$

六. 事件的关系与运算

事件是样本空间的子集，因此，事件是一个集合，它们之间的关系和运算自然按照集合之间的关系和运算来处理。

注 意

这些关系和运算在概率论中的提法，并根据“事件发生的含义”，给出它们在概率论中的含义。

六. 事件的关系

（1）若$A\subset B$，则称事件B包含事件A，或者称事件A包含于事件B。

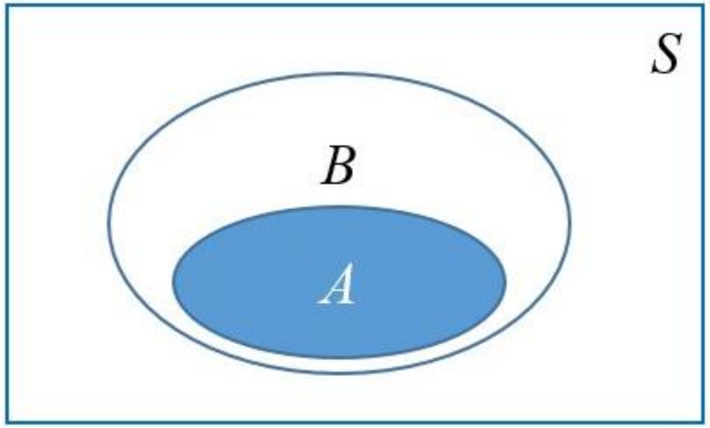
事件A发生必然导致B发生。

也可以说：若由A能推出B，则$A\subset B$

如：设X为变量，c为常数。

由$X-3<c \Rightarrow X-4<c$

$\therefore \quad A=\{X-3<c\}\subset B=\{X-4<c\}$



(2）若$A\subset B$，$B\subset A$，则称事件A与事件B相等，记为$A=B$。

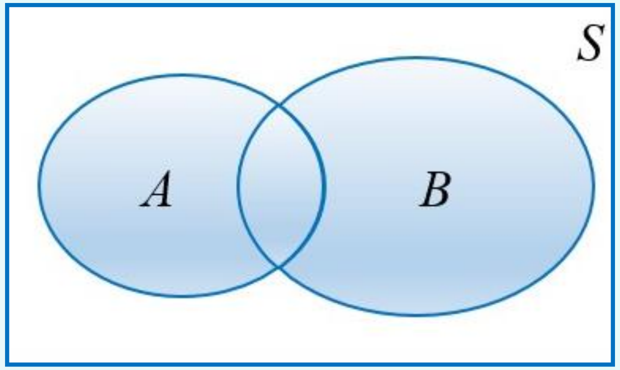
若由A能推出B，且由B能推出A，则说明A与B相等。

此时，事件A和B含有相同的样本点，也就是说，他们完全是同一个事件，只不过是表面上看来两种不同的表述而已。

例如：掷两颗骰子，令A表示“两次得到的点数一次为奇数点一次为偶数点”，B表示“两次得到点数之和为奇数”。

（3）事件$A\cup B$称为事件A与事件B的并（和）事件。

当且仅当A、B中至少有一个发生时，事件$A\cup B$发生。



“A、B中至少有一个发生”，“A发生或 B发生”与“事件$A\cup B$发生”是等价的。

例如：甲、乙二人同时向一目标射击，设A表示甲命中目标，B表示乙命中目标，C 表示目标被命中。

则 $C=A\cup B$

类似地：

称 $\bigcup_{k=1}^{n} A_k$ 为n个事件$A_1, A_2, \dots, A_n$的和事件。

表示在一次试验中，n个事件A_1，A_2，…，A_n至少有一个发生。

称 $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ 为无穷可列个事件$A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$的和事件。

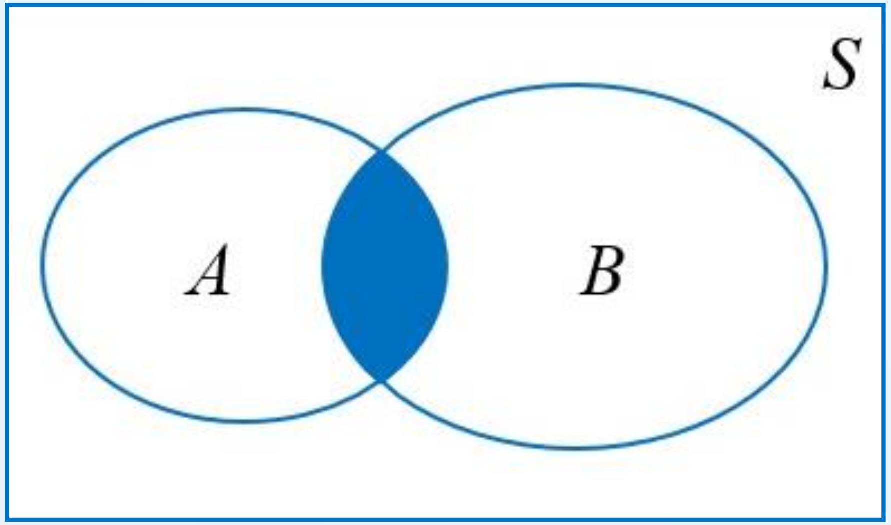
表示在一次试验中，无穷可列个事件A_1，A_2，…，A_n，…至少有一个发生。

六. 事件的关系

（4）事件$A\cap B$称为事件A与事件B的交（积）事件，也记作AB。

当且仅当A、B同时发生时，事件AB发生。

“事件A和事件B同时发生”，“A和B都发生”与“事件AB发生”是等价的。



类似地：

称 $\bigcap_{k=1}^{n} A_k$ 为n个事件$A_1, A_2, \dots, A_n$的积事件。

表示在一次试验中， n个事件$A_1, A_2, \dots, A_n$同时发生。

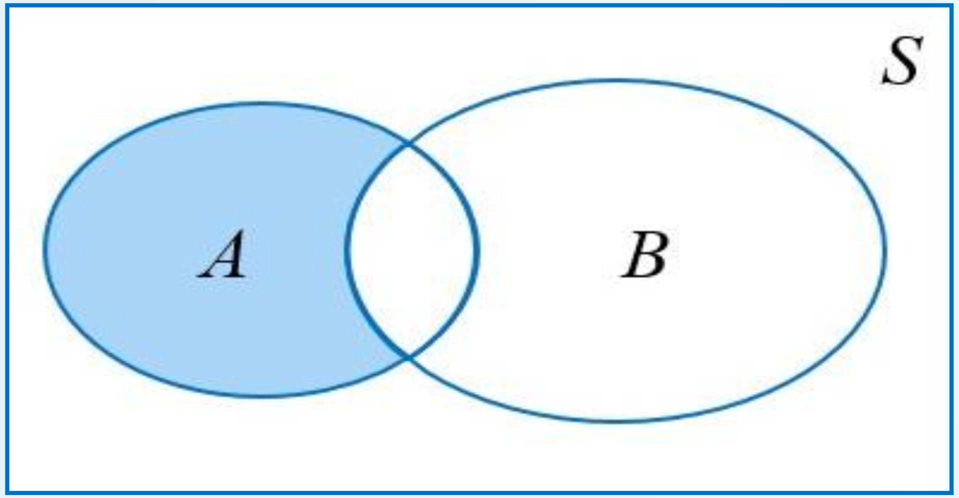
称 $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ 为可列个事件$A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$的积事件。

表示在一次试验中，无穷可列个事件$A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$同时发生。

六. 事件的关系

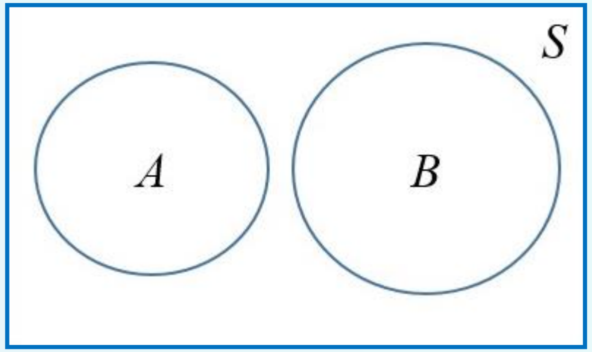
（5）事件$A-B$称为事件A与事件B的差事件。

当且仅当A发生，B不发生时，事件$A-B$发生。



(6)若$A\cap B=\phi$，称事件A与B为互不相容或互斥事件。

即：A和B不能同时发生。



类似地：

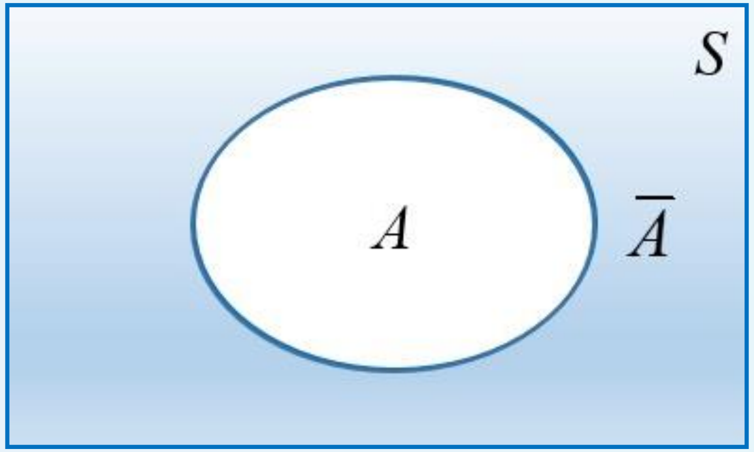
若n个事件$A_1, A_2,\ldots, A_n$中任意两个都是互不相容的，则称这n个事件是互不相容的。

若可列个事件$A_1, A_2,\ldots, A_n,\ldots$中任意两个事件是互不相容的，则称这可列无穷多个事件是互不相容的。

（7）若$A \cup B=S$，$A \cap B=\phi$，称事件A与事件B为对立事件。

在每次试验中，事件A、B中必有一个发生，且仅有一个发生。

事件A的对立事件常记为 $\overline{A}$，表示A不发生。 $\overline{A} = S - A$



六. 事件的关系

注 意

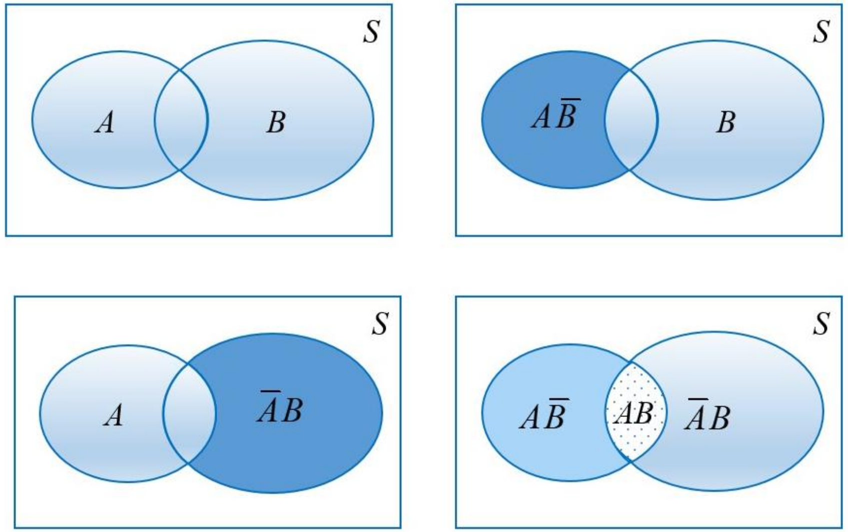
1 两个对立事件肯定是互斥事件，反之不一定成立；

2 差事件有如下的等价表示方法

$$A - B = A\bar{B} = A - AB$$

3 和事件可以表示为互斥事件的和

$$A \cup B = A\bar{B} \cup B = \bar{A}B \cup A = A\bar{B} \cup AB \cup \bar{A}B$$



六. 事件的关系与运算

交换律

$A\cup B = B\cup A \qquad A\cap B = B\cap A$

结合律

$A\cup(B\cup C) = (A\cup B)\cup C \qquad A\cap(B\cap C) = (A\cap B)\cap C$

分配律

$A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C) \qquad A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C)$

德摩根律

DeMorgam's law

$$\overline{A\cup B} = \bar{A}\cap\bar{B} \qquad \overline{A\cap B} = \bar{A}\cup\bar{B}$$

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \bar{A}_i \qquad \overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \bar{A}_i$$

七. 例题

例1. 从一批产品中任取两件，观察合格品的情况. 记A={ 两件产品都是合格品 }，B_i = { 取出的第i件是合格品 }，i =1，2.

问：（1）$\bar{A}$ 如何表述；（2）如何用B_i表示A和$\bar{A}$。

解：（1）$\bar{A}$ ={ 两件产品不都是合格品}

也可叙述为：{ 两件产品中至少有一个是不合格品 }

它又可写为两个互斥事件之和：

{ 两件产品中恰有一个是不合格品}∪{两件产品都是不合格品 }

（2）$A=B_1B_2$ $\quad \bar{A}=\overline{B_1B_2}=\bar{B}_1\cup\bar{B}_2=\bar{B}_1\cup\bar{B}_2=\bar{B}_1\bar{B}_2\cup B_1\bar{B}_2\cup\bar{B}_1B_2$

例2. 设A、B、C 为三个事件，用A、B、C 的运算关系表示下列各事件。

(1) A发生，B与C 不发生；　$A-B-C$ 或 $A\bar{B}\bar{C}$

(2) A与B都发生，而C 不发生；　$AB-C$ 或 $AB\bar{C}$

(3) A、B、C 都发生；　ABC

(4) A、B、C 中至少有一个发生　$A\cup B\cup C$ 或

$A\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}B\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}C$　$\cup AB\bar{C}\cup A\bar{B}C\cup\bar{A}BC$　$\cup ABC$

恰有1个发生　恰有2个发生　3个都发生

例2. 设A、B、C 为三个事件，用A、B、C 的运算关系表示下列各事件。

（5）A、B、C 中至少有两个发生

恰有2个发生 → $AB\bar{C}\cup A\bar{B}C\cup \bar{A}BC$ $\cup ABC$ ← 3个都发生

或 $AB\cup BC\cup AC$

（6）A、B、C 都不发生 $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ 或 $\overline{A\cup B\cup C}$

例3. 袋中装有2只白球和1只黑球，从袋中依次任意地摸出2只球，设球是编号的：白球为1号、2号，黑球为3号。(i, j)表示第一次摸得i号球，第二次摸得j号球。则这一试验的样本空间为：

$$S=\{(1,2), (1,3), (2,1), (2,3), (3,1), (3,2)\}$$

如下随机事件的含义为：

$A=\{(3,1),(3,2)\}$ ={ 第一次摸得黑球 };

$B_1=\{(1,2),(1,3),(2,1),(2,3)\}$ ={ 第一次摸得白球 };

七. 例题

例3. 袋中装有2只白球和1只黑球，从袋中依次任意地摸出2只球，设球是编号的：白球为1号、2号，黑球为3号。(i, j)表示第一次摸得i号球，第二次摸得j号球。则这一试验的样本空间为：

$$S=\{(1,2),(1,3),(2,1),(2,3),(3,1),(3,2)\}$$

如下随机事件的含义为：

$B_2=\{(1,2),(2,1),(3,1),(3,2)\}$ ={ 第二次摸得白球 }

$C=\{(1,2),(2,1)\}$ ={ 两次都摸得白球 }={ 没有摸到黑球 }

$D=\{(1,3),(2,3)\}$ ={ 第一次摸得白球，第二次摸得黑球 }

作业：1，2，3，4

第 1 讲

谢谢观看