

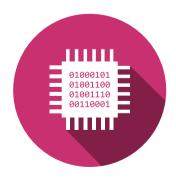


## Conception numérique (DiD)

# Simplification par table de Karnaugh KAR

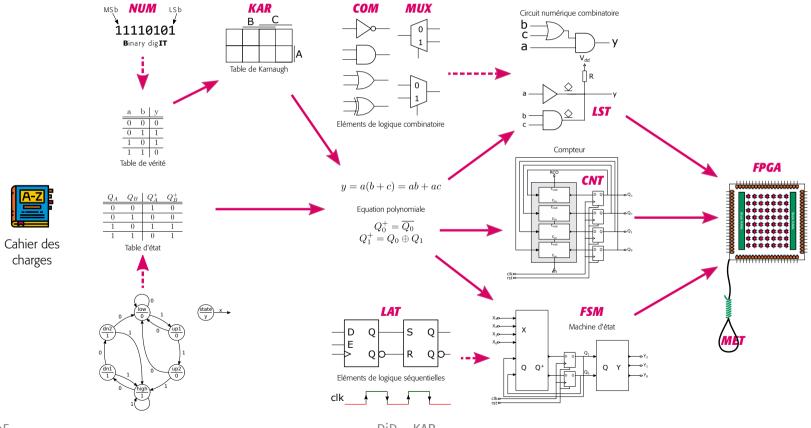
Filière Systèmes industriels Filière Energie et techniques environmentales Filière Informatique et systèmes de communications

Silvan Zahno <u>silvan.zahno@hevs.ch</u> Christophe Bianchi <u>christophe.bianchi@hevs.ch</u> François Corthay <u>francois.corthay@hevs.ch</u>



## Situation du thème dans le cours





ZaS, BiC, CoF DiD KAR

#### Contenu



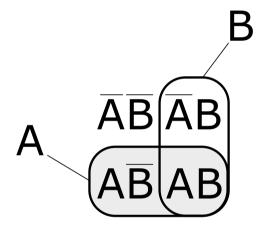
#### Tables de Karnaugh

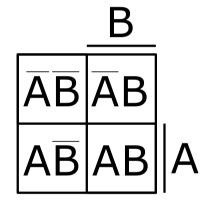
- à 2 variables
- à 3 variables
- à 4 variables
- à plus de 4 variables
- Simplification sous forme de sommes de produits
- Simplification de fonctions OU-exclusif
- Fonctions avec un nombre élevé d'entrées

à 2 variables

Est un diagramme de Venn

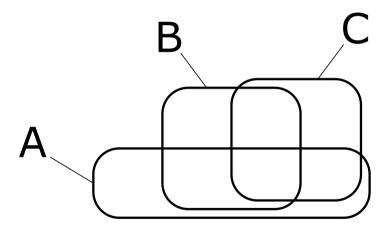


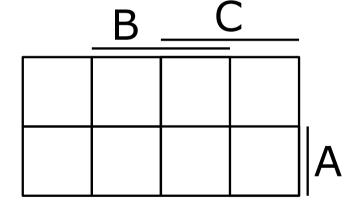




## à 3 variables

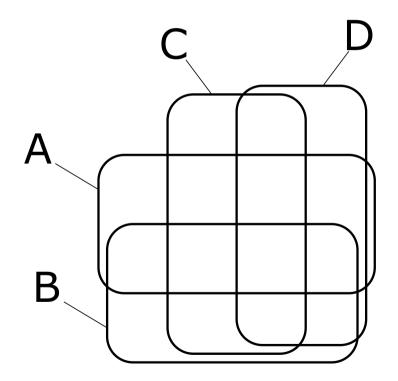


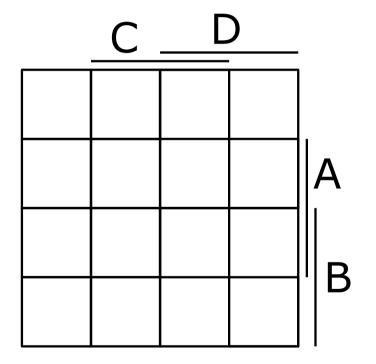




## à 4 variables

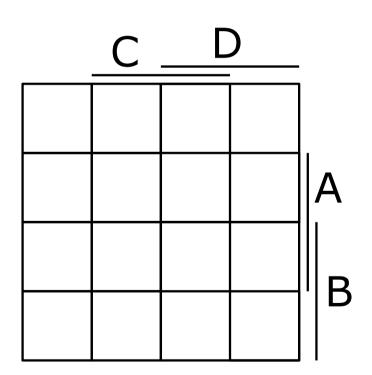


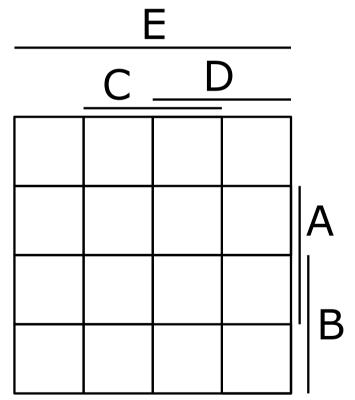




## à 5 variables





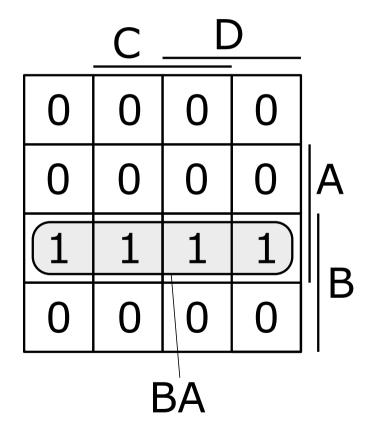


#### Contenu

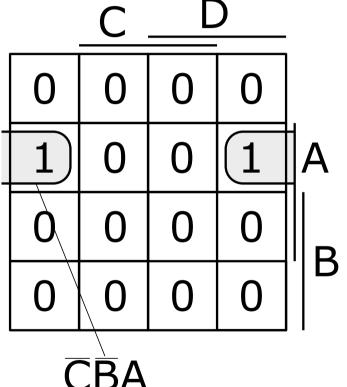


- Tables de Karnaugh
- Simplification sous forme de sommes de produits
  - Monôme
  - Polynôme
  - Impliquant premier, impliquant premier essentiel
  - Simplification
  - Fonction incomplètement définie
- Simplification de fonctions OU-exclusif
- Fonctions avec un nombre élevé d'entrées

#### Monôme







#### Exercise 1.1





Représenter, dans une table de Karnaugh à 4 variables, les monômes suivants:

$$y_1 = \overline{b}a$$

$$y_2 = \overline{d}\overline{a}$$

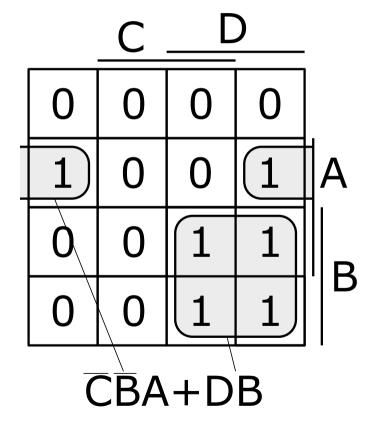
$$y_3 = \overline{d}cb$$

$$y_4 = dba$$

$$y_5 = \overline{c}\overline{b}\overline{a}$$

$$y_6 = dcb\overline{a}$$

# Polynôme





	<u>C</u>		)	
0	0	0	0	
0	1	1	0	A
1	1	1	1	$\Big\ _{\mathbf{D}}$
0	0	0	0	B
		¬ ЗА+	-CA	

#### Exercise 1.3





Répresenter, dans une table de Karnaugh à 4 variables, les polynômes suivants:

$$y_1 = \overline{b} + ac$$

$$y_2 = \overline{d} + \overline{a} + bc$$

$$y_3 = \overline{d}cb + d\overline{c}\overline{b}$$

$$y_4 = db + ab$$

$$y_5 = \overline{c}\overline{b}\overline{a} + \overline{c}\overline{b}$$

$$y_6 = dcb\overline{a} + \overline{d}cb\overline{a}$$

# Table de Karnaugh Impliquant premier

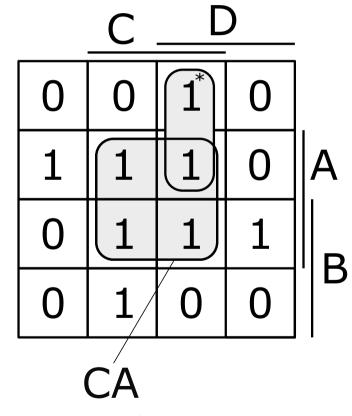


	<u>C</u>		)		
0	0	0	0		
0	0	1	1	A	
0	0	1	1	$\Big\ _{\mathbf{D}}$	
0	0/	0	0		
DBA⊂DA					

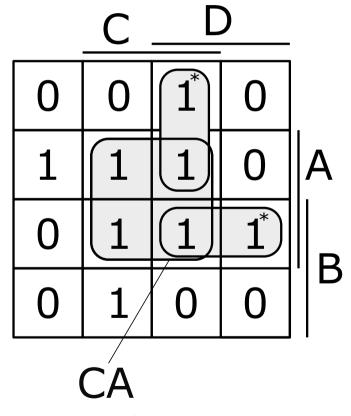


	<u>C</u>		<u> </u>	-
0	0	1	0	
1	1	1	0	$\ A\ $
0	1	1	1	$\Big\ _{\mathbf{D}}$
0	1/	0	0	B 
	CA			<u>-</u>

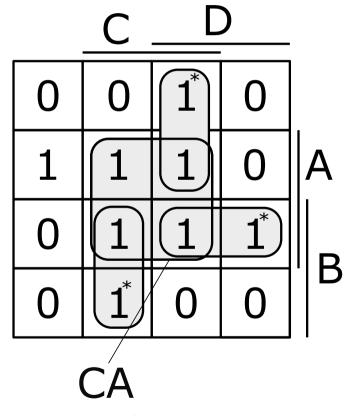




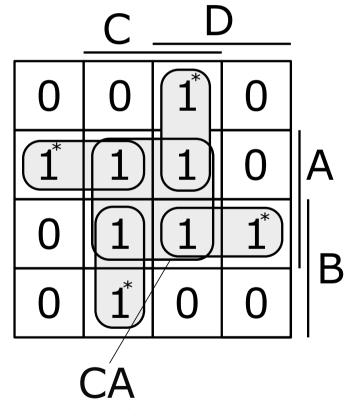




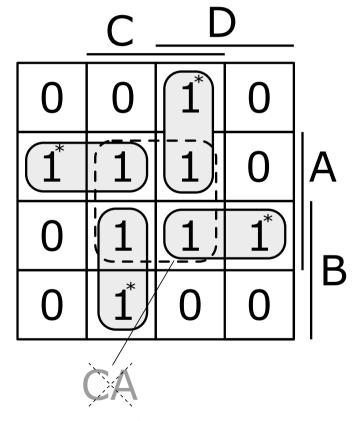












Déterminer l'equation polynomiale minimale



	<u>C</u>		)	
0	0	1	0	
1	0	1	1	A
1	0	0	0	$\Big\ _{\mathbf{D}}$
0	0	0	1	B 

Déterminer l'equation polynomiale minimale



		<u>C</u>		)	-
	0	0	$1^*$	0	
	1	0	1	1	$\ A\ $
		Ø	0	0	$\Big]\Big]_{\mathbf{D}}$
/	0	0	0	1	B 
DCB*					_

→ Recherche des impliquants premiers essentiels

Déterminer l'equation polynomiale minimale



		<u>C</u>		)	-
	0	0	1*	0	
	1	0	1	1	$\ A\ $
	1	Ó	0	0	$\Big\ _{B}$
/	0	0	0	1	
DCB*-	+D0	ZA*			-

→ Recherche des impliquants premiers essentiels

Déterminer l'equation polynomiale minimale



		<u>C</u>		<u> </u>		
	0	0	1*	0		
	1	0	1	1	Α	
	1*	0	0	0		
	0	0	0	<u>1</u> *		
DCB+DCA+DCBA*						

→ Recherche des impliquants premiers essentiels

Déterminer l'equation polynomiale minimale



	,	<u>C</u>		)	
	0	0	$1^*$	0	
	1	0	1	1	Α
	1*	0	0	0	
	0	0	0	1*	
DCB*-	+DC	<b>Z</b> A*+	DC	$B\overline{A}^*$ -	-DBA

→Recherche des impliquants premiers essentiels puis des impliquants premiers restants

Déterminer l'equation polynomiale minimale



	,	<u>C</u>		)	
	0	0	1*	0	
	1	0	1	1	Α
	1*	0	0	0	$\ _{B}$
	0	0	0	1*	
DCB <sup>*</sup> -	+DC	<b>Z</b> A*+	DC	$B\overline{A}^*$	+DBA
		. •		, +	۲ĢВА

→Recherche des impliquants premiers essentiels puis des impliquants premiers restants

## Exercise 3.1



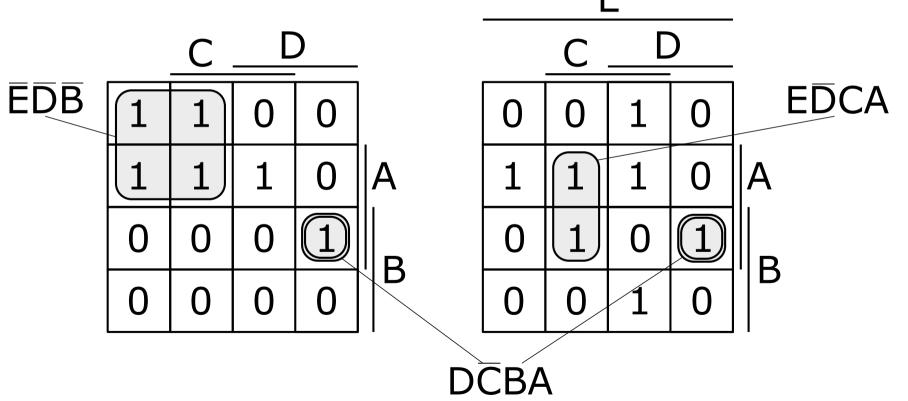


Déterminer la forme polynomiale minimale d'une table de Karnaugh à 4 variables

	С		)	
1	0	0	1	
1	0	1	1	A
1	0	0	0	
1	1	1	1	

Simplification avec 5 variables





## Exercise 3.2





#### Forme polynomiale minimal d'une table de Karnaugh à 5 variables

1	1	0	0
1	1	1	0
0	0	0	1
0	0	0	0

		Ł		
	С		)	
0	0	1	0	
1	1	1	0	A
0	1	0	1	
0	0	1	0	

# Fonction incomplètement définie



	<u>C</u>	<u>D</u>	<u> </u>	
1	1	-	1	Ī
1	0	-	1	Α
1	1	-		
1	0	-	<u>-</u>	B
$\overline{C} + \overline{B}\overline{A} + BA$				

#### Exercise 3.11





## Déterminer l'expression polynomiale minimale de la fonction majorité à 4 entrées

- Plus que le moitie à '0' => '0'
- Plus que la moitie à '1' => '1'
- Même nombre de '0' et '1' le sortie est indéfinie

#### Contenu



- Tables de Karnaugh
- Simplification sous forme de sommes de produits
- Simplification de fonctions OU-exclusif
  - Représentation
  - Simplification
- Fonctions avec un nombre élevé d'entrées

Représentation d'un Ou-exclusif (XOR)



	<u>C</u>		)	
0	1	1	0	
0	1	0	1	A
1	0	1	0	$\Big\ _{B}$
1	0	0	1	
$\overline{C} \oplus \overline{B} \oplus DA$				

#### Exercise 5.1





Représentation de fonctions XOR (utilisez des tables de Karnaugh avec 4 entrées)

 $a \oplus b$ 

 $a \oplus b \oplus c$ 

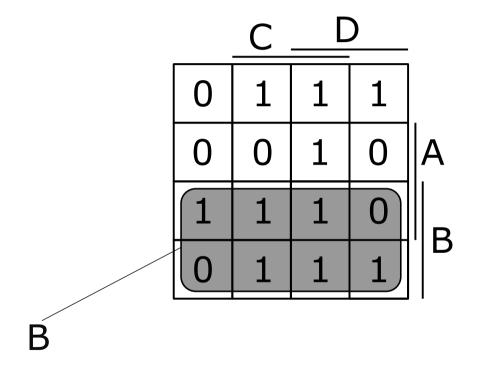
Simplification sous forme de Ou-exclusif (XOR)



	<u>C</u>			
0	1	1	1	
0	0	1	0	A
1	1	1	0	$\Big\ _{\mathbf{D}}$
0	1	1	1	B 

Simplification sous forme de Ou-exclusif (XOR)





Simplification sous forme de Ou-exclusif (XOR)



				<u>C</u>		<u> </u>	
			0	1	1	1	
			0	0	1	0	A
			1	1	1	0	$\ _{B}$
			0	1	1	1	
В	$\oplus$	BD					

Simplification sous forme de Ou-exclusif (XOR)



				<u>C</u>	<u>_</u>	<u> </u>	
			0	1	1	1	
			0	0	1	0	Α
			1	1	1	0	
			0	1	1/		B
В	$\oplus$	ВD	<b>⊕</b> [	OCA	\		-

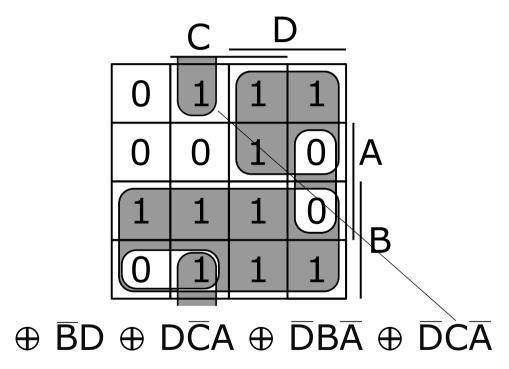
Simplification sous forme de Ou-exclusif (XOR)



		<u>C</u>		<u> </u>	
	0	1	1	1	
	0	0	1	0	Α
	1	1	1	0	$\ _{B}$
	0	1	1	1	
BD	<b>⊕</b> [	OCA	<b>√</b>	DBA	$\bar{\Delta}$

Simplification sous forme de Ou-exclusif (XOR)





#### Contenu



Tables de Karnaugh

Simplification sous forme de sommes de produits

Simplification de fonctions OU-exclusif

#### Fonctions avec un nombre élevé d'entrées

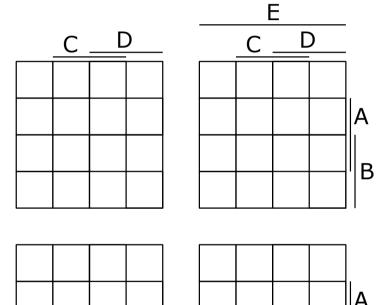
Simplification algébrique

Réduction en blocs de taille maîtrisable

Systèmes itératifs

## Fonctions avec un nombre élevé d'entrées

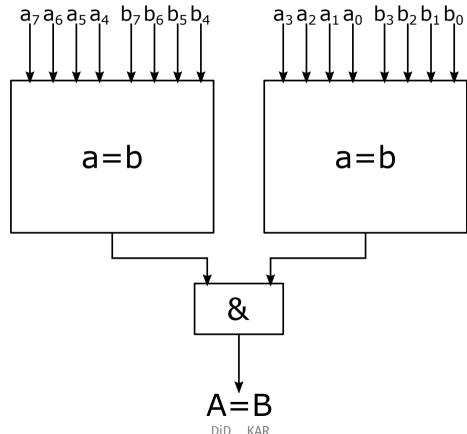
Fonction à 6 entrées





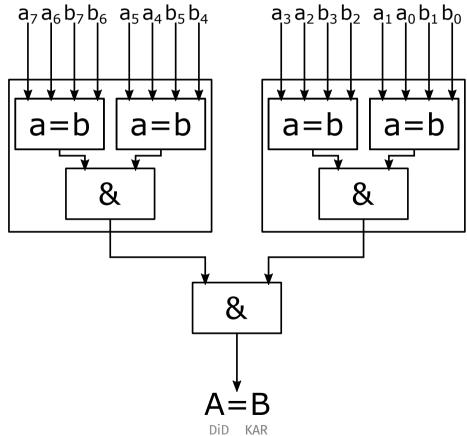
# Décomposition par blocs





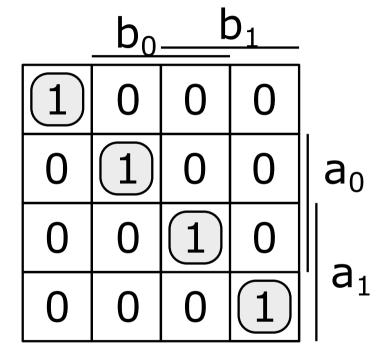
# Décomposition par blocs

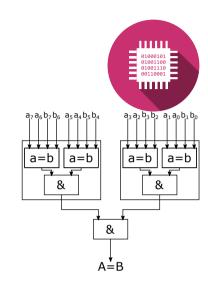




Décomposition par blocs

A=B, 2x2 Bits





 $\overline{a_0}\overline{b_0}\overline{a_1}\overline{b_1} + a_0b_0\overline{a_1}\overline{b_1} + \overline{a_0}\overline{b_0}a_1b_1 + a_0b_0a_1b_1$ 

## Simplification algébrique



#### Comparaison de nombres, algébriquement

$$A = a_7 * 2^7 + a_6 * 2^6 + \dots + a_1 * 2^1 + a_0 * 2^0$$
  

$$B = b_7 * 2^7 + b_6 * 2^6 + \dots + b_1 * 2^1 + b_0 * 2^0$$

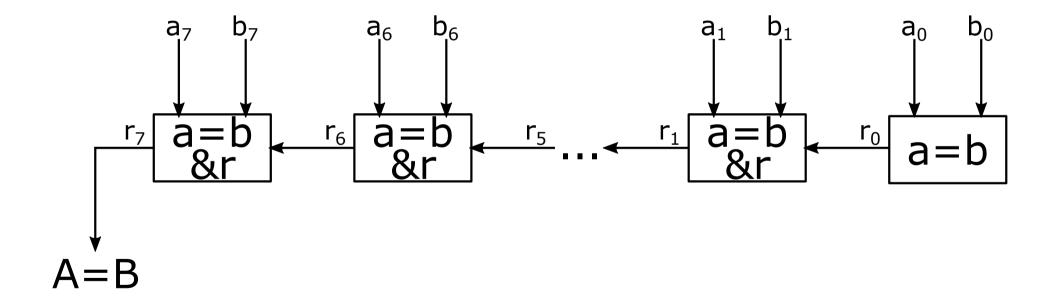
$$A = B \iff (a_7 = b_7) * (a_6 = b_6) * ... * (a_1 = b_1) * (a_0 = b_0)$$

$$A = B \iff \overline{(a_7 \oplus b_7)} * \overline{(a_6 \oplus b_6)} * ... * \overline{(a_1 \oplus b_1)} * \overline{(a_0 \oplus b_0)}$$

$$A = B \iff (a_7b_7 + \overline{a_7}\overline{b_7}) * (a_6b_6 + \overline{a_6}\overline{b_6}) * ... * (a_1b_1 + \overline{a_1}\overline{b_1}) * (a_0b_0 + \overline{a_0}\overline{b_0})$$

# Système itératif





## Système itératif

Bloc itératif



$$\begin{array}{c|c|c} b_{i} & a_{i} \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline \overline{a_{i}} \overline{b_{i}} r_{i-1} + a_{i} b_{i} r_{i-1} \\ \hline \end{array}$$

Premier bloc différent des autres:  $r_0 = \overline{a_0} * \overline{b_0} + a_0 * b_0$ Premier bloc comme les autres:  $r_{-1} = 1$ 

# Exercise 6.1





Comparaison de nombre (A > B)

## Références



- [Man78] (français) Bonne présentation
- [Toc92] (français) Exemples complets
- [Max95] (anglais) Facile à lire
- [Wak00] (anglais) Bonne explication Karnaugh + algorithmes
- [Fle80] (anglais) Algorithmes de simplification
- [Kat94] (anglais) Algorithmes de simplification

WHY ARE THERE MIRRORS ABOVE BEDS

WHY DO I SAY WHY IS SEA SALT BETTER IN

WHY IS THERE NOT A POKEMON MMO WHY IS THERE LAUGHING IN TV SHOWS ARE THERE DOORS ON THE FREEWAY ARE THERE SO MANY SVCHOST-EXE RUNNING AREN'T ANY COUNTRIES IN ANTARCTICA WHY ARE THERE SCARY SOUNDS IN MINECRAFT WHY IS THERE KICKING IN MY STOMACH WHY ARE THERE TWO SLASHES AFTER HTTP WHY ARE THERE CELEBRITIES WHY DO SNAKES EXIST WHY DO OYSTERS HAVE PEARLS WHY ARE DUCKS CALLED DUCKS WHY DO THEY CALL IT THE CLAP WHY IS THERE AN ARROW ON AANG'S HEAD 🗷 WHY ARE TEXT MESSAGES BLUE WHY ARE THERE MUSTACHES ON CLOTHES WHY WUBA LUBBA DUB DUB MEANING IS THERE A WHALE AND A POT FALLING WHY ARE THERE SO MANY BIRDS IN SWISS WHY IS THERE SO LITTLE RAIN IN WALLIS WHY IS WALLIS WEATHER FORECAST ALWAYS WRONG

WHY HAVE DINOSAURS NO FUR WHY ARE SWISS AFRAID RWHY IS THERE A LINE THROUGH HI TO WHY IS THERE A RED LINE THROUGH HTTPS ON TWITTER

WHY AREN'T MY ARMS GROWING WHY ARE THERE SO MANY CROWS IN ROCHESTER & WHY IS TO BE OR NOT TO BE FUNNY

WHY DO CHILDREN GET CANCER 🗢

WHY IS POSEIDON ANGRY WITH ODYSSEUS

WHY AREN'T ECONOMISTS RICH WHY DO AMERICANS CALL IT SOCCER & WHY ARE MY EARS RINGING WHY IS 42 THE ANSWER TO EVERYTHING WHY CAN'T NOBODY ELSE LIFT THORS HAMMER S **SWHY IS THERE ICE IN SPACE** WHY IS MARVIN ALWAYS SO SAD

WHY IS SPACE BLACK WHY IS OUTER SPACE SO COLD WHY ARE THERE PYRAMIDS ON THE MOON WHY IS NASA SHUTTING DOWN A

THERE MALE AND FEMALE BIKES E WHY ARE THERE TINY SPIDERS IN MY HOUSE ' DO SPIDERS COME INSIDE

WHY ARE THERE HUGE SPIDERS IN MY HOUSE  $_{
m H}$  WHY ARE THERE LOTS OF SPIDERS IN MY HOUSE  $\overline{oldsymbol{\lambda}}$ 为WHY ARE THERE SO MANY SPIDERS IN MY ROOM

SPYDER BITES ITCH

WHY ARE THERE **GHOSTS** 



WHY IS THERE AN OWL IN MY BACKYARD WHY IS THERE AN OWL OUTSIDE MY WINDOW WHY IS THERE AN OWL ON THE DOLLAR BILL WHY DO OWLS ATTACK PEOPLE WHY ARE FPGA'S EVERYWHERE WHY ARE THERE HELICOPTERS CIRCLING MY HOUSE WHY ARE THERE GODS

WHY ARE THERE TWO SPOCKS 'IS https://xkcd·com/1256/ THEY SAY T-MINUS WHY ARE THERE OBELISKS MWHY ARE WRESTLERS ALWAYS WET

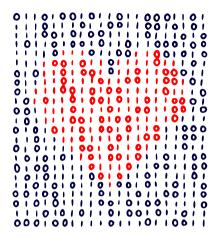
WHY ARE MY BOOBS ITCHY WHY DO Q TIPS FEEL GOOD

> WHY AREN'T THERE GUNS IN

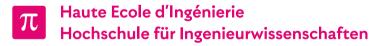
WHY ARE KYLE AND CARTMAN FRIENDS

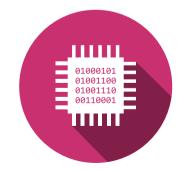
WHY ARE THERE BRIDESMAIDS WHY DO DYING PEOPLE REACH UP HOW FAST IS LIGHTSPEED WHY ARE OLD KLINGONS DIFFERENT

WHY ARE THERE SQUIRRELS









Silvan Zahno <u>silvan.zahno@hevs.ch</u> Christophe Bianchi <u>christophe.bianchi@hevs.ch</u> François Corthay <u>francois.corthay@hevs.ch</u>