科学技术成就

n 个零件在 m 台机床上的加工顺序问题(I)

越 民 义　　韩 继 业

(中国科学院数学研究所)

摘　　要

在工厂的零件加工车间,设有 n 个零件要在 m 台机床上加工,各零件根据工艺上的要求,按一定顺序通过这些机床,如何安排这些零件顺序使预先给定的指标达到最优,这就是运筹学中所谓的排序问题.

本文所考虑的排序问题:假设 1) 各零件皆依同一顺序通过这些机床; 2) 每个零件的加工时间为已知; 3) 每个机床在同一时间.只能加工一个零件.目的是要寻求一个顺序,使总的加工时间为最短.我们所得到的主要结果如下:

1. 设 ω 为 $(1\cdots n)$ 的某一排列, ω' 为从 ω 经交换相邻两数字 i 和 j 的位置后的排列, $T(\omega)$ 和 $T(\omega')$ 分别表示在 ω 和 ω' 之下总加工时间,则当

$$\min\{a_{ui}, a_{vj}\} \leqslant \min\{a_{uj}, a_{vi}\}, \quad 1 \leqslant u < v \leqslant m$$

时,有 $T(\omega) \leqslant T(\omega')$.

2. 我们所给出的条件比 Nabeshima 所给出的条件要弱.

3. 从推广 Johnson 法则这一角度看,本文定理4的结果已是最好的结果.

本文所讨论的问题属于排序问题.这一问题,根据数学处理方法的不同,实际上包含很多问题.本文所讨论的是 n 个零件在 m 台机床上的加工问题.每个零件都是先在第一台机床上加工,然后再送到第二台机床上加工,……,最后送到第 m 台机床上加工,且零件在各机床上的加工顺序一致(同顺序).每台机床在同一时间只能加工一种零件.每个零件在每台机床上加工的时间为已知,且不受偶然事件(例如机床发生故障等)的干扰.只要机床有空,就可对零件进行加工,即不存在存放地点等问题.在这些条件下,我们要求事先将这 n 个零件安排一个顺序,使得从最先一个零件在第一台机床上开始加工起,到最后一个零件在第 m 台机床上加工完毕止,这段时间为最短(即寻求一最优方案).

Johnson[1] 最先研究了这一问题.他曾对两台机床 ($m = 2$) 的情况给出了一个简便的算法(本文定理 1).其后,这一问题就引起了不少人的注意.但他们所用的方法主要是分支定界法 (Branch and Bound). 这种方法从某种意义上来说,乃是一种穷举法.它与普通的一一列举方法不同之处在于:在列举过程中,可以根据已进行的计算结果排除一些明显的不必要

本文 1974 年 5 月 11 日收到.

的计算．当 m 和 n 相当大时，即使利用高速计算机，这类方法也是不可行的．于是就希望能找到一些条件，若这些条件得到满足，则某些方案一定比另外某方案好，因而事先就可排除一些不需要考虑的情况．最近，Nabeshima[2] 得到了一个判定相邻两个零件先后的条件，但他给出的条件是相当复杂的．

一、可行线与可行和

设有 m 台机床 $M_1, M_2, \cdots, M_m$，和 n 个零件 $J_1, J_2, \cdots, J_n$．记零件 J_i 在机床 M_k 上的加工时间为 a_{ki}．当零件的加工顺序 $\omega=(\omega_1, \cdots, \omega_n)$ 给定时，其中 $(\omega_1, \cdots, \omega_n)$ 表示 $(1, 2, \cdots, n)$ 的一种排列，我们可将 a_{ki} 排成矩阵

$$A(\omega)=\begin{bmatrix} a_{1\omega_1} & a_{1\omega_2} & \cdots & a_{1\omega_n} \\ a_{2\omega_1} & a_{2\omega_2} & \cdots & a_{2\omega_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m\omega_1} & a_{m\omega_2} & \cdots & a_{m\omega_n} \end{bmatrix}. \tag{1}$$

下面我们给出关于 $A(\omega)$ 的可行线与可行和的概念．

定义 1. 将矩阵 $A(\omega)$ 中 $a_{1\omega_1}$ 与 $a_{m\omega_n}$ 用一条折线连接起来，此折线只能向右水平延伸或向下垂直延伸，其顶点只能是 a_{ki}．这种折线我们称之为对应于 ω 的一可行线．全体可行线所成之集即

$$\{l(\omega)\}=\{\{(1, \omega_1),(1, \omega_2), \cdots, (1, \omega_{j_1}), (2, \omega_{j_1}), \cdots, (2, \omega_{j_2}), \cdots, (m, \omega_{j_{m-1}}), \cdots, (m, \omega_{j_m})\}, \quad 1 \leqslant j_1 \leqslant j_2 \leqslant \cdots \leqslant j_m = n\}.$$

定义 2. 设 $l(\omega)$ 为一可行线，则称 $\sum\limits_{(k,i)\in l(\omega)} a_{ki}$ 为对应于 $l(\omega)$ 的可行和．

可行线与可行和的概念之所以有用，在于它与机床加工零件的起止时间有如下关系．

引理. 设 $\omega=(\omega_1, \cdots, \omega_n)$ 为一加工顺序，如每个零件都须依次通过 $M_1, \cdots, M_m$，且诸零件在各机床上的加工顺序一致，则从 M_1 开始加工零件 J_{ω_1} 起到 M_m 加工完零件 J_{ω_n} 为止，这段时间之长 $T(\omega)$，等于矩阵 $A(\omega)$ 的所有可行和中的最大数：

$$T(\omega)=\max_{l(\omega)} \sum_{(k,i)\in l(\omega)} a_{ki}. \tag{2}$$

证．先证 $m=2$ 的情况．因矩阵 $A(\omega)$ 只有两行，故显然有

$$\max_{l(\omega)} \sum_{(k,i)\in l(\omega)} a_{ki}=\max_{1\leqslant s\leqslant n}\left\{\sum_{j=1}^{s} a_{1\omega_j}+\sum_{j=s}^{n} a_{2\omega_j}\right\}. \tag{3}$$

当 $n=1$ 时，总加工时间是 $a_{11}+a_{21}$，故(3)式成立．假设(2)式对 n 成立，现要证(2)式对 $n+1$ 也成立．不难看出，零件 $J_{\omega_{n+1}}$ 在 M_2 上经历的过程只有两种：(1) $J_{\omega_{n+1}}$ 在 M_2 上不需等待，而立即被加工（图 1）．此时有

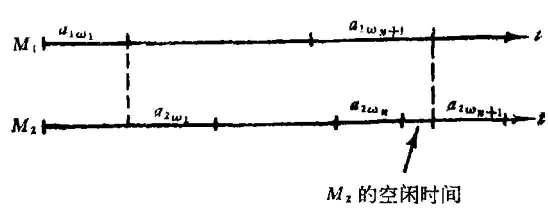

图 1

$$T(\omega_1, \cdots, \omega_{n+1}) = \sum_{j=1}^{n+1} a_{1\omega_j} + a_{2\omega_{n+1}},$$

$$T(\omega_1, \cdots, \omega_{n+1}) \geqslant T(\omega_1, \cdots, \omega_n) + a_{2\omega_{n+1}}.$$

故

$$T(\omega_1, \cdots, \omega_{n+1}) = \max\left\{T(\omega_1, \cdots, \omega_n) + a_{2\omega_{n+1}}, \sum_{j=1}^{n+1} a_{1\omega_j} + a_{2\omega_{n+1}}\right\}. \tag{4}$$

(2) $J_{\omega_{n+1}}$ 在 M_2 上需等待 (图 2). 此时有

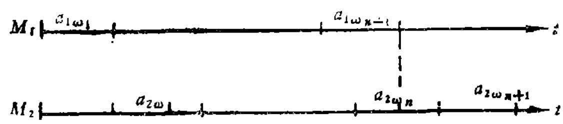

图 2

$$T(\omega_1, \cdots, \omega_{n+1}) = T(\omega_1, \cdots, \omega_n) + a_{2\omega_{n+1}},$$

$$T(\omega_1, \cdots, \omega_{n+1}) \geqslant \sum_{j=1}^{n+1} a_{1\omega_j} + a_{2\omega_{n+1}},$$

故亦有(4)式. 根据归纳法的假设,即得

$$T(\omega_1, \cdots, \omega_{n+1}) = \max_{1 \leqslant s \leqslant n}\left\{\sum_{j=1}^{s} a_{1\omega_j} + \sum_{j=s}^{n+1} a_{2\omega_j}, \sum_{j=1}^{n+1} a_{1\omega_j} + a_{2\omega_{n+1}}\right\}.$$

故当 $m = 2$ 时,引理得证.

再对 m 做归纳法. 假设(2)式对 m 成立. 记 J_{ω_j} 在机床 M_m 上的加工完毕时刻为 T_j, 显然有 $T_1 < T_2 < \cdots < T_n$. 若我们把 $T_j - T_{j-1}$ 视为一零件在 M_m 上的加工时间,且它在 M_{m+1} 上的加工时间为 $a_{m+1\omega_j}$, 则 M_m 和 M_{m+1} 可视为两台机床的情况. 因而有

$$T(\omega_1, \cdots, \omega_n) = \max_{1 \leqslant s \leqslant n}\left\{T_s + \sum_{j=s}^{n} a_{m+1\omega_j}\right\}. \tag{5}$$

由归纳法的假设,有

$$T_s = \max_{l_s} \sum_{(k,i) \in l_s} a_{ki},$$

其中 l_s 是连接 $a_{1\omega_1}$ 和 $a_{m\omega_s}$ 的一可行线. 将上式代入(5)式,即得

$$T(\omega_1, \cdots, \omega_n) = \max_{1 \leqslant s \leqslant n}\left\{\max_{l_s} \sum_{(k,i) \in l_s} a_{ki} + \sum_{j=s}^{n} a_{m+1\omega_j}\right\}. \tag{6}$$

因连接 $a_{1\omega_1}$ 和 $a_{m+1\omega_n}$ 的任一可行线都可表成 $\{l_s, (m+1, \omega_s), \cdots, (m+1, \omega_n)\}$ 的形式,故(6)式即为 $m+1$ 台机床时的(2)式. 引理证完.

二、$m=2$ 时的最优工序安排

根据上节的引理,我们可把工序安排问题表示为: 寻求 $\omega^* = (\omega_1^*, \cdots, \omega_n^*)$, 使得

$$T(\omega^*) = \min_{\omega} \max_{l(\omega)} \sum_{(k,i) \in l(\omega)} a_{ki}. \tag{7}$$

由于全部工序的个数是 $n!$ 个,故最优工序一定存在. 对于 $m = 2$ 的情况, Johnson 给出了最优工序的求法. 这里我们利用引理,可简单地证明 Johnson 的结果.

定理 1. 若 $m = 2$,最优工序 ω^* 可用以下方法求得: 在 $a_{ki}(k = 1, 2; i = 1, \cdots, n)$ 中找出最小者(若最小者不止一个,可任择其一), 若此数为 a_{1j_1}, 即在矩阵的上一行, 则将 J_{j_1} 排

在第一；若此数为 $a_{2j'_1}$，则将 $J_{j'_1}$ 排在最后．然后将 a_{1j_1} 和 a_{2j_1}（或 $a_{1j'_1}$ 和 $a_{2j'_1}$）划掉．再在矩阵中下余的 a_{ki} 中寻找最小者，照上述法则进行安排．如此继续下去，直到所有零件都安排完毕．所得顺序即为最优工序．

证．设 $\omega=(\omega_1,\cdots,\omega_{i-1},\omega_i,\omega_{i+1},\cdots,\omega_n)$ 为一工序，令 $\omega'=(\omega_1,\cdots,\omega_{i-1},\omega_{i+1},\omega_i,\omega_{i+2},\cdots,\omega_n)$．我们先证一命题：若

$$\min\{a_{1\omega_i},a_{2\omega_{i+1}}\}\leqslant\min\{a_{1\omega_{i+1}},a_{2\omega_i}\},\tag{8}$$

则有 $T(\omega)\leqslant T(\omega')$．

令 $d(a_{1\omega_1},a_{2\omega_{i-1}})$ 和 $d(a_{1\omega_{i+2}},a_{2\omega_n})$ 分别为矩阵

$$\begin{bmatrix}a_{1\omega_1}\cdots a_{1\omega_{i-1}}a_{1\omega_i}a_{1\omega_{i+1}}a_{1\omega_{i+2}}\cdots a_{1\omega_n}\\ a_{2\omega_1}\cdots a_{2\omega_{i-1}}a_{2\omega_i}a_{2\omega_{i+1}}a_{2\omega_{i+2}}\cdots a_{2\omega_n}\end{bmatrix}$$

中所有连接 $a_{1\omega}$ 和 $a_{2\omega_{i-1}}$ 及所有连接 $a_{1\omega_{i+2}}$ 和 $a_{2\omega_n}$ 的可行线所对应的可行和中之最大者．根据引理，有

$$\begin{aligned}T(\omega)=\max\Big\{&\sum_{j=1}^{i+1}a_{1\omega_j}+d(a_{1\omega_{i+2}},a_{2\omega_n}),\ \sum_{j=1}^{i+1}a_{1\omega_j}+\sum_{j=i+1}^{n}a_{2\omega_j},\\ &\sum_{j=1}^{i}a_{1\omega_j}+\sum_{j=i}^{n}a_{2\omega_j},\ d(a_{1\omega_1},a_{2\omega_{i-1}})+\sum_{j=i}^{n}a_{2\omega_j}\Big\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}T(\omega')=\max\Big\{&\sum_{j=1}^{i+1}a_{1\omega_j}+d(a_{1\omega_{i+2}},a_{2\omega_n}),\ \sum_{j=1}^{i+1}a_{1\omega_j}+a_{2\omega_i}+\sum_{j=i+2}^{n}a_{2\omega_j},\\ &\sum_{j=1}^{i-1}a_{1\omega_j}+a_{1\omega_{i+1}}+\sum_{j=i}^{n}a_{2\omega_j},\ d(a_{1\omega_1},a_{2\omega_{i-1}})+\sum_{j=i}^{n}a_{2\omega_j}\Big\}.\end{aligned}$$

由不等式

$$a_{1\omega_i}+a_{2\omega_{i+1}}+\max\{a_{1\omega_{i+1}},a_{2\omega_i}\}\leqslant a_{1\omega_{i+1}}+a_{2\omega_i}+\max\{a_{1\omega_i},a_{2\omega_{i+1}}\},\tag{9}$$

可推出 $T(\omega)\leqslant T(\omega')$．因(9)与(8)式等价，故命题得证．定理 1 可从(8)式直接得出．

三、$m\geqslant 3$ 时确定相邻两零件的次序的条件

在 $m\geqslant 3$ 时，最优工序的寻求问题要难得多；至今未被解决．关于确定相邻两零件的次序这个问题，在有关资料中已有研究．我们将给出一组比较简便地确定相邻两零件加工顺序的条件，并证明它比 Nabeshima[2] 所给出的条件要弱．

设 $\omega=(i',\cdots,i'',i,j,j',\cdots,j'')$ 是一工序，$\omega'=(i',\cdots,i'',j,i,j',\cdots,j'')$，即从 ω 经交换 i 和 j 的位置之后所得的排列；与 ω 和 ω' 对应的加工时间矩阵分别为 $A(\omega)$ 和 $A(\omega')$．令 $d(a_{ui},a_{vj})$ 和 $d(a_{uj},a_{vi})$，$1\leqslant u<v\leqslant m$，分别表示 $A(\omega)$ 中由 a_{ui} 到 a_{vj} 的最大可行和与 $A(\omega')$ 中由 a_{uj} 到 a_{vi} 的最大可行和．在叙述主要结果之前，我们先证明

定理 2. 设 J_i 和 J_j 是 ω 中相邻的两零件，如不等式组

$$d(a_{ui},a_{vj})\leqslant d(a_{uj},a_{vi}),\quad 1\leqslant u<v\leqslant m\tag{10}$$

成立，则有 $T(\omega)\leqslant T(\omega')$．

证．不难验证以下两个等式：

$$\begin{aligned}T(\omega)=\max\{&d(a_{1i'},a_{ki''})+d(a_{kj'},a_{mj''})+a_{ki}+a_{kj},\quad 1\leqslant k\leqslant m;\\ &d(a_{1i'},a_{ui''})+d(a_{vj'},a_{mj''})+d(a_{ui},a_{vj}),\quad 1\leqslant u<v\leqslant m\},\end{aligned}\tag{11}$$

$$T(\omega') = \max\{d(a_{1i'}, a_{ki''}) + d(a_{kj'}, a_{mj''}) + a_{ki} + a_{kj},\quad 1 \leqslant k \leqslant m;$$
$$d(a_{1i'}, a_{ui''}) + d(a_{vj'}, a_{mj''}) + d(a_{uj}, a_{vi}),\quad 1 \leqslant u < v \leqslant m\}. \tag{12}$$

比较(11)和(12)两式的右边并利用(10)式,即得本定理.

定理 3. 设 J_i 和 J_j 是 ω 中相邻的两零件,如果

$$d_{ui} + a_{vj} + \max\{a_{uj}, a_{vi}\} \leqslant a_{uj} + a_{vi} + \max\{a_{ui}, a_{vj}\},\quad 1 \leqslant u < v \leqslant m \tag{13}$$

成立,则有 $T(\omega) \leqslant T(\omega')$.

证. 由定理 2, 我们如能证明命题: 从(13)式可推出(10)式. 然后由定理 2 即得本定理. 下面对 m 进行归纳法.

当 $m = 2$ 时, (13)式显然与(10)式一致,命题成立. 假设对于小于 m 的正整数,此命题皆成立. 现来证命题对 m 亦成立. 由归纳法的假设, 只需证明不等式 $d(a_{1i}, a_{mj}) \leqslant d(a_{1j}, a_{mi})$ 成立就够了.

若 $a_{mj} \leqslant a_{1i}$, 由

$$a_{1i} + a_{mj} + \max\{a_{1j}, a_{mi}\} \leqslant a_{1j} + a_{mi} + \max\{a_{1i}, a_{mj}\},$$

可得

$$a_{mj} \leqslant a_{mi}, \tag{14}$$
$$a_{mj} \leqslant a_{1j}. \tag{15}$$

由归纳法的假设,有 $d(a_{1i}, a_{m-1j}) \leqslant d(a_{1j}, a_{m-1i})$. 将此式与(14)式相加,可得

$$d(a_{1i}, a_{m-1j}) + a_{mj} \leqslant d(a_{1j}, a_{m-1i}) + a_{mi}. \tag{16}$$

因 $d(a_{1j}, a_{m-1i}) \geqslant a_{1j} + \sum_{k=1}^{m-1} a_{ki}$, 利用(15)式,有

$$a_{mj} + \sum_{k=1}^{m} a_{ki} \leqslant a_{1j} + \sum_{k=1}^{m} a_{ki} \leqslant d(a_{1j}, a_{m-1i}) + a_{mi}. \tag{17}$$

由(16)和(17)式,即得

$$\max\left\{d(a_{1i}, a_{m-1j}) + a_{mj}, a_{mj} + \sum_{k=1}^{m} a_{ki}\right\} \leqslant d(a_{1j}, a_{m-1i}) + a_{mi},$$

再利用等式

$$d(a_{1i}, a_{mj}) = \max\left\{d(a_{1i}, a_{m-1j}) + a_{mj}, \sum_{k=1}^{m} a_{ki} + a_{mj}\right\},$$

$$d(a_{1j}, a_{mi}) = \max\left\{d(a_{1j}, a_{m-1i}) + a_{mi}, \sum_{k=1}^{m} a_{kj} + a_{mi}\right\},$$

即得

$$d(a_{1i}, a_{mj}) \leqslant d(a_{1j}, a_{m-1i}) + a_{mi} \leqslant d(a_{1j}, a_{mi}).$$

故(10)式成立.

如 $a_{1i} < a_{mj}$, 用类似方法可证(10)式也成立. 命题即得证.

定理 3 可改写为:

定理 4. 设 J_i 和 J_j 是相邻的两零件,如有

$$\min\{a_{ui}, a_{vj}\} \leqslant \min\{a_{uj}, a_{vi}\},\quad 1 \leqslant u < v \leqslant m, \tag{18}$$

则有 $T(\omega) \leqslant T(\omega')$.

下面的定理说明我们的结果包含 Nabeshima 的结果.

定理 5. 若条件

$$\min\{a_{ki},\ a_{k+1j}\} \leqslant \min\{a_{kj},\ a_{k+1i}\}, \quad 1 \leqslant k < m, \tag{19}$$

$$\min\left\{\sum_{k=u}^{v} a_{ki},\ \sum_{k=u+1}^{v+1} a_{kj}\right\} \leqslant \min\left\{\sum_{k=u}^{v} a_{kj},\ \sum_{k=u+1}^{v+1} a_{ki}\right\},$$
$$1 \leqslant u < v < m \tag{20}$$

成立,则(18)式也成立.

证. 当 $m = 2$ 时,(19)与(18)式一致,故定理成立. 今设 $m \geqslant 3$, 并假设定理对于小于 m 的正整数皆成立,我们用归纳法证明它对 m 也成立.

在进行归纳法之前,先证明: 在(20)式和 $\min(a_{1i},\ a_{2j}) \leqslant \min(a_{1j},\ a_{2i})$ 之下,若有

$$\sum_{k=1}^{m-1} a_{ki} \leqslant \sum_{k=1}^{m-1} a_{kj}, \tag{21}$$

则必有

$$a_{1i} \leqslant a_{1j}. \tag{22}$$

事实上,若 $a_{1i} > a_{1j}$, 则由(21)式,

$$\sum_{k=2}^{m-1} a_{ki} < \sum_{k=2}^{m-1} a_{kj}. \tag{23}$$

在(20)式中取 $u = 1$ 和 $v = m - 2$, 得

$$\min\left\{\sum_{k=1}^{m-2} a_{ki},\ \sum_{k=2}^{m-1} a_{kj}\right\} \leqslant \min\left\{\sum_{k=1}^{m-2} a_{kj},\ \sum_{k=2}^{m-1} a_{ki}\right\}.$$

利用(23)式,有

$$\sum_{k=1}^{m-2} a_{ki} \leqslant \sum_{k=1}^{m-2} a_{kj}.$$

即 (22) 式关于 $m-1$ 的情形. 如此继续, 最后即得 $a_{1i} + a_{2i} \leqslant a_{1j} + a_{2j}$ 和 $a_{2i} < a_{2j}$. 再由 $\min(a_{1i},\ a_{2j}) \leqslant \min(a_{1j},\ a_{2i})$, 即得 $a_{1i} \leqslant a_{1j}$. 这与 $a_{1i} > a_{1j}$ 的假设相矛盾. 故(22)式成立.

其次,用类似方法可证明: 在(19)式之下,若有

$$\sum_{k=t}^{m} a_{kj} \leqslant \sum_{k=t}^{m} a_{ki}, \quad (\text{对某一 } t = 1, \cdots, m), \tag{24}$$

则必有

$$a_{mj} \leqslant a_{mi}. \tag{25}$$

现在我们证明定理 5. 由(20)式, 有

$$\min\left\{\sum_{k=1}^{m-1} a_{ki},\ \sum_{k=2}^{m} a_{kj}\right\} \leqslant \min\left\{\sum_{k=1}^{m-1} a_{kj},\ \sum_{k=2}^{m} a_{ki}\right\}. \tag{26}$$

若 $\sum\limits_{k=1}^{m-1} a_{ki} \leqslant \sum\limits_{k=2}^{m} a_{kj}$, 则由上式, 得(21)式和

$$a_{1i} \leqslant a_{mi}. \tag{27}$$

因(21)式成立,故有(22)式. 由(22)和(27)式,则有

$$\min\{a_{1i},\ a_{mj}\} \leqslant \min\{a_{1j},\ a_{mi}\}.$$

另一方面, 若 $\sum\limits_{k=1}^{m-1} a_{ki} > \sum\limits_{k=2}^{m} a_{kj}$, 则由(26)式, 有 $\sum\limits_{k=2}^{m} a_{kj} \leqslant \sum\limits_{k=2}^{m} a_{ki}$ 和

$$a_{mj} \leqslant a_{1j}. \tag{28}$$

故由(28)和(25)式,亦可得

$$\min\{a_{1i},\ a_{mj}\} \leqslant \min\{a_{1j},\ a_{mi}\}.$$

定理 5 证完.

定理 5 说明, Nabeshima 所给出的条件决不比定理 4 所给出的条件广泛. 事实上,我们的条件比 Nabeshima 的条件弱. 可以举出 $m = 3$ 的一个例子来说明这点:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} i & j \end{array} \\ \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 30 & 10 \\ 20 & 6 \end{bmatrix} \end{array}$$

它满足我们的条件,但不满足 Nabeshima 的条件. 下面我们将证明,从推广 Johnson 法则这个角度来看,定理 4 已经达到最后的阶段.

定理 6. (18)式:

$$\min\{a_{ui},\ a_{vj}\} \leqslant \min\{a_{uj},\ a_{vi}\}, \quad 1 \leqslant u < v \leqslant m,$$

等价于(10)式:

$$d(a_{ui},\ a_{vj}) \leqslant d(a_{uj},\ a_{vi}), \quad 1 \leqslant u < v \leqslant m.$$

证. 在定理 3 的证明中,我们已证由(18)式的等价条件(13)式可推出(10)式,这里只需证明从(10)式可推出(18)式.

若 $m = 2$, (10)式就是(18)式. 又令 $m \geqslant 3$, 并设定理对小于 m 的正整数皆成立,从而证明其对 m 也成立. 由归纳法的假设,我们只需证明 $\min\{a_{1i},\ a_{mj}\} \leqslant \min\{a_{1j},\ a_{mi}\}$ 即可.

根据(10)式,有 $d(a_{1i},\ a_{mj}) \leqslant d(a_{1j},\ a_{mi})$. 此式可改写为:

$$a_{1i} + a_{mj} + \max\left\{d(a_{2i}, a_{m-1j}), \sum_{k=1}^{m-1} a_{kj}, \sum_{k=2}^{m} a_{ki}\right\}$$

$$\leqslant a_{1j} + a_{mi} + \max\left\{d(a_{2j}, a_{m-1i}), \sum_{k=1}^{m-1} a_{ki}, \sum_{k=2}^{m} a_{kj}\right\}.$$

现分三种情况讨论:

(1) 设上式右边以 $a_{1j} + a_{mi} + \sum_{k=1}^{m-1} a_{ki}$ 为最大. 于是,有 $\sum_{k=2}^{m} a_{kj} \leqslant \sum_{k=2}^{m} a_{ki}$, 和

$$a_{mj} \leqslant a_{1j}. \tag{29}$$

注意,(10)式显然包含(19)式. 在定理 5 的证明中,已证若(19)和(24)式成立,则必有(25)式. 由(25)和(29)式,即得 $\min\{a_{1i},\ a_{mj}\} \leqslant \min\{a_{1j},\ a_{mi}\}$.

(2) 设右边以 $a_{1j} + a_{mi} + \sum_{k=2}^{m} a_{kj}$ 为最大. 于是有(21)式和

$$a_{1i} \leqslant a_{mi}. \tag{30}$$

现来证明 $a_{1i} \leqslant a_{1j}$. 假设 $a_{1i} > a_{1j}$. 由归纳法的假设,对任意 $1 < k < m$, 有

$$\min\{a_{1i},\ a_{kj}\} \leqslant \min\{a_{1j},\ a_{ki}\}.$$

故必有 $a_{kj} < a_{1i}$, 因而有 $a_{kj} \leqslant a_{ki}$. 由此即得

$$\sum_{k=2}^{m-1} a_{kj} \leqslant \sum_{k=2}^{m-1} a_{ki}.$$

由(21)式,即得 $a_{1i} \leqslant a_{1j}$. 这与 $a_{1i} > a_{1j}$ 的假设相矛盾,因此 $a_{1i} \leqslant a_{1j}$. 再利用 (30) 式, 即得

$$\min\{a_{1i}, a_{mj}\} \leqslant \min\{a_{1j}, a_{mi}\}.$$

(3) 设右边以 $a_{1j} + a_{mi} + d(a_{2j}, a_{m-1i})$ 为最大. 令

$$d(a_{2j}, a_{m-1i}) = \sum_{k=2}^{l} a_{kj} + \sum_{k=l}^{m-1} a_{ki}, \quad 1 < l < m,$$

则必有

$$d(a_{1j}, a_{li}) = \sum_{k=1}^{l} a_{kj} + a_{li}.$$

根据(10)式,有 $d(a_{1i}, a_{lj}) \leqslant d(a_{1j}, a_{li})$, 故这种情形即为与 (2) 相应的情形,由此即得 $a_{1i} \leqslant \min\{a_{1j}, a_{li}\}$. 同理必有

$$d(a_{lj}, a_{mi}) = a_{lj} + \sum_{k=l}^{m} a_{ki}.$$

由 $d(a_{li}, a_{mj}) \leqslant d(a_{lj}, a_{mi})$, 也就是与 (1) 相应的情形, 即得 $a_{mj} \leqslant \min\{a_{lj}, a_{mi}\}$. 由这两个不等式,即得

$$\min\{a_{1i}, a_{mj}\} \leqslant \min\{a_{1j}, a_{mi}\}.$$

因此(10)式与(18)式等价. 定理 6 证毕.

四、应　　用

为了说明定理 4 的效力,我们可看资料[3-5]中出现的几个例子.

例 1. a_{ki} 的数值由下表给出:

	J_1	J_2	J_3	J_4	J_5	J_6
M_1	6	12	4	3	6	2
M_2	7	2	6	11	8	14
M_3	3	3	8	7	10	12

这例子在资料[3]中曾用分支定界法经过五十余次排序算出最优解为 57. 我们现根据定理 4 的条件将诸 J_i 排一次序. 令 $J_i < J_j$ 表示 J_i 应在 J_j 之前. 则得

$$J_3 < J_5,\ J_6 < J_4,\ J_6 < J_1,$$
$$J_5 < J_1,\ J_4 < J_1,\ J_3 < J_1.$$

根据这一结果,则初步的排序应为:

$$J_3 J_5 J_6 J_4 J_1 \text{ 或 } J_6 J_4 J_3 J_5 J_1.$$

若我们将 J_2 排在最后,则得两种排序

$$J_3 J_5 J_6 J_4 J_1 J_2,\quad J_6 J_4 J_3 J_5 J_1 J_2.$$

实际上,前一排序就是最优方案.

例 2.

	J_1	J_2	J_3	J_4	J_5	J_6
M_1	1	8	11	3	5	12
M_2	8	5	2	9	5	7
M_3	4	10	7	2	4	7

这例子在资料[4]中曾用一种启发式方法经过相当复杂的运算得出近似解为 54. 根据定理 4, 应有

$$J_1 < J_4,\ J_1 < J_5,\ J_6 < J_5,\ J_2 < J_5.$$

根据这一结果,初步的排序应为.

$$J_1 J_4 J_2 J_6 J_5 J_3$$

这一排法所得的结果为 49, 实际上也就是最优结果.

例 3.

	J_1	J_2	J_3	J_4
M_1	13	7	26	2
M_2	3	12	9	6
M_3	12	16	7	1

这例子在资料 [5] 中用分支定界法经过 16 次排序得出最优方案为 $J_2J_3J_4J_1$, 结果为 62. 根据定理 4, 应有

$$J_2 < J_3.$$

由于 $a_{24} = 6$, $a_{34} = 1$, 故 J_4 应排在最后较有利. 因此我们应先考虑

$$J_1 J_2 J_3 J_4,\ J_2 J_3 J_1 J_4.$$

第二种排序也就是最优方案.

例 4.

	J_1	J_2	J_3	J_4	J_5	J_6	J_7	J_8	J_9	J_{10}
M_1	1	5	7	8	3	7	9	8	6	3
M_2	2	9	6	9	2	10	7	9	1	1
M_3	9	7	8	9	3	4	7	4	3	1

这例子在资料[5]中认为是 3 台机床 10 个零件的加工顺序中最难的问题. 由定理 4 我们可以看出, 除了 J_9 之外, J_1 都应在各 J_i 的前面, J_{10} 应在所有 J_i 的后面. 这样一来, 基本上已经肯定 J_1 排在最前, J_{10} 排在最后. 10 个零件的排序问题变成了 8 个零件的排序问题. 工作量只有原问题的九十分之一. 假若我们考虑到 J_2 应在 J_6, J_7, J_8 之前, J_4 应在 J_7, J_8 之前, J_6 应在 J_8 之前,而且当 $i > j$ 时, 不出现 $J_i < J_j$, 这样一来,我们应该考虑的范围就大为缩小. 资料[5]中已经给出,这问题的最优方案是 $J_1J_2J_3J_4J_5J_6J_7J_8J_9J_{10}$.

对于上述这些例子来说,定理 4 虽然比现存的方法有明显的优越性,但我们的排序问题远没有因此达到解决的地步. 定理 6 说明,要使这问题得到解决,我们还必须探索别的途径. 另一方面,要使定理 4 在解决实际问题时能真正起作用,我们还必须设法使它与别的方法(比如分支定界法)结合在一起来使用. 这正是我们今后应探索的问题.

参考资料

[1] Johnson, S. M., *Naval Res. Log. Quart.*, **1** (1954), 61.
[2] Nabeshima, I., *J. of the Op. Res. Soc. of Japan*, **16** (1973), 2, 65.
[3] Lomnicki, Z. A., *Opnal. Res. Quart.*, **16** (1965), 1, 89.
[4] Gupta, J. N. D. & Maykut, A. R., *J. of the Opns. Res. Soc. of Japan*, **16** (1973), 2, 131.
[5] Ignall, E. & Schrage, L., *Opns. Res.*, **13** (1965), 3, 400.