



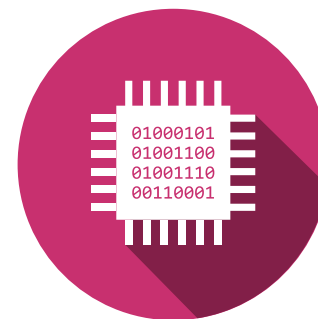
# Conception numérique (DiD)

## Répresentation numériques et codes

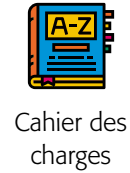
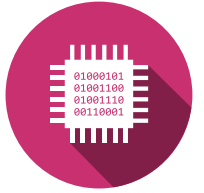
### NUM

Filière Systèmes industriels  
Filière Energie et techniques environnementales  
Filière Informatique et systèmes de communications

Silvan Zahno [silvan.zahno@hevs.ch](mailto:silvan.zahno@hevs.ch)  
Christophe Bianchi [christophe.bianchi@hevs.ch](mailto:christophe.bianchi@hevs.ch)  
François Corthay [francois.corthay@hevs.ch](mailto:francois.corthay@hevs.ch)



# Situation du thème dans le cours



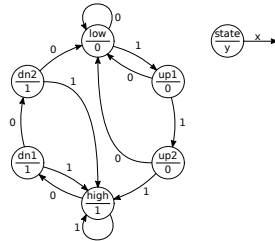
MSb **NUM** LSB  
11110101  
Binary digit

Table de vérité

a	b	y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Table d'état

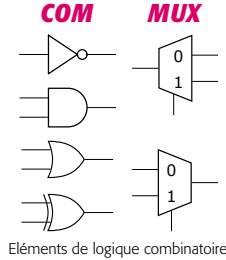
$Q_A$	$Q_B$	$Q_A^+$	$Q_B^+$
0	0	1	0
0	1	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1



**KAR**

B		C

Table de Karnaugh

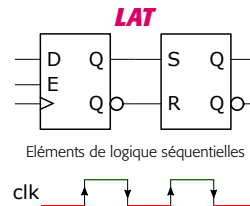


$$y = a(b + c) = ab + ac$$

Equation polynomiale

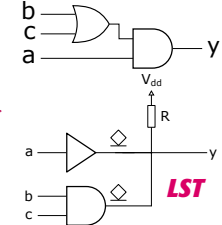
$$Q_0^+ = \overline{Q_0}$$

$$Q_1^+ = Q_0 \oplus Q_1$$

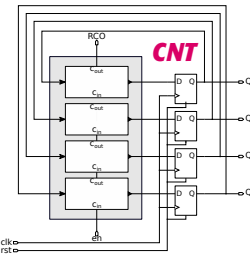


DiD NUM

Circuit numérique combinatoire

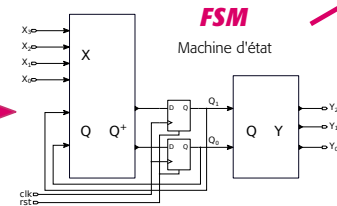


Compteur

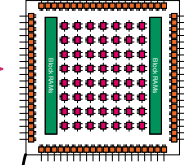


**FSM**

Machine d'état

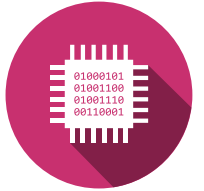


**FPGA**



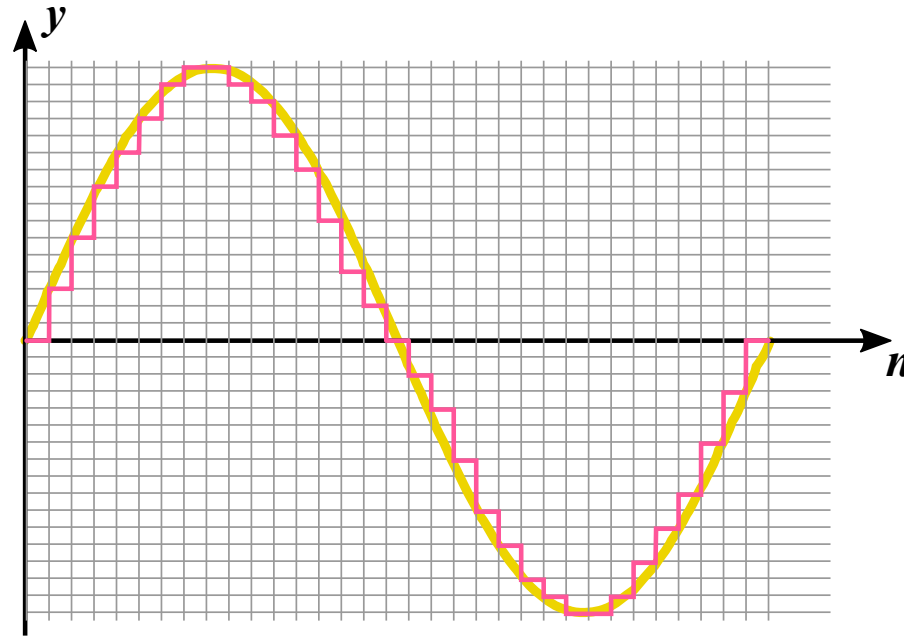
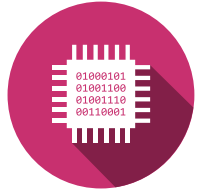
**MBT**

# Contenu



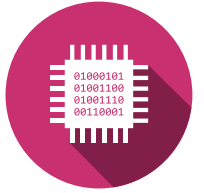
- **Systèmes de numération**
  - Système décimal
  - Système binaire
  - Système hexadécimal
- Conversions entre systèmes de numération
- Opérations sur les nombres logiques
- Codes
- Nombres arithmétiques (signés)

# Passage de l'analogique au numérique

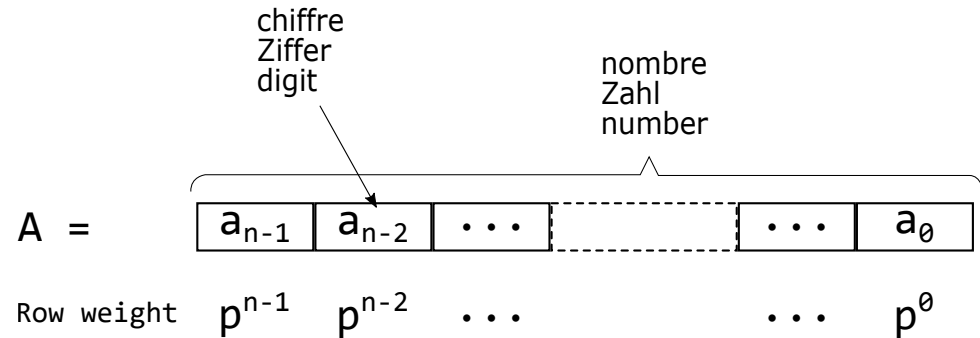


- Temps et amplitude discrets
- Intervalle de temps dépendant de la fréquence
- $n$ : numéro d'échantillon (exemple: 32 échantillons sur la période)
- $y$ : amplitude du signal (exemple: 32 valeurs possible)

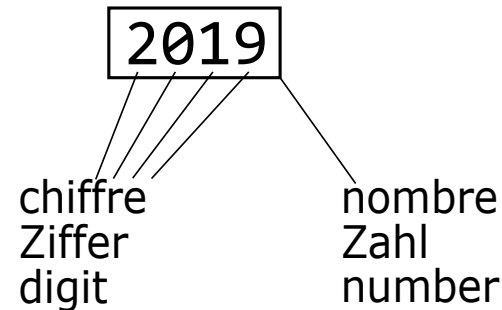
# Représentation générale des nombres entiers



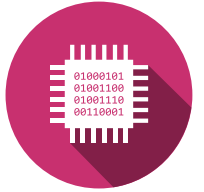
Selon le système de numération par position, un nombre se compose de chiffres



En base 10,  $p=10$



# Système décimal



De manière générale l'homme utilise la base 10

10 symboles : 0,1,2,3,4,5,6,7,8 et 9

Chaque position correspond à une puissance de 10

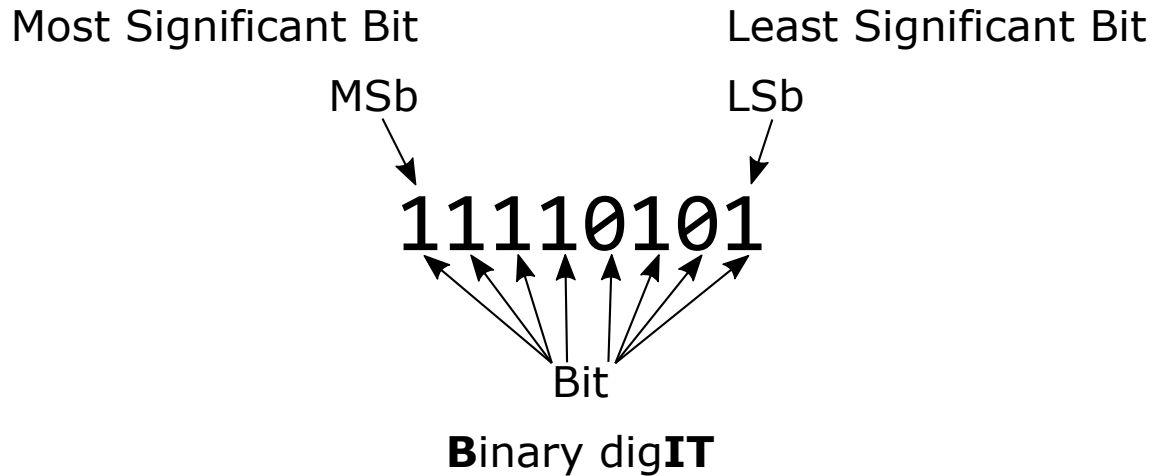
⇒ .... 1000, 100, 10, 1

Exemple:  $245_{10} = 2 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0$

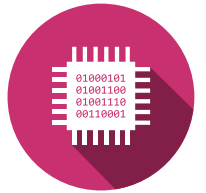
# Système binaire

## le Bit

- Les ordinateurs travaillent en base 2
- 2 symboles : 0 et 1
- un chiffre binaire (0/1) s'appelle un BIT (**B**inary dig**IT**)

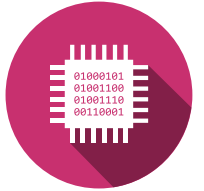


Exemple:  $11110101_2 = 1 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$



# Système binaire

## le Byte



- 8 BIT forment un Byte (octet)

11110101

- Using IEC standard:

- 1 KiB = 1'024 bytes (Note: big K)
- 1 MiB = 1'024 KiB = 1'048'576 bytes
- 1 GiB = 1'024 MiB = 1'048'576 KiB = 1'073'741'824 bytes

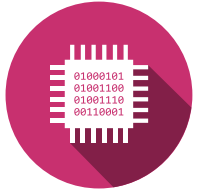
- Using SI standard:

- 1 kB = 1'000 bytes (Note: small k)
- 1 MB = 1'000 kB = 1,000,000 bytes
- 1 GB = 1'000 MB = 1'000'000 KB = 1'000'000'000 bytes

8 Bit = 1 Byte



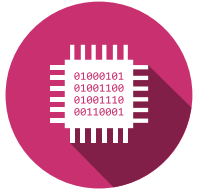
# Systeme hexadécimal



- 16 symboles
- Puissance de 2 ( $16 = 2^4$ )  
regroupement des bits par 4
- Permet d'écrire des nombres binaires  
sous forme compacte

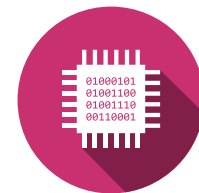
Decimal	Hexadecimal	Binary
0	0	0000
1	1	0001
2	2	0010
3	3	0011
4	4	0100
5	5	0101
6	6	0110
7	7	0111
8	8	1000
9	9	1001
10	A	1010
11	B	1011
12	C	1100
13	D	1101
14	E	1110
15	F	1111

# Écritures



- Décimal
  - $9_{10}$ ,  $9_d$
- Binaire
  - $0b1001$ ,  $1001_2$ ,  $1001_b$
- Hexadécimal
  - $0x9$ ,  $9_{16}$ ,  $9_h$

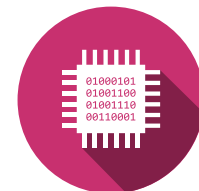
# Contenu



- Systèmes de numération
- **Conversions entre systèmes de numération**
  - binaire  $\Rightarrow$  décimal
  - décimal  $\Rightarrow$  binaire
  - hexadécimal  $\Rightarrow$  binaire
  - binaire  $\Rightarrow$  hexadécimal
  - hexadécimal  $\Rightarrow$  décimal
  - décimal  $\Rightarrow$  hexadécimal
- Opérations sur les nombres logiques
- Codes
- Nombres arithmétiques (signés)

# Conversion

binaire  $\Rightarrow$  décimal

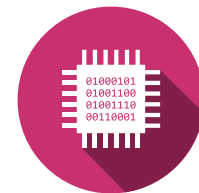


Addition des poids des positions (puissance de 2) où se trouve un 1

$$\begin{array}{cccccccc} 2^7 & 2^6 & 2^5 & 2^4 & 2^3 & 2^2 & 2^1 & 2^0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \swarrow & \swarrow & \swarrow & \swarrow & & \swarrow & \swarrow & \\ 128 & +64 & +32 & +16 & & +4 & +1 & = 245_{10} \end{array}$$

# Conversion

décimal  $\Rightarrow$  binaire (petit nombre)



- Recherche des puissance de 2 à prendre en compte pour que la somme fournisse le nombre décimal donné
- Commencement à partir des bits de poids forts

$$77_{10} = \cancel{128} + 64 + \cancel{32} + \cancel{16} + 8 + 4 + \cancel{2} + 1$$

0 1 0 0 1 1 0 1

The diagram illustrates the conversion of the decimal number 77 to binary. It shows the sum of powers of 2: 128, 64, 32, 16, 8, 4, 2, and 1. The terms 128, 32, 16, 2, and 1 are crossed out with dashed lines, indicating they are not used in the sum. The terms 64, 8, 4, and 1 are not crossed out, indicating they are used. Below the terms, a sequence of bits is shown: 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 1. Dashed lines connect the bits to the terms: 0 to 128, 1 to 64, 0 to 32, 0 to 16, 1 to 8, 1 to 4, 0 to 2, and 1 to 1.

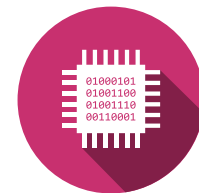
# Conversion

décimal  $\Rightarrow$  binaire (grand nombre)

- Répéter la division par 2 du nombre décimal donné jusqu'à ce que le quotient soit 0
- Le reste de chaque division donne un bit supplémentaire du nombre en commençant par le bit de poids faible

245	/	2	=	122	+	remainder	1	
122	/	2	=	61	+	remainder	0	
61	/	2	=	30	+	remainder	1	
30	/	2	=	15	+	remainder	0	
15	/	2	=	7	+	remainder	1	
7	/	2	=	3	+	remainder	1	
3	/	2	=	1	+	remainder	1	
1	/	2	=	0	+	remainder	1	

$245_{10} = 11110101_2$



# Exercices



- 2.1.c) (*num/conversion-01*) Effectuer la conversion du nombre binaire pur suivant :

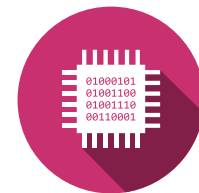
□  $01001010_2 = ?_{10}$

- 2.2.a) (*num/conversion-02*) Effectuer la conversion du nombre décimal suivant :

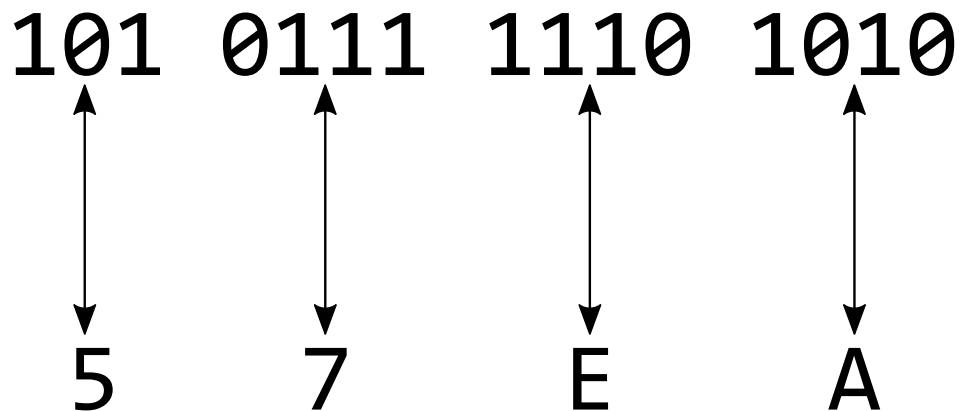
□  $125_{10} = ?_2$

# Conversion

hexadécimal  $\Rightarrow$  binaire



- Regroupement des bits par quatre en partant du bit de poids faible et conversion de ces groupes de quatre en leur équivalent hexadécimal





# Exercices



- 2.4.c) (*num/conversion-04*) Effectuer la conversion du nombre binaire pur suivant :

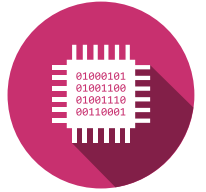
□  $11101011_2 = ?_{16}$

- 2.3.c) (*num/conversion-03*) Effectuer la conversion du nombre hexadécimal suivant :

□  $AB3D_{16} = ?_2$

# Conversion

hexadécimal  $\Rightarrow$  décimal

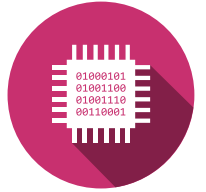


- Addition des produits formés de chaque chiffre hexadécimal et de leur poids positionnel correspondant

$$\begin{array}{cc} \text{F} & 5 \\ \downarrow & \downarrow \\ 15 * 16^1 + 5 * 16^0 = 245_{10} \end{array}$$

# Conversion

## décimal $\Rightarrow$ hexadécimal

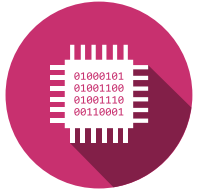


- Répéter la division par 16 du nombre décimal donné jusqu'à ce que le quotient soit 0.
- Le nombre hexadécimal se compose alors des restes successifs de chacune des divisions sachant que le premier reste trouvé correspond au digit de poids faible et que le dernier reste correspond au digit de poids fort

$$\begin{array}{l} 245 / 16 = 15 + \text{remainder } 5 \\ 15 / 16 = 0 + \text{remainder } 15 \end{array}$$

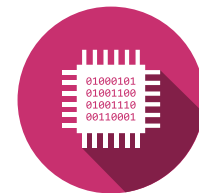
$245_{10} = F5_{16}$

# Contenu



- Systèmes de numération
- Conversions entre systèmes de numération
- **Opérations sur les nombres logiques**
  - Addition
  - Soustraction
  - Multiplication
- Codes
- Nombres arithmétiques (signés)

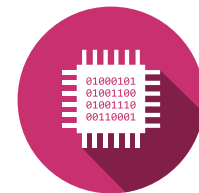
# Addition de nombres binaires



- Comme dans le système décimal: du LSb au MSb avec propagation du report sur les colonnes suivantes
- Max 1 bit supplémentaire

$$\begin{array}{r} 2 \\ + 6 \\ \hline 8 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 11 \\ 0010 \\ + 0110 \\ \hline 1000 \end{array}$$

# Soustraction de nombres binaire



- Comme dans le système décimal: du LSb au MSb avec propagation de la demande d'emprunt sur les colonnes suivantes

$$\begin{array}{r} 11 \\ - 4 \\ \hline 7 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1011 \\ - 0100 \\ - 1 \\ \hline 0111 \end{array}$$

- Soustraction aussi possible avec une addition  $11-4 = 11+(-4)$

# Exercices



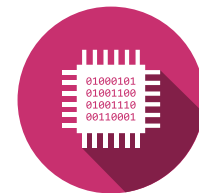
- 3.1.2) (*num/operation-01*) Effectuer dans le système binaire l'opération suivante :

□  $00001111_2 + 01011010_2$

- 3.2.3) (*num/operation-02*) Effectuer dans le système binaire l'opération suivante :

□  $00110100_2 - 00101000_2$

# Multiplication de nombres binaire

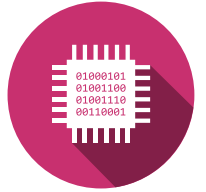


- Comme dans le système décimal: par suite de multiplications partielles et d'additions. Les multiplications partielles se limitent dans le système binaire à des décalages à gauche du premier multiplieur.

11	1011	1 <sup>st</sup> multiplieur
x 13	x 1101	2 <sup>nd</sup> multiplieur
143	00000000	Initialisation
	+ 1011	
	00001011	1 <sup>st</sup> product
	+ 0000	Multiplier shift
	00001011	2 <sup>nd</sup> product
	+ 1011	Multiplier shift
	00110111	3 <sup>rd</sup> product
	+ 1011	Multiplier shift
	10001111	Result

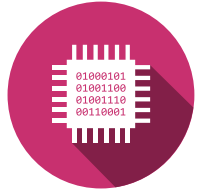


# Contenu

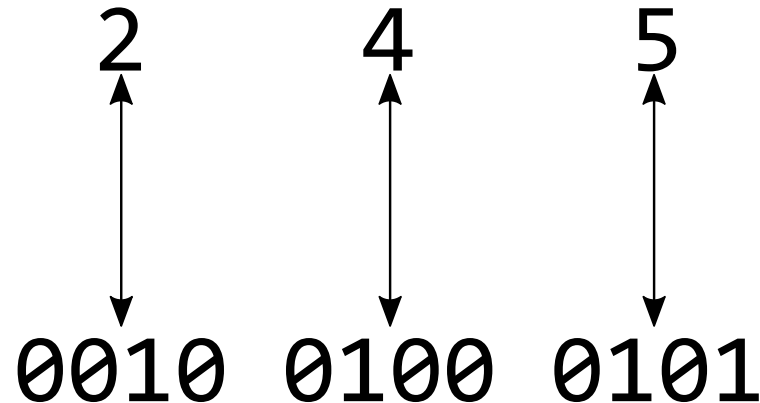


- Systèmes de numération
- Conversions entre systèmes de numération
- Opérations sur les nombres logiques
- **Codes**
  - Décimal codé binaire (BCD)
  - Code Gray
- Nombres arithmétiques (signés)

# Binary coded decimal (BCD)

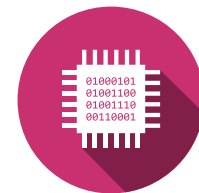


- Chaque chiffre d'un nombre décimal est représenté par son équivalent binaire
- Il faut 4 bits pour coder chaque chiffre décimal de 0 à 9
- Utilisé pour les systèmes d'affichage



- Arithmétique plus complexe!

# Gray code



- Un code linéaire particulier conçu de telle sorte qu'un seul chiffre du nombre change lorsqu'on passe d'un mot au suivant
- Code de Gray binaire réfléchi
- Utilisé pour les encodeurs de position

$$b_3 = g_3$$

$$b_2 = b_3 \oplus g_2 = g_3 \oplus g_2$$

$$b_1 = b_2 \oplus g_1 = g_3 \oplus g_2 \oplus g_1$$

$$b_0 = b_1 \oplus g_0 = g_3 \oplus g_2 \oplus g_1 \oplus g_0$$

$$g_3 = b_3$$

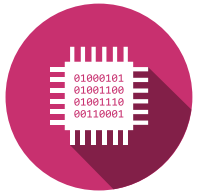
$$g_2 = b_3 \oplus b_2$$

$$g_1 = b_2 \oplus b_1$$

$$g_0 = b_1 \oplus b_0$$

Decimal	Binary	Gray	
0	0000	0000	
1	0001	0001	
2	0010	0011	Mirror
3	0011	0010	
4	0100	0110	Mirror
5	0101	0111	
6	0110	0101	
7	0111	0100	
8	1000	1100	Mirror
9	1001	1101	
10	1010	1111	
11	1011	1110	
12	1100	1010	
13	1101	1011	
14	1110	1001	
15	1111	1000	

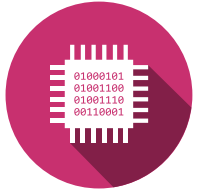
# Gray code



0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1

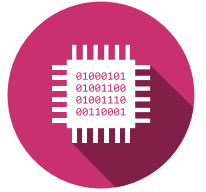
0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0
0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0
0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1

# Contenu



- Systèmes de numération
- Conversions entre systèmes de numération
- Opérations sur les nombres logiques
- Codes
- **Nombres arithmétiques (signés)**
  - Signe et amplitude (Bias Notation)
  - Complément à 1 (1<sup>st</sup>-Complement)
  - Complément à 2 (2<sup>nd</sup>-Complement)

# Représentation par signe - amplitude



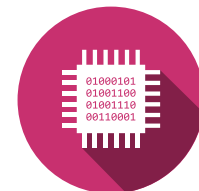
- Nombres positifs = nombres logiques
- Nombres positifs ou négatifs = nombres arithmétiques
- précéder le nombre par un bit dont la valeur est par exemple 0 lorsque le signe est positif et 1 lorsque le signe est négatif

	S							
+1	0	0	0	0	0	0	0	1
-1	1	0	0	0	0	0	0	1

$$-(2^{n-1} - 1) \leq A \leq 2^{n-1} - 1$$
$$-7 \leq A \leq 7 \quad n=4$$

- Mais ... double représentation du 0

# Biased-Notation



- coder un nombre entier positif ou négatif  $A$  sous la forme d'un nombre  $N$  tel que  $N = A + R$ , où  $R = 2^{n-1} - 1$  est un biais positif choisi de telle sorte que  $N$  soit toujours positif.

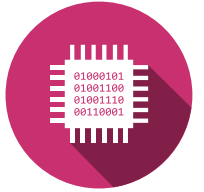
Representation	Min		...		Zero		...		Max
Shift decimal	0	1		126	127	128		254	255
Decimal	-127	-126		-1	0	1		127	128
Shift binary	00000000	00000001		01111110	01111111	10000000		11111110	11111111

$$-(2^{n-1} - 1) \leq A \leq 2^{n-1}$$

$$-7 \leq A \leq 8 \quad n=4$$

- Une seule représentation du 0
- Mais ... représentation non idéale des nombres positifs ( $\neq$  représentation binaire du nombre logique), pas utilisée dans la pratique.

# Complément à 1



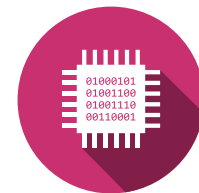
- représentation biaisée mais appliquée uniquement aux nombres négatifs
- les nombres positifs restent inchangés
- $R = 2^n - 1$
- le complément à 1 se calcule très simplement par négation logique de tous les bits du nombre

$$\begin{array}{rcl} 125 & & = 01111101 \\ \downarrow & & \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \\ -125 & R-125=255-125=130= & 10000010 \end{array}$$
$$\begin{array}{l} -(2^{n-1} - 1) \leq A \leq 2^{n-1} - 1 \\ -7 \leq A \leq 7 \quad n=4 \end{array}$$

- Mais ... double représentation du 0
- Peu utilisé en pratique

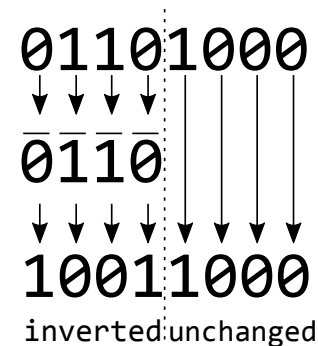


# Complément à 2

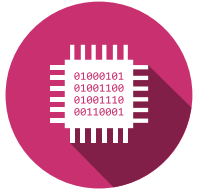


- Idem que complément à 1 mais avec  $R = 2^n$ , donc complément à 1 +1.
- le complément à 2 se calcule très simplement en parcourant le nombre de droite à gauche en appliquant la règle suivante : tous les bits rencontrés jusqu'au premier 1 y compris sont conservés, tous les suivants sont inversés.

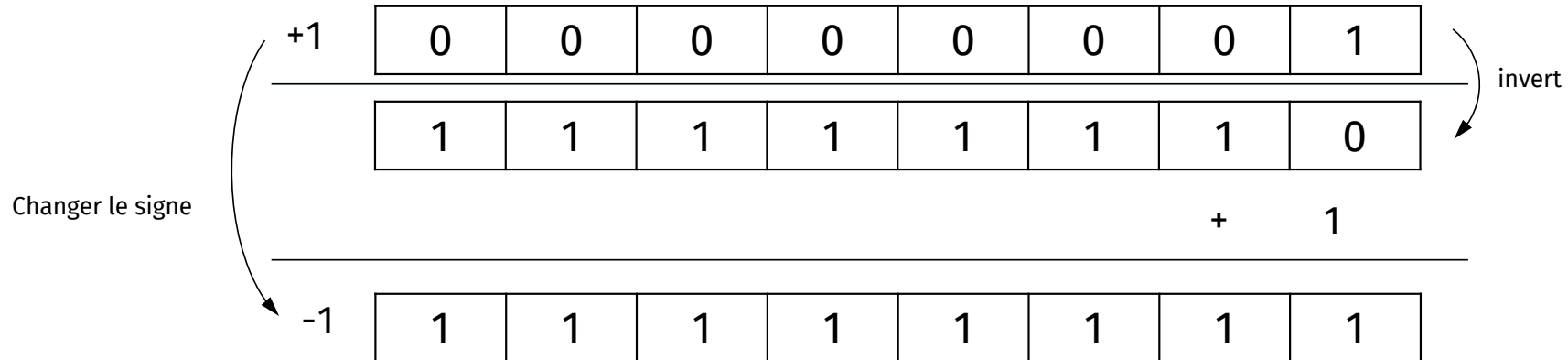
$$\begin{aligned} -2^{n-1} &\leq A \leq (2^{n-1} - 1) \\ -8 &\leq A \leq 7 \end{aligned} \quad n=4$$



# Complément à 2



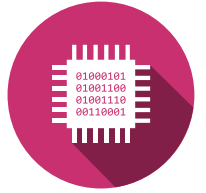
- Extrêmement simple pour changer le signe



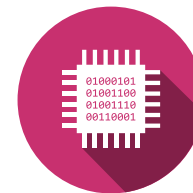
# Complément à 2

## Gammes

	0	0	0	
7	1	1	1	
6	1	1	0	
5	1	0	1	
4	1	0	0	
3	0	1	1	+3
2	0	1	0	+2
1	0	0	1	+1
0	0	0	0	+0
	1	1	1	-1
	1	1	0	-2
	1	0	1	-3
	1	0	0	-4
	0	1	1	
	DiD		NUM	



## Exercices 5.1.4 (num/representation-01)

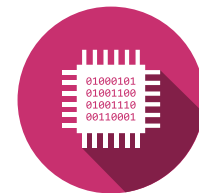


- Donner la représentation en signe-amplitude, complément à 1 et complément à 2 sur huit bits des nombres décimaux et binaires purs suivants :

□  $00011010_2$

□  $-104_{10}$

# Références




- [Max95] (anglais) Systèmes de numération
- [Alm89] (anglais) Exemples d'opérations
- [Wak00] (anglais) Exemples d'opérations, multiplication
- [Beu01] (allemand) Exemples d'opérations
- [Die88] (anglais) Exemples d'opérations

WHY ARE THERE MIRRORS ABOVE BEDS  
 WHY DO I SAY UH  
 WHY IS SEA SALT BETTER  
 WHY ARE THERE TREES IN THE MIDDLE OF FIELDS  
 WHY IS THERE NOT A POKEMON MMO  
 WHY IS THERE LAUGHING IN TV SHOWS  
 WHY ARE THERE DOORS ON THE FREEWAY  
 WHY ARE THERE SO MANY SUCHOST-EXE RUNNING  
 WHY AREN'T ANY COUNTRIES IN ANTARCTICA  
 WHY ARE THERE SCARY SOUNDS IN MINECRAFT  
 WHY IS THERE KICKING IN MY STOMACH  
 WHY ARE THERE TWO SLASHES AFTER HTTP  
 WHY ARE THERE CELEBRITIES  
 WHY DO SNAKES EXIST  
 WHY DO OYSTERS HAVE PEARLS  
 WHY ARE DUCKS CALLED DUCKS  
 WHY DO THEY CALL IT THE CLAP  
 WHY ARE KYLE AND CARTMAN FRIENDS  
 WHY IS THERE AN ARROW ON AANG'S HEAD  
 WHY ARE TEXT MESSAGES BLUE  
 WHY ARE THERE MUSTACHES ON CLOTHES  
 WHY WUBA LUBBA DUB DUB MEANING  
 WHY IS THERE A WHALE AND A POT FALLING  
 WHY ARE THERE SO MANY BIRDS IN SWISS  
 WHY IS THERE SO LITTLE RAIN IN WALLIS  
 WHY IS WALLIS WEATHER FORECAST ALWAYS WRONG

WHY ARE THERE MALE AND FEMALE BIKES  
 WHY ARE THERE BRIDESMAIDS  
 WHY DO DYING PEOPLE REACH UP  
 HOW FAST IS LIGHTSPEED  
 WHY ARE OLD KLINGONS DIFFERENT

WHY ARE THERE  
 SQUIRRELS



WHY ARE THERE TINY SPIDERS IN MY HOUSE  
 WHY DO SPIDERS COME INSIDE  
 WHY ARE THERE HUGE SPIDERS IN MY HOUSE  
 WHY ARE THERE LOTS OF SPIDERS IN MY HOUSE  
 WHY ARE THERE SPIDERS IN MY ROOM  
 WHY ARE THERE SO MANY SPIDERS IN MY ROOM  
 WHY DO SPYDER BITES ITCH  
 WHY IS DYING SO SCARY  
 WHY IS THERE NO GPS IN LAPTOPS  
 WHY DO KNEES CLICK

WHY IS THERE CAFFEINE IN MY SHAMPOO  
 WHY HAVE DINOSAURS NO FUR  
 WHY DO TWINS HAVE DIFFERENT FINGERPRINTS  
 WHY ARE SWISS AFRAID OF DRAGONS

# QUESTIONS

CAN BE ASKED BY ANYONE ANYTIME

WHY AREN'T ECONOMISTS RICH  
 WHY DO AMERICANS CALL IT SOCCER  
 WHY ARE MY EARS RINGING  
 WHY IS 42 THE ANSWER TO EVERYTHING  
 WHY CAN'T NOBODY ELSE LIFT THORS HAMMER  
 WHY IS MARVIN ALWAYS SO SAD

WHY IS EARTH TILTED  
 WHY IS SPACE BLACK  
 WHY IS OUTER SPACE SO COLD  
 WHY ARE THERE PYRAMIDS ON THE MOON  
 WHY IS NASA SHUTTING DOWN

WHY ARE THERE  
 GHOSTS



WHY IS THERE AN OWL IN MY BACKYARD  
 WHY IS THERE AN OWL OUTSIDE MY WINDOW  
 WHY IS THERE AN OWL ON THE DOLLAR BILL  
 WHY DO OWLS ATTACK PEOPLE  
 WHY ARE FPGA's EVERYWHERE  
 WHY ARE THERE HELICOPTERS CIRCLING MY HOUSE  
 WHY ARE THERE GODS  
 WHY ARE THERE TWO SPOCKS

WHAT IS <https://xkcd.com/1256/>  
 WHY DO THEY SAY T-MINUS  
 WHY ARE THERE OBELISKS  
 WHY ARE WRESTLERS ALWAYS WET

WHY IS THERE A LINE THROUGH HTTPS  
 WHY IS THERE A RED LINE THROUGH HTTPS ON TWITTER  
 WHY IS HTTPS IMPORTANT

WHY AREN'T MY  
 ARMS GROWING



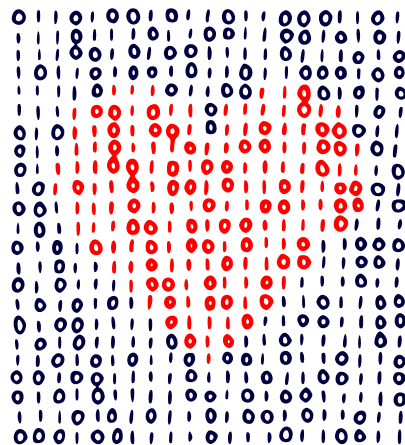
WHY ARE THERE SO MANY CROWS IN ROCHESTER  
 WHY IS TO BE OR NOT TO BE FUNNY  
 WHY DO CHILDREN GET CANCER  
 WHY IS POSEIDON ANGRY WITH ODYSSEUS  
 WHY IS THERE ICE IN SPACE  
 WHY ARE THERE DOGS AFRAID OF FIRE  
 WHY IS THERE NO KING IN ENGLAND  
 WHY ARE MY BOOBS ITCHY  
 WHY ARE CIGARETTES LEGAL  
 WHY ARE THERE DUCKS IN MY POOL  
 WHY IS JESUS WHITE  
 WHY IS THERE LIQUID IN MY EAR  
 WHY DO Q TIPS FEEL GOOD  
 WHY DO PEOPLE DIE

WHY AREN'T  
 THERE GUNS IN



WHY IS THERE A SWARM OF ANTS  
 WHY IS THERE PILGRIM  
 WHY IS THERE LAIYA  
 WHY IS THERE LIFE SCIENCE

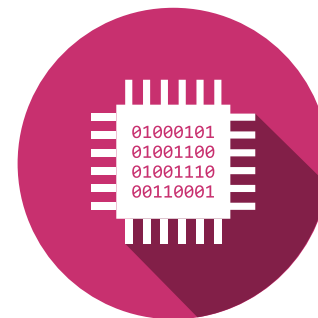
WHY ARE THERE WEEKS  
 WHY DO I FEEL DIZZY



**Hes·so**  **VALAIS  
WALLIS**



**Haute Ecole d'Ingénierie  
Hochschule für Ingenieurwissenschaften**



Silvan Zahno [silvan.zahno@hevs.ch](mailto:silvan.zahno@hevs.ch)  
Christophe Bianchi [christophe.bianchi@hevs.ch](mailto:christophe.bianchi@hevs.ch)  
François Corthay [francois.corthay@hevs.ch](mailto:francois.corthay@hevs.ch)