Dynamic programming method for m×n flow-shop scheduling problems

Yixun Lin
Zhengzhou University

第15卷第4期 数 学 进 展 Vol.15, No.4
1986年10月 ADVANCES IN MATHEMATICS Oct., 1986

同顺序M×N排序问题的动态规划方法

林 诒 勋

(郑州大学数学系)

排序论 (Scheduling Theory)是组合最优化理论中一个应用十分广泛的领域；而同顺序 $m\times n$ 排序问题则是众多的排序模型中一个成果较多的模型。1954 年，S.M.Johson[1] 给出 $m=2$ 情形的解法，揭开排序问题研究的序幕。一些动态规划、组合最优化和图论文献都以此作为有趣的例子竞相引用。嗣后，许多作者企图把 Johnson 算法推广到 $m\geqslant 3$ 的情形。但 1976年 Garey 等人证明了 $m\geqslant 3$ 情形是一个 "NP完全问题[7,8]"。这样，要想找到"好算法"几乎是沒有希望的了。近年来，$m\geqslant 3$ 的 $m\times n$ 排序问题的研究，主要在如下几个方面：

（1）确定相邻零件的次序[3-6,9,13,15-18]；

（2）优先与消去准则[2,11,12,14]；

（3）分枝定界类型的算法[2,6,8,10,14]；

（4）特殊算法和近似算法[6,13,16,17]。

特别是越民义、韩继业于1975年给出的判定条件[4]，在推广 Johnson 条件的意义上是最终性的；他们又于 1979 年给出比 Szwarc 准则[2]更一般的消去准则[14]。他们的工作引起我国应用数学工作者的广泛兴趣，从而打开了我国研究与应用排序问题的局面。

本文将以动态规划的观点来综述这个问题的研究成果，使所有这些成果的思想集中到一点，就是一个 DP 基本方程（第二节的引理）。这种处理方法不但形式统一、论证简洁，还可以导出一些新的结果。在排序论的进一步研究中，数学规划方法（包括动态规划和整数线性规划）可望成为有力的工具。

一、模 型

在排序问题中，服务机构或作业设施（甚至操作人员）统称为"机器"，而被服务的"顾客"或工程建设任务统称为"零件"。同顺序 $m\times n$ 排序问题是考虑如下的"流水作业系统"：n 个零件 J_1, J_2, …, J_n 在 m 台机器 M_1, M_2, …, M_m 上加工，每个零件皆依同一顺序（约定为 M_1, M_2, …, M_m 的顺序）通过 m 台机器，每台机器也依同一顺序（欲求的零件顺序X）加工 n 个零件；每台机器一次只能加工一个零件，每个零件在各机器上的加工时间为已知常数。在上述作业系统中，如何确定一个零件加工顺序X，使总加工时间 T(X)(从 M_1 开工到 M_m 完工的时间）为最小，这就是所要研究的问题。

设 a_{ij} 为机器 i 加工零件 j 的加工时间，$m\times n$ 矩阵 $A=(a_{ij})$ 称为工时矩阵。设 $X=(x_1,$

1983年11月11日收到。

$x_2,\cdots,x_n$) 为零件下标 $1,2,\cdots,n$ 的一个(全)排列，那么序列X便称为一个加工顺序。对给定的加工顺序X，工时矩阵A的列按照X进行置换之后所得的矩阵记为$A(X)$；同时，按照X进行加工作业的工序流线图记为$G(X)$，如下图所示，其中顶点(i,x_j)表示机器i加工零件x_j的工序（任务），工时 a_{ix_j}就作为这个顶点的权。

$$A(X)=\begin{bmatrix} a_{1x_1} & a_{1x_2} & \cdots & a_{1x_n} \\ a_{2x_1} & a_{2x_2} & \cdots & a_{2x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{mx_1} & a_{mx_2} & \cdots & a_{mx_n} \end{bmatrix}$$

$$G(X):\quad \begin{array}{ccccccc} (1,x_1) & \rightarrow & (1,x_2) & \rightarrow\cdots\rightarrow & (1,x_n) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ (2,x_1) & \rightarrow & (2,x_2) & \rightarrow\cdots\rightarrow & (2,x_n) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ (m,x_1) & \rightarrow & (m,x_2) & \rightarrow\cdots\rightarrow & (m,x_n) \end{array}$$

设工序 (i,x_j) 的最早完工时刻为$f(i,x_j)$，并约定

$$f(0,x_j)=f(i,x_0)=0, \tag{1}$$

那么，机器i在加工零件x_j之前，必须先加工完零件x_{j-1}，并且要等到机器i-1加工完零件x_j，故有

$$f(i,x_j)=\max\{f(i,x_{j-1}),f(i-1,x_j)\}+a_{ix_j}. \tag{2}$$

递推公式(2)及初始条件(1)，就是求非循环有向图$G(X)$最长路的动态规划基本方程[19,20]。在图$G(X)$中，每一条从$(1,x_1)$到(m,x_n)的有向路即文献[4,5]的“可行线”，路的长度(诸顶点的权之和)即“可行和”，最长路（关键路）的长度就是“最大可行和”。由于(1)(2)既是确定完工时刻的递推公式，又是求最长路的基本方程，于是就得到文献[4,5]的引理：总工时等于最大可行和。

综上，所谓同顺序$m\times n$排序问题，就是寻求一个加工顺序X，使总工时$T(X)=f(m,x_n)$为最小。

二、基本方程与基本定理

对动态规划方法来说，同一个问题往往可以从不同的角度来建立基本方程。上述关于目标函数的方程(1)(2)对计算总工时是简捷可行的；而下面引出的另一形式则在理论分析上更为方便。

设$N=\{1,2,\cdots,n\}$。若$\{s_1,s_2,\cdots,s_k\}\subseteq N$，则选排列$S=(s_1,s_2,\cdots,s_k)$称为$N$的一个部分序列。若$S=(s_1,s_2,\cdots,s_k)$和$S'=(s_1',s_2',\cdots,s_l')$为两个部分序列，且$S\cap S'=\phi$，则$SS'\triangleq(s_1,s_2,\cdots,s_k,s_1's_2',\cdots,s_l')$也是一个部分序列，称为$S$与$S'$的连接。

在判定条件、消去准则或分枝算法中，我们往往把某些固定排位的零件部分序列当作过程的“状态”。对部分序列S，按照[14]的记号，定义极值函数

$$t_{pq}(S)=\begin{bmatrix} a_{ps_1} & a_{ps_2} & \cdots & a_{ps_k} \\ a_{p+1,s_1} & a_{p+1,s_2} & \cdots & a_{p+1,s_k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{qs_1} & a_{qs_2} & \cdots & a_{qs_k} \end{bmatrix}\text{的最大可行和}\qquad (1\leqslant p\leqslant q\leqslant m)。$$

于是总工时为$T(X)=t_{1m}(X)$。我们约定初始条件为

$$t_{pq}(\varnothing)=0, \tag{3}$$

并有如下的

引理(基本方程) 若加工顺序$X=S\bar{S}$，$S\cap\bar{S}=\varnothing$，则

$$t_{1m}(X)=\max_{1\leqslant p\leqslant m}\{t_{1p}(S)+t_{pm}(\bar{S})\}。 \tag{4}$$

此处X代以任一部分序列S，$(1,m)$代以(p,q)，结论依然成立。

证 设$S=(x_1,\cdots,x_k)$，$\bar{S}=(x_{k+1},\cdots,x_n)$；在有向图$G(X)$中从始点$(1,x_1)$到终点$(m,x_n)$的一切有向路所成之集记为$\Pi$；路$\pi\in\Pi$的长度为$l(\pi)=\sum_{(i,j)\in\pi}a_{ij}$；并设

$$\Pi_p=\{\pi\in\Pi\mid\pi\text{含弧}(p,x_k)\to(p,x_{k+1})\},\quad 1\leqslant p\leqslant m。$$

那么，由最优化原理得

$$t_{1m}(X)=\max_{\pi\in\Pi}l(\pi)=\max_{1\leqslant p\leqslant m}\ \max_{\pi\in\Pi_p}\ l(\pi)$$

$$=\max_{1\leqslant p\leqslant m}\{t_{1p}(S)+t_{pm}(\bar{S})\}。$$

由方程（4）得到函数t的一个基本性质：若$X=S\bar{S}$，

则

$$t_{1m}(X)\geqslant t_{1p}(S)+t_{pm}(\bar{S}),\quad 1\leqslant p\leqslant m \tag{5}$$

不妨称之为“三角不等式”，下面一再用到。

关于零件i,j的先后关系，我们有

定理1 设S,S',S''为任意互不相交的部分序列，$i,j\in N\setminus(S\cup S'\cup S'')$。

(i) 若

$$t_{1p}(Sij)\leqslant t_{1p}(Sji),\quad 1\leqslant p\leqslant m, \tag{6}$$

则$T(SijS')\leqslant T(SjiS')$；

(ii) 若

$$t_{1p}(Sij)\leqslant t_{1p}(Sj)+\min_{p\leqslant q\leqslant m}a_{qi},\quad 1\leqslant p\leqslant m, \tag{7}$$

则$T(SijS'S'')\leqslant T(SjS'iS'')$；

(iii) 若

$$t_{1p}(Si)\leqslant t_{1p}(Sj)+\min_{p\leqslant q\leqslant r\leqslant m}[t_{qr}(i)-t_{qr}(j)],\quad 1\leqslant p\leqslant m, \tag{8}$$

则$T(SiS'jS'')\leqslant T(SjS'iS'')$。

证 (i) 由引理及条件(6)即得

$$t_{1m}(SijS')=\max_{1\leqslant p\leqslant m}\{t_{1p}(Sij)+t_{pm}(S')\}$$

$$\leqslant\max_{1\leqslant p\leqslant m}\{t_{1p}(Sji)+t_{pm}(S')\}=t_{1m}(SjiS'),$$

(ii) 由引理及条件(7)可得

$$t_{1m}(SijS'S'') = \max_{1\le p\le m}\{t_{1p}(Sij) + t_{pm}(S'S'')\}$$
$$\leqslant \max_{1\le p\le m}\{t_{1p}(Sj) + \min_{p\le q\le m} a_{qi} + t_{pm}(S'S'')\}$$
$$\leqslant \max_{1\le p\le m}\{t_{1p}(Sj) + t_{pm}(S'iS'')\} = t_{1m}(SjS'iS'').$$

(iii) 由引理及条件(8)得到

$$t_{1m}(SiS'jS'') = \max_{1\le p\le m}\{t_{1p}(Si) + t_{pm}(S'jS'')\}$$
$$\leqslant \max_{1\le p\le m}\{t_{1p}(Sj) + \min_{p\le q\le r\le m}[t_{qr}(i) - t_{qr}(j)] + t_{pm}(S'jS'')\}$$
$$\leqslant \max_{1\le p\le m}\{t_{1p}(Sj) + t_{pm}(S'iS'')\} = t_{1m}(SjS'iS'').$$

在此，须对最后一个不等式作一点注释：可设$t_{pm}(S'jS'') = t_{pq^*}(S') + t_{q^*r^*}(j) + t_{r^*m}(S'')$，其中$q^*$及$r^*$均依赖于$p$。于是

$$\min_{p\le q\le r\le m}[t_{qr}(i) - t_{qr}(j)] + t_{pm}(S'jS'')$$
$$\leqslant [t_{q^*r^*}(i) - t_{q^*r^*}(j)] + [t_{pq^*}(S') + t_{q^*r^*}(j) + t_{r^*m}(S'')]$$
$$= t_{pq^*}(S') + t_{q^*r^*}(i) + t_{r^*m}(S'') \leqslant t_{pm}(S'iS'').$$

此定理中的条件（7）、（8）来自文献[14]的消去准则（B）、（C），略有改变。条件（6）是关于相邻零件的关系(见文献[18])，条件（7）、（8）是关于任意两个零件的关系；显然与状态（7）和（8）都强于（6）。此外，我们把部分序列S看作固定的状态，定理1的条件只S及零件i，j的数据有关，与其它零件的位置无关。如果把处在排列后部的S'作为固定状态（有时是必要的），则可以得到与此平行的结果，不再赘述。

三、确定相邻零件的次序

定理1可以导出迄今这方面的一些基本结果。

命题1 （Johnson[1]） 当$m=2$时，设$X = SijS'$，$X^* = SjiS'$。若

$$\min\{a_{1i}, a_{2j}\} \leqslant \min\{a_{1j}, a_{2i}\}, \tag{9}$$

则$T(X) \leqslant T(X^*)$。

证 由条件（9）得到

$$t_{12}(ij) = a_{1i} + \max\{a_{1j}, a_{2i}\} + a_{2j}$$
$$\leqslant a_{1j} + \max\{a_{1i}, a_{2j}\} + a_{2i} = t_{12}(ji).$$

而 $t_{22}(ij) = t_{22}(ji)$，故

$$t_{12}(Sij) = \max_{1\le p\le 2}\{t_{1p}(S) + t_{p2}(ij)\}$$
$$\leqslant \max_{1\le p\le 2}\{t_{1p}(S) + t_{p2}(ji)\} = t_{12}(Sji).$$

又因 $t_{11}(Sij) = t_{11}(Sji)$，所以条件（6）成立，从而$T(X) \leqslant T(X^*)$。

由命题1可得如下的Johnson算法：在工时矩阵A中找出最小元素（若不唯一，可任择其一），若此数为a_{1i_1}，则将零件i_1排在首位；若此数为a_{2j_1}，则将零件j_1排在末位。将定位的零件i_1或j_1划去，在剩余部分续行此法。这样得到的X_0即为最优排列。事实上，从任一排列出发，按上述算法，把每排定一个零件看作通过逐次对换相邻零件将其移至首位或末位。由

命题1知每次对换时总工时不增加，因而最后得到的排列X_0必定总工时为最小。

命题2（Johnson[1]）　当$m=2$时，设$X=(1,2,\cdots,n)$。若条件

$$\min\{a_{1i},a_{2j}\}\leqslant\min\{a_{1j},a_{2i}\},\quad 1\leqslant i<j\leqslant n \tag{10}$$

成立，则X为最优排列。

证　以满足条件（10）的排列X作为初始排列，施行上述 Johnson 算法重新确定一个加工顺序。由命题1，每次对换相邻零件时总工时不变，且保持条件（10），最后得到最优排列X_0，必有$T(X)=T(X_0)$，即X也是最优排列。

命题2作为最优解的条件（称为Johnson条件）是充分的，但不是必要的[13]。就这个充分条件本身而论，也不需要检查（10）式中$\frac{n(n-1)}{2}$个不等式；下面命题3的等价条件至多检查$n-1$个不等式就够了。

对零件J_i和J_j，若条件（9）成立，则记为"$J_i\leqslant J_j$"。这里的"$\leqslant$"不一定是序关系，但可以证明[13]：若$a_{1k}\neq a_{2k}$，则$J_i\leqslant J_k$，$J_k\leqslant J_j\Rightarrow J_i\leqslant J_j$（即关系$\leqslant$在这三者之间具有传递性）。利用这种局部的传递性，可使条件（10）简化。为此，令$K=\{k|a_{1k}\neq a_{2k}\}=\{k_1,k_2,\cdots,k_r\}$　$(1\leqslant r\leqslant n)$，并对$1\leqslant p\leqslant r$定义

$$\Omega_p=\begin{cases}\{(i,k_p)\,|\,k_{p-1}\leqslant i<k_p\}, & \text{当}a_{1k_p}<a_{2k_p};\\ \{(k_p,j)\,|\,k_p<j\leqslant k_{p+1}\}, & \text{当}a_{1k_p}>a_{2k_p}.\end{cases}$$

令 $\Omega=\bigcup\limits_{p=1}^{r}\Omega_p$。

命题3　当$m=2$时，设$X=(1,2,\cdots,n)$。若条件

$$\min\{a_{1i},a_{2j}\}\leqslant\min\{a_{1j},a_{2i}\},\quad (i,j)\in\Omega \tag{11}$$

成立，则X为最优排列。

证　设X满足条件（11）。由Ω_p的定义及集K中的传递性可知：

(i) $k_{p-1}\leqslant i<k_p\Rightarrow J_i\leqslant J_{k_p}$，

$k_p<j\leqslant k_{p+1}\Rightarrow J_{k_p}\leqslant J_j$；

(ii) $J_{k_1}\leqslant J_{k_2}\leqslant\cdots\leqslant J_{k_r}$。

对任意两个零件J_i，J_j（$i<j$），若至少有一个属于K，则由（i），（ii）可得$J_i\leqslant J_j$。若二者都不属于K，即$a_{1i}=a_{2i}$，$a_{1j}=a_{2j}$，自然也有$J_i\leqslant J_j$成立。这样一来，条件（11）与（10）等价。

命题4（越、韩[6]）　当$m\geqslant3$时，关于排列$X=SijS'$及$X^*=SjiS'$，若有

$$\min\{a_{ui},a_{vj}\}\leqslant\min\{a_{uj},a_{vi}\},\quad 1\leqslant u<v\leqslant m \tag{12}$$

则$T(X)\leqslant T(X^*)$。

证　对$1\leqslant p\leqslant m$的p运用引理，得

$$t_{1p}(Sij)=\max_{1\leqslant r\leqslant p}\{t_{1r}(S)+t_{rp}(ij)\},$$

$$t_{1p}(Sji)=\max_{1\leqslant r\leqslant p}\{t_{1r}(S)+t_{rp}(ji)\}.$$

只要将关于i，j的两列矩阵转置，即可看出$t_{rp}(ij)$及$t_{rp}(ji)$分别是如下二行矩阵的最

大可行和:

$$\begin{pmatrix} a_{ri} & a_{r+1,i} & \cdots & a_{pi} \\ a_{rj} & a_{r+1,j} & \cdots & a_{pj} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{pi} & a_{p-1,i} & \cdots & a_{ri} \\ a_{pj} & a_{p-1,j} & \cdots & a_{rj} \end{pmatrix}.$$

而条件(12)正说明前一矩阵的排列满足Johnson条件(命题2),后一矩阵是前者的逆排列,所以 $t_{rp}(ij) \leqslant t_{rp}(ji)$。因此,$t_{1p}(Sij) \leqslant t_{1p}(Sji)$,即条件(6)成立,从而 $T(X) \leqslant$ 息;而条件(12)还依赖于先行零件序列 S。

在上述证明中,(12)$\Rightarrow$(6);但反之不然。不过,条件(6)只涉及零件 i,j 的信息,而条件(12)还依赖于先行零件序列 S。

与Johnson条件的情况类似,条件(12)也不必检查所有 $\frac{m(m-1)}{2}$ 个不等式。令 $K=\{k \mid a_{ki} \neq a_{kj}\} = \{k_1, k_2, \cdots, k_r\} \quad (1 \leqslant r \leqslant m)$,$\Omega = \bigcup_{p=1}^{r} \Omega_p$,其中

$$\Omega_p = \begin{cases} \{(u, k_p) \mid k_{p-1} \leqslant u < k_p\}, & \text{当} a_{k_p i} < a_{k_p j}; \\ \{(k_p, v) \mid k_p < v \leqslant k_{p+1}\}, & \text{当} a_{k_p i} > a_{k_p j}. \end{cases}$$

推论5(韩[16],Szwarc[17]) 当 $m \geqslant 3$ 时,关于排列 $X = SijS'$ 及 $X^* = SjiS'$,若有

$$\min\{a_{ui}, a_{vj}\} \leqslant \min\{a_{uj}, a_{vi}\}, \quad (u,v) \in \Omega \tag{13}$$

则 $T(X) \leqslant T(X^*)$。

证 同推论4的证明,只要将其中引用Johnson条件(推论2)的地方改为引用推论3的等价条件即可。

在 $m \geqslant 3$ 时,还有其它的确定相邻零件次序的判定条件(如Nabeshima[3]及Szwarc[9,17]等),但都不比定理1更广泛。关于简化条件(13),秦裕瑗[15]得到了 $K=N$ 的特殊情况。韩继业[16]的简化条件与(13)式类似,需检查的不等式数目在 $(m-1)$ 与 $(2m-3)$ 之间。此处引用Szwarc的形式[17],要检查的数目不超过 $m-1$。

四、消去准则与优先准则

研究一般 $m \times n$ 排序问题的另一条途径是建立优先准则或消去准则,以便缩小寻优范围。所谓"可以消去形如($Sj\cdots$)的排列",是指在所有排列的集合中,消去形如($Sj\cdots$)的排列后,剩余排列集合依然留有最优排列(即不会把全部最优排列消掉)。所谓"除部分序列 S 外,零件 i 可以优先排在最前面",是指在形如($Si\cdots$)的排列集合中存在最优排列,因而可以只保留这种集合,消去其余形如($Sj\cdots$)的排列($j \neq i$)。下面只讨论消去准则,优先准则可相应地得到。

作为定理1的一个重要推论,有如下的消去准则:

定理2 设 S 为一部分序列,$i,j \in N \backslash S$。若条件

$$t_{1p}(Sij) \leqslant t_{1p}(Sj) + \min_{p<q<m} a_{qi}, \quad 1 \leqslant p \leqslant m \tag{7}$$

或

$$t_{1p}(Si) \leqslant t_{1p}(Sj) + \min_{p<q<r<m} [t_{qr}(i) - t_{qr}(j)], \quad 1 \leqslant p \leqslant m \tag{8}$$

成立，则可消去所有形如（$Sj\cdots$）的排列。

证　若形如（$Sj\cdots$）的排列中沒有最优排列，当然可以全部消去。倘若其中有一最优排列，设为$SjS'iS''$，则由定理1得知，相应于条件（7）或（8），分别有

$$t_{1m}(SijS'S'')\leqslant t_{1m}(SjS'iS''),\tag{14}$$

或

$$t_{1m}(SiS'jS'')\leqslant t_{1m}(SjS'iS'').\tag{15}$$

即 $SijS'S''$或 $SiS'jS''$也是最优排列。因此，消去所有形如（$Sj\cdots$）的排列时，不会把全部最优排列都消光。

这里，条件（7）（类似于[14]的准则B）的消去法意义是"可以将 i 移至 j 之前"——如（14）式所示；条件（8）（即[14]的准则C）的意义是"可以将 i 与 j 对换"——如（15）式所示。

命题6（越、韩[14]的准则B）　若条件

$$t_{1p}(Si)+a_{pj}\leqslant t_{1p}(Sj)+\min_{p<q\leqslant m}a_{qi},\quad 1\leqslant p\leqslant m\tag{16}$$

成立，则可消去形如（$Sj\cdots$）的排列。

证　首先，由三角不等式 $t_{1p}(Si)+a_{pj}\leqslant t_{1p}(Sij)$ 知：(7)⇒(16)。反之，由（16）可得

$$t_{1p}(Sij)=\max_{1\leqslant r\leqslant p}\{t_{1r}(Si)+t_{rp}(j)\}$$

$$\leqslant\max_{1\leqslant r\leqslant p}\left\{t_{1r}(Sj)+\min_{r<q\leqslant m}a_{qi}+\sum_{k=r+1}^{p}a_{kj}\right\}$$

$$\leqslant t_{1p}(Sj)+\min_{p<q\leqslant m}a_{qi}.$$

这是因为 $t_{1r}(Sj)+\sum\limits_{k=r+1}^{p}a_{kj}\leqslant t_{1p}(Sj)$，$\min\limits_{r<q\leqslant m}a_{qi}\leqslant\min\limits_{p<q\leqslant m}a_{qi}$ $(1\leqslant r\leqslant p)$。于是(7)与(16)等价。

推论7（Szwarc[2]）　若条件

$$t_{1p-1}(Sij)-t_{1p-1}(Sj)\leqslant t_{1p}(Sij)-t_{1p}(Sj)\leqslant a_{pi},\quad 2\leqslant p\leqslant m\tag{17}$$

成立，则可消去形如（$Sj\cdots$）的排列。

证　反复运用条件（17）可得

$$t_{1p}(Sij)-t_{1p}(Sj)\leqslant a_{pi}$$
$$t_{1p}(Sij)-t_{1p}(Sj)\leqslant t_{1p+1}(Sij)-t_{1p+1}(Sj)\leqslant a_{p+1,i}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$t_{1p}(Sij)-t_{1p}(Sj)\leqslant a_{mi}.$$

因此

$$t_{1p}(Sij)-t_{1p}(Sj)\leqslant\min_{p<q\leqslant m}a_{qi},$$

即条件（7）成立。反之，由（7）可知

$$t_{1p}(Sij)-t_{1p}(Sj)\leqslant a_{pi},$$
$$t_{1p-1}(Sij)-t_{1p-1}(Sj)\leqslant a_{pi}.$$

于是

$$t_{1p}(Sij)-t_{1p}(Sj)$$
$$=\max\{t_{1p}(Si),t_{1p-1}(Sij)\}-\max\{t_{1p}(S),t_{1p-1}(Sj)\}$$
$$\geqslant\min\{t_{1p}(Si)-t_{1p}(S),t_{1p-1}(Sij)-t_{1p-1}(Sj)\}$$

$$\geqslant \min\{a_{pi}, t_{1p-1}(Sij) - t_{1p-1}(Sj)\}$$
$$= t_{1p-1}(Sij) - t_{1p-1}(Sj),$$

即条件(17)成立。于是(7)与(17)等价。

综上，我们得到三个等价条件：(7)，(16)及(17)。而文[2]证明了(14)$\Longleftrightarrow$(17)。因此，这一类等价的消去准则在(14)式的消去意义上是“最好的”。此外，还有

命题8 [14] 若条件

$$t_{1p}(Si) + \max_R t_{pm}(jR) \leqslant B(Sj\cdots), \quad 1 \leqslant p \leqslant m \tag{18}$$

成立，则可消去形如$(Sj\cdots)$的排列。式中$B(Sj\cdots)$表示所有形如$(Sj\cdots)$的排列的总工时下界，R为$N\backslash(S\cup\{i,j\})$的任意排列。

证 若有最优排列$SjS'iS''$，则由条件(18)可知

$$t_{1m}(SjS'iS'') \geqslant B(Sj\cdots)$$
$$\geqslant \max_{1 \leqslant p \leqslant m}\{t_{1p}(Si) + \max_R t_{pm}(jR)\}$$
$$\geqslant \max_{1 \leqslant p \leqslant m}\{t_{1p}(Si) + t_{pm}(jS'S'')\} = t_{1m}(SijS'S'').$$

即$SijS'S''$也是最优排列。

由于(18)$\Rightarrow$(14)，所以命题8也是上述类型的消去准则，但其消去效果依赖于下界$B(Sj\cdots)$的选择。此外，在(7)式中令$p=1$，可得

$$a_{1i} = \min_{1 \leqslant q \leqslant m} a_{qi}. \tag{19}$$

这是消去准则(7)、(14)、(16)、(17)、(18)成立的必要条件。因此，在运用这类准则之前，应先看一看(19)式是否成立。

消去准则(8)和(15)是另一种类型，即在对换零件i，j意义上的消去准则。

对定理2的两类消去准则可作一些推广。设$I=(i_1, i_2, \cdots, i_r)$为部分序列，$1 \leqslant p \leqslant m$，我们令

$$A_{pm}(I) = \min_{p \leqslant q_1 \leqslant \cdots \leqslant q_r \leqslant m} \sum_{k=1}^{r} a_{q_k i_k}.$$

定理3 设S和$I=(i_1, i_2, \cdots, i_r)$为两个部分序列，$S \cap I = \varnothing$，$j \in N\backslash(S\cup I)$。若条件

$$t_{1p}(SIj) \leqslant t_{1p}(Sj) + A_{pm}(I), \quad 1 \leqslant p \leqslant m \tag{20}$$

或

$$t_{1p}(SI) \leqslant t_{1p}(Sj) + \min_{p \leqslant q \leqslant r \leqslant m}[t_{qr}(i_k) - t_{qr}(j)] + A_{pm}(I - i_k),$$
$$1 \leqslant p \leqslant m \tag{21}$$

对某个$k\,(1 \leqslant k \leqslant r)$成立，则可消去所有形如$(Sj\cdots i_1\cdots i_2\cdots i_r\cdots)$的排列。

事实上，可仿照定理2分别证明当(20)或(21)成立时，有

$$t_{1m}(SIjS^{(1)}S^{(2)}\cdots S^{(r+1)}) \leqslant t_{1m}(SjS^{(1)}i_1S^{(2)}\cdots S^{(r)}i_rS^{(r+1)}),$$

或

$$t_{1m}(SIS^{(1)}S^{(2)}\cdots S^{(k)}jS^{(k+1)}\cdots S^{(r)}S^{(r+1)})$$
$$\leqslant t_{1m}(SjS^{(1)}i_1S^{(2)}\cdots S^{(k)}i_kS^{(k+1)}\cdots S^{(r)}i_rS^{(r+1)}).$$

这里条件(20)与[14]中的准则A略有不同，但二者是等价的。条件(21)是其准则C

的推广。这种更一般的消去准则，在有偏序约束的$m\times n$排序问题中（比如限定零件$i_1,i_2,\cdots,i_r$必须按照I的次序）比较有效。

五、 分枝定界算法

分枝定界算法实质上是一种动态规划方法；那就是在所有排列（全排列和选排列）所形成的枚举树（决策树）中搜寻最优解，但利用估界作为消去准则，尽可能多地消去一些分枝，以便加速枚举过程。自然，前一节的一般性消去准则可与定界准则结合起来使用。下面仍用DP基本方程（3）、（4）的观点来讨论一种定界方法[8,14]。

比如估计$B(S\cdots S')$之值。设$R=N\backslash(S\cup S')$。由引理得

$$t_{1m}(SRS')=\max_{1\leqslant p\leqslant m}\{t_{1p}(S)+t_{pm}(RS')\}.$$

对给定的$p(1\leqslant p\leqslant m)$，可通过几条特殊的可行线来估计$t_{pm}(RS')$的下界。首先，将$R$中的零件，以工时矩阵最后两行($a_{m-1,j}$和$a_{mj},j\in R$)符合 Johnson 条件为标准，排成序列$R_1=(j_1,j_2,\cdots,j_r)$。并令$R_a=j_a(R_1-j_a)$，$2\leqslant a\leqslant r$。然后我们取

$$b_p=\begin{cases}\max\{\min\limits_{1\leqslant a\leqslant r}[t_{p,m-2}(j_a)+t_{m-1,m}(R_aS')],t_{pp}(R)+t_{pm}(S')\}, & 1\leqslant p\leqslant m-2;\\ t_{pm}(R_1S'), & m-1\leqslant p\leqslant m.\end{cases}$$

那末$t_{pm}(RS')\geqslant b_p$（$1\leqslant p\leqslant m$），从而

$$B(S\cdots S')=\max_{1\leqslant p\leqslant m}\{t_{1p}(S)+b_p\}.$$

六、特殊算法和近似算法

既然一般的$m\times n$问题是NP完全的，我们自然希望对尽可能多的特殊情况能够找到有效算法。这方面的结果不多。目前讨论的几种特殊模型的算法都是作为Johnson算法的推广[16,17]，即算法只涉及相邻零件的关系。若条件(12)或(13)成立，我们记“$J_i\leqslant J_j$”。一般说来，“$\leqslant$”不是序关系；但韩继业[16]和Szwarc[17]同时证明了：当任意两个零件J_i与J_j都可比较，即必有$J_i\leqslant J_j$或$J_j\leqslant J_i$(从而$\leqslant$为序关系)时，推广的Johnson算法可以得到最优排列。他们的推广算法，简言之，就是对工时矩阵A的首行和末行用Johnson算法安排零件的位置，而在有选择余地的时候，再依次考虑其它行的关系。

对一般情形，[16]、[17]的特殊算法可以作为一种近似算法。此外，在$m=3$的情形，下面的近似算法[5,13]也是有一定实用意义的：

第一步，分别将工时矩阵的第1,2行及第2,3行相加，并为一个两行的矩阵；然后用Johnson算法得到一个初始排列。

第二步，按定理1的条件(6)、(7)、(8)，考虑变换两个零件i和j（不一定是相邻的），直至不能再改进为止。

纵观以上讨论，同顺序$m\times n$排序问题的主要研究成果，包括判定条件、消去准则、一般算法和特殊算法等，都统一在基本方程(3)、(4)之下，说明这一递推关系确实反映了问题的本质特征。我们觉得，将排序问题纳入数学规划的框架，是一种有效的途径。

参考文献

[1] Johnson, S. M., *Naval Res. Log. Quart*, 1:1 (1954), 61—68.

[2] Szwarc, W., *Opns.Res.*, 21 (1973), 1250—1259.

[3] Nabeshima, I., *J. Opns. Res. Soc. Japan*, 16:3 (1973), 163—185.

[4] 越民义、韩继业，中国科学，1975年第5期，462—470.

[5] Yueh Ming-i, On the n job, m machine sequencing problem of flow-shop, K. B. Haley ed., Operational Research'75, North-Holland Publishing Company (1976),179—200.

[6] 越民义、韩继业，数学的实践与认识，1976年第4期，62—77.

[7] Garey, M. R., Johnson, D. S., Sethi Ravi, *Math. of Opns. Res.*, 1:2 (1976), 117—129.

[8] Coffman, Jr., E. G., Computer and Job-Shop Scheduling Theory, John Wiley & Sons, 1976.

[9] Szwarc, W., *Opns. Res.*, 25 (1977), 70—77.

[10] Lageweg, B. J. et al., *Opns. Res.*, 26 (1978) 53—67.

[11] Gupta, J. N. D., Reddi, S. S., *Opns. Res.*, 26 (1978), 200—203.

[12] Szwarc, W., *Opns. Res.*, 26 (1978), 203—206.

[13] 林诒勋，郑州大学学报，1978年第2期，32—43.（摘要：2×n排序问题最优解的充要条件，科学通报，1981年第9期.）

[14] 越民义、韩继业，科学通报，1979年第18期，821—824.

[15] 秦裕瑗，武汉钢铁学院学报，1979年第2期，43—60.

[16] 韩继业，应用数学学报，1980年第4期，301—305.

[17] Szwarc, W., *Opns. Res.*, 29:2 (1981), 400—411.

[18] Smith, R.D., Dudex, R.A., *Opns. Res.*, 15 (1967), 71—82.

[19] Dreyfus, S. E., Law, A. M., The Art and Theory of Dynamic Programming, Academic Press, 1977.

[20] 马仲蕃、魏权龄、赖炎连，数学规划讲义，中国人民大学出版社，1981年.