

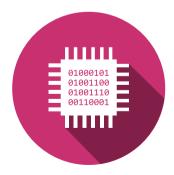


#### Digitales Design (DiD)

# Vereinfachung mittels Karnaugh-Tabellen KAR

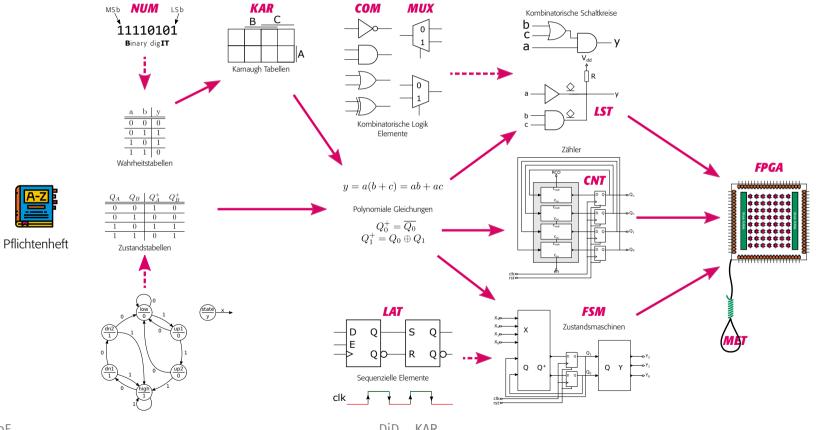
Studiengang Systemtechnik Studiengang Energie und Umwelttechnik Studiengang Informatik und Kommunikationssysteme

Silvan Zahno <u>silvan.zahno@hevs.ch</u> Christophe Bianchi <u>christophe.bianchi@hevs.ch</u> François Corthay <u>francois.corthay@hevs.ch</u>



#### Aktueller Inhalt des Themas im Kurs





ZaS, BiC, CoF DiD KAR

#### Inhalt



3

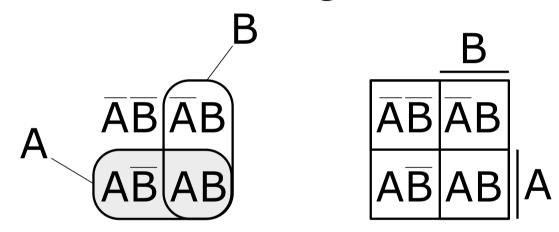
#### Karnaugh Tabellen

- mit 2 Variablen
- mit 3 Variablen
- mit 4 Variablen
- Mit mehr als 4 Variablen
- Vereinfachung mittels einer Summe von Produkten
- Vereinfachung mittels Exklusiv-ODER Funktionen
- Funktionen mit einer grossen Anzahl an Eingängen

Mit 2 Variablen

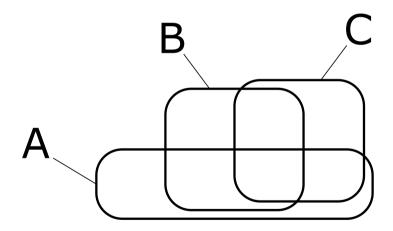


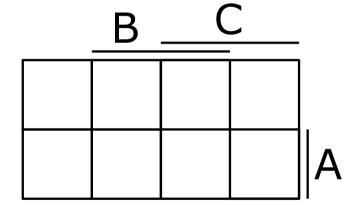
# Es handelt sich um ein Venn Diagram



#### Mit 3 Variablen

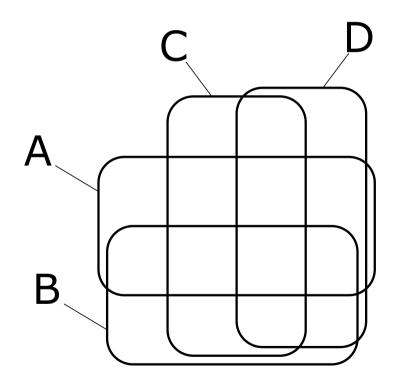


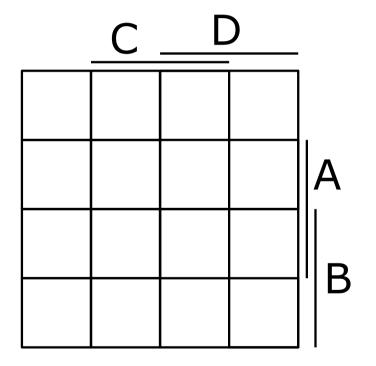




#### Mit 4 Variablen

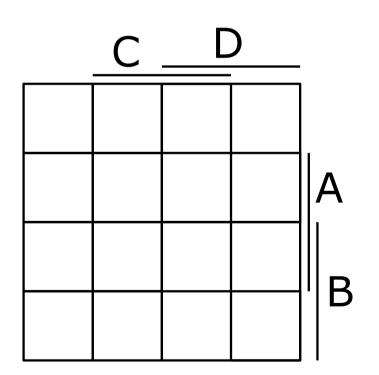


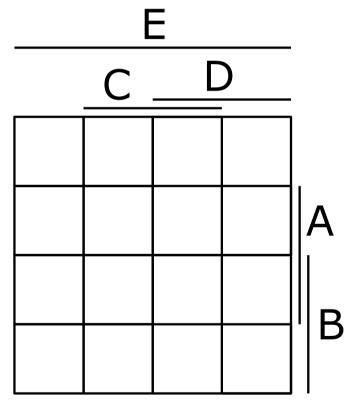




#### Mit 5 Variablen





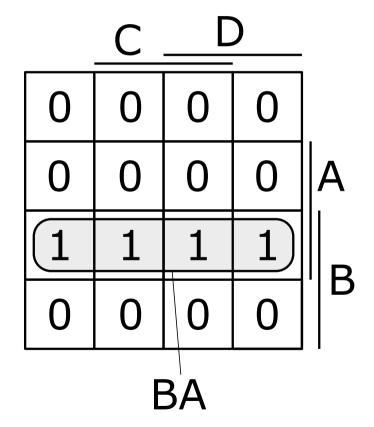


#### Inhalt

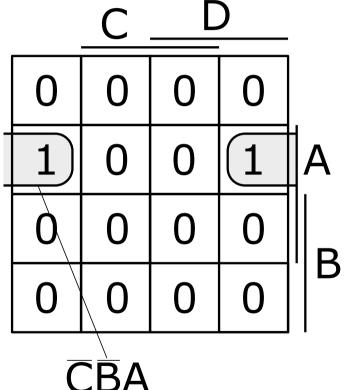


- Karnaugh Tabellen
- Vereinfachung mittels einer Summe von Produkten
  - Monome
  - Polynome
  - Primimplikant, Wesentlicher Primimplikant
  - Vereinfachungen
  - Unvollständig definierte Funktionen
- Vereinfachung mittels Exklusiv-ODER Funktionen
- Funktionen mit einer grossen Anzahl an Eingängen

#### Monome







## Aufgabe 1.1





Stellen Sie die folgende Monome in einer Karnaugh-Tafel mit 4 Variablen dar.

$$y_1 = \overline{b}a$$

$$y_2 = \overline{d}\overline{a}$$

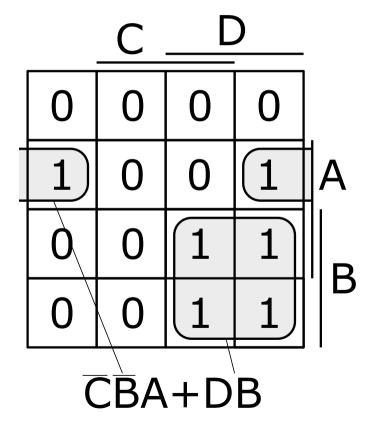
$$y_3 = \overline{d}cb$$

$$y_4 = dba$$

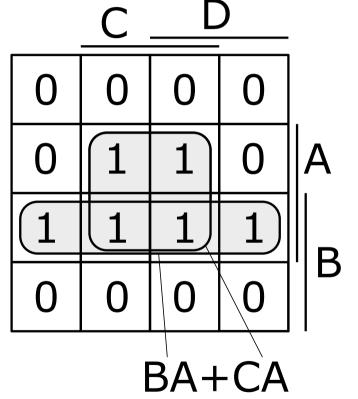
$$y_5 = \overline{c}\overline{b}\overline{a}$$

$$y_6 = dcb\overline{a}$$

#### Polynome







## Aufgabe 1.3





Stellen Sie die folgende Monome in einer Karnaugh-Tafel mit 4 Variablen dar.

$$y_1 = \overline{b} + ac$$

$$y_2 = \overline{d} + \overline{a} + bc$$

$$y_3 = \overline{d}cb + d\overline{c}\overline{b}$$

$$y_4 = db + ab$$

$$y_5 = \overline{c}\overline{b}\overline{a} + \overline{c}\overline{b}$$

$$y_6 = dcb\overline{a} + \overline{d}cb\overline{a}$$

# Karnaugh Tabellen Primimplikant



	C		)			
0	0	0	0			
0	0	1	1	A		
0	0	1	1	$\Big\ _{\mathbf{D}}$		
0	0/	0	0	B		
DBA ⊂ DA						



		<u>C</u>		)	
	0	0	1	0	
	1	1	1	0	A
	0	1	1	1	$\Big\ _{B}$
	0	1/	0	0	
•		CA			



		<u>C</u>		)	
	0	0	$1^*$	0	
	1	1	1	0	A
	0	1	1	1	
	0	1/	0	0	
•		CA			•

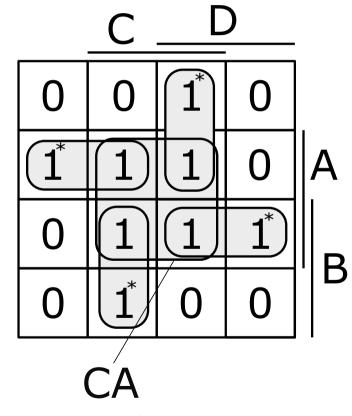


		<u>C</u>		<u> </u>				
	0	0	$1^*$	0				
	1	1	1	0	A			
	0	1	1	1*	$\Big\ _{B}$			
	0	1/	0	0				
•	CA							

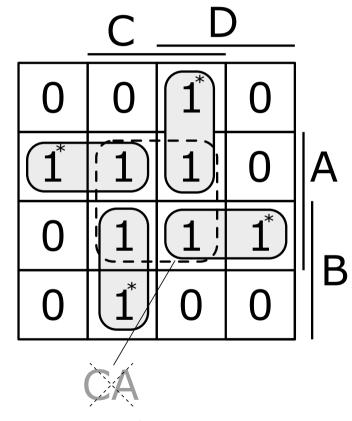


		<u>C</u>		)	
	0	0	$1^*$	0	
	1	1	1	0	A
	0	1	1	1*	
	0	1*	0	0	
•		CA			•









Bestimmen Sie die minimale Polynomgleichung



	<u>C</u>		)	
0	0	1	0	
1	0	1	1	Α
1	0	0	0	
0	0	0	1	B 

Bestimmen Sie die minimale Polynomgleichung



		<u>C</u>		)	
	0	0	$1^*$	0	
	1	0	1	1	Α
	1	Ó	0	0	B
/	0	0	0	1	
DCB*					-

→Suche nach wesentlichen Primimplikanten

Bestimmen Sie die minimale Polynomgleichung



	,	<u>C</u>		)	
	0	0	$1^*$	0	
	1	0	1	1	Α
	$1^*$	Q	0	0	
	Ó	0	0	1	
DCB-	+DC	Ā			-

→Suche nach wesentlichen Primimplikanten

Bestimmen Sie die minimale Polynomgleichung



23

	,	С		)	
	0	0	$1^*$	0	
	1	0	1	1	Α
	1*	0	0	0	
	0	0	0	( <u>1</u> *)	
DCB-	+DC	 ZA*+	DC	$\overline{BA}^*$	

→Suche nach wesentlichen Primimplikanten

Bestimmen Sie die minimale Polynomgleichung



24

	,	С		)	
	0	0	$1^*$	0	
	1	0	1	1	Α
	1*	0	0	0	
	0	0	0	1*	
DCB*-	+DC	\[\bar{A}^* +	DC	$B\overline{A}^*$	-DBA

→Suche nach den wesentlichen Primimplikanten und danach den verbleibenden Primimplikanten

Bestimmen Sie die minimale Polynomgleichung



		С		)	
	0	0	$1^*$	0	
	1	0	1	1	Α
	$1^*$	0	0	0	$\ _{B}$
	0	0	0	1*	
DCB*-	+DC	<b>Z</b> A*+	DC	$B\overline{A}^*$	+DBA
				_ +	<u>-</u> CBA

→Suche nach den wesentlichen Primimplikanten und danach den verbleibenden Primimplikanten

## Aufgabe 3.1





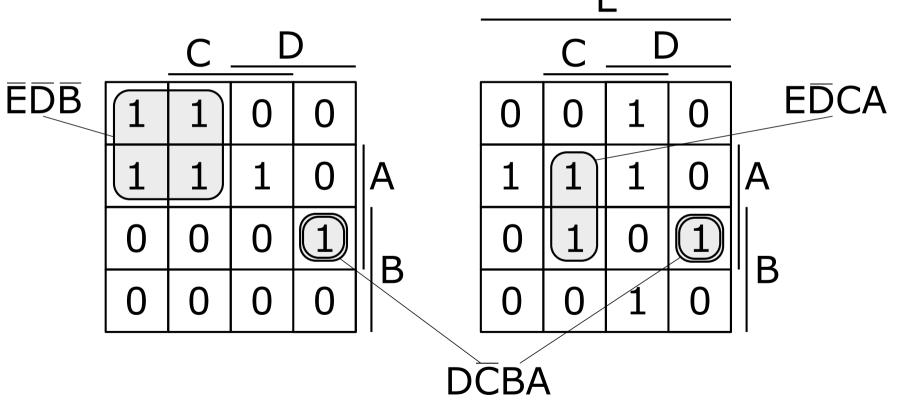
Bestimmen Sie die minimale Polynomialform der Karnaugh-Tabelle aus 4

Variablen

	С		<u> </u>	
1	0	0	1	
1	0	1	1	A
1	0	0	0	
1	1	1	1	

Vereinfachung mit 5 Variablen





# Aufgabe 3.2





Bestimmen Sie die minimale Polynomialform der Karnaugh-Tabelle aus 5 Variablen

1	1	0	0
1	1	1	0
0	0	0	1
0	0	0	0

	С		D	
0	0	1	0	
1	1	1	0	A
0	1	0	1	
0	0	1	0	

# Unvollständig definierte Funktion



	<u>C</u>	<u>C</u>	<u> </u>		
1	1	-	1		
1	0	-	1	Α	
1	1	_		$\ $	
1	0	-	_	B  -	
$\overline{C} + \overline{B}\overline{A} + BA$					

#### Aufgabe 3.11





Bestimmen Sie die minimale Polynomialform der Mehrheitsfunktion mit 4 Eingängen:

- die Funktion ergibt eine '0', wenn mehr als die Hälfte der Eingänge auf '0' sind.
- die Funktion ergibt eine '1', wenn mehr als die Hälfte der Eingänge auf '1' sind,
- wenn gleich viele Eingänge auf '0' und auf '1' sind, dann kann das Resultat irgendwelchen Wert nehmen.

#### Inhalt



- Karnaugh Tabellen
- Vereinfachung mittels einer Summe von Produkten
- Vereinfachung mittels Exklusiv-ODER Funktionen
  - Dastellung
  - Vereinfachung
- Funktionen mit einer grossen Anzahl an Eingängen

Darstellung einer Exklusiv-Oder (XOR) Funktion



<u>C</u> <u>D</u>						
	0	1	1	0		
	0	1	0	1	A	
Ī	1	0	1	0		
	1	0	0	1	B 	
_	$\overline{C} \oplus \overline{B} \oplus DA$					

#### Aufgabe 5.1





Darstellung von XOR-Funktionen (benutzten Sie Karnaughtabellen mit 4 Eingängen)

 $a \oplus b$ 

 $a \oplus b \oplus c$ 

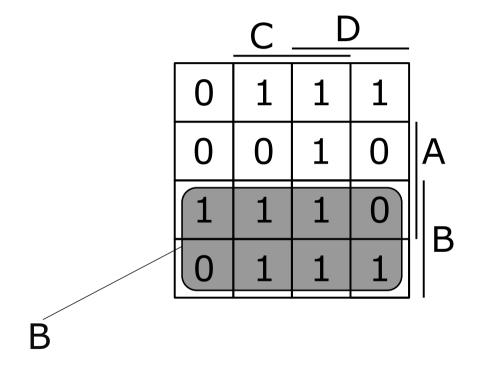
Vereinfachung mittels eines Exklusiv-Oder (XOR)



	<u>C</u>		)	
0	1	1	1	
0	0	1	0	A
1	1	1	0	
0	1	1	1	B

Vereinfachung mittels eines Exklusiv-Oder (XOR)





Vereinfachung mittels eines Exklusiv-Oder (XOR)



				<u>C</u>		<u> </u>	
			0	1	1	1	
			0	0	1	0	Α
			1	1	1	0	
			O	1	1	1	В
В	$\oplus$	BD					-

Vereinfachung mittels eines Exklusiv-Oder (XOR)



				<u>C</u>		)	
			0	1	1	1	
			0	0	1	0	Α
			1	1	1	0	B
			0	1	1	1	
3	$\oplus$	$\overline{B}D$	<b>1 ⊕</b>	ΟŒΑ	\		

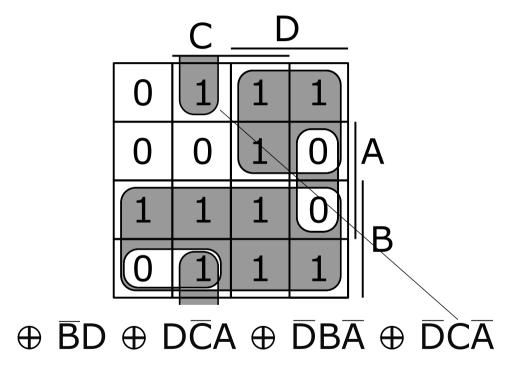
Vereinfachung mittels eines Exklusiv-Oder (XOR)



		<u>C</u>		<u> </u>	
	0	1	1	1	
	0	0	1	0	Α
	1	1	1	0	B
	0	1	1	1	
⊕ BD	<b>+</b> [	OCA	<b>√</b>	DBA	<u> </u>

Vereinfachung mittels eines Exklusiv-Oder (XOR)





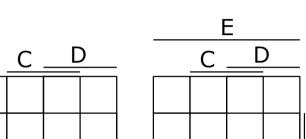
#### Inhalt

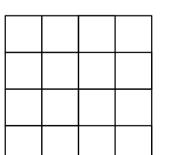


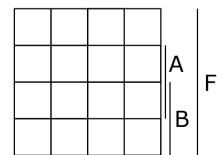
- Karnaugh Tabellen
- Vereinfachung mittels einer Summe von Produkten
- Vereinfachung mittels Exklusiv-ODER Funktionen
- Funktionen mit einer grossen Anzahl an Eingängen
  - Algebraische Vereinfachung
  - Vereinfachung in Blöcke von überschaubarer Grösse
  - Iterative Systeme

Funktionen mit einer grossen Anzahl an Eingängen

Funktion mit 6 Eingängen



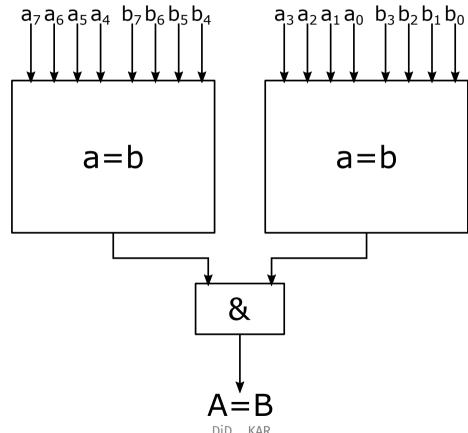






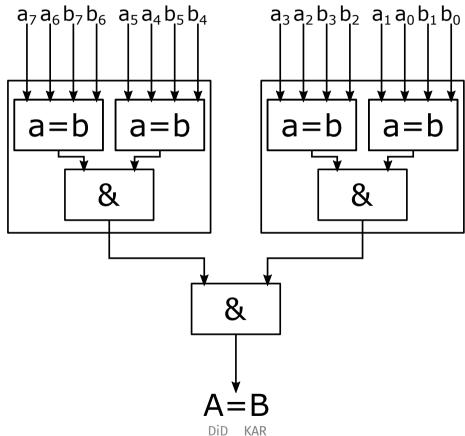
Vereinfachung in Blöcke





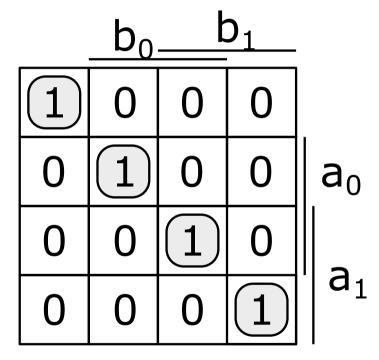
Vereinfachung in Blöcke

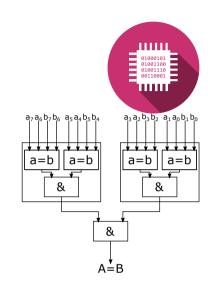




Vereinfachung in Blöcke

A=B, 2x2 Bits





$$\overline{a_0}\overline{b_0}\overline{a_1}\overline{b_1} + a_0b_0\overline{a_1}\overline{b_1} + \overline{a_0}\overline{b_0}a_1b_1 + a_0b_0a_1b_1$$

### Algebraische Vereinfachung

#### Zahlenvergleich algebraisch



$$A = a_7 * 2^7 + a_6 * 2^6 + \dots + a_1 * 2^1 + a_0 * 2^0$$
  

$$B = b_7 * 2^7 + b_6 * 2^6 + \dots + b_1 * 2^1 + b_0 * 2^0$$

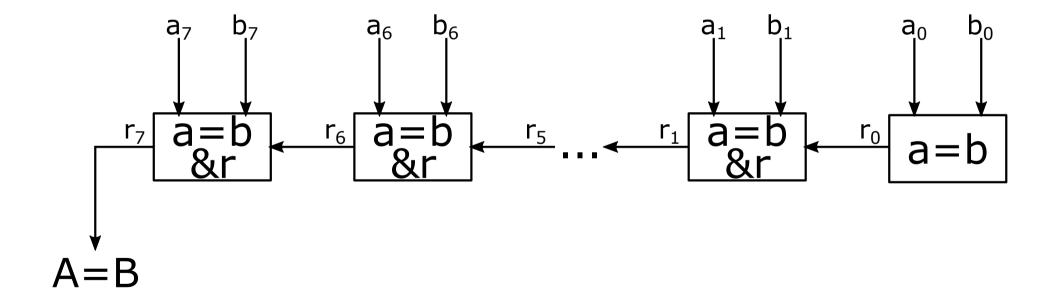
$$A = B \iff (a_7 = b_7) * (a_6 = b_6) * ... * (a_1 = b_1) * (a_0 = b_0)$$

$$A = B \iff (a_7 \oplus b_7) * (a_6 \oplus b_6) * ... * (a_1 \oplus b_1) * (a_0 \oplus b_0)$$

$$A = B \iff (a_7 b_7 + \overline{a_7} \overline{b_7}) * (a_6 b_6 + \overline{a_6} \overline{b_6}) * ... * (a_1 b_1 + \overline{a_1} \overline{b_1}) * (a_0 b_0 + \overline{a_0} \overline{b_0})$$

# **Iterative Systeme**





### **Iterative Systeme**

**Iterativer Block** 



Erster Block unterschiedlich der restlichen:  $r_0 = \overline{a_0} * \overline{b_0} + a_0 * b_0$ 

Erster Block gleich wie die restlichen:  $r_{-1} = 1$ 

# Aufgabe 6.1





Zahlenvergleich (A > B)

#### Referenzen



- [Man78] (Französisch) Gute Presentation
- [Toc92] (Französisch) Vollständige Beispiele
- [Max95] (Englisch) Einfach zum lesen
- [Wak00] (Englisch) Gute Erklärungen Karnaugh + Algorithmen
- [Fle80] (Englisch) Vereinfachungs Algorithmen
- [Kat94] (Englisch) Vereinfachungs Algorithmen

WHY ARE THERE MIRRORS ABOVE BEDS

WHY DO I SAY WHY IS SEA SALT BETTER IN

WHY IS THERE NOT A POKEMON MMO WHY IS THERE LAUGHING IN TV SHOWS ARE THERE DOORS ON THE FREEWAY ARE THERE SO MANY SVCHOST-EXE RUNNING AREN'T ANY COUNTRIES IN ANTARCTICA WHY ARE THERE SCARY SOUNDS IN MINECRAFT WHY IS THERE KICKING IN MY STOMACH WHY ARE THERE TWO SLASHES AFTER HTTP WHY ARE THERE CELEBRITIES WHY DO SNAKES EXIST WHY DO OYSTERS HAVE PEARLS WHY ARE DUCKS CALLED DUCKS WHY DO THEY CALL IT THE CLAP WHY IS THERE AN ARROW ON AANG'S HEAD 🗷 WHY ARE TEXT MESSAGES BLUE WHY ARE THERE MUSTACHES ON CLOTHES WHY WUBA LUBBA DUB DUB MEANING IS THERE A WHALE AND A POT FALLING WHY ARE THERE SO MANY BIRDS IN SWISS WHY IS THERE SO LITTLE RAIN IN WALLIS WHY IS WALLIS WEATHER FORECAST ALWAYS WRONG

WHY HAVE DINOSAURS NO FUR WHY ARE SWISS AFRAID RWHY IS THERE A LINE THROUGH HI TO WHY IS THERE A RED LINE THROUGH HTTPS ON TWITTER

WHY AREN'T MY ARMS GROWING WHY ARE THERE SO MANY CROWS IN ROCHESTER & WHY IS TO BE OR NOT TO BE FUNNY

WHY DO CHILDREN GET CANCER 🗢

WHY IS POSEIDON ANGRY WITH ODYSSEUS

WHY AREN'T ECONOMISTS RICH WHY DO AMERICANS CALL IT SOCCER & WHY ARE MY EARS RINGING WHY IS 42 THE ANSWER TO EVERYTHING WHY CAN'T NOBODY ELSE LIFT THORS HAMMER S **SWHY IS THERE ICE IN SPACE** WHY IS MARVIN ALWAYS SO SAD

WHY IS SPACE BLACK WHY IS OUTER SPACE SO COLD WHY ARE THERE PYRAMIDS ON THE MOON WHY IS NASA SHUTTING DOWN A

THERE MALE AND FEMALE BIKES E WHY ARE THERE TINY SPIDERS IN MY HOUSE ' DO SPIDERS COME INSIDE

WHY ARE THERE HUGE SPIDERS IN MY HOUSE  $_{
m H}$  WHY ARE THERE LOTS OF SPIDERS IN MY HOUSE  $\overline{oldsymbol{\lambda}}$ 为WHY ARE THERE SO MANY SPIDERS IN MY ROOM

SPYDER BITES ITCH

WHY ARE THERE **GHOSTS** 



WHY IS THERE AN OWL IN MY BACKYARD WHY IS THERE AN OWL OUTSIDE MY WINDOW WHY IS THERE AN OWL ON THE DOLLAR BILL WHY DO OWLS ATTACK PEOPLE WHY ARE FPGA'S EVERYWHERE WHY ARE THERE HELICOPTERS CIRCLING MY HOUSE WHY ARE THERE GODS

WHY ARE THERE TWO SPOCKS 'IS https://xkcd·com/1256/ THEY SAY T-MINUS WHY ARE THERE OBELISKS MWHY ARE WRESTLERS ALWAYS WET

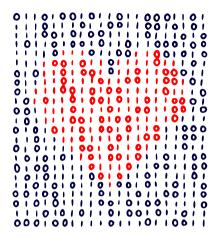
WHY ARE MY BOOBS ITCHY WHY DO Q TIPS FEEL GOOD

> WHY AREN'T THERE GUNS IN

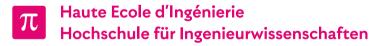
WHY ARE KYLE AND CARTMAN FRIENDS

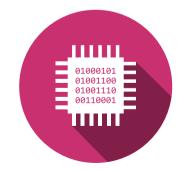
WHY ARE THERE BRIDESMAIDS WHY DO DYING PEOPLE REACH UP HOW FAST IS LIGHTSPEED WHY ARE OLD KLINGONS DIFFERENT

WHY ARE THERE SQUIRRELS









Silvan Zahno <u>silvan.zahno@hevs.ch</u> Christophe Bianchi <u>christophe.bianchi@hevs.ch</u> François Corthay <u>francois.corthay@hevs.ch</u>