HEIG-VD — GRE

Laboratoire 3 – Modélisation

Évaluation des besoins pour une flotte aérienne

[redacted]

20 octobre 2023

1 Contexte du problème

Une compagnie aérienne gère un réseau de n vols qui desservent m aéroports en utilisant un seul type d'avions. L'objectif de la compagnie est de trouver le nombre minimum d'avions nécessaires pour opérer tous ses vols de manière efficiente.

Pour chaque combinaison de deux aéroports, la compagnie connaît les temps de vol entre ces aéroports dans les deux directions, qui peuvent varier. De plus, après qu'un avion atterrit, il doit subir une inspection, dont la durée est également connue pour chaque aéroport.

En se basant sur ces informations, la compagnie veut déterminer si un seul et même avion peut être utilisé pour effectuer plus d'un vol. Le contexte du problème étudié concerne donc l'optimisation de l'utilisation de la flotte d'avions de la compagnie afin de minimiser le nombre d'avions nécessaires pour gérer tous les vols tout en respectant les contraintes de temps de vol et d'inspection.

2 Modélisation

Pour modéliser le problème, nous faisons d'abord l'observation que si deux vols peuvent être enchaînés – autrement dit, couplés – alors les deux vols peuvent être effectués par le même avion.

Avec cette réflexion, nous pouvons donc résoudre le problème avec une modélisation par graphe biparti, dans lequel nous allons chercher un couplage maximum. Pour cela, nous devons poser les définitions suivantes.

Soient A l'ensemble des aéroports desservis et V l'ensemble des vols offerts par la compagnie aérienne. $|A| = m$ et $|V| = n$.

Soit $\sigma(v)$, une fonction retournant les informations du vol $v \in V$ (aéroport de départ et d'arrivée, principalement).

Soit $G = (V_1 \cup V_2, E)$, un graphe biparti orienté, avec ses sous-ensembles V_1 et V_2 représentant chacun une copie de V. V_1 et V_2 sont donc disjoints, mais deux sommets $v_{1j} \in V_1$ et $v_{2j} \in V_2$ pour $0 < j \leq n$ contiendront la même information, c.-à-d. $\sigma(v_{1j}) = \sigma(v_{2j})$. Nous obtenons donc $|V_1 \cup V_2| = 2n$.

Nous ajoutons à ce graphe les arêtes $e \in E$ si le vol $v_1 \in V_1$ et $v_2 \in V_2$, $\sigma(v_1) \neq \sigma(v_2)$ peuvent être enchaînés, donc effectués par le même avion. Il faut donc que l'aéroport d'arrivée $a \in A$ de v_1 soit égal à l'aéroport de départ de v_2 et que l'heure de départ de v_2 soit supérieure à l'heure d'arrivée de v_1 et le temps d'inspection de l'aéroport a combinés.

Pour rechercher le couplage maximal, le graphe ne doit pas être orienté. Nous prendrons donc le sous-graphe $G' = (V_1 \cup V_2, E')$ avec un ensemble E' d'arêtes pour chaque arc $e \in E$. Les arcs allant tous d'un sommet de V_1 à un autre sommet de V_2, il n'y aura pas de conflits. Nous devons cependant pouvoir retrouver l'arc e originaire d'une arête e' pour toutes les arêtes de E'.

Nous avons désormais une modélisation du problème qui correspond à un problème classique de graphes, celui de la recherche du couplage maximum. Le graphe étant biparti, la recherche de l'ensemble $M \subseteq E'$ des arêtes du couplage est donc facilitée, avec l'algorithme de Hopcroft-Karp.

Une fois le couplage maximum – de cardinalité $|M|$ maximale – déterminé, nous pouvons désormais calculer le nombre minimal d'avions que la compagnie aura besoin pour offrir les n vols $v \in V$ susmentionnés :

$$\text{nombre minimal d'avions} = |V| - |M| = n - |M|$$

En effet, chaque arc $m \in M$ du couplage maximum représente un couple de deux vols qui peuvent être effectués par le même avion, ainsi réduisant de 1 le nombre d'avions nécessaires à l'opération des vols offerts par la compagnie. Le nombre maximal d'avions, sans compter une éventuelle réserve, étant équivalent à un avion par vol, autrement dit $|V| = n$ avions, nous pouvons donc modéliser le nombre minimal d'avions comme étant la soustraction du nombre maximal d'avions avec le nombre de vols qui peuvent être effectués par le même avion.

3 Application théorique du modèle

Soit l'ensemble de vols suivant donnés dans la table 1 avec les heures d'arrivées comprenant le temps d'inspection à la fin du vol.

Le graphe de la figure 1 représente le graphe $G = (V_1 \cup V_2, E)$ de notre modélisation ci-dessus, les arcs représentant les vols qui peuvent être enchainés dans notre table. La recherche du couplage maximum n'est pas difficile et est représentée par les arcs rouges du graphe en figure 2, ce graphe n'est plus orienté, car il représente le graphe $G' = (V_1 \cup V_2, E')$.

Nous avons donc 5 vols sur 7 qui peuvent être enchaînés, demandant donc un total de 2 avions. En parcourant les arêtes de notre couplage, il est possible de déterminer le trajet de chaque avion ; le premier effectuera $A \to B \circ B \to C \circ C \to A \circ A \to D$, le deuxième effectuera $B \to C \circ C \to D \circ D \to B$, complétant ainsi tous les vols offerts par la compagnie aérienne.

Vol	Départ	Arrivée	Heure de départ	Heure d'arrivée
Vol 1	A	B	9h00	10h30
Vol 2	B	C	11h15	13h00
Vol 3	C	A	14h45	16h30
Vol 4	A	D	16h45	18h30
Vol 5	B	C	10h00	11h15
Vol 6	C	D	12h00	14h00
Vol 7	D	B	15h30	17h00

TABLE 1 – Vols $v \in V$ offerts par la compagnie aérienne

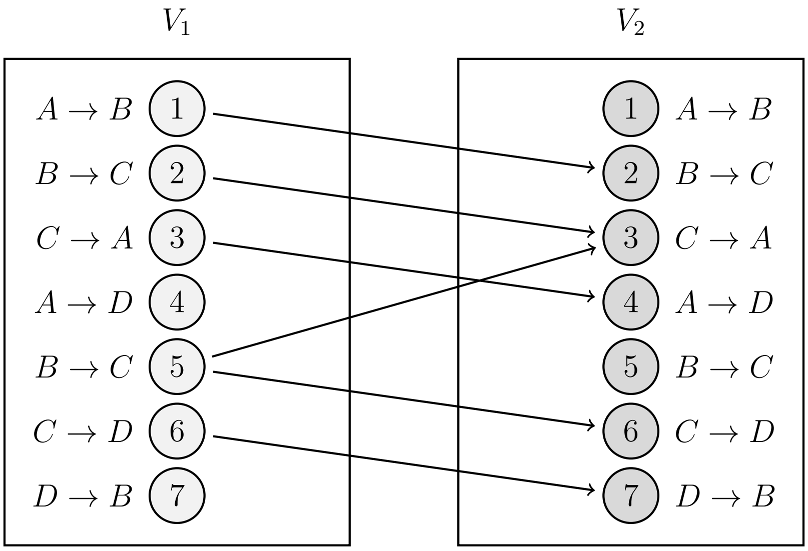

FIGURE 1 – Graphe biparti des vols de la table 1 selon la modélisation donnée en section 2

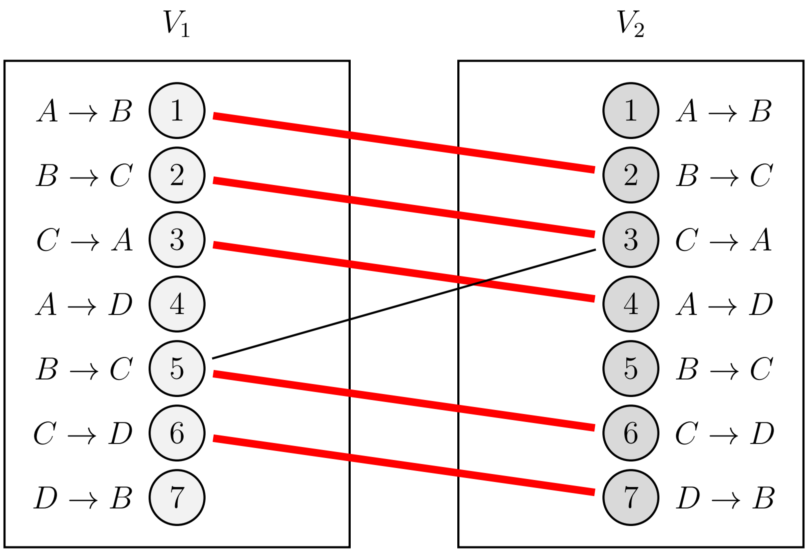

FIGURE 2 – Couplage maximum du graphe biparti de la figure 1