

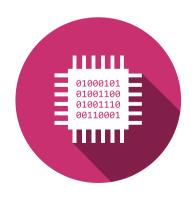


Conception numérique (DiD)

Répresentation numériques et codes

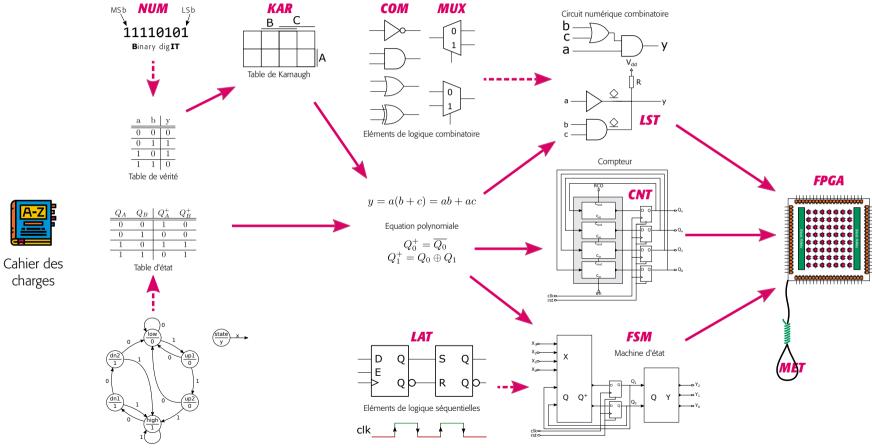
Filière Systèmes industriels Filière Energie et techniques environmentales Filière Informatique et systèmes de communications

Silvan Zahno <u>silvan.zahno@hevs.ch</u> Christophe Bianchi <u>christophe.bianchi@hevs.ch</u> François Corthay <u>francois.corthay@hevs.ch</u>



Situation du thème dans le cours





NUM

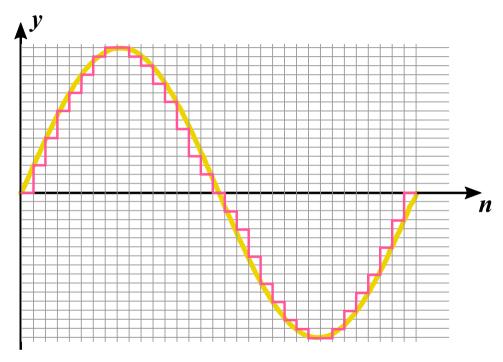
Contenu



- Systèmes de numération
 - Système décimal
 - · Système binaire
 - Système hexadécimal
- · Conversions entre systèmes de numération
- Opérations sur les nombres logiques
- Codes
- Nombres arithmétiques (signés)

Passage de l'analogique au numérique





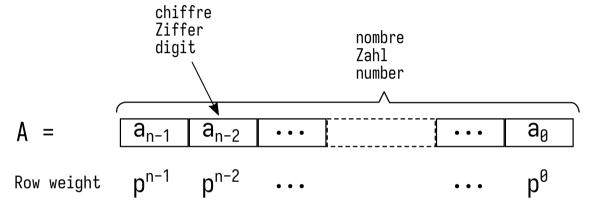
- Temps et amplitude discrets
- Intervalle de temps dépendant de la fréquence
- n: numéro d'échantillon (exemple: 32 échantillons sur la période)
- y: amplitude du signal (exemple: 32 valeurs possible)

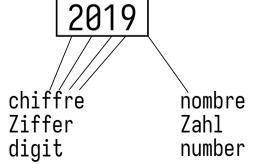
Représentation générale des nombres entiers



Selon le système de numération par position, un nombre se compose de

chiffres





En base 10, p=10

Système décimal



De manière générale l'homme utilise la base 10

10 symboles : 0,1,2,3,4,5,6,7,8 et 9

Chaque position correspond à une puissance de 10 ⇒.... 1000, 100, 10, 1

Exemple: $245_{10} = 2*10^2 + 4*10^1 + 5*10^0$

Système binaire

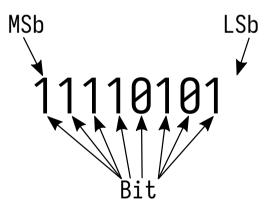
le Bit

01000101 01001100 01001110 00110001

- Les ordinateurs travaillent en base 2
- 2 symboles: 0 et 1
- un chiffre binaire (0/1) s'appelle un BIT (**B**inary dig**IT**)

Most Significant Bit

Least Significant Bit



Binary digIT

Exemple: $11110101_2 = 1^2^7 + 1^2^6 + 1^2^5 + 1^2^4 + 0^2^3 + 1^2^2 + 0^2^1 + 1^2^0$

Système binaire

le Byte

8 BIT forment un Byte (octet)

11110101

- Using IEC standard:
 - 1 KiB = 1'024 bytes (Note: big K)
 - 1 MiB = 1'024 KiB = 1'048'576 bytes
 - 1 GiB = 1'024 MiB = 1'048'576 KiB = 1'073'741'824 bytes
- Using SI standard:
 - 1 kB = 1'000 bytes (Note: small k)
 - 1 MB = 1'000 kB = 1,000,000 bytes
 - 1 GB = 1'000 MB = 1'000'000 KB = 1'000'000'000 bytes



8 Bit = 1 Byte

Système hexadécimal



- 16 symboles
- Puissance de 2 (16 = 2⁴)
 regroupement des bits par 4
- Permet d'écrire des nombres binaires sous forme compacte

Decimal	Hexadecimal	Binary
0	0	0000
1	1	0001
2	2	0010
3	3	0011
4	4	0100
5	5	0101
6	6	0110
7	7	0111
8	8	1000
9	9	1001
10	А	1010
11	В	1011
12	С	1100
13	D	1101
14	E	1110
15	F	1111

Écritures



10

- Décimal
 - 9₁₀, 9_d
- Binaire
 - 0b1001, 1001₂, 1001_b
- Hexadécimal
 - $0x9, 9_{16}, 9_h$

Contenu



- Systèmes de numération
- Conversions entre systèmes de numération
 - binaire ⇒ décimal
 - décimal ⇒ binaire
 - hexadécimal ⇒ binaire
 - binaire ⇒ hexadécimal
 - hexadécimal ⇒ décimal
 - décimal ⇒ hexadécimal
- Opérations sur les nombres logiques
- Codes
- Nombres arithmétiques (signés)

binaire ⇒ décimal



Addition des poids des positions (puissance de 2) où se trouve un 1

$$2^{7} \ 2^{6} \ 2^{5} \ 2^{4} \ 2^{3} \ 2^{2} \ 2^{1} \ 2^{0}$$

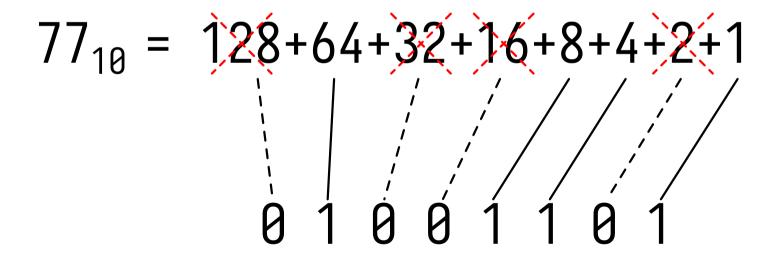
$$1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1$$

$$128+64+32+16+4+1 = 245_{10}$$

décimal ⇒ binaire (petit nombre)



- Recherche des puissance de 2 à prendre en compte pour que la somme fournisse le nombre décimal donné
- Commencement à partir des bits de poids forts



décimal ⇒ binaire (grand nombre)

- Répéter la division par 2 du nombre décimal donné jusqu'à ce que le quotient soit 0
- Le reste de chaque division donne un bit supplémentaire du nombre en commençant par le bit de poids faible



```
245 / 2 = 122 + remainder 1
             + remainder 0-
122 / 2 = 61
              + remainder 1-
   / 2 = 30
30
   / 2 = 15
              + remainder 0-
15
             + remainder 1
   / 2 = 3
             + remainder 1
  /2 = 1 + remainder 1
   / 2 = 0
             + remainder 1
                     245_{10} = 11110101_{2}
```

Exercices



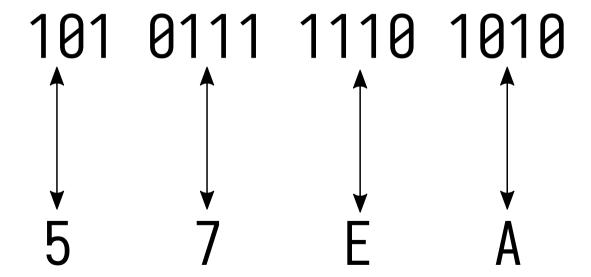
- 2.1.c) (num/conversion-01) Effectuer la conversion du nombre binaire pur suivant :
- \square 01001010₂ = ?₁₀

- 2.2.a) (num/conversion-02) Effectuer la conversion du nombre décimal suivant :
- \Box 125₁₀ = ?₂

hexadécimal ⇒ binaire



• Regroupement des bits par quatre en partant du bit de poids faible et conversion de ces groupes de quatre en leur équivalent hexadécimal



Exercices





$$\square$$
 11101011₂ = ?₁₆

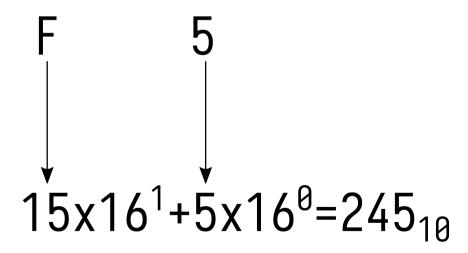
• 2.3.c) (num/conversion-03) Effectuer la conversion du nombre hexadécimal suivant :

$$\Box$$
 AB3D₁₆ = ?₂

hexadécimal ⇒ décimal



 Addition des produits formés de chaque chiffre hexadécimal et de leur poids positionnel correspondant



décimal ⇒ hexadécimal



- Répéter la division par 16 du nombre décimal donné jusqu'à ce que le quotient soit 0.
- Le nombre hexadécimal se compose alors des restes successifs de chacune des divisions sachant que le premier reste trouvé correspond au digit de poids faible et que le dernier reste correspond au digit de poids fort

245 / 16 = 15 + remainder 5—
15 / 16 = 0 + remainder 15—
$$245_{10} = F5_{16}$$

Contenu



- Systèmes de numération
- Conversions entre systèmes de numération
- Opérations sur les nombres logiques
 - Addition
 - Soustraction
 - Multiplication
- Codes
- Nombres arithmétiques (signés)

Addition de nombres binaires



- Comme dans le système décimal: du LSb au MSb avec propagation du report sur les colonnes suivantes
- Max 1 bit supplémentaire

Dec	Bin
3	11
2	10
1	01
0	00

Soustraction de nombres binaire



 Comme dans le système décimal: du LSb au MSb avec propagation de la demande d'emprunt sur les colonnes suivantes

Soustraction aussi possible avec une addition 11-4 = 11+(-4)

Exercices



- 3.1.2) (num/operation-01) Effectuer dans le système binaire l'opération suivante :
- \square 00001111₂ + 01011010₂

- 3.2.3) (num/operation-02) Effectuer dans le système binaire l'opération suivante :
- \square 00110100₂ 00101000₂

Multiplication de nombres binaire



• Comme dans le système décimal: par suite de multiplications partielles et d'additions. Les multiplications partielles se limitent dans le système binaire à des décalages à gauche du premier multiplieur.

11	1011	1 st multiplier
x 13	x 1101	2 nd multiplier
143	00000000	Initialisation
	+ 1011	
	00001011	-1 st product
	+ 0000	Multiplier shift
	00001011	2 nd product
	+ 1011	Multiplier shift
	00110111	3 rd product
	+ 1011	Multiplier shift
	10001111	- Result

Contenu



- Systèmes de numération
- Conversions entre systèmes de numération
- Opérations sur les nombres logiques

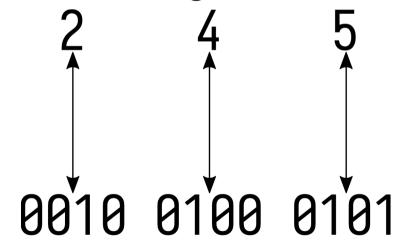
Codes

- Décimal codé binaire (BCD)
- Code Gray
- Nombres arithmétiques (signés)

Binary coded decimal (BCD)



- Chaque chiffre d'un nombre décimal est représenté par son équivalent binaire
- Il faut 4 bits pour coder chaque chiffre décimal de 0 à 9
- Utilisé pour les systèmes d'affichage



Arithmétique plus complexe!

Gray code



Mirror

Mirror

Mirror

• Un code linéaire particulier conçu de telle sorte qu'un seul chiffre du nombre

change lorsqu'on passe d'un mot au suivant

- Code de Gray binaire réfléchi
- Utilisé pour les encodeurs de position

$$b_{3} = g_{3}$$

 $b_{2} = b_{3} \oplus g_{2} = g_{3} \oplus g_{2}$
 $b_{1} = b_{2} \oplus g_{1} = g_{3} \oplus g_{2} \oplus g_{1}$
 $b_{0} = b_{1} \oplus g_{0} = g_{3} \oplus g_{2} \oplus g_{1} \oplus g_{0}$

$$g_3 = b_3$$

$$g_2 = b_3 \oplus b_2$$

$$g_1 = b_2 \oplus b_1$$

$$g_0 = b_1 \oplus b_0$$

Decimal	Binary	Gray
0	0000	0000
1	0001	0001
2	0010	0011
3	0011	0010
4	0100	0110
5	0101	0111
6	0110	0101
7	0111	0100
8	1000	1100
9	1001	1101
10	1010	1111
11	1011	1110
12	1100	1010
13	1101	1011
14	1110	1001
15	1111	1000

Gray code



0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1

0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0
0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0
0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1

Contenu



- Systèmes de numération
- Conversions entre systèmes de numération
- Opérations sur les nombres logiques
- Codes
- Nombres arithmétiques (signés)
 - Signe et amplitude (Bias Notation)
 - Complément à 1 (1st-Complement)
 - Complément à 2 (2nd-Complement)

Représentation par signe - amplitude



- Nombres positifs = nombres logiques
- Nombres positifs ou négatifs = nombres arithmétiques
- précéder le nombre par un bit dont la valeur est par exemple 0 lorsque le signe est positif et 1 lorsque le signe est négatif

 +1
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 1

 -1
 1
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 1

$$-(2^{n-1}-1) \le A \le 2^{n-1}-1$$

 $-7 \le A \le 7$ n=4

Mais ... double représentation du 0

Biased-Notation



• coder un nombre entier positif ou négatif A sous la forme d'un nombre N tel que N=A+R, où $R=2^{n-1}-1$ est un biais positif choisi de telle sorte que N soit toujours positif.

Representation	Min		•••		Zero		•••		Max
Shift decimal	0	1		126	127	128		254	255
Decimal	-127	-126		-1	0	1		127	128
Shift binary	00000000	00000001		01111110	01111111	10000000		11111110	11111111

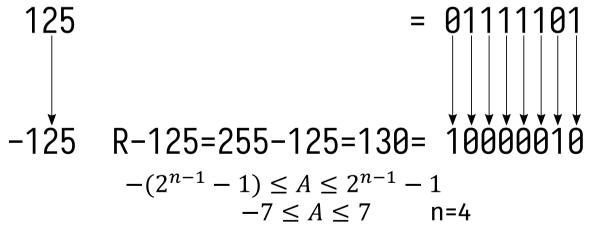
$$-(2^{n-1}-1) \le A \le 2^{n-1}$$

-7 \le A \le 8 \qquad n=4

- Une seule représentation du 0
- Mais ... représentation non idéale des nombres positifs (≠ représentation binaire du nombre logique), pas utilisée dans la pratique.



- représentation biaisée mais appliquée uniquement aux nombres négatifs
- les nombres positifs restent inchangés
- $R = 2^n 1$
- le complément à 1 se calcule très simplement par négation logique de tous les bits du nombre



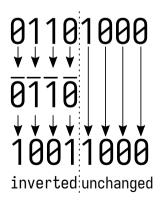
- Mais ... double représentation du 0
- Peu utilisé en pratique



- Idem que complément à 1 mais avec $R=2^n$, donc complément à 1 +1.
- le complément à 2 se calcule très simplement en parcourant le nombre de droite à gauche en appliquant la règle suivante : tous les bits rencontrés jusqu'au premier 1 y compris sont conservés, tous les suivants sont inversés.

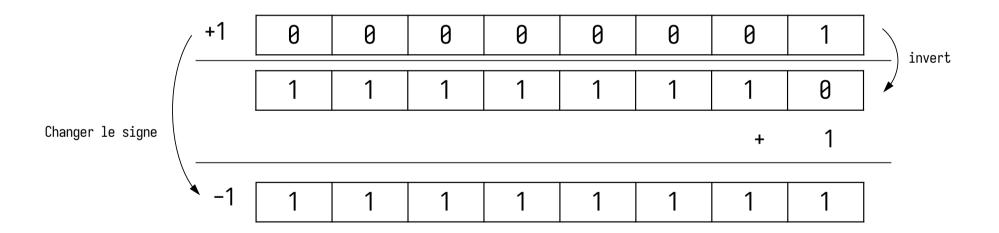
$$-2^{n-1} \le A \le (2^{n-1}-1)$$

-8 \le A \le 7 \quad n=4

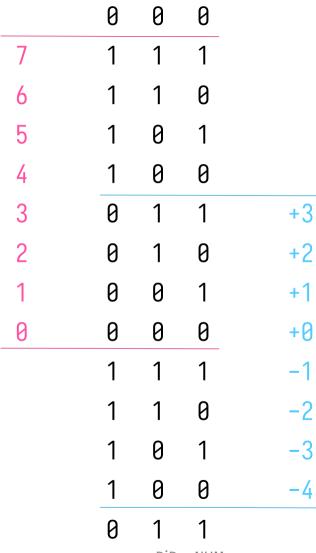




• Extrêmement simple pour changer le signe



Gammes





ZaS, BiC, CoF DiD NUM 38

Complément à 2 ⇒ décimal



Addition des poids des positions (puissance de 2) où se trouve un 1. Le MSB a une pondération négative.

$$-2^{7} 2^{6} 2^{5} 2^{4} 2^{3} 2^{2} 2^{1} 2^{0}$$

$$1 1 1 1 0 1 0 1$$

$$-128+64+32+16+4+1 = -11_{10}$$

Exercices 5.1.4 (num/representation-01)





 Donner la représentation en signe-amplitude, complément à 1 et complément à 2 sur huit bits des nombres décimaux et binaires purs suivants :

1 00011010₂

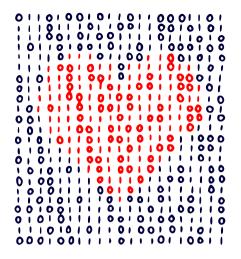
□ -104₁₀

Références



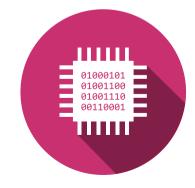
- [Max95] (anglais) Systèmes de numération
- [Alm89] (anglais) Exemples d'opérations
- [Wak00] (anglais) Exemples d'opérations, multiplication
- [Beu01] (allemand) Exemples d'opérations
- [Die88] (anglais) Exemples d'opérations

EWHY IS HITTS CRUSSED OUT IN KED WHY ARE THERE MIRRORS ABOVE BEDS WHY HAVE DINOSAURS NO FUR WHY ARE SWISS AFRAID OF DRAGONS RWHY IS THERE A LINE THROUGH HTTPS WHY DO I SAY UHE TOWHY IS THERE A RED LINE THROUGH HTTPS ON TWITTER ≨WHY IS HTTPS IMPORTANT WHY IS SEA SALT BETTER IT QUESTIONS WHY ARE THERE TREES IN THE MIDDLE OF FIELDS WHY AREN'T MY WHY IS THERE NOT A POKEMON MMO ARMS GROWING WHY IS THERE LAUGHING IN TV SHOWS WHY ARE THERE DOORS ON THE FREEWAY WHY ARE THERE SO MANY SUCHOSTIEXE RUNNING WHY AREN'T ANY COUNTRIES IN ANTARCTICA WHY ARE THERE SCARY SOUNDS IN MINECRAFT WHY IS THERE KICKING IN MY STOMACH WHY AREN'T ECONOMISTS RICH ? WHY ARE THERE TWO SLASHES AFTER HTTP WHY ARE THERE SO MANY CROWS IN ROCHESTER & WHY ARE THERE CELEBRITIES WHY DO AMERICANS CALL IT SOCCER & WHY IS TO BE OR NOT TO BE FUNNY WHY DO SNAKES EXIST WHY ARE MY EARS RINGING WHY DO CHILDREN GET CANCER & & WHY DO OYSTERS HAVE PEARLS WHY IS 42 THE ANSWER TO EVERYTHING 🕏 WHY ARE DUCKS CALLED DUCKS WHY IS POSEIDON ANGRY WITH ODYSSEUS WHY CAN'T NOBODY ELSE LIFT THORS HAMMER 🤇 WHY DO THEY CALL IT THE CLAP WHY IS THERE ICE IN SPACE WHY IS MARVIN ALWAYS SO SAD WHY ARE KYLE AND CARTMAN FRIENDS WHY IS THERE AN ARROW ON AANG'S HEAD 🔨 WHY ARE TEXT MESSAGES BLUE WHY ARE THERE MUSTACHES ON CLOTHES WHY IS THERE AN OWL IN MY BACKYARD WHY IS EARTH TILTED WHY WUBA LUBBA DUB DUB MEANING WHY ARE THERE WHY IS SPACE BLACK WHY IS THERE A WHALE AND A POT FALLING WHY IS THERE AN OWL OUTSIDE MY WINDOW GHOSTS WHY ARE THERE SO MANY BIRDS IN SWISS WHY IS OUTER SPACE SO COLD WHY IS THERE AN OWL ON THE DOLLAR BILL WHY IS THERE SO LITTLE RAIN IN WALLIS WHY ARE THERE PYRAMIDS ON THE MOON WHY IS NASA SHUTTING DOWN 🚡 WHY IS WALLIS WEATHER FORECAST ALWAYS WRONG WHY DO OWLS ATTACK PEOPLE Y ARE THERE MALE AND FEMALE BIKES WHY ARE THERE BRIDESMAIDS WHY ARE THERE TINY SPIDERS IN MY HOUSE WHY DO DYING PEOPLE REACH UP WHY ARE THERE TINY SPIDERS IN MY HOUSE WHY ARE OLD KUNGONS DIFFERENT WHY ARE OLD KUNGONS DIFFERENT WHY ARE OLD KUNGONS DIFFERENT WHY ARE THERE TINY SPIDERS COME INSIDE WHY ARE FPGA'S EVERYWHERE WHY ARE THERE HELICOPTERS CIRCLING MY HOUSE TO WHY ARE THERE HUGE SPIDERS IN MY HOUSE WHY ARE MY BOOBS ITCHY WHY ARE THERE GODS WHY ARE THERE J WHY ARE THERE LOTS OF SPIDERS IN MY HOUSE WHY ARE CIGARETTES LEGAL WHY ARE THERE TWO SPOCKS SOUIRRELS WHY ARE THERE DUCKS IN MY POOL '' WHY ARE THERE SPIDERS IN MY ROOM TWHAT IS https://xkcd·com/1256/ WHY IS JESUS WHITE IN WHY ARE THERE SO MANY SPIDERS IN MY ROOM WHY IS THERE LIQUID IN MY EAR WHY DO SPYDER BITES ITCH WHY DO THEY SAY T-MINUS WHY DO Q TIPS FEEL GOOD WHY DO PEOPLE DIE WHY IS DYING SO SCARY RWHY ARE THERE OBELISKS A WHY AREN'T MWHY ARE WRESTLERS ALWAYS WET (n TO WHY DO KNEES CLICK F THERE GUNS IN





Haute Ecole d'Ingénierie
Hochschule für Ingenieurwissenschaften



Silvan Zahno <u>silvan.zahno@hevs.ch</u> Christophe Bianchi <u>christophe.bianchi@hevs.ch</u> François Corthay <u>françois.corthay@hevs.ch</u>