

---

## 组合与数论常识

a lecture on  
combinatorics and number theory

主要讲解知识, 会有一些例题.

### table of content

- 分步, 分类计数原理
- 排列, 组合
- 递推关系
- 容斥原理
- 生成函数运算
- 整除关系, 同余关系
- 二元一次不定方程与模线性方程组 (CRT)
- 素数判定与质因子分解
- 数论函数及其求和方法

## 组合常识

基本上就是简单高中数学题, 我们跳过

### 递推关系

- 等差数列与等比数列是基础
- 几个常见模型 (形式变换, 不动点, 特征根, 卷积, 微分方程) [参考这里](#)

- $a_{n+1} = pa_n + q$
- $a_{n+2} = Aa_{n+1} + Ba_n + C$
- $S_n - S_{n-1} = n2^n$
- $a_{n+1} + pa_n = qa_{n+1}a_n$
- $a_{n+1}a_n = a_{n+1} + a_n$
- $c_n = \sum_{0 \leq i \leq n} c_i c_{n-i-1}$

### 容斥原理, 生成函数

---

参考这些资料进行学习

- [git-repo:whynotmarkdown](#)

## 数论常识

### 整除关系

$$a = bq + r \quad (0 \leq r < b) \\ \implies \lfloor \frac{a}{b} \rfloor = q, a \bmod b = r$$

如果有  $r = 0$  即  $\exists k, bk = a$  则称  $b \mid a$  ( $b$  整除  $a$  或者  $b$  为  $a$  的因子)

### 同余关系

$$a = bq + r \\ \implies a \equiv r \pmod{b}$$

- 威尔逊定理  $p \in \text{primes} \iff (p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$
- 欧拉定理的扩展 (指数循环节) ( $b \geq m$ )  $\implies a^b \equiv a^{b \bmod m + \varphi(m)} \pmod{m}$

## 模线性方程组与二元一次方程

见现场推到与参考资料

## 素数判定与质因数分解

- $O(\sqrt{n})$  暴力
- 素数定理  $|[1..n] \cap \text{primes}| = O(\frac{n}{\log n})$
- 神秘定理  $\sum_{\text{primes} \leq n} \frac{1}{p} = O(\log \log n)$
- [pollard-rho](#), [miller-rabin](#)

## 数论函数与求和问题

见参考资料与现场讲解