第3卷 第4期 应用数学学报 Vol. 3, No. 4
1980年11月 ACTA MATHEMATICAE APPLICATAE SINICA Nov., 1980

排序问题的一个判别条件和一类特殊的 $m\times n$ 排序问题

韩 继 业
(中国科学院应用数学研究所)

一、引言

在排序理论的一篇开创性的文章[1]中，Johnson 给出了 $2\times n$ 排序问题(二台“机床”，n 个“零件”的同顺序排序问题,这里机床和零件被理解成广义的)的最优顺序的算法。在导出这算法时，Johnson 给出的判别两个相邻零件的先后次序的一个条件起着关键作用. 这判别条件是：设 i, j 是相邻的两个零件，a_i 和 $b_i(a_j, b_j)$ 是 $i(j)$ 分别在机床 M_1 和 M_2 上的加工时间,如

$$\min\{a_i, b_j\}\leqslant\min\{a_j, b_i\},\tag{1}$$

则不论 i, j 的前后的零件怎样排列,它们的加工时间取何数值，i 应排在 j 的前面.

条件(1)只与 i, j 有关. 我们利用不等式(1)可在 i, j 之间建立一种“序”的关系，$i<j$，我们可证明在集 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 中定义了一“全序”. 按 Johnson 算法得到的最优顺序 $(i_1i_2\cdots i_n)$ 即满足 $i_1<i_2<\cdots<i_n$. 对于 $m\times n$ 排序问题，$m\geqslant 3$，我们能否也给出一个判别相邻零件 i，j 的先后次序的条件，它只与 i，j 的加工时间有关,而且根据这条件,在集 $\{1,2,\cdots,n\}$ 中也定义一种全序关系,进而给出最优顺序的一种有效的算法. 自文献[1]发表以来,这条途径被做过许多探索. 文献[2]中对 $3\times n$ 排序问题给出如下判别条件：设 i，j 是相邻的零件，a_i, b_i, c_i (a_j, b_j, c_j) 是 $i(j)$ 分别在机床 M_1, M_2, M_3 上的加工时间,如果

$$b_i<b_j,\ a_i+b_i<a_j+b_j,\ b_i+c_i>b_j+c_j,\tag{2}$$

则零件 i 应排在零件 j 之前.

文献[3]中对 $m\times n$ 排序问题给出如下判别条件：设 i, j 是相邻的零件，$a_{ki}(a_{kj})$ 是 $i(j)$ 在 M_k 上的加工时间，$k=1, 2, \cdots, m$，如果

$$\min\{a_{ki}, a_{k+1\,j}\}\leqslant\min\{a_{kj}, a_{k+1\,i}\},\quad 1\leqslant k\leqslant m-1,\tag{3}$$

$$\min\left\{\sum_{k=u}^{v}a_{ki},\ \sum_{k=u+1}^{v+1}a_{kj}\right\}\leqslant\min\left\{\sum_{k=u}^{v}a_{kj},\ \sum_{k=u+1}^{v+1}a_{ki}\right\},\quad 1\leqslant u<v\leqslant m-1,\tag{4}$$

则 i 应排在 j 之前.

条件(2)和(3),(4)并不是最好的条件. 对于只涉及 i 和 j 的加工时间的判别条件

本文1978年5月3日收到.

而言，文献[4]对一般的m给出了最好的条件：

$$\min\{a_{ui}, a_{vj}\} \leqslant \min\{a_{uj}, a_{vi}\}, \quad 1 \leqslant u < v \leqslant m. \tag{5}$$

同时还证明了条件(5)不可能再减弱了．文献[5]和文献[6]都只对$m=3$得到判别条件(5)．

显然在$m \geqslant 3$时条件(5)不能被用来在集$\{1,\cdots,n\}$中定义一个全序关系，由此我们得出一重要结论：$2\times n$排序问题和$m\times n$排序问题($m\geqslant 3$)有本质的不同，我们不能用类似于$2\times n$问题的解决方法来解决一般的$m\times n$排序问题．文献[7]研究了排序问题的计算的复杂性，证明了$m\times n$问题($m\geqslant 3$)属于"NP完备"问题，这类问题几乎不可能有有效的解法．

条件(5)不仅在排序问题的定性研究中起了重要作用，同时它在算法研究中也起作用．我们在本文中给出一简化的条件，它与(5)等价；并且讨论由这一判别条件所决定的一种特殊的排序问题的解法．

二、判别条件(5)的简化

同顺序(也称 Flow-shop)的排序问题是：设有n个零件$J_1, J_2, \cdots, J_n$和m台机床$M_1, M_2, \cdots, M_m$，每个零件都按顺序$(M_1M_2\cdots M_m)$通过这些机床，在每台机床上加工零件的顺序都一致．令a_{ki}表示零件i在机床M_k上的加工时间．下面给出条件(5)的简化条件．

定理1 如$a_{ki} \neq a_{kj}$，$k=1,\cdots,m$，则条件(5)与

$$\min\{a_{ki}, a_{k+1\,j}\} \leqslant \min\{a_{kj}, a_{k+1\,i}\}, \quad 1 \leqslant k \leqslant m-1 \tag{6}$$

等价．

证 我们用归纳法证明：在定理的假设下，由条件(6)可推出条件(5)．当$m=2$时显然条件(6)即为条件(5)．设对于小于m的正整数($m>2$)，由(6)可推出(5)．对于m而言，由(6)及归纳法假设，欲证条件(5)成立，我们只须证明不等式

$$\min\{a_{1i}, a_{mj}\} \leqslant \min\{a_{1j}, a_{mi}\}. \tag{7}$$

下面分两种情形讨论：i) $a_{1i} \leqslant a_{m-1\,j}$．由归纳法假设，可得

$$\min\{a_{1i}, a_{m-1\,j}\} \leqslant \min\{a_{1j}, a_{m-1\,i}\},$$

故有$a_{1i} \leqslant \min\{a_{1j}, a_{m-1\,i}\}$．若$a_{m-1\,i} < a_{m-1\,j}$，此时如$a_{mi} < a_{mj}$，由$\min\{a_{m-1\,i}, a_{mj}\} \leqslant \min\{a_{m-1\,j}, a_{mi}\}$，则有$a_{m-1\,i} \leqslant \min\{a_{mi}, a_{mj}\}$，故得到(7)；此时如$a_{mi} > a_{mj}$，显然也有(7)．

若$a_{m-1\,i} > a_{m-1\,j}$，由$\min\{a_{m-1\,i}, a_{mj}\} \leqslant \min\{a_{m-1\,j}, a_{mi}\}$，则有$a_{mj} \leqslant \min\{a_{m-1\,j}, a_{mi}\}$，故显然有(7)．

ii) $a_{1i} > a_{m-1\,j}$．由归纳法假设，故有$a_{m-1\,j} \leqslant a_{1j}$，$a_{m-1\,j} < a_{m-1\,i}$．又由$\min\{a_{m-1\,i}, a_{mj}\} \leqslant \min\{a_{m-1\,j}, a_{mi}\}$，可得$a_{mj} < a_{m-1\,i}$，$a_{mj} \leqslant \min\{a_{m-1\,j}, a_{mi}\}$，故有$a_{mj} \leqslant a_{1j}$，所以也得到(7)．

条件(5)显然蕴含条件(6)．定理证毕．

下面令$K=\{k \mid a_{ki} \neq a_{kj}, 1 \leqslant k \leqslant m\}$，$\bar{K}=\{1,2,\cdots,m\}\setminus K$．如$\bar{K}$非空，对任一$p \in \bar{K}$，我们定义

$$p'=\max\{k\mid k<p,\ k\in K\},$$
$$p''=\min\{k\mid k>p,\ k\in K\}. \tag{8}$$

上面的集合如为空集时，相应的 p' 或 p'' 不定义。

定理 2　如 $\bar{K}$ 非空，$K=\{k_1,k_2,\cdots,k_r\}$，$k_1<k_2<\cdots<k_r$. 则条件 (5) 与

$$\min\{a_{k_ui},a_{k_{u+1}j}\}\leqslant\min\{a_{k_uj},a_{k_{u+1}i}\},\quad 1\leqslant u<r, \tag{9}$$

$$\begin{cases}\min\{a_{p'i},a_{pj}\}\leqslant\min\{a_{p'j},a_{pi}\},\\ \min\{a_{pi},a_{p''j}\}\leqslant\min\{a_{pj},a_{p''i}\},\quad\forall p\in\bar{K},\end{cases} \tag{10}$$

等价。

证　我们要证：对任意 $u<v$，由 (9) 和 (10) 可推出

$$\min\{a_{ui},a_{vj}\}\leqslant\min\{a_{uj},a_{vi}\}. \tag{11}$$

下面分四种情形来讨论：

i) $a_{ui}\neq a_{uj}$，$a_{vi}\neq a_{vj}$. 由条件 (9) 及定理 1 可知 (11) 式成立。

ii) $a_{ui}=a_{uj}$，$a_{vi}=a_{vj}$. 显然有 (11) 式。

iii) $a_{ui}\neq a_{uj}$，$a_{vi}=a_{vj}$. 由定义 (8) 存在 v'，$v'\in K$. 如 $v'=u$，则 (10) 中第一个不等式即为 (11). 如 $v'>u$，在 i) 中已证明有

$$\min\{a_{ui},a_{v'j}\}\leqslant\min\{a_{uj},a_{v'i}\}, \tag{12}$$

若 $a_{v'i}<a_{v'j}$，由 (12) 可知 $a_{ui}<a_{uj}$，所以 (11) 式成立。若 $a_{v'i}>a_{v'j}$，由条件 (10) 可知 $a_{vj}\leqslant a_{v'j}$，此时如果 $a_{ui}>a_{uj}$，由条件 (12) 可知 $a_{v'j}\leqslant\min\{a_{ui},a_{uj},a_{v'i}\}$，所以 $a_{vj}\leqslant a_{uj}<a_{ui}$，故 (11) 式成立；此时如果 $a_{ui}<a_{uj}$，显然 (11) 式也成立。

iv) $a_{ui}=a_{uj}$，$a_{vi}\neq a_{vj}$. 证明 (11) 的方法与 iii) 类似。

我们即证明由 (9) 和 (10) 可推出 (5)，(5) 显然蕴含 (9) 和 (10). 定理证毕。

在 $\bar{K}$ 为空集时，(9) 和 (10) 化为条件 (6). 由文献 [4] 和定理 2 可知，若 i，j 是相邻的零件，如果 (9) 和 (10) 成立，则 i 应排在 j 之前。由于条件 (9) 和 (10) 包含的不等式的个数总少于 $\frac{m(m-1)}{2}$，$(m>2)$，其数目在 $(m-1)$ 与 $(2m-3)$ 之间，所以当 m 较大时，检查 (9) 和 (10) 的工作量比检查 (5) 的工作量要减少很多。

三、一种特殊的排序问题

利用定理 2，我们提出一种特殊的 $m\times n$ 排序问题。它具有简便的解法。

条件 (A)：设对任意两个零件 i 和 j，或满足条件 (9) 和 (10)，或满足

$$\min\{a_{k_ui},a_{k_{u+1}j}\}\geqslant\min\{a_{k_uj},a_{k_{u+1}i}\},\quad 1\leqslant u<r, \tag{13}$$

$$\begin{cases}\min\{a_{p'i},a_{pj}\}\geqslant\min\{a_{p'j},a_{pi}\}.\\ \min\{a_{pi},a_{p''j}\}\geqslant\min\{a_{pj},a_{p''i}\},\quad\forall p\in\bar{K}.\end{cases} \tag{14}$$

满足 (A) 的排序问题的最优顺序的解法是：

第一步。如 a_{1i}，a_{mi}，$i=1,2,\cdots,n$，中的最小数是在第一行，则从第一行中取出所有的最小数，设为 $a_{1i_1}=a_{1i_2}=\cdots=a_{1i_k}$，将相应的零件集 $I_1=(i_1,i_2,\cdots,i_k)$ 排在最前边；如最小数不在第一行，则从第 m 行中取出所有的最小数，设为 $a_{mj_1}=a_{mj_2}=\cdots=a_{mj_h}$，将零件集 $J_1=(j_1,j_2,\cdots,j_h)$ 排在最后边。对余下的零件也同样处理，最后将零件

分成若干子集,并排成 $(I_1 I_2 \cdots J_3 J_2 J_1)$;

第二步. 对每一 I_μ 和 J_ν, $\mu = 1, 2, \cdots$, $\nu = 1, 2, \cdots$, 皆构成一个 $(m-1)$ 台机床的排序问题,如 $I_\mu = (i'_1, i'_2, \cdots)$, $J_\nu = (j'_1, j'_2, \cdots)$, 则其加工时间矩阵分别为

$$\begin{bmatrix} a_{2i'_1} & a_{2i'_2} & \cdots \\ a_{3i'_1} & a_{3i'_2} & \cdots \\ & \cdots\cdots & \\ a_{mi'_1} & a_{mi'_2} & \cdots \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} a_{1j'_1} & a_{1j'_2} & \cdots \\ a_{2j'_1} & a_{2j'_2} & \cdots \\ & \cdots\cdots & \\ a_{m-1\, j'_1} & a_{m-1\, j'_2} & \cdots \end{bmatrix},$$

对这些子问题重新实行第一步和第二步. 每循环一次,机床数减少一. 最后所得到的排列 $(r_1 r_2 \cdots r_n)$ 即是最优排列.

定理 3 $(r_1 r_2 \cdots r_n)$ 是最优排列.

证 先证明命题: 对任意 i, j, 若在排列 $(r_1 r_2 \cdots r_n)$ 中 i 排在 j 之前, 则总有 (9) 和(10).

我们用归纳法来证明. 当 $m = 2$ 时, 上述算法即化为 Johnson 方法, 故此命题成立. 设命题对小于 m 的正整数成立, 对 m 而言, 可分几种情形来讨论:

i) i 和 j 同属于 I_μ. 由归纳法假设和定理 2 可知

$$\min\{a_{ui}, a_{vj}\} \leqslant \min\{a_{uj}, a_{vi}\}, \quad 2 \leqslant u < v \leqslant m. \tag{15}$$

因 i, j 同属于 I_μ, 故有 $a_{1i} = a_{1j}$. 要证明 (9) 和 (10), 只须证明对集合 K 中元素 k_1 有不等式 (K 之定义见上一节)

$$\min\{a_{1i}, a_{k_1 j}\} \leqslant \min\{a_{1j}, a_{k_1 i}\}. \tag{16}$$

若 (15) 中至少有一式是真不等式, 由条件 (A), 显然有 (16). 若 (15) 中都是等式, 则可推出 $a_{k_1 i}$ 不能小于 a_{1i}. 否则由 $a_{k_1 i} < a_{1i}$, 再利用 $a_{1i} \leqslant \min\{a_{mi}, a_{mj}\}$, 及 $\min\{a_{k_1 i}, a_{mj}\} = \min\{a_{k_1 j}, a_{mi}\}$, 可得 $a_{k_1 i} = a_{k_1 j}$, 引出矛盾. 故只能有 $a_{k_1 i} \geqslant a_{1i}$, (16) 式即成立;

ii) i 和 j 同属于 J_ν. 证明方法同 i);

iii) $i \in I_\mu$, $j \in I_{\mu'}$, $\mu \neq \mu'$. 根据算法第一步, 可知 $a_{1i} < a_{1j}$, $a_{1i} \leqslant \min\{a_{mi}, a_{mj}\}$, 所以有

$$\min\{a_{1i}, a_{mj}\} \leqslant \min\{a_{1j}, a_{mi}\}.$$

若此式是真不等式, 由条件 (A) 可知 (9)和(10) 必成立; 若此式是等式, 则推出 $a_{1i} = a_{mi}$, 我们用反证法来证明 (9) 和 (10): 设存在 $p < q$, 使得

$$\min\{a_{pi}, a_{qj}\} > \min\{a_{pj}, a_{qi}\}, \tag{17}$$

由条件 (A) 可知

$$\min\{a_{1i}, a_{pj}\} \geqslant \min\{a_{1j}, a_{pi}\}, \tag{18}$$

$$\min\{a_{qi}, a_{mj}\} \geqslant \min\{a_{qj}, a_{mi}\}. \tag{19}$$

由(18) 和 $a_{1i} < a_{1j}$, 可推知 $a_{pi} \leqslant \min\{a_{1i}, a_{pi}\}$, 再由 (17) 可知 $a_{qi} < \min\{a_{pi}, a_{pj}, a_{qj}\}$,

所以 $a_{qi}<a_{1i}=a_{mi}$，这与(19)式相矛盾，故不可能有(17)。(9)和(10)即得证。

iv) $i\in J_{\nu}$, $j\in J_{\nu'}$, $\nu\neq\nu'$. 证明方法同 iii)。

v) $i\in I_{\mu}$, $j\in J_{\nu}$。显然有 $a_{1i}\leqslant a_{mi}$, $a_{mj}<a_{1j}$. 此时或可能有 $a_{1i}<a_{1j}$, $a_{1i}\leqslant a_{mj}$，再由 $a_{1i}\leqslant a_{mi}$，则证明(9)和(10)的方法与 iii)同；或可能有 $a_{mj}<\min\{a_{1i}, a_{mi}\}$，再由 $a_{mj}<a_{1j}$，则证明(9)和(10)的方法同 iv)。

利用此命题和[4]中定理4，即可证本定理。

包括上述的特殊排序问题(A)在内，现在已找到六种有简便解法的特殊的 $m\times n$ 排序问题，另外的五种见文献[8]。在已有的五种特殊排序问题中，有四种可以化成 $2\times n$ 排序问题来解，所以实质上它们是以能够用 Johnson 算法为出发点而建立的特殊的 $m\times n$ 排序问题。如果以能够用问题(A)的算法(这算法是 Johnson 算法的推广)为出发点，我们将能够建立一些新的特殊的 $m\times n$ 排序问题，这是值得讨论的课题。

参　考　文　献

[1] Johnson S. M., Optimal Two-and-three Stage Production Schedules With Setup Times Included. *Naval Res. Logis. Quart.*, 1: 1(1954), 61—68.

[2] Szwarc W., On Some Sequencing Problems, *Naval Res. Logis. Quart.*, 15: 2(1968), 127—156.

[3] Nabeshima I., The order of n Items Processed on m Machines III, *J. Oper. Res. Soc. Japan*, 16: 3(1973), 163—185.

[4] 越民义、韩继业，几个零件在m台机床上的加工顺序问题(I)，中国科学，1975年，第5期，462—470.

[5] Burns F.; Rooker, J., Johnson's Three Machine Flowshop Conjecture, *Oper. Res.*, 24(1976), 578—580.

[6] Szwarc W., Optimal two-machine orderings in the 3×n Flow-shop Problem, *Oper. Res.*, 25 (1977), 70—77.

[7] Garey M. R.; Johson D. S.; Sethi Ravi., The Complexity of Flowshop and Jobshop Scheduling, *Math. of Oper. Res.*, 1: 2(1976), 117—129.

[8] Szwarc W., Special Cases of the Flow-Shop Problem, *Naval Res. Logis. Quart.*, 24: 3(1977), 483—492.