

## 2019 级离散数学 II 期末试题 (A 卷)

班级\_\_\_\_\_ 学号\_\_\_\_\_ 姓名\_\_\_\_\_ 成绩\_\_\_\_\_

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	总分
得分									

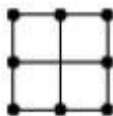
## 1. 选择题 (共 10 题, 每题 1 分)

- 1) 设  $F(x)$  表示  $x$  是火车,  $G(y)$  表示  $y$  是汽车,  $H(x,y)$  表示  $x$  比  $y$  快, 则命题“有的汽车比所有的火车快”符号化为下面哪个公式? ( )
- A.  $\exists y(G(y) \rightarrow \forall x(F(x) \wedge H(x,y)))$       B.  $\exists y(G(y) \wedge \forall x(F(x) \rightarrow H(y,x)))$   
 C.  $\forall x \exists y(G(y) \rightarrow (F(x) \wedge H(x,y)))$       D.  $\exists y(G(y) \rightarrow \forall x(F(x) \rightarrow H(x,y)))$
- 2) 下面哪个命题公式是永真式? ( )
- A.  $(p \vee q) \rightarrow \neg r$   
 B.  $(q \rightarrow p) \wedge q \rightarrow p$   
 C.  $\neg(\neg p \vee q) \wedge q$   
 D.  $\neg(p \rightarrow q) \leftrightarrow r$
- 3) 下列命题中正确的是哪个? ( )
- A. 若  $A \cap B = A \cap C$ , 则  $B = C$ ;      B. 若  $A \cup B = A \cup C$ , 则  $B = C$ ;  
 C. 若  $A \oplus B = A \oplus C$ , 则  $B = C$ ;      D. 若  $A \subset B$  且  $C \subset D$ , 则  $A \cap C \subset B \cap D$ .
- 4) 自然数集合  $N$  与下述哪个集合不等势? ( )
- A. 有理数集合  $Q$ ;      B.  $\{0,1\}^N$ ;  
 C.  $N \times N$ ;      D.  $N - \{1,2,3\}$ .
- 5) 设  $\Sigma$  是由有限多字母组成的集合, 称为字母表. 由  $\Sigma$  中的字母组成的有序序列称为  $\Sigma$  上的串. 若串中的字母个数为零, 则该串叫做空串. 令  $\Sigma^*$  表示  $\Sigma$  上所有有限长的串的集合. 在  $\Sigma^*$  上定义一个连接运算“\*”, 对任意两个串  $x, y$ ,  $x*y = xy$ . 即把串  $y$  添加到串  $x$  后面. 则关于  $\langle \Sigma^*, * \rangle$  以下哪个判断正确? ( )
- A. 是代数系统, 但不是半群      B. 是半群, 但不是独异点  
 C. 是独异点, 但不是群      D. 不是代数系统

- 6) 设  $Z_{12}$  为模 12 整数加群. 以下哪个是子群  $\langle 4 \rangle$  在  $G$  中的右陪集? ( )
- A.  $\{1,4,7,10\}$  B.  $\{0,4,8\}$   
 C.  $\{3,6,9\}$  D.  $\{4,8\}$
- 7) Klein 四元群的子群格是以下哪种格? ( )
- A. 分配格 B. 有补格  
 C. 五角格 D. 布尔代数
- 8) 有向图  $D = \langle V, E \rangle, V = \{a, b, c, d, e, f\}, E = \{\langle a, b \rangle, \langle b, c \rangle, \langle a, d \rangle, \langle d, e \rangle, \langle f, e \rangle\}$ . 则  $D$  的连通性与哪种图最接近? ( )
- A. 不连通图 B. 弱连通图 C. 单向连通图 D. 强连通图
- 9) 树  $T$  具有 5 个 4 度顶点, 其余均为 1 度顶点。则有几非同构的  $T$ ? ( )
- A. 2 B. 3 C. 4 D. 5
- 10) 若无向简单图  $G$  是一个自补图, 则  $G$  的顶点数可能为多少? ( )
- A. 2 B. 3 C. 5 D. 6

## 2. 判断题 (共 10 题, 每题 1 分, 真为"T", 假为"F")

- 1) 每一个极小项当其真值指派与编码相同时, 其真值为 1, 在其余  $2^n-1$  种指派情况下均为 0. ( )
- 2) 任何实数区间都与实数集合  $R$  等势. ( )
- 3) 设  $R$  是整环. 若  $R$  中每个元素在乘法下都有逆, 则  $R$  是域. ( )
- 4) 无限群中必有无限阶元. ( )
- 5) 代数系统  $A$  中若存在  $a$  使得  $a^2 = a$ , 则  $A$  上的运算满足幂律. ( )
- 6) 设  $a$  是群  $G$  中元素. 则对任意整数  $n, |a^n|$  是  $|a|$  的因子. ( )
- 7) 完全图不一定是哈密顿图. ( )
- 8) 平面图的对偶图一定是连通图. ( )
- 9)  $K_{2,3}$  是欧拉图也是哈密顿图. ( )



- 10) 右图是二部图. ( )

3. 填空题 (共 10 题, 每题 2 分)

- 1) 设  $c_1 = \neg p \vee q \vee r$ ,  $c_2 = p \vee q \vee \neg s$ , 则  $\text{Res}(c_1, c_2) =$  \_\_\_\_\_.
- 2)  $R = \{ \langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 2 \rangle \}$ , 则  $R \upharpoonright \{1, 3\} =$  \_\_\_\_\_.
- 3) 设  $\mathbf{Z}_{18}$  为模 18 整数加群, 则元素 14 的阶是 \_\_\_\_\_.
- 4) 在域  $\mathbf{Z}_7$  中, 方程组  $\begin{cases} 5x + 3y = 5 \\ x - 4y = 3 \end{cases}$  的解为  $x =$  \_\_\_\_\_,  $y =$  \_\_\_\_\_.
- 5) 设  $n$  是正整数,  $S_n$  为  $n$  的正因子集,  $S_n$  关于整除关系构成格, 令  $n = 3, 4, 5, 6$ , 则  $n =$  \_\_\_\_\_ 时  $S_n$  是布尔代数.
- 6) 树叶带权分别为 1, 2, 3, 4, 5, 7 的最优 2 叉树的权为 \_\_\_\_\_.
- 7) 平面图  $G$  有 16 个连通分支, 128 个顶点, 81 个面, 则  $G$  有 \_\_\_\_\_ 条边.
- 8)  $n$  阶无向简单图  $G$  及其补图  $\bar{G}$  都有  $n + 21$  条边, 则  $n =$  \_\_\_\_\_.
- 9)  $K_{2,3}$  的点色数为 \_\_\_\_\_, 面色数为 \_\_\_\_\_.
- 10) 用 2 种颜色涂色  $3 \times 3$  的方格棋盘, 每个方格一种颜色. 如果允许棋盘任意旋转或者翻转, 则不同的着色方案数是 \_\_\_\_\_.

4. (10 分) 某电路中有一个灯泡和三个开关  $A, B, C$ . 已知在且仅在下述四种情况下灯亮:

- (1)  $C$  的扳键向上,  $A, B$  的扳键向下。
- (2)  $A$  的扳键向上,  $B, C$  的扳键向下。
- (3)  $B, C$  的扳键向上,  $A$  的扳键向下。
- (4)  $A, B$  的扳键向上,  $C$  的扳键向下。

设  $F$  为 1 表示灯亮, 命题变元  $p, q, r$  分别表示  $A, B, C$  的扳键向上。

- (A) 求  $F$  的主析取范式。
- (B) 在联结词完备集  $\{\neg, \wedge\}$  上构造  $F$ , 并尽可能地简单。

5. (10 分) 在一阶逻辑中推证下列结论的有效性:

所有爱学习的人都有知识; 每个有知识、爱思考的人都有创造力; 有些爱学习、爱思考的人是科学家. 所以有些爱学习、有创造力的人是科学家.

设个体域是人的集合,  $P(x)$ :  $x$  爱学习,  $R(x)$ :  $x$  有知识,

$S(x)$ :  $x$  有创造力,  $U(x)$ :  $x$  是科学家,  $V(x)$ :  $x$  爱思考.

6. (10 分) 设  $N$  是自然数集合, 定义  $N$  上的二元关系  $R$ :

$$R = \{ \langle x, y \rangle \mid x \in N, y \in N, x+y \text{ 是偶数} \}$$

(1) 证明  $R$  是一个等价关系;

(2) 求关系  $R$  的等价类.

7. (10 分) 已知集合  $A$  和  $B$ , 其中  $A \neq \emptyset$ ,  $\langle B, \leq \rangle$  是偏序集,  $\langle B, \leq \rangle$  中存在最大元

$b$ . 定义  $B^A$  上的二元关系  $R$  如下:

$$fRg \Leftrightarrow \forall x (x \in A \rightarrow (f(x) \leq g(x))).$$

(1) 证明  $R$  为  $B^A$  上的偏序关系.

(2) 给出偏序集  $\langle B^A, R \rangle$  中的最大元.

8. (10 分) 证明 6 阶群中必含有 3 阶元.

9. (10 分) 设平面图  $G$  的顶点数  $v \geq 11$ , 证明:  $G$  的补图  $\bar{G}$  不是平面图.