Homework 7

和泳毅 PB19010450

1.如果将输入的图用邻接矩阵来表示，并修改算法来应对此种形式的输入，请问 **BFS** 的运行时间将是多少?

答:

只需要改动原算法的12行的循环，对该结点检查每一个结点是否与它相邻，这里耗时$O(V)$。由于要遍历图中每一个结点，最坏情况下总耗时$O(V^2)$。

2.对于有向图$G=(V,E)$来说，如果$u \rightsquigarrow v$ 意味着图G至多包含一条从u到v的简单路径，则图G是单连通图。请给出一个有效算法来判断一个有向图是否是单连通图。

答:

先对G做拓扑排序，为每个结点维护一个辅助列表，其中只包含该结点入度为0的祖先。按照拓扑排序的顺序更新每个结点的辅助列表。如果出现一个结点的两个直系父结点的辅助列表中包含相同的祖先，则G不是单连通的。如果每一步更新，该结点的所有直系父结点的辅助列表不相交，则G是单连通的。由于要遍历每一个结点，且对每一个结点要遍历所有接入它的结点（入度数），所以耗时$O(VE)$。

3.假定图中的边权重全部为整数，且在范围 $1 \sim |V|$内，在此情况下，**Kruskal** 算法最快能多快？如果变得权重取值范围在1到某个常数W之间呢?

答:

如果边权重都是$1 \sim |V|$内的整数，可以通过线性时间对边权计数排序耗时$O(V+E)$，又由于假定图G连通，$|E| \geq |V|-1$，即$V=O(E)$，所以排序时间重新表示为$O(E)$。除此之外，**Kruskal**算法初始化时间为$O(V)$，不相交集合操作时间$O(E\alpha(V))$，所以总时间$O(E\alpha(V))$。

如果权重取值范围在1到某个常数W之间，同样采用计数排序，并且由于W是常数，$O(W+E)=O(E)$，总时间不变还是$O(E\alpha(V))$。

4.假定图中的边权重全部为整数，且在范围$1 \sim |V|$内，在此情况下，**Prim** 算法最快能多快？如果变得权重取值范围在1到某个常数W之间呢?

答:

如果边权重都在 $1 \sim |V|$范围内，可以维护一个长度为$|V|$的辅助列表数组来存放v，使得$v.key$与数组索引对应。 DECREASE-KEY操作时，只需将v从当前包含它的列表中删除再添加到与其新key值对应的列表中。EXTRACT-MIN操作时，可以维护一个包含非空列表的索引的链表，也可以仅通过线性时间来维护。 由于所有这些操作都可以在线性时间内完成，因此我们的总运行时间为 $O(E+V)=O(E)$。

如果权重取值范围在1到某个常数W之间，可以通过vEB树在$O(\lg(\lg(W)))$的时间执行上述两个操作，总运行时间可以是$O((V+E)\lg(\lg(W)))$。