



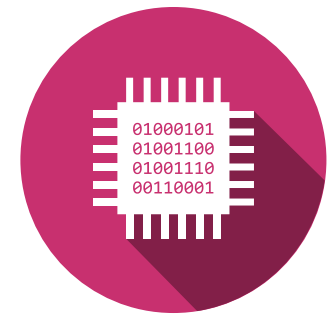
Conception numérique (DiD)

Simplification par table de Karnaugh

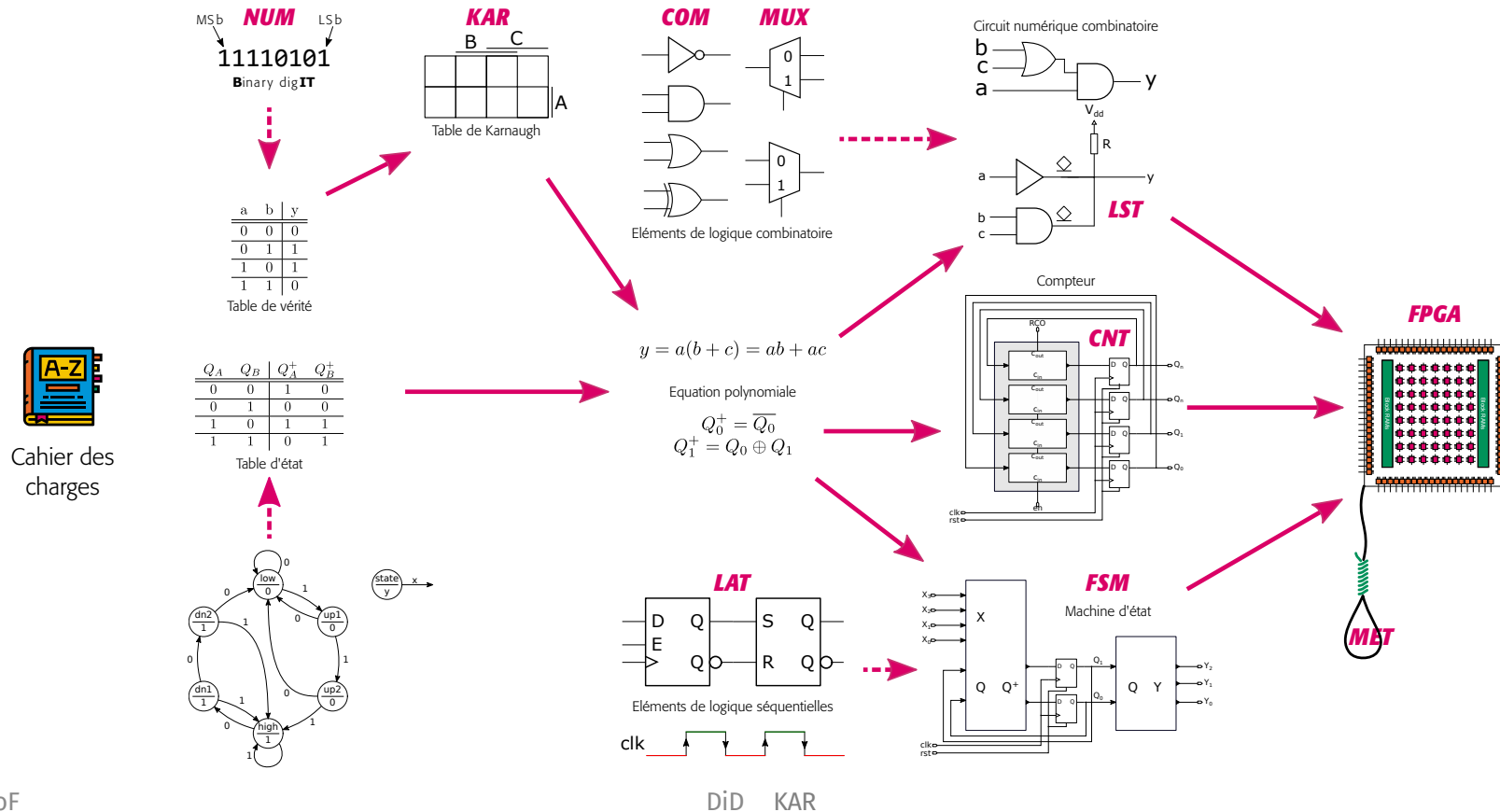
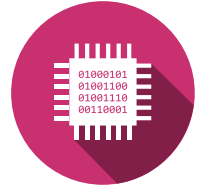
KAR

Filière Systèmes industriels
Filière Energie et techniques environnementales
Filière Informatique et systèmes de communications

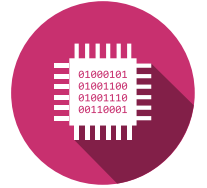
Silvan Zahno silvan.zahno@hevs.ch
Christophe Bianchi christophe.bianchi@hevs.ch
François Corthay francois.corthay@hevs.ch



Situation du thème dans le cours



Contenu



- **Tables de Karnaugh**
 - à 2 variables
 - à 3 variables
 - à 4 variables
 - à plus de 4 variables
- Simplification sous forme de sommes de produits
- Simplification de fonctions OU-exclusif
- Fonctions avec un nombre élevé d'entrées

Table de Karnaugh à 2 variables

Est un diagramme de Venn

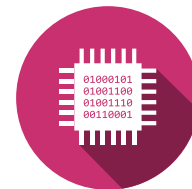
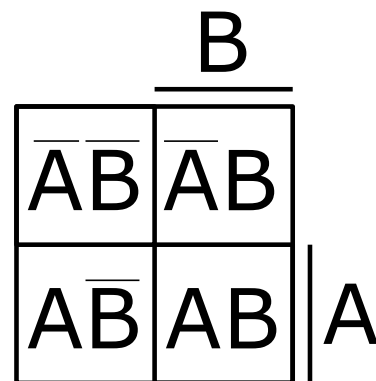
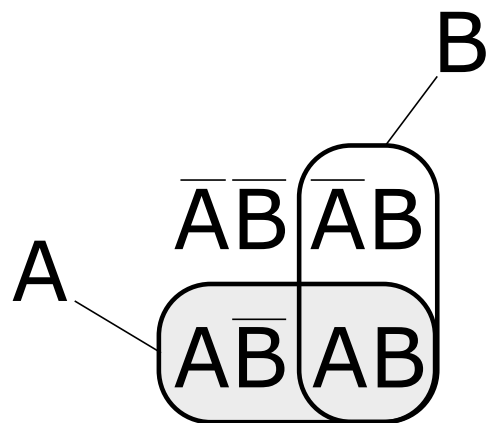


Table de Karnaugh à 3 variables

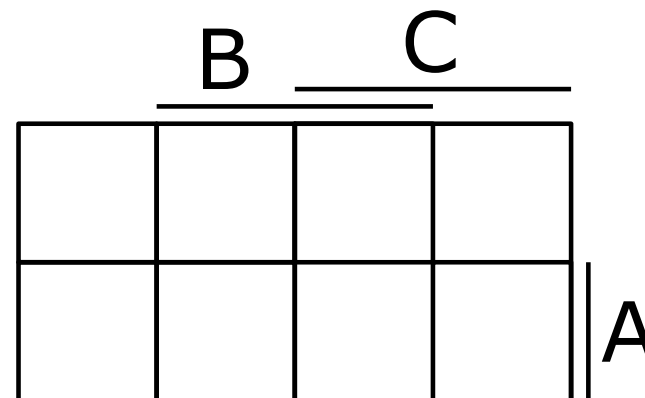
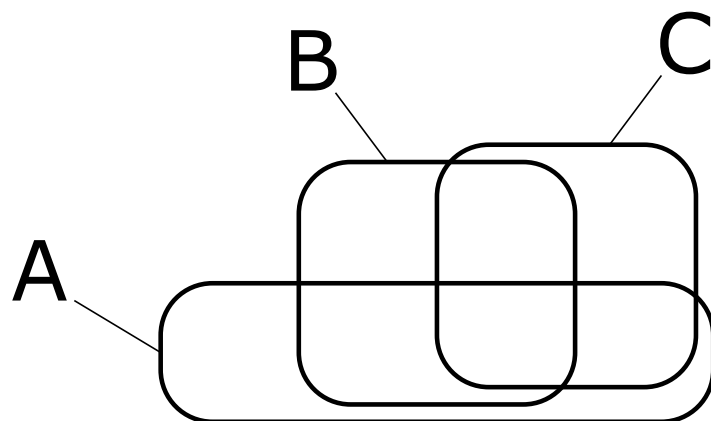
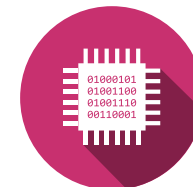


Table de Karnaugh à 4 variables

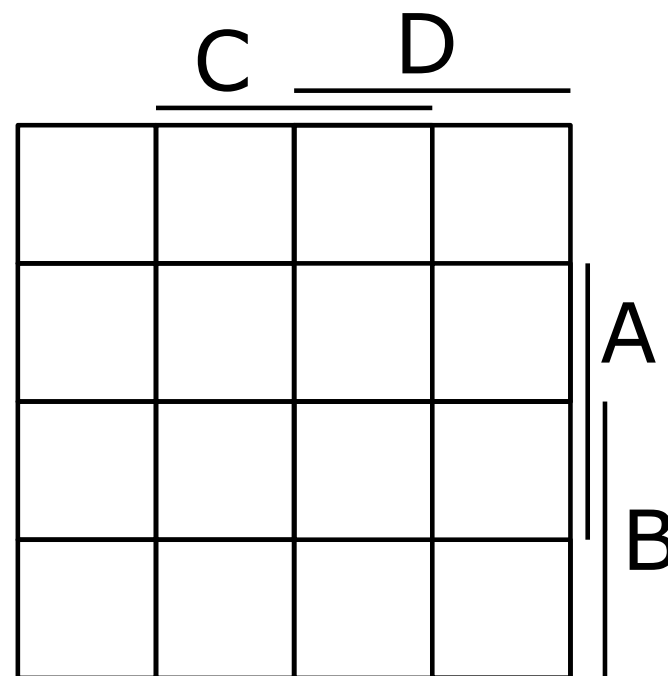
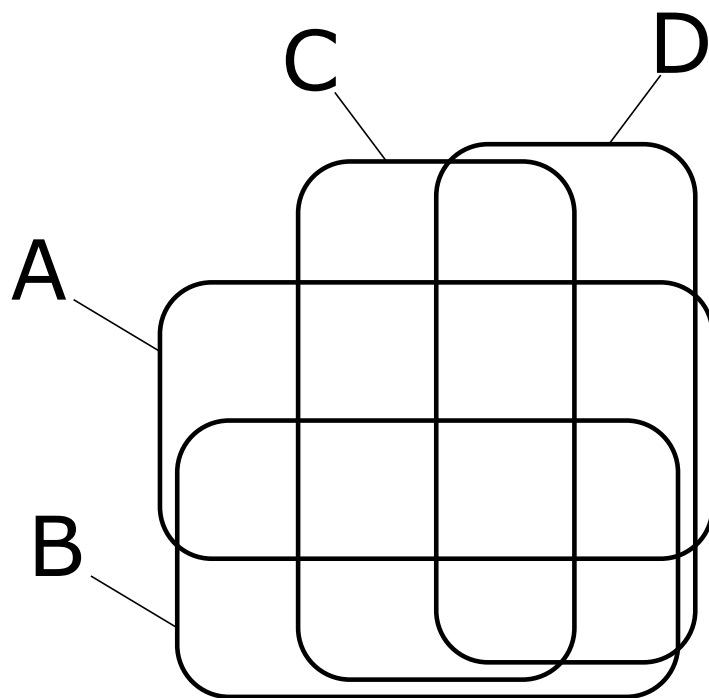
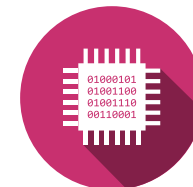
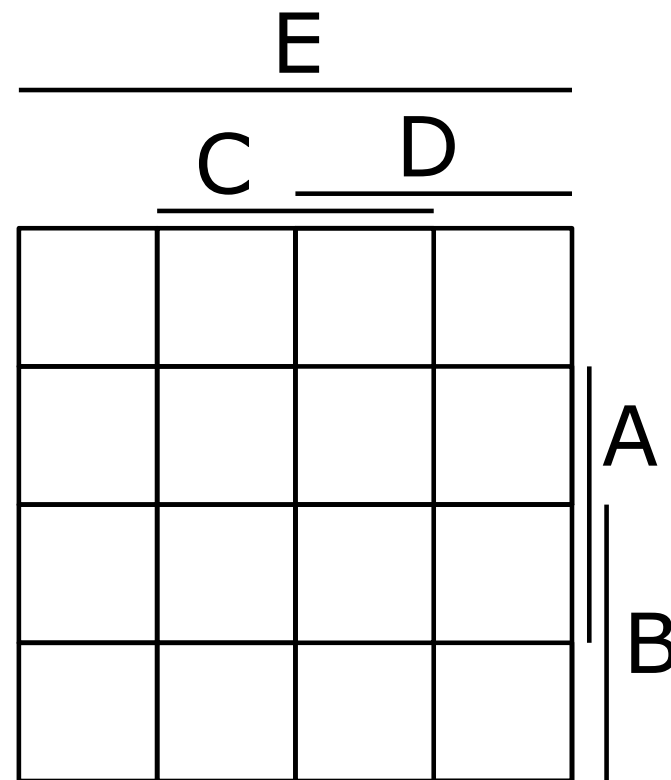
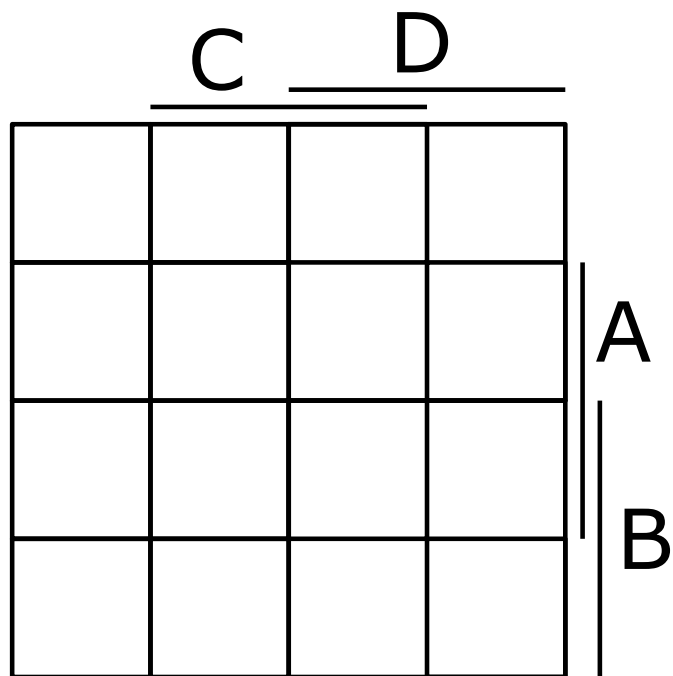
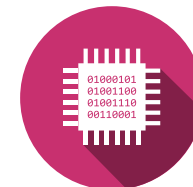
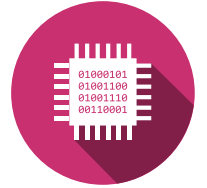


Table de Karnaugh à 5 variables



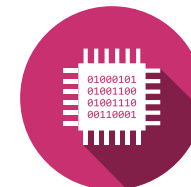
Contenu



- Tables de Karnaugh
- **Simplification sous forme de sommes de produits**
 - Monôme
 - Polynôme
 - Impliquant premier, impliquant premier essentiel
 - Simplification
 - Fonction incomplètement définie
- Simplification de fonctions OU-exclusif
- Fonctions avec un nombre élevé d'entrées

Table de Karnaugh

Monôme



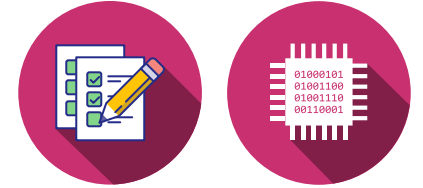
	<u>C</u>		<u>D</u>		
	0	0	0	0	
	0	0	0	0	A
	1	1	1	1	B
	0	0	0	0	

BA

	<u>C</u>		<u>D</u>		
	0	0	0	0	
	1	0	0	1	A
	0	0	0	0	B
	0	0	0	0	

CBA

Exercise 1.1

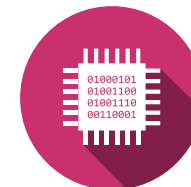


Représenter, dans une table de Karnaugh à 4 variables, les monômes suivants:

$$\begin{aligned}y_1 &= \bar{b}a \\y_2 &= \bar{d}\bar{a} \\y_3 &= \bar{d}cb \\y_4 &= dba \\y_5 &= \bar{c}\bar{b}\bar{a} \\y_6 &= dcb\bar{a}\end{aligned}$$

Table de Karnaugh

Polynôme



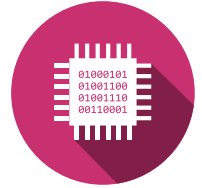
	C D		
	0	0	0
A	1	0	1
B	0	0	1
	0	0	1

$\overline{C}BA + DB$

	C D		
	0	0	0
A	0	1	1
B	1	1	1
	0	0	0

$BA + CA$

Exercise 1.3



Réprésenter, dans une table de Karnaugh à 4 variables, les polynômes suivants:

$$y_1 = \bar{b} + ac$$

$$y_2 = \bar{d} + \bar{a} + bc$$

$$y_3 = \bar{d}cb + d\bar{c}\bar{b}$$

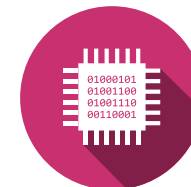
$$y_4 = db + ab$$

$$y_5 = \bar{c}\bar{b}\bar{a} + \bar{c}\bar{b}$$

$$y_6 = dcb\bar{a} + \bar{d}cb\bar{a}$$

Table de Karnaugh

Impliquant premier

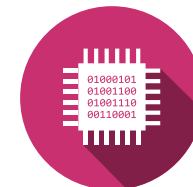


	<u>C</u>		<u>D</u>		
	0	0	0	0	
0	0	0	1	1	A
1	0	0	1	1	
	0	0	0	0	B
	0	0	0	0	

$DBA \subset DA$

Table de Karnaugh

Impliquant premier essentiel

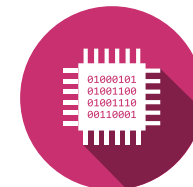


	<u>C</u>		<u>D</u>	
	0	0	1	0
1	1	1	1	0
0	0	1	1	1
0	0	1	0	0

CA

Table de Karnaugh

Impliquant premier essentiel

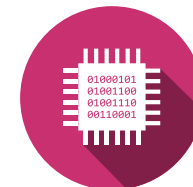


		C	D		
	A	0	0	1*	0
	B	1	1	1	0
		0	1	1	1
		0	1	0	0

CA

Table de Karnaugh

Impliquant premier essentiel

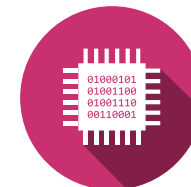


		C	D		
	A	0	0	1*	0
	B	1	1	1	0
		0	1	1	1*
		0	1	0	0

CA

Table de Karnaugh

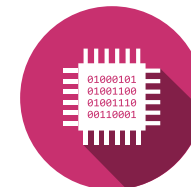
Impliquant premier essentiel



		C	D		
	A	0	0	1*	0
	B	1	1	1	0
	0	1	1	1*	
	1	1*	0	0	

Table de Karnaugh

Impliquant premier essentiel

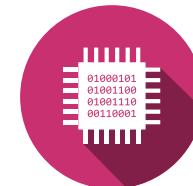


C		D		
0	0	1	1	
0	0	1*	0	A B
1*	1	1	0	
0	1	1	1*	
0	1*	0	0	

CA

Table de Karnaugh

Impliquant premier essentiel

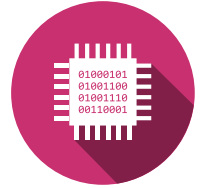


C		D		A B
0	0	1*	0	
1*	1	1	0	
0	1	1	1*	
0	1*	0	0	

~~CA~~

Table de Karnaugh

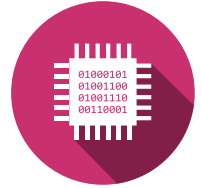
Déterminer l'équation polynomiale minimale



	C		D		
	0	0	1	0	
1	0	1	0	1	A B
1	0	0	0	0	
0	0	0	0	1	

Table de Karnaugh

Déterminer l'équation polynomiale minimale



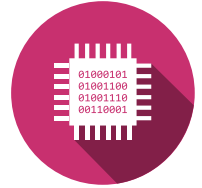
		C D		A B
		0	1	
0 1 1 0	0	0	1*	
	1	0	1	
	0	0	0	
	1	0	0	

$DC\overline{B}^*$

→ Recherche des impliquants premiers essentiels

Table de Karnaugh

Déterminer l'équation polynomiale minimale



	C		D		
	0	0	1*	0	
1	1	0	1	1	A B
1*	1*	0	0	0	
0	0	0	0	1	

$DC\bar{B} + D\bar{C}A^*$

→ Recherche des impliquants premiers essentiels

Table de Karnaugh

Déterminer l'équation polynomiale minimale



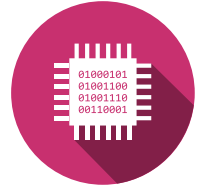
		C D		A B
		0	1	
0	0	0	1*	
	1	1	1	
	0	1*	0	
	1	0	0	
1	0	0	0	
	1	0	0	
	0	0	0	
	1	0	1*	

$$DC\bar{B}^* + \bar{D}\bar{C}A^* + DC\bar{B}A^*$$

→ Recherche des impliquants premiers essentiels

Table de Karnaugh

Déterminer l'équation polynomiale minimale



	C		D		
	0	0	1*	0	
1	1	0	1	1	A
1*	1*	0	0	0	B
0	0	0	0	1*	

$$DC\bar{B}^* + \bar{D}\bar{C}A^* + DC\bar{B}A^* + D\bar{B}A$$

→ Recherche des impliquants premiers essentiels puis des impliquants premiers restants

Table de Karnaugh

Déterminer l'équation polynomiale minimale

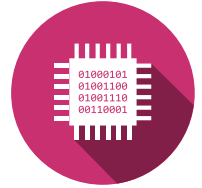


	C		D		
	0	0	1*	0	
1	1	0	1	1	A
1*	1*	0	0	0	B
0	0	0	0	1*	

$$DC\bar{B}^* + \bar{D}\bar{C}A^* + DC\bar{B}A^* + D\bar{B}A + \bar{C}BA$$

→ Recherche des impliquants premiers essentiels puis des impliquants premiers restants

Exercise 3.1

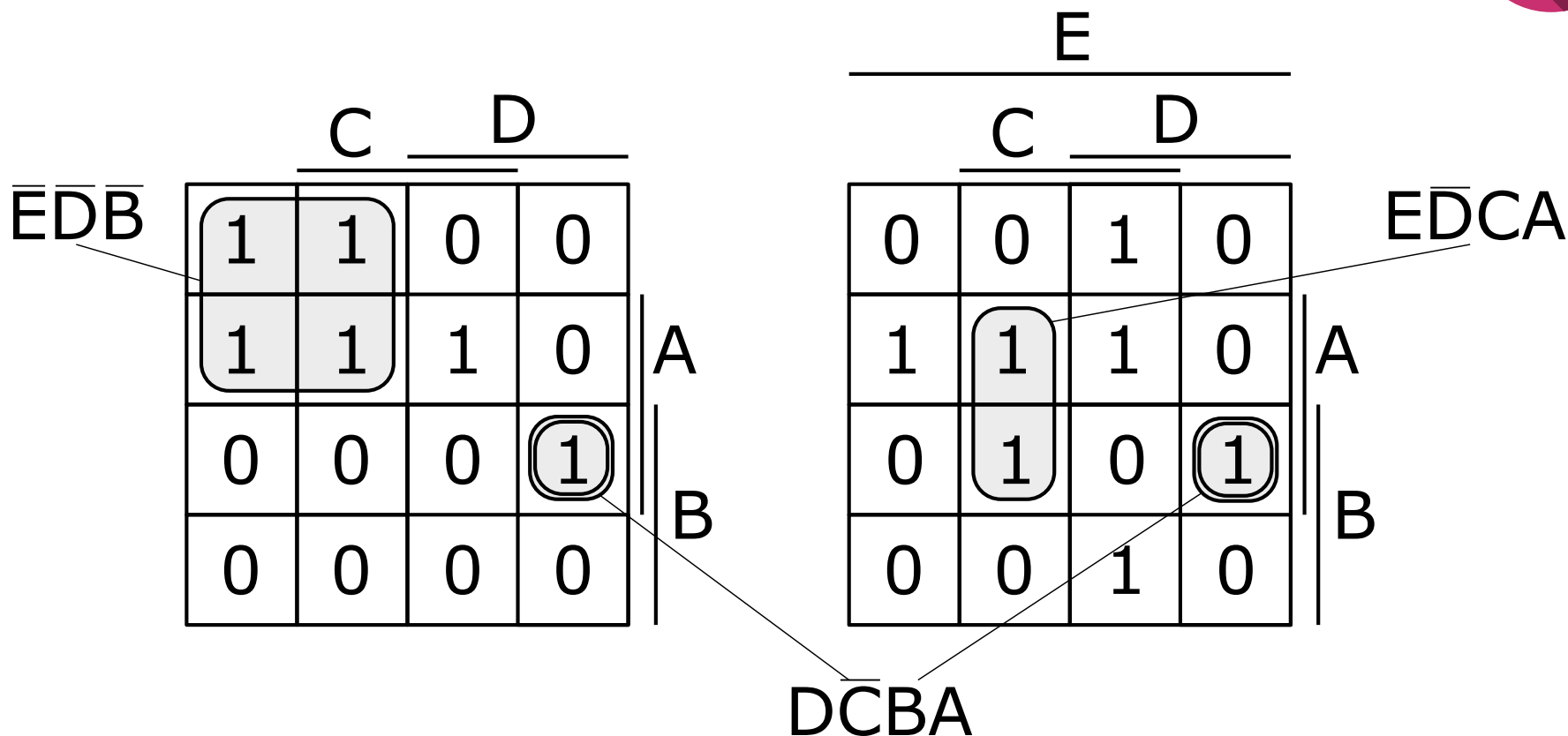
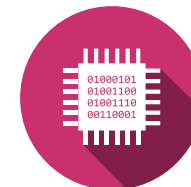


Déterminer la forme polynomiale minimale d'une table de Karnaugh à 4 variables

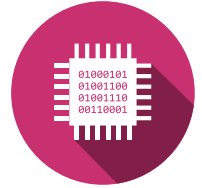
	C		D		
	1	0	0	1	
1	1	0	1	1	A
0	1	0	0	0	
1	1	1	1	1	B
0					

Table de Karnaugh

Simplification avec 5 variables



Exercise 3.2



Forme polynomiale minimal d'une table de Karnaugh à 5 variables

1	1	0	0
1	1	1	0
0	0	0	1
0	0	0	0

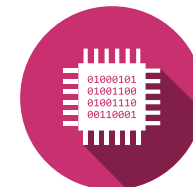
E			
C		D	
0	0	1	0
1	1	1	0
0	1	0	1
0	0	1	0

A

B

Table de Karnaugh

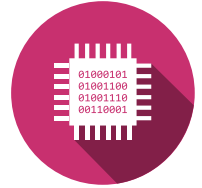
Fonction incomplètement définie



		C D		
	A	1	0	B
		1	0	
		1	1	
		1	0	

$$\bar{C} + \bar{B}\bar{A} + BA$$

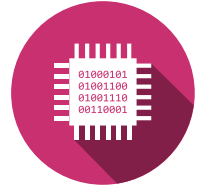
Exercice 3.11



Déterminer l'expression polynomiale minimale de la fonction majorité à 4 entrées

- Plus que le moitié à '0' => '0'
- Plus que la moitié à '1' => '1'
- Même nombre de '0' et '1' le sortie est indéfinie

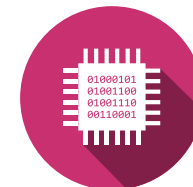
Contenu



- Tables de Karnaugh
- Simplification sous forme de sommes de produits
- **Simplification de fonctions OU-exclusif**
 - Représentation
 - Simplification
- Fonctions avec un nombre élevé d'entrées

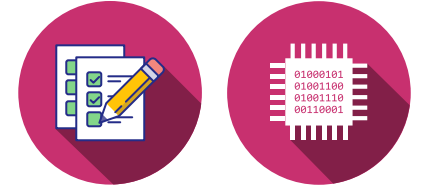
Table de Karnaugh

Représentation d'un Ou-exclusif (XOR)



		C		D		
	A	0	1	1	0	B
		0	1	0	1	
		1	0	1	0	
		1	0	0	1	
		$\bar{C} \oplus \bar{B} \oplus DA$				

Exercise 5.1



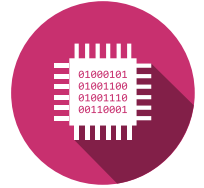
Représentation de fonctions XOR (utilisez des tables de Karnaugh avec 4 entrées)

$$a \oplus b$$

$$a \oplus b \oplus c$$

Table de Karnaugh

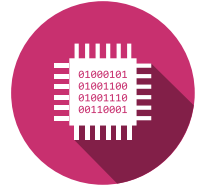
Simplification sous forme de Ou-exclusif (XOR)



	C		D		
	0	1	1	1	
0	0	0	1	0	A B
1	1	1	1	0	
0	0	1	1	1	
1	1	0	0	1	

Table de Karnaugh

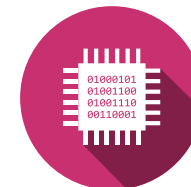
Simplification sous forme de Ou-exclusif (XOR)



	C		D		
	0	1	1	1	
	0	0	1	0	A
	1	1	1	0	B
B	0	1	1	1	

Table de Karnaugh

Simplification sous forme de Ou-exclusif (XOR)

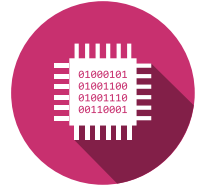


		C		D		
	0	1	1	1	A	
	0	0	1	0		
	1	1	1	0		
	0	1	1	1		
						B

$B \oplus \overline{B}D$

Table de Karnaugh

Simplification sous forme de Ou-exclusif (XOR)

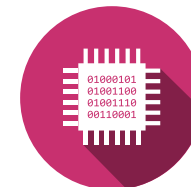


	C		D		
	0	1	1	1	
	0	0	1	0	A
	1	1	1	0	B
	0	1	1	1	

$$B \oplus \bar{B}D \oplus D\bar{C}A$$

Table de Karnaugh

Simplification sous forme de Ou-exclusif (XOR)

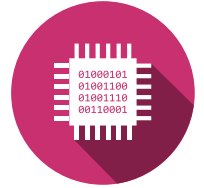


	C		D		
	0	1	1	1	
0	0	0	1	0	A
1	1	1	1	0	
	0	1	1	1	B

$$B \oplus \bar{B}D \oplus D\bar{C}A \oplus \bar{D}B\bar{A}$$

Table de Karnaugh

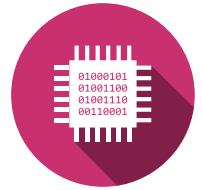
Simplification sous forme de Ou-exclusif (XOR)



	C		D		
	0	1	1	1	
0	0	0	1	0	A
1	1	1	1	0	B
	0	1	1	1	

$$B \oplus \bar{B}D \oplus D\bar{C}A \oplus \bar{D}B\bar{A} \oplus \bar{D}C\bar{A}$$

Contenu



Tables de Karnaugh

Simplification sous forme de sommes de produits

Simplification de fonctions OU-exclusif

Fonctions avec un nombre élevé d'entrées

Simplification algébrique

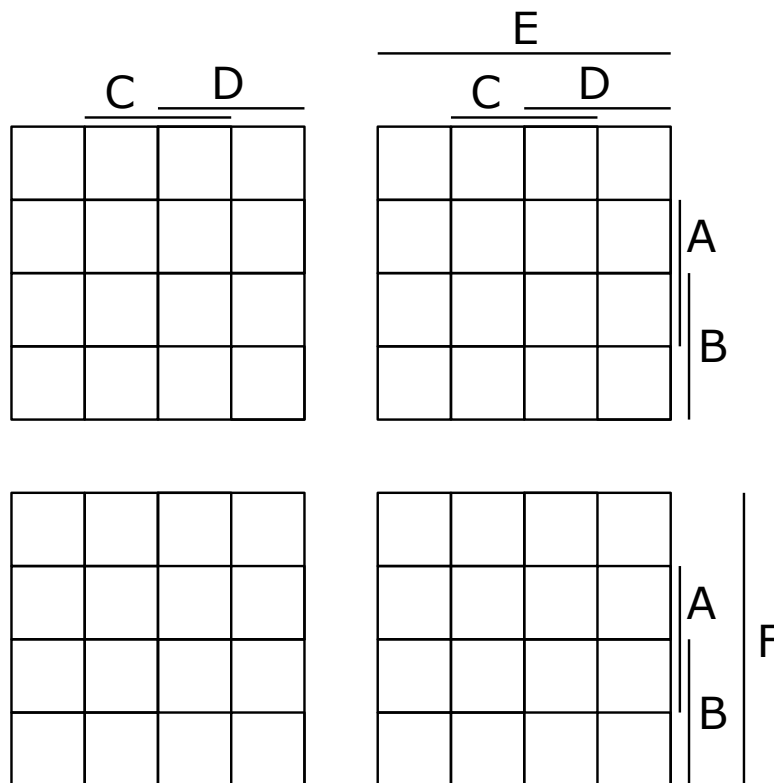
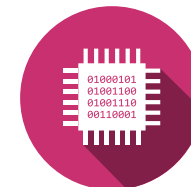
Réduction en blocs de taille maîtrisable

Systèmes itératifs

Table de Karnaugh

Fonctions avec un nombre élevé d'entrées

Fonction à 6 entrées



DiD KAR

Table de Karnaugh

Décomposition par blocs

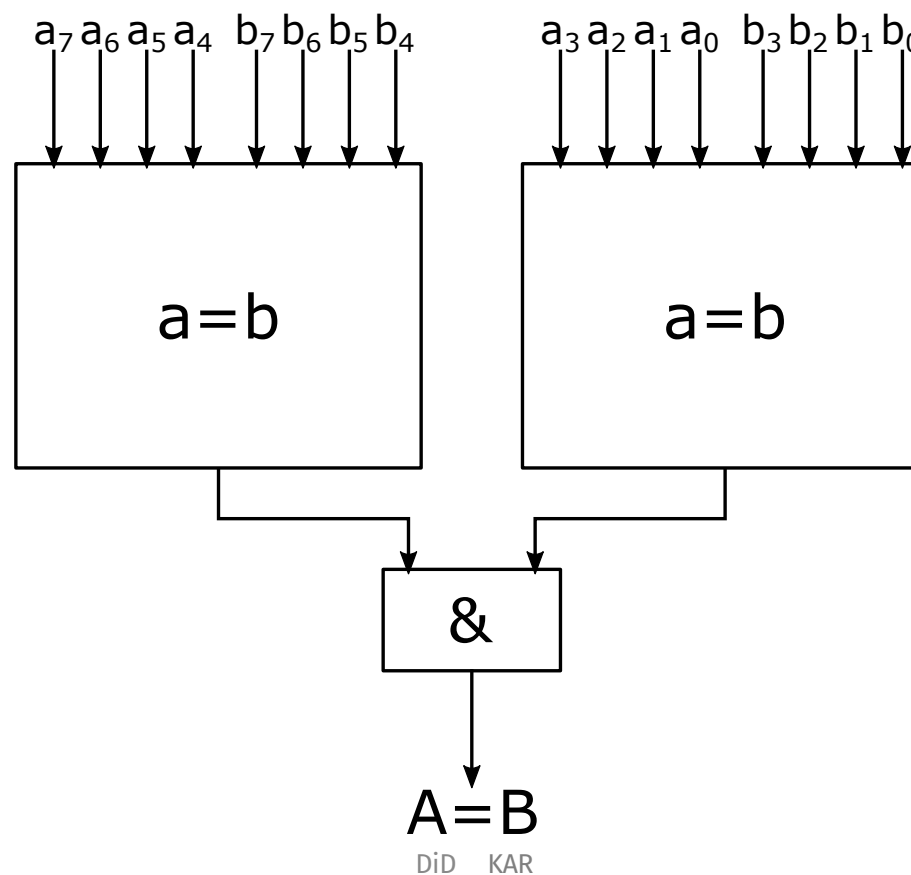
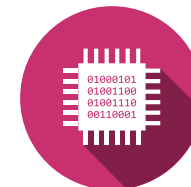


Table de Karnaugh

Décomposition par blocs

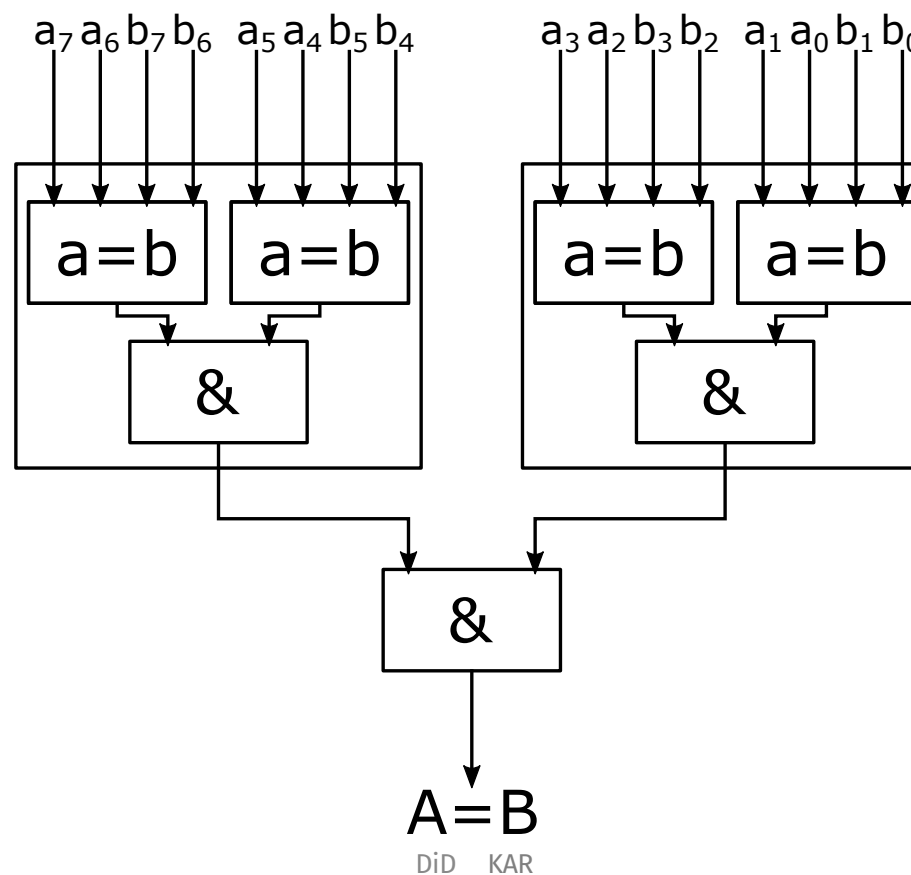
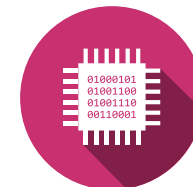


Table de Karnaugh

Décomposition par blocs

A=B, 2x2 Bits

	$\overline{b_0} \quad b_1$		
	$\overline{b_0}$	b_1	
a_0	1	0	0
a_1	0	1	0
	0	0	1
	0	0	1

$$\overline{a_0}\overline{b_0}\overline{a_1}\overline{b_1} + \overline{a_0}\overline{b_0}\overline{a_1}b_1 + \overline{a_0}\overline{b_0}a_1b_1 + a_0b_0\overline{a_1}\overline{b_1} + a_0b_0\overline{a_1}b_1 + a_0b_0a_1\overline{b_1} + a_0b_0a_1b_1$$

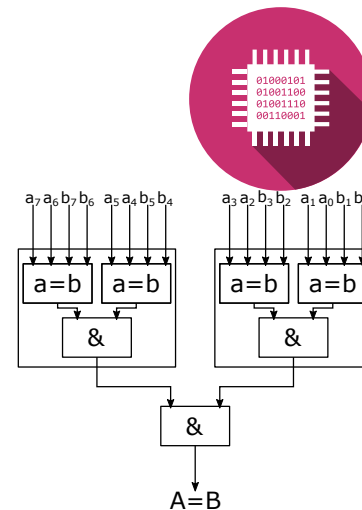
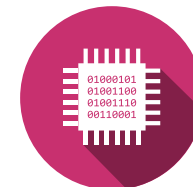


Table de Karnaugh

Simplification algébrique



Comparaison de nombres, algébriquement

$$A = a_7 * 2^7 + a_6 * 2^6 + \dots + a_1 * 2^1 + a_0 * 2^0$$

$$B = b_7 * 2^7 + b_6 * 2^6 + \dots + b_1 * 2^1 + b_0 * 2^0$$

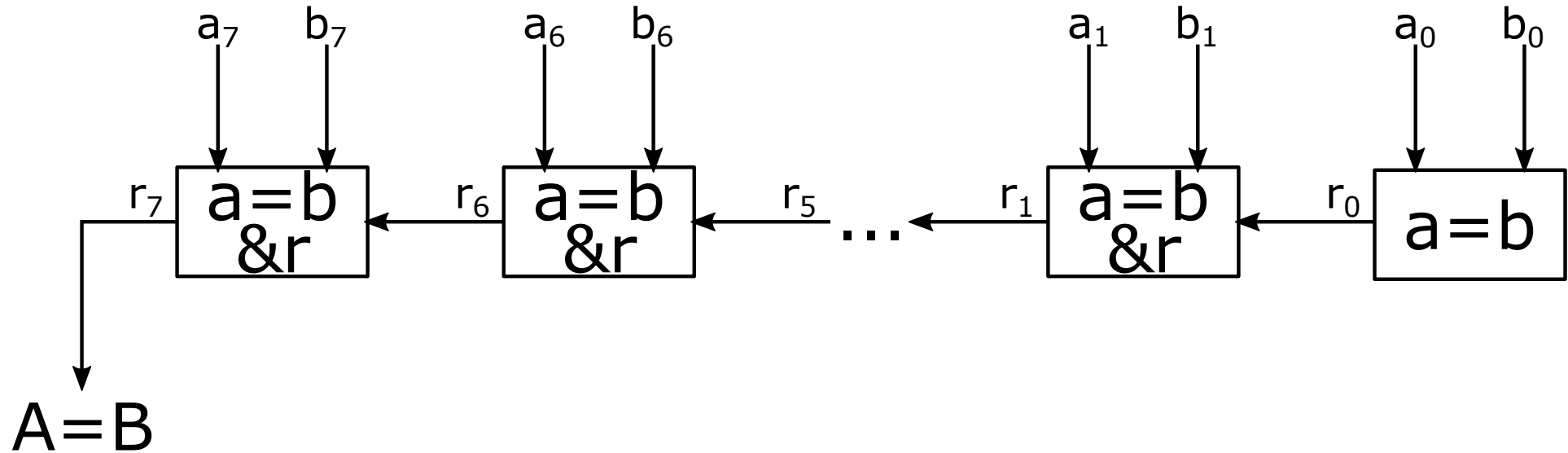
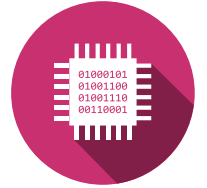
$$A = B \Leftrightarrow (a_7 = b_7) * (a_6 = b_6) * \dots * (a_1 = b_1) * (a_0 = b_0)$$

$$A = B \Leftrightarrow \overline{(a_7 \oplus b_7)} * \overline{(a_6 \oplus b_6)} * \dots * \overline{(a_1 \oplus b_1)} * \overline{(a_0 \oplus b_0)}$$

$$A = B \Leftrightarrow (a_7 b_7 + \overline{a_7} \overline{b_7}) * (a_6 b_6 + \overline{a_6} \overline{b_6}) * \dots * (a_1 b_1 + \overline{a_1} \overline{b_1}) * (a_0 b_0 + \overline{a_0} \overline{b_0})$$

Table de Karnaugh

Système itératif



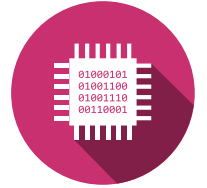


Table de Karnaugh

Système itératif

Bloc itératif

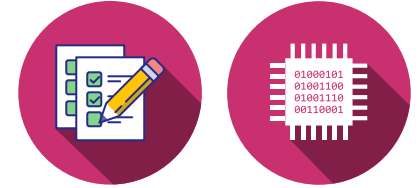
b_i		a_i		
0	1	0	1	
0	0	0	0	r_{i-1}
1	0	1	0	
$\overline{a_i} \overline{b_i} r_{i-1} + a_i b_i r_{i-1}$				

Premier bloc différent des autres: $r_0 = \overline{a_0} * \overline{b_0} + a_0 * b_0$

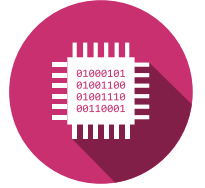
Premier bloc comme les autres: $r_{-1} = 1$

Exercise 6.1

Comparaison de nombre ($A > B$)



Références



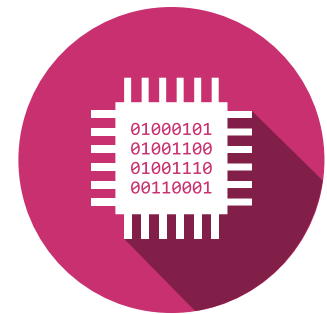
- [Man78] (français) Bonne présentation
- [Toc92] (français) Exemples complets
- [Max95] (anglais) Facile à lire
- [Wak00] (anglais) Bonne explication Karnaugh + algorithmes
- [Fle80] (anglais) Algorithmes de simplification
- [Kat94] (anglais) Algorithmes de simplification



Hes·so  **VALAIS
WALLIS**



Haute Ecole d'Ingénierie
Hochschule für Ingenieurwissenschaften



Silvan Zahno silvan.zahno@hevs.ch
Christophe Bianchi christophe.bianchi@hevs.ch
François Corthay francois.corthay@hevs.ch