Kombinatorische Logikfunktionen (COM)

Vorlesung Digitales Design

Haute Ecole d'Ingénierie
Hochschule für Ingenieurwissenschaften

Orientierung: Systemtechnik (SYND)
Kurs: Digitales Design (DiD)
Verfasser: Christophe Bianchi, François Corthay, Pierre Pompili, Silvan Zahno
Datum: 25. August 2022
Version: v2.1

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung **2**

2 Darstellung von kombinatorischen Funktionen **3**
- 2.1 Darstellung mit einer Wahrheitstabelle . . . 3
- 2.2 Darstellung mit einem Ablaufdiagramm . . . 3
- 2.3 Darstellung mit dem Venn-Diagramm . . . 4

3 Elementare Logikfunktionen **5**
- 3.1 Puffer . . . 5
- 3.2 Inverter . . . 5
- 3.3 UND-Funktion . . . 5
- 3.4 ODER-Funktion . . . 5
- 3.5 Exklusiv-ODER-Funktion . . . 6

4 Boolesche Algebra **7**
- 4.1 Bezeichnung: Boolescher Operator . . . 7
- 4.2 Neutrale und absorbierende Elemente . . . 7
- 4.3 Distributivität . . . 8
- 4.4 Theoreme von De Morgan . . . 8
- 4.5 Exklusiv-ODER und Inversionen . . . 8
- 4.6 Definition: Polynomische Form . . . 9
- 4.7 Definition: Monom . . . 9
- 4.8 Zusammenfassung Boolean Algebra . . . 9

5 Vollständige Operatoren **10**
- 5.1 NAND-Operator . . . 10
- 5.2 Definition: Vollständiger Operator . . . 10
- 5.3 Umwandlung von logischen Diagrammen . . . 11
- 5.4 NOR-Operator . . . 12

Literatur **14**

1 Einführung

Die kombinatorischen Logiksysteme befassen sich mit Fällen, wo die Ausgänge nur von den Eingängen abhängen, im Gegensatz zu den sequentiellen Logiksystemen, wo die Ausgänge auch von der Speicherung gewisser Ereignisse abhän- gen. In diesem Kapitel werden die grundlegenden Funktionen der kombinatorischen Systeme beschrieben: **Inverter**, **logisches UND**, **logisches ODER**. Zudem werden die Techniken beschrieben, die für die Darstellung und Analyse der kombinatorischen Logikfunktionen benutzt werden.

2 Darstellung von kombinatorischen Funktionen

2.1 Darstellung mit einer Wahrheitstabelle

Für das Aufstellen einer Wahrheitstabelle benutzt man die Liste aller möglichen Kombinationen der Eingänge des Systems; für jede Kombination wird zudem der Wert des Ausgangs angegeben.

Ein System mit n unabhängigen Eingängen besitzt 2^n mögliche Kombinationen. Die Liste dieser Kombinationen entspricht den Binärzahlen zwischen 0 und $2^n - 1$.

Beispiel: Steuerung einer Ventilation

Für die Temperaturregelung eines Raums benützt man ein Ventilationssystem. Wenn die Aussentemperatur höher ist als die Temperatur im Raum, wird die Ventilation in der Regel eingeschaltet, um den Raum zu heizen. Im Sommer und während des Tages wird die Ventilation auch zur Kühlung des Raums benutzt: wenn die Aussentemperatur tiefer als die Temperatur im Raum ist, wird die Ventilation in Betrieb gesetzt.

Die Steuerung der Ventilation hängt hier von 3 logischen Variablen ab:

- *winter*, für die im Winter '1' und im Sommer '0' gilt,
- *night*, für die in der Nacht '1' und am Tag '0' gilt,
- *ext_temp*, gleich '1', wenn die Aussentemperatur höher als die Temperatur im Raum ist und gleich '0' in allen anderen Fällen.

Mit diesen 3 Eingangsvariablen kann der Wert des Signals Ventilation bestimmt werden, welches die Inbetriebnahme des Ventilators steuert. Die Tabelle 1 zeigt den Wert dieses Ausgangssignals in Abhängigkeit von den 2^3 möglichen Kombinationen der Eingänge.

winter	*night*	*ext_hot*	*ventilation*
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Tabelle 1: Wahrheitstabelle der Steuerung einer Ventilation

2.2 Darstellung mit einem Ablaufdiagramm

Ein Ablaufdiagramm stellt den zeitlichen Ablauf der Signale des Systems dar.

Damit die Funktionsweise des Systems vollständig spezifiziert werden kann, müssen alle Möglichkeiten aufgezeigt werden.

Beispiel: Steuerung einer Ventilation

Das Ablaufdiagramm der Abbildung 1 zeigt eine mögliche Funktionsweise der Steuerung für die Ventilation im vorangehenden Beispiel.

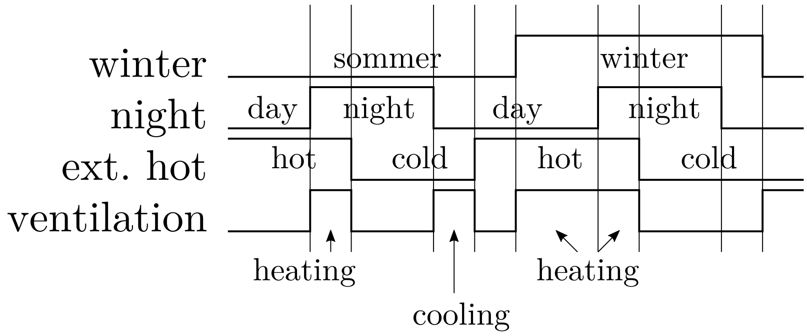


Abbildung 1: Ablaufdiagramm der Steuerung einer Ventilation

2.3 Darstellung mit dem Venn-Diagramm

Im Venn-Diagramm werden die Eingänge in Form von Mengen dargestellt. Jedem Bereich des Diagramms wird eine Farbe oder eine Schattierung zugeteilt, womit der Wert des Ausgangs spezifiziert wird.

In einem solchen Diagramm müssen die Mengen so angeordnet werden, dass alle möglichen Schnittpunkte aufgezeigt werden.

Beispiel: Steuerung einer Ventilation

Das Venn-Diagramm in der Abbildung 2 gibt, in Abhängigkeit von allen möglichen Eingängen, den Wert der Steuerung für die Ventilation im obengenannten Beispiel an.

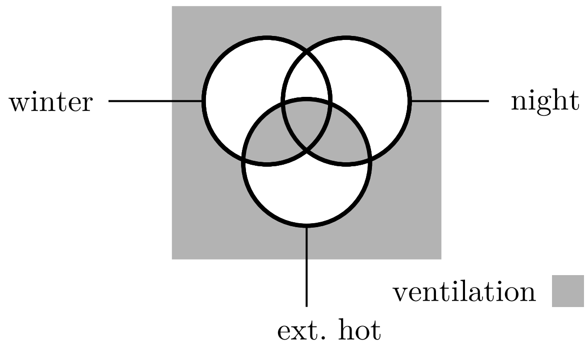
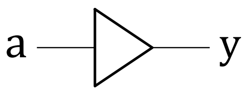


Abbildung 2: Venn-Diagramm der Steuerung einer Ventilation

3 Elementare Logikfunktionen

3.1 Puffer

Die Abbildung 3 zeigt das Symbol der Pufferfunktion, ihre Wahrheitstafel sowie ihre Darstellung in einem Venn-Diagramm.



a	y
0	0
1	1

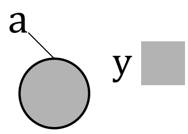
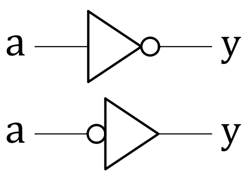


Abbildung 3: Puffer

3.2 Inverter

Die Abbildung 4 zeigt zwei Symbole des Inverters, seine Wahrheitstabelle sowie die Darstellung seiner Funktion in einem Venn-Diagramm.



a	y
0	1
1	0

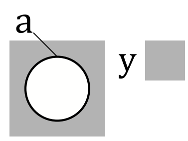
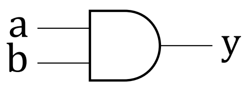


Abbildung 4: Inverter

3.3 UND-Funktion

Die Abbildung 5 zeigt das Symbol der UND-Funktion, ihre Wahrheitstabelle sowie ihre Darstellung in einem Venn-Diagramm.



a	b	y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

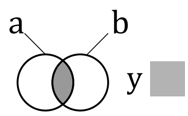
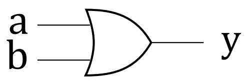


Abbildung 5: UND-Funktion

3.4 ODER-Funktion

Die Abbildung 6 zeigt das Symbol der ODER-Funktion, ihre Wahrheitstabelle sowie ihre Darstellung in einem Venn-Diagramm.



a	b	y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

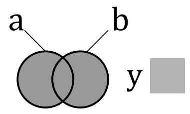
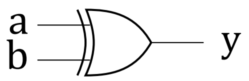


Abbildung 6: ODER-Funktion

3.5 Exklusiv-ODER-Funktion

Die Abbildung 7 zeigt das Symbol der Exklusiv-ODER-Funktion, ihre Wahrheits- tabelle sowie ihre Darstellung in einem Venn-Diagramm.



a	b	y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

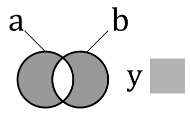


Abbildung 7: Exklusiv-ODER-Funktion

4 Boolesche Algebra

Die Boolesche Algebra, nach dem Mathematiker Boole benannt, befasst sich mit Operationen der logischen Variablen mit den Werten '0' oder '1'.

4.1 Bezeichnung: Boolescher Operator

In der Tabelle 2 ist der algebraische Ausdruck der kombinatorischen Logik-Grundfunktionen angegeben.

Operator	Ausdruck
Inverter	$y = \bar{a}$
UND	$y = a * b$
ODER	$y = a + b$
exklusiv-ODER	$y = a \oplus b$

Tabelle 2: Boolesche Operatoren

Die Exklusiv-ODER-Funktion kann mit Hilfe der Inverter-, der UND- und der ODER-Funktion definiert werden, wie in Gleichung 1 gezeigt.

$$a \oplus b = a\bar{b} + \bar{a}b \tag{1}$$

Kommutativität und Assoziativität Die UND-, ODER- und Exklusiv-ODER-Operatoren sind austauschbar.

$$\begin{aligned} a * b &= b * a \\ a + b &= b + a \\ a \oplus b &= b \oplus a \end{aligned} \tag{2}$$

Die UND-, ODER- und Exklusiv-ODER-Operatoren sind assoziativ.

$$\begin{aligned} (a * b) * c &= a * (b * c) = a * b * c \\ (a + b) + c &= a + (b + c) = a + b + c \\ (a \oplus b) \oplus c &= a \oplus (b \oplus c) = a \oplus b \oplus c \end{aligned} \tag{3}$$

4.2 Neutrale und absorbierende Elemente

'1' ist das neutrale Element der UND-Operation.

$$a * 1 = a \tag{4}$$

'0' ist das absorbierende Element der UND-Operation.

$$a * 0 = 0 \tag{5}$$

'0' ist das neutrale Element der ODER-Operation.

$$a + 0 = a \tag{6}$$

'1' ist das absorbierende Element der ODER-Operation.

$$a + 1 = 1 \tag{7}$$

'0' ist das neutrale Element der Exklusiv-ODER-Operation.

$$a \oplus 0 = a \tag{8}$$

Mit einem UND-Gatter kann ein Signal übertragen oder sein Wert auf '0' gesetzt werden. Mit einem ODER-Gatter kann ein Signal übertragen oder sein Wert auf '1' gesetzt werden. Mit einem Exklusiv- ODER-Gatter kann ein Signal übertragen oder invertiert werden.

4.3 Distributivität

Die UND- und ODER-Operatoren sind zueinander distributiv.

$$\begin{aligned} a * (b + c) &= a * b + a * c \\ a + (b * c) &= (a + b) * (a + c) \end{aligned} \tag{9}$$

4.4 Theoreme von De Morgan

Dank den Theoremen von De Morgan kann ein UND-Operator durch einen ODER-Operator ersetzt werden.

$$\begin{aligned} \overline{a * b * c} &= \bar{a} + \bar{b} + \bar{c} \\ \overline{a + b + c} &= \bar{a} * \bar{b} * \bar{c} \end{aligned} \tag{10}$$

4.5 Exklusiv-ODER und Inversionen

Der Exklusiv-ODER-Operator macht Aussagen über die Parität: wenn die Anzahl Eingänge bei '1' ungerade ist, gibt die Funktion eine '1' zurück, wenn die Anzahl Eingänge bei '1' gerade ist, gibt die Funktion eine '0' zurück.

Kehrt man 2 oder eine gerade Anzahl Eingänge eines Exklusiv-ODER-Operators um, wird dadurch der Ausgang nicht verändert. Kehrt man hingegen 1 oder eine ungerade Anzahl Eingänge eines Exklusiv-ODER-Operators um, wird auch der Ausgang umgekehrt. Man kann somit eine gerade Anzahl Eingangs- oder Ausgangsleitungen eines Exklusiv-ODER-Operators umkehren, ohne dadurch die Funktion zu verändern. Dies ist in der Abbildung 8 dargestellt.

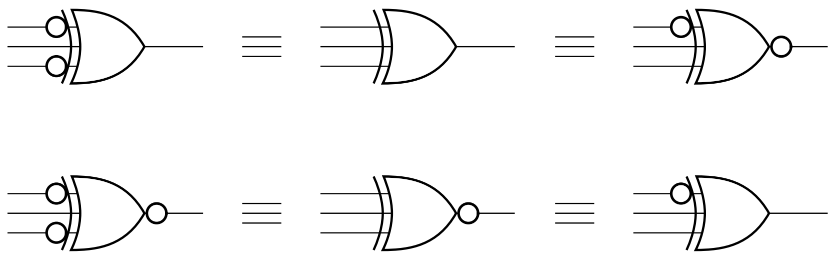


Abbildung 8: Exklusiv-ODER und Inversionen

4.6 Definition: Polynomische Form

Mit einer polynomischen Form kann eine kombinatorische Logikfunktion mit einer Summe von Produkten ausgedrückt werden.

Das Polynom besteht aus seinen Gliedern, die untereinander durch eine ODER-Funktion verbunden sind. Jedes Glied besteht aus Variablen, die untereinander durch eine UND-Funktion verbunden sind. Die Variablen können in invertierter oder nicht invertierter Form auftreten.

Beispiel

Die polynomische Form der Funktion $y = a \oplus b \oplus c$ ist $y = \bar{a}\bar{b}c + \bar{a}b\bar{c} + a\bar{b}\bar{c} + abc$.

4.7 Definition: Monom

Ein Monom ist ein Glied eines Polynoms.

Beispiel

Das Polynom $ab + \bar{a}c + b\bar{c}$ besteht aus den Monomen ab, $\bar{a}c$ und $b\bar{c}$.

4.8 Zusammenfassung Boolean Algebra

Topic	Rules
Misc	$\overline{0} = 1$ $\overline{1} = 0$ $\overline{(\overline{a})} = a$
AND	$a * 0 = 0$ $a * 1 = a$ $a * a = a$ $a * \overline{a} = 0$ $(a * b) * c = a * (b * c) = a * b * c$
OR	$a + 0 = a$ $a + 1 = 1$ $a + a = a$ $a + \overline{a} = 1$ $(a + b) + c = a + (b + c) = a + b + c$
XOR	$a \oplus b = a\overline{b} + \overline{a}b$
Commutativity	$a * b = b * a$ $a + b = b + a$
Associativity	$(a * b) * c = a * (b * c) = a * b * c$ $(a + b) + c = a + (b + c) = a + b + c$
Distributivity	$a * (b + c) = (a * b) + (a * c)$ $a + (b * c) = (a + b) * (a + c)$
De Morgan	$\overline{(a * b)} = \overline{a} + \overline{b}$ $\overline{(a + b)} = \overline{a} * \overline{b}$
Absorption	$a + (a * b) = a$ $a * (a + b) = a$ $a + (\overline{a} * b) = a + b$ $a * (\overline{a} + b) = a * b$

Tabelle 3: Zusammenfassung Boolean Algebra

5 Vollständige Operatoren

5.1 NAND-Operator

Der NAND-Operator entspricht einem UND-Operator gefolgt von einem Inverter. Gemäss einem Theorem von De Morgan entspricht dieser Operator auch einem ODER-Operator, dessen Eingänge alle invertiert sind.

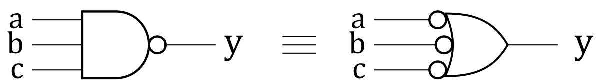


Abbildung 9: NAND-Operator

5.2 Definition: Vollständiger Operator

Ein vollständiger Operator ist ein Operator, für den die Verknüpfung mehrerer Elemente die Realisierung aller beliebigen Logikfunktionen ermöglicht.

Ein Operator ist nur dann vollständig, wenn er die Inverter-, UND- sowie ODER- Funktionen ausführen kann.

Beispiel

Mit NAND-Gattern kann ein Inverter, ein UND-Gatter und ein ODER-Gatter realisiert werden.

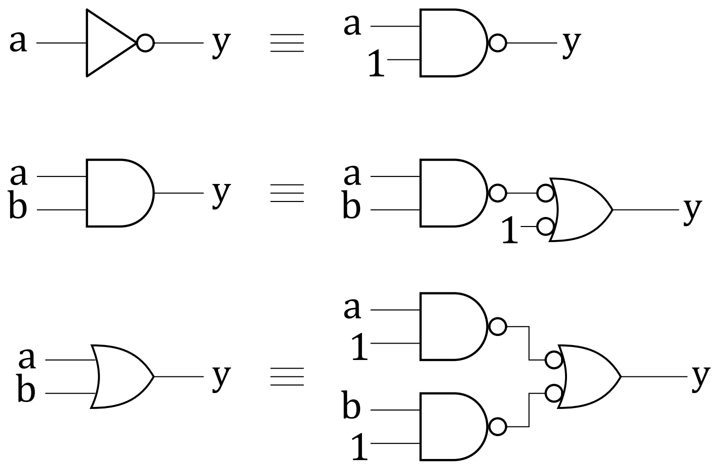


Abbildung 10: Vollständiger Operator

5.3 Umwandlung von logischen Diagrammen

Die elektronische Realisierung von logischen Gattern zeigt, dass die NAND-Gatter weniger Transistoren als die UND-Gatter benötigen.

Die Umwandlung eines Diagramms besteht darin, die UND- sowie ODER-Gatter durch NAND-Gatter zu ersetzen und eventuelle Inversionen von Signalen mit Invertern zu kompensieren. Falls nötig können die Inverter mit einem NAND mit 2 Eingängen realisiert werden, von denen einer mit einem festen Wert belegt ist: '1' für ein NAND-Gatter.

Beispiel: Umwandlung NAND

Das Diagramm in der Abbildung 11 muss so umgewandelt werden, dass nur NAND-Gatter benutzt werden.

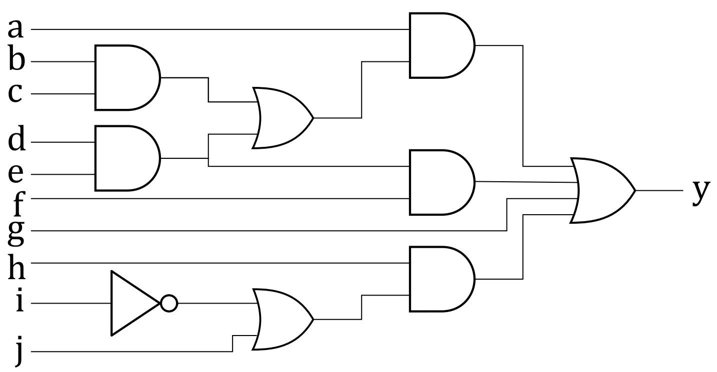


Abbildung 11: Umwandlung eines Diagramms unter ausschliesslicher Verwendung von NAND-Gattern

Man muss also die UND- sowie ODER-Gatter durch NAND-Gatter ersetzen. Für die UND-Gatter ist es von Vorteil, die Darstellung mit einem UND gefolgt von einem Inverter zu benutzen; für die ODER-Gatter wird man hingegen die Darstellung mit einem ODER mit vorausgehenden Invertern vorziehen. Nachdem die Gatter ersetzt worden sind, müssen Signalinversionen hinzugefügt werden, damit die Funktionsweise der Schaltung nicht verändert wird. Dies ist in der Abbildung 12 dargestellt.

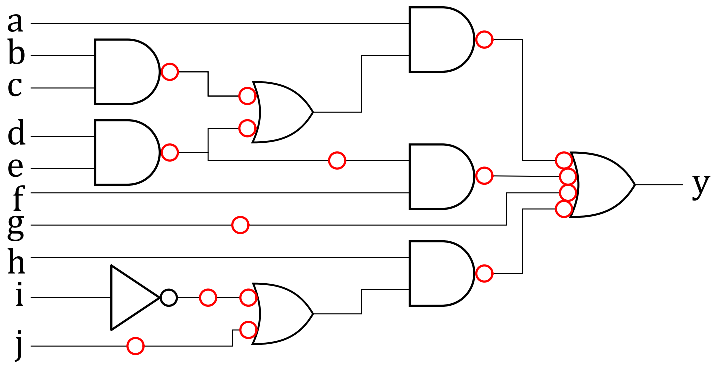


Abbildung 12: Diagramm mit NAND-Gattern

Schliesslich müssen noch Inverterpaare eliminiert werden, die sich kompensieren und Inverter dort eingefügt werden, wo sie notwendig sind. Die Inverter können mit Hilfe von NAND-Gattern mit 1 Eingang erzeugt werden. Für die Inverter sollte der Kreis, der die Inversion anzeigt, neben dem entsprechenden Kreis auf dem NAND-Gatter angegeben werden, welches das Hinzufügen des Inverters bedingt hat. Wenn das Diagramm nur NAND-Gatter mit 2 oder mehr Eingängen umfassen darf, muss angegeben werden, wie der Inverter mit Hilfe eines NAND-Gatters mit 2 Eingängen realisiert wird. Das vollständige Diagramm der Schaltung nach der Umwandlung mit NAND-Gattern ist in der Abbildung 13 dargestellt.

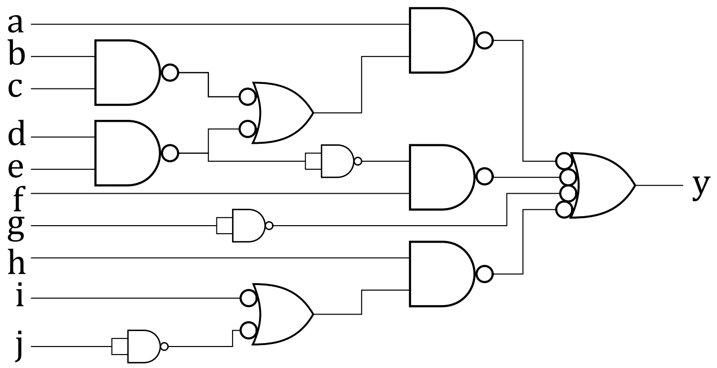


Abbildung 13: Vollständiges NAND-Diagramm

Wenn das Diagramm nur NAND-Gatter mit 2 Eingängen umfassen darf, müssen vor der Umwandlung in eine baumförmige Struktur von Gattern mit 2 Eingängen zuerst die Gatter mit mehr als 2 Eingängen des ursprünglichen Diagramms umgewandelt werden.

5.4 NOR-Operator

Der NOR-Operator entspricht einem ODER-Operator gefolgt von einem Inverter. Gemäss einem Theorem von De Morgan entspricht dieser Operator auch einem UND-Operator, dessen Eingänge alle invertiert sind.

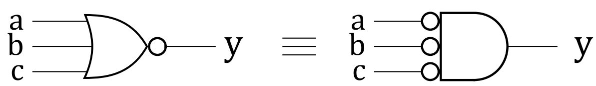


Abbildung 14: NOR-Operator

Literatur

[1] Suhail Almani. *Electronic Logic Systems*. second edition. New-Jersey: Prentice-Hall, 1989.

[2] Jean Michel Bernard und Jean Hugon. *Pratique Des Circuits Logiques*. quatrième édition. Paris: Eyrolles, 1987.

[3] Klaus Elektronik Bd Beuth. *Digitaltechnik*. Vogel Buchverlag, 1990. ISBN: 3-8023-1755-6.

[4] Michael D. Ciletti und M. Morris Mano. *Digital Design*. second edition. New-Jersey: Prentice-Hall, 2007.

[5] David J. Comer. *Digital Logic and State Machine Design*. Saunders College Publishing, 1995.

[6] Donald L. Dietmeyer und R. David. "Logic Design of Digital Systems". In: *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control* 94.2 (1. Juni 1972), S. 174–174. ISSN: 0022-0434. DOI: 10.1115/1.3426575. URL: https://doi.org/10.1115/1.3426575 (besucht am 01. 06. 2021).

[7] William I. Fletcher. *Engineering Approach to Digital Design*. New-Jersey: Prentice-Hall, 1980.

[8] Randy H. Katz und Gaetano Borriello. *Contemporary Logic Design*. California: The Benjamin/Cummings Publishing Company Inc, 2005.

[9] Martin V. Künzli und Marcel Meli. *Vom Gatter Zu VHDL: Eine Einführung in Die Digitaltechnik*. vdf Hochschulverlag AG, 2007. ISBN: 3 7281 2472 9.

[10] David Lewin und Douglas Protheroe. *Design of Logic Systems*. second edition. Hong Kong: Springer, 2013.

[11] Daniel Mange. *Analyse et synthèse des systèmes logiques*. Editions Géorgi. Bd. Traité d'électricité, volume V. St Saphorin: PPUR presses polytechniques, 1995. 362 S. ISBN: 978-2-88074-045-0. Google Books: 5NSdD4GRl3cC.

[12] Clive Maxfield. *Bebop to the Boolean Boogie*. Elsevier, 2009. ISBN: 978-1-85617-507-4. DOI: 10.1016/B978-1-85617-507-4.X0001-0. URL: https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/B9781856175074X00010 (besucht am 27. 05. 2021).

[13] Ronald J. Tocci und André Lebel. *Circuits Numériques: Théorie et Applications*. deuxième édition. Ottawa: Editions Reynald Goulet inc. / Dunod, 1996.

[14] John F. Wakerly. *Digital Design: Principles And Practices*. 3rd edition. Prentice-Hall, 2008. ISBN: 0-13-082599-9.