数 λ 的普阿松分布时，$\sqrt{X}$ 近似地服从正态分布 $N(\sqrt{\lambda}, 1/4)$. 而且 λ 越大，这个近似越好.

2° 若 X 服从参数 n 和 p 的二项分布，而且

(i) $np=\lambda$, (ii) n 足够大,

则 X 的分布可由参数 λ 的普阿松分布来近似. 而且当 $p<0.01$, $n>500$ 时，近似得更好.

(未完待续)

排序问题中的一些数学问题

中国科学院数学研究所　越民义　韩继业

一、绪　言

§1. 什么是排序问题

在某一加工机器零件的车间里有若干台机器，它们的工作是随时对一些输送进来的零件进行加工. 各个零件依照工艺技术上的要求，按一定的加工次序通过这些机器. 我们设一台机器同时只能加工一个零件. 若现在有许多个零件等着要进行加工，这时就可能出现这样的现象：有好些零件同时都需要在某一台机器上进行加工，但因为这台机器在同一时间内只能加工一个零件，所以这些零件只能等在那里；另一方面，因为每个零件必须按一定的加工顺序通过这些机器，所以就可能有一部分机器因各零件还没有通过前面的工序，只能闲在那里，直到轮到它工作时才开始生产. 因此，在加工零件时就产生怎样合理地安排零件加工顺序的问题. 顺序安排得好，机器的空闲时间就少一些，因而完成加工任务就快一些；顺序安排得不好，就会产生相反的结果.

当然，顺序安排的好坏不一定只是从时间方面来衡量，有时也需要从某些别的指标(例如经济效果)来衡量. 如何将零件安排一个顺序，使得在技术上行得通而又使某种预先规定的指标(也称“目标函数”)达到最好，这就是所说的“排序问题”. 排序问题不只是在零件加工方面才有，在机器维修(这时可将检修人员看成所说的“机器”，将需要维修的机器看成所说的“零件”)，计划安排，计算机安排算题等方面皆可产生.

§2. 本文的目的

关于排序问题的研究主要是从五十年代初期开始的. 本文中所提到的约翰逊方法出现于1954年. 由于这一问题在实际生产中的普遍性和重要性，20多年来，从事这一问题研究的人很多，也取得了不少富有意义的成果. 但总的说来，进展并不大. 一般的排序问题虽然结构比较简单，从直观上很容易看出它所要求的是什么，但在解决问题方面取得任何有意义的进展都是很困难的.

排序问题由于目标函数和技术要求的不同，提法是多种多样的. 在本文里，我们挑选了几个结构简单的，有代表性的模型来加以介绍. 由于实际问题涉及的因素较复杂，这几个模型难于完全切合生产上的要求. 对实际问题还需进一步分析研究. 我们的目的是抛砖

引玉,希望借此引起一些富有生产实践经验的读者的注意,使得这门学科在生产中能起到应有的作用,有助于提高生产和工作效率;我们也希望,通过本文的介绍,会引起许多应用数学工作者对于排序问题的研究兴趣.

二、关于一台机器的排序问题

§1. 一台机器多个零件的排序问题

它是指这样的一类问题:假若有 n 个零件 $J_1, \cdots, J_n$ 要在一台机器上加工,它们各自的加工时间 $p_1, \cdots, p_n$ 事先都已知道,这台机器在同一时间只能加工一个零件. 我们应如何将这些零件安排一个加工顺序,使得某种预先给定的指标达到最优. 我们称使得给定的指标达到最优的加工顺序为"*最优顺序*". 当然最优顺序往往不止一个.

初看起来,寻求最优顺序的问题似乎容易解决,我们只需把零件的所有可能的顺序都比较一下,从中找出最优顺序就行了. 但是这种想法实际上是行不通的. 例如 20 个零件的全部顺序共有 2,432,902,008,176,640,000 个,即使我们使用电子计算机也难于比较这么多的顺序.

在本章中我们介绍四种不同指标的一台机器的排序问题. 在论证这些问题的解法之前,需要先说明一些事项:

(1) 一个零件在机器上加工,自然要涉及到将该零件装上机器和从机器上卸下来的时间. 我们假设这两项时间与零件加工的顺序无关,这样就可把它们并入到加工时间之内,使问题得到简化;

(2) 假设在加工过程中,机器不受干扰;就是说,一个零件一旦被加工,则一直加工到完毕为止;

(3) 以机器开始运转的时刻做为时间计算的起点. 我们还假定对于任一零件,其应交工期限总不小于该零件所需的加工时间.

§2. 问题 1

设有 n 个零件 $J_1, \cdots, J_n$(在这里零件是指损坏待修的机械设备)要在一台机器上加工,它们各自的加工时间(即维修时间) $p_1, \cdots, p_n$ 事先已经知道. 若零件 J_i 在损坏期间每单位时间产生的损失为 w_i,试问如何将 $J_1, \cdots, J_n$ 安排一个加工顺序,使得总的损失为最小?

(2.1) 解法

这问题的解法很简单,我们只须将 $p_1/w_1, \cdots, p_n/w_n$ 按照从小到大的次序排列,这样得到的顺序就是最优顺序. 例如

零件	J_1	J_2	J_3	J_4
加工时间	4	6	7	9
损失率	0.5	1	0.8	1.2
p_i/w_i	8	6	8.75	7.5

所以最优加工顺序是$(J_2J_4J_1J_3)$.

(2.2) 最优性证明

设 $J_{i_1}, \cdots, J_{i_n}$ 是 $J_1, \cdots, J_n$ 的任意一个排列．若按照这一排列加工，零件 J_{i_j} 被加工完毕的时间为 $F_j = p_{i_1} + p_{i_2} + \cdots + p_{i_j}$，故 J_{i_j} 产生的损失为 $w_{i_j}F_j = w_{i_j}(p_{i_1} + \cdots + p_{i_j})$，由是，全部零件总损失是

$$F = \sum_{j=1}^{n} w_{i_j}F_j = \sum_{j=1}^{n} w_{i_j}\sum_{k=1}^{j} p_{i_k} = \sum_{k=1}^{n} p_{i_k}\sum_{j=k}^{n} w_{i_j}.$$

下面我们证明，若在排列 $(J_{i_1}, \cdots, J_{i_n})$ 中有某一 r，使得

$$\frac{p_{i_r}}{w_{i_r}} > \frac{p_{i_{r+1}}}{w_{i_{r+1}}},$$

则新的排列 $(J_{i_1}, \cdots, J_{i_{r-1}}, J_{i_{r+1}}, J_{i_r}, J_{i_{r+2}}, \cdots, J_{i_n})$ 必然比原来的排列要好些．

事实上，对于新的排列来说，总损失为

$$F' = \sum_{k=1}^{r-1} p_{i_k}\sum_{j=k}^{n} w_{i_j} + p_{i_{r+1}}(w_{i_r} + \cdots + w_{i_n})$$

$$+ p_{i_r}(w_{i_r} + w_{i_{r+2}} + \cdots + w_{i_n}) + \sum_{k=r+2}^{n} p_{i_k}\sum_{j=k}^{n} w_{i_j}.$$

因此

$$\begin{aligned} F - F' &= p_{i_r}(w_{i_r} + \cdots + w_{i_n}) - p_{i_r}(w_{i_r} + w_{i_{r+2}} + \cdots + w_{i_n}) \\ &\quad + p_{i_{r+1}}(w_{i_{r+1}} + \cdots + w_{i_n}) - p_{i_{r+1}}(w_{i_r} + \cdots + w_{i_n}) \\ &= p_{i_r}w_{i_{r+1}} - p_{i_{r+1}}w_{i_r} > 0, \end{aligned}$$

故交换零件 J_{i_r} 和 $J_{i_{r+1}}$ 后所得的新的排列比原来的排列要好．我们可连续地进行这种交换，每次交换都是把较小的 p_i/w_i 换到左边，由是，最优排列是按照 p_i/w_i 从小到大的次序做成的排列．

(2.3) 另一种排序问题

它在表面上与问题 1 完全不同，但解法却是一样的．设有 n 个元件 $J_1, \cdots, J_n$ 组成的一台设备．若其中有一元件发生故障时，这台设备即停止工作．现有一检查人员来寻找发生故障的元件，他查清元件 J_i 是否有故障所需的时间是 p_i，p_i 是事先已知的．而且根据元件的质量和性能的不同，我们事先也知道每个元件发生故障的“概率”(概率表示事件发生的可能性有多大．若 J_i 发生故障的概率为 w_i，则说明在 n 个元件中有故障的元件是 J_i 的可能性为 w_i，因此 $w_1 + w_2 + \cdots + w_n = 1$)．试问检查人员应按照什么次序来逐个检验这些元件，使得他找出故障所花费的时间的期望值(即平均值)为最小?

设检查人员按照次序 $J_{i_1}, \cdots, J_{i_n}$ 来检查这 n 个元件，若发生故障的元件是 J_{i_k}，那么检查人员找出故障所花的时间即为 $p_{i_1} + p_{i_2} + \cdots + p_{i_k}$．利用简单的概率论知识可知，找出故障所花的时间的期望值为

$$\sum_{k=1}^{n} w_{i_k}(p_{i_1} + \cdots + p_{i_k}).$$

这和问题 1 中的总损失是一样的，因此检查人员应按照 p_i/w_i 从小到大的次序来检查这些元件．

(2.4) 在问题 1 中，若考虑的指标不是总损失，而是零件的平均完工时间，这样问题就变成如何将 $J_1, \cdots, J_n$ 安排一个加工顺序，使得零件的平均完工时间最小．

由于零件的平均完工时间为 $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} F_j$，所以这相当于问题 1 中零件的损失率 w_i 都

等于 1，再令总损失 F 乘以常数 $1/n$. 利用问题 1 的解法，我们只须将 $p_1, \cdots, p_n$ 按照从小到大的次序排列，就可得到最优顺序.

§ 3. 问题 2[2]

设有 n 个零件 $J_1, \cdots, J_n$ 要在一台机器上加工，它们各自的加工时间 $p_1, \cdots, p_n$ 和应交工时间 $D_1, \cdots, D_n$ 事先都已知道. 试问应如何将 $J_1, \cdots, J_n$ 安排一个加工顺序，使得延期(即不能按期)交工的零件个数最少?

(3.1) 解法

第一步. 将诸零件按照其应交工期限从小到大的次序排列，我们称所得的顺序为"*初始顺序*"，设为 $(J_{i_1}, J_{i_2}, \cdots, J_{i_n})$. 例如

零　件	J_1	J_2	J_3	J_4	J_5	J_6	J_7	J_8
加工时间 p_i	10	6	3	1	4	8	7	6
应交工期限 D_i	35	20	11	8	6	25	28	9

其初始顺序是 $(J_5J_4J_8J_3J_2J_6J_7J_1)$:

零　件	J_5	J_4	J_8	J_3	J_2	J_6	J_7	J_1
p_i	4	1	6	3	6	8	7	10
D_i	6	8	9	11	20	25	28	35
完工时间 C_i	4	5	11	—	—	—	—	—

第二步. 从初始顺序中求出第一个须延期交工的零件（即使得 $C_i > D_i$ 的第一个零件)，然后转入第三步. 若无这种零件，则初始顺序即为最优顺序. 在例子中，$C_5 = 4$，$C_4 = 4 + 1 = 5$，$C_8 = 4 + 1 + 6 = 11$，所以 J_8 是第一个须延期交工的零件.

第三步. 设第一个须延期交工的零件是 J_{i_l}，我们从 $J_{i_1}, \cdots, J_{i_l}$ 中除去加工时间最长的零件，设为 J_{i_k}（若这种零件不只一个，则可任去其中一个)，然后对 $J_{i_1}, J_{i_2}, \cdots, J_{i_{k-1}}$, $J_{i_{k+1}}, \cdots, J_n$ 这 $n-1$ 个零件继续施行第二步运算. 如此循环. 每循环一次，就除去一个须延期交工的零件，直到余下的零件中再没有须延期交工的零件为止. 这时所得之顺序即为最优顺序，被除去的诸零件即为延期交工的零件. 在我们的例子中先要找出 $(J_5J_4J_8)$ 中加工时间最长的零件，即为 J_8. 将 J_8 除去，转入第二步.

零　件	J_5	J_4	J_3	J_2	J_6	J_7	J_1
p_i	4	1	3	6	8	7	10
D_i	6	8	11	20	25	28	35
完工时间 C_i	4	5	8	14	22	29	—

如表所示，J_7 是第一个须延期交工的零件. 我们找出 $(J_5J_4J_3J_2J_6J_7)$ 中加工时间最长的零件 J_6，再将 J_6 除去，再转入第二步.

零　件	J_5	J_4	J_3	J_2	J_7	J_1
p_i	4	1	3	6	7	10
D_i	6	8	11	20	28	35
完工时间 C_i	4	5	8	14	21	31

如表所示,这时已没有须延期交工的零件,计算即完毕. 最优顺序是 $(J_5J_4J_3J_2J_7J_1J_8J_6)$, 其中不能按时完工的零件 J_8 和 J_6 排在最后加工.

(3.2) 最优性证明

现在设零件 $J_1, \cdots, J_n$ 已经是按应交工时间的先后次序编号,即有

$$D_1 \leqslant \cdots \leqslant D_i \leqslant D_{i+1} \leqslant \cdots \leqslant D_n.$$

零　件	$J_1 \cdots J_i$　　$J_{i+1} \cdots J_n$
加工时间	$p_1 \cdots p_i$　　$p_{i+1} \cdots p_n$
应交工时间	$D_1 \cdots D_i$　　$D_{i+1} \cdots D_n$
完工时间	$C_1 \cdots C_i$　　$C_{i+1} \cdots C_n$

在上述的排列下, $C_i = \sum_{r=1}^{i} p_r$. 我们假设

$$C_1 \leqslant D_1,\ C_2 \leqslant D_2,\ \cdots,\ C_i \leqslant D_i,\ C_{i+1} > D_{i+1},$$

即 J_{i+1} 是第一个须延期交工的零件(若在排列 $J_1, \cdots, J_n$ 下没有须延期交工的零件, 显然此排列就是最优排列). 根据 § 1 中的说明(3),故总有 $i \geqslant 1$. 令

$$p_h = \max_{1 \leqslant r \leqslant i+1} p_r,$$

$$G_0 = \{J_1J_2 \cdots J_n\},$$

$$G_k = \{J_1, \cdots, J_{k-1}, J_{k+1}, \cdots, J_n\}, \quad k = 1, \cdots, n.$$

即 G_k 表示从 $J_1, \cdots, J_n$ 中除去 J_k 后余下的零件. 又令 $L\{G_k\}$ 表示 G_k 在依其最优排列加工时按期交工的零件个数. 下面我们把证明分成五步:

(i) 在 $J_1, \cdots, J_n$ 的任何排列下, $(J_1, \cdots, J_{i+1})$ 中必有一零件须延期交工.

实际上,若 $J_{i_1}, J_{i_2}, \cdots, J_{i_n}$ 为 $J_1, \cdots, J_n$ 的任一排列. 在此排列中 $(J_1, \cdots, J_{i+1})$ 内的 J_k 是这 $i+1$ 个零件的最后者,假定它被排在第 t 个位置,即 $J_k = J_{i_t}$. 由于

$$\sum_{j=1}^{t} p_{i_j} \geqslant \sum_{j=1}^{i+1} p_j > D_{i+1} \geqslant D_k,$$

故 J_k 必须延期交工.

(ii) 零件 $J_1, \cdots, J_n$ 的任一排列 $S = (J_{i_1}, \cdots, J_{i_n})$ 可改排成

$$\{J_{\alpha_1}, \cdots, J_{\alpha_p} \vdots J_{\alpha_{p+1}}, \cdots, J_{\alpha_n}\} = \{A, R\}$$

的形状(其中 A 表示零件集 $\{J_{\alpha_1}, \cdots, J_{\alpha_p}\}$, R 表示零件集 $\{J_{\alpha_{p+1}}, \cdots, J_{\alpha_n}\}$. 若 $p = n$, 则 R 不存在), A 中的零件在排列 S 下皆能按期交工, R 中的零件则必须延期交工.

事实上, 若 S 不是 $\{A, R\}$ 的形状, 则在排列 S 中必有相邻的两零件 J_{i_k} 和 $J_{i_{k+1}}$, 其中 J_{i_k} 须延期交工,而 $J_{i_{k+1}}$ 则能按期交工,即有

$$C_{i_k} > D_{i_k},\ C_{i_{k+1}} \leqslant D_{i_{k+1}}.$$

将 J_{i_k} 和 $J_{i_{k+1}}$ 的位置互换,我们得到新的排列

$$S' = \{J_{i_1}, \cdots, J_{i_{k-1}}, J_{i_{k+1}}, J_{i_k}, \cdots, J_{i_n}\}.$$

由于

$$p_{i_1} + \cdots + p_{i_{k-1}} + p_{i_{k+1}} < p_{i_1} + \cdots + p_{i_{k-1}} + p_{i_k} + p_{i_{k+1}} = C_{i_{k+1}} \leqslant D_{i_{k+1}},$$

故 $J_{i_{k+1}}$ 在新的排列 S' 下仍能按期交工. 同样可证明, J_{i_k} 在排列 S' 下仍须延期交工. 因

n 是有限数，故经过有限次位置互换之后，即可将 S 换成 $\{A, R\}$ 的形状.

(iii) 对于排列 $\{A, R\}$，将 $A = \{J_{\alpha_1}, \cdots, J_{\alpha_p}\}$ 中零件按应交工时间先后次序加以重排，这 p 个零件在新的排列下仍皆能按期交工.

事实上，若 A 不是按应交工时间先后次序排列，则必存在两相邻零件 J_{α_k} 和 $J_{\alpha_{k+1}}$，使得 $D_{\alpha_k} > D_{\alpha_{k+1}}$. 将 J_{α_k} 和 $J_{\alpha_{k+1}}$ 互换位置，用 (ii) 中的证明方法，可知 J_{α_k} 和 $J_{\alpha_{k+1}}$ 在新的排列中仍皆能按期交工. 由于 $p \leqslant n$，故经有限次交换位置之后，可将 A 换成所有的零件皆是按应交工先后次序排列.

(iv) 不等式

$$L\{G_h\} \geqslant L\{G_k\}$$

对于 $k = 1, \cdots, i + 1$ 成立.

事实上，由 (ii) 和 (iii)，我们可设 G_k 的一最优排列具有 $\{A_k, R_k\}$ 的形状，其中 $A_k = \{J_{\beta_1}, \cdots, J_{\beta_q}\}$，这 q 个零件是按应交工先后次序排列，且皆能按期交工，R_k 表示余下的须延期交工的零件. 若 $J_h \in R_k$，则 $A_k \subset G_h$[1]. 所以

$$\{A_k, (R_k \backslash J_h) \cup J_k\}$$

是 G_h 的一个排列. 显然在此排列下能按期交工的零件个数 $\geqslant q$，故

$$L\{G_h\} \geqslant q = L\{G_k\}.$$

若 $J_h \in A_k$，则 A_k 可写成:

$$J_{\beta_1}, \cdots, J_{\beta_s}(= J_h), \cdots, J_{\beta_r}, J_{\beta_{r+1}}, \cdots, J_{\beta_q},$$

其中 J_{β_r} 及其前面的零件皆属于 $\{J_1, \cdots, J_{i+1}\}$，后面的零件则不属于 $\{J_1, \cdots, J_{i+1}\}$. 现以 J_k 替换 A_k 中的 J_h，得到 $\bar{A}_h = (A_k \backslash J_h) \cup J_k$，并将 J_k 按应交工时间的先后排在应有位置. 若 $k \neq i + 1$，因 J_k 及其前面的零件和 J_{β_s} 前面的零件皆属于 $\{J_1, \cdots, J_i\}$，故皆能按期交工；$\bar{A}_h$ 中余下的零件，因 $p_k \leqslant p_h$，故亦能按期交工. 若 $k = i + 1$，则 J_k 必排在 J_{β_r} 和 $J_{\beta_{r+1}}$ 之间，根据同样理由，J_k 及后面的诸零件亦能按期交工. 这样即证明当 $J_h \in A_k$ 时亦有 $L\{G_h\} \geqslant L\{G_k\}$.

(v) 归纳法. 我们对须延期交工的零件个数施行归纳法来证明按 (3.1) 的解法得出的排列是一最优排列. 设 $(J_1, \cdots, J_n)$ 存在一最优排列，在此排列下 n 个零件皆能按期交工. 因 $(J_1, \cdots, J_n)$ 是按应交工时间先后次序排列的，由(iii)，每个零件在排列 $(J_1, \cdots, J_n)$ 下亦能按期交工，故 (3.1) 的解法对于最优排列中不包含须延期交工的零件的情况能得出最优排列.

假设对于最优排列中包含少于 m 个须延期交工的零件的情况，(3.1) 的解法能成立. 我们来证明它对于最优排列中包含 m 个须延期交工的零件的情况也成立.

设 S 是 $(J_1, \cdots, J_n)$ 的一最优排列，由 (ii)，S 可改排成 (A, R) 的形状. 今设 R 包含 m 个零件. 由(i)可知，R 必包含 $J_1, \cdots, J_{i+1}$ 中至少一个零件，设此零件为 J_k. 于是

$$S = \{A, (R \backslash J_k) \cup J_k\}.$$

容易看出，$\{A, R \backslash J_k\}$ 是 G_k 的一最优排列. 由 (iv)，$L\{G_h\} \geqslant L\{G_k\}$. 故对于 G_h 的任一最优排列 $\{A_h, R_h\}$ 而言，$\{A_h, R_h \cup J_h\}$ 必是 $(J_1, \cdots, J_n)$ 的最优排列. 所以 R_h 中含有 $m - 1$ 个零件. 由归纳法假设，将 (3.1) 的解法施用在 G_h 上，即得 G_h 的一最优排列.

1) 设 A, B 是两个集合，符号 $a \in A$ 表示 a 是 A 中的一个元素；$A \subset B$ 表示 A 中的元素皆属于 B；$A \backslash a$ 表示从 A 中除去元素 a 所得之集；$A \cup B$ 表示将 A 和 B 中的元素合并后所得之集.

换言之，对 $(J_1, \cdots, J_n)$ 施行解法的第一，二，三步以除去 J_h 之后，继续施行解法，即得出 $(J_1, \cdots, J_n)$ 的最优排列．最优性证明即完毕．

§4. 问题 3[3] 设有 n 个零件 $J_1, \cdots, J_n$ 要在一台机器上加工，它们各自的加工时间 $p_1, \cdots, p_n$ 和应交工时间 $D_1, \cdots, D_n$ 事先都已知道；并且要求一部分零件必须按期交工．试问应如何将 $J_1, \cdots, J_n$ 安排一个加工顺序，使得既能满足所提的要求（一部分零件必须按期交工），又使延期交工的零件个数最少？

(4.1) 除了 §1. 的三点说明外，我们再加上说明：(4) 在解决问题 3 之前，先将必须按期交工的那些零件抽出来，按应交工时间的先后次序排列．若在此排列下至少有一零件不能按期交工，则根据问题 2 的证明(i)，所提的问题必然没有解答．因此，在下面的论证中，我们总假设所提出的问题是有解答的．

(4.2) 解法

第一步．先将零件按应交工时间先后次序排列．若有几个零件的应交工时间相同，则将其中必须按期交工的零件排在这几个零件的后面，然后我们把零件依次编号，并将必须按期交工的各零件标上 * 号．

例．现有八个零件，其中有 * 号者是必须按期交工的零件．根据第一步，将零件按应交工时间先后次序排列，并依次加以编号：

零　件	J_1	J_2	J_3	J_4	J_5	J_6^*	J_7	J_8
加工时间 p_i	4	1	6	3	6	8	7	10
应交工时间 D_i	6	8	9	11	20	20	28	35

第二步．以 T 表示所有带 * 号的零件的编号所成的集合，令 m 表示 T 中的最大编号．现做一列新的数 $(D'_1, \cdots, D'_n)$ 如下：当 $i \geqslant m$ 时，令 $D'_i = D_i$；当 $i \leqslant m-1$ 时，设 h 是 i 后面的第一个属于 T 的编号，或者说 J_h^* 是必须按期交工的零件中紧排在 J_i 后面的零件，则令

$$D'_i = \min\{D_i, D'_h - p_h\}^{1)}.$$

在例子中 $T=\{6\}$，$m=6$．所以 $D'_6=20$，$D'_7=28$，$D'_8=35$；因 $J_h^*=J_6^*$，故 $D'_5=\min\{20, 20-8\}=12$，$D'_4=\min\{11, 20-8\}=11$，$D'_3=9$，$D'_2=8$，$D'_1=6$．

零　件	J_1	J_2	J_3	J_4	J_5	J_6^*	J_7	J_8
p_i	4	1	6	3	6	8	7	10
D'_i	6	8	9	11	12	20	28	35

第三步．若 S 是一些零件的编号所成之集，我们用符号 $P(S)$ 表示 S 中所有零件的加工时间之和，即 $P(S)=\sum_{i\in S} p_i$（当 S 是空的集合时，令 $P(S)=0$）．现在定义一列集合 $S_0, S_1, \cdots, S_n$：令 S_0 为空集；若 $S_{k-1}(k \geqslant 1)$ 已经定义好，则定义 S_k 如下

$$S_k = \begin{cases} S_{k-1} \cup \{k\}, & \text{若 } P(S_{k-1}) \leqslant D'_k - p_k, \\ (S_{k-1} \cup \{k\}) \setminus \{r\}, & \text{若 } P(S_{k-1}) > D'_k - p_k, \end{cases}$$

其中 J_r 是指编号属于 $S_{k-1} \cup \{k\}$，但不属于 T 的那些零件中加工时间为最大者，即

1) $\min(a, b)$ 表示 a，b 二实数中的最小者；$\max(a, b)$ 表示 a，b 二实数中的最大者．一般言之，$\min\{a \mid a\in S\}$ 表示实数集合 S 中的最小数；$\max\{a \mid a \in S\}$ 表示实数集合 S 中的最大数．

$$p_r = \max\{p_j \mid j \in (S_{k-1} \cup \{k\}) \backslash T\}.$$

当定义好 S_n，计算即终止． 这时把 S_n 排在前面，余下的零件排在后面，我们将证明它是最优加工顺序．在例子中，令 S_0 是空集；因 $D'_1 - p_1 = 2 > 0$，故 $S_1 = \{1\}$；因 $D'_2 - p_2 = 7 > 4 = P(S_1)$，故 $S_2 = \{1,2\}$；因 $D'_3 - p_3 = 3 < p(S_2) = 5$，$p_3 = \max\{p_j \mid j \in \{1, 2, 3\} \backslash \{6\}\}$，故 $S_3 = \{1, 2\}$；因 $D'_4 - p_4 = 8 > P(S_3)$，故 $S_4 = \{1, 2, 4\}$；因 $D'_5 - p_5 = 6 < P(S_4) = 8$，$p_5 = \max\{p_j \mid j \in \{1, 2, 4, 5\} \backslash \{6\}\}$，故 $S_5 = \{1, 2, 4\}$；因 $D'_6 - p_6 = 12 > P(S_5)$，故 $S_6 = \{1, 2, 4, 6\}$；因 $D'_7 - p_7 = 21 > P(S_6)$，故 $S_7 = \{1, 2, 4, 6, 7\}$；因 $D'_8 - p_8 = 25 > P(S_7)$，故 $S_8 = \{1, 2, 4, 6, 7, 8\}$．所以最优顺序是 $(J_1 J_2 J_4 J_6^* J_7 J_8 J_3 J_5)$．

(4.3) 最优性证明

证明分成下面几步：

(i) 以 D'_i 代替 D_i 后，不影响原问题的最优排列中按期交工的零件．

事实上，设原问题有一使得必须按期交工的零件皆能按期交工的最优排列，由于问题 2 的证明 (ii) 和 (iii)，此最优排列必可写成 $\{A, R\}$ 之形，A 中零件是按应交工时间先后次序排列的． 在 A 中，若 J_k^* 前面的零件是 J_i，它们的完工时间分别是 C_i 和 C_k，因它们都是能按期交工的，故必有 $C_i \leqslant D_i$，$C_i + p_k \leqslant C_k \leqslant D_k$． 所以有 $C_i \leqslant \min(D_i, D_k - p_k)$． 若 $T = \{m_1, m_2, \cdots, m_l\}$，其中 $m_1 < m_2 < \cdots < m_l = m$． 我们在定义 $D'_m = D_m$ 之后，对于排在 $J_{m_{l-1}}$ 和 J_m 之间的任一零件 J_i（包括 $J_{m_{l-1}}$），利用上面的不等式，可得

$$C_j \leqslant \min\{D_j, D'_m - p_m\}.$$

所以，我们以 $D'_j = \min\{D_j, D'_m - p_m\}$ 代替 D_j 后，A 中的零件仍能按期交工．对 $J_{m_{l-1}}$ 之前的零件可同样论证．因而新问题的最优排列中能按期交工的零件个数必不小于原问题的最优排列中能按期交工的零件个数．另一方面，因 $D'_j \leqslant D_j (j = 1, \cdots, n)$，故新问题的最优排列中能按期交工的零件在原问题的相同排列中也能按期交工．所以新问题的最优排列和原问题的最优排列是相同的．这就证明了可以 D'_i 来代替 D_i．

(ii) 令 $N_k = \{1, 2, \cdots, k\}$，则 $N_k \cap T \subseteq S_k$，且 S_k 中之零件以 D' 为应交工时间皆能按期完工 $(k = 1, 2, \cdots, n)$．

设 $(S_1, S_2, \cdots, S_n)$ 中第一个非空的集是 S_e． 按照 S_e 的定义可知，S_e 中的零件（即 J_e）必能按期交工．我们在 k 上施行归纳法来证明 S_k 中之零件皆能按期完工．设 $S_{k-1}(k-1 \geqslant e)$ 中之零件皆能按期完工，现要证 S_k 中之零件也皆能按期完工． 如 $k \notin T$．若 $S_k = S_{k-1} \cup \{k\}$，则由 S_k 之定义，有 $P(S_{k-1}) + p_k \leqslant D'_k$，即 J_k 可按期完工． 再由归纳法假设，故 S_k 中的零件皆能按期完工．若 $S_k \neq S_{k-1} \cup \{k\}$，由 S_k 之定义，必有 $P(S_{k-1}) + p_k > D'_k$，且 $S_k = (S_{k-1} \cup \{k\} \backslash \{r\}$，因而有

$$P(S_k) = P(S_{k-1}) + p_k - p_r \leqslant P(S_{k-1}),$$

其中 $p_r = \max\{p_j \mid j \in (S_{k-1} \cup \{k\} \backslash T\}$，并且 $k \notin T$．若 $k = r$，则 $S_k = S_{k-1}$，故 S_k 中零件皆能按期完工． 若 $k \neq r$，令 S_{k-1} 中的最大数为 i，由归纳法假设，J_i 能按期完工，即必有 $P(S_{k-1}) \leqslant D'_i$． 由是有

$$P(S_k) \leqslant P(S_{k-1}) \leqslant D'_i \leqslant D'_k,$$

故 J_k 能按期完工，因而 S_k 中零件皆能按期完工． 如 $k \in T$，由归纳法假设和 D'_i 之定义，有

$$P(S_{k-1}) \leqslant D_i' \leqslant D_k' - p_k,$$

故 $S_k = S_{k-1} \cup \{k\}$, J_k 能按期完工,所以 S_k 中零件皆能按期完工.

从上面的归纳法证明中已知,若 $k \in T$, 则 k 必属于 S_k. 故要证明 $N_k \cap T \subseteq S_k (k=1, \cdots, n)$, 只须证明: 若 $T = \{m_1, m_2, \cdots, m_l\}$, 其中 $m_1 < m_2 < \cdots < m_l$, 则 $e \leqslant m_1$ (J_e 是 S_e 中的零件). 因在 4.1 的说明(4)中规定我们的问题必须是有解的,也就是若只考虑T 中之零件,则必有

$$\sum_{j=1}^{k} p_{m_j} \leqslant D_{m_k}, \qquad k = 1, \cdots, l.$$

所以也必有

$$\sum_{j=1}^{k} p_{m_j} \leqslant D'_{m_k}, \qquad k = 1, \cdots, l.$$

如果 $S_1, \cdots, S_{m_1-1}$ 皆为空集,由 $p_{m_1} \leqslant D'_{m_1}$, 则 S_{m_1} 必包含 m_1. 这就证明了 $e \leqslant m_1$.

以下的证明可以仿效问题 2 中的证明方法, 即分做五步来证明 (S_n, R) 是最优排序 (R 是余下的零件组成的集,皆不能按期交工). 但在两处稍有不同, 其一是以 D_i' 替换 D_i 后, 不等式 $p_i \leqslant D_i'$ 不一定对于 $i = 1, \cdots, n$ 都成立. 因此我们在把零件按 D_i' 从小到大的次序排列后, 第一个延期交工的零件 J_{i+1} 或为 J_1 (即 S_1 为空集), 或不为 J_1 (即 S_1 非空); 其二是当 J_{i+1} 不为 J_1 时, 问题 2 中证明的前三步 (i), (ii) 和 (iii) 完全可照搬过来, 但 (iv) 须改为: 若令

$$p_h = \max_{\substack{1 \leqslant l \leqslant i+1 \\ l \notin T}} p_l,$$

则不等式 $L\{G_h\} \geqslant L\{G_k\}$ 对于 $k = 1, \cdots, i+1$, $k \notin T$ 都成立.

由于在 (ii) 中已证明了 $N_k \cap T \subseteq S_k (k = 1, 2, \cdots, n)$, 故上面的命题的证明与问题 2 中 (iv) 的证明一样.

还应说明的是,我们在用归纳法时,在假定最优排列中包含有少于m个须延期交工的零件的情况 (S_n, R) 是最优排列后, 当最优排列中包含有m个须延期交工的零件的情况, 如第一个延期交工的零件是 J_1, 即 $p_1 > D_1'$, 则 J_1 不论在任何排列中都须延期交工, 所以我们可暂不考虑 J_1, 而考虑 $G_1 = (J_2, \cdots, J_n)$. 显然 G_1 的最优排列中包含有 $m-1$ 个须延期交工的零件.根据归纳法的假定,把(4.2)中的算法施行到G_1上可以得到最优排列. 如第一个延期交工的零件不是 J_1, 即 S_1 非空,则可完全照搬问题 2 的证明 (v), 即能够证明 (S_n, R) 是最优排列.

§5. 问题 4[4]

设有 n 个零件 $J_1, \cdots, J_n$ 要在一台机器上加工, 它们的加工时间 $p_1, \cdots, p_n$ 和应交工时间 $d_1, \cdots, d_n$ 事先都已知道. 试问应如何将 $J_1, \cdots, J_n$ 安排一个加工顺序, 使得总的延误时间最小?

令 L_i 表示J_i在任一顺序下的延误时间. 设J_i在此顺序下的完工时间为 c_i, 若$d_i \geqslant c_i$, 显然 J_i 的延误时间 $L_i = 0$; 若 $d_i < c_i$, 则 $L_i = c_i - d_i$. 所以

$$L_i = \max(0, c_i - d_i).$$

由于目标函数 $\sum_i L_i$ 中含有绝对值,问题就困难得多,现在尚未完全解决.

(5.1) 几个简单的定理

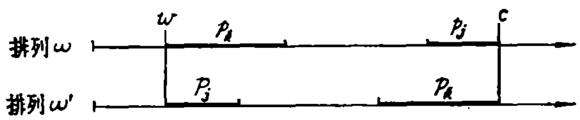
在证明中我们规定 $(J_1, \cdots, J_n)$ 的编号满足条件 $p_1 \leqslant p_2 \leqslant \cdots \leqslant p_n$.

定理 1. 设在某一排列 ω 中, J_k 排在 J_j 之前, J_k 的开始加工时间为 w, J_j 的完工时间为 c. 将 J_k 和 J_j 交换位置, 我们得到一新的排列 ω'. 令 $\Delta T_j(\Delta T_k)$ 表示 $J_j(J_k)$ 在 ω' 下的延误时间和在 ω 下的延误时间之差,则在 ω' 下的总延误时间和在 ω 下的总延误时间之差 Δ 为

$$\begin{aligned}\Delta &= D + \Delta T_j + \Delta T_k \\ &= D + \max(d_k, c) - \max(d_j, c) + \max(d_j, w + p_j) \\ &\quad - \max(d_k, w + p_k),\end{aligned} \tag{1}$$

其中 D 表示排在 J_k 和 J_j 之间的所有零件在 ω' 和 ω 之下的延误时间之差.

证.



由图显然可知, J_k 的延误时间在 ω 下为 $\max(0, w + p_k - d_k)$, 在 ω' 下为 $\max(0, c - d_k)$, 故

$$\begin{aligned}\Delta T_k &= \max(0, c - d_k) - \max(0, w + p_k - d_k) \\ &= \max(d_k, c) - \max(d_k, w + p_k),\end{aligned}$$

同理,可得

$$\Delta T_j = \max(d_j, w + p_j) - \max(d_j, c).$$

因 J_k 和 J_j 互换位置后, 不影响位于 w 之前和 c 之后的零件的延误时间, 所以 $\Delta = D + \Delta T_j + \Delta T_k$, 即得(1).

定理 2. 设在某一排列中, J_k 排在 J_j 之前, J_k 的开始加工时间为 w, 如 $p_j \leqslant p_k$, $d_j \leqslant \max(d_k, w + p_k)$, 则经过 J_j 和 J_k 交换位置之后, 所得的排列较原来的排列为优.

证. 因 $p_j \leqslant p_k$, 当 J_j 和 J_k 交换位置之后,位于 J_k 和 J_j 之间的每一零件的完工时间皆提前,故 $D \leqslant 0$. 我们若能证明 $\Delta T_j + \Delta T_k \leqslant 0$, 则 $\Delta \leqslant 0$. 此即表示 J_j 应排在 J_k 之前. 现分两种情况来讨论.

(i) 设 $d_j \leqslant d_k$. 如 $d_k \leqslant c$, 则

$$\Delta T_j + \Delta T_k = \max(d_j, w + p_j) - \max(d_k, w + p_k) \leqslant 0;$$

如 $d_j \leqslant c < d_k$, 因 $w + p_k + p_j \leqslant c$, 故

$$\Delta T_j + \Delta T_k = -c + \max(d_j, w + p_j) \leqslant 0;$$

如 $c < d_j \leqslant d_k$, 则 $\Delta T_j + \Delta T_k = 0$. 总之,此时有 $\Delta T_j + \Delta T_k \leqslant 0$.

(ii) 设 $d_j \leqslant w + p_k$. 如 $d_k > w + p_k$, 则 $d_j \leqslant d_k$, 在(i)中已证明此时有 $\Delta T_j + \Delta T_k \leqslant 0$. 如 $d_k \leqslant w + p_k$, 因 $d_k \leqslant c$, 故

$$\Delta T_j + \Delta T_k = \max(d_j, w + p_j) - (w + p_k) \leqslant 0.$$

由此即得定理 2.

由定理 2, 我们可立刻得出下面的推论.

推论 1. 若对于所有的 k, 皆有 $d_1 \leqslant \max(d_k, p_k)$, $k = 1, \cdots, n$, 则 J_1 应排在最前面加工.

推论 2. 若对于所有的 i，皆有 $d_i \leqslant \max(d_n, p_n)$，则 J_n 应排在最后面加工.

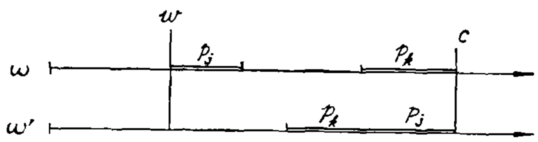
推论 3. 若 $d_1 \leqslant d_2 \leqslant \cdots \leqslant d_n$，则 $(J_1, J_2, \cdots, J_n)$ 即为一最优排列.

推论 4. 设在某一排列中，J_k 排在 J_i 之前，若已知 $J_{i_1}, \cdots, J_{i_s}$ 是排在 J_k 之前的一部分零件，且 $d_i \leqslant \max\left(\sum_{r=1}^{s} p_{i_r} + p_k, d_k\right)$，$p_i \leqslant p_k$，则经 J_i 和 J_k 交换位置之后，所得的排列较原来的排列为优.

推论 5. 若对于所有之 i，皆有 $d_i + p_i \leqslant \sum_{i=1}^{i+1} p_i$，则 $(J_1, J_2, \cdots, J_n)$ 即为一最优排列.

定理 3. 设在排列 ω 中 J_j 排在 J_k 的前面，J_k 的完工时间是 c. 现将 J_j 移到紧接 J_k 之后，其余零件的次序保持不变，即得一新的排列 ω'. 若 $d_j \geqslant c$，或 $c > d_j \geqslant \max(d_k, c - p_j)$ 且 $p_j \leqslant p_k$，则排列 ω' 较 ω 为优.

根据下图，利用定理 2 的证明方法即可证此定理.



推论 6. 设 $d_j = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} d_i$，且 $d_j + p_j \geqslant \sum_{i} p_i$，则 J_j 应排在最后.

推论 7. 设 ω 是按 d_i 从小到大的次序所得的排列. 在此排列下，J_i 的开始加工时间为 w_i，若对所有的 i，总有 $w_i \leqslant d_i$，则 ω 是一最优排列.

推论 8. 设 $j < k$，又在排列 ω 中 J_j 排在 J_k 的前面，且 $J_{i_1}, \cdots, J_{i_s}$ 排在 J_k 的后面，若 $d_j \geqslant \max\left(d_k, \sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{r=1}^{s} p_{i_r} - p_j\right)$，则应将 J_j 移到紧接 J_k 之后.

(5.2) 解法

先将所有的零件按 $p_1 \leqslant p_2 \leqslant \cdots \leqslant p_n$ 的次序编号，并利用推论 3, 4, 5 和 7 检查是否可以直接得出一最优排列. 若否，则进入以下的运算步骤.

第一步. 利用定理 2, 3 和推论 1, 2, 6，将应排在最前或最后的零件一一排除，并将所排除的零件按先后次序排列之；

第二步. 对于余下的那些零件，再利用定理 2, 3，将 J_j 和 J_k 交换位置，或将 J_j 移到紧接 J_k 之后（最好选取使得 $\Delta T_j + \Delta T_k$ 下降最多的那种 J_j 和 J_k）. 在此过程中，又可利用第一步将一些 J_i 排除；

第三步. 将尚未确定位置的两个零件互相交换位置，再回到第一步.

以上的运算步骤一般说来不一定得出最优排列，而只能得到比较好的排列.

(5.3) 例

零　件	J_1	J_2	J_3	J_4	J_5	J_6	J_7
加工时间 p_i	3	4	6	7	9	19	25
应交工时间 d_i	10	14	12	11	10	7	13

(1) 由推论 2，J_7 应排在最后加工，除去 J_7；

（2）由推论 2，J_6 应排在除 J_7 外其他零件之后（即倒数第二位），除去 J_6；

（3）由推论 1，J_1 应排在最前面，除去 J_1；

（4）由定理 3，应把 J_2 移到 J_4 之后，得排列（$J_3J_4J_2J_5$）；

（5）由定理 3，J_3 应排在 J_4 之后，得排列（$J_4J_3J_2J_5$）；

（6）当 J_5 排在最后面时，由定理 3，对 J_2，J_3 和 J_4 而言，J_4 应在 J_3 之前，J_3 应在 J_2 之前，J_4 也应在 J_2 之前．由此，当 J_5 排在最后面时，最好的排列是（$J_4J_3J_2J_5$）；

（7）由推论 4，J_2 若排在 J_5 之前时，则 J_5 应与后面的 J_3 或 J_4（若 J_5 后面有零件 J_3 或 J_4）相交换，即 J_5 应排在 J_3 和 J_4 的后面．同样的论证也施用于已知 J_3 或 J_4 是排在 J_5 之前的情况．因此，再由（6），除 J_5 排在最前面外，最好的排列是（$J_4J_3J_2J_5$）；

（8）J_5 若排在最前面，由定理 2，则 J_2 应排在 J_3 和 J_4 之前，且 J_3 应排在 J_4 之前．因此，当 J_5 排在最前面时，最好的排列是（$J_5J_2J_3J_4$）；

（9）由于总延误时间 $L(4325)=20$，而 $L(5234)=22$，故得本例的最优排列为（$J_1J_4J_3J_2J_5J_6J_7$）．

我们从本例的计算过程可看出，最优排列是通过比较两个较好的排列而得到的．当零件个数相当多时，最优排列的寻求是很困难的．

（待续）

参 考 资 料

[1] Conway R. W., Maxwell W. L. and Miller L. W., *Theory of Scheduling*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1967.

[2] Moore J. M., An n Job, One Machine Sequencing Algorithm for Minimizing the Number of Late Jobs, *Manag. Sci.*, **15**: 1 (1968).

[3] Sidney J. B., *An Extension of Moore's Due Date Algorithm*, Symposium on the Theory of Scheduling and Its Applications, Edited by S. E. Elmaghraby, Springer-Verlag, 1973.

[4] Emmons H., On Machine Sequencing to Minimize Certain Functions of Job Tardiness, *O. R.* **17**: 4 (1969).

[5] Elmaphraby S. E., On the Sequencing of n Jobs on One Machine to Minimize the Number of Jobs Late, *Manag. Sci.*, **18**: 7 (1972).

[6] Demski J. S., "Optimizing the Search for Cost Deviation Sources", *Manag. Sci.*, **16**: 8 (1970).

南开大学数学系齿轮啮合研究小组所写"齿轮啮合理论的数学基础（三）"一文，因其它刊物已发表，本刊不再继续刊登．