

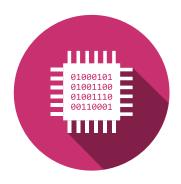


Digitales Design (DiD)

Numerische Darstellung und Codes NUM

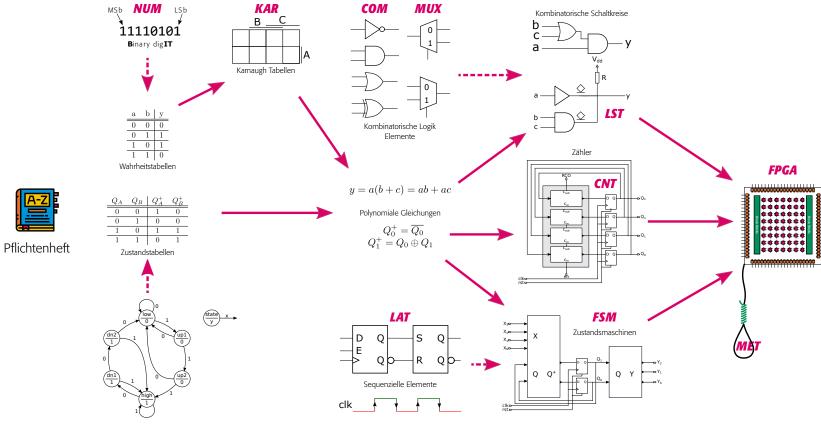
Studiengang Systemtechnik Studiengang Energie und Umwelttechnik Studiengang Informatik und Kommunikationssysteme

Silvan Zahno <u>silvan.zahno@hevs.ch</u> Christophe Bianchi <u>christophe.bianchi@hevs.ch</u> François Corthay <u>francois.corthay@hevs.ch</u>



Aktueller Inhalt des Themas im Kurs





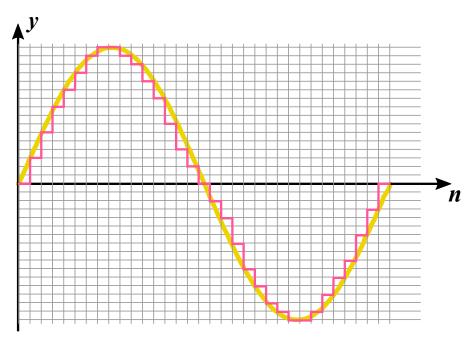
Inhalt



- Zahlensysteme
 - Dezimalsystem
 - Binärsystem
 - Hexadezimalsystem
- Umwandlung von Zahlensystemen
- Operationen auf Logikzahlen
- Codes
- Darstellung von Arithmetischen Zahlen (Vorzeichenbehaftet)

Wechsel von Analog zu Digital



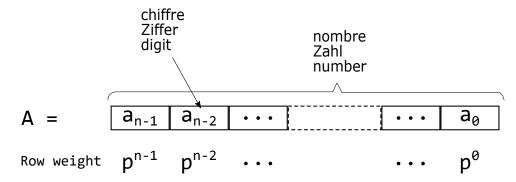


- Diskrete Zeiten und Amplituden
- Frequenzabhängiges Zeitintervall
- n: Stichprobennummer (z.B. 32 Stichproben über den Zeitraum)
- y: Signalamplitude (Beispiel: 32 mögliche Werte)

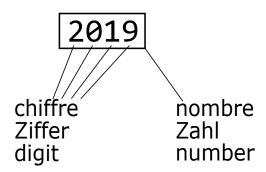
Allgemeine Darstellung von Ganzen Zahlen



Nach dem Positionsnummernsystem besteht eine Zahl aus Ziffern



In der Basis 10, p=10



Dezimalsystem



Im Allgemeinen verwendet der Mensch die Basis 10

10 Symbole: 0,1,2,3,4,5,6,7,8 und 9

Jede Position entspricht einer Potenz von 10 ⇒1,10,100,1000,...

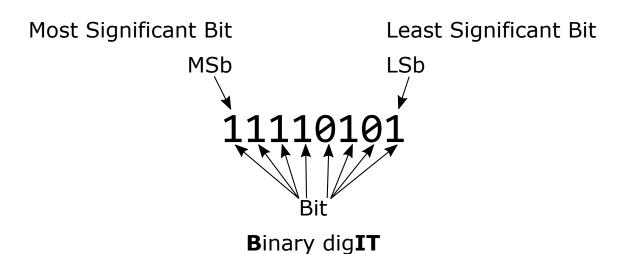
Beispiel: $245_{10} = 2*10^2 + 4*10^1 + 5*10^0$

Binärsystem

Das BIT

e1:00:111 e1:00:110 e1:00:110 e0:1:00:11

- Computer arbeiten in Basis 2
- 2 Symbole: 0 und 1
- Eine Binärzahl (0/1) wird ein BIT (**B**inary dig**IT**) genannt



• Beispiel: $11110101_2 = 1*2^7 + 1*2^6 + 1*2^5 + 1*2^4 + 0*2^3 + 1*2^2 + 0*2^1 + 1*2^0$

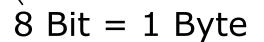
Binärsystem

Das Byte

- 8 BIT bilden ein Byte (octet)
 - Rein historisch

11110101

- Using IEC standard:
 - 1 KiB = 1'024 bytes (Note: big K)
 - 1 MiB = 1'024 KiB = 1'048'576 bytes
 - 1 GiB = 1'024 MiB = 1'048'576 KiB = 1'073'741'824 bytes
- Using SI standard:
 - 1 kB = 1'000 bytes (Note: small k)
 - 1 MB = 1'000 kB = 1,000,000 bytes
 - 1 GB = 1'000 MB = 1'000'000 KB = 1'000'000'000 bytes



Hexadezimalsystem



- 16 Symbole
- 2er Potenz (16 = 2⁴) Bit-Gruppierung von 4
- Ermöglicht das Schreiben von Binärzahlen
- in kompakter Form

Decimal	Hexadecimal	Binary
0	0	0000
1	1	0001
2	2	0010
3	3	0011
4	4	0100
5	5	0101
6	6	0110
7	7	0111
8	8	1000
9	9	1001
10	Α	1010
11	В	1011
12	С	1100
13	D	1101
14	E	1110
15	F	1111

Schreibweisen



- Dezimal
 - 9₁₀, 9_d
- Binär
 - 0b1001, 1001₂, 1001_b
- Hexadezimal
 - $0x9, 9_{16}, 9_h$

Inhalt



- Zahlensysteme
- Umwandlung von Zahlensystemen
 - Binär ⇒ Dezimal
 - Dezimal ⇒ Binär
 - Hexadezimal ⇒ Binär
 - Binär ⇒ Hexadezimal

 - Dezimal ⇒ Hexadezimal
- Operationen auf Logikzahlen
- Codes
- Darstellung von Arithmetischen Zahlen (Vorzeichenbehaftet)

Binär ⇒ Dezimal



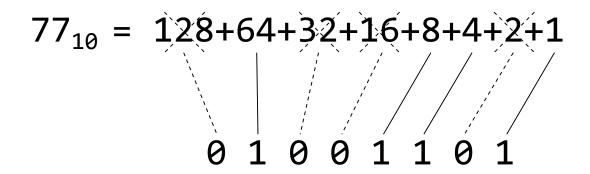
Addition der Gewichte der Positionen (2er-Potenz), bei denen es eine 1 gibt

$$2^{7} 2^{6} 2^{5} 2^{4} 2^{3} 2^{2} 2^{1} 2^{0}$$
1 1 1 1 0 1 0 1
128+64+32+16+4+1 = 245₁₀

01000101 0100100 0100113 0011001

Dezimal ⇒ Binär (kleine Zahlen)

- Suchen Sie nach den zu berücksichtigenden 2er-Potenzen, so dass die Summe die angegebene Dezimalzahl ergibt.
- Ausgehend von höherwertigen Bits



Dezimal ⇒ Binär (grosse Zahlen)



- Wiederholen Sie die Division durch 2 der angegebenen Dezimalzahl, bis der Quotient 0 ist. 245 / 2 = 122 + remainder 1
- Der Rest jeder Division ergibt ein zusätzliches Bit der Zahl, beginnend mit dem niederwertigsten Bit.

```
245 / 2 = 122 + remainder 1

122 / 2 = 61 + remainder 0

61 / 2 = 30 + remainder 1

30 / 2 = 15 + remainder 0

15 / 2 = 7 + remainder 1

7 / 2 = 3 + remainder 1

3 / 2 = 1 + remainder 1

1 / 2 = 0 + remainder 1

245<sub>10</sub> = 11110101<sub>2</sub>
```

Aufgabe





• 2.1.c) (num/conversion-01) Führen Sie die Umwandlung der folgenden reinen Binärzahl durch:

 \square 01001010₂ = ?₁₀

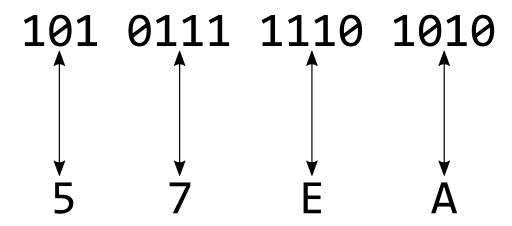
• 2.2.a) (num/conversion-02) Führen Sie folgende Dezimalzahl-Konvertierung durch:

 \Box 125₁₀ = ?₂

Hexadezimal ⇒ Binär



 Gruppierung der Bits in Vierergruppen, beginnend mit dem niedrigstwertigen Bit und Umwandlung dieser Vierergruppen in ihr hexadezimales Äquivalent



Aufgabe





• 2.4.c) (num/conversion-04) Führen Sie die Umwandlung der folgenden reinen Binärzahl durch:

 \square 11101011₂ = ?₁₆

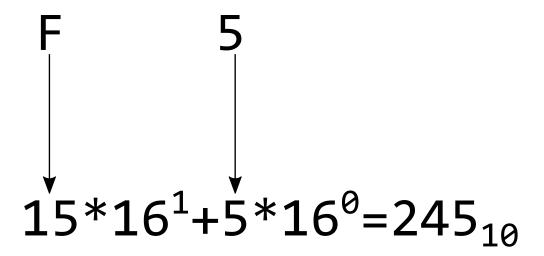
• 2.3.c) (num/conversion-03) Führen Sie die Konvertierung der folgenden hexadezimalen Zahl durch :

 \Box AB3D₁₆ = ?₂

Hexadezimal ⇒ Dezimal



 Addition der Produkte, die durch jede hexadezimale Ziffer gebildet werden, und ihr entsprechendes Positionsgewicht



Dezimal ⇒ Hexadezimal



- Wiederholen Sie die Division der angegebenen Dezimalzahl durch 16, bis der Quotient 0 ist.
- Die hexadezimale Zahl besteht dann aus den aufeinanderfolgenden Resten der einzelnen Teilungen, wobei der erste gefundene Rest der Ziffer mit niedrigem Gewicht und der letzte Rest der Ziffer mit hohem Gewicht entspricht.

245 / 16 = 15 + remainder 5
$$\longrightarrow$$
 15 / 16 = 0 + remainder 15 \longrightarrow 245₁₀ = F5₁₆

Inhalt



- Zahlensysteme
- Umwandlung von Zahlensystemen
- Operationen auf Logikzahlen
 - Addition
 - Subtraktion
 - Multiplikation
- Codes
- Darstellung von Arithmetischen Zahlen (Vorzeichenbehaftet)

Addition Binärer Zahlen



- Wie im Dezimalsystem: von LSb nach MSb mit Fortschreibung des Übertrages in der nachfolgenden Spalte
- Max. 1 zusätzliches Bit

Subtraktion Binärer Zahlen



 Wie im Dezimalsystem: von LSb nach MSb mit Propagierung der Anfrage an die folgende Spalte

Subtraktion auch mit Addition möglich 11-4 = 11+(-4)

Aufgabe





• 3.1.2) (num/operation-01) Führen Sie die folgende Operation im Binärsystem durch:

 \square 00001111₂ + 01011010₂

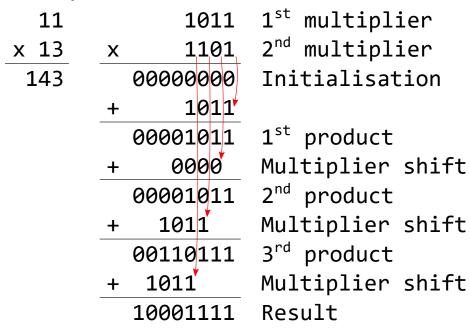
• 3.2.3) (num/operation-02) Führen Sie die folgende Operation im Binärsystem durch :

 \square 00110100₂ - 00101000₂

Multiplikation Binärer Zahlen



Wie im Dezimalsystem: durch partielle Multiplikationen und Additionen.
 Partielle Multiplikationen sind im Binärsystem auf Verschiebungen nach links vom ersten Multiplikator beschränkt.



Inhalt

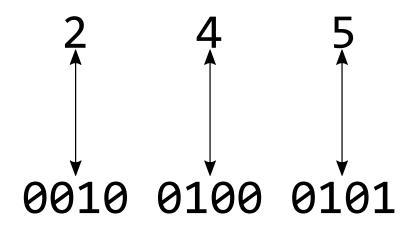


- Zahlensysteme
- Umwandlung von Zahlensystemen
- Operationen auf Logikzahlen
- Codes
 - Binär Codierte Dezimalzahlen (BCD)
 - Gray Code
- Darstellung von Arithmetischen Zahlen (Vorzeichenbehaftet)

Binär Codierte Dezimalzahlen (BCD)



- Jede Stelle einer Dezimalzahl wird durch ihr binäres Äquivalent dargestellt
- Es braucht 4 Bits, um jede Dezimalstelle von 0 bis 9 zu kodieren.
- Einsatz für Displaysysteme



Komplexere Arithmetik!

Gray code



• Ein besonderer linearer Code, der so gestaltet ist, dass sich beim Wechsel von einem Wort zum nächsten nur eine Ziffer der Zahl ändert.

•	Reflektierter	Graybinärcode
---	---------------	---------------

• Einsatz bei Positionsgebern

$$b_3 = g_3$$

 $b_2 = b_3 \oplus g_2 = g_3 \oplus g_2$
 $b_1 = b_2 \oplus g_1 = g_3 \oplus g_2 \oplus g_1$
 $b_0 = b_1 \oplus g_0 = g_3 \oplus g_2 \oplus g_1 \oplus g_0$

$$g_3 = b_3$$

$$g_2 = b_3 \oplus b_2$$

$$g_1 = b_2 \oplus b_1$$

$$g_0 = b_1 \oplus b_0$$

	Gray	Dillary	Decimat	,
	0000	0000	0	
Mikkok	0001	0001	1	
- Mirror	0011	0010	2	
- Mirror	0010	0011	3	
- MILLOL	0110	0100	4	
	0111	0101	5	
	0101	0110	6	
- Mirror	0100	0111	7	
MIIIOI	1100	1000	8	
	1101	1001	9	
	1111	1010	10	
	1110	1011	11	
	1010	1100	12	
	1011	1101	13	
	1001	1110	14	
	1000	1111	15	

Gray code



0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1

0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0
0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0
0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1

Inhalt



- Zahlensysteme
- Umwandlung von Zahlensystemen
- Operationen auf Logikzahlen
- Codes
- Darstellung von Arithmetischen Zahlen (Vorzeichenbehaftet)
 - Vorzeichen-Grösse
 - Biased Notation
 - Einer-Komplement (1st-Complement)
 - Zweier-Komplement (2nd-Complement)

Vorzeichen-Grösse



- Positive Zahlen = logische Zahlen
- Positive oder negative Zahlen = arithmetische Zahlen
- der Zahl ein Bit voranstellen, dessen Wert z.B. 0 ist, wenn das Vorzeichen positiv ist und 1, wenn das Vorzeichen negativ ist.

S

+1	0	0	0	0	0	0	0	1
-1	1	0	0	0	0	0	0	1

$$-(2^{n-1}-1) \le A \le 2^{n-1}-1$$

 $-7 \le A \le 7$ n=4

Aber ... doppelte Darstellung der 0

Biased-Notation



• Kodierung einer positiven oder negativen ganzen Zahl A als eine Zahl N, so dass N=A+R, wobei $R=2^{n-1}-1$ eine positive Vorspannung ist, die so gewählt wird, dass N immer positiv ist.

Representation	Min			Zero		•••		Max
Shift decimal	0	1	126	127	128		254	255
Decimal	-127	-126	-1	0	1		127	128
Shift binary	00000000	0000001	01111110	01111111	10000000		11111110	11111111

$$-(2^{n-1}-1) \le A \le 2^{n-1}$$

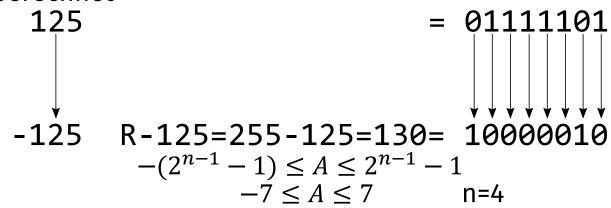
 $-7 \le A \le 8$ n=4

- Eine einzige Darstellung der 0
- Aber ... nicht-ideale Darstellung von positiven Zahlen (≠ binäre Darstellung der logischen Zahl), in der Praxis nicht verwendet

1st-Komplement



- voreingenommene Darstellung, aber nur auf negative Zahlen angewandt
- positive Zahlen bleiben unverändert
- $R = 2^n 1$
- das Komplement zu 1 wird sehr einfach durch logische Negation aller Bits der Zahl berechnet



- Aber ... doppelte Darstellung der 0
- In der Praxis wenig genutzt

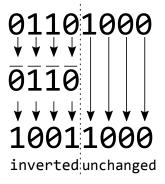
2nd-Komplement



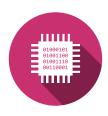
- Wie Einer-Komplement aber mit $R=2^n$, also Einer-Komplement +1.
- das Zweier-Komplement wird sehr einfach berechnet, indem man die Zahl von rechts nach links durchsucht, indem man folgende Regel anwendet: alle Bits, die bis und mit der ersten 1 gefunden werden, werden behalten, alle weitere werden invertiert.

$$-2^{n-1} \le A \le (2^{n-1}-1)$$

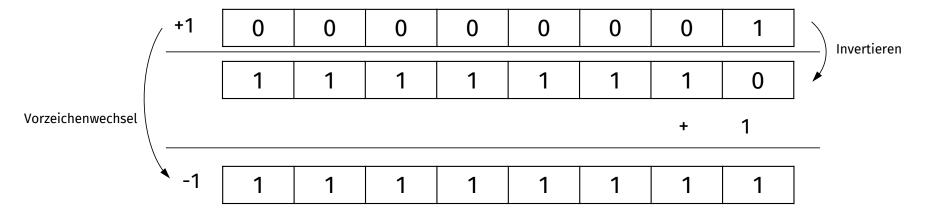
-8 \le A \le 7 \quad n=4



2nd-Komplement



- Extrem einfach für Addition und Subtraktion
- Vorzeichenwechsel



2nd-Komplement

Bereich

	0	0	0	
7	1	1	1	
6	1	1	0	
5 4	1	0	1	
	1	0	0	
3 2	0	1	1	+3
2	0	1	0	+2
1	0	0	1	+1
0	0	0	0	+0
	1	1	1	-1
	1	1	0	
	1	0	1	-2 -3 -4
	1	0	0	-4
	0	1	1	
		DiD	MHIM	



ZaS, BiC, CoF DiD NUM 38

Aufgabe 5.1.4 (num/representation-01)





• Geben Sie Darstellung in Vorzeichen-Amplitude, 1-Komplement und 2-Komplement über acht Bits der folgenden dezimalen und reinen Binärzahlen zu geben :

1 00011010₂

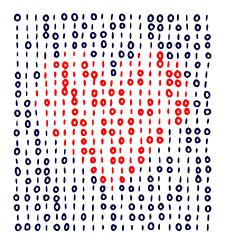
□ -104₁₀

Referenzen



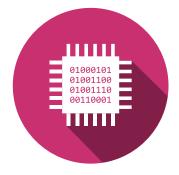
- [Max95] (englisch) Numerierungssysteme
- [Alm89] (englisch) Beispiele Operationen
- [Wak00] (englisch) Beispiele Operationen, Multiplikation
- [Beu01] (deutsch) Beispiele Operationen
- [Die88] (englisch) Beispiele Operationen

WHY IS HITTS CRUSSED OUT IN RED WHY ARE THERE MIRRORS ABOVE BEDS WHY HAVE DINOSAURS NO FUR WHY ARE SWISS AFRAID OF DRAGONS RWHY IS THERE A LINE THROUGH HTTPS WHY DO I SAY UH? RWHY IS THERE A RED LINE THROUGH HTTPS ON TWITTER ≨WHY IS HTTPS IMPORTANT WHY IS SEA SALT BETTER IT DUESTIONS WHY ARE THERE TREES IN THE MIDDLE OF FIELDS WHY AREN'T MY WHY IS THERE NOT A POKEMON MMO ARMS GROWING WHY IS THERE LAUGHING IN TV SHOWS WHY ARE THERE DOORS ON THE FREEWAY WHY ARE THERE SO MANY SUCHOSTIEXE RUNNING WHY AREN'T ANY COUNTRIES IN ANTARCTICA WHY ARE THERE SCARY SOUNDS IN MINECRAFT WHY IS THERE KICKING IN MY STOMACH WHY AREN'T ECONOMISTS RICH ? WHY ARE THERE TWO SLASHES AFTER HTTP WHY ARE THERE SO MANY CROWS IN ROCHESTER " WHY DO AMERICANS CALL IT SOCCER TO WHY ARE THERE CELEBRITIES WHY IS TO BE OR NOT TO BE FUNNY WHY DO SNAKES EXIST WHY ARE MY EARS RINGING WHY DO CHILDREN GET CANCER 🗢 🗢 WHY DO OYSTERS HAVE PEARLS WHY IS 42 THE ANSWER TO EVERYTHING WHY ARE DUCKS CALLED DUCKS S WHY IS POSEIDON ANGRY WITH ODYSSEUS TI WHY CAN'T NOBODY ELSE LIFT THORS HAMMER WHY DO THEY CALL IT THE CLAP WHY IS THERE ICE IN SPACE WHY IS MARVIN ALWAYS SO SAD WHY ARE KYLE AND CARTMAN FRIENDS WHY IS THERE AN ARROW ON AANG'S HEAD 🔨 WHY ARE TEXT MESSAGES BLUE WHY ARE THERE MUSTACHES ON CLOTHES WHY IS EARTH TILTED WHY IS THERE AN OWL IN MY BACKYARD WHY WUBA LUBBA DUB DUB MEANING WHY ARE THERE WHY IS SPACE BLACK WHY IS THERE A WHALE AND A POT FALLING WHY IS THERE AN OWL OUTSIDE MY WINDOW **GHOSTS** WHY ARE THERE SO MANY BIRDS IN SWISS WHY IS OUTER SPACE SO COLD WHY IS THERE AN OWL ON THE DOLLAR BILL WHY IS THERE SO LITTLE RAIN IN WALLIS WHY ARE THERE PYRAMIDS ON THE MOON 🖍 WHY IS NASA SHUTTING DOWN 🔈 WHY IS WALLIS WEATHER FORECAST ALWAYS WRONG WHY DO OWLS ATTACK PEOPLE ' ARE THERE MALE AND FEMALE BIKES WHY ARE THERE BRIDESMAIDS & WHY ARE THERE TINY SPIDERS IN MY HOUSE WHY ARE FPGA's EVERYWHERE ⇒WHY DO SPIDERS COME INSIDE WHY ARE THERE HELICOPTERS CIRCLING MY HOUSE TO WHY ARE THERE HUGE SPIDERS IN MY HOUSE IN WHY ARE THERE GODS & WHY ARE MY BOOBS ITCHY WHY ARE THERE J WHY ARE THERE LOTS OF SPIDERS IN MY HOUSE WHY ARE CIGARETTES LEGAL WHY ARE THERE TWO SPOCKS SQUIRRELS WHY ARE THERE DUCKS IN MY POOL E WHY ARE THERE SPIDERS IN MY ROOM TO WHAT IS https://xkcd·com/1256/ WHY IS JESUS WHITE WHY ARE THERE SO MANY SPIDERS IN MY ROOM WHY IS THERE LIQUID IN MY EAR "WHY DO SPYDER BITES ITCH WHY DO THEY SAY T-MINUS WHY DO Q TIPS FEEL GOOD WHY DO PEOPLE DIE IS DYING SO SCARY WHY ARE THERE OBELISKS # WHY AREN'T MWHY ARE WRESTLERS ALWAYS WET W TO WHY DO KNEES CLICK > THERE GUNS IN





Haute Ecole d'Ingénierie
Hochschule für Ingenieurwissenschaften



Silvan Zahno <u>silvan.zahno@hevs.ch</u> Christophe Bianchi <u>christophe.bianchi@hevs.ch</u> François Corthay <u>francois.corthay@hevs.ch</u>