

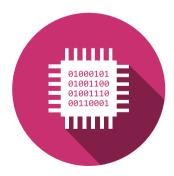


Digitales Design (DiD)

Numerische Darstellung und Codes NUM

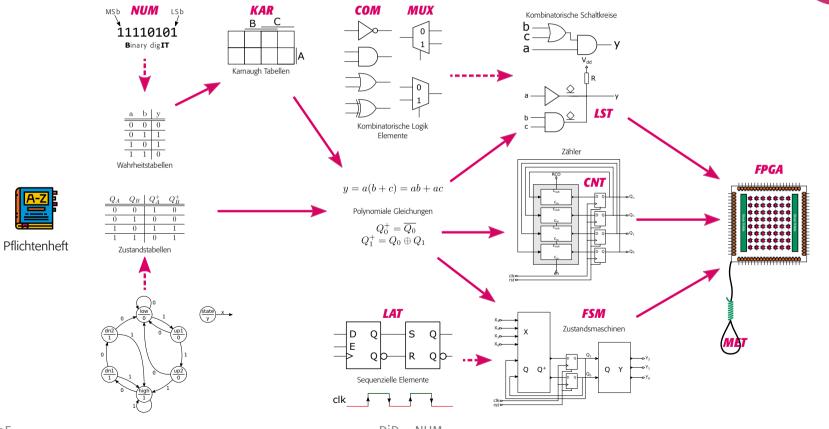
Studiengang Systemtechnik Studiengang Energie und Umwelttechnik Studiengang Informatik und Kommunikationssysteme

Silvan Zahno <u>silvan.zahno@hevs.ch</u> Christophe Bianchi <u>christophe.bianchi@hevs.ch</u> François Corthay <u>francois.corthay@hevs.ch</u>



Aktueller Inhalt des Themas im Kurs





ZaS, BiC, CoF DiD NUM

Inhalt

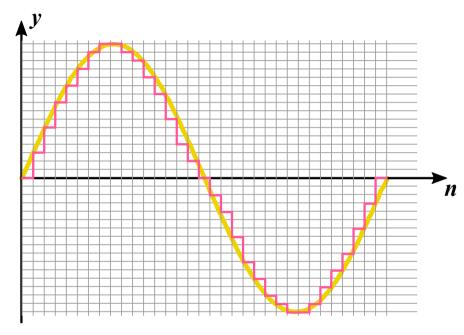


Zahlensysteme

- Dezimalsystem
- Binärsystem
- Hexadezimalsystem
- Umwandlung von Zahlensystemen
- Operationen auf Logikzahlen
- Codes
- Darstellung von Arithmetischen Zahlen (Vorzeichenbehaftet)

Wechsel von Analog zu Digital



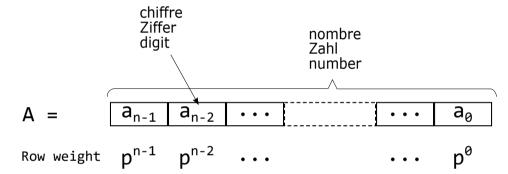


- Diskrete Zeiten und Amplituden
- Frequenzabhängiges Zeitintervall
- n: Stichprobennummer (z.B. 32 Stichproben über den Zeitraum)
- y: Signalamplitude (Beispiel: 32 mögliche Werte)

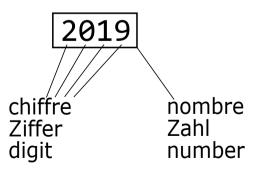
Allgemeine Darstellung von Ganzen Zahlen



Nach dem Positionsnummernsystem besteht eine Zahl aus Ziffern



In der Basis 10, p=10



Dezimalsystem



Im Allgemeinen verwendet der Mensch die Basis 10

10 Symbole: 0,1,2,3,4,5,6,7,8 und 9

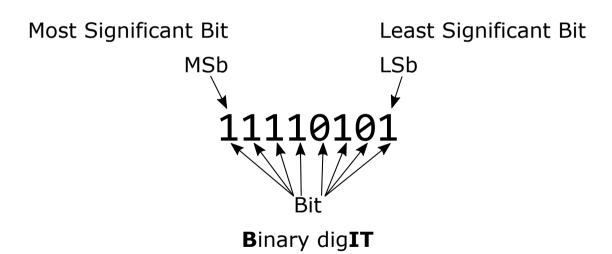
Jede Position entspricht einer Potenz von 10 ⇒1,10,100,1000,...

Beispiel: $245_{10} = 2*10^2 + 4*10^1 + 5*10^0$

Binärsystem

Das BIT

- Computer arbeiten in Basis 2
- 2 Symbole: 0 und 1
- Eine Binärzahl (0/1) wird ein BIT (Binary digIT) genannt



• Beispiel: 11110101₂=1*2⁷+1*2⁶+1*2⁵+1*2⁴+0*2³+1*2²+0*2¹+1*2⁰



Binärsystem

Das Byte

- 8 BIT bilden ein Byte (octet)
 - Rein historisch
- Using IEC standard:
 - 1 KiB = 1'024 bytes (Note: big K)
 - 1 MiB = 1'024 KiB = 1'048'576 bytes
 - 1 GiB = 1'024 MiB = 1'048'576 KiB = 1'073'741'824 bytes
- Using SI standard:
 - 1 kB = 1'000 bytes (Note: small k)
 - 1 MB = 1'000 kB = 1,000,000 bytes
 - 1 GB = 1'000 MB = 1'000'000 KB = 1'000'000'000 bytes



11110101

8 Bit = 1 Byte

Hexadezimalsystem



- 16 Symbole
- 2er Potenz (16 = 2⁴)
 Bit-Gruppierung von 4
- Ermöglicht das Schreiben von Binärzahlen
- in kompakter Form

Decimal	Hexadecimal	Binary
0	0	0000
1	1	0001
2	2	0010
3	3	0011
4	4	0100
5	5	0101
6	6	0110
7	7	0111
8	8	1000
9	9	1001
10	А	1010
11	В	1011
12	С	1100
13	D	1101
14	E	1110
15	F	1111

Schreibweisen



- Dezimal
 - 9₁₀, 9_d
- Binär
 - 0b1001, 1001₂, 1001_b
- Hexadezimal
 - $0x9, 9_{16}, 9_h$

Inhalt



- Zahlensysteme
- Umwandlung von Zahlensystemen
 - Binär ⇒ Dezimal
 - Dezimal ⇒ Binär
 - Hexadezimal ⇒ Binär
 - Binär ⇒ Hexadezimal
 - Hexadezimal ⇒ Dezimal
 - Dezimal ⇒ Hexadezimal
- Operationen auf Logikzahlen
- Codes
- Darstellung von Arithmetischen Zahlen (Vorzeichenbehaftet)

Binär ⇒ Dezimal



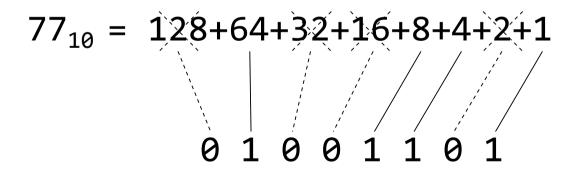
Addition der Gewichte der Positionen (2er-Potenz), bei denen es eine 1 gibt

$$2^{7} 2^{6} 2^{5} 2^{4} 2^{3} 2^{2} 2^{1} 2^{0}$$
 $1 1 1 1 0 1 0 1$
 $128+64+32+16+4+1 = 245_{10}$

Dezimal ⇒ Binär (kleine Zahlen)



- Suchen Sie nach den zu berücksichtigenden 2er-Potenzen, so dass die Summe die angegebene Dezimalzahl ergibt.
- Ausgehend von höherwertigen Bits



Dezimal ⇒ Binär (grosse Zahlen)

- Wiederholen Sie die Division durch 2 der angegebenen Dezimalzahl, bis der Quotient 0 ist. 245 / 2 = 122 + remainder 1
- Der Rest jeder Division ergibt ein zusätzliches Bit der Zahl, beginnend mit dem niederwertigsten Bit.



```
245 / 2 = 122 + remainder 1

122 / 2 = 61 + remainder 0

61 / 2 = 30 + remainder 1

30 / 2 = 15 + remainder 0

15 / 2 = 7 + remainder 1

7 / 2 = 3 + remainder 1

3 / 2 = 1 + remainder 1

1 / 2 = 0 + remainder 1

245<sub>10</sub> = 11110101<sub>2</sub>
```

Aufgabe





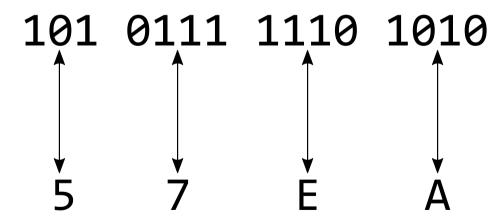
- 3.1.c) Führen Sie die Umwandlung der folgenden reinen Binärzahl durch :
- \Box 01001010₂ = ?₁₀

- 3.2.a) Führen Sie folgende Dezimalzahl-Konvertierung durch :
- \Box 125₁₀ = ?₂

Hexadezimal ⇒ Binär



 Gruppierung der Bits in Vierergruppen, beginnend mit dem niedrigstwertigen Bit und Umwandlung dieser Vierergruppen in ihr hexadezimales Äquivalent



Aufgabe





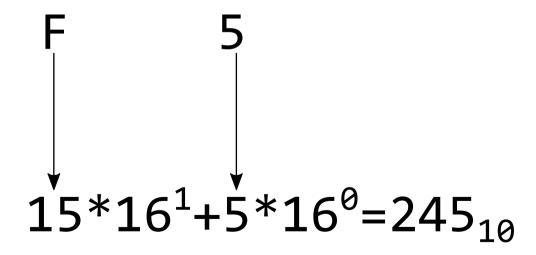
- 3.4.c) Führen Sie die Umwandlung der folgenden reinen Binärzahl durch :
- \Box 11101011₂ = ?₁₆

- 3.3.c) Führen Sie die Konvertierung der folgenden hexadezimalen Zahl durch :
- \Box AB3D₁₆ = ?₂

Hexadezimal ⇒ Dezimal



 Addition der Produkte, die durch jede hexadezimale Ziffer gebildet werden, und ihr entsprechendes Positionsgewicht



Dezimal ⇒ Hexadezimal



- Wiederholen Sie die Division der angegebenen Dezimalzahl durch 16, bis der Quotient 0 ist.
- Die hexadezimale Zahl besteht dann aus den aufeinanderfolgenden Resten der einzelnen Teilungen, wobei der erste gefundene Rest der Ziffer mit niedrigem Gewicht und der letzte Rest der Ziffer mit hohem Gewicht entspricht.

245 / 16 = 15 + remainder 5
$$\longrightarrow$$
 15 / 16 = 0 + remainder 15 \longrightarrow 245₁₀ = F5₁₆

Inhalt



- Zahlensysteme
- Umwandlung von Zahlensystemen
- Operationen auf Logikzahlen
 - Addition
 - Subtraktion
 - Multiplikation
- Codes
- Darstellung von Arithmetischen Zahlen (Vorzeichenbehaftet)

Addition Binärer Zahlen



- Wie im Dezimalsystem: von LSb nach MSb mit Fortschreibung des Übertrages in der nachfolgenden Spalte
- Max. 1 zusätzliches Bit

Subtraktion Binärer Zahlen



 Wie im Dezimalsystem: von LSb nach MSb mit Propagierung der Anfrage an die folgende Spalte

• Subtraktion auch mit Addition möglich 11-4 = 11+(-4)

Aufgabe





- 4.1.b) Führen Sie die folgende Operation im Binärsystem durch :
- \square 00001111₂ + 01011010₂

- 4.2.c) Führen Sie die folgende Operation im Binärsystem durch :
- \square 00110100₂ 00101000₂

Multiplikation Binärer Zahlen



• Wie im Dezimalsystem: durch partielle Multiplikationen und Additionen. Partielle Multiplikationen sind im Binärsystem auf Verschiebungen nach links vom ersten Multiplikator beschränkt.

11	1011	1 st multiplier
x 13	x 1101	2 nd multiplier
143	00000000	Initialisation
	+ 1011	
	00001 <mark>0</mark> 11	1 st product
	+ 0000	Multiplier shift
	00001 <mark>0</mark> 11	2 nd product
	+ 1011	Multiplier shift
	00110111	3 rd product
	+ 1011	Multiplier shift
	10001111	Result

Inhalt



- Zahlensysteme
- Umwandlung von Zahlensystemen
- Operationen auf Logikzahlen

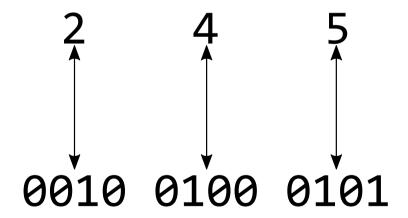
Codes

- Binär Codierte Dezimalzahlen (BCD)
- Gray Code
- Darstellung von Arithmetischen Zahlen (Vorzeichenbehaftet)

Binär Codierte Dezimalzahlen (BCD)



- Jede Stelle einer Dezimalzahl wird durch ihr binäres Äquivalent dargestellt
- Es braucht 4 Bits, um jede Dezimalstelle von 0 bis 9 zu kodieren.
- Einsatz für Displaysysteme



Komplexere Arithmetik!

Gray code



- Ein besonderer linearer Code, der so gestaltet ist, dass sich beim Wechsel von einem Wort zum nächsten nur eine Ziffer der Zahl ändert.
- Reflektierter Graybinärcode
- Einsatz bei Positionsgebern

$$b_3 = g_3$$

 $b_2 = b_3 \oplus g_2 = g_3 \oplus g_2$
 $b_1 = b_2 \oplus g_1 = g_3 \oplus g_2 \oplus g_1$
 $b_0 = b_1 \oplus g_0 = g_3 \oplus g_2 \oplus g_1 \oplus g_0$

$$g_3 = b_3$$

$$g_2 = b_3 \oplus b_2$$

$$g_1 = b_2 \oplus b_1$$

$$g_0 = b_1 \oplus b_0$$

Decimal	Binary	Gray	
0	0000	0000	
1	0001	0001	Mirror
2	0010	0011	MILLOL
3	0011	0010	Mirror
4	0100	0110	MILLOI
5	0101	0111	
6	0110	0101	
7	0111	0100	Mirror
8	1000	1100	MILLOL
9	1001	1101	
10	1010	1111	
11	1011	1110	
12	1100	1010	
13	1101	1011	
14	1110	1001	
15	1111	1000	

Gray code



0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1

0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0
0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0
0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1

Inhalt



- Zahlensysteme
- Umwandlung von Zahlensystemen
- Operationen auf Logikzahlen
- Codes
- Darstellung von Arithmetischen Zahlen (Vorzeichenbehaftet)
 - Vorzeichen-Grösse
 - Biased Notation
 - Einer-Komplement (1st-Complement)
 - Zweier-Komplement (2nd-Complement)

Vorzeichen-Grösse



- Positive Zahlen = logische Zahlen
- Positive oder negative Zahlen = arithmetische Zahlen
- der Zahl ein Bit voranstellen, dessen Wert z.B. 0 ist, wenn das Vorzeichen positiv ist und 1, wenn das Vorzeichen negativ ist.

S

+1	0	0	0	0	0	0	0	1
-1	1	0	0	0	0	0	0	1

$$-(2^{n-1}-1) \le A \le 2^{n-1}-1$$

 $-7 \le A \le 7$ n=4

Aber ... doppelte Darstellung der 0

Biased-Notation



• Kodierung einer positiven oder negativen ganzen Zahl A als eine Zahl N, so dass N=A+R, wobei $R=2^{n-1}-1$ eine positive Vorspannung ist, die so gewählt wird, dass N immer positiv ist.

Representation	Min		•••		Zero			Мах
Shift decimal	0	1		126	127	128	254	255
Decimal	-127	-126		-1	0	1	127	128
Shift binary	00000000	00000001		01111110	01111111	10000000	11111110	11111111

$$-(2^{n-1}-1) \le A \le 2^{n-1}$$

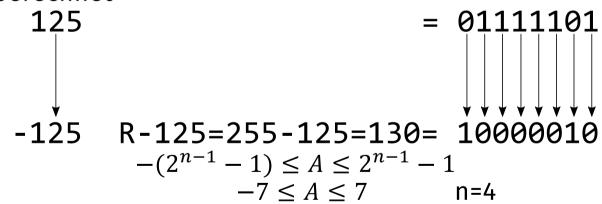
-7 \le A \le 8 \qquad n=4

- Eine einzige Darstellung der 0
- Aber ... nicht-ideale Darstellung von positiven Zahlen (≠ binäre Darstellung der logischen Zahl), in der Praxis nicht verwendet

1st-Komplement



- voreingenommene Darstellung, aber nur auf negative Zahlen angewandt
- positive Zahlen bleiben unverändert
- $R = 2^n 1$
- das Komplement zu 1 wird sehr einfach durch logische Negation aller Bits der Zahl berechnet



- Aber ... doppelte Darstellung der 0
- In der Praxis wenig genutzt

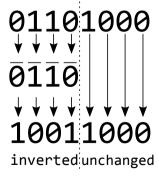
2nd-Komplement



- Wie Einer-Komplement aber mit $R=2^n$, also Einer-Komplement +1.
- das Zweier-Komplement wird sehr einfach berechnet, indem man die Zahl von rechts nach links durchsucht, indem man folgende Regel anwendet: alle Bits, die bis und mit der ersten 1 gefunden werden, werden behalten, alle weitere werden invertiert.

$$-(2^{n-1}-1) \le A \le 2^{n-1}$$

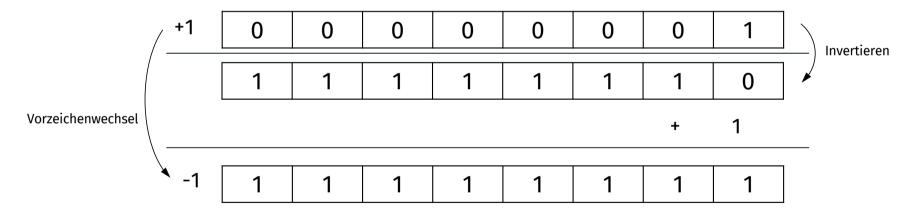
 $-8 \le A \le 7$ n=4



2nd-Komplement



- Extrem einfach für Addition und Subtraktion
- Vorzeichenwechsel



2nd-Komplement Bereich

```
6
               0
           0
           0
               0
                       +3
                       +2
       0
           0
                       +1
                       +0
               0
```



ZaS, BiC, CoF DiD NUM 38

Aufgabe





• 6.1.d) Geben Sie Darstellung in Vorzeichen-Amplitude, 1-Komplement und 2-Komplement über acht Bits der folgenden dezimalen und reinen Binärzahlen zu geben :

1 00011010₂

□ -104₁₀

Referenzen



- [Max95] (englisch) Numerierungssysteme
- [Alm89] (englisch) Beispiele Operationen
- [Wak00] (englisch) Beispiele Operationen, Multiplikation
- [Beu01] (deutsch) Beispiele Operationen
- [Die88] (englisch) Beispiele Operationen

WHY ARE THERE MIRRORS ABOVE BEDS

WHY DO I SAY WHY IS SEA SALT BETTER IN

WHY IS THERE NOT A POKEMON MMO WHY IS THERE LAUGHING IN TV SHOWS ARE THERE DOORS ON THE FREEWAY ARE THERE SO MANY SVCHOST-EXE RUNNING AREN'T ANY COUNTRIES IN ANTARCTICA WHY ARE THERE SCARY SOUNDS IN MINECRAFT WHY IS THERE KICKING IN MY STOMACH WHY ARE THERE TWO SLASHES AFTER HTTP WHY ARE THERE CELEBRITIES WHY DO SNAKES EXIST WHY DO OYSTERS HAVE PEARLS WHY ARE DUCKS CALLED DUCKS WHY DO THEY CALL IT THE CLAP WHY IS THERE AN ARROW ON AANG'S HEAD X WHY ARE TEXT MESSAGES BLUE WHY ARE THERE MUSTACHES ON CLOTHES WHY WUBA LUBBA DUB DUB MEANING IS THERE A WHALE AND A POT FALLING WHY ARE THERE SO MANY BIRDS IN SWISS WHY IS THERE SO LITTLE RAIN IN WALLIS WHY IS WALLIS WEATHER FORECAST ALWAYS WRONG

WHY HAVE DINOSAURS NO FUR WHY ARE SWISS AFRAID RWHY IS THERE A LINE THROUGH HI TO WHY IS THERE A RED LINE THROUGH HTTPS ON TWITTER

WHY AREN'T MY ARMS GROWING WHY ARE THERE SO MANY CROWS IN ROCHESTER & WHY IS TO BE OR NOT TO BE FUNNY

WHY DO CHILDREN GET CANCER 🗢

WHY IS POSEIDON ANGRY WITH ODYSSEUS

WHY AREN'T ECONOMISTS RICH WHY DO AMERICANS CALL IT SOCCER & WHY ARE MY EARS RINGING WHY IS 42 THE ANSWER TO EVERYTHING WHY CAN'T NOBODY ELSE LIFT THORS HAMMER S **SWHY IS THERE ICE IN SPACE** WHY IS MARVIN ALWAYS SO SAD

WHY IS SPACE BLACK WHY IS OUTER SPACE SO COLD WHY ARE THERE PYRAMIDS ON THE MOON WHY IS NASA SHUTTING DOWN A

THERE MALE AND FEMALE BIKES E WHY ARE THERE TINY SPIDERS IN MY HOUSE ' DO SPIDERS COME INSIDE

WHY ARE THERE HUGE SPIDERS IN MY HOUSE $_{
m H}$ WHY ARE THERE LOTS OF SPIDERS IN MY HOUSE $\overline{oldsymbol{\lambda}}$ 为WHY ARE THERE SO MANY SPIDERS IN MY ROOM

SPYDER BITES ITCH

WHY ARE THERE **GHOSTS**



WHY IS THERE AN OWL IN MY BACKYARD WHY IS THERE AN OWL OUTSIDE MY WINDOW WHY IS THERE AN OWL ON THE DOLLAR BILL WHY DO OWLS ATTACK PEOPLE WHY ARE FPGA'S EVERYWHERE WHY ARE THERE HELICOPTERS CIRCLING MY HOUSE WHY ARE THERE GODS

WHY ARE THERE TWO SPOCKS 'IS https://xkcd·com/1256/ THEY SAY T-MINUS WHY ARE THERE OBELISKS MWHY ARE WRESTLERS ALWAYS WET

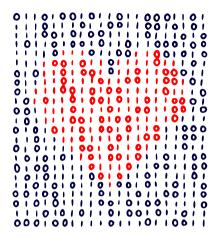
WHY ARE MY BOOBS ITCHY WHY DO Q TIPS FEEL GOOD

> WHY AREN'T THERE GUNS IN

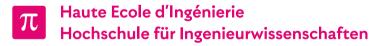
WHY ARE KYLE AND CARTMAN FRIENDS

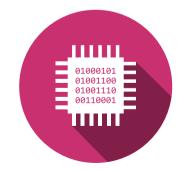
WHY ARE THERE BRIDESMAIDS WHY DO DYING PEOPLE REACH UP HOW FAST IS LIGHTSPEED WHY ARE OLD KLINGONS DIFFERENT

WHY ARE THERE SQUIRRELS









Silvan Zahno <u>silvan.zahno@hevs.ch</u> Christophe Bianchi <u>christophe.bianchi@hevs.ch</u> François Corthay <u>francois.corthay@hevs.ch</u>