



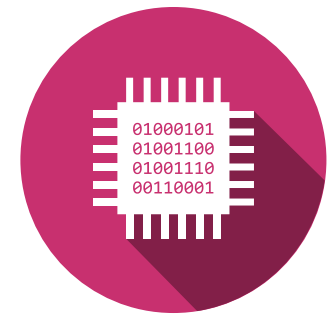
Digitales Design (DiD)

Vereinfachung mittels Karnaugh-Tabellen

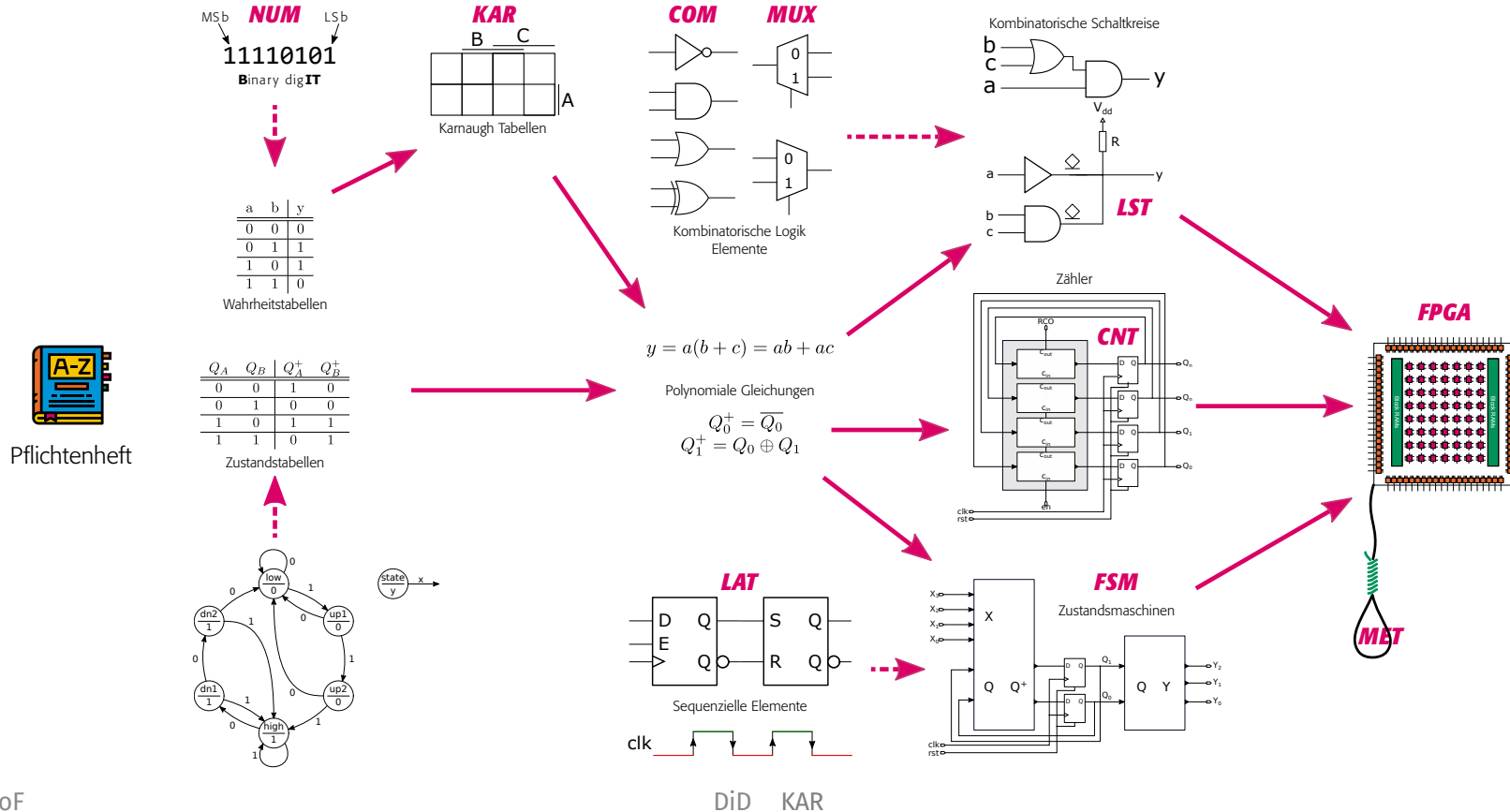
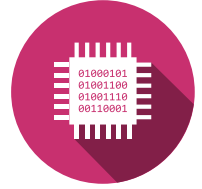
KAR

Studiengang Systemtechnik
Studiengang Energie und Umwelttechnik
Studiengang Informatik und Kommunikationssysteme

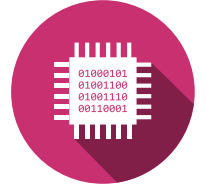
Silvan Zahno silvan.zahno@hevs.ch
Christophe Bianchi christophe.bianchi@hevs.ch
François Corthay francois.corthay@hevs.ch



Aktueller Inhalt des Themas im Kurs



Inhalt



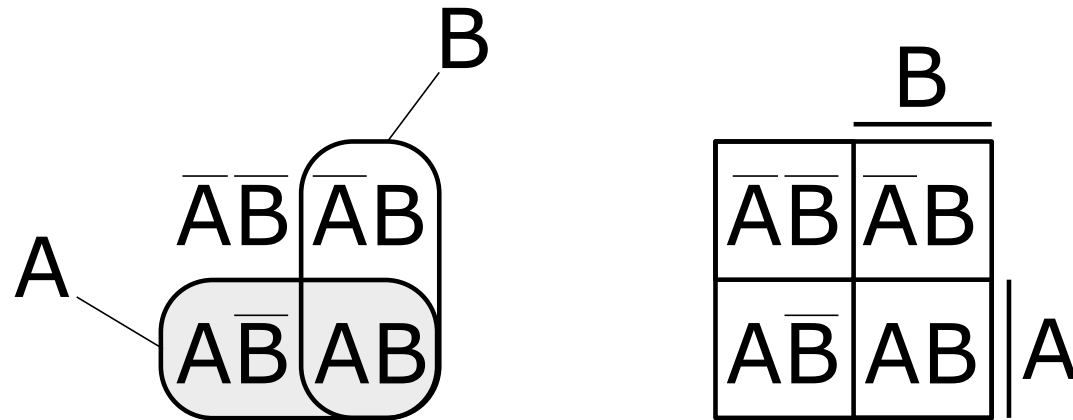
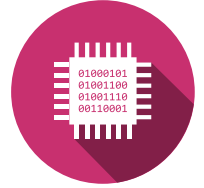
- **Karnaugh Tabellen**

- mit 2 Variablen
 - mit 3 Variablen
 - mit 4 Variablen
 - Mit mehr als 4 Variablen
- Vereinfachung mittels einer Summe von Produkten
- Vereinfachung mittels Exklusiv-ODER Funktionen
- Funktionen mit einer grossen Anzahl an Eingängen

Karnaugh Tabellen

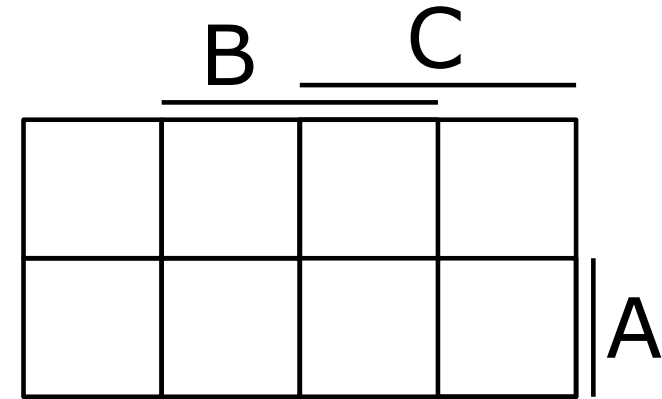
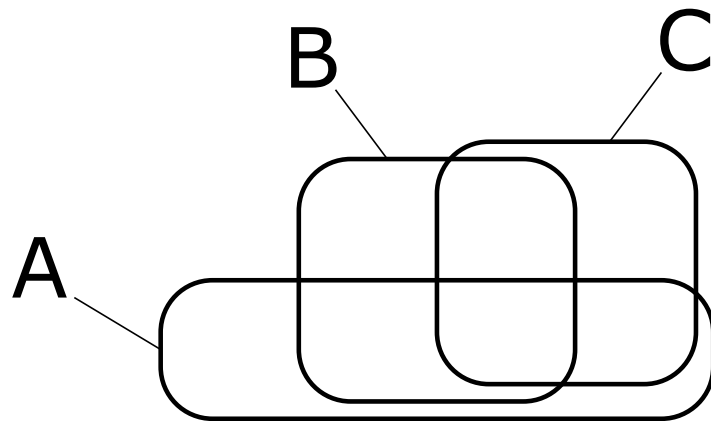
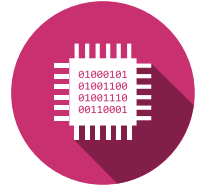
Mit 2 Variablen

Es handelt sich um ein Venn Diagramm



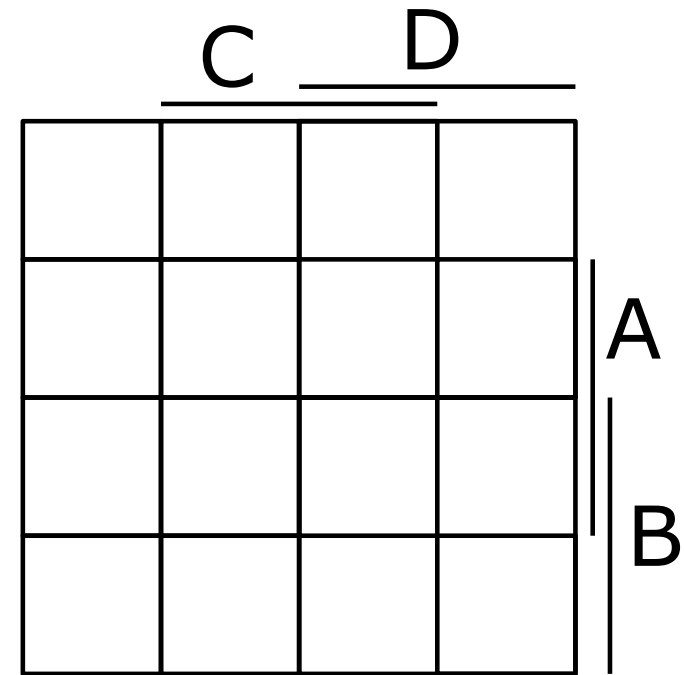
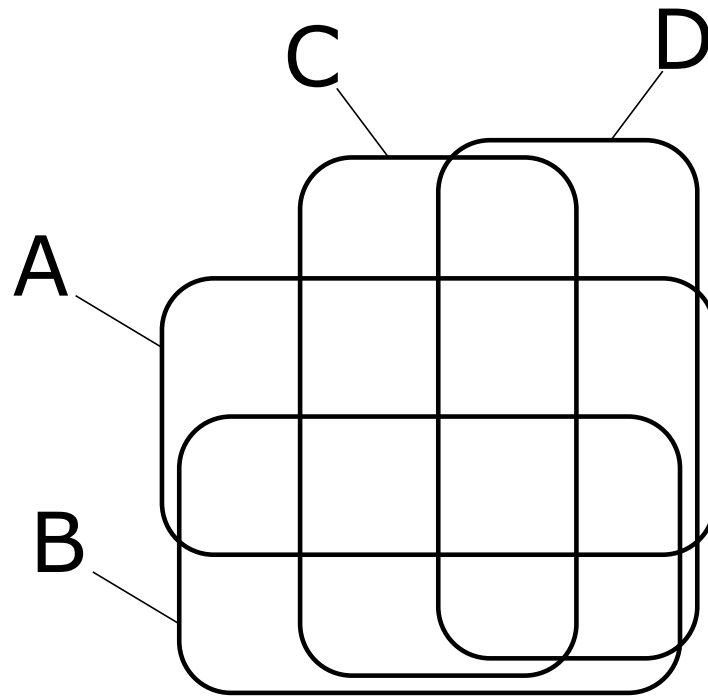
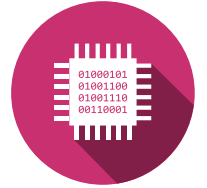
Karnaugh Tabellen

Mit 3 Variablen



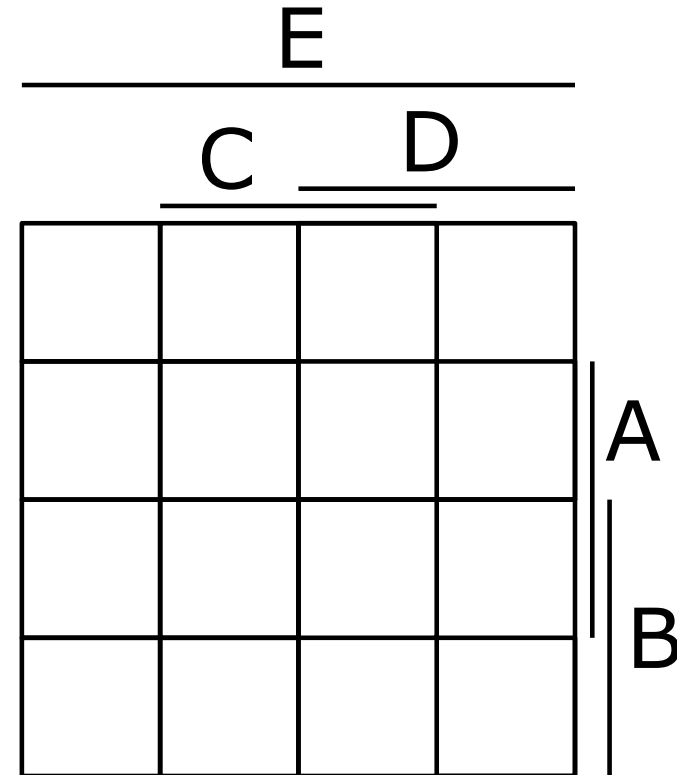
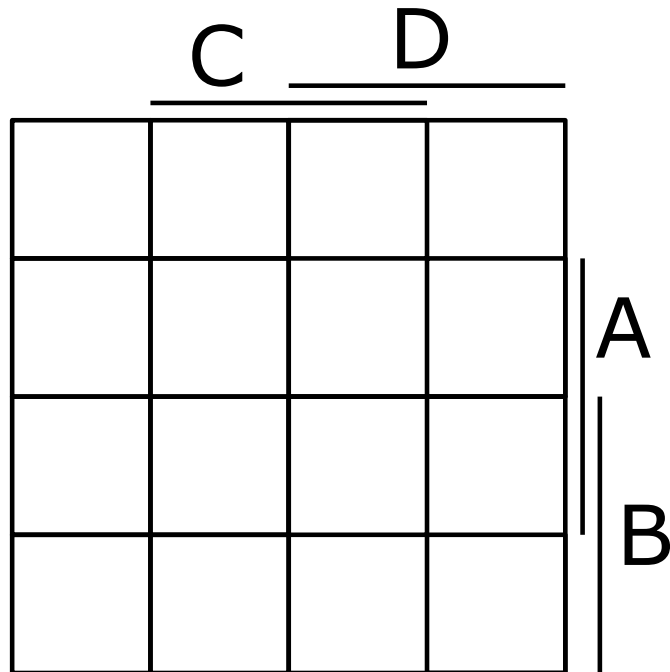
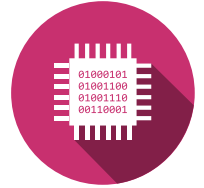
Karnaugh Tabellen

Mit 4 Variablen

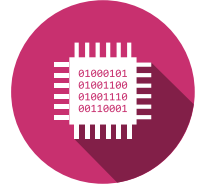


Karnaugh Tabellen

Mit 5 Variablen



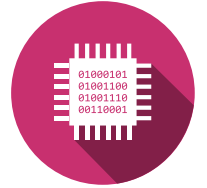
Inhalt



- Karnaugh Tabellen
- **Vereinfachung mittels einer Summe von Produkten**
 - Monome
 - Polynome
 - Primimplikant, Wesentlicher Primimplikant
 - Vereinfachungen
 - Unvollständig definierte Funktionen
- Vereinfachung mittels Exklusiv-ODER Funktionen
- Funktionen mit einer grossen Anzahl an Eingängen

Karnaugh Tabellen

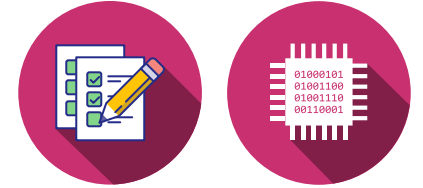
Monome



C		D		A
0	0	0	0	
0	0	0	0	
1	1	1	1	
0	0	0	0	B
BA				

<u>C</u>		<u>D</u>		A
0	0	0	0	
1	0	0	1	
0	0	0	0	
0	0	0	0	B
<u>CBA</u>				

Aufgabe 1.1

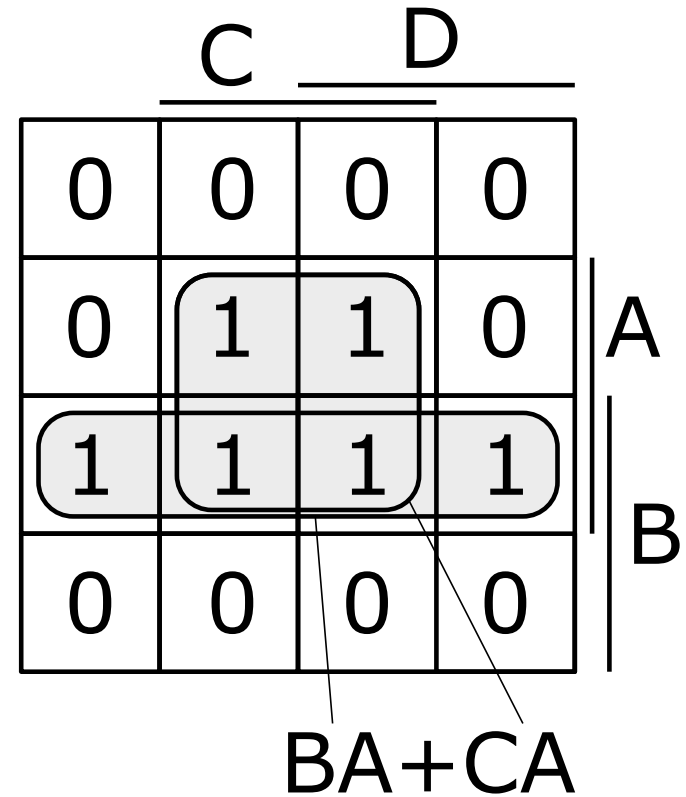
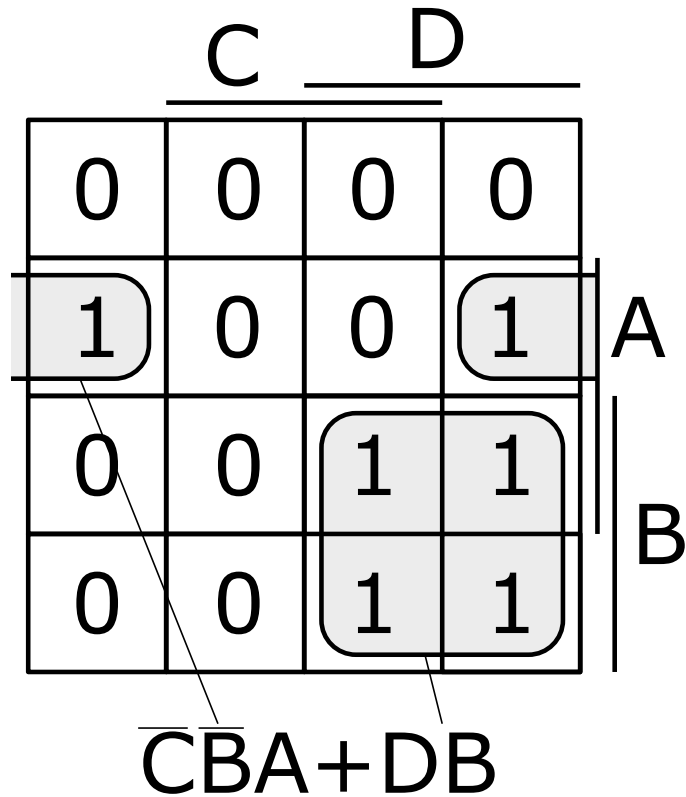
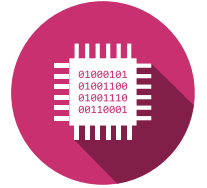


Stellen Sie die folgende Monome in einer Karnaugh-Tafel mit 4 Variablen dar.

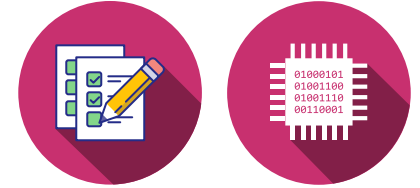
$$\begin{aligned}y_1 &= \bar{b}a \\y_2 &= \bar{d}\bar{a} \\y_3 &= \bar{d}cb \\y_4 &= dba \\y_5 &= \bar{c}\bar{b}\bar{a} \\y_6 &= dcb\bar{a}\end{aligned}$$

Karnaugh Tabellen

Polynome



Aufgabe 1.3



Stellen Sie die folgende Monome in einer Karnaugh-Tafel mit 4 Variablen dar.

$$y_1 = \bar{b} + ac$$

$$y_2 = \bar{d} + \bar{a} + bc$$

$$y_3 = \bar{d}cb + d\bar{c}\bar{b}$$

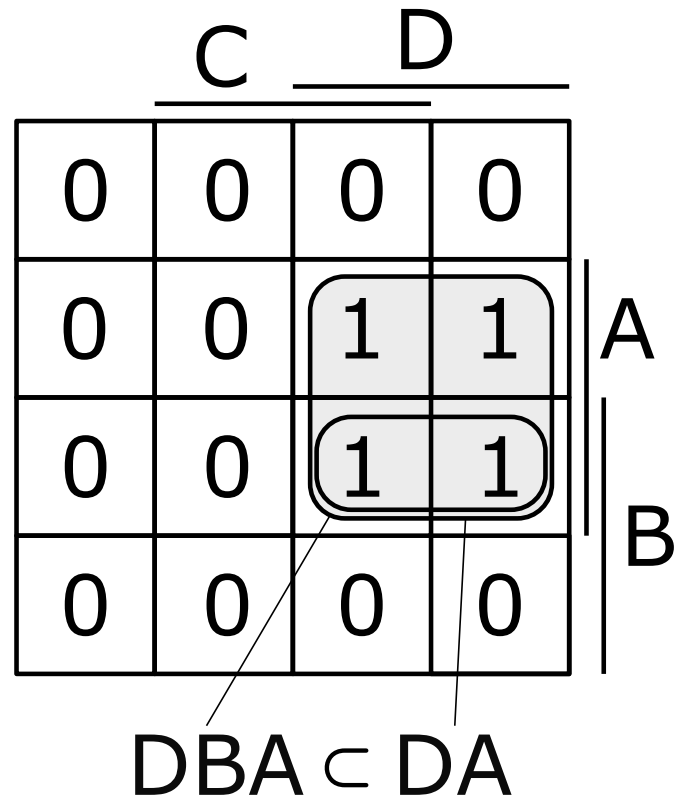
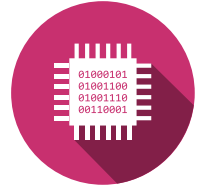
$$y_4 = db + ab$$

$$y_5 = \bar{c}\bar{b}\bar{a} + \bar{c}\bar{b}$$

$$y_6 = dcb\bar{a} + \bar{d}cb\bar{a}$$

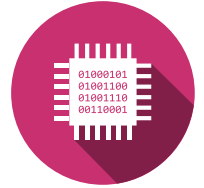
Karnaugh Tabellen

Primimplikant



Karnaugh Tabellen

Wesentlicher Primimplikant



	<u>C</u>		<u>D</u>	
	0	0	1	0
1	1	1	1	0
0	0	1	1	1
0	0	1	0	0

Diagram illustrating a 4x4 Karnaugh map for variables A, B, C, and D. The map shows the following values:

	C=0	C=1	D=0	D=1
A=1	1	1	1	0
A=0	0	1	1	1
B=1	0	1	0	0

The map shows two essential prime implicants (wesentliche Primimplikanten) highlighted by rounded rectangles:

- A group of four cells (A=1, B=1, C=0, D=0) and (A=1, B=1, C=1, D=0) is highlighted, corresponding to the prime implicant $A \cdot B$.
- A group of four cells (A=1, B=1, C=0, D=1) and (A=1, B=1, C=1, D=1) is highlighted, corresponding to the prime implicant $A \cdot B \cdot C$.

The label **CA** is positioned below the map, with a line pointing to the cell (A=1, B=1, C=1, D=1).

Karnaugh Tabellen

Wesentlicher Primimplikant

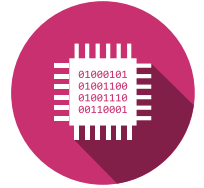


		C	D		
	A	0	0	1*	0
	B	1	1	1	0
		0	1	1	1
		0	1	0	0

CA

Karnaugh Tabellen

Wesentlicher Primimplikant

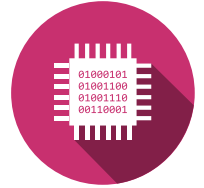


		C	D		
	A	0	0	1*	0
	B	1	1	1	0
		0	1	1	1*
		0	1	0	0

CA

Karnaugh Tabellen

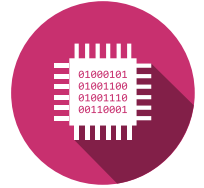
Wesentlicher Primimplikant



		<u>C D</u>			
	0	0	1*	0	A B
	1	1	1	0	
	0	1	1	1*	
	0	1*	0	0	
				CA	

Karnaugh Tabellen

Wesentlicher Primimplikant

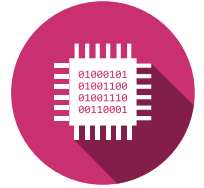


		<u>C D</u>		
	0	0	1	0
	1*	1	1	0
	0	1	1	1*
	0	1*	0	0
				A
				B

CA

Karnaugh Tabellen

Wesentlicher Primimplikant

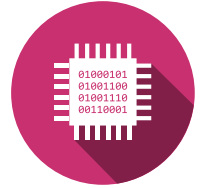


C D					
0	0	1*	0		
1*	1	1	0	A B	
0	1	1	1*		
0	1*	0	0		

~~CA~~

Karnaugh Tabellen

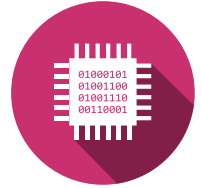
Bestimmen Sie die minimale Polynomgleichung



	C		D		
	0	0	1	0	
1	0	1	0	1	A B
1	0	0	0	0	
0	0	0	0	1	

Karnaugh Tabellen

Bestimmen Sie die minimale Polynomgleichung



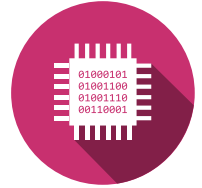
		C D		A B
		0	1	
B	0	0	1*	
	1	1	1	
	1	0	0	
	0	0	0	

DCB^*

→ Suche nach wesentlichen Primimplikanten

Karnaugh Tabellen

Bestimmen Sie die minimale Polynomgleichung



C		D		A B
0	0	1*	0	
1	0	1	1	
1*	0	0	0	
0	0	0	1	B

$DC\bar{B}^* + D\bar{C}A^*$

→ Suche nach wesentlichen Primimplikanten

Karnaugh Tabellen

Bestimmen Sie die minimale Polynomgleichung



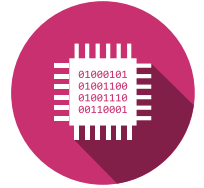
		C D		A B
		0	1	
0 1 1 0	0	0	1*	
	0	1	1	
	0	1*	0	
	0	0	0	
		0	1	
		0	0	1*

$$DC\bar{B}^* + \bar{D}\bar{C}A^* + DC\bar{B}A^*$$

→ Suche nach wesentlichen Primimplikanten

Karnaugh Tabellen

Bestimmen Sie die minimale Polynomgleichung



	C		D			
	0	0	1*	0		
1	1	0	1	1	A B	
1*	1*	0	0	0		
0	0	0	0	1*		
0	0	0	0	1*		

$$DC\bar{B}^* + \bar{D}\bar{C}A^* + DC\bar{B}A^* + D\bar{B}A$$

→ Suche nach den wesentlichen Primimplikanten und danach den verbleibenden Primimplikanten

Karnaugh Tabellen

Bestimmen Sie die minimale Polynomgleichung

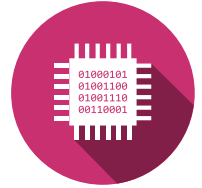


C		D		
0	0	1*	0	
1	0	1	1	A
1*	0	0	0	B
0	0	0	1*	

$$DC\bar{B}^* + \bar{D}\bar{C}A^* + DC\bar{B}A^* + D\bar{B}A + \bar{C}BA$$

→ Suche nach den wesentlichen Primimplikanten und danach den verbleibenden Primimplikanten

Aufgabe 3.1

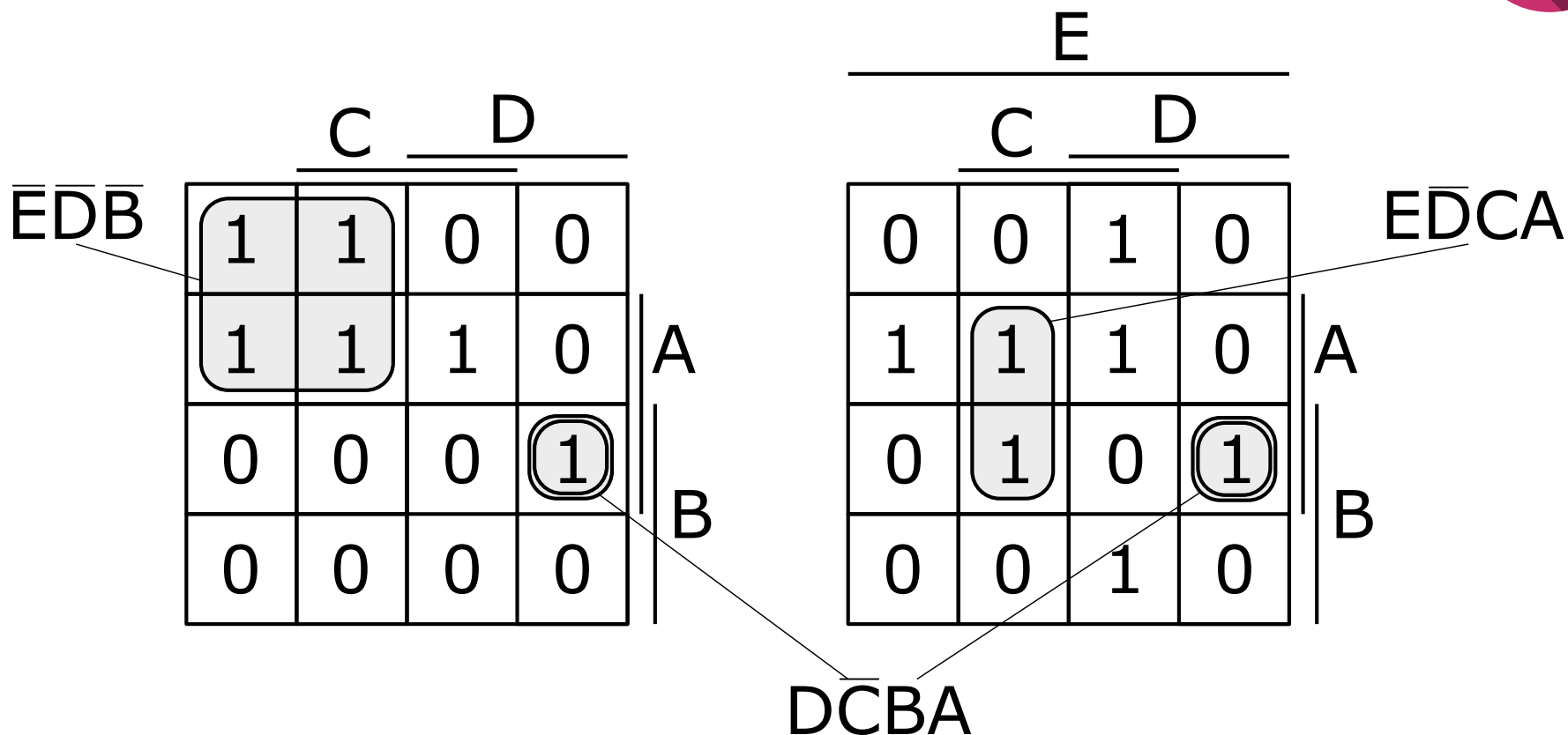
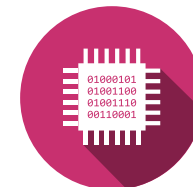


Bestimmen Sie die minimale Polynomialform der Karnaugh-Tabelle aus 4 Variablen

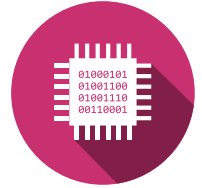
	C		D		
	1	0	0	1	
1	1	0	1	1	A
0	1	0	0	0	
1	1	1	1	1	B
0					

Karnaugh Tabellen

Vereinfachung mit 5 Variablen



Aufgabe 3.2



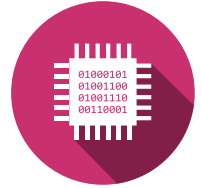
Bestimmen Sie die minimale Polynomialform der Karnaugh-Tabelle aus 5 Variablen

1	1	0	0
1	1	1	0
0	0	0	1
0	0	0	0

E			
C		D	
0	0	1	0
1	1	1	0
0	1	0	1
0	0	1	0
A			
B			

Karnaugh Tabellen

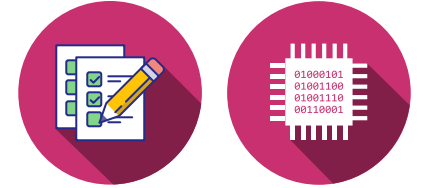
Unvollständig definierte Funktion



		C	D		
	A	1	1	-	1
	B	1	0	-	1
		1	1	-	-
		1	0	-	-

$$\bar{C} + \bar{B}\bar{A} + BA$$

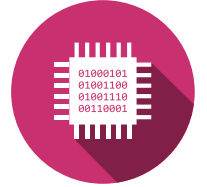
Aufgabe 3.11



Bestimmen Sie die minimale Polynomialform der Mehrheitsfunktion mit 4 Eingängen:

- die Funktion ergibt eine '0', wenn mehr als die Hälfte der Eingänge auf '0' sind.
- die Funktion ergibt eine '1', wenn mehr als die Hälfte der Eingänge auf '1' sind,
- wenn gleich viele Eingänge auf '0' und auf '1' sind, dann kann das Resultat irgendwelchen Wert nehmen.

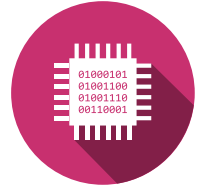
Inhalt



- Karnaugh Tabellen
- Vereinfachung mittels einer Summe von Produkten
- **Vereinfachung mittels Exklusiv-ODER Funktionen**
 - Dastellung
 - Vereinfachung
- Funktionen mit einer grossen Anzahl an Eingängen

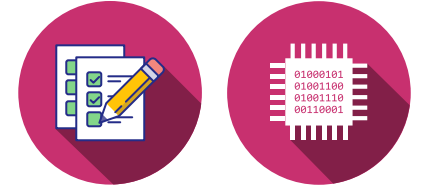
Karnaugh Tabellen

Darstellung einer Exklusiv-Oder (XOR) Funktion



		C		D		
	A	0	1	1	0	
	B	0	1	0	1	
	1	1	0	1	0	
	1	1	0	0	1	
$\bar{C} \oplus \bar{B} \oplus DA$						

Aufgabe 5.1



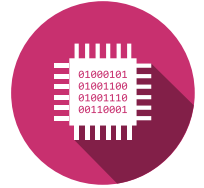
Darstellung von XOR-Funktionen (benutzen Sie Karnaughtabellen mit 4 Eingängen)

$$a \oplus b$$

$$a \oplus b \oplus c$$

Karnaugh Tabellen

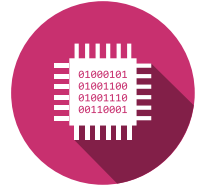
Vereinfachung mittels eines Exklusiv-Oder (XOR)



	C		D		
	0	1	1	1	
0	0	0	1	0	A B
1	1	1	1	0	
0	0	1	1	1	
1	1	1	1	1	

Karnaugh Tabellen

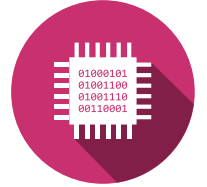
Vereinfachung mittels eines Exklusiv-Oder (XOR)



		C D		
		0	1	
A	0	0	1	1
	1	0	0	1
B	0	1	1	1
	1	0	1	0

Karnaugh Tabellen

Vereinfachung mittels eines Exklusiv-Oder (XOR)

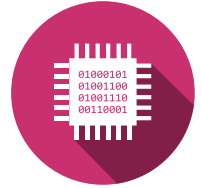


		C		D		
	0	1	1	1	A	
	0	0	1	0		
	1	1	1	0		B
	0	1	1	1		

$B \oplus \overline{B}D$

Karnaugh Tabellen

Vereinfachung mittels eines Exklusiv-Oder (XOR)

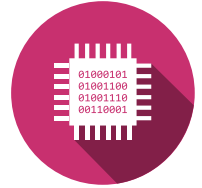


	C		D		
	0	1	1	1	
	0	0	1	0	A
	1	1	1	0	B
	0	1	1	1	

$$B \oplus \bar{B}D \oplus D\bar{C}A$$

Karnaugh Tabellen

Vereinfachung mittels eines Exklusiv-Oder (XOR)



	C		D		
	0	1	1	1	
0	0	0	1	0	A
1	1	1	1	0	
	0	1	1	1	B

$$B \oplus \bar{B}D \oplus D\bar{C}A \oplus \bar{D}B\bar{A}$$

Karnaugh Tabellen

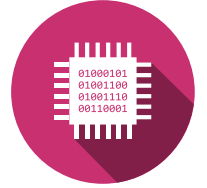
Vereinfachung mittels eines Exklusiv-Oder (XOR)



	C	D		
0	1	1	1	
0	0	1	0	A
1	1	1	0	
0	1	1	1	B

$$B \oplus \bar{B}D \oplus D\bar{C}A \oplus \bar{D}B\bar{A} \oplus \bar{D}C\bar{A}$$

Inhalt

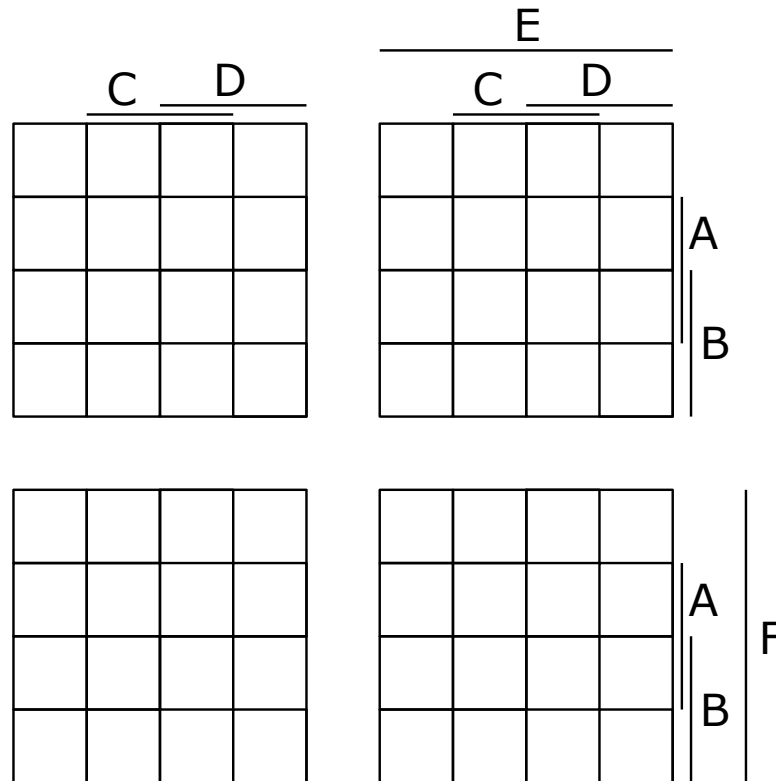
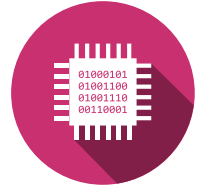


- Karnaugh Tabellen
- Vereinfachung mittels einer Summe von Produkten
- Vereinfachung mittels Exklusiv-ODER Funktionen
- **Funktionen mit einer grossen Anzahl an Eingängen**
 - Algebraische Vereinfachung
 - Vereinfachung in Blöcke von überschaubarer Grösse
 - Iterative Systeme

Karnaugh Tabellen

Funktionen mit einer grossen Anzahl an Eingängen

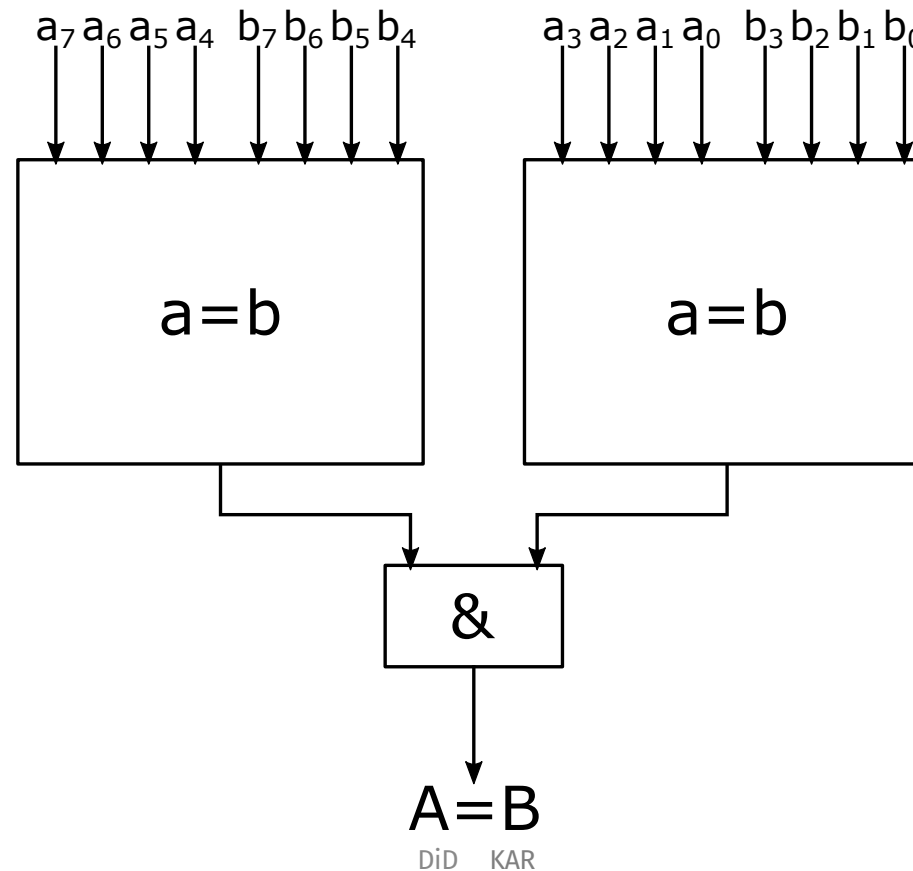
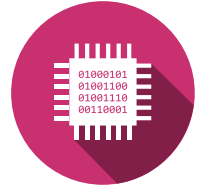
Funktion mit 6 Eingängen



DiD KAR

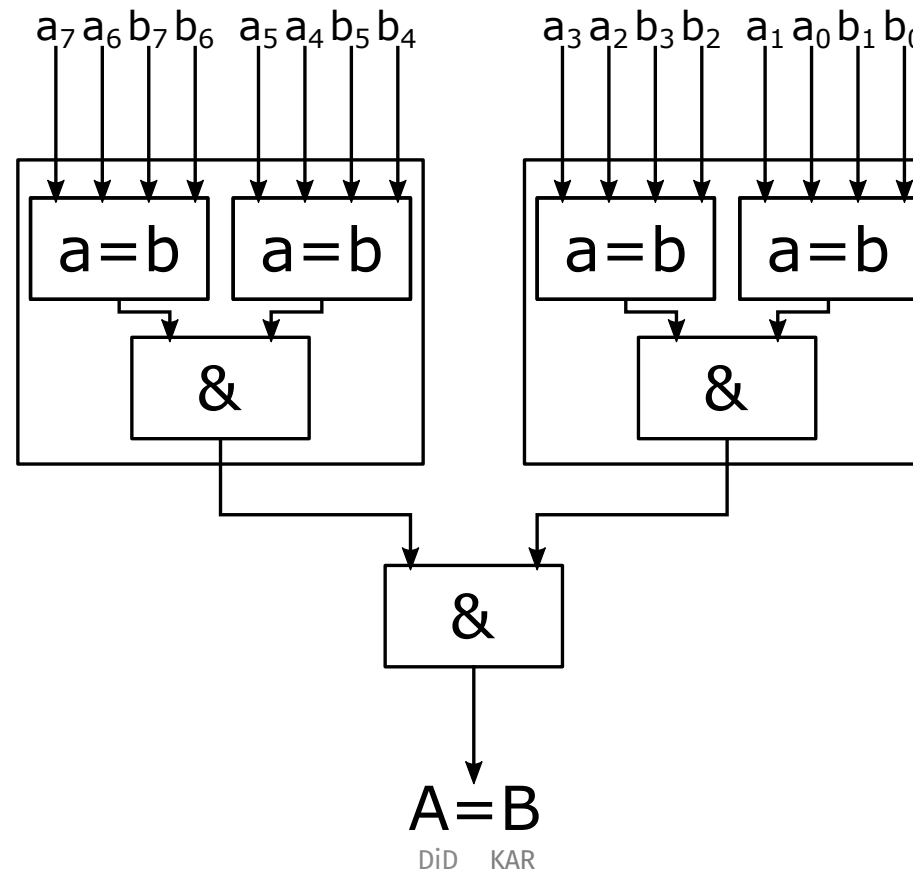
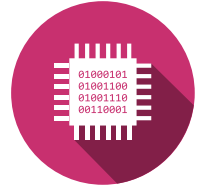
Karnaugh Tabellen

Vereinfachung in Blöcke



Karnaugh Tabellen

Vereinfachung in Blöcke



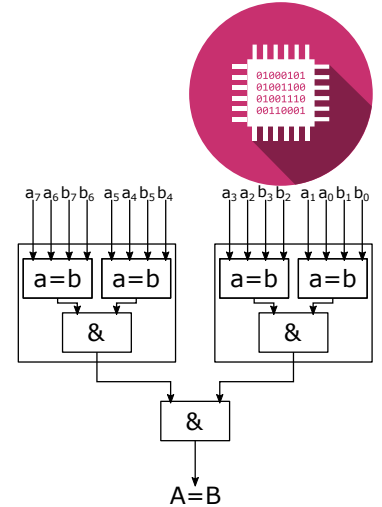
Karnaugh Tabellen

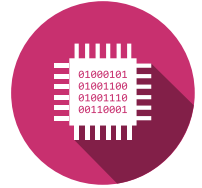
Vereinfachung in Blöcke

A=B, 2x2 Bits

	$\overline{b_0} \quad b_1$		
a_0	1	0	0
a_1	0	1	0
	0	0	1
	0	0	1

$$\overline{a_0}\overline{b_0}\overline{a_1}\overline{b_1} + \overline{a_0}\overline{b_0}a_1\overline{b_1} + \overline{a_0}\overline{b_0}a_1b_1 + a_0\overline{b_0}\overline{a_1}\overline{b_1} + a_0\overline{b_0}a_1\overline{b_1} + a_0\overline{b_0}a_1b_1 + a_0b_0\overline{a_1}\overline{b_1} + a_0b_0a_1\overline{b_1} + a_0b_0a_1b_1$$





Karnaugh Tabellen

Algebraische Vereinfachung

Zahlenvergleich algebraisch

$$A = a_7 * 2^7 + a_6 * 2^6 + \dots + a_1 * 2^1 + a_0 * 2^0$$
$$B = b_7 * 2^7 + b_6 * 2^6 + \dots + b_1 * 2^1 + b_0 * 2^0$$

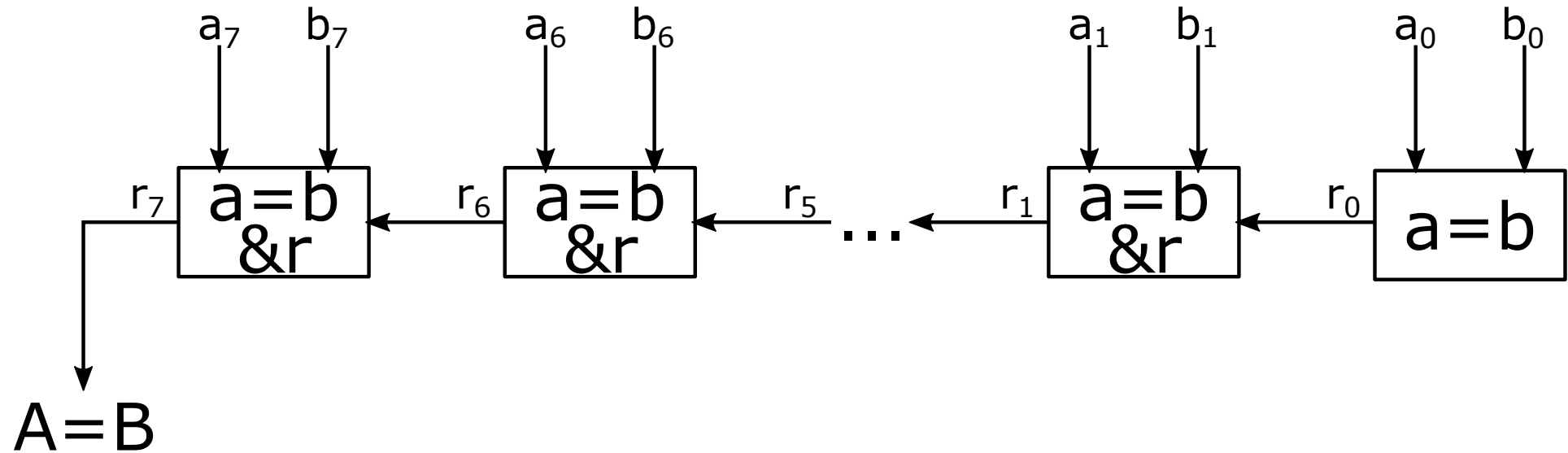
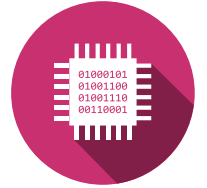
$$A = B \Leftrightarrow (a_7 = b_7) * (a_6 = b_6) * \dots * (a_1 = b_1) * (a_0 = b_0)$$

$$A = B \Leftrightarrow \overline{(a_7 \oplus b_7)} * \overline{(a_6 \oplus b_6)} * \dots * \overline{(a_1 \oplus b_1)} * \overline{(a_0 \oplus b_0)}$$

$$A = B \Leftrightarrow (a_7 b_7 + \overline{a_7} \overline{b_7}) * (a_6 b_6 + \overline{a_6} \overline{b_6}) * \dots * (a_1 b_1 + \overline{a_1} \overline{b_1}) * (a_0 b_0 + \overline{a_0} \overline{b_0})$$

Karnaugh Tabellen

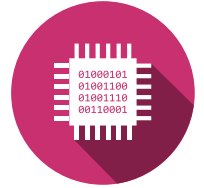
Iterative Systeme



Karnaugh Tabellen

Iterative Systeme

Iterativer Block



b_i		a_i		
0	1	0	1	
0	0	0	0	r_{i-1}
1	0	1	0	

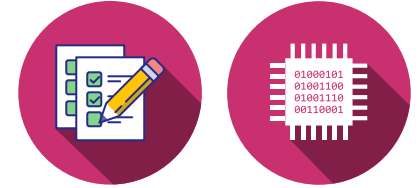
$$\overline{a_i} \overline{b_i} r_{i-1} + a_i b_i r_{i-1}$$

Erster Block unterschiedlich der restlichen: $r_0 = \overline{a_0} * \overline{b_0} + a_0 * b_0$

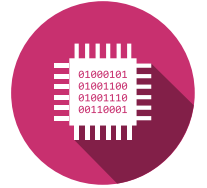
Erster Block gleich wie die restlichen: $r_{-1} = 1$

Aufgabe 6.1

Zahlenvergleich ($A > B$)



Referenzen



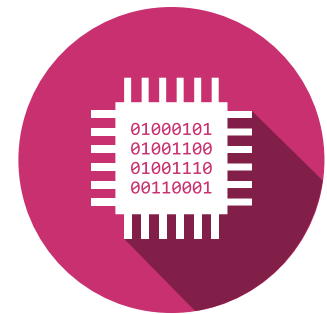
- [Man78] (Französisch) Gute Presentation
- [Toc92] (Französisch) Vollständige Beispiele
- [Max95] (Englisch) Einfach zum lesen
- [Wak00] (Englisch) Gute Erklärungen Karnaugh + Algorithmen
- [Fle80] (Englisch) Vereinfachungs Algorithmen
- [Kat94] (Englisch) Vereinfachungs Algorithmen



Hes·so  **VALAIS
WALLIS**



Haute Ecole d'Ingénierie
Hochschule für Ingenieurwissenschaften



Silvan Zahno silvan.zahno@hevs.ch
Christophe Bianchi christophe.bianchi@hevs.ch
François Corthay francois.corthay@hevs.ch