Homework 8

和泳毅 PB19010450

1.给定$G=(V,E)$是一带权重且没有权重为负值的环路的有向图，对于所有的结点$v \in V$，从源结点s到结点v之间的最短路径中，包含边的条数的最大值为m。请对算法 **BELLMAN-FORD** 进行简单修改，可以让其在$m+1$遍松弛操作之后终止，即使m不是事先知道的一个数值。

答：

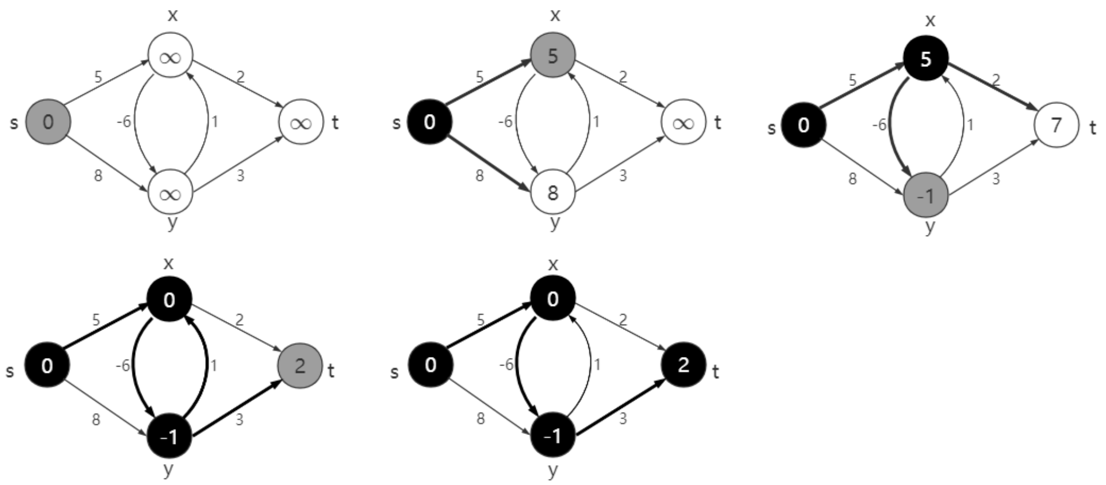
由上界性质，对$v \in V$当$d.v$松弛到$\delta(s.v)$时，其值将不再改变。并结合路径松弛性质，当最短路径中包含边的条数的最大值为m时，m次松弛操作后每一个结点的$v.d$都将等于最短路径权值$\delta(s.v)$，即第$m+1$次松弛时所有的$v.d$都不再改变。于是当所有$v.d$都不再改变时，终止算法。

```
BELLMAN-FORD-(M+1)(G,w,s)
    INITAILIZE-SINGLE-SOURCE(G,s)
    flag = TRUE
    while flag == TRUE
        flag = FALSE
        for each edge(u,v)∈G.E
            RELAX-M(u,v,w,flag)

RELAX-M(u,v,w,flag)
    if v.d > u.d + w(u,v)
        v.d  = u.d + w(u,v)
        v.π = u
        flag = TRUE
```

2.请举出一个包含负权重的有向图，使得 **Dijkstra** 算法在其上运行时将产生不正确的结果。为什么在有负权重的情况下，这一定理的证明不成立?

答：



图中存在权重为负的环，所以x、y、t的最短路径权值应该为$-\infty$，通过**Dijkstra**算法产生了不正确的结果。这是由于该算法只进行有限次松弛操作，不能得到$-\infty$的$v.d$。并且在证明该定理时，我们有假设所有权重非负，如果存在负权重的边，我们不能得到$\delta(s,y) \le \delta(s.u)$，从而也无法得到$\delta(s.u) = u.d$，所以证明不成立。

3.**Floyd-Warshall** 算法的空间需求为$\Theta(n^3)$, 因为要计算$d_{ij}^{(k)}$, 其中$i,j,k = 1,2,\ldots,n$。请证明下面所列出的去掉所有上标的算法是正确的，从而将 **Floyd-Warshall** 算法的空间需求降低到$\Theta(n^2)$。

```
Floyd-Warshall'(W)
1: n = W.rows
2: D = W
3: for k = 1 to n
4:     for i = 1 to n
5:         for j = 1 to n
6:             d[i][j] = min(d[i][j], d[i][k]+d[k][j])
7: return D
```

答:

考虑在计算$d_{ij}^{(k)}$时，$d_{ij}^{(k-1)}, d_{ik}^{(k-1)}, d_{kj}^{(k-1)}$的状态。显然在第$k$次更新$d_{ij}$前，其值不会改变，依旧是第$k-1$次更新是值$d_{ij}^{(k-1)}$，所以可以用$d_{ij}$代替$d_{ij}^{(k-1)}$。接下来观察$d_{ik}^{(k-1)}, d_{kj}^{(k-1)}$，回顾定义$d_{ik}^{(k-1)}$表示结点$i$到$k$且中间结点在$\{1,\ldots k-1\}$中的最短路径权值，而结点$i$到$k$的最短路径必然包含结点$k$，所以当中间结点在$\{1,\ldots k\}$中时，其最短路径权值不会发生变化，即$d_{ik}^{(k-1)}$不会改变，可以用$d_{ik}$代替$d_{ik}^{(k-1)}$。$d_{kj}^{(k-1)}$同理。所以去掉所有上标后的算法是正确的，即该矩阵可以就地更新，空间需求降低到$\Theta(n^2)$。