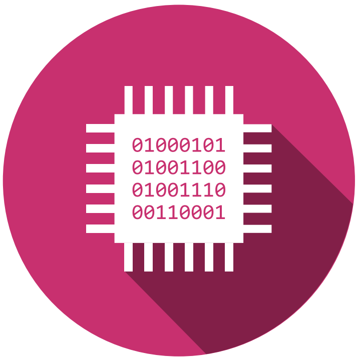


Vereinfachung mittels Karnaugh-Tabellen (KAR)

Vorlesung Digitales Design

Hes·so VALAIS WALLIS
Haute Ecole d'Ingénierie
Hochschule für Ingenieurwissenschaften

Orientierung: Energie und Umwelttechnik (ETE)
Kurs: Digitales Design (DiD)
Verfasser: Christophe Bianchi, François Corthay, Pierre Pompili, Silvan Zahno
Datum: 25. August 2022
Version: v2.1

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

Für die Realisierung von kombinatorischen Funktionen mit Hilfe von logischen Gattern muss die Form dieser Funktionen dem auszuführenden Schema entsprechen.

Die gängigste Technik für die manuelle Entwicklung von Schaltkreisen ist die **Karnaugh-Tabelle**. Mit Hilfe dieser Tabellen kann jede beliebige Funktion als Summe von Produkten, als Produkt von Summen oder als Exkusiv-ODER von Produkten entwickelt werden. Funktionen mit einer grossen Anzahl Eingängen können mit verschiedenen Techniken vereinfacht werden.

2 Karnaugh-Tabelle

Die Karnaugh-Tabelle ist die Darstellung eines Venn-Diagramms in Form einer Tabelle.

2.1 Tabelle mit 2 Variablen

In der Abbildung 1 sind ein Venn-Diagramm mit 2 Variablen sowie die entsprechende Karnaugh-Tabelle dargestellt.

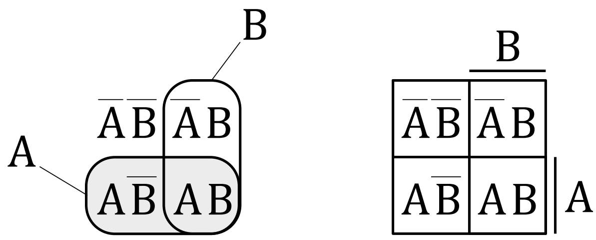


Abbildung 1: Karnaugh-Tabelle mit 2 Variablen

2.2 Tabelle mit 3 Variablen

In der Abbildung 2 sind ein Venn-Diagramm mit 3 Variablen sowie die entsprechende Karnaugh-Tabelle dargestellt.

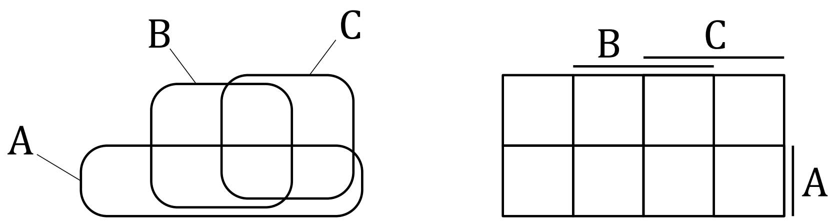


Abbildung 2: Karnaugh-Tabelle mit 3 Variablen

2.3 Tabelle mit 4 Variablen

In der Abbildung 3 sind ein Venn-Diagramm mit 4 Variablen sowie die entspre- chende Karnaugh-Tabelle dargestellt.

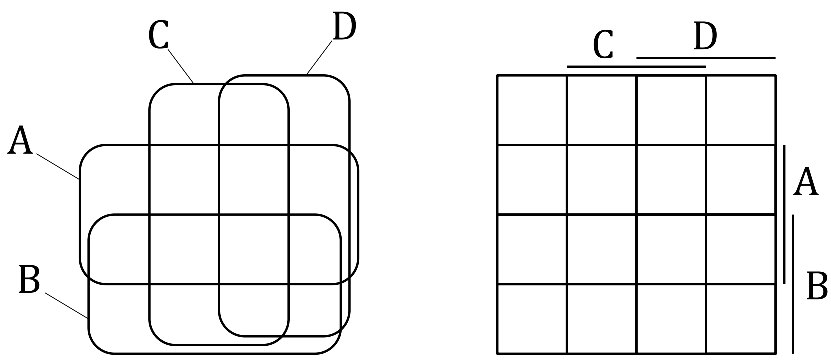


Abbildung 3: Karnaugh-Tabelle mit 4 Variablen

2.4 Tabelle mit mehr als 4 Variablen

Wenn mehr als 4 Mengen auftreten, wird es ziemlich schwierig, die Mengen so zu zeichnen, dass alle möglichen Schnittpunkte ersichtlich sind. Die Technik der Karnaugh-Tabellen besteht dann darin, Tabellen mit 4 Variablen nebeneinander zu zeichnen und diese mit zusätzlichen Variablen auszuwählen oder nicht auszuwählen. Dies ist in der Abbildung 4 für eine Karnaugh-Tabelle mit 5 Variablen dargestellt.

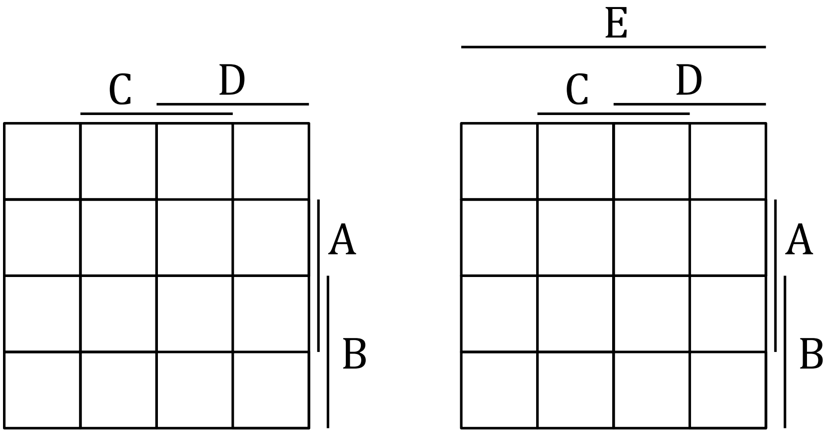


Abbildung 4: Karnaugh-Tabelle mit 5 Variablen

3 Vereinfachung mittels einer Summe von Produkten

3.1 Darstellung eines Produkts

Das Produkt mehrerer Variablen, die gegebenenfalls umgekehrt werden können, entspricht dem Schnittpunkt der entsprechenden Mengen.

In einer Karnaugh-Tabelle wird ein Produkt durch eine Menge benachbarter Felder dargestellt. Die Anzahl Felder ist immer eine Zahl in der 2. Potenz. Sie hängt von der Anzahl Faktoren des Produkts ab. Je mehr Faktoren ein Produkt aufweist, desto kleiner ist die Zahl der Felder.

3.1.1 Definition: Monom

Ein Monom ist ein Produkt aus mehreren Variablen, die gegebenenfalls umgekehrt werden können.

In der Karnaugh-Tabelle entspricht ein Monom einer Menge benachbarter Felder, die gleich einer Zahl in der 2. Potenz ist.

3.1.2 Definition: Minterm

Ein Minterm ist ein Produkt aller Variablen, die gegebenenfalls umkehrt werden können.

Ein Minterm entspricht einem Feld der Karnaugh-Tabelle.

Beispiele

In der Abbildung 5 sind Produkte von Variablen in ihrer Karnaugh-Tabelle dargestellt.

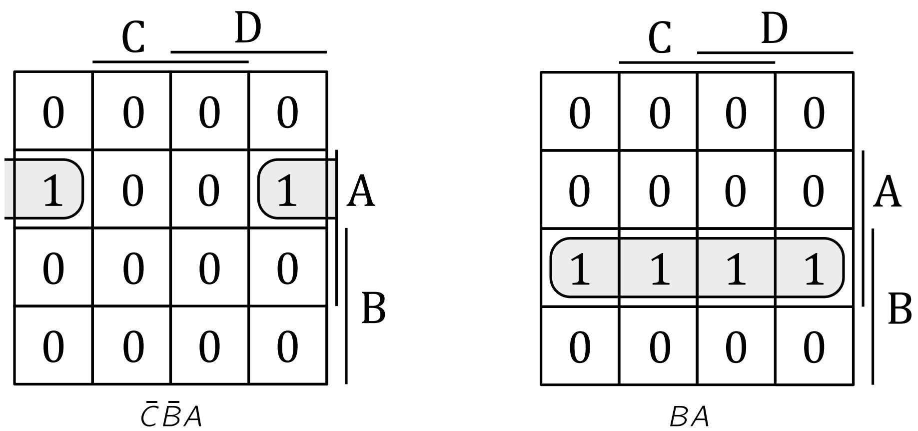


Abbildung 5: Darstellung von Produkten in einer Karnaugh-Tabelle

Eine Menge kann über den Rand einer Karnaugh-Tabelle hinausgehen und sich vom anderen, ihm gegenüberliegenden Rand entwickeln.
Ein Produkt, das alle Eingangsvariablen umfasst, nimmt in der Karnaugh-Tabelle ein einziges Feld ein. Eliminiert man einen Faktor im Ausdruck eines Produkts, wird die Zahl der besetzten Felder verdoppelt.

3.2 Darstellung einer Summe von Produkten

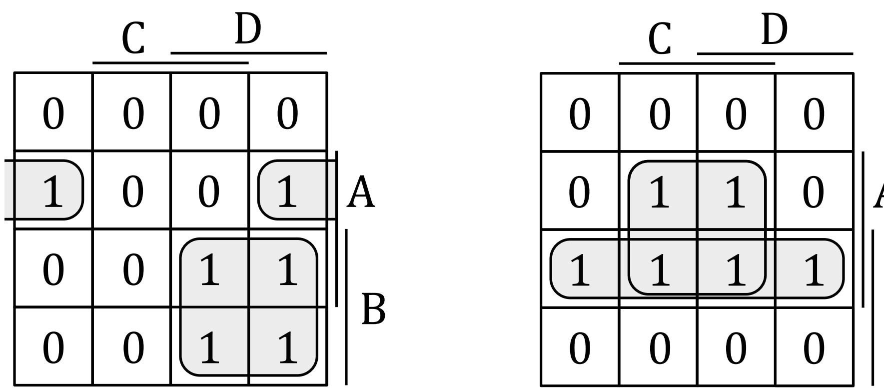
Eine Summe von Produkten wird durch die Vereinigung der Mengen dargestellt, die den Produkten entsprechen.

3.2.1 Definition: Polynom

Ein Polynom ist eine Summe von Monomen. Es entspricht einer Summe von Produkten.

Beispiele

Die Abbildung 6 zeigt Summen von Produkten von Variablen in ihrer Karnaugh-Tabelle.



$\bar{C}\bar{B}A + DB$ $\qquad$ $BA + CA$

Abbildung 6: Darstellung der Summen von Produkten in einer Karnaugh-Tabelle

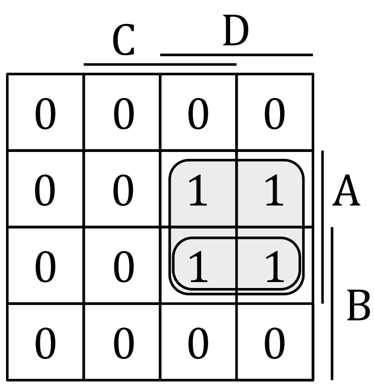
3.3 Definition: Primimplikant

Ein Primimplikant ist ein Produkt von Faktoren, das nicht zu einem grösseren Produkt gehört.

Beispiel

Die Abbildung 7 zeigt in einer Karnaugh-Tabelle ein Produkt von Faktoren, das in einer grösseren Menge eingeschlossen ist.

In dieser Tabelle ist der Implikant DBA im Primimplikant DA enthalten.



$DBA \subset DA$

Abbildung 7: Primimplikant

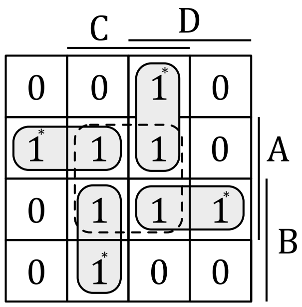
3.4 Definition: Wesentlicher Primimplikant

Ein wesentlicher Primimplikant ist ein Primimplikant, von dem ein Teil nur ihm gehört und somit in keinem anderen Primimplikant auftritt.

Beispiel

Die Abbildung 8 zeigt in einer Karnaugh-Tabelle einen Primimplikant mit 4 Feldern, der nutzlos ist, da all seine Elemente in einem der wesentlichen Primimplikanten enthalten sind, die mit einem Stern gekennzeichnet sind.

Man muss sich daher unbedingt zuerst mit den wesentlichen Primimplikanten befassen, bevor man die anderen Primimplikanten betrachtet, selbst wenn diese grösser sind.



$A\bar{B}\bar{D} + CD\bar{B} + ABD + BC\bar{D} \cancel{+ CA}$

Abbildung 8: Wesentliche Primimplikanten

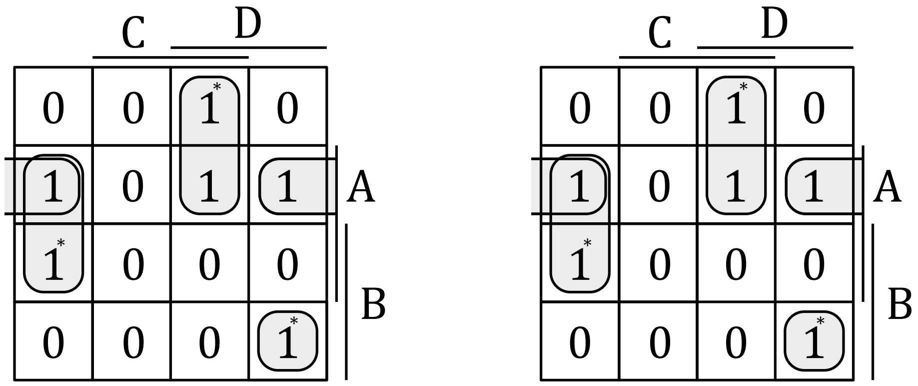
3.5 Vereinfachung mittels einer Summe von Produkten

Für die Vereinfachung mittels einer Summe von Produkten geht man wie folgt vor:

- die Karnaugh-Tabelle der zu vereinfachenden Logikfunktion ausfüllen,
- alle wesentlichen Primimplikanten bestimmen und das Polynom angeben, das aus der Summe dieser Implikanten besteht,
- für die noch nicht in den wesentlichen Primimplikanten eingeschlossenen '1' eine minimale Anzahl Primimplikanten bestimmen, die sie umfassen können und die Summe dieser Implikanten zum Polynom hinzufügen, das bis jetzt entwickelt wurde.

Beispiel

In der Abbildung 9 ist diese Vereinfachungsmethode als Summe von Produkten dargestellt. Die erste Karnaugh-Tabelle umfasst alle wesentlichen Primimplikanten, die mit einem Stern gekennzeichnet sind. In der zweiten Tabelle sind verschiedene Primimplikanten angegeben, die benutzt werden können, um jenen Teil einzuschliessen, der in den wesentlichen Primimplikanten noch nicht enthalten ist.



$DC\bar{B}^* + \bar{D}\bar{C}A^* + D\bar{C}B\bar{A}^*$ $\qquad$ $D\bar{B}A/\bar{C}\bar{B}A$

$$\begin{cases} DC\bar{B}^* + \bar{D}\bar{C}A^* + D\bar{C}B\bar{A}^* + D\bar{B}A \\ DC\bar{B}^* + \bar{D}\bar{C}A^* + D\bar{C}B\bar{A}^* + \bar{C}\bar{B}A \end{cases}$$

Abbildung 9: Vereinfachung mittels einer Summe von Produkten

3.6 Vereinfachung von unvollständig definierten Funktionen

Die Vereinfachung mittels einer Summe von Produkten kann von dieser unvollständigen Definition profitieren, um resultierende Polynome zu vereinfachen.

Für die Vereinfachung geht man gleich vor wie für vollständig definierte Funktionen, aber die unbestimmten Zustände können in die Implikanten eingeschlossen sein oder nicht, je nachdem ob mit ihnen die Grösse der Primimplikanten erhöht werden kann oder nicht.

3.6.1 Definition: Unvollständig definierte Funktion

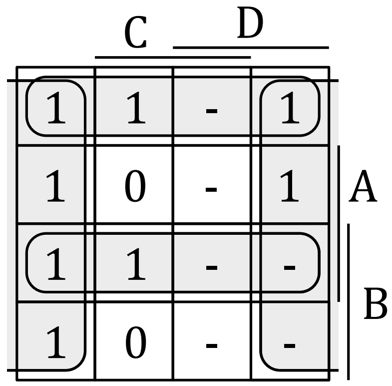
Eine unvollständig definierte Funktion gibt den Wert ihres Ausgangs nicht für alle möglichen Kombinationen der Eingänge an.

> Diese unvollständige Definition ist die Folge entweder eines Pflichtenhefts, in dem das Resultat der Funktion unter gewissen Bedingungen nicht berücksichtigt wird (Bedingungen: „don't care"), oder eines Systems, in dem gewisse Kombinationen von Eingängen nicht auftreten können (Bedingungen: „never happens").

Beispiel

In der Abbildung 10 ist die Vereinfachung mittels einer Summe von Produkten einer unvollständig definierten Funktion dargestellt.

Die vor der Vereinfachung undefinierten Zustände erhalten nach der Vereinfachung einen bestimmten Wert. Diejenigen, die in den Implikanten der Abbildung eingeschlossen sind, werden der '1' zugewiesen, die anderen der '0'.



$\bar{C} + \bar{B}\bar{A} + BA$

Abbildung 10: Vereinfachung einer unvollständig definierten Funktion

4 Vereinfachung von Exklusiv-ODER-Funktionen

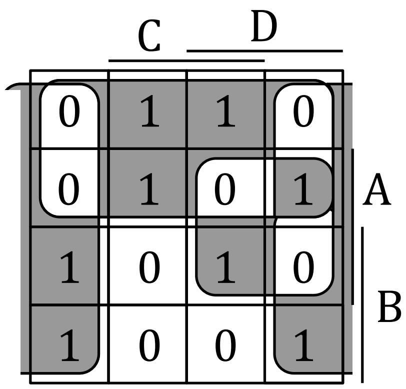
4.1 Darstellung einer Exklusiv-ODER-Funktion von Produkten

Die Exklusiv-ODER-Funktion macht Angaben über die Parität: Wenn die Anzahl ihrer Eingänge bei '1' ungerade ist, ist der Ausgang gleich '1', sonst ist der Ausgang gleich '0'.

In einer Karnaugh-Tabelle ist das Exklusiv-ODER von mehreren Implikanten gleich '1' in den Feldern, die von einer ungeraden Anzahl Mengen abgedeckt werden, und gleich '0' in den Feldern, die von keiner oder von einer geraden Anzahl Mengen abgedeckt werden.

Beispiel

In der Abbildung 11 ist ein Exklusiv-ODER von Implikanten in einer Karnaugh- Tabelle dargestellt.



$\bar{C} \oplus \bar{B} \oplus DA$

Abbildung 11: Exklusiv-ODER von Implikanten in einer Karnaugh-Tabelle

4.2 Vereinfachung mittels eines Exklusiv-ODER von Produkten

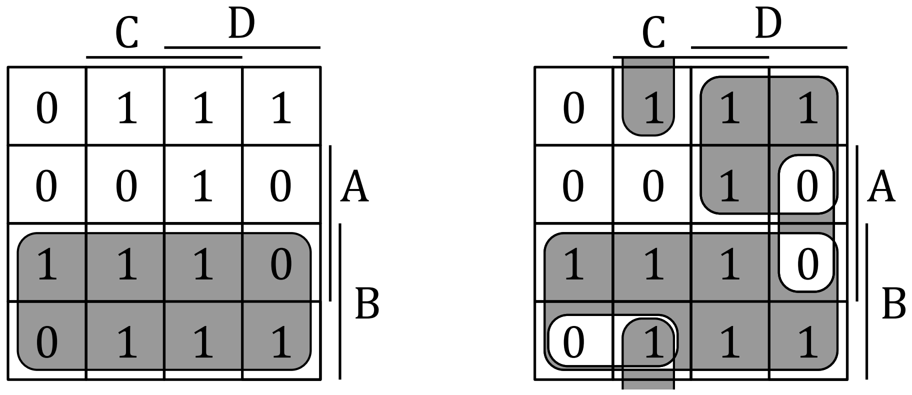
Die Vereinfachung mittels eines Exklusiv-ODER von Produkten kann nicht mit einer so direkten Methode vorgenommen werden wie die Vereinfachung mittels einer Summe von Produkten.

Für diese Vereinfachung kann mit einer grossen Menge begonnen werden, von der nicht alle Elemente unbedingt bei '1' sein müssen. Nach dieser ersten Wahl werden die anderen Mengen so ausgewählt, damit die überzähligen '0' umgekehrt und die fehlenden '1' eingeschlossen werden können.

Beispiel

Die Abbildung 12 zeigt diese Methode der Vereinfachung mittels eines Exklusiv-ODER von Produkten.

Die Vereinfachung beginnt mit der Wahl der Menge B. Mit der ersten Wahl ausgehend von der Menge C oder D kann ein einfacherer Ausdruck mit einem Exklusiv-ODER von 4 Produkten bestimmt werden.



$B \oplus \bar{B}D \oplus D\bar{C}A \oplus \bar{D}B\bar{A} \oplus \bar{D}C\bar{A}$

Abbildung 12: Vereinfachung mittels eines Exklusiv-ODER von Produkten

5 Funktionen mit einer grossen Anzahl an Eingängen

5.1 Beschränkter Einsatz der Karnaugh-Tabelle

Die Vereinfachung von Funktionen mit Hilfe der graphischen Methode der Karnaugh-Tabellen beschränkt sich praktisch auf Funktionen mit 6 Eingangsvariablen. Es gibt verschiedene Algorithmen, mit denen diese Aufgabe mit Hilfe von Computern ausgeführt werden kann.

Die Aufstellung von Gleichungen für Funktionen mit einer grossen Anzahl Eingänge kann mittels algebraischer Vereinfachung oder durch eine Vereinfachung in hierarchische Blöcke vorgenommen werden.

5.2 Algebraische Vereinfachung

Die algebraische Vereinfachung besteht darin, eine Funktion als Gleichung darzustellen und sie mit Hilfe der Eigenschaften der Booleschen Algebra umzuwandeln: Assoziativität, Kommutativität, Distributivität, De Morgan, ...

Beispiel: Vergleich der Gleichwertigkeit

Gegeben sind zwei ganze Zahlen, A und B, die in der Binärbasis ausgedrückt und mit 8 Bit codiert sind.

$$\begin{aligned} A &= a_7 * 2^7 + a_6 * 2^6 + \cdots + a_1 * 2^1 + a_0 * 2^0 \\ B &= b_7 * 2^7 + b_6 * 2^6 + \cdots + b_1 * 2^1 + b_0 * 2^0 \end{aligned} \tag{1}$$

Um festzustellen, ob diese beiden Zahlen gleich sind, müssen die gleichwertigen Bit jeder Zahl verglichen werden.

Für die Gleichwertigkeit der beiden Zahlen gilt:

$$\begin{aligned} A = B &\Leftrightarrow (a_7 = b_7) * (a_6 = b_6) * \cdots * (a_1 = b_1) * (a_0 = b_0) \\ A = B &\Leftrightarrow \overline{(a_7 \oplus b_7)} * \overline{(a_6 \oplus b_6)} * \cdots * \overline{(a_1 \oplus b_1)} * \overline{(a_0 \oplus b_0)} \\ A = B &\Leftrightarrow (\bar{a}_7 \bar{b}_7 + a_7 b_7) * (\bar{a}_6 \bar{b}_6 + a_6 b_6) * \cdots * (\bar{a}_0 \bar{b}_0 + a_0 b_0) \end{aligned} \tag{2}$$

Diese Funktion kann mit Hilfe von UND- und ODER-Gattern gemäss der Gleichung 2 realisiert oder als Summe von Produkten oder in einer anderen Form entwickelt werden.

5.3 Vereinfachung in Blöcke von überschaubarer Grösse

Ein typisches Vorgehen des Ingenieurs besteht darin, ein komplexes System in Blöcke aufzuteilen, die einfach genug sind, um mit den zur Verfügung stehenden Techniken bearbeitet werden zu können.

Beispiel: Vergleich der Gleichwertigkeit

Für den Vergleich der Gleichwertigkeit von 2 Zahlen mit 8 Bit wird jede dieser Zahlen durch 2 und dann noch einmal durch 2 geteilt.

Man erhält so Blöcke mit maximal 4 Eingängen, die mit der Technik der Karnaugh-Tabellen bearbeitet werden können.

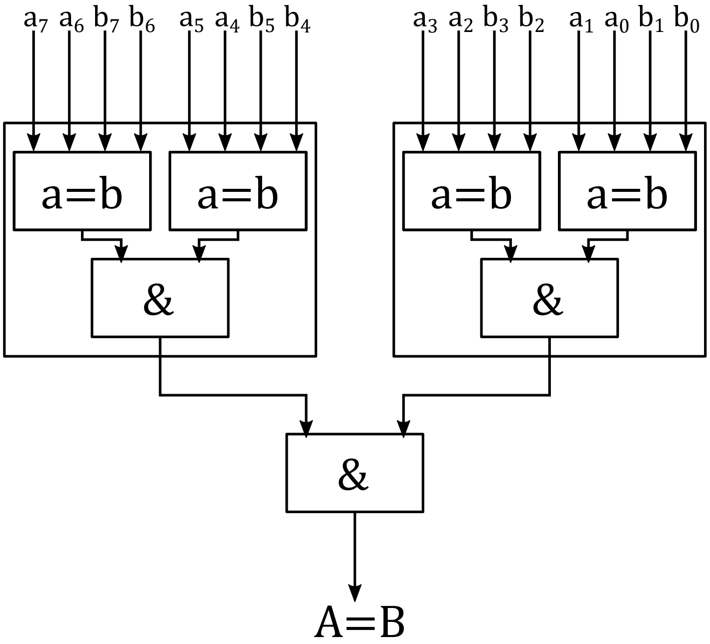
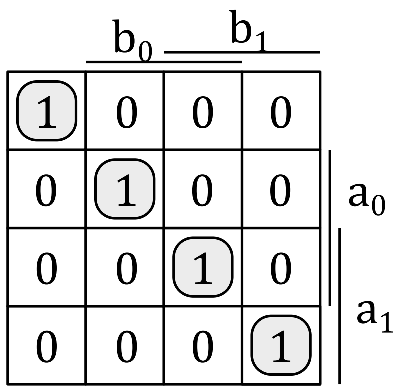


Abbildung 13: Vereinfachung in Blöcke überschaubarer Grösse

Das Polynom der Funktion des Blocks, der 2 Bit von jeder Zahl vergleicht, ist in der Abbildung 14 dargestellt.



$$\bar{a}_0\bar{b}_0\bar{a}_1\bar{b}_1 + a_0 b_0\bar{a}_1\bar{b}_1 + \bar{a}_0\bar{b}_0 a_1 b_1 + a_0 b_0 a_1 b_1$$

Abbildung 14: Vereinfachung des Vergleichs von 2 Bit pro Zahl

5.4 Iterative Systeme

Die Verarbeitung von Zahlen kann mit mathematischen Algorithmen vorgenommen werden, mit denen Operationen auf Zahlen entwickelt werden können, indem Ziffer nach Ziffer genommen wird und Zwischenresultat berechnet werden: Übertrag für Vergleiche und Additionen, Teilprodukte für die Multiplikation ...

Beispiel: Vergleich der Gleichwertigkeit

Zwei Zahlen können iterativ verglichen werden, wobei der Übertrag angibt, ob die beiden Zahlen bis zum Ort des Übertrags gleich sind.

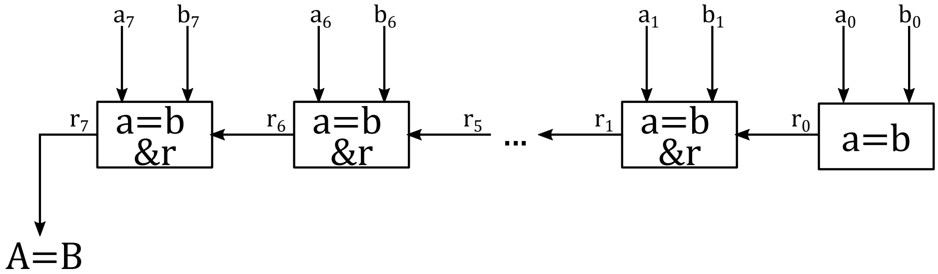


Abbildung 15: Iteratives System

Der erste Block kann entweder unverändert mit seinem Eingang des Übertrags, der auf $r_{-1} = 1$ festgesetzt ist, benutzt oder auf folgenden Ausdruck $r_0 = \bar{a}_0\bar{b}_0 + a_0 b_0$ vereinfacht werden.

Das Polynom der Funktion des iterativen Blocks ist in der Abbildung 16 darge stellt.

	b_i	a_i		
	0	0	0	0
r_{i-1}	1	0	1	0

$r_i = \bar{a}_i\bar{b}_i r_{i-1} + a_i b_i r_{i-1}$

Abbildung 16: Vereinfachung der iterativen Funktion

Aufgrund der Randbedingungen können sich der erste und der letzte Block eines iterativen Systems von den anderen Blöcken der Kette unterscheiden. In diesem Fall muss der erste Block entweder vereinfacht oder mit konstanten Eingängen benutzt werden. Der letzte Block kann vereinfacht werden, wenn er unbenutzte Ausgänge aufweist.

Literatur

[1] Suhail Almani. *Electronic Logic Systems*. second edition. New-Jersey: Prentice-Hall, 1989.

[2] Jean Michel Bernard und Jean Hugon. *Pratique Des Circuits Logiques*. quatrième édition. Paris: Eyrolles, 1987.

[3] Klaus Elektronik Bd Beuth. *Digitaltechnik*. Vogel Buchverlag, 1990. ISBN: 3-8023-1755-6.

[4] Michael D. Ciletti und M. Morris Mano. *Digital Design*. second edition. New-Jersey: Prentice-Hall, 2007.

[5] David J. Comer. *Digital Logic and State Machine Design*. Saunders College Publishing, 1995.

[6] Donald L. Dietmeyer und R. David. "Logic Design of Digital Systems". In: *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control* 94.2 (1. Juni 1972), S. 174–174. ISSN: 0022-0434. DOI: 10.1115/1.3426575. URL: https://doi.org/10.1115/1.3426575 (besucht am 01. 06. 2021).

[7] William I. Fletcher. *Engineering Approach to Digital Design*. New-Jersey: Prentice-Hall, 1980.

[8] Marcel Gindre und Denis Roux. *Electronique Numérique, Logique Combinatoire et Technologie*. Paris: McGraw-Hill, 1987.

[9] Randy H. Katz und Gaetano Borriello. *Contemporary Logic Design*. California: The Benjamin/Cummings Publishing Company Inc, 2005.

[10] David Lewin und Douglas Protheroe. *Design of Logic Systems*. second edition. Hong Kong: Springer, 2013.

[11] Daniel Mange. *Analyse et synthèse des systèmes logiques*. Editions Géorgi. Bd. Traité d'électricité, volume V. St Saphorin: PPUR presses polytechniques, 1995. 362 S. ISBN: 978-2-88074-045-0. Google Books: 5NSdD4GRl3cC.

[12] Clive Maxfield. *Bebop to the Boolean Boogie*. Elsevier, 2009. ISBN: 978-1-85617-507-4. DOI: 10.1016/B978-1-85617-507-4.X0001-0. URL: https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/B9781856175074X00010 (besucht am 27. 05. 2021).

[13] Ronald J. Tocci und André Lebel. *Circuits Numériques: Théorie et Applications*. deuxième édition. Ottawa: Editions Reynald Goulet inc. / Dunod, 1996.

[14] John F. Wakerly. *Digital Design: Principles And Practices*. 3rd edition. Prentice-Hall, 2008. ISBN: 0-13-082599-9.