概率论与数理统计

第 3 讲

概率的公理化定义与性质、 条件概率与乘法公式

一. 概率的公理化定义

柯尔莫哥洛夫

Колмогóров (1903-1987)

1933年提出了举世公认的概率的公理化体系，从而明确定义了概率论的基本概念，使概率论成为一门严谨的数学分支，为现代概率论的蓬勃发展奠定了坚实的基础。

一. 概率的公理化定义

把那些是随机事件的样本空间的子集（包括样本空间S本身和不可能事件ϕ）组成一个大的集合，称之为事件域，记为$\Im$。

事件域$\Im$中的元素是事件，且是样本空间的子集，不在$\Im$中的样本空间的子集就不是事件。因此只需要对在事件域$\Im$中的事件给出概率值即可。

$$\left.\begin{array}{l}\text{古典定义}\\ \text{几何定义}\\ \text{频率定义}\end{array}\right\}\ P:\ A \to P(A) \to \text{性质}\left\{\begin{array}{l}\text{非负性}\\ \text{规范性}\\ \text{可加性}\end{array}\right.$$

一. 概率的公理化定义

定义： 设试验E的样本空间为S， $\mathscr{F}$为事件域，P为定义在事件域$\mathscr{F}$上的一维实函数

$$P:\ \mathscr{F} \to \mathrm{R}^1$$
$$A \to P(A)$$

该一维实函数满足下面三条公理：

公理1： 对任一事件A，有$P(A)\geq 0$；　　**公理2：** 对必然事件S，有$P(S)=1$；

公理3： 若事件$A_1, A_2, \ldots, A_k, \ldots$互不相容，则有 $P(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)$

称$P(A)$为事件A的概率， 称$(S, \mathscr{F}, P)$为一概率空间。

一. 概率的公理化定义

01 概率是定义域为事件域$\mathscr{F}$的函数，而事件域中的元素是集合，所以概率是一个集函数。

02 只要给出一个定义在事件域上的集函数且满足这三条公理，就可以被称为概率；当这个函数不能满足上述三条公理中任一条，就被认为不是概率。

03 概率的公理化定义只是界定了概率这个概念所必须满足的一般性质，它没有告诉人们在特定场合下如何确定概率的问题，它的意义在于它为一种普遍而严格的数学化概率理论奠定了基础。

1. $P(\phi)=0$

证明： 令 $A_n=\phi$ $(n=1,2,\ldots)$，则 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n=\phi$

$$A_iA_j=\phi\cap\phi=\phi, i\neq j, i,j=1,2,\ldots$$

由可列可加性知： $P(\phi)=P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)=\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)=\sum_{n=1}^{\infty} P(\phi)$

$$\therefore P(\phi)=0$$

2. 有限可加性　若$A_1, A_2, \ldots, A_n$互不相容，则 $P(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k)$

证明：令 $A_{n+1} = A_{n+2} = \ldots = \phi$，则有 $A_i A_j = \phi, i \neq j, i, j = 1, 2, \ldots$

由可列可加性知：$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \cup (\bigcup_{i=n+1}^{\infty} A_i)) = P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$

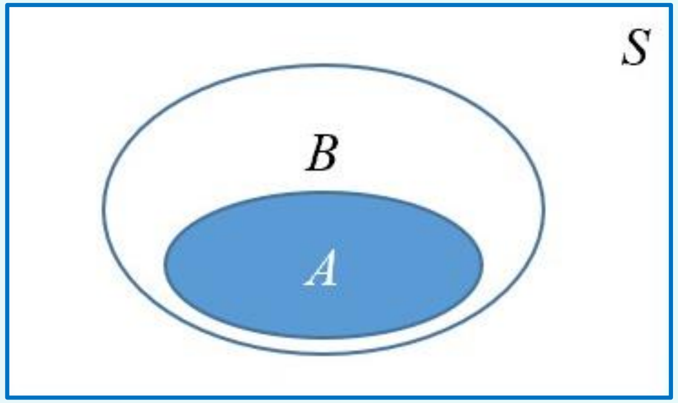
$$= \sum_{i=1}^{n} P(A_i) + \sum_{i=n+1}^{\infty} P(A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) + 0 = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

3. 对事件A，有 $P(A) = 1 - P(\bar{A})$

二. 概率的性质

4. 若$A\subset B$，则有$P(B-A)=P(B)-P(A)$。

证明： $A\subset B$ $\therefore B=A\cup(B-A)$，且 $A\cap(B-A)=\phi$



由有限可加性： $P(B)=P(A)+P(B-A)$

$$P(B-A)=P(B)-P(A)$$

推论： 若$A\subset B$，$P(A)\le P(B)$；任意事件A，$P(A)\le 1$。

二. 概率的性质

5. 对任何两个事件A和B，都有 $P(B-A)=P(B\bar{A})=P(B)-P(AB)$

证明：易知 $B-A=B-AB=B\bar{A}$ 　且 $AB\subset B$

由性质4可得: $P(B-AB)=P(B)-P(AB)$

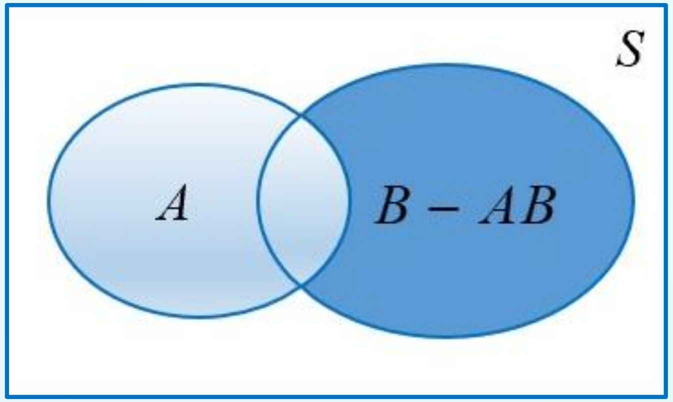
即有:

$$P(B-A)=P(B\bar{A})=P(B)-P(AB)$$

6. 对任意两个事件A和B，都有 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

证明：由事件的关系和运算知:

$$A\cup B=A\cup(B-AB)\ \text{且}\ A\cap(B-AB)=\phi$$



由有限可加性及性质5可得:

$$P(A\cup B)=P(A\cup(B-AB))=P(A)+P(B-AB)$$

$$=P(A)+P(B)-P(AB)$$

二. 概率的性质

7. 对任意n个事件$A_1, A_2, \dots, A_n$，都有

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)=\sum_{k=1}^{n} P(A_k)-\sum_{1\le k_1<k_2\le n} P(A_{k_1}A_{k_2})+\cdots+$$

$$(-1)^{m-1}\sum_{1\le k_1\le\cdots\le k_m\le n} P(A_{k_1}A_{k_2}\cdots A_{k_m})+\cdots+(-1)^{n-1}P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right)$$

特别地，对任意3个事件A_1, A_2, A_3，都有

$$P(A_1\cup A_2\cup A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_1A_2)-P(A_1A_3)-P(A_2A_3)+P(A_1A_2A_3)$$

例1. 已知$P(A)=p$, $P(B)=q$, $P(AB)=r$, 求下列各事件的概率：$\bar{A}\cup\bar{B}$, $\bar{A}B$, $\bar{A}\cup B$, $\bar{A}\bar{B}$

解：

$$P(\bar{A}\cup\bar{B})=P(\overline{A\cap B})=1-P(AB)=1-r$$

$$P(\bar{A}B)=P(B-A)=P(B)-P(AB)=q-r$$

$$P(\bar{A}\cup B)=P(\bar{A})+P(B)-P(\bar{A}B)=1-p+q-(q-r)=1-p+r$$

$$P(\bar{A}\bar{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-P(A)-P(B)+P(AB)=1-p-q+r$$

例2. 设元件盒中装有50个电阻，20个电感，30个电容，从盒中任取30个元件，求所取元件中至少有一个电阻同时至少有一个电感的概率。

解： 设A={ 所取元件中至少有一电阻 }, B={ 所取元件中至少有一电感 }

所求概率为$P(AB)$

$$P(AB)=1-P(\overline{AB})=1-P(\bar{A}\cup\bar{B})=1-[P(\bar{A})+P(\bar{B})-P(\bar{A}\bar{B})]$$

$$=1-[\frac{C_{50}^{30}}{C_{100}^{30}}+\frac{C_{80}^{30}}{C_{100}^{30}}-\frac{C_{30}^{30}}{C_{100}^{30}}]=0.9997$$

例3. 甲、乙两人先后从52张牌中各抽取13张，求甲或乙拿到4张A的概率。

（1）甲抽后不放回，乙再抽；（2）甲抽后将牌放回，乙再抽。

解：设A={ 甲拿到4张A }，B={ 乙拿到4张A }　所求为$P(A\cup B)$

（1）A、B互斥

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{C_{48}^{9}}{C_{52}^{13}}+\frac{C_{48}^{13}C_{35}^{9}}{C_{52}^{13}C_{39}^{13}}=0.005282$$

（2）A、B相容

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{2C_{48}^{9}}{C_{52}^{13}}-\frac{C_{48}^{9}C_{48}^{9}}{C_{52}^{13}C_{52}^{13}}=0.005275$$

例4. 配对问题 某人将三封写好的信随机装入三个写好地址的信封中，问至少有一封信装对地址的概率是多少?

解： 设A={ 至少有一封信装对地址 }，A_i={ 第i封信装入第i个信封 } $i=1,2,3$

则 $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$　　易知 $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \dfrac{2!}{3!} = \dfrac{1}{3}$

$$P(A_1A_2) = P(A_1A_3) = P(A_2A_3) = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6} \qquad P(A_1A_2A_3) = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}$$

所以有
$$\begin{aligned} P(A) &= P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) \\ &= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1A_2) - P(A_1A_3) - P(A_2A_3) + P(A_1A_2A_3) \\ &= 3\cdot\frac{2!}{3!} - 3\cdot\frac{1}{3!} + \frac{1}{3!} = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

三. 条件概率

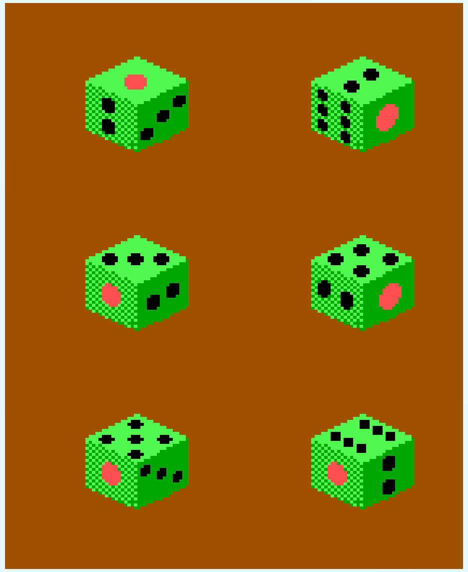
在实际应用中，除了要研究事件A的概率$P(A)$之外，有时还需要研究在事件B已经发生的条件下，事件A发生的概率。**我们称这种概率为事件B已经发生的条件下事件A发生的条件概率，记为$P(A|B)$。**

一般来说： $P(A|B) \neq P(A)$

三. 条件概率

例 如 掷一颗均匀骰子，A={掷出2点}，B={掷出偶数点}，求$P(A)$和$P(A|B)$。

掷骰子



样本空间为$S=\{1,2,3,4,5,6\}$，而$A=\{2\}$。即： $P(A)=1/6$

已知事件B发生，此时试验所有可能结果构成的集合就是B，因此B成为新的样本空间，而B中共有3个元素$\{2, 4, 6\}$，它们的出现是等可能的，其中只有1个在集A中。

于是 $P(A|B)= 1/3 \neq P(A)=1/6$

三. 条件概率

条件概率$P(A|B)$实质是缩减的样本空间上的事件的概率，由于已知事件B已经发生，试验条件发生了改变，原样本空间S缩减为B，需在该空间上计算事件A发生的概率。

可以证明，在古典概型下，若$P(B)>0$，有 $P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}$

条件概率的定义

设A、B是两个事件，且$P(B)>0$，则称 $P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}$

为在事件B发生的条件下，事件A的条件概率。

条件概率的性质

设B是一事件，且$P(B)>0$，则$P(.|B)$满足概率的三条公理，即

（1）非负性：对任一事件A，$P(A|B)\geq 0$；

（2）规范性：$P(S|B)=1$；

（3）可列可加性：设 $A_1,\ldots,A_n\ldots$互不相容，则 $P(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i|B)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i|B)$

条件概率$P(.|B)$ 也具有三条公理导出的一切性质

如 $P(\bar{A}|B)=1-P(A|B)$ $\quad$ $P(A\cup C|B)=P(A|B)+P(C|B)-P(AC|B)$

例5. 一盒子装有4只产品，其中3只一等品，1只二等品。从中取产品2次，每次任取一件，做不放回抽样。设事件A为“第一次取到的是一等品”，事件B为“第二次取到的是一等品”，试求$P(B|A)$。

解法1：用定义 $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{A_3^2/A_4^2}{A_3^1A_3^1/A_4^2}=\dfrac{2}{3}$

解法2：$\boxed{A}$ 4 < 3 一等品，1 二等品　$\boxed{B|A}$ 3 < 2 一等品，1 二等品

$\therefore\quad P(B|A)=\dfrac{2}{3}$

例6. 已知 $P(A)=a, P(B)=b, P(B|\bar{A})=c$ 且$a<1, b<1$。求$P(A|\bar{B})$

解：由条件概率的定义得：

$$P(B|\bar{A})=\frac{P(B\bar{A})}{P(\bar{A})}=\frac{P(B)-P(AB)}{1-P(A)}=\frac{b-P(AB)}{1-a}=c$$

所以有 $P(AB)=b-c(1-a)$

故有 $$P(A|\bar{B})=\frac{P(A\bar{B})}{P(\bar{B})}=\frac{P(A)-P(AB)}{1-P(B)}=\frac{a-b+c(1-a)}{1-b}$$

四. 乘法定理

设有两个事件A和B，如果$P(B)>0$，则有$P(AB)=P(B)P(A|B)$　　(1)

如果$P(A)>0$，则有 $P(AB)=P(A)P(B|A)$　　(2)

公式（1）和（2）均称为**概率的乘法公式或乘法定理**。

乘法公式容易推广到多个事件的积事件的情况，如：

设A, B, C为事件，且$P(AB)>0$，则有 $P(ABC)=P(A)P(B|A)P(C|AB)$

一般地，设$A_1, A_2, \ldots, A_n$为$n(n \geq 2)$个事件，且$P(A_1A_2\ldots A_{n-1})>0$，则有

$$P(A_1A_2\ldots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)\ldots P(A_n|A_1A_2\ldots A_{n-1})$$

四. 乘法定理

例6. 一场精彩的足球赛将要举行，5个球迷好不容易才搞到一张入场券。 大家都想去，只好用抽签的方法来解决。

入
场
券

解： 用 A_i 表示"第i个人抽到入场券" $i=1, 2, 3, 4, 5$。

则 $\bar{A}_i$ 表示"第i个人未抽到入场券"

显然，$P(A_1)=1/5$　也就是说，第1个人抽到入场券的概率是1/5。

四. 乘法定理

由于 $A_2 = \bar{A}_1 A_2$

若第2个人抽到了入场券，第1个人肯定没抽到。

由乘法公式 $P(A_2) = P(\bar{A}_1 A_2) = P(\bar{A}_1)P(A_2 \mid \bar{A}_1) = \frac{4}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{5}$

$\boxed{\bar{A}_1}$ 5：1 入场卷；4 空 白

$\boxed{A_2 \mid \bar{A}_1}$ 4：1 入场卷；3 空 白

同理，第3个人抽到“入场券”，必须第1，第2个人都没有抽到。

因此$A_3=\bar{A}_1\bar{A}_2A_3$

$$P(A_3)=P(\bar{A}_1\bar{A}_2A_3)=P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2\mid\bar{A}_1)P(A_3\mid\bar{A}_1\bar{A}_2)=\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{5}$$

$\boxed{\bar{A}_1}$ 5 < 1 入场卷；4 空白

$\boxed{\bar{A}_2\mid\bar{A}_1}$ 4 < 1 入场卷；3 空白

$\boxed{A_3\mid\bar{A}_1\bar{A}_2}$ 3 < 1 入场卷；2 空白

继续做下去就会发现，每个人抽到“入场券”的概率都是1/5。

也就是说“抽签与顺序无关”。

例7. 一个袋子中装有a个红球，b个白球，依次做不放回的抽取，每次抽取一个，求第k次取到红球的概率。

解： 利用抽签原理，相当于共有$a+b$个签， a个真签，b个空白签。

由于抽签与顺序无关，所以第k次取到红球的概率与第1次取到红球的概率相同，概率为：

$$\frac{a}{a+b}$$

例8. 设袋子中装有r只红球，t只个白球，每次自袋中任取一只球，观察其颜色后放回，并再放入a只与所取出的那只球同色的球，若在袋中连续取球四次，试求第一、第二次取到红球且第三、第四次取到白球的概率。

解：设 A_i (i=1,2,3,4) 表示“第i次取到红球”，则

$$P(A_1A_2\bar{A}_3\bar{A}_4) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(\bar{A}_3|A_1A_2)P(\bar{A}_4|A_1A_2\bar{A}_3)$$

$$= \frac{r}{r+t}\cdot\frac{r+a}{r+t+a}\cdot\frac{t}{r+t+2a}\cdot\frac{t+a}{r+t+3a}$$

此模型被波利亚用来作为描述传染病的数学模型。

作业： 17, 23, 25, 26, 29, 30

第 3 讲

谢谢观看