2021 年秋季学期算法基础期末考试（样卷）

学号 ______________ 姓名 ______________

6 x 5 (2, 3)

4 x 10

2 x 15

2 选 1

主定理：令 $a \ge 1$ 和 $b > 1$ 是常数，$f(n)$ 是一个函数，$T(n)$ 是定义在非负整数上的递归式：

$$T(n) = aT(n/b) + f(n)$$

其中我们将 n/b 解释为 $\lfloor n/b \rfloor$ 或 $\lceil n/b \rceil$。那么 $T(n)$ 有如下渐进界：

1. 若对某个常数 $\varepsilon > 0$ 有 $f(n) = O(n^{\log_b a - \varepsilon})$，则 $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$。
2. 若对整数 $k \ge 0$ 有 $f(n) = \Theta(n^{\log_b a} \lg^k n)$，则 $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \lg^{k+1} n)$。
3. 若对某个常数 $\varepsilon > 0$ 有 $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon})$，且对某个常数 $c < 1$ 和所有足够大的 n 有 $af(n/b) \le cf(n)$，则 $T(n) = \Theta(f(n))$。

Master Theorem: Let $a \ge 1$ and $b > 1$ be constants and $f(n)$ be a function. Let $T(n)$ be defined on the nonnegative integers by the following recurrence

$$T(n) = aT(n/b) + f(n)$$

Notice that here n/b can be interpreted as either $\lfloor n/b \rfloor$ or $\lceil n/b \rceil$. Then $T(n)$ can be bounded asymptotically as follows:

1. If there exists a constant $\varepsilon > 0$ such that $f(n) = O(n^{\log_b a - \varepsilon})$ then $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$.
2. If there exists an integer $k \ge 0$ such that $f(n) = \Theta(n^{\log_b a} \lg^k n)$ then $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \lg^{k+1} n)$.
3. If there exists a constant $\varepsilon > 0$ such that $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon})$, and if $af(n/b) \le cf(n)$ for some constant $c < 1$, then $T(n) = \Theta(f(n))$.

$f(n) = n \log n = c\, n \log n$ lg log

一、**判断题**（根据表述判断正误，并简要说明理由；每题 6 分，共 30 分）。

1. (**T**, **F**) 递归式 $T(n) = 3T(\frac{n}{2}) + n\lg n$ 的解为 $T(n) = \Theta(n^{\lg 3})$。

$O(n \log n)$

$a = 3$ $f(n) = n \log n < O(n^{1+\delta})$ for any δ

$b = 2$ 定理第一条 $T(n) = \Theta(n^{\log_2 3})$

$\log_2 3$

2. (**T**, **F**) 对于一个无序的数组，可以在 $O(n)$ 的时间内求出，从这数组的第 $\lfloor\sqrt{n}\rfloor$ 小的数到第 $2\lfloor\sqrt{n}\rfloor$ 小的数的所有数之和。

k_1 k_2

$O(n)$ k $O(n)$ $O(n)$

遍历一遍 $O(n)$

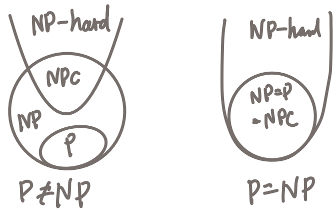
$O(n)$

3. (**T**, **F**) 对于一个含有 n 个点以及 m 条边的有向图，其中所有的边的权重都大于 0，那么可以在 $O(mn + n^2 \lg n)$ 的时间内求出所有点对之间的最短路径。

Johnson 算法.   floyd 算法 n^3

4. (**T**, **F**) $2-SAT$(可满足性) 问题和 $3-SAT$ 问题均属于 NPC 问题，其中 $3-SAT$ 问题是 $NP-hard$ 难度的，而 $2-SAT$ 问题可在多项式时间内求解。

P



5. (**T**, **F**) 多项式时间近似模式（PTAS）是这样一种近似算法：它的输入除了该问题的实例外，还有一个值 $\varepsilon > 0$，使得对于任何固定的 ε，该模式是一个 $(1+\varepsilon)$ 的近似算法并且都以其输入实例规模 n 的多项式时间运行。

背包问题　　PTAS 关于 n 多项式

$O(nW)$　　item i　v_i　w_i　　关于 ε 可能是指数

PTAS　　$\bar{v}_i = \lceil \frac{v_i}{\theta} \rceil \theta$ = $\hat{v}_i = \lceil \frac{v_i}{\theta} \rceil$　　Value　　θ

$\frac{Value}{\theta}$　　$\theta = \frac{\varepsilon v_{max}}{2n}$　　value

二、**简答题**（根据题目要求写出解答过程；每题 10 分，共 40 分）。

1. 分治策略（Divide-and-Conquer）是我们在算法设计中经常用到的方法。同时，递归式与分治方法紧密相关，它可以用来刻画分治算法的运行时间。请说明何为分治策略以及你所知道的求解递归式的方法。

分治
- 分解：化分成子问题
- 解决：求解子问题
- 合并：将子问题合并成原问题

递归
- 代入法
- 递归树
- 主方法

$T(n)$

$T(\frac{n}{2})$　$T(\frac{n}{2})$ … $n/\lg n$

$T(\frac{n}{4})$ …

$T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + n\lg n$

2. 数据库中存储了大小为 n, 取值范围在 0 到 750 区间的整数数组，要求数据库对该数组做某种线性时间的预处理，使得对于任意的统计某个区间 $[a,b], a,b \in [0,k]$ 元素个数的查询需求，该数据库可以在 $O(1)$ 时间内返回结果。

$0 \sim 750$　　$[0,750]$　$X[750]$　　$X[i]$　$0-i$

$n \to k$　+1　$k-750$

$[0,750]$　　$X[a]$ 是 $0-a$ 的值的个数

$X[b] - X[a]$　　$X[b]-X[a]$　　$O(n)$　$O(1)$

3. 对于 n 件物品，背包容量为 W 的 0/1 背包问题，其中第 i 件物品的价值为 v_i，重量为 w_i。请写出用动态规划求解该问题的时间复杂度，并解释为什么该算法被称为伪多项式时间算法。

$O(Wn)$　　$V[k,W] = \begin{cases} V[k-1,W] & w_k > W \\ \max\{V[k-1,W], V[k-1,W-w_k]+b_k\} & w_k \le W \end{cases}$

输入规模是输入数据的位数. W不是输入规模 $\log W$才是

指数

KMP，自动机

4. 计算 KMP 算法中对应于模式 $P = ababbabbabbababbabb$ 的前缀函数 π.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
$P[i]$	a	b	a	b	b	a	b	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a	b	b
$\pi[i]$	0	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	3	4	5	6	7	8

三、**综合题**（根据题目要求写出解答过程；每题 15 分，共 30 分）。

1. 给定一排共 n 堆石子，其中第 i 堆石子的个数为 a_i，现在需要将石子合并为一堆，每次操作只允许合并相邻的两堆石子，代价为被合并的两堆石子的个数之和。
（1）请使用动态规划（Dynamic Programming）的方法求合并石子的最小代价，列出状态转移方程并分析时间复杂度。
（2）假设合并操作可以合并任意两堆石子（即不需要相邻），请设计一种渐进时间复杂度为 $O(n\lg n)$ 的算法求解合并石子的最小代价。

1) 和矩阵连乘是类似的，只有相邻的可以相乘

$sum[i][j] = \sum_{m=i}^{j} a_m$

$i \le k \le j$

$$dp[i][j] = \begin{cases} 0 & i=j \\ \underbrace{\min(dp[i][k] + dp[k+1][j])}_{\text{之前合并的代价}} + \underbrace{sum[i][j]}_{\text{这次合并的代价}} & i \ne j \end{cases}$$

$[i, \ldots k, k+1 \ldots j]$

$i \backslash j$	0	1	2	3	…	n
0	0	w_0+w_1				
1		0	w_1+w_2			
2			0			
⋮						
n						0

表的大小 n^2　　$K[i, j]$

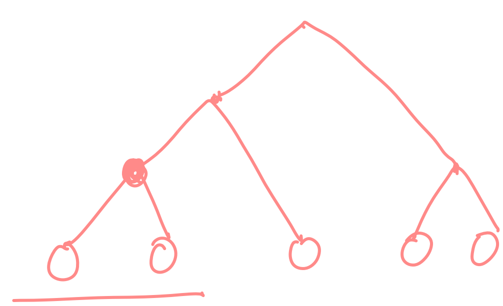
填表 n

时间复杂度 $O(n^3)$　　$O(n^3)$

2) 贪心解，每次选择最小的两个堆合并.

哈夫曼的变形　　$n\log n$

找最小的两个值使用优先队列

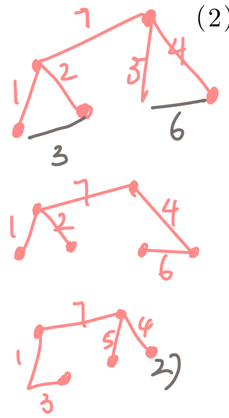


$n \log n$

2. 给定一个无向图 $G=(V,E)$，假设其所有边的权重各不相同。我们定义一个第二小生成树：假设 $\mathscr{T}$ 是图 G 的所有生成树的集合，T 是图 G 的最小生成树，那么图 G 的第二小生成树 T_2 满足 $w(T_2)=\min_{T'\in\mathscr{T}-T} w(T')$，其中 $w(T')$ 代表了生成树 T' 的权重之和。

（1）请给出一个例子，说明第二小生成树不是唯一的。 w_0 w_1

（2）请证明，存在边 $(u,v)\in T$ 和边 $(x,y)\notin T$ 满足 $T-(u,v)+(x,y)$ 是图 G 的一棵第二小生成树。



mst T_0

$\boxed{w_1-w_0}$

$(u,v)\in T_0$

$(u',v')\in T_0$

$\boxed{(u',v')}$

T

$(u',v')\notin T_0$

min k

k

2) 我们用 prim, kurskal 算法得到了一棵 mst

枚举每一个不在这个树上的边，加入 mst，形成一个环，删掉环路中除了该边最长的边。

min 上面所有情况。

枚举每一个不在这棵树上的边，加入这条边后跑 kurskal 算法

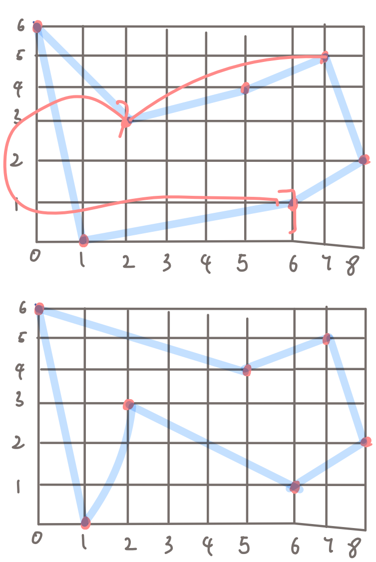
从小到大加边，只有之前会形成环路的边不会走加入

四、附加题（根据题目要求写出解答过程；每题 10 分，共 10 分）。

在旅行商问题 (TSP) 中，给定平面 n 个点作为输入，希望求出连接所有点的最短巡游路线。这个问题是 $NP-Hard$ 问题。

为了简化 TSP 问题，我们限制巡游路线为双调巡游 (bitonic tours)，即从最左边的点开始，严格向右前进直到最右端的点，然后调头严格向左前进，直至回到起始点。下图是一个 $n=7$ 的平面图的两种双调巡游的方案。

设计一个 $O(n^2)$ 时间的最优双调巡游路线算法（路线长度最短）。你可以认为任何两个点的 x 坐标均不同，且所有实数运算都花费单位时间。



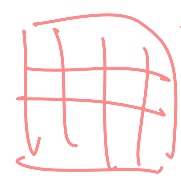
1) 将每个点按照 x 坐标排序 $O(n\log n)$

$d(n,n)$

2) 最优子结构 $d(i,j)$ $P_i \to$ 从右到左到 P_1，然后又到 P_j

经过 P_1 到 $P_{\max(i,j)}$ 的所有点 1次

$dist(i,j)$ 是点 i,j 的直线距离



$n\times n$

$O(n^2)$

3) $j<i-1$ $\quad d(i,j)=d(i-1,j)+dist(i-1,i)$

$j=i-1$ $\quad d(i,j)=\min\{(d(k,j)+dist(i,k))\}$ $\quad k<j\ [i,k]$

$j=i$ $\quad d(i,i)=d(i-1,i)+dis(i-1,i)$