Homework 9

和泳毅 PB19010450

1.我们怎样才能使用 **Floyd-Warshall** 算法的输出来检测权重为负值的环路?

答:

可以输出算法终止时输出的矩阵$D^{(n)}$来判断是否存在权重为负值的环路，如果存在权重为负值的环路，矩阵$D^{(n)}$的对角线上至少存在一个值为负数。

2.假定在一个权重函数为W的有向图图 G上运行 **Johnson** 算法。证明：如果图G包含一条权重为 0 的环路c，那么对于环路c上的每条边(u,v)，$\hat{w}(u,v)=0$。

答:

对于权重为 0 的环路 $c=<v_0,v_1,...,v_k>$，其中 $v_0=v_k$。重新赋予权重后有：$\hat{w}(c)=w(c)+h(v_0)-h(v_k)=w(c)=0$。并且由于重新赋权之后，新权重都是非负值，所以对于环路c上的每条边(u,v)，$\hat{w}(u,v)\geq 0$。结合$\hat{w}(c)=\sum_{i=1}^{k}\hat{w}(v_{i-1},v_i)=0$，只有每条边$\hat{w}(u,v)=0$。

3.(最大流的更新) 设$G=(V,E)$是一个源结点为s汇结点为t的流网络，其容量全部为整数值。假定我们已经给定G的一个最大流。

a. 如果将单条边$(u,v)\in E$的容量增加1个单位，请给出一个$O(V+E)$时间的算法来对最大流进行更新。

b. 如果将单条边$(u,v)\in E$的容量减少1个单位，请给出一个$O(V+E)$时间的算法来对最大流进行更新。

答:

a. 如果存在一个最小割而边(u,v)不穿过它，则最大流$|f|$不增加，因此残存网络中将不存在增广路径。 如果边(u,v)穿过所有最小割，则$|f|$将增加1个单位，于是可以执行一次 **Ford-Fulkerson** 的循环。 由于边容量是整数，因此流量值都是整数。 并且因为流量严格增加，**Ford-Fulkerson** 的 while 循环的单次循环将使$|f|$增加1个单位，这就是更新后的最大流。其中使用深度优先搜索寻找增广路径，时间为$O(V+E')=O(V+E)$ 。

b. 如果边(u,v)的流量在容量减少前已经至少比容量少1个单位，则最大流$|f|$不发生变化。否则，先在$O(V+E)$时间内使用深度优先搜索找到残存网络中从s到t的包含(u,v)的路径。将该路径上每条边的流量减少1个单位，则$|f|$此时减少1个单位。然后在$O(V+E)$时间内运行 一次**Ford-Fulkerson** 的 while 循环。如果找不到增广路径，算法终止。如果找到了增广路径，由于流量值都是整数并且流量严格增加，则$|f|$增加1个单位然后终止。