

2017 级离散数学 II 期末试题 (A 卷)

班级 _____ 学号 _____ 姓名 _____ 成绩 _____

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	总分
得分									

一、判断题: (每小题 1 分, 共 6 分)

- 1、在命题逻辑中, 任何命题公式的主合取范式都是存在的, 并且是唯一的。 (N)
(永真式不存在)
- 2、以下两个谓词公式存在等价关系: $\forall x(A(x) \vee B(x)) \Leftrightarrow \forall x A(x) \vee \forall x B(x)$ 。 (N)
- 3、若 $A \subseteq B$, 则 $A \cap C \subseteq B \cap C$ 。 (Y)
- 4、如果一个群不是 Abel 群, 那么这个群中的任意两个元素之间的运算都不可交换。 (N)
- 5、设无向图 G 具有割点, 则 G 中一定不存在哈密尔顿通路。 (NG)
- 6、如果能将无向图 G 画在平面上, 若边与边之间有交叉, 则 G 必为非平面图。 (N)

二、填空题 (每空 2 分, 共 22 分)

- 1、公式 $((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)) \Leftrightarrow (p \leftrightarrow q)$ 的类型是 ____ 永真式 ____。
- 2、设 $F(x)$: x 是人, $H(x, y)$: x 与 y 一样高, 在一阶逻辑中, 命题“人都不一样高”的符号化形式为 ____ $(\forall x)(\forall y)(F(x) \wedge F(y) \rightarrow \neg H(x, y))$ ____。
- 3、 $(\exists x)(\neg((\exists y)P(x, y)) \rightarrow ((\exists z)Q(z) \rightarrow R(y)))$ 的前束范式是:
____ $(\forall x)(\exists w)(\forall z)(P(x, w) \vee \neg Q(z) \vee R(y))$ ____。
- 4、 S, T 为集合, ϕ 为空集, 那么 $(S - T = \phi) \rightarrow S = T$ 的真值为 ____ 1 ____。
- 5、某班有 54 个学生, 其中有 29 人买了语文参考书, 有 22 人买了数学参考书, 有 11 人两种书都没有买。那么既买了语文书又买了数学书的人有 ____ 8 ____ 个。
- 6、设 $A = \{a, b, c, d\}$, A 上关系 $P = \{\langle a, a \rangle, \langle a, b \rangle, \langle b, d \rangle, \langle d, c \rangle\}$, 则
 $P^2 =$ ____ $\{\langle a, a \rangle, \langle a, b \rangle, \langle a, d \rangle, \langle b, c \rangle\}$ ____。
- 7、设集合 $A = \{a, b, c\}$ 上定义了两个二元运算 * 和 \circ , 其运算表如下:

*	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

◦	a	b	c
a	a	b	c
b	a	b	c
c	a	b	c

则满足交换律且有幺元的是运算 $_ * _$; 有幂等性且不满足交换律的运算是 $_ \circ _$ 。

8、假定连通平面图有 10 个顶点，每个顶点的度数皆为 2，则该平面图的面数为 2 个。

9、设 G_1, G_2, G_3, G_4 都是 4 阶 3 条边的无向简单图，则它们之间至少有 2 个是同构的。

10、图 G 是由 5 棵树构成的一森林， G 有 20 个顶点，那么 G 有 15 条边。

三、解答题 (34 分)

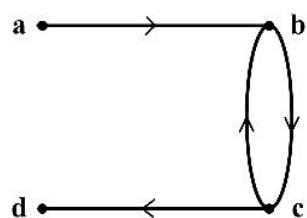
1、(6 分) 给定解释如下：

$$(1) D = \{2,3\} \quad (2) a = 2 \quad (3) f(2) = 3, f(3) = 2$$

$$(4) F(x) : F(2) = 0, F(3) = 1 ; \quad G(x, y) : G(i, j) = 1, i, j = 2, 3$$

求公式 $\forall x(F(x) \wedge G(x, a))$ 和 $\exists x(F(f(x) \wedge G(x, f(x)))$ 的值。

2、(6 分) 设 $A = \{a, b, c, d\}$, R 是 A 上的二元关系，其关系图如下所示，试用关系矩阵求最小自然数 s, t ，使 $s < t$ 且 $R^s = R^t$ 。

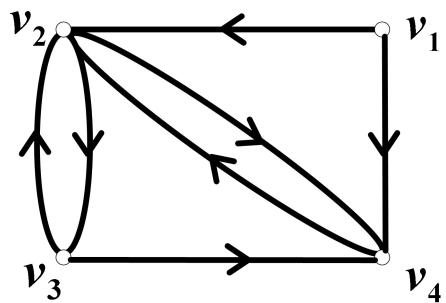


3、(8 分) 设代数系统 $V = \langle Z_6, \otimes \rangle$, $Z_6 = \{0, 1, \dots, 5\}$, \otimes 为模 6 乘法。

- (1) 求出所有可逆元素关于 \otimes 运算的逆元。
- (2) 说明 V 构成什么代数系统。为什么？

4、(10分) 给出一个如右图所示的有向连通图 G 。

- (1) 写出它的邻接矩阵 A ;
- (2) 写出它的可达矩阵;
- (3) 图中长度为 3 的回路一共有多少条?
- (4) 其中长为 4 的通路一共有几条?
- (5) 从 v_2 到 v_3 有几条长为 4 的通路?



5、(4分) 求出以 2, 5, 11, 23, 31, 47, 59, 79 为给定权的最优二叉树。

四、证明题 (每小题 7 分, 共 28 分)

1、证明下面的蕴含式 (方法不限): $((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)) \Rightarrow (P \rightarrow R)$

2、设 A, B, C 为任意集合, 已知 $A \cap C \subseteq B \cap C$, 并且 $A - C \subseteq B - C$, 证明: $A \subseteq B$

3、设 $\langle G, * \rangle$ 是任一群, 定义 $R \subseteq G \times G$ 为 $R = \{ \langle \sigma, \varphi \rangle \mid \exists \theta \in G, \varphi = \theta * \sigma * \theta^{-1} \}$,
试证 R 是 G 上的等价关系。

4、设 G 是无向连通简单图, 已知 $\delta(G) \geq 2$ 。证明: G 中存在长度大于等于 3 的初级回路。

五、应用题 (10 分)

三人估计比赛结果, 甲说 “A 第一, B 第二。”; 乙说 “C 第二, D 第四。”; 丙说 “A 第二, D 第四。”; 结果三人估计的都不全对, 但都对了一半, 求 A、B、C、D 的名次。