中国科学技术大学

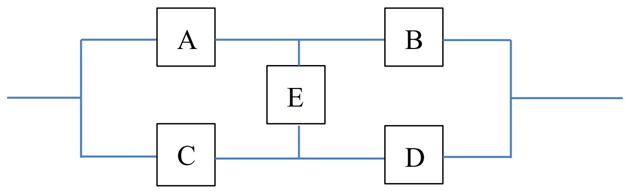
2002—2003 学年第二学期考试试卷

考试科目：概率论与数理统计　　　　　　得　分：____________

学生所在系：____________姓　名______________学　号：____________

（考期：2003 年 6 月 30 日，闭卷，可用计算器）

一、考虑如图所示的电路图：



其中开关 A、B、C、D、E 是独立工作的，每个开关以概率 p 开着，以概率 $q=1-p$ 关着，求一个输入的信号在输出处被接收到的概率；如果一个信号被接收到，那么开关 E 是开着的条件概率是多少？

二、设(X,Y)的联合密度函数为：

$$f(x,y)=\begin{cases}c, |y|<x, 0<x<1;\\ 0, others\end{cases}$$

求(1)常数 C 的值；(2)条件密度函数$f_{X|Y}(x|y)$及$f_{Y|X}(y|x)$；(3)讨论 X 与 Y 的独立性和相关性。

三、在一家保险公司里有 10000 个人参加保险，每人每年付 12 元保险费，在一年内一个人死亡的概率为 0.006，死亡时其家属可向保险公司领取 1000 元的保险金，问：

(1) 保险公司亏本的概率多大？

(2) 保险公司一年的利润不少于 40000 元、60000 元的概率各多大？

四、设$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$是从总体 X 中抽取的一个简单随机样本，已知 X 的概率密度函数为：

$$f(x)=\begin{cases}e^{-(x-\theta)}, x>\theta;\\ 0, others\end{cases}$$

其中θ是未知参数，$-\infty<\theta<\infty$。

(1) 试求θ的极大似然估计$\hat{\theta}$和矩估计$\tilde{\theta}$；

(2) 求常数c_1和c_2，使得$c_1\hat{\theta}-c_2$为θ的无偏估计；

(3) 求常数c_3和c_4，使得$c_3\tilde{\theta}-c_4$为θ的无偏估计；

(4) 在均方误差意义下比较这两个无偏估计哪个更优。(注：上述常数可与 n 有关)

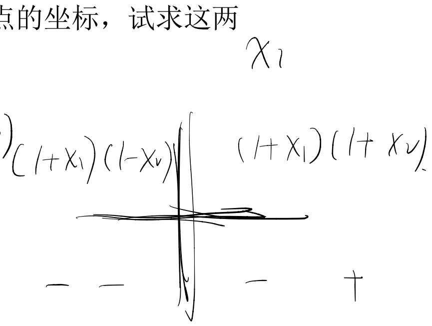
五、据信有一种疾病会导致病人的白细胞数目较常人少，假设正常人白细胞数服从均值为 7250（单位：个/立方毫米，下同）的正态分布，现有 16 个病人，其白细胞的样本均值为 4767，样本标准差为 3204，根据这批数据能否认为这种疾病使白细胞数

目减少？（显著性水平为$\alpha = 0.05$）

自由度为 n 的 t 分布的 p 分位数表

n \ p	0.90	0.95	0.975	0.99
15	1.341	1.753	2.131	2.602
16	1.337	1.746	2.120	2.583

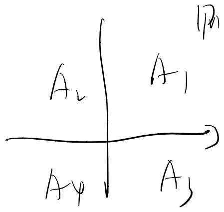
六、在[0,1]区间上随机独立地投掷两点，设 X 与 Y 分别表示这两点的坐标，试求这两点间距离的概率密度函数、数学期望和方差。



$X_x \sim U(0,1)$ $\quad -Y_x \sim U(-1,0)$

$Z_x = X_x - Y_x \sim f(z_x)$

同时 $Z_y \sim f(z_y)$ 同样的 Z_y



则 $\iint_{A_1} \sqrt{x_1^2+x_2^2}\,(1+x_1)(1+x_2)\,dx_1\,dx_2$.

$\iint A_2 + \iint A_3 + \iint \sqrt{x_1^2+x_2^2}\,(1-x_1)(1-x_2)\,dx\,d$

$l^2 = x_1^2 + x_2^2$

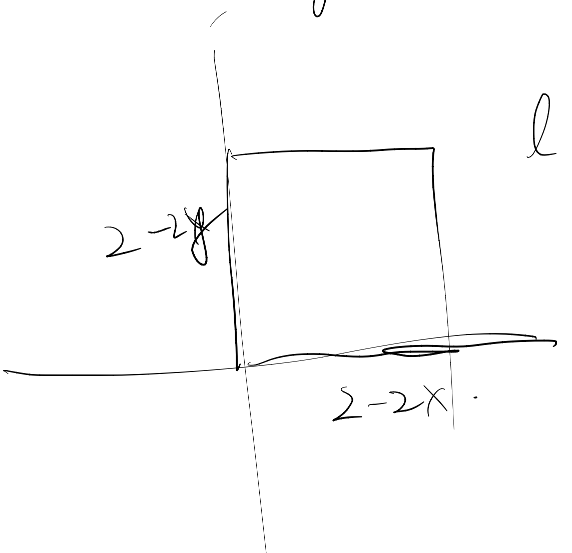
$u = x_2$

$J = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$g(l, x_2)\,dl\,dx_2 = f(x_1, x_2)\,dx_1\,dx_2$.

$g(l, x_2) = f(x_1, x_2) / 2x_1$

$l = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$



x_2^2

$|X|$

中国科学技术大学

2003—2004 学年第一学期考试试卷

考试科目：概率论与数理统计　　　　　　得　分：____________

学生所在系：____________姓　名______________学　号：____________

（考期：2004 年 1 月 8 日，闭卷，可用计算器）

一、甲、乙、丙三人独立地向靶子各射击一次，其命中率分别为 0.6、0.5 和 0.4.现已知恰有两人命中靶子，问：

（1）此两人中包括丙的可能性大，还是不包括丙的可能性大？

（2）此两人中包括乙的可能性大，还是包括丙的可能性大？（要求写出计算过程）

二、某种商品一周的需求量是个随机变量，其概率密度为：

$$f(t)=\begin{cases} te^{-t}, t>0 \\ 0, \quad t\le 0 \end{cases}$$

各周的需求量相互独立，试求：

（1）　两周需求量的概率密度；

（2）　三周需求量的概率密度。

三、利用中心极限定理求解：

（1）设计算机在进行加法运算时，每次取整的误差相互独立，且服从[-0.5,0.5]上的均匀分布，若要保证误差总和的绝对值不超过 20 的概率大于或者等于 0.95，问至多只能进行多少次加法运算？

（2）　$lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!}e^{-n}=?$

四、设样本 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 抽自总体 $X\sim f(x;\theta)$，其中：

$$f(x;\theta)=\frac{1}{2}e^{-\frac{x-\theta}{2}},(x>\theta;\theta\in R)$$

（1）　试求θ的矩估计$\hat{\theta}$和极大似然估计θ^*；

（2）　验证$\hat{\theta}$和θ^*是否为θ的无偏估计，若不是无偏估计，试将其分别修正为无偏估计$\hat{\theta}_1$和$\hat{\theta}_2$；

（3）　比较$\hat{\theta}_1$和$\hat{\theta}_2$何者为优？

五、为考察钢铁工人和电厂工人平均工资的差别，从两厂各抽取若干工人调查，结果如下：

钢厂：74，65，72，69（元）

电厂：75，78，74，76，72（元）

若钢厂工人与电厂工人工资分别服从正态分布$N(\mu_1,\sigma_1^2)$与$N(\mu_2,\sigma_2^2)$，总体独立且均值方差未知，试据上述数据判断：

（1）　是否可以认为$\sigma_1^2=\sigma_2^2$？（$\alpha=0.05$）

（2）　钢铁工人平均工资是否低于电厂工人平均工资？（$\alpha=0.05$）

中国科学技术大学

2003—2004学年第二学期考试试卷

考试科目：概率论与数理统计　　　　　　　得　分：____________

学生所在系：____________姓　名______________学　号：____________

（考期：2004年6月25日，闭卷，可用计算器）

一、判断和填空：

（1）　设P(A)=0，则A为不可能事件。

（2）　设(X,Y)服从二元正态，Cov(X,Y)=0,则X、Y相互独立。

（3）　设X、Y相互独立，则X、Y的联合分布可以由X和Y的边缘分布唯一确定。

（4）　设$X_1,\cdots,X_n$为从同一个总体中抽取的一个样本，则$max(X_1,\cdots,X_n)-min(X_1,\cdots,X_n)$+3是统计量。

（5）　设$\theta>0$，X的概率分布函数为：

$$F(x)=\begin{cases}1-exp\left\{-\dfrac{x-\mu}{\theta}\right\}, x\geq\mu\\ 0 \qquad\qquad\qquad , x<\mu\end{cases}$$

则随机变量X的密度函数为（）。

（6）　设X、Y服从单位圆$x^2+y^2\leq 1$上的均匀分布，则在给定Y=0.5条件下的X的条件密度函数为（）。

（7）　设X和Y相互独立，它们的均值全为0，方差全为1，记V=X-Y，则X与V的相关系数为（）。

二、求：（1）P(Y=2|X=1)；(2)X^2+Y^2的分布，其中X、Y的联合分布如下：

X \ Y	-1	0	1	2
-1	0.12	0.08	0.30	0.15
1	0.08	0.22	0	0.05

三、设X服从期望为2的指数分布，Y服从(0,1)上的均匀分布，且X与Y相互独立，求：（1）X-Y的概率密度函数；（2）P(X<Y)。

四、桌上有三个盒子，在甲盒中装有2支红芯圆珠笔，4支蓝芯圆珠笔，乙盒中装有4支红芯圆珠笔，2支蓝芯圆珠笔，丙盒中装有3支红芯圆珠笔，3支蓝芯圆珠笔，今从三个盒子中任取一支笔，设甲乙丙三盒取笔的概率相等。试求：

（1）取得红笔的概率；（2）在已知取得红笔的条件下，问笔从哪个盒子中取出的概率最大？

五、某工厂生产线甲根据专利生产灯泡，生产线乙根据本厂原有技术生产。现分别在生产线甲和乙两条生产线各抽取8个灯泡，测得其寿命分别为（千小时）：

对生产线甲：10，9，3，11，5，7，9，11；

对生产线乙：4，9，6，5，3，5，7，7；

设灯泡寿命服从正态分布，且方差相等。试分别在显著性水平$\alpha=0.05$和$\alpha=0.01$下检验生产线甲的灯泡是否比生产线乙生产的寿命要长。

六、设总体 X 服从$(1,\theta+1)$上的均匀分布，$X_1,\cdots,X_n$为总体 X 中抽取的一个样本。试求：

（1）求θ的矩估计$\hat{\theta}_1$和极大似然估计$\hat{\theta}_2$；

（2）$\hat{\theta}_1$和$\hat{\theta}_2$是否为θ的无偏估计，若不是，请加以修正；

（3）$\hat{\theta}_3=2\hat{\theta}_4-2$是$\theta$的无偏估计，其中$\hat{\theta}_4=\frac{2X_1+X_{2+}\cdots+X_{n-1}+2X_n}{n+2}$，问$\hat{\theta}_1$的修正（如果需要修正的话）和$\hat{\theta}_3$哪个更有效？

中国科学技术大学

2004—2005 学年第一学期考试试卷

考试科目：概率论与数理统计　　　　　　　　得　分：____________

学生所在系：____________姓　名______________学　号：____________

（考期：2005 年 1 月 20 日，闭卷，可用计算器）

一、甲、乙、丙三门火炮同时独立地向目标射击，其命中率分别为 0.2，0.3 和 0.5。目标被命中一发而被摧毁的概率为 0.2，被命中两发而被摧毁的概率为 0.6，被命中三发而被摧毁的概率 0.9，试求：

（1）三门火炮在一次射击中摧毁目标的概率；

（2）在目标被摧毁的条件下，其只由甲火炮击中的概率。

二、设 X 与 Y 独立同分布，都服从参数为λ的指数分布，试求 Z 的分布密度，其中：

（1）Z=min{X,Y}；　　　（2）Z=X+Y。

三、将一枚骰子独立地投掷 n 次，令 X 与 Y 分别表示其 1 点出现的次数和 6 点出现的次数，并记 Z=n-X。试求：

（1）X 与 Y 的协方差及相关系数；

（2）X 与 Z 的相关系数。

四、设样本$X_1,\cdots,X_n$抽自总体 X，总体的密度为：

$$X\sim f(x;\theta_1)=\begin{cases}\frac{1}{\theta_2}e^{-\frac{x-\theta_1}{\theta_2}}, x\geq\theta_1\\ 0, \quad x<\theta_1\end{cases}$$ ，其中$\theta_1\in R$为未知参数，$\theta_2>0$为已知数。

（1）　求θ_1的矩估计$\hat{\theta}_1$和极大似然估计θ_1^*；

（2）　$\hat{\theta}_1$和θ_1^*是否为θ_1的无偏估计？是加以证明，不是请加以修正为无偏估计量。

五、某校组织学生参加英文词汇训练，并在年初与年底（即训练前与训后）各举行一次阅读考试，以考察训练的效果。现随机抽取 10 名同学，将其年初与年底的考试成绩记录如下：

学生	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
年初成绩	64	43	84	72	52	93	77	58	69	91
年底成绩	72	50	86	80	50	90	78	57	72	95

假定两次考分之差服从正态分布，试由此判断词汇训练是否有显著效果？（分别在$\alpha=0.05$与$\alpha=0.01$的水平下检验）

六、为了研究色盲是否与性别有关，随机抽取 1000 人进行调查，结果如下：

	男	女	和
正常	442	514	956

色盲	38	6	44
和	480	520	1000

（1） 试据此判断，色盲是否与性别有关？$(\alpha = 0.01)$

（2） 你认为是男性还是女性更容易患色盲？请说明理由。

中国科学技术大学

2005—2006 学年第一学期考试试卷

考试科目：概率论与数理统计　　　　　　　得　分：____________

学生所在系：____________姓　名______________学　号：____________

（考期：2006 年 1 月 22 日，闭卷，可用计算器）

一、设昆虫产卵个数服从参数为λ的 Possion 分布，而每个卵孵化成幼虫的概率为 p，且各卵是否成虫彼此之间没有关系。试求：

（1）一个昆虫产生 k 个后代的概率；

（2）若某个昆虫产生 k 个后代，求它产生 m 个卵的概率。

二、设二维随机变量(X,Y)的联合密度为：

$$f(x,y)=\begin{cases}0.25(1+xy), |x|<1, |y|<1\\ 0 \quad , others\end{cases}$$

（1）　求给定 X=1/2 时 Y 的条件概率密度；

（2）　求 Cov(X,Y)和 Var(Y|X=1/2)；

（3）　证明X^2与Y^2独立。

三、设某学校有 5000 名学生，在某一时间区间内每个学生去某个阅览室的概率为 0.05，且设每个学生是否去该阅览室是相互独立的。试问该阅览室至少需要设多少座位才能以 95%的概率保证每个到该阅览室来的同学均有座位？

四、设从总体

X	0	1	2	3
P	θ/2	θ	3θ/2	1-3θ

抽取的一个简单随机样本$X_1,\cdots,X_{10}$的观测值为(0,3,1,1,0,2,0,0,3,0)。

（1）求 θ的矩估计量$\hat{\theta}_M$和极大似然估计量$\hat{\theta}_L$；

（2）证明上述估计量都是无偏估计量；

（3）比较这两个估计量，指出哪个更有效。

五、假设某台精盐包装机生产的袋装盐的净重服从正态分布，按照要求每袋盐的标准重量为 500g，标准差不得超过 10g。某天开工后，从装好的盐中随机抽取 10 袋，测得其净重（单位：g）为：510，495，478，487，501，493，528，504，503，504。试据此判断这时机器的工作是否正常。（$\alpha=0.05$）

六、在著名的豌豆实验中，孟德尔（1822-1884）同时考虑豌豆的颜色和形状，共有四种组合：（黄、圆），（黄、皱），（绿、圆），（绿、皱）。按孟德尔的理论，这四类应该有 9：3：3：1 的比例。在一次实验中，发现这四类的观察数分别为 315，101，108 和 32.试据此判断孟德尔的理论是否正确？（$\alpha=0.05$）

中国科学技术大学

2005—2006学年第二学期考试试卷

考试科目：概率论与数理统计　　　　　　得　分：__________

学生所在系：__________姓　名____________学　号：__________

（考期：2006年7月3日，闭卷，可用计算器）

一、在空战中甲机先向乙机开火，击落乙机的概率为0.2；若乙机未被击落，就进行还击，击落甲机的概率为0.3；若甲机未被击落，则再进攻乙机，击落乙机的概率为0.4.试求在这三回合中：

（1）乙机被击落的概率是多少？

（2）若乙机被击落，则它在第一回合中被击落的概率是多少？

二、设$X_1\sim\begin{pmatrix}-1, & 0, & 1\\ 0.25, & 0.5, & 0.25\end{pmatrix}$，$X_2\sim\begin{pmatrix}0, & 1\\ 0.5, & 0.5\end{pmatrix}$，且$\mathrm{P}\{X_1X_2=0\}=1$。试求：

（1）试求(X_1,X_2)的分布；

（2）X_1与X_2是否独立？为什么？

（3）X_1与X_2是否不相关？为什么？

三、设X与Y相互独立，都服从指数分布，参数分别为λ与$\mu(\lambda\neq\mu)$，试求Z的概率密度$f_Z(z)$，其中：（1）Z=X+Y；（2）Z=X-Y。

四、设样本$X_1,\cdots,X_n$抽自总体X，X服从$(\theta,\theta+1)$上的均匀分布：

（1）试求θ的矩估计$\hat{\theta}$和极大似然估计θ^*；

（2）证明$\hat{\theta}_1=\bar{X}-\frac{1}{2}$与$\hat{\theta}_2=X_{(n)}-\frac{n}{n+1}$均为$\theta$的无偏估计；

（3）$\hat{\theta}_1$和$\hat{\theta}_2$哪个更有效？

五、设样本$X_1,\cdots,X_n$抽自正态总体$N(\mu,\sigma^2)$，问在下列三个统计量中：

$$S_1^2=\frac{1}{n-1}\sum_1^n(X_i-\bar{X})^2\ ,\ S_2^2=\frac{1}{n}\sum_1^n(X_i-\bar{X})^2,\ S_3^2=\frac{1}{n+1}\sum_1^n(X_i-\bar{X})^2$$

谁是σ^2的无偏估计？谁对σ^2的均方误差$E\left(S_i^2-\sigma^2\right)^2$最小？请证明你的结论。

六、某校组织学生参加英文词汇训练，并在年初与年底（即训练前与训后）各举行一次阅读考试，以考察训练的效果。现随机抽取10名同学，将其年初与年底的考试成绩记录如下：

（1）假定两次考分之差服从正态分布，试由此判断词汇训练是否有显著效果？（在$\alpha=0.05$的水平下检验）

（2）若上述两组数据并非抽自相同的10名同学，而是分别从两次考分中各随机抽取10

人，并假定两次考分分别服从正态分布（二总体独立），方差未知但相等，试据以判断词汇训练是否有显著效果？（在$\alpha = 0.05$的水平下检验）

学生	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
年初成绩	64	43	84	72	52	93	77	58	69	91
年底成绩	72	50	86	80	50	90	78	57	72	95

参考答案

一、（1）0.2+0.8*0.7*0.4=0.424

（2）0.2/0.424=0.472

二、（1）略；（2）不独立；（3）不相关

三、（1）$f_Z(z) = \frac{\lambda\mu}{\lambda-\mu}\left(e^{-\mu z} - e^{-\lambda z}\right), z \geq 0$；

(2) $f_Z(z) = \begin{cases} \frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu} e^{-\lambda z}, z \geq 0 \\ \frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu} e^{\mu z}, z < 0 \end{cases}$

四、（1）$\hat{\theta} = \bar{X} - \frac{1}{2}$　　$\theta^* \in \left[X_{(n)} - 1, X_{(1)}\right]$

（2）略

（3）$\mathrm{Var}(\hat{\theta}_1)=\frac{1}{12n}$　　$\mathrm{Var}\left(\hat{\theta}_2\right) = \frac{n}{(n+1)^2(n+2)}$　　$\mathrm{n} \leq 7, \hat{\theta}_1$有效；$\mathrm{n} \geq 8, \hat{\theta}_2$有效

五、（1）$S_1^2 = \frac{1}{n-1}\sum_1^n (X_i - \bar{X})^2$为无偏估计量；（2）均方误差排序$S_3^2 < S_2^2 < S_1^2$

六、（1）成对数据检验，拒绝原假设；（2）两样本 t 检验，无法拒绝原假设。

中国科学技术大学

2006—2007 学年第一学期考试试卷

考试科目：概率论与数理统计　　　　　　得 分：__________

学生所在系：__________姓 名____________学 号：__________

（考期：2007 年 1 月 31 日，闭卷，可用计算器）

一、有 12 个新的乒乓球，每次比赛时取出 3 个，用完之后再放回去。

（1）设第二次比赛时取到 X 个新球，试求 X 的分布律；

（2）若第三次比赛时取到 3 个新球，问第二次比赛时取出的 3 个球都是新球的概率是多少？

二、设 X 与 Y 独立，都服从指数分布，参数分别为λ与 μ($\lambda \neq \mu$)，试求 Z=X+Y 的分布密度$f_Z(z)$。

三、设 Y 服从参数为μ与σ^2的对数正态分布（即 Y 满足：lnY~N(μ, σ^2)），试求 Y 的分布密度$f_Y(y)$及 E(Y)与 Var(Y)。

四、某蛋糕店出售三种生日蛋糕，单价分别为 12 元、20 元和 40 元，售出这三种蛋糕的概率分别为 0.3，0.2 和 0.5。某日该店售出 300 个蛋糕，问：

（1）该日总收入超过 8000 元的概率约为多少？

（2）该日售出单价为 20 元的蛋糕超过 60 的概率约为多少？

五、设样本$X_1, \cdots, X_n$抽自总体 X，其中：

$$X \sim f(x;\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-\frac{x-\theta}{2}}, x \geq \theta \\ 0 \quad\quad , \ x < \theta \end{cases}$$

(1) 试求θ的矩估计$\hat{\theta}$和极大似然估计θ^*；

(2) 验证$\hat{\theta}$和θ^*是否为θ的无偏估计；若否，试将其修正为无偏估计。

六、假设某台精盐包装机生产的袋装盐的净重服从正态分布，按照要求每袋盐的标准重量为 500g，标准差不得超过 10g。某天开工后，从装好的盐中随机抽取 10 袋，测得其净重（单位：g）为：510，495，478，487，501，493，528，504，503，504。试据此判断这时机器的工作是否正常。（$\alpha = 0.05$）

七、某一作业中可能发生两类事故：A（起火）和 B（爆炸），而该作业有三种不同的原料可供选择：L、M 和 N。下面给出的是事故记录：

	L	M	N	和
A	42	17	29	88
B	20	4	29	53
和	62	21	58	141

试据此判断事故类型是否与原料的种类有关？（$\alpha = 0.05$）

参考答案

一、（1） $P(X=k)=\frac{\binom{9}{k}\binom{3}{3-k}}{\binom{12}{3}}$,k=0,1,2,3

(2) Bayes formula =0.23

二、$f_Z(z)=\frac{\lambda\mu}{\lambda-\mu}\left(e^{-\mu z}-e^{-\lambda z}\right), z>0$

三、$f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma y}e^{-\frac{(lny-\mu)^2}{2\sigma^2}}, y>0$ $\quad$ $E(Y)=e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}$ $\quad$ $Var(Y)=\left(e^{\sigma^2}-1\right)e^{2\mu+\sigma^2}$

四、（1）$E(X)=27.6$ $\quad$ $Var(X)=161.44$ $\quad$ $P(\sum_1^{300}X_i>8000)\approx\Phi(1.27)$

（2）$Y\sim B(300,0.2)$ $\quad$ $P(Y>60)\approx 0.5$

五、（1）$\hat{\theta}=\bar{X}-2$ $\quad$ $\theta^*=X_{(1)}$

(2) $E\hat{\theta}=\theta$ $\quad$ $E\theta^*=\theta+\frac{2}{n}$有偏，修正为$\tilde{\theta}=X_{(1)}-\frac{2}{n}$

中国科学技术大学

2006—2007 学年第二学期考试试卷

考试科目：概率论与数理统计　　　　　　　　得　分：____________

学生所在系：____________姓　名______________学　号：____________

（考期：2007 年 7 月 13 日，闭卷，可用计算器）

一、（18 分）

（1）　举例说明：一般而言，$P(B\mid A)+P(B\mid \overline{A})=1$ 和 $P(B\mid A)+P(\overline{B}\mid \overline{A})=1$ 不成立；

（2）　举例说明：随机变量 X 与 Y 不独立，但 X^2 和 Y^2 独立；

（3）　设 A_1, A_2, A_3, A_4 相互独立，且 $P(A_i)=1/3$，$(i=1,2,3,4)$ 则

$P(\bigcup_{i=1}^{4} A_i) =$ （　　　　　）；

（4）设随机变量 X 与 Y 独立，且 $E(X)=E(Y)=0, Var(X)=Var(Y)=1$。若命 $W=X-Y$，则 Y 与 W 的相关系数是（　　　　　）；

（5）判断正误：设 X 与 Y 都是正态随机变量，则 X 与 Y 的联合分布由 X 与 Y 的边缘分布唯一确定（　　　）；

（6）判断正误：在假设检验中，我们要检验两个正态总体均值差 $\mu_1-\mu_2=\delta$ 是否为零，则 $\overline{X}-\overline{Y}-\delta$ 是统计量（　　　）。

二、（10 分）有 100 个零件，其中 90 个为一等品，10 个为二等品。从中随机取出 2 个，安装在一台设备上。若 2 个零件中恰有 k 个二等品 $(k=0,1,2)$，则该设备的使用寿命服从参数为 $\lambda=k+1$ 的指数分布。若已知该设备寿命超过 1，试求安装的 2 个零件均为一等品的概率。

三、（20 分）设 $r.v. X \sim f(x)=6x(1-x), \quad (0\le x\le 1)$

（1）验证 $f(x)$ 是概率密度函数并画出其图形；

（2）求出 X 的概率分布函数；

（3）确定满足 $P(X<b)=P(X>3b/2)$ 的数 b，$(0<b<1)$；

（4）计算 $P\{X\le 1/2 \mid 1/3 < X < 2/3\}$。

四、（7 分）设(X,Y)服从$D=\{(x,y)\,|\,-1\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$上的均匀分布，试求$Z=\dfrac{Y}{3X}$的概率密度函数$f_Z(z)$。

五、（30 分）设样本$\left(X_1,X_2,\cdots,X_n\right)$抽自总体$X$，$X$服从三点分布：

$$P(X=-1)=p, P(X=0)=1-3p, P(X=1)=2p$$

（1） 试分别用样本一阶和二阶原点矩来估计未知参数p；

（2） 证明这两个估计都是无偏估计；

（3） 问这两个无偏估计，哪个更有效（即哪个方差更小）？

六、（15 分）为了解甲、乙二企业职工工资水平，分别从二企业各随机抽取若干名职工调查，得如下数据（单位：元）：

甲企业： 750，1060，750，1820，1140，1050，1000

乙企业：1000，1900，900，1800，1200，1700，1950，1200

设二企业职工工资分别服从正态分布$N(\mu_1,\sigma^2)$和$N(\mu_2,\sigma^2)$，二总体独立且均值、方差皆未知。试根据以上数据判断：甲企业职工平均工资是否低于乙企业职工平均工资？（分别在$\alpha=0.05$和$\alpha=0.01$两种水平下检验）

（完）

（ 参考数据：t分布上侧分位点$t_\alpha(n)$

α \ n	13	14	15
0.005	3.0123	2.9769	2.9467
0.01	2.6503	2.6245	2.6025
0.025	2.1604	2.1448	2.1315
0.05	1.7709	1.7613	1.7531

）

概率统计期末考题解答与评分标准

（2007 年 7 月 13 日考试）

一、（18 分）

（1）例如取：$\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}, A=\{1,3,5\}, B=\{3,5\}$；

（2）如：$P\{X=-1\}=1-p, P\{X=1\}=p, 0<p<1, Y$ 为任意随机变量；

（3）$P(\bigcup_{i=1}^{4} A_i)=1-P(\bigcap_{i=1}^{4}\overline{A_i})=1-(2/3)^4=65/81$；

（4）$-1/2$；（5）误；（6）误。

二、（10 分）$89e^2/(89e^2+20e+1)$。

三、（20 分）：

（1）$\int_0^1 6x(1-x)dx=1$；（2）$F(x)=\begin{cases}1, & x>1\\ 3x^2-2x^3, & 0\le x\le 1\\ 0, & x<0\end{cases}$；（3）$b=2/5$；（4）$1/2$。

四、（7 分）：

$$f_Z(z)=\begin{cases}1/(12z^2), & |z|>1/3\\ 3/4, & |z|\le 1/3\end{cases}。$$

五、（30 分）：

（1）$\hat{p}_1=\overline{X}, \hat{p}_2=(1/3)\overline{X^2}$；（2）$E(\hat{p}_1)=E(\hat{p}_2)=p$；

（3）$Var(\hat{p}_1)=\dfrac{p(3-p)}{n}, Var(\hat{p}_2)=\dfrac{p(\frac{1}{3}-p)}{n}, (0<p<1/3)$，故 $\hat{p}_2$ 更有效。

六、（15 分）：

$H_0:\mu_1\ge\mu_2 \Leftrightarrow H_1:\mu_1<\mu_2$，算得：$\overline{x}\approx 1081.43, \overline{y}=1456.25, S_T\approx 396.5111$，代入计算统计量值得：

$$\frac{\overline{x}-\overline{y}}{S_T\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\approx -1.8265<-1.7709=-t_{0.05}(13), 拒绝H_0；$$

$$\frac{\overline{x}-\overline{y}}{S_T\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\approx -1.8265>-2.6503=-t_{0.01}(13), 无法拒绝H_0。$$

中国科学技术大学

2007—2008 学年第一学期考试试卷

考试科目：概率论与数理统计　　　　　　得　分：____________

学生所在系：____________姓　名______________学　号：____________

（考期：2008 年 1 月 22 日，闭卷，可用计算器）

一、（15 分）一串 0,1 数字（独立同分布）组成的序列中 1 的概率 p 代表了某种有用的信息，由于某种原因需要对其保密。现对该串数字进行随机加密，对序列中的每一个数字抛一枚硬币（每次正面出现的概率为 π），若抛出的为正面，则原序列的数字不变，若抛出的为反面，则原序列中相应的数字由 x 变成 $1-x$（即 0 变成 1，1 变成 0）。加密后的序列可以公布，其中 1 的概率 p^* 可以估计出来。若知道 π 的值，就可以从加密后的序列中的 1 的频率为 p^* 计算出原序列的 p，所以 π 称为"密钥"。

$p^* = \pi p + (1-\pi)(1-p)$

（1）　现已知 $p^* = 0.7$，如果"密钥"　$\pi = 0.4$，试求 p；

（2）　试说明为什么均匀硬币（$\pi = 0.5$）不适合用来加密。

$p^* = \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}(1-p) = \frac{1}{2}$

$F(x)$

二、（15 分）设随机变量 X 满足：$|X| \le 1$，$P(X=-1)=1/8$，$P(X=1)=1/4$，而且，X 在 $(-1,\ 1)$ 内任一子区间上取值的概率与该子区间的长度成正比。试求：

$\frac{5}{8}$

$F(x) = \frac{5x}{16} + \frac{7}{16}$

（1）X 的概率分布函数 $F(x) = P(X \le x)$；

（2）X 取负值的概率；　　（3）X 的数学期望 $E(X)$。

$\frac{7}{16}$

三、（20 分）二维随机变量 (X,Y) 的密度函数为：

$A e^{-3x} e^{-4y}\, dx\, dy$

$$f(x,y) = \begin{cases} Ae^{-(3x+4y)}, & (x>0, y>0) \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$A = 12$

（1）试求系数 $A=?$；（2）X 与 Y 是否独立？

（3）试求 $Z = X+Y$ 的密度函数 $f_Z(z)$；

$\int^{+\infty} f(x)\, f(z-x)\, dx$

（4）试求 $Var\left(X \mid X+Y=1\right)$。

$\hat{\mu}=\bar{X}$ 为极大似然估计

四、（20 分）设样本 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 抽自正态总体 $X \sim N(\mu\,,\,1)$， μ 为未知参数

（1） 试求 $\theta = P(X \geq 2)$ 的极大似然估计 θ^*（结果可用 $\Phi(.)$ 的形式表示）；

（2） 写出 μ 的 $(1-\alpha)$ 置信区间，并求 θ 的 $(1-\alpha)$ 置信区间。$\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{\sigma} \sim N(0,1)$.

$\left[\mu \pm \frac{u_{\frac{\alpha}{2}}\sigma}{\sqrt{n}}\right]$

五、（15 分）为考查 A, B 两种制鞋材料的耐磨性，用它们制作了 10 双鞋，其中每双鞋的两只鞋分别用 A 和 B 两种材料制作(左、右脚两只鞋随机地采用 A 或 B)。10 个男孩试穿这 10 双鞋之后的磨损情况如下表所示（数字代表磨损程度），假定 A, B 两组数据的差服从正态分布，问是否可以认为这两种材料的耐磨性无显著差异？（$\alpha = 0.05$）

男孩	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	13.2	8.2	10.9	14.3	10.7	6.6	9.5	10.8	8.8	13.3
B	14.0	8.8	11.2	14.2	11.8	6.4	9.8	11.3	9.3	13.6
差	-0.8	-0.6	-0.3	0.1	-1.1	0.2	-0.3	-0.5	-0.5	-0.3

六、（15 分）投资者感兴趣的一个问题，是上市公司股票价格的变化与其公司总部所在地是否有关。下表给出的是美国两个不同地区（公司总部所在地）的上市公司在 1998 年第三季度内股价变化情况。表格内的数字是相应的上市公司的个数。问股票价格的变化是否存在地区间的差异？（$\alpha = 0.05$）

股价变化 / 总部所在地	上升	不变	下降
新英格兰地区	100	7	561
西北地区	88	10	370

（完）

（参考数值： $\chi^2_{0.025}(2) = 7.3778$； $\chi^2_{0.05}(2) = 5.9915$；

$\chi^2_{0.025}(6) = 14.4494$； $\chi^2_{0.05}(6) = 12.5916$； $t_{0.025}(9) = 2.2622$；

$t_{0.05}(9) = 1.8331$； $t_{0.025}(10) = 2.2281$； $t_{0.05}(10) = 1.8125$。 ）

概率统计期末考试（2008 年 1 月 22 日）

（参考答案与评分标准）

一、（15 分）

（1）$p^* = p\pi + (1-p)(1-\pi)$，$p = (p^* - 1 + \pi)\big/(2\pi - 1)$，当 $p^* = 0.55$, $\pi = 0.4$ 时，$p = 0.25$；

（2）当 $\pi = 0.5$ 时，$p^* \equiv 0.5$，由此无法解出 p。

二、（15 分）

（1）$F(x) = \begin{cases} 1, & x \ge 1 \\ \frac{5x+7}{16}, & -1 < x < 1 \\ \frac{1}{8}, & x = -1 \\ 0, & x < -1 \end{cases}$；（2）$= F(0) = \dfrac{7}{16}$；（3）$E(X) = \dfrac{1}{8}$。

三、（20 分）

（1）$A = 12$；（2）独立；（3）$f_Z(z) = 12(e^{-3z} - e^{-4z})$, $(z > 0)$；

（4）$f_{X|Z}(x \mid Z=1) = \dfrac{e^x}{e-1}$ ，$(0 < x < 1)$；　$E(X \mid Z=1) = \dfrac{1}{e-1}$。

四、（20 分）

（1）$\theta^* = 1 - \Phi(2 - \overline{X})$；（2）$\mu \in \overline{X} \pm u_{\frac{\alpha}{2}} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$；$\theta \in \Phi(\overline{X} - 2 \pm u_{\frac{\alpha}{2}} \dfrac{1}{\sqrt{n}})$。

五、（15 分）

$$H_0 : \mu_Z = 0 \leftrightarrow H_1 : \mu_Z \ne 0$$

$\dfrac{|\overline{Z}|}{S_Z \big/ \sqrt{n}} = \dfrac{|-0.41|}{0.3872 \big/ \sqrt{10}} \approx 3.3485 > 2.2622 = t_{0.025}(9)$，拒绝 H_0，有显著差异。

六、（15 分）

$Z \approx 5.4437 < 5.9915 = \chi^2_{0.05}(2)$，无法拒绝 H_0，未见有显著差异。

（完）

中国科学技术大学

2008—2009 学年第一学期考试试卷

考试科目：概率论与数理统计　　　　　　得　分：__________

学生所在系：__________ 姓　名____________ 学　号：__________

（考期：2009 年 1 月 7 日，闭卷，可用计算器）

一、填空与单项选择

（1）连续掷一枚不均匀硬币（掷出正面的概率为 p），直至正反面都掷出为止，设 X 为所掷的次数，则 X 的分布律为（）$P(X=k)=p^{k-1}(1-p)+(1-p)^{k-1}p$

（2）设 X 与 Y 独立，都服从 N(0,1)，则$(X+Y)^2/(X-Y)^2$的分布为（）$F_{1,1}$

（3）设样本$X_1,\cdots,X_n$抽自正态总体$N(\mu,\sigma^2)$，σ^2未知，则μ的$(1-\alpha)$置信区间为（）

$t_{\frac{\alpha}{2}}=t_{n-1}$

$\bar{x}-\frac{t_{\frac{\alpha}{2}}s}{\sqrt{n}}<\mu<\bar{x}+\frac{t_{\frac{\alpha}{2}}s}{\sqrt{n}}$

（4）设 A、B、C 两两独立，则 A、B、C 相互独立的充要条件为：a

(a)A 与 BC 独立 (b)AB 与(A+B)独立 (c)AB 与 AC 独立 (d)(A+B)与(A+C)独立

（5）若 E(XY)=E(X)E(Y)，则必有：b

(a)Var(XY)=Var(X)Var(Y)　　(b) Var(X+Y)=Var(X)+Var(Y)

(c)X 与 Y 独立 ×　　(d) X 与 Y 相关 ×

（6）将一枚硬币连掷 n 次，以 X 与 Y 表示出现正面和反面的次数，则$\rho_{X,Y}$=(−1)。

（7）$\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1,\cdots,X_n)$为$\theta$的无偏估计，且$\lim_{n\to\infty}Var(\hat{\theta})=0$，则$\frac{n+1}{n}\hat{\theta}$为$\theta$的：C

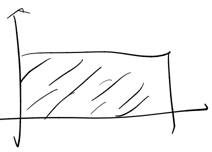
(a)无偏估计 (b)最小方差无偏估计 (c)相合估计 (d)以上皆错

二、现有 4 白 6 黑共 10 个球，从中随机取 2 球，已知其中有一个白球，则另一个球也是白球的概率为多少？

$p(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{C_4^2/C_{10}^2}{(C_4^1C_6^1+C_4^2)/C_{10}^2}=\frac{6}{6+24}=\frac{1}{5}$

三、设随机向量(X,Y)具有概率密度函数：$f(x,y)=\begin{cases}\frac{6}{7}\left(x^2+\frac{xy}{2}\right), & 0<x<1,0<y<2\\ 0, & others\end{cases}$

试分别求 X、Y 的期望、方差及 X 与 Y 的协方差和相关系数。



$E(X)=\int_0^2\int_0^1 xf(x,y)\,dx\,dy=\frac{5}{7}$

$E(y)=\frac{8}{7}$

四、(利用中心极限定理求解）某灯泡厂生产的灯泡的平均寿命原为 2000 小时，标准差为 250 小时，经过工艺改革，使平均寿命提高到 2250 小时，标准差不变。为了确认这一改革成果，主管部门派人来检查，办法是：任意挑选若干只灯泡来检测，若其平均寿命值超过 2200 小时，则认可这一成果。问：

（1）若挑选 160 只灯泡来检查，则其平均寿命值超过 2200 小时的概率约为多少？

（2）为了使检查通过的概率超过 0.997，问至少应检查多少只灯泡？

T　$\alpha=0.003$ 分位数

五、设样本$X_1,\cdots,X_n$抽自均匀分布$R(\theta,0),(\theta<0)$：

（1）试求θ的矩估计$\hat{\theta}$和极大似然估计θ^*；

（2）$\hat{\theta}$和θ^*是否为θ的无偏估计？若是请加以证明，若不是请加以修正。

（3）问(2)中所得的无偏估计，哪个更有效？

$\frac{1}{3n}\theta^2$

$\frac{1}{n(n+2)}\theta^2$

六、甲、乙、丙三个工厂生产同一种产品，产品质量分为 1、2、3 三个等级（分别代表高、中、低）。今从三个厂共抽得 300 件产品，逐一检测，的结果如下图所示：

（1）试问这三个厂产品质量是否一致？($\alpha=0.01$)

$\chi^2=\sum_{i,j}\frac{\left(n_{ij}-\frac{n_{i\cdot}n_{\cdot j}}{n}\right)^2}{\frac{n_{i\cdot}n_{\cdot j}}{n}}>\chi_4^2(0.99)$

	1	2	3
甲			
乙			
丙			

（2）若不一致，试问哪个厂产品质量较优？哪个厂产品质量较劣？并请说明理由。

参考答案

一、（1）$P(X=k)=p^{k-1}q+q^{k-1}p,(q=1-p,k=2,3,4\cdots)$　　（2）$F_{1,1}$

（3）$\bar{X}\pm t\alpha_{/2}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}$　　（4）—（7）abac

二、1/5

三、E(X)=5/7　E(Y)=8/7　Var(X)=23/490　Var(Y)=46/147

Cov(X,Y)=-1/147　　$\rho_{X,Y}=-\frac{\sqrt{15}}{69}$

四、$P(\bar{X}>2200)\approx\Phi(2.53)\approx 0.9943$　　$n\geq 189$

五、(1) $\hat{\theta}=2\bar{X}$　$\theta^*=X_{(1)}$　(2) $\hat{\theta}=2\bar{X}=\tilde{\theta}_1$无偏；$\theta^*=$有偏 $E\theta^*=\frac{n}{n+1}\theta$，修正为

$\tilde{\theta}_2=\frac{n+1}{n}\theta^*=\frac{n+1}{n}X_{(1)}$　　(3) $Var\left(\tilde{\theta}_1\right)=\frac{1}{n}\theta^2$　$Var\left(\tilde{\theta}_2\right)=\frac{1}{n(n+1)}\theta^2$

六、（1）拒绝原假设，认为三个厂产品质量不一致；（2）甲厂最优，丙厂最劣，乙厂居间，可分别计算三个厂产品质量的算术平均数，愈小者愈优。

中国科学技术大学

2009—2010 学年第二学期考试试卷

考试科目：概率论与数理统计　　　　得 分：____________

学生所在系：____________姓 名______________学 号：____________

（考期：2010 年 7 月 14 日，闭卷，可用计算器）

一、填空判断选择。

（1）掷 3 个骰子，已知三个点数各不相同，则其中至少有一个为 6 点的概率为（）。

（2）设$X_1,\cdots,X_4$为相互独立的 N(0,1)变量，$T=a(X_1-2X_2)^2+b(3X_3+4X_4)^2$服从卡方分布，则 a=___，b=___，此时 T 的自由度为___。

（3）设随机变量 X 与 Y 相互独立分别服从参数为μ和λ的 Possion 分布，则 P(X=k|X+Y=n)=___，即在给定 X+Y=n 的条件下，X 的条件分布为____。

（4）设 Var(X)=Var(Z)，Var(Y)=4Var(X)，相关系数$\rho_{X,Y}=-1$，$\rho_{X,Z}=1/2$，则$\rho_{X,Y+Z}=$_

（5）在假设检验中，第Ⅰ类错误是指____；第Ⅱ类错误是指______。

（6）设$X_1,\cdots,X_n$为正态总体$\mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$中抽取的样本，σ^2未知，记样本均值和样本方差分别为$\bar{X}$和S^2，则假设检验$H_0:\mu\le\mu_0\leftrightarrow H_1:\mu>\mu_0$（$\mu_0$为已知数）的检验统计量为____。

（7）设$X_1,\cdots,X_n$为正态总体$\mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$中抽取的样本，μ,σ^2为未知参数，则下面的量为（　　）统计量。

(A) $\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_1^n X_i$ (B) $\bar{X}-\mu$ (C) $S^2=\frac{1}{n-1}\sum_1^n(X_i-\bar{X})^2$ (D) $\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)/S$

（8）若总体密度函数为$\mathrm{f}(x)=\frac{1}{2}(x-\mu)^{-3/2}I(x>\mu+1)$，则可以使用矩估计法估计参数$\mu$，这种说法___。（A）对　　（B）错

（9）设$\mathrm{X}\sim\mathrm{B}(n,p)$,则当 n 趋于无穷时，$2\sqrt{n}\left(arcsin\sqrt{X/n}-arcsin\sqrt{p}\right)$的分布函数收敛到标准正态分布，据此作出在 X=90,n=150 情况下，参数 p 的置信系数为 0.95 的大样本区间估计________。

（10）设$X_1,\cdots,X_n$为从均匀总体$\mathrm{U}(0,\theta),\theta>0$中抽取的样本，则$\theta$的估计量$X_{(n)}$为$\theta$的：
（A）无偏估计 （B）相合估计 （C）似然估计 （D）矩估计

二、某工厂的第一、第二、第三号车间生产同一种产品，产量分别占总产量的 1/2，1/3 和 1/6，次品率分别为 1%、1%和 2%。现从该厂某批产品中随机抽取一件，则：

（1）求取的产品为次品的概率；

（2）若取出的产品为次品，求其是第二个车间生产的概率。

三、设二维随机变量(X,Y)的联合密度可以表示成$g(x^2+y^2)$，g 为连续函数。令极坐标变换 X=Rcos θ，Y=RSin θ，问 R 与θ是否相互独立，并求出各自的密度。

四、设$X_1,\cdots,X_n$为从均匀总体$\mathrm{U}(\theta,2\theta)$中抽取的简单随机样本，试求：

（1）求θ的矩估计$\tilde{\theta}$和极大似然估计$\hat{\theta}$；

（2）矩估计$\tilde{\theta}$和极大似然估计$\hat{\theta}$是否为无偏估计？若不是，请加以修正，并说明修正

中 国 科 学 技 术 大 学

2010—2011学年第一学期考试试卷

考试科目 概率论与数理统计 得分 ________

所在系 ______ 姓名 ________ 学号 ________

考试时间: 2010年12月26日下午2:30—4:30; 使用简单计算器

装 …………… 订 …………… 线

一. 填空判断选择题(每题3分,答题请写在试卷上):

1 掷3个骰子，恰好有两枚点数相同的概率为________.

2 设 $X_1, \cdots, X_n$ 为相互独立的 $N(0, \sigma^2)$ 变量, 其中σ^2未知. 令$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$, 则$\bar{X}$的分布为________, nS^2/σ^2的分布为________.

3 设随机变量 X 和 Y 相互独立, 同分布于期望为 $\frac{1}{\lambda}$ 的指数分布, 则$\min\{X, Y\}$服从参数为______的________分布.

4 设 $Var(X) = 4Var(Y) = 1$, $Cov(X, Y) = 0.25$, 则$X - Y$与$X + Y$的相关系数 $\rho_{X-Y,X+Y} =$ ________.

5 设 A, B 为互斥事件, 则 A, B 相互独立的充分必要条件为________.

6 参数估计量优良性的准则有________(写出至少两个).

7 假设X, Y分别服从标准正态分布, 则$X+Y$的分布仍为正态分布. 该说法______.

(A) 正确 (B) 错误

8 总体参数的置信水平为95%的置信区间是指______

(A)总体参数落在一个特定的样本所构造的区间内的概率为95%

(B)总体参数落在一个特定的样本所构造的区间内的概率为5%

(C)在用同样方法构造的总体参数的多个区间中，包含总体参数的区间比例为95%

(D)在用同样方法构造的总体参数的多个区间中，包含总体参数的区间比例为5%

9 设 $X_1, \cdots, X_n$ 为来自于正态总体$N(\mu, 1)$的简单随机样本, 若要求参数 μ 的置信系数为0.95的置信区间长度不超过1, 则至少需要抽取的样本量n 为______.

(A) 14 (B) 16 (C) 18 (D) 20

10 进行1000次独立重复实验, 每次实验中事件A要么发生, 要么不发生, 且发生的概率为0.25, 则可以近似于95%的概率认为事件A发生的频率与概率相差不超过______.

(A) 2.12% (B) 2.68% (C) 1.08% (D) 3.24%

二. (15分) 假定某种病菌在群体中的带菌率为1%. 在检测时, 带菌者和不带菌者被检测出阳性的概率分别为0.98和0.02.

(1) 现有某人被测出呈阳性反应, 则他是带菌者的概率是多少?

(2) 为了进一步确认, 这个人决定再独立的做一次测试,检测结果依然是阳性, 问在两次检测结果都呈阳性反应的情况下, 他确实为带菌者的概率是多少?

三. (15分) 设随机变量 (X, Y) 服从$A = \{(x, y) : |x + y| \leq 1, |x - y| \leq 1\}$内的均匀分布, 则

(1) 试求出X和Y的边际分布;

(2) X和Y是否相互独立? 不相关?

(3) 求在$X = x$ $(0 < x < 1)$ 时Y的条件密度.

四. (15分) 设总体X的分布律为

X	1	2	3
P	p	$2p$	$1-3p$

现从此总体中抽出一样本量为n的样本, 发现其中1出现了n_1次, 2出现了n_2次, 3出现了n_3次. 试

(1) 求p的极大似然估计量$\hat{p}$和矩估计量$\tilde{p}$.

(2) 证明所得的估计量均为无偏估计, 并说明两个估计量何者最优.

五. (15分) 某针灸减肥机构宣称疗程结束后可以使参加者平均减少体重5kg以上, 为检验该广告是否可信, 调查人员随机调查跟踪了10名参加者, 测得他们参加前和参加后的体重(kg)为

参加前	65.39	62.89	63.50	60.83	63.07	62.88	57.80	63.07	66.05	70.78
参加后	61.72	59.43	59.64	57.30	58.50	60.84	51.89	60.02	63.67	65.67

假设参加前和参加后的体重服从正态分布, 试

(1) 在显著性水平0.05下检验该机构的宣传是否可信.

(2) 给出平均减少体重的95%置信区间.

六. (10分) 为研究女性和男性在美国选举中的偏好差异，1991年美国普通社会调查随机调查了577名女性和403名男性，询问每人是倾向于“支持民主党”，“支持共和党”以及“中立”，得到的调查数据如下：

	所支持政党(Party)			
性别(Gender)	民主党(0)	中立(1)	共和党(2)	总计
女性(1)	279	73	225	577
男性(0)	165	47	191	403
总数	444	120	416	980

(1) 为了检验选民政治倾向是否与性别有关, 试写出此问题的原假设.

(2) 在显著性水平0.05下, 可否认为选民的政治倾向与性别无关?

附录 分位数: $u_{0.025} = 1.960$, $u_{0.05} = 1.645$, $t_{0.025}(10) = 2.228$, $t_{0.025}(9) = 2.262$, $t_{0.05}(10) = 1.812$, $t_{0.05}(9) = 1.833$, $\chi^2_{0.05}(1) = 3.841$, $\chi^2_{0.05}(2) = 5.991$.

2010-2011第一学期概率论与数理统计期末考试试卷答案

一. (30分, 每题3分) **1**. 5/12 **2**. $N(0,\sigma^2/n)$, χ_n^2 **3**. $2\lambda e^{-2\lambda z}I(z>0)$ **4**. $3/\sqrt{21}$ **5**. $P(A),P(B)$至少一个为0. **6**. 无偏性, 相合性, 均方误差准则, 渐近正态性 **7**. B **8**. C **9**. B **10**. B

二. (15分) (1) $\frac{0.98\times 1\%}{0.98\times 1\%+0.02\times 99\%}=\frac{49}{148}=0.3311$

(2) $\frac{0.98^2\times 1\%}{0.98^2\times 1\%+0.02^2\times 99\%}=0.9604$

三. (15分) (1)由对称性, X和Y有相同的边际密度, $f(x)=\begin{cases} x+1, & -1\le x<0 \\ 1-x, & 0\le x\le 1 \end{cases}$

(2) 显然X 和Y不独立, 不相关.

(3) 易得$f(y|x)=\frac{1}{2(1-x)}I(x-1\le Y\le 1-x)$, 其中$0<x<1$

四. (15分) (1) $\hat{p}=\frac{n_1+n_2}{3n}$; $\tilde{p}=\frac{3-\bar{X}}{4}$, 其中$\bar{X}=\frac{n_1+2*n_2+3*n_3}{n}$;

(2) 由于$En_1=np, En_2=2np, En_3=n(1-3p)$, 故知$\hat{p}$和$\tilde{p}$均为无偏估计, 容易得到$var(\hat{p})=\frac{p(1-3p)}{3n}$, 而$var(\tilde{p})=\frac{3p-8p^2}{8n}$, 于是由$var(\hat{p})<var(\tilde{p})$知似然估计$\hat{p}$更有效.

五. (15分) 此为成对检验问题. 记X表示参加前后的体重差, 由题设知$X\sim N(\mu,\sigma^2)$. 从而从保护消费者角度来看, 考虑假设$H_0:\mu\le 5\leftrightarrow H_1:\mu>5$, 易知此假设的水平$\alpha$检验法则为

$$\text{当 } \sqrt{n}\frac{\bar{X}-5}{S}>t_\alpha(n-1)\text{时拒绝原假设, 否则不足以拒绝原假设}$$

(1) 当$\alpha=0.05$时, 计算得$\bar{X}=3.758$, $S=1.184575$, $n=10$,故

$\sqrt{n}\frac{\bar{X}-5}{S}=-3.315577<t_{0.05}(9)=1.833$, 从而在0.05水平下不足以拒绝原假设, 即该减肥机构的宣传不足以可信.

(2) 其95%置信区间为$[\bar{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{0.025}(9), \bar{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{0.025}(9)]$, 带入数据得到[2.91,4.61].

六. (10分) (1) 原假设可以表述为"H_0: 选民政治倾向与性别无关".

(2) 在显著性水平0.05下, 对假设H_0, 根据拟合优度检验方法知

$$\begin{aligned}\chi^2 &= (279-444*577/980)^2/(444*577/980)+(73-120*577/980)^2/(120*577/980)\\ &\quad +(225-577*416/980)^2/(577*416/980)+(165-403*444/980)^2/(403*444/980)\\ &\quad +(47-120*403/980)^2/(120*403/980)+(191-403*416/980)^2/(403*416/980)\\ &= 7.009544\end{aligned}$$

自由度为2, 从而有$\chi^2=7.009544>5.99$, 因而拒绝原假设, 即拒绝"选民的政治倾向与性别无关"这一假设.

中国科学技术大学

2010—2011 学年第二学期考试试卷

考试科目：概率论与数理统计 得 分：____________

学生所在系：____________姓 名______________学 号：____________

（考期：2011 年 6 月 4 日，闭卷，可用计算器）

一、填空判断选择题。

（1）设 A,B,C 是三个相互独立的随机事件，且$0 < P(C) < 1$，则在下列给定的四对事件中，不相互独立的是____

(A)$\overline{A+B}$和 C (B)$\overline{AC}$和 C (C)$\overline{A-B}$和$\bar{C}$ (D)$\overline{AB}$和$\bar{C}$

（2）设 A,B,C 为三个事件，则下面的等式中正确的是____

(A) $A \cup B - B = A - B$ (B) $(A-B) \cup B = A$

(C) $(A \cup B) - C = A \cup (B - C)$ (D) $A \cup B = (A\bar{B}) \cup (\bar{A}B)$

（3）设 f(x)和 g(x)为两个概率密度函数，则 af(x)+bg(x)也是概率密度函数的充要条件为______。

（4）随机变量 X 与 Y 不相关，则必有_____

(A) Var(XY)=Var(X)Var(Y) (B) F(x,y)=$F_X(x)F_Y(y)$

(C) X 与 Y 相互独立 (D) EXY=EX*EY

（5）设$\hat{\theta}_n$为未知参数θ的一个估计量，如果设$\lim_{n\to\infty} E\left|\hat{\theta}_n - \theta\right| = 0$，则$\hat{\theta}_n$为θ的__

(A) 无偏估计 （B）有效估计 （C）相合估计 （D）渐进正态估计

（6）在实验次数无穷大时，某个事件发生的频率就等于其发生的概率，该说法____

(A)正确 （B）错误

（7）连续型随机变量就是取值为连续区间的随机变量，该说法____

(A)正确 （B）错误

（8）设$X_1, \cdots, X_n$ iid~$N(\mu, 1)$，考虑假设检验问题$H_0: \mu = 0 \leftrightarrow H_1: \mu = 1$，由$\mu$的极大似然估计可以得到一个水平α检验法则为____；该检验法则犯第 II 类错误的概率为_____

（9）设基于某组样本得到的总体均值μ的 95%置信区间为[0.234,1.03]，则我们可以在显著性水平____下_____（接受或拒绝）零假设$H_0: \mu = 0$。

（10）设某种产品的质量等级可以划分为“优”、“合格”和“不合格”，则使用拟合优度检验方法在检验生产此产品的三家工厂的产品没有差异这一假设时，检验统计量服从渐进卡方分布的自由度为______

二、假设有 4 个罐子，其中第 k 个罐子里有 k-1 个红球和 4-k 个蓝球，k=1,2,3,4。现随机取出一个罐子，然后不放回地从中取两球，求：

（1）取出的两个球颜色不同的概率；

（2）若已知其中一个球为红球，则另外一个球也为红球的概率为多少？

三、设二维随机变量 X,Y 的联合概率密度函数为：

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, 0 < x < 1, 0 < y < 2x \\ 0, \quad others \end{cases}$$

(1)试求出 X,Y 的边际概率密度函数$f_X(x)$和$f_Y(y)$；

（2）试求出 Z=2X-Y 的概率密度函数$f_z(z)$；

（3）试求$P\left(Y \le \frac{1}{2} | X = \frac{1}{2}\right)$。

四、某种疾病的发病率为 0.005，现随机调查 1000 人，考虑事件 A=“在调查的人中发病人数在 3 至 7 个人”，试：

（1）使用 Possion 逼近方法求 P(A)；

（2）使用中心极限定理求 P(A)。

五、设样本$Y_1, \cdots, Y_n$相互独立，$Y_i \sim N(a_i\mu, \sigma^2), i = 1, \cdots, n$，其中$a_1, \cdots, a_n$为已知不全为零的常数。

（1）求μ和σ^2的极大似然估计$\hat{\mu}$和$\widehat{\sigma^2}$；

（2）$\hat{\mu}$是否为μ的无偏估计？

（3）$\widehat{\sigma^2}$是否为σ^2的无偏估计？若是请加以证明，若不是请加以修正。

六、为了了解甲乙两企业的职工工资水平，分别从两个企业各随机抽取若干名职工调查，的如下数据（单位：元）：

甲企业	750	1060	750	1820	1140	1050	1000	
乙企业	1000	1900	900	1800	1200	1700	1950	1200

假设两个企业的工资分别服从正态分布，且总体独立而均值方差未知。试根据以上数据判断：

（1）两企业职工工资的方差是否相等（$\alpha = 0.05$）

（2）甲企业职工平均工资是否低于乙企业职工平均工资（$\alpha = 0.05$）

2010-2011第二学期概率论与数理统计期末考试试卷答案

一. (30分, 每题3分)

1. B **2**. A **3**. $a+b=1, af(x)+bg(x)\geq 0, \forall x$ **4**. D **5**. C **6**. B **7**. B

8. 当$\bar{X} > u_\alpha/\sqrt{n}$时拒绝$H_0$,否则不足以拒绝. $\Phi(u_\alpha - \sqrt{n})$

9. 0.05, 拒绝　　**10**. 4

二. (15分) (1) $\frac{1}{4}[0+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+0]=\frac{1}{3}$

(2) $\frac{1}{2}$

三. (15分) (1)X和Y的边际密度分别为, $f_X(x)=2xI(0<x<1)$, $f_Y(y)=[1-\frac{y}{2}]I(0<y<2)$.

(2) $f_Z(z)=[1-\frac{z}{2}]I(0<z<2)$.

(3) 1/2

四. (10分) (1) $\sum_{k=3}^{7}\frac{5^k}{k!}e^{-5}=0.742$

(2) $2\Phi(\frac{2}{\sqrt{5\times 0.995}})-1=2\Phi(0.897)-1=0.63$.

五. (15分) (1) $\hat{\mu}=\frac{\sum_i a_i y_i}{\sum_i a_i^2}$, $\widehat{\sigma^2}=\frac{1}{n}\sum_i(y_i-a_i\hat{\mu})^2$

(2) 是无偏估计.

(3) 不是无偏估计, 由于$E\widehat{\sigma^2}=\frac{1}{n}\sum_i E(y_i-a_i\hat{\mu})^2=\frac{1}{n}\sum_i E(y_i-a_i\mu+a_i(\mu-\hat{\mu}))^2=\frac{1}{n}[\sum_i E(y_i-a_i\mu)^2-\sum_i a_i^2 E(\mu-\hat{\mu})^2]=\frac{1}{n}[\sum_i Var(y_i)-\sum_i a_i^2 Var(\hat{\mu})]=\frac{n-1}{n}\sigma^2$. 从而可以修正为$\overline{\sigma^2}=\frac{n}{n-1}\widehat{\sigma^2}$

六. (15分)

记X_i, Y_j分别为甲企业和乙企业的样本, 则由$\bar{X}=1081.429, S_X^2=129447.6, \bar{Y}=1456.25, S_Y^2=181026.8$, 有

(1) 假设可以表述为$H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2 \leftrightarrow H_1:\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$.

检验统计量$0.175=F_{0.975}(6,7)<T=\frac{S_X^2}{S_Y^2}=0.7151<F_{0.025}(6,7)=5.119$, 故没有足够的理由认为两家企业工人工资方差不同.

(2) 由(1)的结果,可以认为两组样本方差是相同的, 故对假设$H_0:\mu_1\geq\mu_2 \leftrightarrow H_1:\mu_1<\mu_2$

检验统计量$T=\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{\frac{15}{728}(6S_X^2+7S_Y^2)}}=-1.8265<t_{0.05}(13)=1.771$ 所以拒绝零假设, 故有充足的理由认为甲企业的平均工资低于乙企业的平均工资.

中国科学技术大学

2011—2012 学年第一学期考试试卷

考试科目：<u>概率论与数理统计</u>　　　　　　得　分：____________

学生所在系：____________姓　名____________学　号：____________

（考期：2012 年 1 月 6 日，闭卷，可用计算器）

$p = \frac{0.6\times 0.01}{0.6\times 0.01 + 0.4\times 0.02} = \frac{3}{7}$

一、简单题（写出简要步骤）。

$\frac{\theta+1}{\theta+2} = \frac{1}{2}$

$2\theta+2=\theta+2$

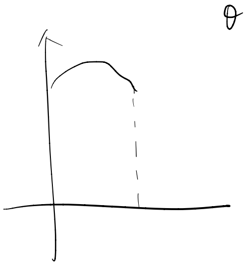
$\theta=0$

（1）设一批电子元件由甲工厂和乙工厂共同生产，其中甲、乙两厂的生产份额分别为 60%和 40%。根据经验可知甲、乙两工厂生产的电子元件的次品率分别为 1%和 2%，现从这批产品中随机抽取一件，发现是次品，则该次品是甲厂生产的概率是多少？

（2）从 1，2，3，4 四个数中任取一个数，记为 X，再从 1 到 X 中任取一个数，记为 Y，则{Y=2}这个事件发生的概率是多少？ $\frac{13}{48}$

$(1+\theta)x^{\theta+1}dx$

$\frac{\theta+1}{\theta+2} = \bar{X}$



（3）设 X 的概率密度函数为$f(x) = (1+\theta)x^{\theta}, 0 < x < 1$。现考虑假设检验问题$H_0: \theta = 5 \leftrightarrow H_1: \theta = 3$。该检验的否定域为$X > 1/2$，则犯第一类错误和第二类错误的概率分别为多少？

$X > \frac{1}{2}$ 拒绝 H_0　$P(X > \frac{1}{2}) = \int_{\frac{1}{2}}^{1} d(x^{\theta+1}) = 1-(\frac{1}{2})^{\theta+1}$

$(\frac{1}{2})^{\theta+1}$

（4）已知一批零件的长度 X（单位：cm）服从正态分布$N(\mu, 1)$，从中随机抽取 16 个零件，得到长度的平均值为 40cm，试求μ的置信水平为 0.95 的置信区间？

（5）设$X_1, \cdots, X_n$是一组独立同分布样本，且$X_1 \sim N(\mu, \sigma^2)$，试问 c 取多少才使得$c\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2$为$\sigma^2$的无偏估计？

$E(X_{i+1}-X_i)^2$

$= (\mu^2+\sigma^2+\mu^2+\sigma^2-2\mu^2)$

$= 2\sigma^2(n-1)\cdot c$

$\Rightarrow c = \frac{1}{2(n-1)}$

（6）进行 1000 次独立重复试验，每次实验中事件 A 发生的概率为 0.25，试问能以 95%的把握保证 1000 次实验中事件 A 发生的频率与概率相差不超过多少？

$\frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}} \sim N(0,1)$　$n=1000$　$p=0.25$

二、设随机向量(X,Y)服从区域 D 上的均匀分布，其中 D 是由直线 y=x,x=0,y=1 所围成的区域，试求：

（1）(X,Y)的联合密度$f(x,y)$　　（2）(X,Y)的边缘密度函数$f_1(x)$和$f_2(y)$

$f_1(x) = 1-x$　$f_2(y) = y$

（3）条件密度$f(x|Y=y)$　　（4）E(X|Y=y)

$E(X|Y=y) = \int_0^y \frac{2x}{y}dx$

三、设总体 X 的概率分布如下表，其中$0 < \theta < 1$为未知参数。现从此总体中随机抽取 100 个样本，发现有 17 个样本取值为 0，33 个样本取值为 1，50 个样本取值为 2。

$\hat{\theta}_1 = 2(\bar{X}-1)$

X	0	1	2
P	$\theta/4$	$1-\theta$	$3\theta/4$

$\frac{n_1}{n} + \frac{n_3}{n} =$

（1）求θ的矩估计$\hat{\theta}_1$和极大似然估计$\hat{\theta}_2$；并分别计算相应的计算值；

（2）$\hat{\theta}_1$和$\hat{\theta}_2$是否是无偏的？若否，请加以修正；

（3）请问修正后的估计哪个更有效？

四、为了解男性和女性对三种类型的啤酒：淡啤酒、普通啤酒和黑啤酒的偏好有没有差异，分别调查了 180 位男士和 120 位女士，得如下数据：

	淡啤酒	普通啤酒	黑啤酒
男性	49	31	100
女性	51	20	49

请问男性和女性对这三种类型的啤酒的偏好有显著性差异吗？（$\alpha = 0.05$）

五、为了比较新旧两种肥料对小麦产量的影响，研究者选择了面积相等、土壤等条件相同的 12 块土地，分别在 6 块地上施用新旧两种肥料。对于旧肥料，得到的产量数据是 17，14，18，13，19 和 15；而新肥料的产量数据为：16，19，20，22，18 和 19。假设两种肥料的产量分别服从正态分布，且总体独立，均值和方差未知。试根据以上数据判断：

（1）两种肥料产量的方差是否相等？（$\alpha = 0.05$）

（2）新肥料获得的平均产量是否显著地高于旧肥料？（$\alpha = 0.05$）

中国科学技术大学

2011—2012 学年第二学期考试试卷

考试科目：概率论与数理统计　　　　　　　得　分：＿＿＿＿＿＿

学生所在系：＿＿＿＿＿＿姓　名＿＿＿＿＿＿＿学　号：＿＿＿＿＿＿

（考期：2012 年 6 月 9 日，闭卷，可用计算器）

一、判断题

（1）若

二、（15 分）设随机变量 X 满足：$|X|\le 1$，$P(X=-1)=1/8$，$P(X=1)=1/4$，而且，X 在 $(-1,\ 1)$ 内任一子区间上取值的概率与该子区间的长度成正比。试求：

（1）X 的概率分布函数 $F(x)=P(X\le x)$；

（2）X 取负值的概率；　（3）X 的数学期望 $E(X)$。

三、（20 分）二维随机变量 (X,Y) 的密度函数为：

$$f(x,y)=\begin{cases} Ae^{-(3x+4y)}, & (x>0,y>0) \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

（1）试求系数 $A=$？；（2）X 与 Y 是否独立？

（3）试求 $Z=X+Y$ 的密度函数 $f_Z(z)$；

（4）试求 $Var\left(X\mid X+Y=1\right)$。

四、（20 分）设样本 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 抽自正态总体 $X\sim N(\mu\ ,\ 1)$，　μ 为未知参数

（1）　试求 $\theta=P(X\ge 2)$ 的极大似然估计 θ^*（结果可用 $\Phi(.)$ 的形式表示）；

（2）　写出 μ 的 $(1-\alpha)$ 置信区间，并求 θ 的 $(1-\alpha)$ 置信区间。

五、（15 分）为考查 A,B 两种制鞋材料的耐磨性，用它们制作了 10 双鞋，其中每双鞋的两只鞋分别用 A 和 B 两种材料制作(左、右脚两只鞋随机地采用 A 或 B)。10 个男孩试穿这 10 双鞋之后的磨损情况如下表所示（数字代表磨损程度），假定 A,B 两组数据的差服从正态

分布，问是否可以认为这两种材料的耐磨性无显著差异？（$\alpha = 0.05$）

男孩	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	13.2	8.2	10.9	14.3	10.7	6.6	9.5	10.8	8.8	13.3
B	14.0	8.8	11.2	14.2	11.8	6.4	9.8	11.3	9.3	13.6
差	-0.8	-0.6	-0.3	0.1	-1.1	0.2	-0.3	-0.5	-0.5	-0.3

六、（15 分）投资者感兴趣的一个问题，是上市公司股票价格的变化与其公司总部所在地是否有关。下表给出的是美国两个不同地区（公司总部所在地）的上市公司在 1998 年第三季度内股价变化情况。表格内的数字是相应的上市公司的个数。问股票价格的变化是否存在地区间的差异？（$\alpha = 0.05$）

股价变化 / 总部所在地	上升	不变	下降
新英格兰地区	100	7	561
西北地区	88	10	370

（完）

（参考数值： $\chi^2_{0.025}(2) = 7.3778$； $\chi^2_{0.05}(2) = 5.9915$；

$\chi^2_{0.025}(6) = 14.4494$； $\chi^2_{0.05}(6) = 12.5916$； $t_{0.025}(9) = 2.2622$；

$t_{0.05}(9) = 1.8331$； $t_{0.025}(10) = 2.2281$； $t_{0.05}(10) = 1.8125$。 ）

概率统计期末考试（2008 年 1 月 22 日）

（参考答案与评分标准）

一、（15 分）

（1） $p^* = p\pi + (1-p)(1-\pi)$， $p = (p^* - 1 + \pi)\big/(2\pi - 1)$，当 $p^* = 0.55, \pi = 0.4$ 时，

$p = 0.25$；

（2）当 $\pi = 0.5$ 时， $p^* \equiv 0.5$，由此无法解出 p。

二、（15 分）

（1）$F(x)=\begin{cases}1, & x\ge 1\\ \frac{5x+7}{16}, & -1<x<1\\ \frac{1}{8}, & x=-1\\ 0, & x<-1\end{cases}$；（2）$=F(0)=\dfrac{7}{16}$；（3）$E(X)=\dfrac{1}{8}$。

三、（20 分）

（1）$A=12$；（2）独立；（3）$f_Z(z)=12(e^{-3z}-e^{-4z}),(z>0)$；

（4）$f_{X|Z}(x\,|\,Z=1)=\dfrac{e^x}{e-1}$，$(0<x<1)$； $E(X\,|\,Z=1)=\dfrac{1}{e-1}$。

四、（20 分）

（1）$\theta^*=1-\Phi(2-\overline{X})$；（2）$\mu\in\overline{X}\pm u_{\frac{\alpha}{2}}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$； $\theta\in\Phi(\overline{X}-2\pm u_{\frac{\alpha}{2}}\dfrac{1}{\sqrt{n}})$。

五、（15 分）

$$H_0:\mu_Z=0\leftrightarrow H_1:\mu_Z\ne 0$$

$\dfrac{|\overline{Z}|}{S_Z/\sqrt{n}}=\dfrac{|-0.41|}{0.3872/\sqrt{10}}\approx 3.3485>2.2622=t_{0.025}(9)$，拒绝 H_0，有显著差异。

六、（15 分）

$Z\approx 5.4437<5.9915=\chi^2_{0.05}(2)$，无法拒绝 H_0，未见有显著差异。

（完）