同顺序 $m \times n$ 排序问题的一个新方法

越民义　韩继业
（中国科学院数学研究所）

排序问题是一类很广泛的组合最优化问题. 它出现在工业、农业、运输和计划管理等方面. 它主要研究一些服务者应按照怎样的次序去服务若干个被服务者，以使预先给定的目标函数达到最优. 文献中一般称服务者为“机器”，称被服务者为“工件”. 同顺序 $m \times n$ 排序问题是指:

（1） n 个工件皆依同一顺序（M_1、$M_2 \cdots M_m$）通过 m 个机器；

（2） 各工件在各机器上的加工时间为已知，且为常数；

（3） 一个机器只能同时加工一个工件；

（4） 在各机器上工件的加工次序都一样.

一般以总加工时间作为 $m \times n$ 排序问题的目标函数. 所谓总加工时间是指从机器 M_1 开始加工工件起，到机器 M_m 加工完全部工件为止这段时间. 显然它依赖于工件的加工次序. 最优加工次序（或工件的最优排列）对应的总加工时间最短.

文献[1]证明了当 $m \geqslant 3$ 时 $m \times n$ 排序问题属于“NP完备”问题. 目前解决 $m \times n$ 排序问题的方法有分支定界法和消去法. 前者的主要成果被总结在文献[2]中；后者的最新成果是 Szwarc 的消去准则[3,4]，他证明他的消去准则比文献中已有的结果都广泛. 在本文中我们给出几个消去准则，并证明我们的结果比 Szwarc 的结果要广泛；其次我们给出计算最优加工次序的新方法，通过实际计算，它比已有的方法要好.

一、几个消去准则

先定义几个符号:

1） $N = \{1, 2, 3, \cdots, n\}$ 是全部工件号码的集合.

2） $S = (s_1 s_2 \cdots s_k)$ 是任意 k 个工件 $s_1, s_2, \cdots, s_k$ 排成的一个序列，整数 p 和 q 满足 $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant m$. 我们令 $t_{pq}(S)$ 表示矩阵

$$\begin{bmatrix} a_{ps_1} & a_{ps_2} \cdots a_{ps_k} \\ a_{p+1s_1} & a_{p+1s_2} \cdots a_{p+1s_k} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ a_{qs_1} & a_{qs_2} \cdots a_{qs_k} \end{bmatrix}$$

的最大可行和（最大可行和的定义见文献[2]），其中 a_{ps} 是工件 s 在机器 M_p 上的加工时间. 当 S 为空集时，令 $t_{pq}(S) = 0$.

本文 1979 年 1 月 15 日收到.

3）设 S 和 S' 是工件的序列，且 $S\cap S'=\phi$. 我们令 $B(S\cdots S')$ 表示全部 $(S\cdots S')$ 形的排列（或加工次序）对应的总加工时间的下界. S 或 S' 可为空集.

4）设 $I=(i_1i_2\cdots i_k)$ 是工件的序列，p 和 q 为整数，$1\leqslant p\leqslant q\leqslant m$，我们令

$$A_{pq}(I)=\min_{p\leqslant r_1\leqslant r_2\leqslant\cdots\leqslant r_k\leqslant q}(a_{r_1i_1}+a_{r_2i_2}+\cdots+a_{r_ki_k}). \tag{1}$$

5）设 $S=(s_1s_2\cdots)$，$I=(i_1i_2\cdots)$ 是工件的序列，我们令 (Sj) 表序列 $(s_1s_2\cdots j)$，(SIj) 表序列 $(s_1s_2\cdots i_1i_2\cdots j)$.

下面的定理说明：当我们已排了序列 S 后，工件 j 可否排在下一个位置上.

定理 1 设 $I=(i_1i_2\cdots i_u)$，$S=(s_1s_2\cdots s_k)$，$I\cap S=\phi$，j 不属于 I 和 S，序列集 Q 是 S，I，j 以外的所有工件所排的序列的全体. 若条件

$$t_{1q}(SI)\leqslant\max\{t_{1q}(Sj)-a_{qj}+A_{qm}(I),\ B(Sj\cdots)-\max_{R\in Q}t_{qm}(jR)\},\quad 1\leqslant q\leqslant m \tag{A}$$

成立，则在求最优排列时可消去所有 $(Sj\cdots i_1\cdots i_2\cdots i_u\cdots)$ 形的排列，而不会把最优排列全消光.

系 1 设 $I=(i)$，若条件

$$t_{1q}(Si)\leqslant\max\{t_{1q}(Sj)-a_{qj}+\min(a_{qi},a_{q+1i},\cdots,a_{mi}),\ B(Sj\cdots)-\max_{R\in Q}t_{qm}(jR)\},\quad 1\leqslant q\leqslant m \tag{B}$$

成立，则可消去所有 $(Sj\cdots)$ 形的排列，而不会把最优排列全消光.

Szwarc 在文献[4]中给出如下定理：

设 S，R'，R'' 都是工件排成的序列，它们满足

$$R'\cap R''=\phi,\quad \{R'\cup R''\}\cap(Sij)=\phi,\quad R'\cup R''\cup(Sij)=N,$$

工件 i，j 不属于 S. 则条件

$$t_{1q-1}(Sij)-t_{1q-1}(Sj)\leqslant t_{1q}(Sij)-t_{1q}(Sj)\leqslant a_{qi},\quad q=2,\cdots,m \tag{2}$$

和条件

$$t_{1m}(SijR'R'')\leqslant t_{1m}(SjR'iR''), \tag{3}$$

所有上面的 R' 和 R'' 等价.

因此若条件（2）式成立，则我们可消去所有 $(S_j\cdots)$ 形的排列，而不会把最优排列全消光.

定理 2 若条件（2）式成立，则下面的条件必成立

$$t_{1q}(Si)\leqslant t_{1q}(Sj)-a_{qi}+\min(a_{qi},a_{q+1i},\cdots,a_{mi}),\quad 1\leqslant q\leqslant m. \tag{4}$$

显然条件（4）式若成立，则条件（B）必然成立. 故由定理 2 可知消去准则（A）和（B）比 Szwarc 的消去准则（2）式要广泛.

定理 3 设 i 和 j 不属于序列 S，序列集 Q 是 S 和 i 以外的所有工件所排的序列的全体. 若条件

$$t_{1p}(Si)\leqslant\max\{t_{1p}(Sj)+\min_{r\geqslant q}[t_{qr}(i)-t_{qr}(j)],\ B(Sj\cdots)-\max_{R\in Q}t_{pm}(R)\},\quad 1\leqslant p\leqslant q\leqslant m \tag{C}$$

成立，则可消去所有 $(Sj\cdots)$ 形的排列，而不会把最优排列全消光.

定理 4 设序列 S，S' 和 J 互不相交，i 不属于 S，S' 和 J，序列集 Q 是 S，S'，J 和 i 以

外的所有工件所排的序列的全体．若条件

$$t_{1p}(Si)+t_{qm}(JS')\leqslant\max\{t_{1p}(SJ)+A_{pq}(i)+t_{qm}(S'),\ B(SJ\cdots)-\max_{R\in Q}t_{pq}(R)\},$$

$$1\leqslant p\leqslant q\leqslant m \quad \text{(D)}$$

成立，则可消去所有 $(SJ\cdots S')$ 形的排列，而不会把最优排列全消光．

二、$B(S\cdots S')$ 和 $\max t_{pq}(\cdots)$ 的计算

更好地估计 $B(S\cdots S')$ 之值是提高消去法和分支定界法的效率的重要环节．我们给出如下公式： 设 R 是 S 和 S' 以外的所有工件的集，根据 a_{m-1j} 和 a_{mj} 之值，$j\in R$，将 R 中工件按照 Johnson 法则（见文献[1]）排成序列 $(j_1j_2\cdots j_k)$． 令

$$R_1=(j_1j_2\cdots j_kS'),\qquad R_2=(j_2j_1j_3\cdots j_kS'),$$

$$R_3=(j_3j_1j_2j_4\cdots j_kS'),\ \cdots,\quad R_k=(j_kj_1\cdots j_{k-1}S'),$$

再定义

$$b_p=t_{1p}(S)+\max\{\min_{1\leqslant\alpha\leqslant k}[t_{pm-2}(j_\alpha)+t_{m-1m}(R_\alpha)],\ t_{pp}(R)+t_{pm}(S')\},$$

$$1\leqslant p\leqslant m-2,$$

$$b_{m-1}=t_{1m-1}(S)+t_{m-1m}(R_1),$$

$$b_m=t_{1m}(S)+t_{mm}(R_1).$$

我们令

$$B(S\cdots S')=\max_{1\leqslant p\leqslant m}\{b_p\}.$$

对于消去准则(A)和(B)，因为有等式

$$\max_{R\in Q}t_{qm}(jR)=\max_{q\leqslant r\leqslant m}\{t_{qr}(j)+\max_{R\in Q}t_{rm}(R)\},$$

所以只须研究 $\max_{Q}t_{rm}(R)$ 的计算．当 R 包含大量工件时，精确计算 $\max_{Q}t_{rm}(R)$ 是很费时的，我们代之以它的上界．设 $R=(j_1j_2\cdots j_k)$，先在矩阵

$$A(R)=\begin{bmatrix}a_{rj_1} & a_{rj_2} & \cdots & a_{rj_k}\\ & \cdots\cdots & & \\ a_{mj_1} & a_{mj_2} & \cdots & a_{mj_k}\end{bmatrix}$$

的每一列内任取一个最大数 $a_{j_\alpha}=\max_{r\leqslant p\leqslant m}a_{pj_\alpha}$，$\alpha=1,\cdots,k$．将 a_{j_α} 从 $A(R)$ 中划去，再在 $A(R)$ 的每一行余下的数中取出最大数（空集的最大数为 0），记为 $a_r, a_{r+1},\cdots,q_m$，则可以证明

$$\max_{Q}t_{rm}(R)\leqslant\sum_{\alpha=1}^{k}a_{j_\alpha}+\sum_{p=r}^{m}a_p-\min_{r\leqslant p\leqslant m}\{a_p\}.$$

三、最优排列的算法

每一个 $m\times n$ 排序问题都对应另一个 $m\times n$ 排序问题，称为逆问题．逆问题的加工时间矩阵为

$$\begin{bmatrix}a_{mn} & a_{mn-1} & \cdots & a_{m1}\\ a_{m-1n} & a_{m-1n-1} & \cdots & a_{m-11}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{1n} & a_{1n-1} & \cdots & a_{11}\end{bmatrix}.$$

容易证明：逆问题的最优排列的逆排列就是原问题的最优排列．下面我们把分支定界法和消去法结合起来，给出一个计算最优排列的新方法．

(1) 先令 $S=S'=\phi$，令 $z^*=+\infty$，通往(2)．

(2) 对正问题和逆问题用消去准则 (A)，(B)，(C)，(D) 进行检验、消去若干个分支 $\{(Sj\cdots S')\}$ 或 $\{(S\cdots jS')\}$，通往(3)．

(3) 未消去的分支如只含两个排列，则分别计算各排列对应的总加工时间．令其中最小者为 z．取 $\min(z, z^*)$ 为新的上界 z^*、通往(4)；如未消去的分支不只包含两个排列，则计算其下界 $B(\cdots)$，通往(5)．

(4) 在树形分支图中每个未消去的分支所对应的下界中存在某下界 $B(\cdots)$，它满足不等式 $B(\cdots)<z^*$，则通往(5)；如每个未消去的分支所对应的下界都 $\geqslant z^*$，则 z^* 即为最短的总加工时间，z^* 对应的排列为最优排列，计算过程中止．

(5) 在未消去的分支中取下界最小的分支 $\{(S_1\cdots S_1')\}$ 所对应的 S_1 和 S_1' 作为新的 S 和 S'，通往(2)．

参 考 文 献

[1] Coffman, Jr. E. G., *Computer and Job-Shop Scheduling Theory*, John Wiley & Sons, 1976.
[2] 越民义、韩继业，中国科学，1975，5：462—470.
[3] Szwarc, W., *Naval Res. Log. Quart.*, 18 (1971), 295—305.
[4] Szwarc, W., *Opns. Res.*, 21 (1973), 1250—1259.

A NEW METHOD FOR THE $m\times n$ FLOW-SHOP SEQUENCING PROBLEM

Yue Min-yi (越民义) and Han Ji-ye (韩继业)

ABSTRACT

In this paper a new algorithm is presented for solving the $m\times n$ flow-shop sequencing problem. First, we set down a few rules of elimination, and prove that one of them is more general than Szwarc's rules of elimination. Secondly, a new estimation formula of the branch and bound type is proposed. Our new algorithm is based on these results.