Haute Ecole d'Ingénierie
Hochschule für Ingenieurwissenschaften

Digitales Design (DiD)

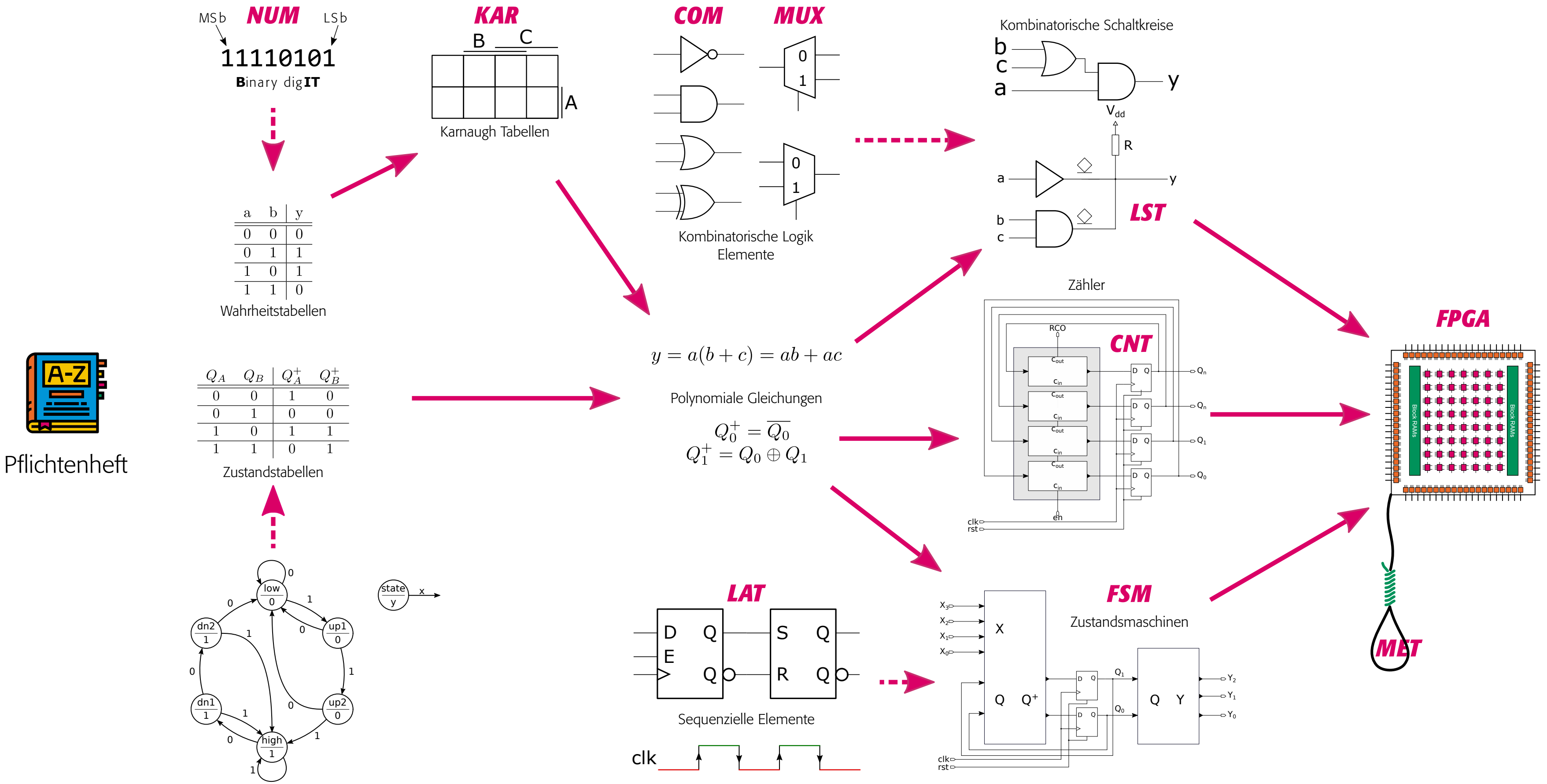
Numerische Darstellung und Codes

NUM

Studiengang Systemtechnik
Studiengang Energie und Umwelttechnik
Studiengang Informatik und Kommunikationssysteme

Silvan Zahno silvan.zahno@hevs.ch
Christophe Bianchi christophe.bianchi@hevs.ch
François Corthay francois.corthay@hevs.ch

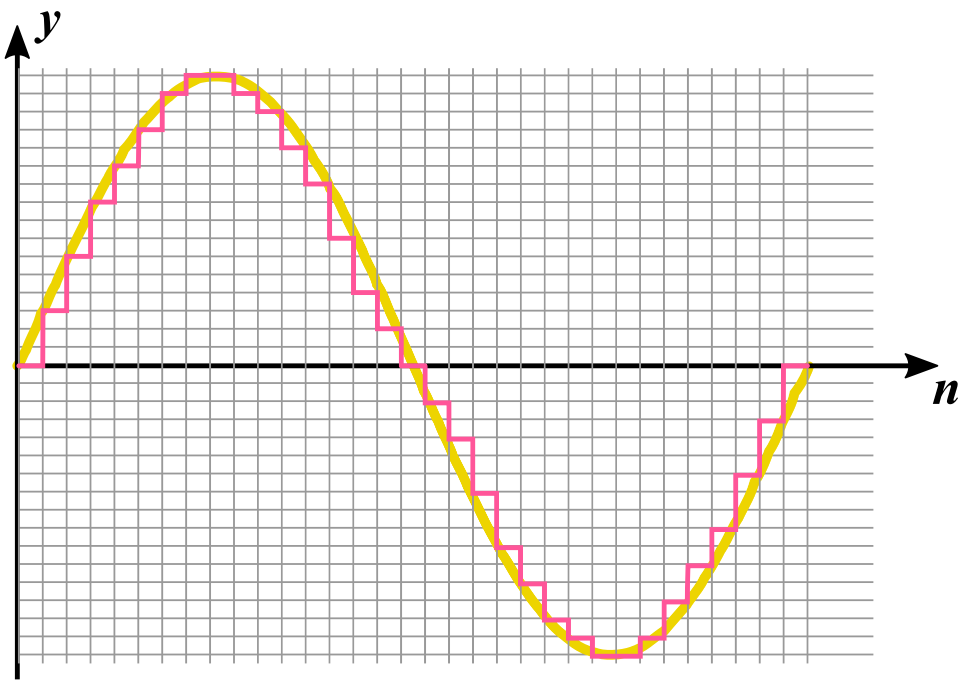
Aktueller Inhalt des Themas im Kurs



Inhalt

- **Zahlensysteme**
    - Dezimalsystem
    - Binärsystem
    - Hexadezimalsystem
- Umwandlung von Zahlensystemen
- Operationen auf Logikzahlen
- Codes
- Darstellung von Arithmetischen Zahlen (Vorzeichenbehaftet)

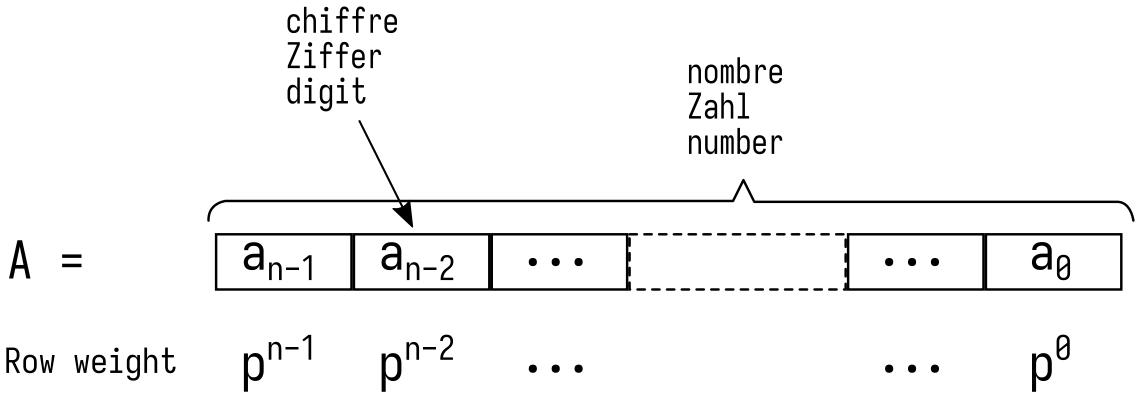
Wechsel von Analog zu Digital



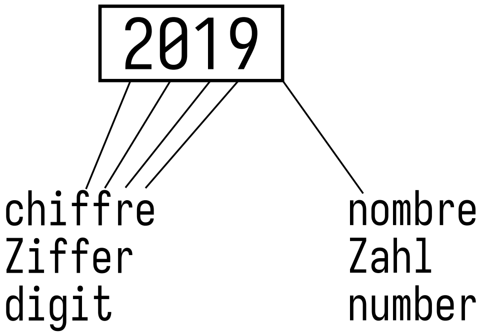
- Diskrete Zeiten und Amplituden
- Frequenzabhängiges Zeitintervall
- n: Stichprobennummer (z.B. 32 Stichproben über den Zeitraum)
- y: Signalamplitude (Beispiel: 32 mögliche Werte)

Allgemeine Darstellung von Ganzen Zahlen

Nach dem Positionsnummernsystem besteht eine Zahl aus Ziffern



In der Basis 10 , p=10



Dezimalsystem

Im Allgemeinen verwendet der Mensch die Basis 10

10 Symbole : 0,1,2,3,4,5,6,7,8 und 9

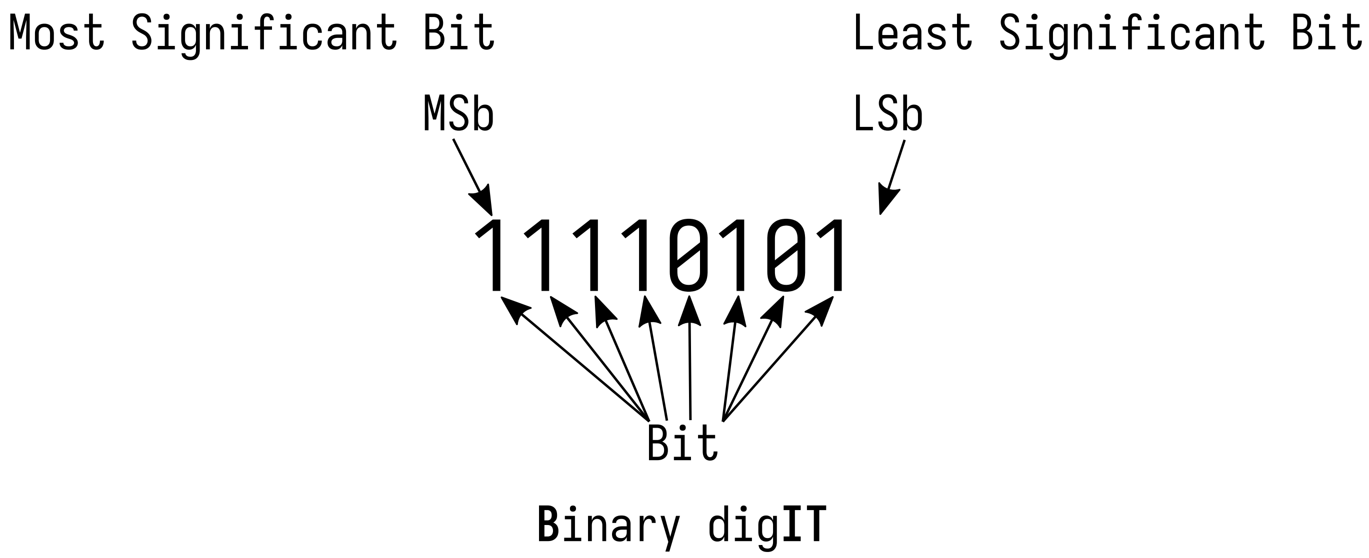
Jede Position entspricht einer Potenz von 10
⇨1,10,100,1000,...

Beispiel: $245_{10} = 2*10^2 + 4*10^1+5*10^0$

Binärsystem

Das BIT

- Computer arbeiten in Basis 2
- 2 Symbole : 0 und 1
- Eine Binärzahl (0/1) wird ein BIT (**B**inary dig**IT**) genannt



- Beispiel: $11110101_2=1*2^7+1*2^6+1*2^5+1*2^4+0*2^3+1*2^2+0*2^1+1*2^0$

Binärsystem

Das Byte

- 8 BIT bilden ein Byte (octet)
  - Rein historisch

- Using IEC standard:
  - 1 KiB = 1’024 bytes (Note: big K)
  - 1 MiB = 1’024 KiB = 1’048’576 bytes
  - 1 GiB = 1’024 MiB = 1’048’576 KiB = 1’073’741’824 bytes
- Using SI standard:
  - 1 kB = 1’000 bytes (Note: small k)
  - 1 MB = 1’000 kB = 1,000,000 bytes
  - 1 GB = 1’000 MB = 1’000’000 KB = 1’000’000’000 bytes

11110101

8 Bit = 1 Byte

Hexadezimalsystem

- 16 Symbole

- 2er Potenz ($16 = 2^4$)
  Bit-Gruppierung von 4

- Ermöglicht das Schreiben von Binärzahlen
- in kompakter Form

Decimal	Hexadecimal	Binary
0	0	0000
1	1	0001
2	2	0010
3	3	0011
4	4	0100
5	5	0101
6	6	0110
7	7	0111
8	8	1000
9	9	1001
10	A	1010
11	B	1011
12	C	1100
13	D	1101
14	E	1110
15	F	1111

Schreibweisen

- Dezimal
  - 9_{10}, 9_{d}
- Binär
  - 0b1001, 1001_{2}, 1001_{b}
- Hexadezimal
  - 0x9, 9_{16}, 9_{h}

Inhalt

- Zahlensysteme
- **Umwandlung von Zahlensystemen**
  - Binär ⇨ Dezimal
  - Dezimal ⇨ Binär
  - Hexadezimal ⇨ Binär
  - Binär ⇨ Hexadezimal
  - Hexadezimal ⇨ Dezimal
  - Dezimal ⇨ Hexadezimal
- Operationen auf Logikzahlen
- Codes
- Darstellung von Arithmetischen Zahlen (Vorzeichenbehaftet)

Umwandlung

Binär ⇨ Dezimal

Addition der Gewichte der Positionen (2er-Potenz), bei denen es eine 1 gibt

$$\begin{array}{cccccccc} 2^7 & 2^6 & 2^5 & 2^4 & 2^3 & 2^2 & 2^1 & 2^0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

$$128+64+32+16+4+1 = 245_{10}$$

Umwandlung

Dezimal ⇨ Binär (kleine Zahlen)

- Suchen Sie nach den zu berücksichtigenden 2er-Potenzen, so dass die Summe die angegebene Dezimalzahl ergibt.
- Ausgehend von höherwertigen Bits

$$77_{10} = \cancel{128}+64+\cancel{32}+\cancel{16}+8+4+\cancel{2}+1$$

$$0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1$$

Umwandlung

Dezimal ⇨ Binär (grosse Zahlen)

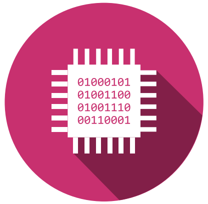
- Wiederholen Sie die Division durch 2 der angegebenen Dezimalzahl, bis der Quotient 0 ist.

- Der Rest jeder Division ergibt ein zusätzliches Bit der Zahl, beginnend mit dem niederwertigsten Bit.

```
245 / 2 = 122 + remainder 1
122 / 2 = 61  + remainder 0
61  / 2 = 30  + remainder 1
30  / 2 = 15  + remainder 0
15  / 2 = 7   + remainder 1
7   / 2 = 3   + remainder 1
3   / 2 = 1   + remainder 1
1   / 2 = 0   + remainder 1
```

$$245_{10} = 11110101_2$$

Aufgabe



- 2.1.c) (*num/conversion-01*) Führen Sie die Umwandlung der folgenden reinen Binärzahl durch :

❑ $01001010_2 = ?_{10}$

- 2.2.a) (*num/conversion-02*) Führen Sie folgende Dezimalzahl-Konvertierung durch :

❑ $125_{10} = ?_2$

Umwandlung

Hexadezimal ⇨ Binär

- Gruppierung der Bits in Vierergruppen, beginnend mit dem niedrigstwertigen Bit und Umwandlung dieser Vierergruppen in ihr hexadezimales Äquivalent

101 0111 1110 1010

5 7 E A

Aufgabe

- 2.4.c) *(num/conversion-04)* Führen Sie die Umwandlung der folgenden reinen Binärzahl durch :

❑ $11101011_2 = ?_{16}$

- 2.3.c) *(num/conversion-03)* Führen Sie die Konvertierung der folgenden hexadezimalen Zahl durch :

❑ $AB3D_{16} = ?_2$

Umwandlung

Hexadezimal ⇨ Dezimal

- Addition der Produkte, die durch jede hexadezimale Ziffer gebildet werden, und ihr entsprechendes Positionsgewicht

$$\begin{array}{ccc} F & & 5 \\ \downarrow & & \downarrow \end{array}$$

$$15 \times 16^1 + 5 \times 16^0 = 245_{10}$$

Umwandlung

Dezimal ⇨ Hexadezimal

- Wiederholen Sie die Division der angegebenen Dezimalzahl durch 16, bis der Quotient 0 ist.
- Die hexadezimale Zahl besteht dann aus den aufeinanderfolgenden Resten der einzelnen Teilungen, wobei der erste gefundene Rest der Ziffer mit niedrigem Gewicht und der letzte Rest der Ziffer mit hohem Gewicht entspricht.

```
245 / 16 = 15 + remainder  5
15  / 16 = 0  + remainder 15
```

$$245_{10} = F5_{16}$$

Inhalt

- Zahlensysteme
- Umwandlung von Zahlensystemen
- **Operationen auf Logikzahlen**
  - Addition
  - Subtraktion
  - Multiplikation
- Codes
- Darstellung von Arithmetischen Zahlen (Vorzeichenbehaftet)

Addition Binärer Zahlen

- Wie im Dezimalsystem: von LSb nach MSb mit Fortschreibung des Übertrages in der nachfolgenden Spalte
- Max. 1 zusätzliches Bit

$$
\begin{array}{r}
2 \\
+\ 6 \\
\hline
8
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
0010 \\
+\ 0110 \\
+\ 11 \\
\hline
1000
\end{array}
$$

Dec	Bin
3	11
2	10
1	01
0	00

Subtraktion Binärer Zahlen

- Wie im Dezimalsystem: von LSb nach MSb mit Propagierung der Anfrage an die folgende Spalte

$$
\begin{array}{rr}
 & 11 \\
- & 4 \\
\hline
 & 7
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
 & 2 \\
 & 1011 \\
- & 0100 \\
- & 1 \\
\hline
 & 0111
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rr}
 & 11 \\
- & 4 \\
\hline
 & 7
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
 & 1011 \\
- & 0100 \\
- & 1 \\
\hline
 & 0111
\end{array}
$$

Dec	Bin
3	11
2	10
1	01
0	00
-1	11
-2	10

- Subtraktion auch mit Addition möglich 11-4 = 11+(-4)

Aufgabe

- 3.1.2) *(num/operation-01)* Führen Sie die folgende Operation im Binärsystem durch :

❑ $00001111_2 + 01011010_2$

- 3.2.3) *(num/operation-02)* Führen Sie die folgende Operation im Binärsystem durch :

❑ $00110100_2 - 00101000_2$

Multiplikation Binärer Zahlen

- Wie im Dezimalsystem: durch partielle Multiplikationen und Additionen. Partielle Multiplikationen sind im Binärsystem auf Verschiebungen nach links vom ersten Multiplikator beschränkt.

11	1011	1st multiplier
x 13	x 1101	2nd multiplier
143	00000000	Initialisation
	+ 1011	
	00001011	1st product
	+ 0000	Multiplier shift
	00001011	2nd product
	+ 1011	Multiplier shift
	00110111	3rd product
	+ 1011	Multiplier shift
	10001111	Result

Inhalt

- Zahlensysteme
- Umwandlung von Zahlensystemen
- Operationen auf Logikzahlen
- **Codes**
  - Binär Codierte Dezimalzahlen (BCD)
  - Gray Code
- Darstellung von Arithmetischen Zahlen (Vorzeichenbehaftet)

Binär Codierte Dezimalzahlen (BCD)

- Jede Stelle einer Dezimalzahl wird durch ihr binäres Äquivalent dargestellt
- Es braucht 4 Bits, um jede Dezimalstelle von 0 bis 9 zu kodieren.
- Einsatz für Displaysysteme

2 4 5

0010 0100 0101

- Komplexere Arithmetik!

Gray code

- Ein besonderer linearer Code, der so gestaltet ist, dass sich beim Wechsel von einem Wort zum nächsten nur eine Ziffer der Zahl ändert.
- Reflektierter Graybinärcode
- Einsatz bei Positionsgebern

$$b_3 = g_3$$
$$b_2 = b_3 \oplus g_2 = g_3 \oplus g_2$$
$$b_1 = b_2 \oplus g_1 = g_3 \oplus g_2 \oplus g_1$$
$$b_0 = b_1 \oplus g_0 = g_3 \oplus g_2 \oplus g_1 \oplus g_0$$

$$g_3 = b_3$$
$$g_2 = b_3 \oplus b_2$$
$$g_1 = b_2 \oplus b_1$$
$$g_0 = b_1 \oplus b_0$$

Decimal	Binary	Gray
0	0000	0000
1	0001	0001
2	0010	0011
3	0011	0010
4	0100	0110
5	0101	0111
6	0110	0101
7	0111	0100
8	1000	1100
9	1001	1101
10	1010	1111
11	1011	1110
12	1100	1010
13	1101	1011
14	1110	1001
15	1111	1000

Mirror

Mirror

Mirror

Gray code

0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1

0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0
0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0
0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1

Inhalt

- Zahlensysteme
- Umwandlung von Zahlensystemen
- Operationen auf Logikzahlen
- Codes
- **Darstellung von Arithmetischen Zahlen (Vorzeichenbehaftet)**
  - Vorzeichen-Grösse
  - Biased Notation
  - Einer-Komplement (1^{st}-Complement)
  - Zweier-Komplement (2^{nd}-Complement)

Vorzeichen-Grösse

- Positive Zahlen = logische Zahlen
- Positive oder negative Zahlen = arithmetische Zahlen

- der Zahl ein Bit voranstellen, dessen Wert z.B. 0 ist, wenn das Vorzeichen positiv ist und 1, wenn das Vorzeichen negativ ist.

	S							
+1	0	0	0	0	0	0	0	1
-1	1	0	0	0	0	0	0	1

$$-(2^{n-1}-1) \leq A \leq 2^{n-1}-1$$

$$-7 \leq A \leq 7 \qquad n=4$$

- Aber ... doppelte Darstellung der 0

Biased-Notation

- Kodierung einer positiven oder negativen ganzen Zahl A als eine Zahl N, so dass $N = A + R$, wobei $\mathrm{R} = 2^{n-1} - 1$ eine positive Vorspannung ist, die so gewählt wird, dass N immer positiv ist.

Representation	Min		...		Zero		...		Max
Shift decimal	0	1		126	127	128		254	255
Decimal	-127	-126		-1	0	1		127	128
Shift binary	00000000	00000001		01111110	01111111	10000000		11111110	11111111

$$-(2^{n-1} - 1) \leq A \leq 2^{n-1}$$

$$-7 \leq A \leq 8 \qquad \text{n=4}$$

- Eine einzige Darstellung der 0
- Aber ... nicht-ideale Darstellung von positiven Zahlen (≠ binäre Darstellung der logischen Zahl), in der Praxis nicht verwendet

1st-Komplement

- voreingenommene Darstellung, aber nur auf negative Zahlen angewandt
- positive Zahlen bleiben unverändert
- $R = 2^n - 1$
- das Komplement zu 1 wird sehr einfach durch logische Negation aller Bits der Zahl berechnet

125 = 01111101

-125 R-125=255-125=130= 10000010

$$-(2^{n-1} - 1) \leq A \leq 2^{n-1} - 1$$

$$-7 \leq A \leq 7 \qquad n=4$$

- Aber … doppelte Darstellung der 0
- In der Praxis wenig genutzt

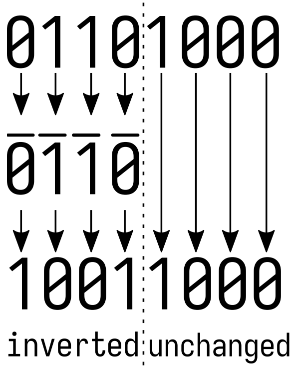
2^{nd}-Komplement

- Wie Einer-Komplement aber mit $R = 2^n$, also Einer-Komplement +1.
- das Zweier-Komplement wird sehr einfach berechnet, indem man die Zahl von rechts nach links durchsucht, indem man folgende Regel anwendet: alle Bits, die bis und mit der ersten 1 gefunden werden, werden behalten, alle weitere werden invertiert.

$$-2^{n-1} \leq A \leq (2^{n-1} - 1)$$

$$-8 \leq A \leq 7$$

n=4



2nd-Komplement

- Extrem einfach für Addition und Subtraktion
- Vorzeichenwechsel

+1	0	0	0	0	0	0	0	1
	1	1	1	1	1	1	1	0
							+	1
−1	1	1	1	1	1	1	1	1

Invertieren

Vorzeichenwechsel

2nd-Komplement

Bereich

	0	0	0	
7	1	1	1	
6	1	1	0	
5	1	0	1	
4	1	0	0	
3	0	1	1	+3
2	0	1	0	+2
1	0	0	1	+1
0	0	0	0	+0
	1	1	1	-1
	1	1	0	-2
	1	0	1	-3
	1	0	0	-4
	0	1	1	

Umwandlung

2nd-Komplement ⇨ Dezimal

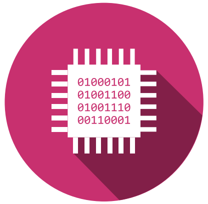
Addition der Gewichte der Positionen (2er-Potenz), bei denen es eine 1 gibt.
Das MSB hat eine Negative Gewichtung.

$$-2^7 \quad 2^6 \quad 2^5 \quad 2^4 \quad 2^3 \quad 2^2 \quad 2^1 \quad 2^0$$

$$1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1$$

$$-128+64+32+16+4+1 = -11_{10}$$

Aufgabe 5.1.4 *(num/representation-01)*



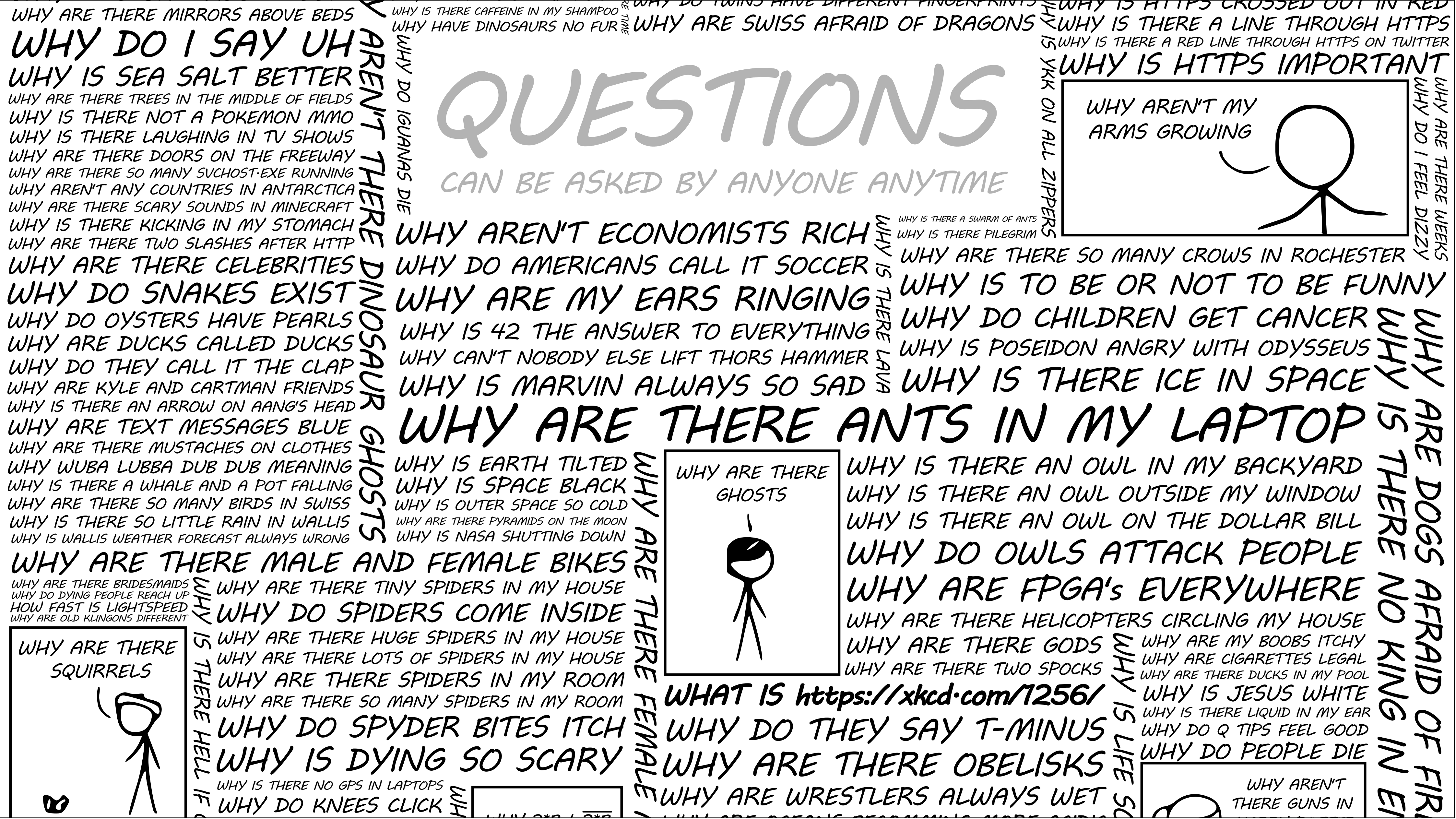
- Geben Sie Darstellung in Vorzeichen-Amplitude, 1-Komplement und 2-Komplement über acht Bits der folgenden dezimalen und reinen Binärzahlen zu geben :

❑ 00011010_2

❑ -104_{10}

Referenzen

- [Max95] (englisch) Numerierungssysteme
- [Alm89] (englisch) Beispiele Operationen
- [Wak00] (englisch) Beispiele Operationen, Multiplikation
- [Beu01] (deutsch) Beispiele Operationen
- [Die88] (englisch) Beispiele Operationen


QUESTIONS
CAN BE ASKED BY ANYONE ANYTIME
WHY ARE THERE MIRRORS ABOVE BEDS
WHY DO I SAY UH
WHY IS SEA SALT BETTER
WHY ARE THERE TREES IN THE MIDDLE OF FIELDS
WHY IS THERE NOT A POKEMON MMO
WHY IS THERE LAUGHING IN TV SHOWS
WHY ARE THERE DOORS ON THE FREEWAY
WHY ARE THERE SO MANY SVCHOST.EXE RUNNING
WHY AREN'T ANY COUNTRIES IN ANTARCTICA
WHY ARE THERE SCARY SOUNDS IN MINECRAFT
WHY IS THERE KICKING IN MY STOMACH
WHY ARE THERE TWO SLASHES AFTER HTTP
WHY ARE THERE CELEBRITIES
WHY DO SNAKES EXIST
WHY DO OYSTERS HAVE PEARLS
WHY ARE DUCKS CALLED DUCKS
WHY DO THEY CALL IT THE CLAP
WHY ARE KYLE AND CARTMAN FRIENDS
WHY IS THERE AN ARROW ON AANG'S HEAD
WHY ARE TEXT MESSAGES BLUE
WHY ARE THERE MUSTACHES ON CLOTHES
WHY WUBA LUBBA DUB DUB MEANING
WHY IS THERE A WHALE AND A POT FALLING
WHY ARE THERE SO MANY BIRDS IN SWISS
WHY IS THERE SO LITTLE RAIN IN WALLIS
WHY IS WALLIS WEATHER FORECAST ALWAYS WRONG
WHY AREN'T THERE DINOSAUR GHOSTS
WHY IS THERE CAFFEINE IN MY SHAMPOO
WHY HAVE DINOSAURS NO FUR
WHY DO IGUANAS DIE
WHY DO TWINS HAVE DIFFERENT FINGERPRINTS
WHY ARE SWISS AFRAID OF DRAGONS
WHY IS HTTPS CROSSED OUT IN RED
WHY IS THERE A LINE THROUGH HTTPS
WHY IS THERE A RED LINE THROUGH HTTPS ON TWITTER
WHY IS HTTPS IMPORTANT
WHY IS YKK ON ALL ZIPPERS
WHY AREN'T MY ARMS GROWING
WHY ARE THERE WEEKS
WHY DO I FEEL DIZZY
WHY AREN'T ECONOMISTS RICH
WHY DO AMERICANS CALL IT SOCCER
WHY ARE MY EARS RINGING
WHY IS 42 THE ANSWER TO EVERYTHING
WHY CAN'T NOBODY ELSE LIFT THORS HAMMER
WHY IS MARVIN ALWAYS SO SAD
WHY IS THERE LAVA
WHY IS THERE A SWARM OF ANTS
WHY IS THERE PILEGRIM
WHY ARE THERE SO MANY CROWS IN ROCHESTER
WHY IS TO BE OR NOT TO BE FUNNY
WHY DO CHILDREN GET CANCER
WHY IS POSEIDON ANGRY WITH ODYSSEUS
WHY IS THERE ICE IN SPACE
WHY ARE THERE ANTS IN MY LAPTOP
WHY IS THERE NO KING IN
WHY ARE DOGS AFRAID OF
WHY IS EARTH TILTED
WHY IS SPACE BLACK
WHY IS OUTER SPACE SO COLD
WHY ARE THERE PYRAMIDS ON THE MOON
WHY IS NASA SHUTTING DOWN
WHY ARE THERE
WHY ARE THERE GHOSTS
WHY IS THERE AN OWL IN MY BACKYARD
WHY IS THERE AN OWL OUTSIDE MY WINDOW
WHY IS THERE AN OWL ON THE DOLLAR BILL
WHY DO OWLS ATTACK PEOPLE
WHY ARE FPGA's EVERYWHERE
WHY ARE THERE HELICOPTERS CIRCLING MY HOUSE
WHY ARE THERE GODS
WHY ARE THERE TWO SPOCKS
WHY IS LIFE
WHY ARE MY BOOBS ITCHY
WHY ARE CIGARETTES LEGAL
WHY ARE THERE DUCKS IN MY POOL
WHY IS JESUS WHITE
WHY IS THERE LIQUID IN MY EAR
WHY DO Q TIPS FEEL GOOD
WHY DO PEOPLE DIE
WHY AREN'T THERE GUNS IN
WHY ARE THERE MALE AND FEMALE BIKES
WHY ARE THERE BRIDESMAIDS
WHY DO DYING PEOPLE REACH UP
HOW FAST IS LIGHTSPEED
WHY ARE OLD KLINGONS DIFFERENT
WHY ARE THERE SQUIRRELS
WHY IS THERE HELL IF
WHY ARE THERE TINY SPIDERS IN MY HOUSE
WHY DO SPIDERS COME INSIDE
WHY ARE THERE HUGE SPIDERS IN MY HOUSE
WHY ARE THERE LOTS OF SPIDERS IN MY HOUSE
WHY ARE THERE SPIDERS IN MY ROOM
WHY ARE THERE SO MANY SPIDERS IN MY ROOM
WHY DO SPYDER BITES ITCH
WHY IS DYING SO SCARY
WHY IS THERE NO GPS IN LAPTOPS
WHY DO KNEES CLICK
WHAT IS https://xkcd.com/1256/
WHY DO THEY SAY T-MINUS
WHY ARE THERE OBELISKS
WHY ARE WRESTLERS ALWAYS WET

Hes·so // VALAIS WALLIS

Haute Ecole d'Ingénierie
Hochschule für Ingenieurwissenschaften

Silvan Zahno silvan.zahno@hevs.ch
Christophe Bianchi christophe.bianchi@hevs.ch
François Corthay francois.corthay@hevs.ch