



### Conception numérique (DiD)

# Répresentation numériques et codes NUM

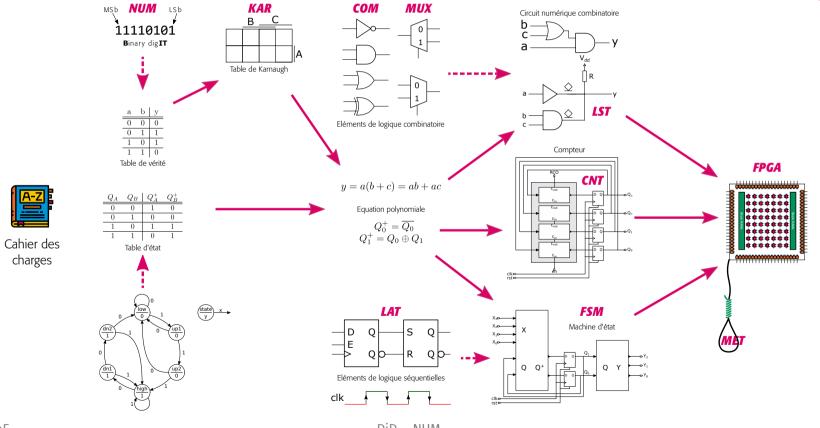
Filière Systèmes industriels Filière Energie et techniques environmentales Filière Informatique et systèmes de communications

Silvan Zahno <u>silvan.zahno@hevs.ch</u> Christophe Bianchi <u>christophe.bianchi@hevs.ch</u> François Corthay <u>francois.corthay@hevs.ch</u>



#### Situation du thème dans le cours





ZaS, BiC, CoF DiD NUM

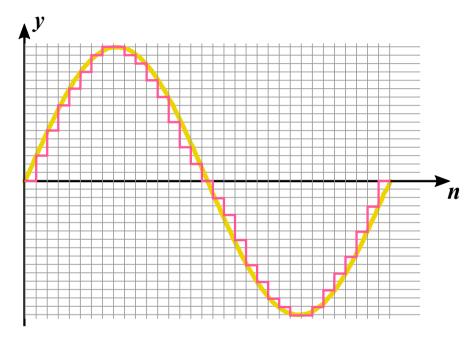
#### Contenu



- Systèmes de numération
  - · Système décimal
  - Système binaire
  - Système hexadécimal
- Conversions entre systèmes de numération
- Opérations sur les nombres logiques
- Codes
- Nombres arithmétiques (signés)

### Passage de l'analogique au numérique





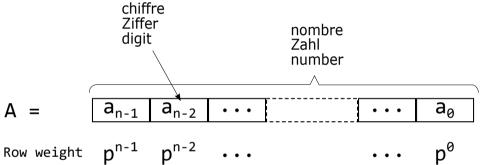
- Temps et amplitude discrets
- Intervalle de temps dépendant de la fréquence
- n: numéro d'échantillon (exemple: 32 échantillons sur la période)
- y: amplitude du signal (exemple: 32 valeurs possible)

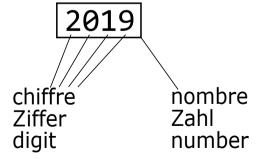
### Représentation générale des nombres entiers



Selon le système de numération par position, un nombre se compose de

chiffres





En base 10, p=10

### Système décimal



De manière générale l'homme utilise la base 10

10 symboles: 0,1,2,3,4,5,6,7,8 et 9

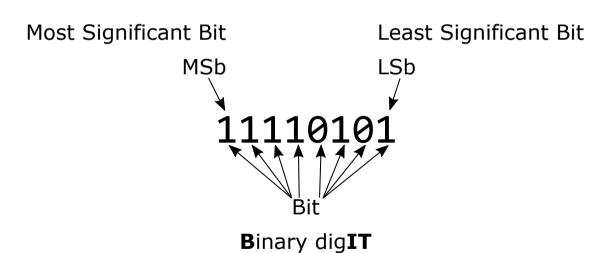
Chaque position correspond à une puissance de 10 ⇒.... 1000, 100, 10, 1

Exemple:  $245_{10} = 2*10^2 + 4*10^1 + 5*10^0$ 

#### Système binaire

#### le Bit

- Les ordinateurs travaillent en base 2
- 2 symboles: 0 et 1
- un chiffre binaire (0/1) s'appelle un BIT (**B**inary dig**IT**)



Exemple:  $11110101_2 = 1^2^7 + 1^2^6 + 1^2^5 + 1^2^4 + 0^2^3 + 1^2^2 + 0^2^1 + 1^2^0$ 



#### Système binaire

#### le Byte

• 8 BIT forment un Byte (octet)



11110101

- Using IEC standard:
  - 1 KiB = 1'024 bytes (Note: big K)
  - 1 MiB = 1'024 KiB = 1'048'576 bytes
  - 1 GiB = 1'024 MiB = 1'048'576 KiB = 1'073'741'824 bytes
- Using SI standard:
  - 1 kB = 1'000 bytes (Note: small k)
  - 1 MB = 1'000 kB = 1,000,000 bytes
  - 1 GB = 1'000 MB = 1'000'000 KB = 1'000'000'000 bytes

### Système hexadécimal



- 16 symboles
- Puissance de 2 (16 = 2<sup>4</sup>)
   regroupement des bits par 4
- Permet d'écrire des nombres binaires sous forme compacte

Decimal	Hexadecimal	Binary
0	0	0000
1	1	0001
2	2	0010
3	3	0011
4	4	0100
5	5	0101
6	6	0110
7	7	0111
8	8	1000
9	9	1001
10	Α	1010
11	В	1011
12	С	1100
13	D	1101
14	E	1110
15	F	1111

### Écritures



- Décimal
  - 9<sub>10</sub>, 9<sub>d</sub>
- Binaire
  - 0b1001, 1001<sub>2</sub>, 1001<sub>b</sub>
- Hexadécimal
  - $0x9, 9_{16}, 9_h$

#### Contenu



- Systèmes de numération
- Conversions entre systèmes de numération
  - binaire ⇒ décimal
  - décimal ⇒ binaire
  - hexadécimal ⇒ binaire
  - binaire ⇒ hexadécimal
  - hexadécimal ⇒ décimal
  - décimal ⇒ hexadécimal
- Opérations sur les nombres logiques
- Codes
- Nombres arithmétiques (signés)

#### binaire ⇒ décimal



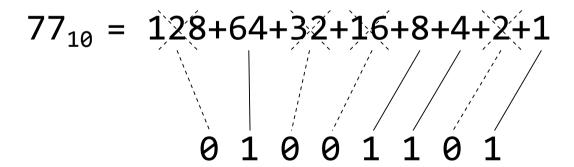
Addition des poids des positions (puissance de 2) où se trouve un 1

$$2^{7} 2^{6} 2^{5} 2^{4} 2^{3} 2^{2} 2^{1} 2^{0}$$
1 1 1 1 0 1 0 1
128+64+32+16+4+1 = 245<sub>10</sub>

### décimal ⇒ binaire (petit nombre)



- Recherche des puissance de 2 à prendre en compte pour que la somme fournisse le nombre décimal donné
- Commencement à partir des bits de poids forts



### décimal ⇒ binaire (grand nombre)

- Répéter la division par 2 du nombre décimal donné jusqu'à ce que le quotient soit 0
- Le reste de chaque division donne un bit supplémentaire du nombre en commençant par le bit de poids faible



```
245 / 2 = 122 + remainder 1

122 / 2 = 61 + remainder 0

61 / 2 = 30 + remainder 1

30 / 2 = 15 + remainder 0

15 / 2 = 7 + remainder 1

7 / 2 = 3 + remainder 1

3 / 2 = 1 + remainder 1

1 / 2 = 0 + remainder 1

245<sub>10</sub> = 11110101<sub>2</sub>
```

#### **Exercices**





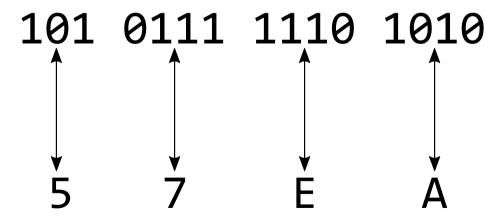
- 2.1.c) (num/conversion-01) Effectuer la conversion du nombre binaire pur suivant :
- $\Box$  01001010<sub>2</sub> = ?<sub>10</sub>

- 2.2.a) (num/conversion-02) Effectuer la conversion du nombre décimal suivant :
- $\Box$  125<sub>10</sub> = ?<sub>2</sub>

#### hexadécimal ⇒ binaire



• Regroupement des bits par quatre en partant du bit de poids faible et conversion de ces groupes de quatre en leur équivalent hexadécimal



#### **Exercices**





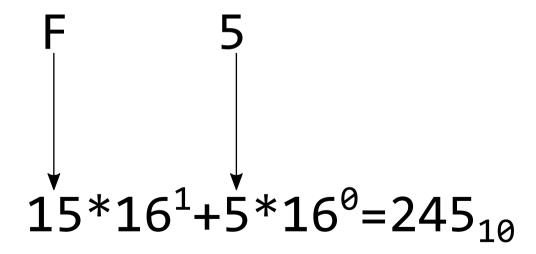
- 2.4.c) (num/conversion-04) Effectuer la conversion du nombre binaire pur suivant :
- $\Box$  11101011<sub>2</sub> = ?<sub>16</sub>

- 2.3.c) (num/conversion-03) Effectuer la conversion du nombre hexadécimal suivant :
- $\Box$  AB3D<sub>16</sub> = ?<sub>2</sub>

#### hexadécimal ⇒ décimal



 Addition des produits formés de chaque chiffre hexadécimal et de leur poids positionnel correspondant



#### décimal ⇒ hexadécimal



- Répéter la division par 16 du nombre décimal donné jusqu'à ce que le quotient soit 0.
- Le nombre hexadécimal se compose alors des restes successifs de chacune des divisions sachant que le premier reste trouvé correspond au digit de poids faible et que le dernier reste correspond au digit de poids fort

245 / 16 = 15 + remainder 5 
$$\longrightarrow$$
 15 / 16 = 0 + remainder 15  $\longrightarrow$  245<sub>10</sub> = F5<sub>16</sub>

#### Contenu



- Systèmes de numération
- Conversions entre systèmes de numération
- Opérations sur les nombres logiques
  - Addition
  - Soustraction
  - Multiplication
- Codes
- Nombres arithmétiques (signés)

#### Addition de nombres binaires



- Comme dans le système décimal: du LSb au MSb avec propagation du report sur les colonnes suivantes
- Max 1 bit supplémentaire

#### Soustraction de nombres binaire



• Comme dans le système décimal: du LSb au MSb avec propagation de la demande d'emprunt sur les colonnes suivantes

Soustraction aussi possible avec une addition 11-4 = 11+(-4)

#### **Exercices**





- 3.1.2) (num/operation-01) Effectuer dans le système binaire l'opération suivante :
- $\square$  00001111<sub>2</sub> + 01011010<sub>2</sub>

- 3.2.3) (num/operation-02) Effectuer dans le système binaire l'opération suivante :
- $\square$  00110100<sub>2</sub> 00101000<sub>2</sub>

### Multiplication de nombres binaire



• Comme dans le système décimal: par suite de multiplications partielles et d'additions. Les multiplications partielles se limitent dans le système binaire à des décalages à gauche du premier multiplieur.

11	1011	1 <sup>st</sup> multiplier
x 13	x 1101	2 <sup>nd</sup> multiplier
143	00000000	Initialisation
	+ 1011	_
	00001011	1 <sup>st</sup> product
	+ 0000	Multiplier shift
	00001 <mark>0</mark> 11	2 <sup>nd</sup> product
	+ 1011	Multiplier shift
	00110 <mark>111</mark>	3 <sup>rd</sup> product
	+ 1011	Multiplier shift
	10001111	Result

#### Contenu



- Systèmes de numération
- Conversions entre systèmes de numération
- Opérations sur les nombres logiques

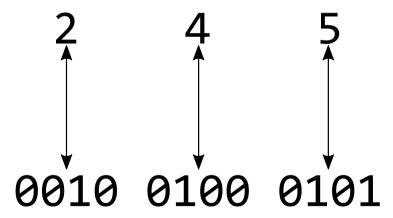
#### Codes

- Décimal codé binaire (BCD)
- Code Gray
- Nombres arithmétiques (signés)

### Binary coded decimal (BCD)



- Chaque chiffre d'un nombre décimal est représenté par son équivalent binaire
- Il faut 4 bits pour coder chaque chiffre décimal de 0 à 9
- Utilisé pour les systèmes d'affichage



Arithmétique plus complexe!

### Gray code



• Un code linéaire particulier conçu de telle sorte qu'un seul chiffre du nombre

change lorsqu'on passe d'un mot au suivant

- Code de Gray binaire réfléchi
- Utilisé pour les encodeurs de position

$$b_3 = g_3$$
  
 $b_2 = b_3 \oplus g_2 = g_3 \oplus g_2$   
 $b_1 = b_2 \oplus g_1 = g_3 \oplus g_2 \oplus g_1$   
 $b_0 = b_1 \oplus g_0 = g_3 \oplus g_2 \oplus g_1 \oplus g_0$ 

$$g_3 = b_3$$

$$g_2 = b_3 \oplus b_2$$

$$g_1 = b_2 \oplus b_1$$

$$g_0 = b_1 \oplus b_0$$

Decimal	Binary	Gray	
0	0000	0000	
1	0001	0001	Mirror
2	0010	0011	Mirror
3	0011	0010	Mirror
4	0100	0110	MILLOL
5	0101	0111	
6	0110	0101	
7	0111	0100	Mirror
8	1000	1100	MILLOL
9	1001	1101	
10	1010	1111	
11	1011	1110	
12	1100	1010	
13	1101	1011	
14	1110	1001	
15	1111	1000	

## Gray code



0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1

0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0
0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0
0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1

#### Contenu



- Systèmes de numération
- Conversions entre systèmes de numération
- Opérations sur les nombres logiques
- Codes
- Nombres arithmétiques (signés)
  - Signe et amplitude (Bias Notation)
  - Complément à 1 (1st-Complement)
  - Complément à 2 (2<sup>nd</sup>-Complement)

### Représentation par signe - amplitude



Nombres positifs = nombres logiques

S

- Nombres positifs ou négatifs = nombres arithmétiques
- précéder le nombre par un bit dont la valeur est par exemple 0 lorsque le signe est positif et 1 lorsque le signe est négatif

+1 0 0 0 0 0 0 0 1 -1 1 0 0 0 0 0 0 1

$$-(2^{n-1}-1) \le A \le 2^{n-1}-1$$
  
 $-7 \le A \le 7$  n=4

Mais ... double représentation du 0

#### **Biased-Notation**



• coder un nombre entier positif ou négatif A sous la forme d'un nombre N tel que N=A+R, où  $R=2^{n-1}-1$  est un biais positif choisi de telle sorte que N soit toujours positif.

Representation	Min		•••		Zero		•••		Max
Shift decimal	0	1		126	127	128		254	255
Decimal	-127	-126		-1	0	1		127	128
Shift binary	00000000	0000001		01111110	01111111	10000000		11111110	11111111

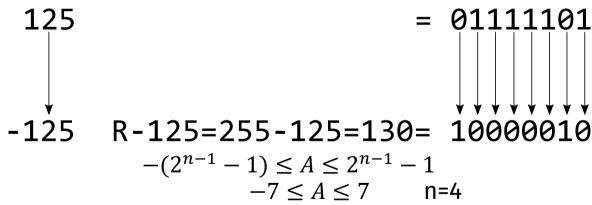
$$-(2^{n-1}-1) \le A \le 2^{n-1}$$
  
-7 \le A \le 8 \qquad n=4

- Une seule représentation du 0
- Mais ... représentation non idéale des nombres positifs (≠ représentation binaire du nombre logique), pas utilisée dans la pratique.

### Complément à 1



- représentation biaisée mais appliquée uniquement aux nombres négatifs
- · les nombres positifs restent inchangés
- $R = 2^n 1$
- le complément à 1 se calcule très simplement par négation logique de tous les bits du nombre



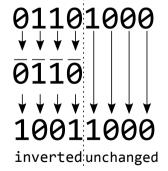
- Mais ... double représentation du 0
- Peu utilisé en pratique

### Complément à 2



- Idem que complément à 1 mais avec  $R=2^n$ , donc complément à 1 +1.
- le complément à 2 se calcule très simplement en parcourant le nombre de droite à gauche en appliquant la règle suivante : tous les bits rencontrés jusqu'au premier 1 y compris sont conservés, tous les suivants sont inversés.

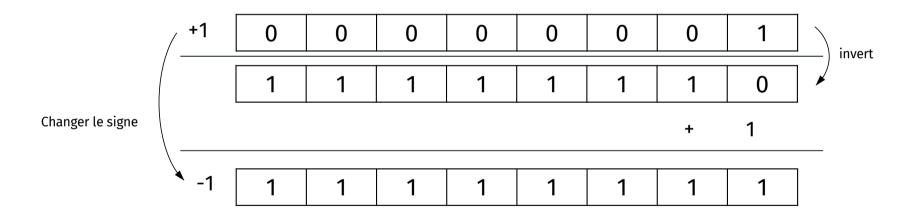
$$-(2^{n-1}-1) \le A \le 2^{n-1}$$
  
 $-8 \le A \le 7$  n=4



## Complément à 2



• Extrêmement simple pour changer le signe



### Complément à 2 Gammes

```
6
               0
           0
           0
               0
                       +3
                       +2
       0
           0
                       +1
                       +0
               0
```



ZaS, BiC, CoF DiD NUM 38

### Exercices 5.1.4 (num/representation-01)





 Donner la représentation en signe-amplitude, complément à 1 et complément à 2 sur huit bits des nombres décimaux et binaires purs suivants :

**1** 00011010<sub>2</sub>

**-104**<sub>10</sub>

#### Références



- [Max95] (anglais) Systèmes de numération
- [Alm89] (anglais) Exemples d'opérations
- [Wak00] (anglais) Exemples d'opérations, multiplication
- [Beu01] (allemand) Exemples d'opérations
- [Die88] (anglais) Exemples d'opérations

WHY ARE THERE MIRRORS ABOVE BEDS

WHY DO I SAY WHY IS SEA SALT BETTER IN

WHY IS THERE NOT A POKEMON MMO WHY IS THERE LAUGHING IN TV SHOWS ARE THERE DOORS ON THE FREEWAY ARE THERE SO MANY SVCHOST-EXE RUNNING AREN'T ANY COUNTRIES IN ANTARCTICA WHY ARE THERE SCARY SOUNDS IN MINECRAFT WHY IS THERE KICKING IN MY STOMACH WHY ARE THERE TWO SLASHES AFTER HTTP WHY ARE THERE CELEBRITIES WHY DO SNAKES EXIST WHY DO OYSTERS HAVE PEARLS WHY ARE DUCKS CALLED DUCKS WHY DO THEY CALL IT THE CLAP WHY IS THERE AN ARROW ON AANG'S HEAD 🗷 WHY ARE TEXT MESSAGES BLUE WHY ARE THERE MUSTACHES ON CLOTHES WHY WUBA LUBBA DUB DUB MEANING IS THERE A WHALE AND A POT FALLING WHY ARE THERE SO MANY BIRDS IN SWISS WHY IS THERE SO LITTLE RAIN IN WALLIS WHY IS WALLIS WEATHER FORECAST ALWAYS WRONG

WHY HAVE DINOSAURS NO FUR WHY ARE SWISS AFRAID RWHY IS THERE A LINE THROUGH HI TO WHY IS THERE A RED LINE THROUGH HTTPS ON TWITTER

WHY AREN'T MY ARMS GROWING WHY ARE THERE SO MANY CROWS IN ROCHESTER & WHY IS TO BE OR NOT TO BE FUNNY

WHY DO CHILDREN GET CANCER 🗢

WHY IS POSEIDON ANGRY WITH ODYSSEUS

WHY AREN'T ECONOMISTS RICH WHY DO AMERICANS CALL IT SOCCER & WHY ARE MY EARS RINGING WHY IS 42 THE ANSWER TO EVERYTHING WHY CAN'T NOBODY ELSE LIFT THORS HAMMER S **SWHY IS THERE ICE IN SPACE** WHY IS MARVIN ALWAYS SO SAD

WHY IS SPACE BLACK WHY IS OUTER SPACE SO COLD WHY ARE THERE PYRAMIDS ON THE MOON WHY IS NASA SHUTTING DOWN A

THERE MALE AND FEMALE BIKES E WHY ARE THERE TINY SPIDERS IN MY HOUSE ' DO SPIDERS COME INSIDE

WHY ARE THERE HUGE SPIDERS IN MY HOUSE  $_{
m H}$  WHY ARE THERE LOTS OF SPIDERS IN MY HOUSE  $\overline{oldsymbol{\lambda}}$ 为WHY ARE THERE SO MANY SPIDERS IN MY ROOM

SPYDER BITES ITCH

WHY ARE THERE **GHOSTS** 



WHY IS THERE AN OWL IN MY BACKYARD WHY IS THERE AN OWL OUTSIDE MY WINDOW WHY IS THERE AN OWL ON THE DOLLAR BILL WHY DO OWLS ATTACK PEOPLE WHY ARE FPGA'S EVERYWHERE WHY ARE THERE HELICOPTERS CIRCLING MY HOUSE WHY ARE THERE GODS

WHY ARE THERE TWO SPOCKS 'IS https://xkcd·com/1256/ THEY SAY T-MINUS WHY ARE THERE OBELISKS MWHY ARE WRESTLERS ALWAYS WET

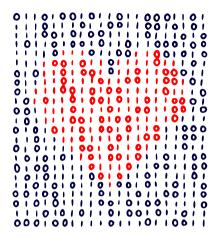
WHY ARE MY BOOBS ITCHY WHY DO Q TIPS FEEL GOOD

> WHY AREN'T THERE GUNS IN

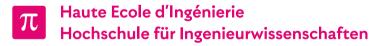
WHY ARE KYLE AND CARTMAN FRIENDS

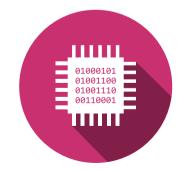
WHY ARE THERE BRIDESMAIDS WHY DO DYING PEOPLE REACH UP HOW FAST IS LIGHTSPEED WHY ARE OLD KLINGONS DIFFERENT

WHY ARE THERE SQUIRRELS









Silvan Zahno <u>silvan.zahno@hevs.ch</u> Christophe Bianchi <u>christophe.bianchi@hevs.ch</u> François Corthay <u>francois.corthay@hevs.ch</u>