Homework 3

和泳毅 PB19010450

1.我们对钢条切割问题进行一点修改，除了切割下的钢条段具有不同价格p_i外，每次切割还要付出固定的成本c。这样，切割方案的收益就等于钢条段的价格之和减去切割的成本。设计一个动态规划算法解决修改后的钢条切割问题。

答：相对于原版 EXTENDED-BOTTOM-UP-CUT-ROD，每次计算收益要分切割和不切割两种情况，切割是减去额外的成本。

```
EXTENDED-BUTTOM_UP-CUT-ROD(p,n)
let r[0..n] and s[0..n] be new arrays
r[0]=0
for j = 1 to n
    q = p[j]
    s[j] = j
    for i = 1 to j-1
        if q < p[i] + r[j-i] - c
            q = p[i] + r[j-i] - c
            s[j] = i
    r[j] = q
return r and s
```

2.令$R(i,j)$表示在一次调用 MATRIX-CHAIN-ORDER 过程中，计算其他表项时访问表项$m[i,j]$的次数。证明：

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n}R(i,j)=\frac{n^3-n}{3}$$

答：关注 MATRIX-CHAIN-ORDER 的5~13行的三层循环，其中第三层循环访问表项$m[i,j]$两次。第一层循环执行$n-1$次，第二层循环执行$n-l+1$次，第三层循环执行$j-i=l-1$次。

所以总次数为：

$$
\begin{aligned}
\sum_{l=2}^{n} 2(l-1)(n-l+1) &= \sum_{l=1}^{n-1} 2l(n-l) \\
&= 2n\sum_{l=1}^{n-1} l - 2\sum_{l=1}^{n-1} l^2 \\
&= 2n\frac{n(n-1)}{2} - 2\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \\
&= n^3 - n^2 - \frac{1}{3}(2n^3 - 3n^2 + n) \\
&= \frac{n^3 - n}{3}
\end{aligned}
$$

3.对输入链长度为n的矩阵链乘法问题，描述其子问题图：它包含多少个顶点？包含多少条边？这些边分别连接哪些顶点。

答：每一个矩阵链作为一个顶点$v_{ij}(i \le j)$，一共$1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$个。

每一个顶点，对每一个分割$k(i \le k < j)$，都有两条边(v_{ij}, v_{ik})和$(v_{ij}, v_{k+1,j})$。一共$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} 2(j-i) = \frac{n(n^2-1)}{3}$个。