Flow Shop 排序问题 $Fm|prmu|\sum w_jC_j$ 的分枝定界法 *

赵传立　唐恒永

(沈阳师范学院数学计算机系，沈阳， 110031)

摘　要：本文讨论 Flow Shop 排序问题 $Fm|prmu|\sum w_jC_j$，给出了求解该问题的一个分枝定界法.

关键词：排序， Flow Shop，加权完工时间和，分枝定界法.

1. 引　　言

Flow Shop 排序问题具有广泛的实际应用. 对于目标函数是最大完工时间的情况，当 $m=2$ 时， Jhonson 给出了一个最优算法 [2]. 对于 $m \geq 3$ 的情况，问题是 $NP-$ 难的 [3]. 处理这类问题的常用方法是启发式算法和分枝定界法. [4][5][6] 给出了求解这一问题的启发式算法， [7][8][9][10] 则对求解这一问题的分枝定界法进行了讨论. 对于目标函数是完工时间和的情况， [11][12][13][14][16] 中给出了启发式算法， [1][15] 对这一问题的分枝定界法进行了讨论. 本文将对目标函数是加权完工时间和的情况进行讨论，给出了一个分枝定界法. 推广了 [1] 中的结论.

问题的一般描述为：

设有 n 个工件 $J_1,J_2,\ldots,J_n$， m 台机器 $M_1,M_2,\ldots,M_m$. n 个工件均依同一顺序 $M_1,M_2,\ldots,M_m$ 在 m 台机器上加工. 工件 J_j 在机器 M_i 上的加工时间为 $p_{i,j}(i=1,2,\ldots,m;j=1,2,\ldots,n)$. 工件 J_j 的权因子为 w_j. 目标函数为极小化加权完工时间和. 用三参数表示法，问题可记为

$$Fm|prmu|\sum w_jC_j \tag{1}$$

2. 基本结论

先介绍单机排序问题 $1||\sum w_jC_j$ 的一个最优算法.

对于仅有一台机器，工件 J_j 的加工时间为 $p_j(j=1,2,\ldots,n)$. 工件 J_j 的权因子为 w_j. 目标函数为极小化加权完工时间和的排序问题， $WSPT$ 算法 (weighted shortest processing time) 为最优算法 [3]. 即

引理 1　把工件按 $\frac{p_j}{w_j}$ 不减排列，即得问题 $1||\sum w_jC_j$ 的最优排序.

对于具有 m 台机器的问题 (1). 我们有下面结论.

本文 1999 年 5 月 24 日收到.

*辽宁省教委科研基金资助项目.

定理 1 若工件的加工时间满足下面 $m-1$ 个不等式

$$\min_j\{p_{i,j}\} \geq \max_j\{p_{i+1,j}\}. \quad (i=1,2,\ldots,m-1) \tag{2}$$

则把工件按 $\frac{p_{1,j}}{w_j}$ 不减依次排列在机器 $M_1,M_2,\ldots,M_m$ 上即得最优排序.

证明 由 (2) 式可知，对于 n 个工件的任何一个排列，机器可能有空闲时间，而工件无等待时间.

设工件排列顺序为 $J_1,J_2,\ldots,J_n$，工件 J_j 在机器 M_1 上的完工时间为 $C_1(J_j)$，工件 J_j 在机器 M_m 上的完工时间为 $C_j(j=1,2,\ldots,n)$(即 $C_m(J_j)=C_j$). 则

$$\begin{aligned}
C_1 &= \sum_{i=1}^{m} p_{i,1} = \sum_{i=2}^{m} p_{i,1} + p_{1,1}\\
C_2 &= \sum_{i=1}^{m} p_{i,2} + p_{1,1} = \sum_{i=2}^{m} p_{i,2} + \sum_{s=1}^{2} p_{1,s}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
C_k &= \sum_{i=1}^{m} p_{i,k} + \sum_{s=1}^{k-1} p_{1,s} = \sum_{i=2}^{m} p_{i,k} + \sum_{s=1}^{k} p_{1,s}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
C_n &= \sum_{i=1}^{m} p_{i,n} + \sum_{s=1}^{n-1} p_{1,s} = \sum_{i=2}^{m} p_{i,n} + \sum_{s=1}^{n} p_{1,s}
\end{aligned}$$

$$\sum_{j=1}^{n} w_jC_j = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=2}^{m} w_jp_{i,j} + \sum_{j=1}^{n} w_jC_1(J_j) \tag{3}$$

(3) 式右端第 1 项为常数，而第 2 项恰好是 n 个工件在机器 M_1 上加工的单机排序问题 $1||\sum w_jC_j$ 的目标函数，由引理 1 可知，工件按 $WSPT$ 规则排列可得最优排序.

定理 2 若工件的加工时间满足：存在某常数 $h\in\{1,2,\ldots,m-1\}$，使下面 $m-1$ 个不等式成立

$$\min_j\{p_{i,j}\} \geq \max_j\{p_{i+1,j}\}. \quad (i=1,2,\ldots,h) \tag{4}$$

$$\min_j\left\{\sum_{i=1}^{h+1} p_{i+1,j}\right\} \geq \max_j\left\{\sum_{i=1}^{h+1} p_{i,j}\right\} \tag{5}$$

$$\min_j\{p_{i,j}\} \geq \max_j\{p_{i+1,j}\}. \quad (i=h+2,\ldots,m-1) \tag{6}$$

则按下面方法排列工件可得最优排序.

1. 先把工件按 $\frac{p_{h+2,j}}{w_j}$ 不减依次排列，

2. 在由 1. 得到的排列中，依次把位于第 k 个位置的工件排在首位，其余工件位置不变，$(k=2,3,\ldots,n)$

3. 经过 1.2. 两步得到 n 个排列，其中目标函数值最小者即为最优排序.

证明 对于 n 个工件的任何一个排列，由 (4) 式可知，机器 $M_1, M_2, \ldots, M_{h+1}$ 可能有空闲时间，而工件无等待时间. 由 (5) 式可知，机器 M_{h+2} 无空闲时间，而工件可能有等待时间. 由 (6) 式可知，机器 $M_{h+3}, \ldots, M_m$ 可能有空闲时间，而工件无等待时间. 排在首位的工件任何时候都没有等待时间.

设工件排列顺序为 $J_1, J_2, \ldots, J_n$, 工件 J_j 在机器 M_{h+2} 上的完工时间为 $C_{h+2}(J_j)$, 工件 J_j 在机器 M_m 上的完工时间为 $C_j (j = 1, 2, \ldots, n)$(即 $C_m(J_j) = C_j$). 则

$$
\begin{aligned}
C_1 &= \sum_{i=1}^{m} p_{i,1} \\
C_2 &= C_{h+2}(J_1) + p_{h+2,2} + \sum_{i=h+3}^{m} p_{i,2} \\
C_3 &= C_{h+2}(J_1) + \sum_{j=2}^{3} p_{h+2,j} + \sum_{i=h+3}^{m} p_{i,3} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
C_k &= C_{h+2}(J_1) + \sum_{j=2}^{k} p_{h+2,j} + \sum_{i=h+3}^{m} p_{i,k} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
C_n &= C_{h+2}(J_1) + \sum_{j=2}^{n} p_{h+2,j} + \sum_{i=h+3}^{m} p_{i,n} \\
\sum_{j=1}^{n} w_j C_j &= w_1 C_1 + C_{h+2}(J_1) \sum_{i=2}^{n} w_j + \sum_{s=2}^{n} \sum_{j=2}^{s} w_s p_{h+2,j} \\
&\quad + \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=h+3}^{m} w_k p_{i,k}
\end{aligned}
\tag{7}
$$

对于确定的 J_1,(7) 式右端第 1,2,4 项均为常数，而第 3 项由引理 1 可知，工件按 $\frac{p_{h+2,j}}{w_j}$ 不减排列可使其值最小. 因此，可将工件先按 $\frac{p_{h+2,j}}{w_j}$ 不减排列，再依次把各个位置的工件排在首位，比较 n 个排列的目标函数值，即可得到最优排序.

3. 分枝定界法

我们下边给出的分枝定界法的要点如下：对于 n 个工件的排列排序问题，一个完全的搜索树共有 n 层节点. 第 0 层为根节点. 从根节点分枝，产生第 1 层 n 个节点. 从第 1 层的一个节点分枝，可产生第 2 层 $n-1$ 个节点. 一般地，从第 $r-1$ 层的一个节点分枝，可产生第 r 层 $n-r+1$ 个节点. 第 r 层的每个节点都对应一个前 r 个位置的工件已确定的部分排序. 利用下式 (11) 确定节点的下界. 由第 $n-1$ 层节点可以确定一个可行排序，其目标函数值作为最优排序目标函数值的一个上界. 杀死下界不小于当前的目标函数值的上界的节点. 对下界小于最优排序目标函数值上界的节点进行分枝不断改进最优排序目标函数值的上界最后可以得到最优排序. 这一过程如图 1 树形结构图所示 (见下页).

下面先给出确定下界的方法.

为叙述方便，设已按顺序 $J_1, J_2, \ldots, J_r$ 排好 r 个工件，还有 $n-r$ 个工件 $J_{r+1}, J_{r+2}, \ldots, J_n$ 未排. 工件 J_j 在机器 M_i 上的开始时间为 $S_i(J_j)$, 工件 J_j 在机器 M_i 上的完工时间为 $C_i(J_j)$, 工件 J_j 在机器 M_m 上的完工时间为 $C_j (j = 1, 2, \ldots, n)$(即

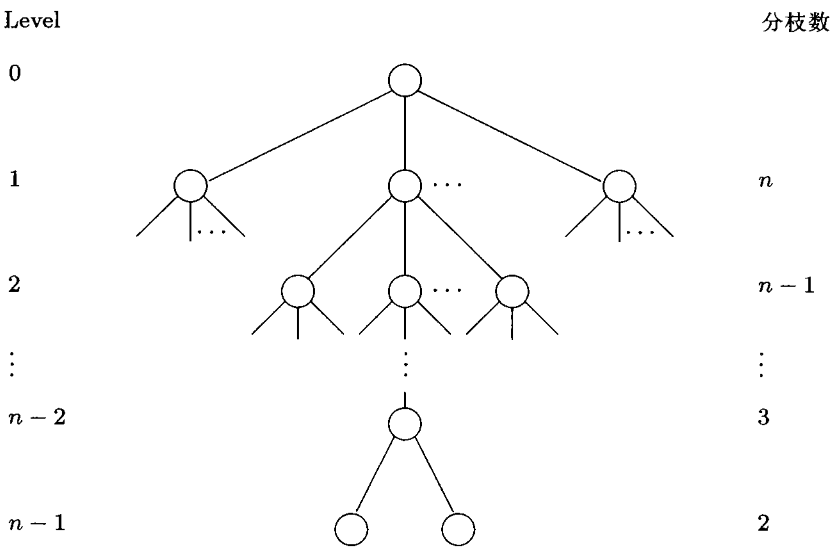

图 1. 分枝定界搜索树

$C_m(J_j)=C_j$). 记 $\mathcal{J}_\nabla=\{J_1,J_2,\ldots,J_r\}$,$\overline{\mathcal{J}}_r=\{J_{r+1},J_{r+2},\ldots,J_n\}$.

为讨论方便不妨先假设 $\overline{\mathcal{J}}_r$ 中工件按顺序 $J_{r+1},J_{r+2},\ldots,J_n$ 依次排列在机器 $M_1,M_2,\ldots,M_m$ 上加工. 且机器无空闲时间，工件无等待时间.

先考虑机器 M_1. 工件 $J_{r+1},J_{r+2},\ldots,J_n$ 的完工时间满足下面关系.

$$
\begin{aligned}
C_{r+1} &= C_1(J_r)+p_{1,r+1}+\sum_{l=2}^{m}p_{l,r+1}\\
C_{r+2} &= C_1(J_r)+p_{1,r+1}+p_{1,r+2}+\sum_{l=2}^{m}p_{l,r+2}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
C_{r+k} &= C_1(J_r)+\sum_{s=r+1}^{r+k}p_{1,s}+\sum_{l=2}^{m}p_{l,r+k}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
C_n &= C_1(J_r)+\sum_{s=r+1}^{n}p_{1,s}+\sum_{l=2}^{m}p_{l,n}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n}w_jC_j &= \sum_{j=1}^{r}w_jC_j+\sum_{j=r+1}^{n}w_jC_j\\
&= \sum_{j=1}^{r}w_jC_j+C_1(J_r)\sum_{j=r+1}^{n}w_j\\
&\quad+\sum_{j=r+1}^{n}\sum_{s=r+1}^{j}w_jp_{1,s}+\sum_{j=r+1}^{n}\sum_{l=2}^{m}w_jp_{l,j} \qquad (8)
\end{aligned}
$$

(8) 式右端第 1,2,4 项与 $J_{r+1},J_{r+2},\ldots,J_n$ 的加工顺序无关，为使第 3 项值最小，由引理 1 可知，工件 $J_{r+1},J_{r+2},\ldots,J_n$ 应按 $\frac{p_{1,j}}{w_j}$ 不减排列. 记为 $J^{(1)}_{r+1},J^{(1)}_{r+2},\ldots,J^{(1)}_n$. 由

此得到 $\sum_{j=1}^{n} w_j C_j$ 的一个下界:

$$\sum_{j=1}^{r} w_j C_j + C_1(J_r)\sum_{j=r+1}^{n} w_j + \sum_{j=r+1}^{n}\sum_{s=r+1}^{j} w_j^{(1)} p_{1,s}^{(1)} + \sum_{j=r+1}^{n}\sum_{l=2}^{m} w_j p_{l,j} \tag{9}$$

再考虑机器 M_2. 注意到在顺序 $J_{r+1}, J_{r+2}, \ldots, J_n$ 下，工件 J_{r+1} 在机器 M_2 上的开始加工时间应满足

$$\begin{aligned} S_2(J_{r+1}) &= \max\{C_2(J_r), C_1(J_r) + p_{1,r+1}\} \\ &\geq \max\{C_2(J_r), C_1(J_r) + \min_{r+1\leq j\leq n} p_{1,j}\} \end{aligned}$$

记

$$S_2(\overline{\mathcal{J}}_r) = \max\left\{C_2(J_r), C_1(J_r) + \min_{r+1\leq j\leq n} p_{1,j}\right\}$$

假设 $\overline{\mathcal{J}}_r$ 中工件按顺序 $J_{r+1}, J_{r+2}, \ldots, J_n$ 依次排列在机器 $M_2, \ldots, M_m$ 上加工. 且机器无空闲时间, 工件无等待时间. 类似对机器 M_1 的讨论, 工件 $J_{r+1}, J_{r+2}, \ldots, J_n$ 应按 $\frac{p_{2,j}}{w_j}$ 不减排列. 记为 $J_{r+1}^{(2)}, J_{r+2}^{(2)}, \ldots, J_n^{(2)}$. 由此又得到 $\sum_{j=1}^{n} w_j C_j$ 的另一个下界:

$$\sum_{j=1}^{r} w_j C_j + S_2(\overline{\mathcal{J}}_r)\sum_{j=r+1}^{n} w_j + \sum_{j=r+1}^{n}\sum_{s=r+1}^{j} w_j^{(2)} p_{2,s}^{(2)} + \sum_{j=r+1}^{n}\sum_{l=3}^{m} w_j p_{l,j} \tag{10}$$

对机器 $M_3, M_4, \ldots, M_m$ 进行类似讨论，可以得到 $\sum_{j=1}^{n} w_j C_j$ 的下界如下:

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{r} w_j C_j + \max\Bigg\{\max_{1\leq k\leq m-1}\Bigg\{S_k(\overline{\mathcal{J}}_r)\sum_{j=r+1}^{n} w_j + \sum_{j=r+1}^{n}\sum_{s=r+1}^{j} w_j^{(k)} p_{k,s}^{(k)} + \\ &\sum_{j=r+1}^{n}\sum_{l=k+1}^{m} w_j p_{l,j}\Bigg\}, S_m(\overline{\mathcal{J}}_r)\sum_{j=r+1}^{n} w_j + \sum_{j=r+1}^{n}\sum_{s=r+1}^{j} w_j^{(m)} p_{m,s}^{(m)}\Bigg\} \end{aligned} \tag{11}$$

其中 $S_k(\overline{\mathcal{J}}_r) = \max\left\{C_k(J_r), S_{k-1}(\overline{\mathcal{J}}_r) + \min_{r+1\leq j\leq n} p_{k-1,j}\right\}$, $(k = 2, 3, \ldots, m)$; $S_1(\overline{\mathcal{J}}_r) = C_1(\mathcal{J}_\nabla)$.

算法 1(分枝定界法)

1. 取初始最优排序的目标函数值的上界为 $\overline{f} = \infty$. 从根节点分枝，产生第 1 层 n 个节点，用式 (11) 计算各节点下界. 选择具有最小下界的节点进行分枝 (若有多个，选择下标最小者), 产生第 2 层 $n-1$ 个节点.

2. 一般地，从已选定的第 $r-1$ $(r = 2, 3, \ldots, n-1)$ 层的节点分枝，产生第 r 层 $n-r+1$ 个节点，若各节点下界均不小于 $\overline{f}$, 则转 6, 否则，选择具有最小下界的节点进行分枝 (若有多个，选择下标最小者).

3. 若 $r = n-2$, 转 4. 否则，转 2.

4. 从选定的第 $n-2$ 层节点可产生第 $n-1$ 两个节点，每个节点对应一个可行排序. 其下界即为可行排序的目标函数值. 若其目标函数值界均不小于 $\overline{f}$, 则转 5,

否则比较两个可行排序的目标函数值，其中较小者为最优排序目标函数值新的上界 $\overline{f}$.

5. 依次对当前搜索树中第 r $(r=1,2,\ldots,n-1)$ 层节点进行考察，杀死下界不小于当前的目标函数值的上界的节点．若全部节点的下界其均不小于 $\overline{f}$, 则转 6. 否则，选择具有最小下界的节点进行分枝，转 2.

6. 给出 $\overline{f}$ 的节点确定一个最优排序，$\overline{f}$ 为最优排序目标函数值．算法终止.

实际计算表明，我们给出的节点的下界是好的，能以很快速度杀死节点，因此能很快地求出最优排序．仅以下例说明:

例 1　$n=4, m=2, \mathbf{w}=(2,1,3,1)$,

图 2 是求解例 1 的分枝定界搜索树，其中节点旁边括号内的数字为下界，最优排序为 $J_3J_4J_1J_2$, 最优值是 109.

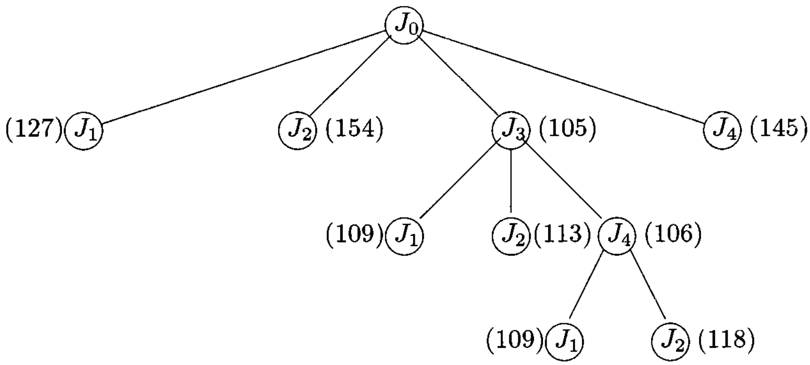

图 2. 例 1 的分枝定界搜索树

参　考　文　献

[1] R.Bellman, A.O.Esogbue and I. Nabeshima, Mathematical Aspects of Scheduling and Applications, Pergamon Press, New York, 1982.

[2] S.M.Johnson, Optimal two-and-three-stage production schedules.Naval Res.Logist.Quart., 1954, 1:61-68.

[3] Michael Pinedo, Scheduling-theory, algorithms and sysyems, Pretice hall, Englewood cliffs, New jersey,1995.

[4] H.G.Campbell, R.A.Dudek and M.L.Smith, A Heuristic algorithm for the n Job m Machine Sequencing Problem, Management Sci., 1970, 16:630-637.

[5] M.Nawaz, E.E.Enscore and I.Ham, A Heuristic algorithm for the m-machine, n-job Sequencing Problem, OMEGA., 1983,11:91-95.

[6] M.Widmer and A.Hertz, A New Heuristic Method for the Flowshop Sequencing Problem, Eur.J.Oper.Res., 1989, 41:186-193.

[7] G.B.McMahon and P.G.Burton, Flow-shop Scheduling with the Branch-and-Bound.Oper.Res., 1967,15:473-481.

[8] S.Ashour, A Branch and Bound algorithm for the Flow-shop Scheduling problem.A.I.I.E.Trans., 1970, 2:172-176.

[9] K.R.Baker, Acomparative study of Flow-shop algorithm Oper.Res., 1975, 23:62-73.

[10] B.J.Lageweg, J.K.Lenstra., Rinnooy Kan.A.H.G, A general bounding scheme for the permutation Flow-shop problem, Oper.Res., 1978, 26:53-67.

[11] J.N.D.Gupta, Heuristic algorithm for multi-stage Flow shop Scheduling problem.A.I.I.E.Trans., 1972,4:11-18.

[12] S.Miyazaki, N.Nishiyama and F.Hashimoto, An adjacent pairwise approach to the mean flow-time Scheduling problem. J.Oper.Res. Society Japan, 1978,21:287-299.

[13] J.C.Ho and Y.-L.Chang, A New Heuristic algorithm for the n-job m-machine FlowShop Problem, Eur.J.Oper. Res., 1991, 52:194-202.

[14] Chandrasekharan Rajendran, Heuristic algorithm for Scheduling in a Flow Shop to minimize total flowtime Int.J.Prod.Eco, 1993,29:65-73.

[15] S.P.Bansal, Minimizing the sum of completion times of n-jobs over m-machines in a Flow-Shop.A.I.I.E.Trans., 1977, 9:306-311.

[16] W.Szwarc, The flow-shop problem with mean completion time criterion.A.I.I.E.Trans., 1983.15: 172-176.

A Branch and Bound Algorithm for the Flow Shop Scheduling Problem $Fm|prmu|\sum w_jC_j$

CHUANLI ZHAO   HENGYONG TANG

(Department of Mathematics and Computer, Shenyang Normal University, Shenyang 110031)

Abstract

In this paper we discuss the Flow Shop scheduling problem $Fm|prmu|\sum w_jC_j$. A Branch and bound algorithm is given.

key words Scheduling, Flow Shop,Weighted sum of completion times,Branch and bound algorithm.