Homework 10

和泳毅 PB19010450

1.试说明如何扩展 **Rabin-Karp** 算法用于处理以下问题: 在一个$n \times n$的二维字符数组中搜索一个给定的 $m \times m$的模式。(该模式可以在水平方向和垂直方向移动，但是不可以旋转。)

答:

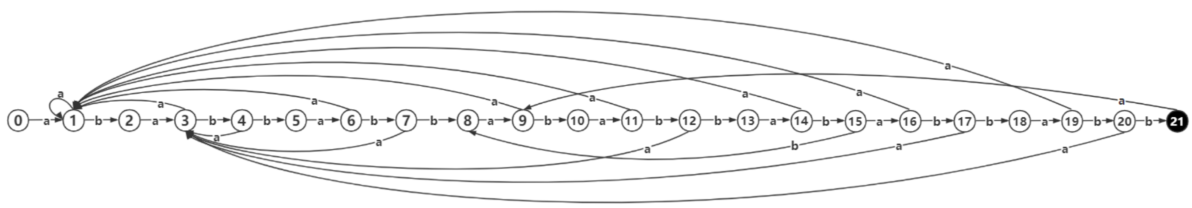
对模式矩阵P而言，把m列中的每一列都看做一个整体，即每一列都是一个一维的串，分别计算出其hash值（霍纳法则），将模式矩阵P处理为一个一维的长度为m的模式串。

在水平移动时，将模式矩阵P在文本矩阵T中对应的$m \times m$子矩阵做同样处理，将每一列都hash成一个数字，这样问题就变成了一维的查找，可以用**KMP**算法解决。

在垂直移动时，移动后模式矩阵P在文本矩阵T中对应的$m \times m$子矩阵，每列的hash值都能根据该列移动前的hash直接计算出来，**Rabin-Karp**在一维时的规则此时依然适用。问题继续转换成一维的查找。

2.对字母表$\Sigma = \{a, b\}$，画出与模式 ababbabbababbababbabb 对应的字符串匹配自动机的状态转换图

答:



3.描述解决这一问题的算法，并对算法效果与复杂度进行分析。https://202.38.86.171:1443/problem/E6-1

答:

对每组模式P_i和原串S_i使用KMP算法，每次执行算法前初始化一个计数器，将KMP-MATCHER的第11行替换为计数器增1，算法最后返回模式串P_i在原串S_i中出现的次数，并输出该数字，接着处理下一组匹配问题。

运用聚合分析，设第i组模式长度为m_i，原串长度为n_i。在第i次COMPUTE-PREFIX-FUNCTION中，k的初值为0，且k唯一增加的方法是通过第9行的递增操作，该操作在**for**循环中每次至多执行一次。因此k总共至多增加$m_i - 1$次。并且注意到每次迭代过程中，$k < q$总成立，这也确保了$\pi[q] < q$对所有q成立。这意味着每次**while**循环k值都会减小，并且k值不会为负值，k总共至多减少$m_i - 1$次，因此**while**循环至多进行$m_i - 1$次。所以第i次COMPUTE-PREFIX-FUNCTION的运行时间为$\Theta(m_i)$。在第i次KMP_MATCHER中，q的初

值为0，且由于$\pi[q] < q$对所有q成立，每次**for**循环中q至多增加一次。因此q总共至多增加n_i次。每次**while**循环q值都会减小，并且q值不会为负值，q总共至多减少n_i次，因此**while**循环至多进行n_i次。所以第i次KMP_MATCHER的运行时间为$\Theta(n_i)$。共T组数据，所以总运行时间为$\sum_{i=1}^{T}\Theta(m_i+n_i) = \Theta\left(\sum_{i=1}^{T}(m_i+n_i)\right)$。

4.对于在无向图中寻找最长简单回路这一问题，给出其形式化的定义并给出其相关的判定问题。另外，给出与该判定问题对应的语言。

答:

形式化定义：最长简单回路问题的一个实例由一个图组成，其解为图中的顶点序列，序列可能为空（不存在回路）。最长简单回路问题是把图的每个实例与图中包含的最长简单回路相关联的关系。

判定问题CYCLE：给定无向图G、一个非负整数 k，确定实例图是否具有长度至少为k的简单回路。 如果$i=(G,k)$是判断问题CYCLE的一个实例，那么若无向图G具有长度至少为k的简单回路，则CYCLE(i)=1，否则CYCLE(i)=0。

决策问题对应的语言：

$$CYCLE = \{\langle G,k\rangle : G=(V,E)\text{是一个无向图，}k\geq 0\text{是一个整数，}G\text{中存在一条长度至少为}k\text{的简单回路}\}$$