· 含重节点的差商.

书 P36: $f[\underbrace{x_0, x_0, \cdots, x_0}_{n+1\text{ 个}}] = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)$

· Hermite 插值

· 对函数及其导数进行插值.

$f(x_i) = p(x_i)$. $f'(x_i) = p'(x_i)$. $i = \underbrace{1, 2, \cdots, n}_{n\text{ 个}}$. $x_i \in [a, b]$.

那么 $\exists!$ $\deg \le 2n-1$ 的多项式使之成立.

· 误差:

$$R(x) = f(x) - p(x) = \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!} \prod_{i=1}^{n} (x - x_i)^2. \quad \xi \in [a, b].$$

Proof 來以书 P22-23.

· 例: 1) $f(x_1) = p(x_1)$. $f'(x_1) = p'(x_1)$. $f(x_2) = p(x_2)$. $f'(x_2) = p'(x_2)$.

误差 $= \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} (x - x_1)^2 (x - x_2)^2$

2) $f(x_1) = p(x_1)$. $f'(x_1) = p'(x_1)$. $f(x_2) = p(x_2)$.

误差 $= \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!} (x - x_1)^2 (x - x_2)$.

3) $f(x_1) = p(x_1)$. $f'(x_1) = p'(x_1)$. $f''(x_1) = p''(x_1)$. $f(x_2) = p(x_2)$.

误差 $= \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} (x - x_1)^3 (x - x_2)$.

· 含导数插值中的差商表.

例: $x_0 = 4$. $x_1 = 5$. $x_2 = 6$.

对如下信息进行插值:

$f(x_0) = -3$. $f'(x_0) = 8$. $f''(x_0) = 2$. $f(x_1) = 2$. $f(x_2) = 1$.

写出插值多项式及误差函数. f 光滑.

解.

x_i	$f(x_i)$				
4	-3				
4	-3	$\boxed{8}$			
4	-3	$\boxed{8}$	$\boxed{1}$		
5	2	5	-3	-4	
6	1	-1	-3	0	2

$f[4, 4] = f'(4)$.

$f[4, 4, 4] = \frac{f''(4)}{2}$.

$\boxed{}$: 已知.

插值多项式 $p(x) = -3 + 8(x-4) + (x-4)^2 - 4(x-4)^3 + 2(x-4)^3(x-5)$

误差 $R(x) = \dfrac{f^{(5)}(\xi)}{5!}(x-4)^3(x-5)(x-6)$.

• 书P129：含 n 个点的数值积分公式的代数精度 $\leq 2n-1$ 阶.

注：$= 2n-1$ 阶：Gauss 积分.

• prop. 代数精度 $\geq$ 自由度个数 -1.

e.g. $\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} A_i f(x_i)$.

1) Newton-Cotes 积分：$x_1 \sim x_n$ 给定. $A_1 \sim A_n$ 自由.

$(x_1 = a,\ x_2 = a+h,\ \dots,\ x_n = b)$

∴ 自由度 n. 代数精度 $\geq n-1$. 若 $f = \underbrace{x^n}_{x^{n+1},\dots}$ 代入也成立，则代数精度 $> n-1$.

2) Gauss 积分：$x_1 \sim x_n$ 自由. $A_1 \sim A_n$ 自由.

∴ 自由度 2n. 代数精度 $\geq 2n-1$.

又 ∵ n 个点，代数精度 $\leq 2n-1$.

⇒ 代数精度 $= 2n-1$.

~~事实上：数值积分为 Gauss 之~~

• Thm. Gauss 积分误差.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} A_i f(x_i) + E$$

则误差 $E = \dfrac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!}\int_a^b \prod_{i=1}^{n}(x-x_i)^2\,dx$，$\xi \in [a,b]$.

Pf：n 个点，Gauss 积分 ⇒ 代数精度 $2n-1$.

∴ ∀ deg $\leq 2n-1$ 的多项式 $q(x)$，$\int_a^b q(x)\,dx \underset{精确}{=} \sum_{i=1}^{n} A_i f(x_i)$.

再由 Hermite 插值.

∃! deg $\leq 2n-1$ 的多项式 $p(x)$. s.t. $f(x_i) = p(x_i)$, $f'(x_i) = p'(x_i)$, $i = 1 \sim n$

且 $R(x) = f(x) - p(x) = \dfrac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!}\prod_{i=1}^{n}(x-x_i)^2$. [注：$\xi = \xi(x) \in [a,b]$].

误差 $E = \int_a^b f(x)\,dx - \sum_{i=1}^{n} A_i f(x_i)$

Hermite 插值 $= \int_a^b f(x)\,dx - \sum_{i=1}^{n} A_i p(x_i)$

$\deg p \le 2n-1$ $= \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b p(x)\,dx$

$= \int_a^b [f(x) - p(x)]\,dx$

$= \int_a^b \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!} \underbrace{\prod_{i=1}^{n}(x-x_i)^2}_{>0} dx$

积分中值定理 $= \frac{f^{(2n)}(\hat{\xi})}{(2n)!} \int_a^b \prod_{i=1}^{n}(x-x_i)^2\,dx$, $\hat{\xi} \in [a,b]$.

· 带权重的 Gauss 积分.

$\int_a^b f(x)\,w(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} A_i f(x_i) + E$.

$w(x) > 0$: 权函数.

1) $w(x) = 1$: Gauss - Legendre 积分

2) $w(x) = e^{-x^2}$: Gauss - Hermite 积分

3) ...

误差 $E = \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!} \int_a^b \prod_{i=1}^{n}(x-x_i)^2\, w(x)\,dx$. $\xi \in [a,b]$.

· 例: $\int_0^1 f(x)\,w(x)\,dx \approx A f(x_1) + B f(x_2)$.

$w(x) = (\frac{1}{2} - x)^2$ 权函数.

(a) 确定 A, B, x_1, x_2. s.t. 代数精度尽可能高.

(b) f 光滑. 求此数值积分公式的误差.

解: (a) 取 $f = 1, x, x^2, x^3$ 代入 ($\because$ 左右两边关于 f 是线性的)

$$\begin{cases} A + B = \frac{1}{12} & ① \\ A x_1 + B x_2 = \frac{1}{24} & ② \\ A x_1^2 + B x_2^2 = \frac{1}{30} & ③ \\ A x_1^3 + B x_2^3 = \frac{7}{240} & ④ \end{cases}$$

非线性方程组!

① × x_1 − ② ⇒ $Bx_1 - Bx_2 = \frac{1}{12}x_1 - \frac{1}{24}$ ⑤

② × x_1 − ③ ⇒ $Bx_1x_2 - Bx_2^2 = \frac{1}{24}x_1 - \frac{1}{30}$ ⑥

③ × x_1 − ④ ⇒ $Bx_1x_2^2 - Bx_2^3 = \frac{1}{30}x_1 - \frac{7}{240}$ ⑦

∵ $x_1 \neq x_2$.（将 $x_1 = x_2$ 代入发现无解）

$$\frac{⑥}{⑤} \Rightarrow x_2 = \frac{\frac{1}{24}x_1 - \frac{1}{30}}{\frac{1}{12}x_1 - \frac{1}{24}} = \frac{5x_1 - 4}{10x_1 - 5}$$

$$\frac{⑦}{⑥} \Rightarrow x_2 = \frac{\frac{1}{30}x_1 - \frac{7}{240}}{\frac{1}{24}x_1 - \frac{1}{30}} = \frac{8x_1 - 7}{10x_1 - 8}$$

$$\therefore \frac{5x_1 - 4}{10x_1 - 5} = \frac{8x_1 - 7}{10x_1 - 8} \Rightarrow x_1,\ x_2 = \frac{5 \pm \sqrt{15}}{10}$$

$$A = B = \frac{1}{24}.$$

2个点. 此时已达到3阶代数精度. ∴不可能更高.

(b) 这是带权重的 Gauss 积分.

$$误差 = \frac{f^{(4)}(\xi)}{24} \int_0^1 (x-x_1)^2 (x-x_2)^2 (\tfrac{1}{2}-x)^2 dx. \quad \xi \in [a, b].$$

· 常微分方程数值解.

$\begin{cases} 单步法：Euler 向前/后，Runge-Kutta，\cdots \\ 多步法 \end{cases}$

判断步数：为了计算未知步（n+1 步），需要用到多少已知步（≤n 步）的信息，就是几步方法.

eg. · Euler 向后：$y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1})$. 用到第n步：∴单步方法.

· 书 P_{151} 例7.4：$y_{n+1} = y_{n-1} + \frac{h}{3}[7f_n - 2f_{n-1} + f_{n-2}]$. 用到第 n, n-1, n-2 步. ∴三步方法

若：$y_{n+1} = y_{n-1} + \frac{h}{3}[7f_{n+1} - 2f_{n-1} + f_{n-2}]$. 用到第 n-1, n-2 步. ∴两步.

注：第一个显式. 第二个隐式.

例. $y'(t)=\ln(\ln(4+y^2))$. $t\in[0,1]$. $y(0)=1$. 等距步长 h. $t_n=n\cdot h$.

(a) 记 $y(t_n)$ 的数值解为 y_n. 写出 Euler 向前法求解的迭代格式.

(b) 对 (a), 推出局部截断误差 T_n, 并证明 $|T_n|<\frac{h^2}{4}$.

解: (a) $y_{n+1}=y_n+h\cdot\ln(\ln(4+y_n^2))$.

(b) $y(t_{n+1})=y(t_n)+h\cdot\underbrace{\ln(\ln(4+y^2(t_n)))}_{y'(t_n)}+T_n$

$\quad\ \|$

$y(t_n)+hy'(t_n)+\frac{h^2}{2}y''(\xi_n)$

$\Rightarrow T_n=\frac{h^2}{2}y''(\xi_n)$. 只须 $|y''|<\frac{1}{2}$.

$$y''=\frac{1}{\ln(4+y^2)}\cdot\frac{1}{4+y^2}\cdot 2y\cdot\underbrace{y'}_{\ln(\ln(4+y^2))}$$

$$\overset{t=\ln(4+y^2)}{=\!=}\ \frac{\ln t}{t}\cdot\frac{2y}{4+y^2}$$

① $\frac{2y}{4+y^2}=\frac{1}{\frac{2}{y}+\frac{y}{2}}$.

注意到 $y(0)=1$, $y'(0)=\ln(\ln 5)>0$. $\Rightarrow y(t)\geq y(0)=1$

$\therefore \frac{2}{y}+\frac{y}{2}\geq 2\sqrt{\frac{2}{y}\cdot\frac{y}{2}}=2$

$\therefore \frac{2y}{4+y^2}\leq\frac{1}{2}$.

② $t=\ln(4+y^2)\geq\ln 5>1$

$\therefore \frac{\ln t}{t}<1$.

综上. $y''<\frac{1}{2}$. $\Rightarrow |T_n|<\frac{h^2}{4}$.

例. $y'=f(x,y)$, 线性多步格式

$$y_{n+1}+(\alpha-1)y_n-\alpha y_{n-1}=\frac{h}{4}\left[(\alpha+3)f_{n+1}+(3\alpha+1)f_{n-1}\right]$$

(a) 证明：$\alpha\neq-1$ 时：二阶精度

$\alpha=-1$ 时：三阶精度

(b) $\alpha=-1$ 时，几步几阶显 or 隐.

注：① p 阶精度 $\Leftrightarrow$ 局部截断误差 $O(h^{p+1})$.

② 在任一步 $(x_{n-1}, x_n, x_{n+1}, \cdots)$ 处展开，局部截断误差阶数相同.

解：(a) 不妨在 x_n 处展开.

$$y(x_{n+1})+(\alpha-1)y(x_n)-\alpha y(x_{n-1})=\frac{h}{4}\left[(\alpha+3)f(x_{n+1},y(x_{n+1}))+(3\alpha+1)f(x_{n-1},y(x_{n-1}))\right]+T_n$$

简记 $y(x_n)$ 为 y. $y'(x_n)$ 为 y'. 等等.

展到四阶：

$$\left(y+hy'+\frac{h^2}{2}y''+\frac{h^3}{6}y'''+\frac{h^4}{24}y^{(4)}\right)+(\alpha-1)y-\alpha\left(y-hy'+\frac{h^2}{2}y''-\frac{h^3}{6}y'''+\frac{h^4}{24}y^{(4)}\right)$$

$$=\frac{h}{4}\Big[(\alpha+3)\left(y'+hy''+\frac{h^2}{2}y'''+\frac{h^3}{6}y^{(4)}\right)$$

$$+(3\alpha+1)\left(y'-hy''+\frac{h^2}{2}y'''-\frac{h^3}{6}y^{(4)}\right)\Big]+T_n$$

左端消去 y，再合并同类项. 右端合并同类项.

$$(1+\alpha)hy'+(1-\alpha)\frac{h^2}{2}y''+(1+\alpha)\frac{h^3}{6}y'''+(1-\alpha)\frac{h^4}{24}y^{(4)}$$

$$=\frac{h}{4}\left[(4\alpha+4)y'+(2-2\alpha)hy''+(4\alpha+4)\frac{h^2}{2}y'''+(2-2\alpha)\frac{h^3}{6}y^{(4)}\right]+T_n$$

两边消去 y', y'' 项，得：

$$\frac{1+\alpha}{6}h^3y'''+\frac{1-\alpha}{24}h^4y^{(4)}=\frac{1+\alpha}{2}h^3y'''+\frac{1-\alpha}{12}h^4y^{(4)}+T_n$$

$\therefore\ \alpha\neq-1:\ T=O(h^3)$

$\alpha=-1:\ T=O(h^4)$.

(b) $\alpha=-1$, $y_{n+1}-2y_n+y_{n-1}=\frac{h}{2}(f_{n+1}-f_{n-1})$. 用到第 $n, n-1$ 步，$\therefore$ 两步.

$T=O(h^4)$, $\Rightarrow$ 三阶. 隐.