Stoffdidaktik Mathematik – Skript zur Vorlesung im Wintersemester 2023/24

Dr. Heiko Etzold, Universität Potsdam

Letzte Änderung: 18.12.2023

Inhaltsverzeichnis

Über dieses Dokument

Die Veranstaltung *Stoffdidaktik Mathematik* wird über dieses Dokument begleitet. Es wird fortlaufend aktualisiert und zur Verfügung gestellt. Über ein Git-Respository können Änderungen nachverfolgt werden. In der html-Version gelangt man über die Menüleiste am oberen Rand sowohl zu den Rohdaten als auch zu einer pdf-Version. Die Darstellung der Inhalte ist jedoch optimiert für die html-Version dieses Dokuments.

Aufgrund der permanenten Entwicklung ist eine Zitation des aktuellen Skriptes nicht unbedingt geeignet. Sollte ein Verweis notwendig sein, wird als Quellenangabe empfohlen:

> Etzold, H. (2023). *Stoffdidaktik Mathematik – Skript zur Vorlesung im Wintersemester 2023/24* (Version vom 18.12.2023). https://stoffdidaktik.heiko-etzold.de

Die Vorlesungsskripte der letztjährigen Veranstaltungen, die sich dann auch zur Zitation eignen, finden Sie unter:

- https://stoffdidaktik.heiko-etzold.de/2022
- https://stoffdidaktik.heiko-etzold.de/2021

Lizenz

Stoffdidaktik Mathematik an der UP

Struktur der Veranstaltung

Die Veranstaltung *Stoffdidaktik Mathematik*[1] besteht aus einer **Vorlesung (2 SWS)** und einem zugehörigen **Seminar (2 SWS)**.

Im Wintersemester 2023/24 wird die **Vorlesung semesterbegleitend** kompakt in der zweiten Semesterhälfte stattfinden. Das **Seminar** können Sie entweder **parallel zur Vorlesung** im Wintersemester oder **semesterbegleitend** im Sommersemester 2024 besuchen.

In der Vorlesung erhalten Sie einen **Input zu stoffdidaktischen Grundlagen**, wobei der Schwerpunkt auf **stoffdidaktischen Theorien** liegt, die über vielfältige Unterrichtsbeispiele illustriert werden. Im Seminar haben Sie die Aufgabe, diese Grundlagen selbstständig **auf verschiedene Lerngegenstände anzuwenden**.

Sie halten einen **Seminarvortrag** (30 bis 45 Minuten) als Voraussetzung für die Zulassung zur Modulprüfung und fassen Ihre Erarbeitungen in einer **Hausarbeit** (6 bis 8 Seiten) zusammen, die als Modulprüfung dient.

Einordnung

Die Veranstaltung *Stoffdidaktik Mathematik* findet nach empfohlenem Studienverlaufsplan im **5. Fachsemester parallel zur *Einführung in die Mathematikdidaktik*** statt.

Das heißt insbesondere, dass Sie bereits die **Grundlagen** zur Analysis, Linearen Algebra, Stochastik, Geometrie, Algebra und Numerik studiert haben sollten. Auf diese Grundlagen wird in der Stoffdidaktisch **fachlich aufgebaut**.

Während Sie sich in der *Einführung in die Mathematikdidaktik* mit verschiedenen Lehr-Lern-Theorien, Unterrichtsprinzipien, prozessbezogenen Kompetenzen oder methodischen Grundlagen des Mathematikunterrichtens beschäftigen, liegt in der *Stoffdidaktik Mathematik* der Fokus auf der **Auswahl und Strukturierung der Unterrichtsinhalte**, basierend auf fachlichen und fachdidaktischen Erkenntnissen. Im Wintersemester 2023/24 wird durch eine kompakte Durchführung von Einführung (1. Semesterhälfte) und Stoffdidaktik (2. Semesterhälfte) die Einführungsvorlesung zeitlich vor der Stoffdidaktikvorlesung stattfinden.

[1] Die Modulbeschreibung finden Sie bei PULS.

Parallel oder im Anschluss an beide Veranstaltungen absolvieren Sie das **fachdidaktische Tagespraktikum**, in dem Sie die erworbenen Kenntnisse in die **Unterrichtspraxis** transferieren und erste eigene Unterrichtsstunden im Fach Mathematik halten.

Kompetenzziele der Veranstaltung

Als Kompetenzen, die Sie nach Abschluss von Vorlesung und Seminar erreicht haben sollen, sind angedacht:

- Sie **kennen Aspekte und Grundvorstellungen** zu zentralen mathematischen Begriffen.
- Sie **beurteilen Unterrichtsmaterialien und Lernumgebungen** hinsichtlich ihrer stoffdidaktischen Eignung.
- Sie **erstellen Aufgaben und erste Lernumgebungen** zu konkreten Stoffgebieten.
- Sie **erkennen mathematikdidaktische Prinzipien und Ideen** als **Entscheidungs- und Strukturierungsgrundlage** zu stofflichen Inhalten der mathematischen Bildung.
- Sie **wählen zielgerichtet** analoge und digitale **Medien** zur Unterstützung stofflich orientierter Lehr-Lern-Prozesse aus.
- Sie **setzen sich** selbstständig **mit stoffdidaktischen Fragestellungen auseinander** und nutzen dafür geeignete mathematikdidaktische Literatur.
- Sie **reflektieren die Inhalte der vorangegangenen Mathematik-Fachmodule** unter stoffdidaktischen Gesichtspunkten.

Was ist Stoffdidaktik?

Für die Disziplin der *Stoffdidaktik Mathematik* gibt es keine allgemeingültige Definition, auch haben sich die Schwerpunkte in der historischen Entwicklung stets verschoben.

Grundsätzliches Ziel ist, stoffliche Inhaltsbereiche für den Mathematikunterricht auszuwählen (***Was?***) und aufzubereiten (***Wie?***). Im Sinne dieser Veranstaltung kann Stoffdidaktik grob als **Spezifierung und Strukturierung von Lerngegenständen** aufgefasst werden (zur begrifflichen Einordnung siehe auch Hußmann et al., 2016).

Während hierzu, historisch betrachtet, anfangs der Stoff ausschließlich aus fachmathematischer Perspektive aufbereitet wurde (z. B. durch *didaktisch-orientierte Sachanalysen*), nahmen in der Folgezeit mehr und mehr auch Lehr-Lern-Theorien Einzug – gar ein Verschwinden der stofflichen Orientierung der Mathematikdidaktik wird befürchtet (vgl. Jahnke, 2010).

Mit dem Begriff der **Strukturgenetischen Analyse** erweitert Wittmann (2015) die historische Sichtweise als eine »Mathematikdidaktik *vom Fach aus*«, die sich »auf implizite Theorien des Lehrens und Lernens, die im Fach selbst liegen[, stützt]« (Wittmann, 2015, S. 240). »Anders als bei der Stoffdidaktik, die sich im Wesentlichen auf die logische Analyse des Stoffes und die Wissensvermittlung konzentriert hat, stehen jetzt aber die Genese des Wissens im Verlauf der

Schulzeit und Lernprozesse unter Bezug auf unterschiedliche Lernvoraussetzungen im Vordergrund« (Wittmann, 2015, S. 250). Eine derartig ganzheitliche Sichtweise soll auch den Geist dieser Veranstaltung ausmachen.

Überblicke zur historischen Entwicklung der Stoffdidaktik

- Hefendehl-Hebeker (2016): Subject-matter didactics in German traditions: Early historical developments
- Schupp (2016, 79 ff.): Gedanken zum „Stoff" und zur „Stoffdidaktik" sowie zu ihrer Bedeutung für die Qualität des Mathematikunterrichts

Stoffdidaktische Analyse

1 Vier-Ebenen-Ansatz

Ziele

- Sie kennen typische Fragestellungen, um sich einer stoffdidaktischen Analyse systematisch zu nähern.
- Sie erkennen den Vier-Ebenen-Ansatz als eine Möglichkeit, eine stoffdidaktische Analyse strukturiert vorzunehmen.
- Sie können den Vier-Ebenen-Ansatz anhand eines Beispiels nachvollziehen.
- Sie sind sich der Komplexität einer stoffdidaktischen Analyse bewusst.

Material

- Folien zum Kapitel 1 (pdf, Keynote)
- App *Winkel-Farm* (nur für iOS)

1.1 Analyse von Lerngegenständen

Die inhaltliche Basis der Veranstaltung bietet ein Beitrag von Hußmann & Prediger (2016) zur Spezifizierung und Strukturierung mathematischer Lerngegenstände. Nur einen Artikel als Basis einer kompletten 4 SWS starken Veranstaltung zu nutzen, scheint zunächst unüblich. In diesem Fall ist es jedoch hilfreich, da der Beitrag eine Kategorisierung stoffdidaktischer Analysen vorschlägt und vielfältige Fragen formuliert, woraus sich wieder ein ganzes Repertoir an Themen ergibt, die es im Rahmen von Vorlesung und Seminar zu untersuchen gilt.

Hußmann & Prediger (2016, 35 f.) kategorisieren eine stoffdidaktische Analyse in eine **formale**, **semantische**, **konkrete** und **empirische** Ebene, wobei diese nicht hierarchisch aufgebaut sind, sondern sich gegenseitig beeinflussen. Innerhalb der Ebenen wird jeweils noch einmal in die **Spezifizierung** und die **Strukturierung** eines Lerngegenstands unterschieden.

Auf der formalen Ebene wird der Lerngegenstand aus seiner fachlich-logischen Struktur heraus betrachtet.

Die semantische Ebene adressiert Sinn und Bedeutung des mathematischen Gegenstands sowie erkenntnistheoretische Aspekte.

Ziel der konkreten Ebene ist die Umsetzung des Lehr-Lern-Prozesses an konkreten Situationen, über die das mathematische Wissen konstruiert wird.

Über die empirische Ebene werden die kognitiven und ggf. sozialen Aspekte der Schülerinnen und Schüler in die stoffdidaktische Analyse integriert.

Über die **Spezifizierung** wird ermittelt, was genau Schülerinnen und Schüler bezüglich eines bestimmten mathematischen Themas lernen sollen, während die **Strukturierung** analysiert, wie diese Elemente miteinander in Verbindung stehen und wie sie im Lernpfad strukturiert werden können.

Aus den vier Ebenen und der jeweiligen Unterscheidung in Spezifizierung und Strukturierung ergeben sich acht (nicht immer trennscharfe) Dimensionen, die den Analyseprozess zu einem Lerngegenstand kategorisieren können. Um dies für Forschungs- und Entwicklungsprozesse greifbar zu machen, haben Hußmann & Prediger (2016, S. 36) typische Fragestellungen formuliert, an die in Tabelle 1.1 angelehnt wird.

Tabelle 1.1: Typische Fragestellungen, angelehnt an Hußmann & Prediger (2016, S. 36)

	Spezifizierung	Strukturierung
Formale Ebene	**Welche Begriffe und Sätze** sollen erarbeitet werden? **Welche Verfahren** sollen erarbeitet werden und **wie** werden sie **formal begründet**?	Wie lassen sich die Begriffe, Sätze, Begründungen und Verfahren **logisch strukturieren**? Welche **Verbindungen** zwischen den Fachinhalten sind entscheidend, welche weniger bedeutsam? Wie kann das **Netzwerk** aus Begriffen, Sätzen, Begründungen und Verfahren entwickelt werden?
Semantische Ebene	**Welche Fundamentalen Ideen** liegen hinter den Begriffen, Sätzen und Verfahren? **Welche Grundvorstellungen und Repräsentationen** (graphisch, verbal, numerisch und algebraisch) sind für den Verständnisaufbau entscheidend?	Wie **verhalten** sich Ideen und Vorstellungen **zueinander** und **zu früheren und späteren Lerninhalten**? Wie kann ein **Lernpfad angeordnet** werden, in dem das Verständnis, zusammen mit den Erkenntnissen der formalen Ebene, aufgebaut wird?

	Spezifizierung	Strukturierung
Konkrete Ebene	**Welche Kernfragen und Kernideen** können die Entwicklung der Begriffe, Sätze und Verfahren leiten? **Welche Kontexte und Probleme** sind geeignet, um an ihnen die Kernfragen und -ideen exemplarisch zu behandeln und die Inhalte zu rekonstruieren?	Wie kann das Verständnis sukzessive **über konkrete Situationen** in den beabsichtigten Lernpfaden **konstruiert** werden (*horizontale Mathematisierung*)? Wie können die Lernpfade **in Bezug auf die Problemstruktur angeordnet** werden (*vertikale Mathematisierung*)?
Empirische Ebene	**Welche** typischen **individuellen Voraussetzungen** (Vorstellungen, Kenntnisse, Kompetenzen, ...) sind zu erwarten und **wie passen** diese zum **angestrebten Verständnis** (Ressourcen vs. Hindernisse)? **Woher** kommen typische **Hindernisse** oder **unerwünschte Vorstellungen**?	Wie können typische **Vorkenntnisse und Vorstellungen** als **fruchtbare Anknüpfungspunkte** dienen? Welche **Schlüsselstellen** (Hindernisse, Wendepunkte, ...) gibt es **im Lernweg** der Schülerinnen und Schüler? Wie kann der angestrebte **Lernpfad** bezüglich der Anknüpfungspunkte und Schlüsselstellen **neu angeordnet** werden?

Diese Fragen können dabei helfen, einen Lerngegenstand aus professioneller Sicht vollumfänglich zu analysieren und daraus die Gestaltung eines Lernpfades für Schülerinnen und Schüler abzuleiten. Noch *nicht* abgeleitet werden kann daraus jedoch die Gestaltung einer *konkreten Unterrichtsstunde* – dies bedarf weiterer Überlegungen, z. B. zu Unterrichtsmethoden, Aufgaben, Klassenmanagement, ... (Hußmann & Prediger, 2016, S. 37).

Als **Lerngegenstände** werden für spezifische Ausbildungszwecke ausgewählte Ausschnitte des gesellschaftlichen Wissens und Könnens angesehen (vgl. Lompscher, 1985). Diese Sichtweise entstammt tätigkeitstheoretischen Überlegungen, wobei zwischen gesellschaftlichem Wissen und Können und individuellen Kenntnissen, Fähigkeiten und Fertigkeiten unterschieden wird. Weitere Hintergrundinformationen dazu finden Sie in Abschnitt 5.1 sowie in den Kapiteln **??** und **??**.

1.2 Beispiel Winkelbegriff

Um sich der Komplexität des Vier-Ebenen-Ansatzes bewusst zu werden, sollen mögliche Gedankengänge am Beispiel des Winkelbegriffs durchgeführt werden. Grundlage hierfür bietet die Dissertation *Neue Zugänge zum Winkelbegriff* (Etzold, 2021). In dieser wird zwar nicht der Vier-Ebenen-Ansatz für die stoffdidaktische Analyse verfolgt, aber dennoch lassen sich die einzelnen Elemente darin wiederfinden. Ziel ist hier keine vollumfängliche stoffdidaktische Analyse, sondern eher eine Darstellung der exemplarischen Herangehensweise, wie man sich einer Spezifizierung und Strukturierung des Lerngegenstands *Winkel* auf den vier Ebenen nähern kann.

1.2.1 Formale Ebene

Eine fachmathematische Analyse (bereits mit dem Blick auf eine schulische Nutzung) des Winkelbegriffs bieten u. a. Freudenthal (1973b), Strehl (1983) oder Mitchelmore (1990).

Freudenthal (1973b, S. 441) unterscheidet einen Winkel bspw. dahingehend, ob er über Geraden oder Halbgeraden (bzw. Strahlen) beschrieben wird, ob diese geordnet oder ungeordnet sind und ob sie in der orientierten oder unorientierten Ebene vorliegen (siehe Abbildung 1.1).

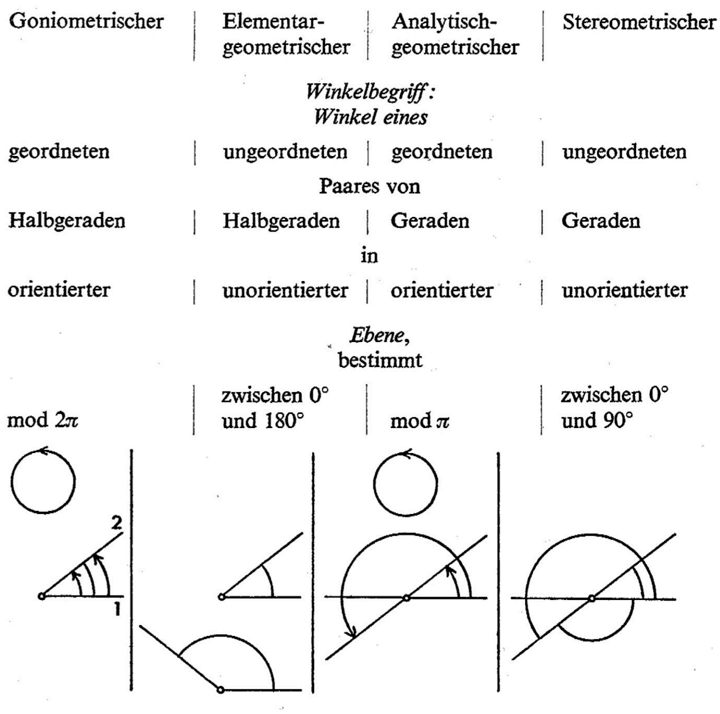

Abbildung 1.1: Winkelbegriffe nach Freudenthal (1973b, S. 441)

Er diskutiert, welchen Einfluss die jeweilige Sichtweise auf dem Maßbereich hat, wie Winkel überhaupt gemessen werden können und wie mit Winkeln operiert werden kann. Was passiert denn, wenn man ein geordnetes Strahlenpaar in der orientierten Ebene spiegelt (vgl. Freudenthal, 1973b, 443 ff.)?

Wenn die Reihenfolge der Strahlen erhalten bleibt und die Winkelmessung aufgrund der Orientierung der Ebene vorgegeben ist, ändert sich damit ggf. auch das Maß des Winkels (siehe Abbildung 1.2).

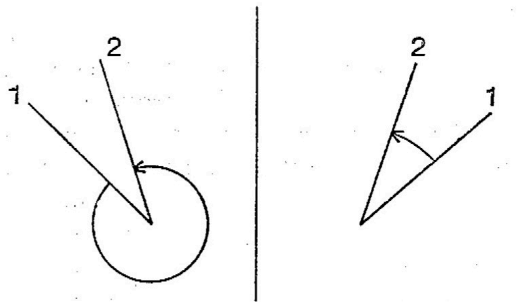

Abbildung 1.2: Spiegelung eines goniometrischen Winkels (Freudenthal, 1973b, 443)

Hierzu stellt Freudenthal (1973b, 443 ff.) weitere fachmathematische Ausführungen dar und schließt damit, dass der elementargeometrische, goniometrische und analytische Winkelbegriff aus fachlicher Sicht für den schulischen Lernpfad unentbehrlich sind (Freudenthal, 1973b, S. 449).

Die *Spezifizierung* besteht also darin, den Begriff zu schärfen und Operationen mit ihm zu beschreiben. Die *Strukturierung* besteht u. a. in der vernetzenden Analyse der verschiedenen Winkelbegriffe und der Schlussfolgerung ihrer gleichermaßen Bedeutsamkeit für den Schulunterricht.

1.2.2 Semantische Ebene

Dazu, welche Vorstellungen Schülerinnen und Schüler zum Winkelbegriff entwickeln sollen, sei u. a. auf Krainer (1989) und Mitchelmore & White (1998) verwiesen. Eine grundsätzliche Schwierigkeit beim Unterrichten von Winkeln sind diverse und (scheinbar) nicht in Verbindung zu bringende Anwendungskontexte, die dennoch über denselben mathematischen Begriff beschrieben werden können. So ist das Sichtfeld eines Tieres ebenso wie die Umdrehung eines Wasserzählers über Winkel beschreibbar – haben doch beide Situationen zunächst nichts miteinander zu tun.

Aufbauend auf den Arbeiten von Krainer (1989) und Mitchelmore & White (1998) können über eine Verknüpfung zur formalen Ebene mithilfe einer *informationstheoretischen Winkeldefinition* (Etzold, 2021, 39 f..) vier Grundvorstellungen zum Winkelbegriff ausgearbeitet bzw. validiert werden:

- Winkel als Knick
- Winkel als Feld
- Winkel als Richtungsänderung
- Winkel als Umdrehung

Dabei erhalten die *Bestandteile* eines Winkels (Scheitelpunkt, Schenkel, ggf. Bereich zwischen den Schenkeln, Abweichungsmaß) eine besondere Bedeutung, über die sich auch eine sinnvolle Reihenfolge der Behandlung dieser Grundvorstellungen ableiten lässt. So »bietet es sich an, mit den Winkelfeldern zu beginnen. Bei diesen werden die meisten Bestandteile sichtbar (Scheitelpunkt, beide Schenkel als Begrenzungen sowie der zwischen den Schenkeln relevante Bereich) […]. Anschließend können Knicke oder Richtungsänderungen behandelt werden, woraufhin die Umdrehungen folgen.« (Etzold, 2021, S. 60)

Die *Spezifizierung* in diesem semantischen Teil ist demnach die Ausarbeitung der Grundvorstellungen. Die Begründung einer möglichen Reihenfolge kann der *Strukturierung* des Lerngegenstands zugeordnet werden.

1.2.3 Konkrete Ebene

Um die einzelnen Vorstellungen zu Winkeln aufzubauen, bedarf es charakteristischer Situationen, an denen der mathematische Kern der jeweiligen Vorstellung besonders gut sichtbar wird. Abbildung 1.3 zeigt derartige *Winkelsituationen* und die zugehörigen Grundvorstellungen (hier *Winkelkontexte*).

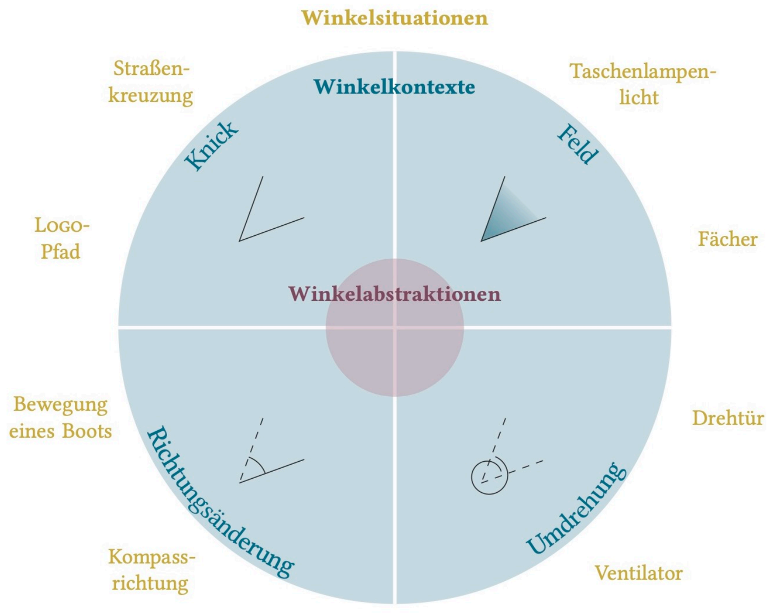

Abbildung 1.3: Winkelsituationen und -kontexte (Etzold, 2021, S. 70)

Exemplarisch für die Grundvorstellung des Winkels als Feld wird darauf aufbauend eine Lernumgebung und darin eingebettetes Unterrichtsmaterial entwickelt, mithilfe dessen die Grundvorstellung ausgebildet werden kann. An der konkreten Situation der *Sichtfelder von Tieren* sollen die Schülerinnen und Schüler Handlungen ausführen, die es ihnen ermöglicht, den mathematischen Kern hinter dem konkreten Beispiel zu erkunden.

Die Schülerinnen und Schüler nutzen dazu eine App (siehe Abbildung 1.4), in der mehrere Tiere mit ihren Sichtfeldern dargestellt werden können, und erhalten u. a. folgende Aufgaben (vgl. Etzold, 2019b, S. 8 ff.):

1. Setze das Schaf an eine Stelle, an der es von der Kuh gesehen wird, aber die Kuh selbst nicht sieht.
2. Setze das Schaf an eine Stelle, an der es nicht von der Kuh gesehen wird.
3. Das Schaf will die Kuh verwirren. Bewege es an möglichst viele Orte, an denen es von der Kuh gesehen wird.
4. Setze das Schaf an eine Stelle, an der es noch gerade so von der Kuh gesehen wird.
5. Wo muss das Schaf lang laufen, damit es die gesamte Zeit gerade so von der Kuh gesehen wird?

An Aufgabe 5 kann z. B. erkundet werde, dass sich das Schaf geradlinig auf der Grenze zwischen Sichtfeld und Nicht-Sichtfeld bewegen muss. In die eine Richtung ist die Bewegung beliebig fortsetzbar, in die andere durch den Kopf der Kuh begrenzt. Eine mathematische Verallgemeinerung dieser Handlung besteht dann in der Identifizierung des Schenkels (Begrenzung) als Strahl (nur in eine Richtung fortsetzbar) mit dem Scheitelpunkt (Kopf der Kuh) als *Quelle* des Winkelfeldes.

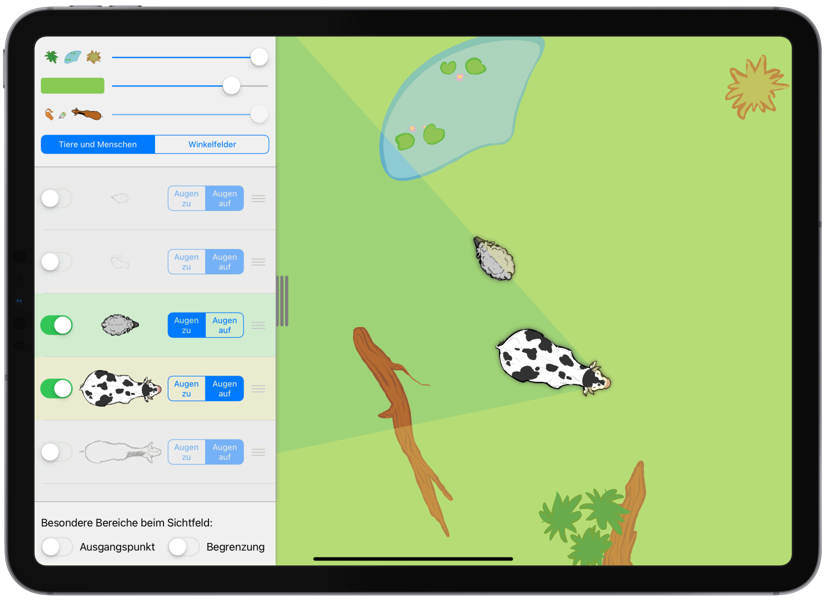

Abbildung 1.4: Screenshot der App Winkel-Farm (Etzold, 2019a)

Als *Spezifizierung* kann das Finden der Sichtfeld-Situation als charakterisches Beispiel für ein Winkelfeld angesehen werden. Die *Strukturierung* führt zum dargestellten Lernpfad und den konkreten Aufgabenstellung, über die konkrete Handlungen verallgemeinert werden und damit das mathematische Verständnis aufgebaut wird.

1.2.4 Empirische Ebene

Die zuvor beschriebene Lernumgebung wurde in mehreren Zyklen erprobt und dabei die Qualität der Handlungen der Schülerinnen und Schüler beobachtet. Ein Ziel bestand darin, dass möglichst verallgemeinerbare Handlungen (wie oben am Beispiel des Schenkels beschrieben) durchgeführt werden.

Es wird erwartet, dass die Repräsentation eines Sichtfeldes von der Draufsicht über eine semintransparent ausgemalte Teilfläche der Ebene noch nicht bekannt ist. Um diese nachzuvollziehen und mit eigenen Erfahrungen in Bezug zu bringen, wird an den Beginn der Unterrichtsstunde ein Bild des Klassenraumes in der Draufsicht präsentiert (siehe Abbildung 1.5). Dann soll eine Schülerin oder ein Schüler beschreiben, was sie/er alles sieht, ohne den Kopf zu drehen. Dieser Bereich wird auf dem Bild eingezeichnet, so dass die Repräsentation des Sichtfeldes im Folgenden zur Verfügung steht.

Abbildung 1.5: Klassenraum von oben (Foto: Christian Dohrmann)

In der Erprobung konnte beobachtet werden, dass einige Bedienschwierigkeiten mit der Anwendung den Lernfortschritt hemmten. Dies konnte u. a. dadurch verbessert werden, dass vor die eigentliche Erarbeitung eine freie Erkundungsphase mit der App (siehe Abbildung 1.6) gesetzt wurde (Etzold, 2021, S. 147, 152). Durch spezifische Aufgabenstellungen wurden bestimmte Funktionen der App fokussiert:

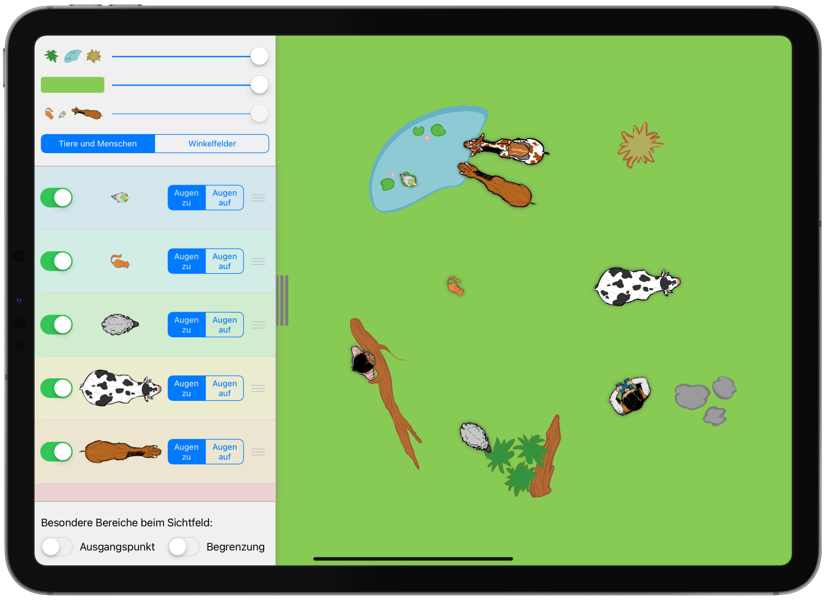

Abbildung 1.6: Möglicher Startbildschirm für die freie Erkundungphase

»Das Pferd soll auf dem Steinpflaster stehen, die Frau soll auf dem Pferd sitzen/stehen. Das Pferd guckt in Richtung der grünen Büsche, die Frau hat die Augen zu. Gleichzeitig versteckt sich die Katze unter der Kuh.«

Die Einführungsphase über das Klassenraumfoto folgt aus der *Spezifizierung* innerhalb der empirischen Ebene. Das Hinzufügen der freien Erkundungsphase ist dagegen der *Strukturierung* der Analyse zuzuordnen.

1.2.5 Verknüpfung der Ebenen

An den Ausführungen ist schon sichtbar geworden, dass sich die Ebenen nicht immer trennen lassen und teilweise gegenseitig beeinflussen. Auch gehen oft Spezifizierung und Strukturierung ineinander über.

Das ist aber gar nicht schlimm, ganz im Gegenteil. Es zeigt wieder einmal, wie wichtig solch ein ganzheitlicher Ansatz ist, so dass eine stoffdidaktische Analyse aus den diversen Sichtpunkten heraus betrachtet werden sollte.

Wichtig ist v. a., dass Sie sich als Lehrkraft stets darüber im Klaren sind, dass für eine stoffdidaktische Analyse verschiedene Perspektiven verfolgt werden müssen. Sehen Sie den Vier-

Ebenen-Ansatz daher auch als Kontrollinstrument, ob Sie an alles gedacht haben, wenn Sie einen Lerngegenstand intensiv analysieren.

1.3 Zum Nachbereiten

1. Lesen Sie den Artikel von Hußmann & Prediger (2016) zum Vier-Ebenen-Ansatz.
2. Reflektieren Sie Ihre bisherige Fach- und Fachdidaktikausbildung in Mathematik dahingehend, welche der aufgeworfenen Fragen Sie zu konkreten Themenbereichen (nicht) beantworten könnten.

2 (Hoch-)Schulmathematik

Ziele

- Sie erkennen den Nutzen der Hochschulmathematik bei der Entscheidungsfindung zur Spezifizierung und Strukturierung der Schulmathematik auf der formalen Ebene des Vier-Ebenen-Ansatzes.
- Sie kennen geeignete Quellen zur Beantwortung der Fragen auf der formalen Ebene des Vier-Ebenen-Ansatz

Material

- Folien zum Kapitel 2 (pdf, Keynote)

2.1 Doppelte Diskontinuität

Auf der formalen Ebene des Vier-Ebenene-Ansatzes soll der zu betrachtende Lerngegenstand fachmathematisch untersucht werden, um eine erste Auswahl (*Spezifizierung*) und Anordnung (*Strukturierung*) der Lerninhalte zu ermöglichen. Dies ruft natürlich – auch für Lerngegenstände der Grundschulmathematik – danach, die im Studium erworbenen hochschulmathematischen Erkenntnisse zu nutzen. Dieser Ruf wird jedoch (scheinbar!) geschmälert durch eine offensichtliche Ungleichheit zwischen Schulmathematik und Hochschulmathematik. Felix Klein beschreibt dieses Phänomen, das sich insbesondere auf die Ausbildung von Lehrkräften auswirkt, bereits im Übergang vom 19. zum 20. Jahrhunderts als ***doppelte Diskontinuität***: »Der junge Student sieht sich am Beginn seines Studiums vor Probleme gestellt, die ihn in keinem Punkte mehr an die Dinge erinnern, mit denen er sich auf der Schule beschäftigt hat; natürlich vergißt er daher alle diese Sachen rasch und gründlich. Tritt er aber nach Absolvierung des Studiums ins Lehramt über, so soll er plötzlich eben diese herkömmliche Elementarmathematik schulmäßig unterrichten; da er diese Aufgabe kaum selbständig mit seiner Hochschulmathematik in Zusammenhang bringen kann, so wird er in den meisten Fällen recht bald die althergebrachte Unterrichtstradition aufnehmen, und das Hochschulstudium bleibt ihm nur eine mehr oder minder angenehme Erinnerung, die auf seinen Unterricht keinen Einfluß hat.« (Klein, 1967, S. 1)[1]

Einen Ausweg, dieser doppelten Diskontinität zu entgehen, sah Klein in einer ***Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus*** (Klein, 1925, 1955, 1967). Dabei verfolgt er »das

[1]Es handelt sich hier um den Nachdruck eines Werke, dessen erste Auflage 1908 erschien.

Ziel, im Anschluss an umfassende hochschulmathematische Erfahrungen die Schulmathematik in den erworbenen Wissenskanon fachlich einzubetten« (Danckwerts, 2013, S. 78).

Diesen Gedanken fortsetzend kann man auch »gleich am Anfang des Studiums direkt und explizit an die schulmathematischen Vorerfahrungen an[knüpfen], bleibt inhaltlich bei diesen und arbeitet einen höheren Standpunkt heraus, der auf die vertiefte Auseinandersetzung mit der Oberstufenmathematik zielt und prinzipiell mit den bis dahin erworbenen (elementar-)mathematischen Mitteln auskommt.« (Danckwerts, 2013, S. 78) Eine solche Entwicklung hat das Projekt *Mathematik Neu Denken* verfolgt, das gut 100 Jahre nach Kleins Publikationen die Lehramtsausbildung im Fach Mathematik weiterentwickeln wollte (Beutelspacher et al., 2012). Entwickelt wird daraus eine ***Schulmathematik vom höheren Standpunkt***, die auf eine fachliche und verstehensorientierte Durchdringung der Schulmathematik zielt, »ohne im vollen Umfang auf das Instrumentarium der kanonischen [...] [Hochschulmathematik] zurückgreifen zu müssen« (Danckwerts, 2013, S. 87).

Im Rahmen der Stoffdidaktik-Veranstaltung sollen beide Ansätze aufgegriffen und an konkreten Beispielen versucht werden, die Fragen der formalen Ebene zu beantworten. Als bedeutsames Bindeglied zwischen Schul- und Hochschulmathematik stellen sich dabeifundamentale Ideen heraus, die auch schon auf die semantische Ebene des Vier-Ebenen-Ansatzes zielen – siehe dazu Abschnitt 3.4.

2.2 Geeignete Quellen

- Neben den Werken von Felix Klein zu Beginn des 20. Jahrhunderts (Klein, 1925, 1955, 1967) und aktuellen Ansätzen zum Umgang mit der doppelten Diskontinuität in der Lehramtsausbildung (Ableitinger et al., 2013; Beutelspacher et al., 2012) liefern die in den 1970er Jahren von Hans Freudenthal verfassten Werke zur *Mathematik als pädagogische Aufgabe* (Freudenthal, 1973c, 1973b; englischsprachig auch digital verfügbar über Freudenthal, 1973a) Ansätze, Schul- und Hochschulmathematik miteinander in Bezug zu bringen.
- Ebenfalls hilfreich sind größere Nachschlagewerke zur Mathematik, bspw. die *Kleine Enzyklopädie Mathematik* (Gellert et al., 1986).
- Nicht zu unterschätzen für die fachmathematische Auseinandersetzung sind auch fachdidaktische Quellen, insbesondere zur **Didaktik der Sachgebiete**. Als digital verfügbare Quellen seien zu erwähnen:
  - *Didaktik der Algebra: nach der Vorlage von Hans-Joachim Vollrath* (Weigand et al., 2022)
  - *Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I* (Weigand et al., 2018)
  - *Didaktik der Analysis. Aspekte und Grundvorstellungen zentraler Begriffe* (Greefrath et al., 2016)
  - *Didaktik der Stochastik in der Sekundarstufe I* (Krüger et al., 2015)

  - *Didaktik der Analytischen Geometrie und Linearen Algebra: Algebraisch verstehen – Geometrisch veranschaulichen und anwenden* (Henn & Filler, 2015)
  - *Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II. Band 1: Fachdidaktische Grundfragen, Didaktik der Analysis* (Tietze et al., 2000a)
  - *Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II. Band 2: Didaktik der Analytischen Geometrie und Linearen Algebra* (Tietze et al., 2000b)
  - *Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II. Band 3: Didaktik der Stochastik* (Tietze et al., 2002)

- Ebenfalls hilfreich für die fachliche Spezifizierung und Strukturierung kann die Darstellung der Fachinhalte in **Schulbüchern** sein. Hier bietet sich eine vergleichende Analyse mehrerer Schulbücher, auch unterschiedlicher Bundesländer, an.

- Nur gering geeignet für die Spezifizierung und Strukturierung sind die Bildungsstandstandards und Rahmenlehrpläne. Sie bieten – entsprechend ihrer Funktion – bereits eine Auswahl der zu unterrichtenden Inhalte und schränken damit die fachdidaktische Diskussion diesbezüglich ein.

2.3 Beispiel Negative Zahlen

Am Beispiel der negativen Zahlen soll dargestellt werden, wie eine Sichtweise vom höheren Standpunkt auf die in der Schule relevante Behandlung dieses Lerngegenstands zur Spezifizierung und Strukturierung helfen kann. Dabei beinhalten die negativen Zahlen sowohl die ganzen Zahlen als auch die rationalen Zahlen.

2.3.1 Natürliche Zahlen

Fachmathematisch können die ganzen Zahlen aus den natürlichen Zahlen generiert werden. Hierzu sollen zunächst die natürlichen Zahlen selbst fachmathematisch eingeordnet werden. Im Prinzip bestehen zwei Sichtweisen, nämlich die Einführung über die **Peano-Axiome** sowie die Betrachtung **gleichmächtiger Mengen**.

Aus den Peano-Axiomen (Wikipedia, 2021) folgt zunächst die Existenz einer Reihenfolge von Zahlen (also Nachfolger der 0), die dann mit 1, 2, 3 usw. bezeichnet werden können.[2] Diese Bezeichnung erlaubt jedoch noch keinerlei Berechnungen, nicht einmal eine Ordnungsrelation ist vorhanden. Es kann also (noch) nicht gesagt werden, dass 3 größer ist als 1. Vielmehr lässt sich die Situation eher mit einem Alphabet vergleichen[3], bei dem auch nicht C größer als A ist.

[2] Ab 10 wird bei der Bezeichnung jedoch das Stellenwertsystem genutzt – das geht schon weiter als hier zulässig.

[3] Ein wesentlicher Unterschied dieses Vergleiches ist, dass das Alphabet endlich ist, die Menge der natürlichen Zahlen jedoch nicht.

Für eine Ordnungsrelation bedarf es zunächst der Definition der Addition über $n + 0 := n$ und $n + k' := (n + k)'$ für alle $n, k \in \mathbb{N}$ mit der (aus den Peano-Axiomen existierenden) Nachfolgerbildung $'$. So gilt etwa mit $1 := 0'$: $1 + 1 = 1 + 0' = (1 + 0)' = 1' =: 2$. So kann nun induktiv jede höhere Additionsaufgabe generiert werden. Darauf aufbauend kann die Ordnungsrelation $n < m$ über die Existenz eines $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ mit $m = n + k$ definiert werden. Die Subtraktion $m - n = k$ ist nun wiederum über die Umkehroperation $n + k = m$ definierbar, sofern $m \geq n$.

Die Gleichmächtigkeit (z. B. endlicher) Mengen M und N wird über die Existenz einer Bijektion zwischen diesen beiden Mengen definiert, siehe Abbildung 2.1.

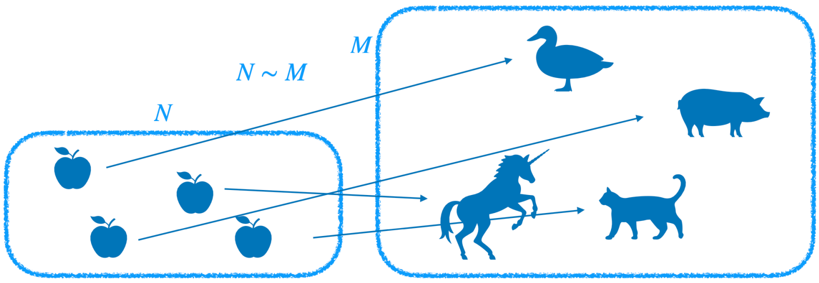

Abbildung 2.1: Gleichmächtigkeit von Mengen

Diese Relation ist eine Äquivalenzrelation, also symmetrisch, reflexiv und transitiv. Damit können Äquivalenzklassen gebildet werden, die die Mächtigkeit der Menge angeben. Statt $[4]$ als Bezeichner für die Äquivalenzklasse von vierelementigen Mengen kann dann auch kurz die Zahl 4 genutzt werden. Die Addition $n + k$ entspricht dann der Mächtigkeit der Vereinigungsmenge von $[n]$ und $[k]$, vgl. Abbildung 2.2.

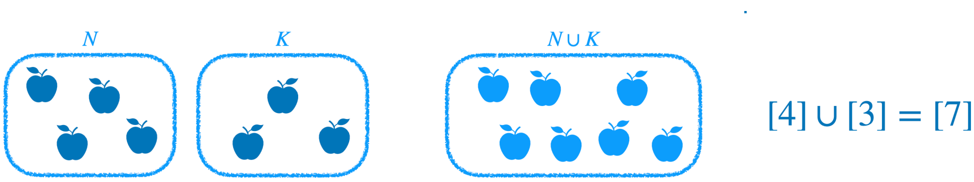

Abbildung 2.2: Additionsergebnis als Äquivalenzklasse der Vereinigungsmenge

2.3.2 Ganze Zahlen

Da innerhalb der natürlichen Zahlen noch nicht beliebig subtrahiert werden darf, stehen auch keine negativen Zahlen als Ergebnisse zur Verfügung. Um dennoch das Ergebnis bspw. der Aufgabe $2 - 7$ »definieren« zu können, bietet sich erneut eine **Äquivalenzrelation** über die »Differenzengleichheit« an. Konkret lässt sich für $k, l, m, n \in \mathbb{N}$ sagen: $(k, l) \sim (m, n) :\Leftrightarrow k + n = l + m$ Das heißt z. B., dass die Zahlenpaare $(2, 7)$, $(0, 5)$ und $(4, 9)$ in Relation zueinander stehen, weil sie dieselbe »Differenz« haben (obwohl es die Differenz formal noch nicht gibt). Dies ermöglicht nun die Einführung des Bezeichners -5 für die Äquivalenzklasse $[(0,5)]$.

Das Vorgehen ist *verträglich* mit den bisherigen Regeln in $\mathbb{N}$, d. h. es führt nicht zu Widersprüchen, wenn etwa das Zahlenpaar $(7,4)$ betrachtet wird mit dem Repräsentanten-Bezeichner 3. Die Menge aller Äquivalenzklassen (bzw. deren Kurzbezeichner) ist nun $\mathbb{Z}$.

Die Addition und Subtraktion zweier Zahlenpaare sind nun definierbar:

$$(k,l)+(m,n) := (k+m, l+n) \tag{2.1}$$

$$(k,l)-(m,n) := (k,l)+(n,m) \tag{2.2}$$

Als Alternative bietet sich ein **axiomatisches Vorgehen** an, also dass die ganzen Zahlen mit der Addition als abelsche Gruppe definiert werden – bedeutsam ist hier insbesondere die Existenz eines Inversen zu jeder Zahl.

2.3.2.1 Permanenzprinzip und Permanenzreihen

Wie bereits erwähnt, führen die neu eingeführte Addition und Subtraktion in $\mathbb{Z}$ nicht zu Konflikten mit den bisherigen analogen Operationen in $\mathbb{N}$. Dies wird über das ***Permanenzprinzip*** gefordert, nach dem neue Theorien (z. B. das Rechnen mit negativen Zahlen) soweit wie möglich verträglich sein müssen mit bisherigen Theorien (z. B. das Rechnen mit positiven Zahlen).

Sichtbar gemacht werden kann dieses Prinzip über ***Permanenzreihen***. Dies ist insbesondere dann hilfreich, wenn für bestimmte Rechenoperationen keine geeigneten realen Veranschaulichungen existieren. Ein typisches Beispiel hierfür ist die Multiplikation zweier negativer Zahlen. Kann die Multiplikation einer natürlichen Zahl (erster Summand) mit einer negativen Zahl (zweiter Summand) außermathematisch noch als mehrfache Verschuldung aufgefasst und die Vertauschung von erstem und zweitem Summanden über das Kommutativgesetz innermathematisch erklärt werden, bietet die Multiplikation zweier negativer Zahlen keine so naheliegende Interpretation. Abbildung 2.3 stellt eine Permanenzreihe dar, anhand derer die Rechnung $(-3)\cdot(-5)$ erklärt werden kann.

Entscheidend ist beim Aufstellen von Permanenzreihen jedoch, dass der Übergang von einer Zeile zur nächsten auf einem entsprechenden Rechengesetz beruht. Im Abbildung 2.3 ist dies das Distributivgesetzt $(a-1)\cdot b = a\cdot b - b$. Varnachlässigt man die Existenz einer Übergangsregel, lassen sich plausibel erscheinende Muster fortsetzen (wie $0^3 = 0$, $0^2 = 0$, $0^1 = 0$), die dann allerdings zu falschen Schlussfolgerungen ($0^0 = 0$) führen. Im dargestellten Beispiel kann die Übergangsregel $a^{m-1} = a^m : a$ wegen $a = 0$ nicht angewandt werden.

$$\begin{array}{rl}
2 \cdot (-5) = & -10 \\
 & \quad \downarrow +5 \\
1 \cdot (-5) = & \\
 & \quad \downarrow +5 \\
0 \cdot (-5) = & 0 \\
 & \quad \downarrow +5 \\
-1 \cdot (-5) = & \\
 & \quad \downarrow +5 \\
-2 \cdot (-5) = & \\
 & \quad \downarrow +5 \\
-3 \cdot (-5) = & 15
\end{array}$$

Abbildung 2.3: Permanenzreihe zur Multiplikation zweier negativer Zahlen

2.3.2.2 Ableitungen für den Lernpfad

Aus all den bisherigen Überlegungen auf der formalen Ebene lassen sich für den Unterricht zentrale Fachinhalte ableiten:

Ganze Zahlen können über Zahlenpaare aus den natürlichen Zahlen oder als »Gegenzahlen« der natürlichen Zahlen entwickelt werden.

- Natürliche Zahlen sind als Teilmenge in die ganzen Zahlen eingebettet.
- Die Subtraktion natürlicher Zahlen $m - n$ mit $n > m$ ist nun lösbar.
- Die Rechenregeln werden erweitert, wobei die bekannten weiter gelten. Die wird über das Permanenzprinzip begleitet, bei der Herleitung von Rechenregeln bietet sich die Nutzung von Permanenzreihen an.

2.3.3 Rationale Zahlen

In fachlich analoger Weise lassen sich auch die rationalen Zahlen über Äquivalenzrelationen einführen. Dann fordert die »Quotientengleichheit«, dass für $k, l, m, n \in \mathbb{N}$ mit $l, n \neq 0$ gilt: $(k, l) \sim (m, n) \;:\Leftrightarrow\; k \cdot n = l \cdot m$. Die Äquivalenzklasse $[(1, 2)]$ kann dann mit $\frac{1}{2}$ bezeichnet werden. Im Gegensatz zu den ganzen Zahlen ist es bei den rationalen Zahlen durchaus üblich, für dieselbe Zahl unterschiedliche Bezeichner zu verwenden, wie $\frac{1}{2}$ oder $\frac{5}{10}$. Fachmathematisch ist dies jedoch nicht relevant, also auch keine Diskussion auf der formalen Ebene (jedoch auf späteren Ebenen).

Aus Sicht der formalen Ebene lässt sich daher auch nicht ableiten, ob im Mathematikunterricht nach den natürlichen Zahlen zunächst die rationalen Zahlen (wie z. B. in Deutschland) oder erst die ganzen Zahlen (wie z. B. in Australien) eingeführt werden sollten. Innerhalb eines Zahlbereichs bietet jedoch die fachlogische Struktur Ansatzpunkte zur Gestaltung des Lernpfads, wie bei den negativen Zahlen dargestellt.

2.4 Zum Nachbereiten

1. Nutzen Sie verschiedene fachmathematische und fachdidaktische Quellen sowie Schulbücher, um fachlich zu klären, was »Terme« und »Gleichungen« sind.
2. Nutzen Sie Permanenzreihen, um weitere Rechengesetze nachzuvollziehen, z. B. dass $a^0 = 1$ $(a \neq 0)$ und $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$ $(a \geq 0)$ ist.

3 Mathematik strukturieren

Ziele

- Sie kennen verschiedene Möglichkeiten, Mathematik zu strukturieren.
- Sie können beschreiben, woher die verschiedenen Strukturierungsmöglichkeiten kommen.
- Sie kennen Beispiele für fundamentale Ideen der Mathematik.
- Sie können bei einzelnen Lerngegenständen den Zusammenhang zu zugehörigen fundamentalen Ideen herstellen.

Material

- Folien zum Kapitel 3 (pdf, Keynote)

3.1 Sachgebiete

Für die Fachwissenschaft Mathematik haben sich historisch verschiedene Unterdisziplinen entwickelt, die als Sachgebiete der Mathematik bezeichnet werden können. Schulrelevante Gebiete sind hierbei:

- Arithemtik
- Algebra
- Geometrie
- Analysis
- Stochastik
- Lineare Algebra / Analytische Geometrie

Auch heute bilden sich diese und weitere Sachgebiete (z. B. Numerik) in den Strukturen von universitären Lehrveranstaltungen, Forschungsrichtungen und nicht zuletzt der Strukturierung einzelner Lehrpläne der Schulen ab.

Für eine Vertiefung mit der Didaktik der Sachgebiete eignen sich u. a. die in Abschnitt 2.2 dargestellten Quellen. Weiterhin werden Sie im Masterstudium im Modul *Ausgewählte Themen der Mathematikdidaktik*[1] die Möglichkeit haben, sich mit der Didaktik einzelner Sachgebiete näher auseinanderzusetzen.

[1] siehe Modulbeschreibung zum Modul MAT-LS-D3 bei PULS

3.2 Leitideen

Die Strukturierung mathematischer Inhalte in Leitideen ist seit Anfang der 2000er Jahre im deutschen Bildungswesen etabliert, als die KMK[2] **Bildungsstandards** für den Mittleren Schulabschluss (2004), den Primarbereich (2005) und später auch die Allgemeine Hochschulreife (2012) herausgebracht hat. Darauf aufbauend wurden in den meisten Bundesländern die Lehrpläne angepasst. Zwischenzeitlich wurden die Bildungsstandards für den Primarbereich sowie den Ersten und Mittleren Schulabschluss überarbeitet, für die gymnasiale Oberstufe gelten während der gerade laufenden Überarbeitung noch die von 2012. (Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland, 2012, 2022b, 2022a). In Brandenburg spiegeln sich die Bildungsstandards in den **Rahmenlehrplänen** für die Jahrgangsstufen 1 – 10 und die Gymnasiale Oberstufe wider (Ministerium für Bildung, 2022, 2023).

Im Laufe der letzten 20 Jahre haben sich für die Leitideen teils verschiedene Bezeichnungen ergeben. In den aktuellen Bildungsstandards des Ersten und Mittleren Schulabschlusses (Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland, 2022a) werden verwendet:

- Leitidee Zahl und Operation
- Leitidee Größen und Messen
- Leitidee Strukturen und funktionaler Zusammenhang
- Leitidee Raum und Form
- Leitidee Daten und Zufall

Die Leitidee Zahl und Operation beispielweise »umfasst sinntragende Vorstellungen und Darstellungen von Zahlen und Operationen sowie die Nutzung von Rechengesetzen und Kontrollverfahren. Dazu gehören die sachgerechte Nutzung von Prozent- und Zinsrechnung ebenso wie kombinatorische Überlegungen und Verfahren, denen Algorithmen zu Grunde liegen.« (Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland, 2022a, S. 15). Weiterhin werden diese Kompetenzen an spezifischen Fachinhalten konkretisiert, etwa: »Die Schülerinnen und Schüler [...] • untersuchen Zahlen nach ihren Faktoren, in einfachen Fällen ohne digitale Mathematikwerkzeuge, • stellen Zahlen der Situation angemessen dar, z.B. unter anderem in Zehnerpotenzschreibweise, • rechnen mit natürlichen, ganzen und rationalen Zahlen, die im täglichen Leben vorkommen, sowohl zur Kontrolle als auch im Kopf und erklären die Bedeutung der Rechenoperationen [...]« (Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland, 2022a, S. 15)

Die Leitideen werden in den Bildungsstandards als **inhaltsbezogene Kompetenzen** beschrieben, die mit Abschluss des ersten bzw. mittleren Schulabschlusses zu erreichen sind. Es handelt sich dabei um **Regelstandards**, also Kompetenzen, die »Schülerinnen und Schüler im Durchschnitt in einem Fach erreichen sollen« (Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland, 2022a, S. 2). Diese sind abzugrenzen gegenüber **Basiskompetenzen** als »mathematisch zentrale, instrumentell bedeutsame und geradezu

[2] Mehr zur Kultusministerkonferenz (KMK) und ihrer eigentlichen Bezeichnungen siehe Wikipedia (2022).

grundlegende Konzepte und Verfahren, die für die mathematische Kompetenzentwicklung unverzichtbar sind« (vgl. https://pikas-mi.dzlm.de/node/92). Für Basiskompetenzen gibt es derzeit in Deutschland keine politischen Dokumente wie Rahmenlehrpläne oder Bildungsstandards

3.3 Arten mathematischen Wissens

Eine weitere Strukturierung mathematischen Wissens kann darin bestehen, den Blick darauf zu lenken, wie dieses Wissen angeeignet wird. So können ähnliche Aneigungsprozesse Motivation bieten, das Wissen entsprechend zu strukturieren und dies dann für die Gestaltung von Lehr-Lern-Prozessen nutzbar zu machen. Etabliert hat sich hierfür eine Unterscheidung in drei Arten mathematischen Wissens (vgl. Vollrath & Roth, 2012, S. 45 f.):

- **Begriffe.** Diese bilden das Grundgerüst der Mathematik und belegen Objekte gleicher Eigenschaft mit einem gemeinsamen Bezeichner. Neben der Begriffsfestlegung, i. d. R. über eine Definition, ist der Einsatz geeignter Beispiele und Gegenbeispiele essentiell beim Aufbau eines Begriffsverständnisses.
- **Sachverhalte.** Diese beschreiben Eigenschaften von Begriffen und ihre Beziehungen zueinander. Klassischerweise gehören hierzu mathematische Sätze inkl. ihrer Beweise, aber auch präformale Begründungen. Je nach Akzentuierung sprechen andere Quellen statt von Sachverhalten auch von Sätzen oder von Zusammenhängen.
- **Verfahren.** Diese bestimmen, wie bestimmte Aufgaben zu lösen sind, z. B. schriftliche Rechenverfahren, Lösungsverfahren von Gleichungen und Gleichungssystemen.

Einige Autoren zählen zu den Verfahren auch heuristische Strategien zum Problemlösen oder die Anwendung des Permanenzprinzips (vgl. Steinhöfel et al., 1988, S. 23) Vollrath & Roth (2012, S. 46 ff.) ergänzen dagegen drei Wissensarten noch:

- **Metamathematisches Wissen.** Darunter ist zu verstehen, *wie* Mathematik betrieben wird, also bspw. welche Möglichkeiten es gibt, ein mathematisches Problem zu lösen oder eine Sachsituation mathematisch zu modellieren.

In Abschnitt **??** wird näher darauf eingegangen, wie Lernprozesse bei der Ausbildung der jeweiligen Wissensarten gestaltet werden können.

3.4 Fundamentale Ideen

3.4.1 Begriffsklärung

Die Entwicklung Fundamentaler Ideen beruft sich auf Bruners Annahme, dass »jedes Kind […] auf jeder Entwicklungsstufe jeder Lehrgegenstand in einer intellektuell ehrlichen Form erfolgreich gelehrt werden« kann (vgl. Bruner, 1976, S. 77). Voraussetzung dafür ist, dass die *Struktur* eines Inhaltsbereichs in einer Art und Weise präsentiert wird, dass sie dem Kind zugänglich wird. Diese *hinter den Dingen* liegende Struktur hebt sich vom konkreten Inhaltsbereich ab, ist allgemeinerer Natur und kann daher über *Fundamentale Ideen* beschrieben werden.

Ziel der Orientierung des Unterrichtens an Fundamentalen Ideen besteht v. a. darin, die (oftmals) isolierten Stoffelemente einzuordnen und in einem größeren Ganzen zu sehen. Im Umkehrschluss heißt dies aber auch, dass die Auswahl des konkreten Stoffes daran orientiert sein muss, wie dieser dazu beitragen kann, den dahinter liegenden mathematischen Kern und die zugehörigen Fundamentalen Ideen zu vertreten.

Die dazu seit den 1960er Jahren in Gang gesetzte Forschung führte zu vielfältigen Vorschlägen Fundamentaler Ideen der Mathematik – jedoch bisher nicht zu einem allgemeingültigen Katalog. Dieser Vielfalt in den Formulierungen und Kategorisierungen kann begegnet werden, indem Fundamentale Ideen über Eigenschaften charakterisiert werden. Im Rahmen dieser Veranstaltung wird folgende Definition genutzt, zitiert aus Schwill (1994).

Definition 3.1 (Fundamentale Idee)**.** Eine **Fundamentale Idee** bzgl. eines Gegenstandsbereichs (Wissenschaft, Teilgebiet) ist ein **Denk-, Handlungs-, Beschreibungs- oder Erklärungsschema**, das

1. in verschiedenen Gebieten des Bereichs vielfältig anwendbar oder erkennbar ist (**Horizontalkriterium**),
2. auf jedem intellektuellen Niveau aufgezeigt und vermittelt werden kann (**Vertikalkriterium**),
3. in der historischen Entwicklung des Bereichs deutlich wahrnehmbar ist und längerfristig relevant bleibt (**Zeitkriterium**),
4. einen Bezug zu Sprache und Denken des Alltags und der Lebenswelt besitzt (**Sinnkriterium**).

> **Überblick zur historischen Entwicklung Fundamentaler Ideen**
>
> - von der Bank (2016, 37 ff.): *Fundamentale Ideen der Mathematik: Weiterentwicklung einer Theorie zu deren unterrichtspraktischer Nutzung*

Fundamentale Ideen haben zwar ihren Ursprung in der Fachstruktur, aber sie »sind nicht Elemente der Wissenschaft an sich, sondern Produkte unseres Verstandes, die wir der Wissenschaft aufprägen. Folglich können sie nur relativ zum Menschen objektiviert werden« (Schubert & Schwill, 2011, S. 62).

Für Ihre stoffdidaktische Analyse können Fundamentale Ideen insbesondere hilfreich für die **Dekonstruktion** des Fachwissens und anschließende **Rekonstruktion** des Schulwissens sein.

Wenn sie also beispielsweise eine stoffdidaktische Analyse zur Flächeninhaltsberechnung durchführen, setzen Sie sich mit der Fundamentalen Idee des *Messens* auseinander. Dabei verstehen Sie Messvorgänge als Vergleiche zu einem Standardmaß (z. B. Kästchen auszählen), erkennen Zerlegungs- und Ergänzungsgleichheit als notwendige Prinzipien zur präziseren

Beschreibung, sehen Dreiecke als bedeutsame Basisfiguren für Flächeninhaltsberechnungen an und haben den Blick für die Integralrechnung als verallgemeinerbare Methode zur Flächeninhaltsbestimmung krummliniger Figuren (vgl. Vohns, 2000, 98 ff.). Sie *dekonstruieren* (zerlegen) damit Ihr eigenes mathematisches Fachwissen.

Nun sind Sie in der Lage, das Wissen zur Flächeninhaltsberechnung für Schülerinnen und Schüler neu aufzubauen, also zu *rekonstruieren* und (unter Hinzunahme der Betrachtung von Grundvorstellungen und den restlichen Ebenen des Vier-Ebenen-Ansatzes) einen Lernpfad zu entwickeln. Im Zusammenhang mit der Integralrechnung kann dies z. B. heißen, dass Sie parallel zum Bilden von Ober- und Untersummen noch einmal eine krummlinig begrenzte Fläche durch Kästchen auszählen lassen – ggf. mit unterschiedlicher Feinheit und einer Abschätzung nach oben und nach unten. Die Fundamentalen Ideen haben für Sie damit auch eine *ordnende Funktion* des Unterrichtsstoffes.

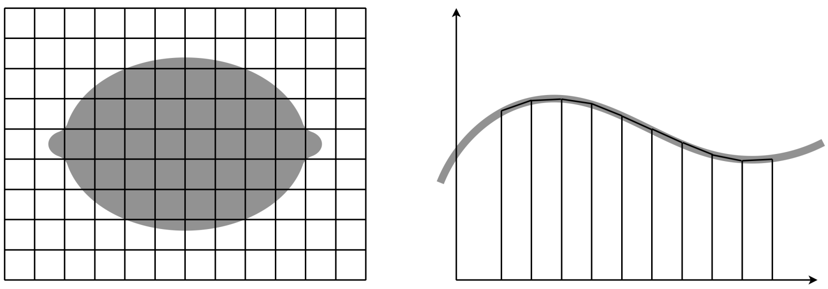

Abbildung 3.1: Flächeninhaltsbestimmung

3.4.2 Auswahl fundamentaler Ideen

Das Fehlen eines allgemeingültigen Katalogs sollte nicht davon abhalten, bestehende Auflistungen und Strukturierungen Fundamentaler Ideen zu betrachten. von der Bank (2013, S. 103) und Lambert (2012) diskutieren eine Kategorisierung fundamentaler Ideen in drei Bereiche:

- **Inhaltsideen** beziehen sich auf konkrete Inhaltsbereiche der Mathematik, die die Kriterien Fundamentaler Ideen erfüllen können. Nicht ganz zufällig spiegeln diese sich in den Leitideen der Bildungsstandards wider (siehe Abschnitt 3.2).
- **Schnittstellenideen** haben die Eigenschaft, dass durch sie die »Mathe(matik) wirkt« und »auch für andere Fächer in ihrer je spezifischen Weise relevant sind« (Lambert, 2012). Damit korrelieren sie mit den prozessbezogenen Kompetenzen der Bildungsstandards.
- **Tätigkeitsideen** beziehen sich insbesondere auf innermathematische Tätigkeiten, die sich über verschiedene Inhaltsbereiche hinweg zeigen. Lambert (2012) betont, dass es diese (über die Bildungsstandards hinaus) ebenfalls zu beachten gilt, wenn man einen reichhaltigen Mathematikunterricht bewirken möchte.

Beispiele derartiger Tätigkeitsideen sind:

- Approximierung
- Optimierung
- Linearität/Linearisierung
- Symmetrie
- Invarianz
- Rekursion
- Vernetzung
- Ordnen
- Strukturierung
- Formalisierung
- Exaktifizierung
- Verallgemeinern
- Idealisieren

Im Rahmen des Projektmoduls *Erweitertes Fachwissen für den schulischen Kontext in Mathematik*[3] werden Sie insbesondere Bezüge zwischen Schul- und Hochschulmathematik auf Basis Fundamentaler Ideen herstellen, wofür die Inhalts- und Tätigkeitsideen von hoher Relevanz sind.

3.4.3 Beispiel Linearität

3.4.3.1 Horizontal- und Vertikalkriterium

Linearität ist ein wesentliches Konzept über die gesamte Schullaufbahn hinweg (und darüber hinaus). Dies spiegelt sich in vielfältigen Themenbereichen wider, die sowohl die Breite (*Horizontalkriterium*) als auch Tiefe (*Vertikalkriterium*) von Linearität und (später) auch Linearisierung zeigen. Dieser Abschnitt orientiert sich an den Darstellungen von Danckwerts (1988).

- Linearität als Phänomen tritt schon im Geometrieunterricht der Grundschule mit **Geraden** als essentielle geometrische Objekte auf. In der euklidischen Geometrie sind Geraden neben Punkten die Basisobjekte eines axiomatischen Aufbaus.
- Das **Distributivgesetz** $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$, das ebenfalls bereits in der Grundschule behandelt wird, beschreibt einen linearen Vorgang und bietet die Grundlage für die halbschriftliche Multiplikation. Über die Schulmathematik hinaus dient es z. B. als eines der Vektorraumaxiome (Skalarmultiplikation).
- Das Bestimmen eines **Rechteckflächeninhalts** ist ein linearer Vorgang: Ein Rechteck, das doppelt so breit ist, hat (bei gleicher Höhe) einen doppelt so großen Flächeninhalt. Betrachtet man diese Eigenschaft nicht als Phänomen, sondern als Forderung an eine Flächeninhaltsformel, so kann aus den Bedingungen $A(a_1 + a_2, b) = A(a_1, b) + A(a_2, b)$ und $A(a, b_1 + b_2) = A(a, b_1) + A(a, b_2)$ sowie der Stetigkeit in $\mathbb{R}^+$ die Formel $A(a, b) = a \cdot b$ abgeleitet werden.

[3] siehe Modulbeschreibung zum Modul MAT-LS-7 bei PULS

- Lineare Zuordnungen der Art $f(x+y) = f(x) + f(y)$ werden zu Beginn der Sekundarstufe I als **proportionale Zuordnungen** behandelt. Dies wird fortgeführt bei **linearen Funktionen** der Art $f(x) = mx+n$, in der Fachmathematik als affin-lineare Abbildungen bezeichnet.
- **Lineare Gleichungen und Gleichungssysteme** sind ebenfalls bedeutsamer Bestandteil des Mathematikunterrichts. Überhaupt baut die gesamte **Lineare Algebra** auf lineare und affin-lineare Abbildungen auf.
- Die **Strahlensätze** beschreiben ebenfalls ein lineares Verhalten: Geradenabschnitte in c-facher Entfernung sind c mal so lang.

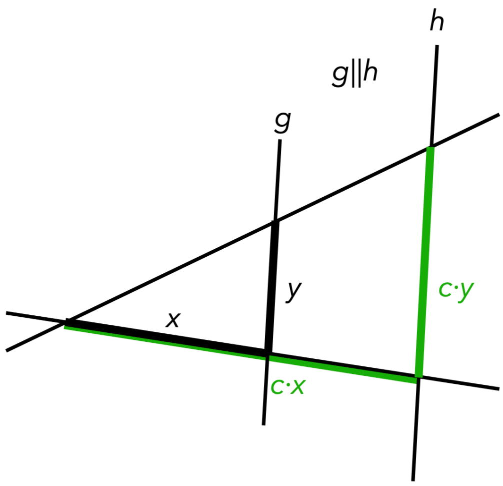

Abbildung 3.2: Strahlensatzfigur

- Beim **Ableitungsbegriff** ist eine wesentliche Vorstellung, dass die Funktion in der Umgebung der zu betrachtenden Stelle linearisiert wird. Insbesondere bei höherdimensionalen Funktionen wird der Linearisierungsansatz weiterverfolgt. Die ebenfalls vorherrschende Tangentenvorstellung ist auf mehr als drei Dimensionen nicht mehr anschaulich übertragbar – der Linearisierungsansatz weist hier aufgrund seiner algebraischen Beschreibung die bessere Verallgemeinerbarkeit auf.
- Eng an den Linearisierungsansatz angelehnt ist die **lineare Approximation** von Funktionen (z. B. $\sin(x) \approx x$ für $x \approx 0$). Die führt sich in der Hochschulmathematik fort, beispielsweise bei Taylor-Reihen.
- Das Bedürfnis der Linearisierung, insbesondere aus der Physik heraus, zeigt sich auch bei der Nutzung **spezifisch skalierter Diagrammachsen**, z. B. von Logarithmuspapier. Wegen der Äquivalenz von $y = c \cdot a^x$ und $\ln y = (\ln a) \cdot x + \ln c$ lassen sich beliebige Exponentialfunktionen auf Logarithmuspapier als lineare Funktionen darstellen.
- Verschiedene Näherungsverfahren, wie das **Newton-Verfahren**, bedienen sich ebenfalls der Linearisierung.

An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, dass Linearität derart fundamental ist, dass selbst nicht-lineare Zusammenhänge häufig fälschlicherweise als linear angenommen werden. Dies zeigt sich zum Beispiel an den Fehlannahmen $(x+y)^2 \overset{?!}{=} x^2+y^2$, $\sqrt{x+y} \overset{?!}{=} \sqrt{x}+\sqrt{y}$ oder $\sin(x+y) \overset{?!}{=} \sin(x)+\sin(y)$. Derartige Fehler können Sie als Lehrkraft besser einordnen (und korrigieren), wenn Sie sich der Fundamentalen Idee *Linearität* (die hier eben *nicht* gilt) bewusst sind. Insbesondere spricht dies auch für ein Explizitmachen der Fundamentalen Idee Ihren Schülerinnen und Schülern gegenüber, so dass Sie derartigen Fehlern nicht nur mit Gegenbeispielen entgegen treten können, sondern auch eine strukturelle Einordnung sichtbar machen können.

Gerade wegen der genannten Fehlannahmen und der für die Schülerinnen und Schüler i. d. R. nicht in Zusammenhang gebrachten Dualität aus *geradlinig* und *additiv und homogen* sehen Tietze et al. (2002, S. 39) die Linearität dagegen nicht als eine im Mathematikunterricht etablierte Fundamentale Idee, »die die Schüler erkennen und die ihr Denken ordnet und anregt«.

3.4.3.2 Zeit- und Sinnkriterium

Linearität zeigt sich auch in der historischen Entwicklung der Mathematik als eine prägende Leitlinie, womit sie das *Zeitkriterium* Fundamentaler Ideen erfüllt. In der Linearen Algebra sei beispielsweise das Lösen linearer Gleichungssysteme im 18. Jahrhundert bis hin zum Gauß-Algorithmus im 19. Jahrhundert oder die Darstellung linearer Vorgänge mit Matrizen im 17./18. Jahrhundert erwähnt (vgl. Tietze et al., 2000b, 73 ff.). In der Analysis spiegelt sich die Linearität bzw. Linearisierung in der gesamten Differenzialrechnung wider, von der Interpolation nach der Jahrtausendwende über Taylors *Linear perspective* von 1715 (vgl. Brückler, 2018, 39,119) bis in die Gegenwart der linearen Modellierung nichtlinearer Zusammenhänge.

> **Historische Originalausgabe**
>
> Taylor (1715): *Linear perspective*

Auch Alltagssituationen bzw. die Alltagssprache ist von Linearität geprägt. Beispielsweise treten proportionale Zuordnungen unmittelbar beim Einkaufen auf, wenn Waren abgewogen und der Preis bestimmt wird. Auch reale Messvorgänge, wie z. B. die Geschwindigkeitsmessung, beziehen sich in der Regel auf die Messung von (sehr kurzen) Zeitintervallen, in denen ein lineares Verhalten angenommen wird. Das *Sinnkriterium* zeigt sich aber auch in Begriffen wie *lineares Fernsehen* oder *lineare Erzählungen.* Dies ist zwar keine mathematische Linearität im Sinne der Formel $f(x+y) = f(x) + f(y)$, aber der Begriff findet in einer verwandten Bedeutung in der Alltagssprache Verwendung.

3.4.4 Gegenbeispiele

Zur Verständnisförderung sollen noch ein paar Gegenbeispiele für Fundamentale Ideen angebracht werden.

- Das bereits erwähnte **Distributivgesetz** an sich ist zwar elementar, aber ihm fehlt die Weite, womit es nicht das Horizontalkriterium erfüllt. Die *Linearität* als dahinterliegende Idee ist dagegen weit genug (vgl. ähnliche Argumentation zum **Kommutativgesetz** und der dahinterliegenden Idee der *Invarianz* bei Schubert & Schwill, 2011, S. 63).
- Der **Umkehrfunktion** fehlt das Sinnkriterium, da dieser Begriff in der Lebenswelt außerhab der Mathematik kaum von Relevanz ist. Dahinter liegt vielmehr die Idee der *Reversibilität* als »Umkehrbarkeit von Operationen mit Wiederherstellung des Ausgangszustandes« (Schubert & Schwill, 2011, S. 63).

3.5 Zum Nachbereiten

1. Lesen Sie sich die Bildungsstandards für den ersten/mittleren Schulabschluss vollständig durch, notieren Sie Verständnisfragen und bringen Sie diese zum Seminar mit.
2. Wählen Sie eine Leitidee aus und nennen Sie innerhalb dieser Begriffe, Sachverhalte und Verfahren, die im Mathematikunterricht behandelt werden.
3. Wählen Sie einen Begriff, Sachverhalt oder Verfahren aus 2. aus und stellen Sie den Bezug zu fundamentalen Ideen her.

4 Grundvorstellungen

> **Ziele**
>
> - Sie können die Grundvorstellungsidee beschreiben und wissen über deren Bedeutung für den Mathematikunterricht.
> - Ihnen ist bewusst, dass Grundvorstellungen i. d. R. zu Begriffen (Objekten und Operationen) existieren.
> - Sie kennen Grundvorstellungen zu einzelnen mathematischen Begriffen.
>
> **Material**
>
> - Folien zum Kapitel 4 (pdf, Keynote)

4.1 Begriffsklärung

4.1.1 Grundvorstellungsidee

Als Sie zu Beginn Ihres Mathematikstudiums die Peano-Axiome zur Definition der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ kennengelernt haben, konnten Sie dies wahrscheinlich – trotz der Neuigkeit der formalen Beschreibung – derart mit Ihrer Lebenswelterfahrung in Verbindung bringen, dass natürliche Zahlen abgezählt werden können, also dass damit z. B. die Platzierungen eines Wettrennens durchnummeriert werden können.

> **Peano-Axiome** (Wikipedia, 2021)
>
> 1. 0 ist eine natürliche Zahl.
> 2. Jede natürliche Zahl n hat eine natürliche Zahl n' als Nachfolger.
> 3. 0 ist kein Nachfolger einer natürlichen Zahl.
> 4. Natürliche Zahlen mit gleichem Nachfolger sind gleich.
> 5. Enthält die Menge X die 0 und mit jeder natürlichen Zahl n auch deren Nachfolger n', so bilden die natürlichen Zahlen eine Teilmenge von X.

Dieser **Bezug auf eine bekannte Handlung** ist wesentlich dafür, dass die Definition und damit der Begriff der natürlichen Zahlen für Sie mit einem Sinn behaftet ist. Innerhalb dieser *ordinalen Sichtweise* natürlicher Zahlen helfen nun geeignete[1] **Repräsentationen** dabei,

[1] *Geeignet* heißt in diesem Fall, dass sich die Kernaussage des Begriffs in der Repräsentation wiederfindet. Im Ordinalzahlaspekt ist dies v. a. die Reihung von Zahlen. Was dabei (noch) nicht relevant ist, ist zum Beispiel die exakte Messbarkeit, wie man sie etwa auf dem Zahlenstrahl repräsentiert.

sich Rechenoperationen vorstellen und sie **operativ**[2] auszuführen zu können, also bspw. das Addieren als ein Weiterzählen aufzufassen (siehe Abbildung 4.1).

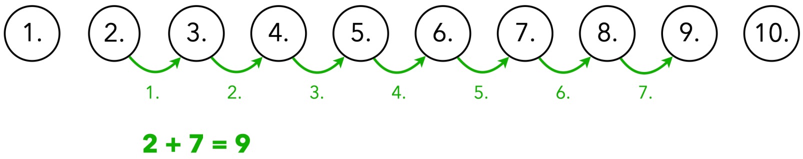

Abbildung 4.1: Additionsaufgabe im ordinalen Zahlaspekt

Mit der Fähigkeit der Verknüpfung des mathematischen Begriffs und der Lebenswelt ist also eine **Anwendung des Begriffs auf die Wirklichkeit** möglich, insbesondere in Modellierungsprozessen. Dabei sind beide Richtungen relevant: Von der Realsituation zur Mathematik und von der Mathematik zur Realität.

Ziel des Mathematikunterrichts sollte es nun sein, für alle relevanten mathematischen Begriffe ein derartiges Verständnis aufzubauen, was auch heißt, verschiedene Vorstellungen zu einem Begriff zu vermitteln. Nach vom Hofe (1995, 97 f., Hervorhebung durch H.E.) ergibt sich daraus eine Orientierung an Grundvorstellungen im Mathematikunterricht:

Definition 4.1 (Grundvorstellungen)**.** Die **Grundvorstellungsidee** beschreibt **Beziehungen zwischen mathematischen Inhalten und** dem Phänomen der **individuellen Begriffsbildung**. In ihren unterschiedlichen Ausprägungen charakterisiert sie mit jeweils unterschiedlichen Schwerpunkten insbesondere drei Aspekte dieses Phänomens:

- Sinnkonstituierung eines Begriffs durch **Anknüpfung an** bekannte **Sach- oder Handlungszusammenhänge** bzw. **Handlungsvorstellungen**,
- Aufbau entsprechender (visueller) **Repräsentationen bzw. »Verinnerlichungen«**, die **operatives Handeln** auf der Vorstellungsebene ermöglichen,
- Fähigkeit zur Anwendung eines Begriffs auf die Wirklichkeit durch **Erkennen der** entsprechenden **Struktur in Sachzusammenhängen** oder durch **Modellieren** des Sachproblems **mit Hilfe der mathematischen Struktur**.

4.1.2 Ausdifferenzierung

Weiterhin unterscheidet vom Hofe (2014) zwischen **primären** und **sekundären** Grundvorstellungen, abhängig von der Erfahrungswelt der Handlungen. Während sich primäre Grundvorstellungen auf reale Handlungserfahrungen stützen (z. B. mit Steckwürfeln in der Arithmetik), entstammen sekundäre Grundvorstellungen aus den Handlungen mit bereits im Mathematikunterricht aufgebauten Repräsentationen (z. B. Operationen auf dem Zahlenstrahl).

[2] *Operativ* heißt hier zum Beispiel, dass Sie zu einer Aufgabe wie $2 + 7$ Nachbaraufgaben $(2 + 8)$, Umkehraufgaben $(7 - 2)$, Platzhalteraufgaben $(2 + \square = 7)$ usw. aufstellen und lösen können.

Einige Quellen unterscheiden zwischen **Aspekten** und **Grundvorstellungen**. Nach Greefrath et al. (2016, S. 17) ist ein »Aspekt eines mathematischen Begriffs [...] ein Teilbereich des Begriffs, mit dem dieser fachlich charakterisiert werden kann«, während »eine Grundvorstellung zu einem mathematischen Begriff [...] eine inhaltliche Deutung des Begriffs [ist], die diesem Sinn gibt.« Im oben angebrachte Beispiel entspräche die Definition der natürlichen Zahlen über die Peano-Axiome dem *Ordinalzahlaspekt*, der mit der Grundvorstellung verbunden ist, dass die natürlichen Zahlen mit 0 beginnend eine feste Reihenfolge beschreiben. Da jedoch nicht alle Quellen diese Unterscheidung so präzise vornehmen und es auch teils zu Vermischungen kommt, soll diese (auf theoretischer Ebene relevante) Diskussion hier in der Stoffdidaktik-Veranstaltung nicht weiter von Relevanz sein. Für Ihre Unterrichtsgestaltung ist insbesondere relevant, dass sie einen **aspektreichen bzw. an vielfältigen Grundvorstellungen** orientierten Umgang mit Begriffen anstreben. Auch wenn Sie nicht unmittelbar und sofort jeweils alle Aspekte eine Begriffs im Unterricht ansprechen werden, hilft Ihnen das Wissen über den Aspektreichtum in der Unterrichtsplanung für die Ausbildung eines umfassenden Begriffsverständnisses.

Entsprechend ihrer Definition werden Grundvorstellungen für **Begriffe** erarbeitet – hinsichtlich der Arten mathematischen Wissens (vgl. Abschnitt 3.3) also anscheinend nicht für Sachverhalte und Verfahren. Jedoch können Grundvorstellungen zu einem Begriff sowohl hinsichtlich des *Objekts* an sich bestehen, als auch hinsichtlich der *Operationen* mit diesem Begriff. Das Addieren ist beispielsweise im Ordinalzahlaspekt eine Operation, verbunden mit der Grundvorstellung des Weiterzählens. Insofern können auch Sachverhalte und Verfahren durchaus mit Grundvorstellungen verknüpft werden, sofern der Fokus auf dem Operieren mit den in ihnen enthaltenen Begriff liegt.

Die in Definition 4.1 dargestellte Grundvorstellungsidee hat einen **normativen** Charakter, d. h. es wird davon ausgegangen, dass (aus professioneller Sicht der Mathematikdidaktik) zu mathematischen Begriffen bestimmte Grundvorstellungen identifiziert werden können, die es im Unterricht zu vermitteln gilt. Oder anders gefragt: »Welche Grundvorstellungen sind zur Lösung des Problems aus der Sicht des Lehrenden adäquat?« (vom Hofe, 1995, S. 106). Diese Sichtweise wird durch eine **deskriptive** Perspektive ergänzt: »Welche individuellen Vorstellungen lassen sich im Lösungsversuch des Schülers erkennen?« (vom Hofe, 1995, S. 107). Diese über empirische Untersuchungen zu ermittelnden Vorstellungen sind das, was sich Schülerinnen und Schüler *tatsächlich* unter einem Begriff vorstellen, wozu ggf. auch typische *Fehlvorstellungen*[3] gehören können. Ein Wissen darüber ist für Lehrkräfte ungemein wichtig, um Ergebnisse von Schülerinnen und Schülern interpretieren und einordnen zu können und dann ggf. entsprechende Hilfsangebote zu machen. Dies entspricht dann einer **konstruktiven** Perspektive auf Grundvorstellungen: »Worauf sind etwaige Divergenzen zurückzuführen, und wie lassen sich diese beheben?« (vom Hofe, 1995, S. 107).

[3]Mit *Fehlvorstellungen* sind hier individuelle Vorstellungen der Schülerinnen und Schüler gemeint, die mathematisch nicht tragfähig und daher aus fachlicher Perspektive fehlerhaft sind. So ist etwa die Vorstellung, dass Multiplizieren vervielfacht, in den Natürlichen Zahlen tragfähig (und damit eine Grundvorstellung), in den Bruchzahlen jedoch nicht mehr tragfähig und wird dort dann zur Fehlvorstellung. Neben *Fehlvorstellungen* können weitere individuelle Vorstellungen *Alltagsvorstellungen*, *Präkonzepte* o. ä. sein (siehe auch Schecker et al., 2018, 11 f.).

4.2 GV und Stoffdidaktik

Im Rahmen dieser Veranstaltung, insbesondere den von Ihnen ausgearbeiteten Seminarthemen, wird der Schwerpunkt auf *normative* Grundvorstellungen gelegt, was der semantischen Ebene des Vier-Ebenen-Ansatzes zugeordnet werden kann, weil die mathematischen Begriffe hier mit einem Sinn versehen werden. Die *deskriptive* und *konstruktive* Perspektive sind dagegen der empirischen Ebene zuzuordnen, da hier individuelle Vorstellungen der Schülerinnen und Schüler von Relevanz sind. Dies betrifft insbesondere auch das Potenzial, (ggf. mathematisch unvollständige) individuelle Vorstellungen aufzugreifen bei der Ausbildung von (normativ erwünschten) Grundvorstellungen.

Das Identifizieren von Grundvorstellungen zu einem Begriff ist, genau wie bei den Fundamentalen Ideen, Aufgabe der mathematikdidaktischen Forschung (ein Modell dafür findet man bei Salle & Clüver, 2021). Als Lehrkraft profitieren Sie von diesen Ergebnissen und nutzen sie für Ihre stoffdidaktische Analyse.

Im Gegensatz zu den fundamentalen Ideen, die ihren Ursprung in der Sachstruktur des mathematischen Inhalts haben, entstammen die Grundvorstellungen stärker der *Bedeutung* der fachlichen Begriffe *für das Individuum*. Grundvorstellungen beziehen sich auf spezifische Begriffe und Operationen mit Begriffen, während fundamentale Ideen größere, themenübergreifende Leitlinien für die Stoffauswahl und -strukturierung bilden.

Für die Unterrichtsplanung und -durchführung ist neben der Frage, *welche* Grundvorstellungen von Relevanz sind (Spezifizieren im Vier-Ebenen-Ansatz) vor allem interessant, *wie* diese ausgebildet werden können (Strukturieren im Vier-Ebenen-Ansatz). Letzteres wird u. a. in Kapitel 5 im Umgang mit *Arbeitsmitteln* näher beleuchtet.

4.3 Beispiele

4.3.1 Natürliche Zahlen

Betrachten Sie folgenden (fiktiven) Zeitungsartikel:

> ***Harlequin erneut auf dem 1. Platz***
>
> *Bei dem traditionellen Pferderennen am 15. Mai hat das Pferd Harlequin erneut gewonnen. Unter den 10 Pferden, die an den Start gingen, belegte es mit 21,3 Sekunden den 1. Platz. Damit war es fast 2 mal so schnell unterwegs wie das letzte Pferd, das ins Ziel kam. Karten für das nächste Rennen können unter 030 23125143 bestellt werden.*

In dem Text tauchen Zahlen unter vielen Aspekten auf: Der **1.** Platz und **15.** Mai sind **Ordinalzahlen**, also Zahlen, die eine Ordnung beschreiben. Wie oben schon beschrieben, lassen diese sich fachmathematisch über die Peano-Axiome beschreiben und wenn mit ihnen gerechnet, entspricht z. B. das Addieren dem **Weiterzählen**.

Die **10** Pferde stellen eine **Kardinalzahl** dar, also die Anzahl der Elemente einer Menge. Addiert man Kardinalzahlen, so müssen **Mengen vereinigt** werden, z. B. anschaulich, indem man sie zusammen legt.

Die **21,3** Sekunden entsprechen einer **Maßzahl**, da diese Zahl die Funktion hat, etwas auszumessen (hier die Zeit). Das Addieren in diesem Aspekt entspräche dem **Aneinanderlegen**, z. B. wenn zwei Längenangaben addiert werden.

Dass es **2** mal so schnell wird, enspricht einem **Operatoraspekt**, mit dem die Vielfachheit eines Vorganges beschrieben wird. Das Addieren ist hierin eine **Hinereinanderausführung** eines Vorganges.

Die Telefonnumer **030 23125143** wiederum erfüllt einen **Codierungsaspekt**. Sie hat im mathematischen Sinne keine Bedeutung, nur die Anordnung der Ziffern ist von Relevanz. Entsprechend kann innerhalb dieses Aspektes auch nicht addiert werden. Weitere Beispiele hierfür wären Postleitzahlen oder Identifikationsnummern.

Hinzu kommt noch der Aspekt der **Rechenzahl**. Informationen dazu sowie eine genauere Erläuterung der Zahlaspekte und damit verbundenen Operationen findet man z. B. bei Krauthausen (2018, 43 ff.).

4.3.2 Bruchzahlen

Nachdem die Schülerinnen und Schüler ihr gesamte Vorschul- und Primarstufenzeit mit Natürlichen Zahlen verbracht haben, treten mit der Einführung von Bruchzahlen Umbrüche in den subjektiven Vorstellungen auf. Zum Beispiel sind folgende (vermeintlichen) Gesetzmäßigkeiten plötzlich *nicht mehr* gültig:

- Das Produkt zweier Zahlen ist größer als die jeweiligen Faktoren.
- Die Multiplikation kann als wiederholte Addition aufgefasst werden.
- Jede Zahl hat genau einen Repräsentanten.
- Je mehr Stellen eine Zahl hat, desto größer ist sie.

Die Bruchzahlen selbst besitzen nach Padberg & Wartha (2017, 19 ff.) folgende Aspekte:

- Bruch als **Anteil eines Ganzen** oder **mehrerer Ganzer** (z. B. $\frac{2}{3}$ als zwei Drittel einer Pizza oder je ein Drittel von zwei Pizzen),
- Bruch als **Maßzahl** (z. B. $\frac{1}{4}$ Liter),
- Bruch als **Operator** (z. B. $\frac{1}{5}$ von 250 €),
- Bruch als **Verhältnis** (z. B. $\frac{2}{3}$ mit der Bedeutung *2 von 3 Schüler/-innen tragen eine Brille*),
- Bruch als **Quotient** (z. B. $\frac{3}{5}$ als Ergebnis bzw. andere Schreibweise von $3 : 5$),
- Bruch als **Lösung einer linearen Gleichung** (z. B. $\frac{3}{5}$ als Lösung von $5x = 3$),
- Bruch als **Skalenwert** (z. B. $\frac{3}{2}$ als Mitte zwischen 1 und 2 auf dem Zahlenstrahl),
- **Quasikardinale Auffassung** von Brüchen (z. B. $\frac{3}{5}$ als 3 mal $\frac{1}{5}$).

Neben den Grundrechenoperationen führt auch das Vergleichen von Brüchen zu Grundvorstellungsumbrüchen. Hinzu kommen noch besondere Operationen mit Bruchzahlen wie das Erweitern und Kürzen.

Das Multiplizieren von Brüchen kann bspw. als Anteilsbildung ($\frac{1}{5}$ mal … heißt $\frac{1}{5}$ *von* …) oder als Rechteckfläche aufgefasst werden (Padberg & Wartha, 2017, 108 ff), siehe Abbildung 4.2.

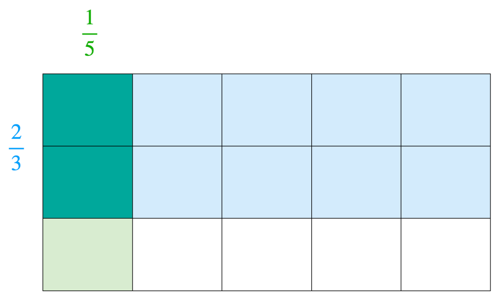

Abbildung 4.2: Vorstellung von $\frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3}$ als Rechteckfläche

All dies zeigt, dass Brüche behutsam unterrichtet werden sollten und von einer rein kalkülorientierten Behandlung unbedingt abgesehen werden muss, da diese den nachhaltigen Lernerfolg deutlich mindert.

4.3.3 Negative Zahlen

Aufbauend auf die in Abschnitt 2.3 erfolgte Diskussion zur formalen Ebene von negativen Zahlen, soll zu diesen nun die Grundvorstellungsidee auf der semantischen Ebene diskutiert werden.

Die Einführung negativer Zahlen ist für Schülerinnen und Schüler mit zahlreichen Schwierigkeiten verbunden (vom Hofe & Hattermann, 2014). Diese sind eigentlich auf der empirischen Ebene der stoffdidaktischen Analyse angesiedelt, sollen aber hier wegen ihrer Nähe zu den Grundvorstellungen schon einmal erwähnt werden.

- So bestehen etwa für das **Minus-Zeichen vielfältige Interpretationsmöglichkeiten** als **Vorzeichen** (z. B. in der Rechnung $-5+2$), als **Rechenzeichen** (z. B. in der Rechnung $7-2$) oder als **Inversionszeichen** (z. B. bei der Darstellung $-a$ als Gegenzahl für a).
- Der in den natürlichen Zahlen vorhandene **Kardinalzahlaspekt** (dass die Zahl die Mächtigkeit einer Menge angibt), ist in den negativen Zahlen **nicht mehr tragfähig** (es existiert keine -4-elementige Menge). Auch der **Ordinalzahlaspekt** (dass die Zahl eine Position angibt) ist nur **eingeschränkt tragfähig** (eine -4-te Position bedarf vielfältiger Zwischeninterpretationen). Der **Maßzahlaspekt** (z. B. über die Angabe einer Zahl auf dem Zahlenstrahl) dagegen ist auf die negativen Zahlen **erweiterbar**.

- Die **Ordnungsrelation** wird häufig **fehlinterpretiert** über eine spiegelbildliche Interpretation (z. B. kann fälschlicherweise $-5 > -3$ angenommen werden). Eine Ursache kann hier darin liegen, dass die Ordnungsrelation zuvor über die Mächtigkeit von Mengen hergestellt wurde, was nun nicht mehr möglich ist.

Gegenüber den natürlichen Zahlen sind also im Umgang mit negativen Zahlen einige Grundvorstellungsumbrüche zu absolvieren. Als normativ auszubildende Grundvorstellungen fassen vom Hofe & Hattermann (2014) für rationale Zahlen (als Obermenge positiver und negativer Zahlen) zusammen:

- Rationale Zahlen als **relative Zahlen bezüglich einer fest gewählten Vergleichsmarke**: Dies ist etwa bei Etagen-Angaben, Temperaturen oder der Position über/unter dem Wasserspiegel der Fall. Gerade bei Temperaturen kann die Beliebigkeit der Vergleichsmarke (0 °C) gut diskutiert werden, da etwa andere Temperaturskalen (°F, K) eine andere Vergleichsmarke gewählt haben.
- Rationale Zahlen als **Gegensätze**: Diese Vorstellung wird z. B. sichtbar, wenn über Guthaben und Schulden gesprochen wird. Hat man 5 € Schulden, so ist dies der Gegensatz von 5 € Guthaben. Die Vergleichsmarke (0 €) ist hier nicht beliebig gewählt, sondern natürlicherweise über »weder Guthaben noch Schulden« gegeben. Auch der Betrag einer Zahl kann in dieser Vorstellung besonders gut verstanden werden.
- Rationale Zahlen als **Richtungen**: Negative Zahlen beschreiben in dieser Vorstellung die entgegengesetzte Richtung der positiven Zahlen. Dies ist z. B. bei der Verwendung von Koordinatensystemen der Fall, oder ganz allgemein bei der Zahlengeraden.
- Rationale Zahlen als **Zustände und Zustandsänderungen**: In dieser Vorstellung bieten rationale Zahlen nicht nur die Möglichkeit, einen Zustand (wie Guthaben oder Schulden) zu beschreiben, sondern auch den Prozess der Änderung dieser Zustände (Erhalt von Guthaben, Erlass von Schulden, ...). Eine solche Vorstellung etwa ist nötig, um die verschiedenen Interpretationen des Minus-Zeichens nachvollziehen zu können.

Als bedeutsamste Repräsentation negativer Zahlen gilt die Zahlengerade. Diese stützt einerseits den Maßzahlaspekt und ermöglicht über die Darstellung von Punkten und Pfeilen (siehe Abbildung 4.3) auch eine Interpretation in den verschiedenen Grundvorstellungen.

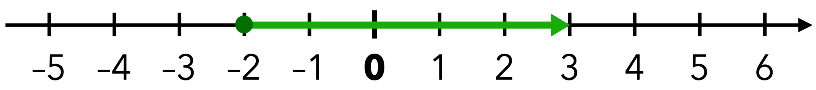

Abbildung 4.3: Zahlengerade

Auch Operationen mit negativen Zahlen sind hierzu nun verständlich behandelbar:

- So kann das **Addieren/Subtrahieren** als Anlegen von Pfeilen, gerichtetes Weiter-/Zurückzählen oder als Subtraktion/Addition der Gegenzahl aufgefasst werden.

- Das **Multiplizieren** kann bei der Multiplikation mit einer positiven Zahl als Streckung/Stauchung aufgefasst werden, die Multiplikation mit -1 entspricht der Spiegelung an der Null und die Multiplikation mit einer beliebigen negativen Zahl ist eine Kombination aus beidem.
- Der **Größenvergleich** ist nun über einen Lagevergleich auf der Zahlengeraden möglich, wobei weiter links liegende Zahlen immer kleiner sind als weiter rechts liegende.

Zusammenfassend lassen sich auf der semantischen Ebene folgende für den Lernpfad relevanten Zusammenhänge ableiten:

- Rationale Zahlen sollten als relative Zahlen bezüglich einer fest gewählten Vergleichsmarke, als Gegensätze, als Richtungen sowie als Zustände und Zustandsänderungen aufgefasst werden können.
- Die Zahlengerade ist eine wesentliche Repräsentation rationaler Zahlen, anhand derer auch die Operationen mit rationalen Zahlen sichtbar gemacht werden können.

4.4 Zum Nachbereiten

Bearbeiten Sie folgende Aufgaben entweder am Begriff *Variable* oder am Begriff *Term*. Als Quelle sei Weigand et al. (2022) zu empfehlen.

1. Informieren Sie sich über die Grundvorstellungen zum gewählten Begriff.
2. Arbeiten Sie heraus, inwiefern die Aspekte der Grundvorstellungsidee erfüllt werden, d. h.
    - stellen Sie die Sinnhaftigkeit des Begriffs durch mögliche Handlungserfahrungen dar,
    - finden Sie geeignete Repräsentationen, anhand derer operatives Handeln ermöglicht wird und
    - beschreiben Sie mögliche Modellierungsprozesse des Begriffs mithilfe der gewählten Grundvorstellung.
3. Diskutieren Sie, ob es sich um primäre oder sekundäre Grundvorstellungen handelt.

5 Arbeitsmittel

Ziele

- Sie können Arbeitsmittel über Anschaulichkeit, Abstraktheit und Operierbarkeit charakterisieren.
- Sie kennen einen Ablauf zur Ausbildung von Grundvorstellungen mithilfe von Arbeitsmitteln. Dabei sind Sie sich der besonderen Bedeutung des Sprechens über Handlungen bewusst.
- Sie können lerntheoretisch den Einsatz von Arbeitsmitteln bei der Aneignung von Lerngegenständen über Internalisierungs- und Externalisierungsprozesse erläutern.

Material

- Folien zum Kapitel 5 (pdf, Keynote)

Einer der Aspekte der Grundvorstellungsidee ist die Sinnkonstituierung durch Handlungsbezug (siehe Definition 4.1). Sollen Grundvorstellungen bei Schülerinnen und Schülern ausgebildet werden, ist es notwendig, diese Handlungen zu *verinnerlichen*. Besonders hilfreich hat sich hierfür der Einsatz von **Arbeitsmitteln** herausgestellt, anhand derer gehandelt wird. Auf tätigkeitstheoretischer Ebene wird der Begriff der *Handlungen* in den Kapiteln **??** und **??** nochmals genauer diskutiert. An dieser Stelle soll – zunächst bezogen auf die Tätigkeitstheorie – die Bedeutsamkeit von *Werkzeugen* für die Aneignung von Lerngegenständen beschrieben werden und anschließend erfolgt – unter Bezugnahme auf mathematikdidaktische Quellen – eine Begriffsklärung für *Arbeitsmittel*.

5.1 Aneignung von Lerngegenständen

5.1.1 Vermittelnde Werkzeuge

Nach Wygotski (1985) erfolgt eine Interaktion eines Individuums mit einem Lerngegenstand niemals direkt, sondern geschieht stets über ein **vermittelndes Werkzeug**. Es kann sich dabei um *echte* Werkzeuge wie Maschinen, Geräte und andere Hilfsmittel handeln, aber auch Gesten, die Sprache, Abbildungen und Skizzen oder ähnliches sind in dem Sinne als Werkzeug zu verstehen. Entscheidend ist, dass dieses vermittelnde »Ding« für das Individuum die Funktion eines Vermittlers erfüllt. Daher wird auch von einem *psychischen Werkzeug* gesprochen.

Durch die Nutzung eines geeigneten Werkzeugs ist das Individuum damit einerseits in der Lage, seine Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten zu ***externalisieren***, d. h. das Werkzeug zielgerichtet so einzusetzen, dass auf den Lerngegenstand eingewirkt werden kann. Andererseits kann das Werkzeug auch dabei helfen, Eigenschaften des Lerngegenstands zu ***internalisieren***, indem die Werkzeugnutzung dazu führt, dass das Individuum Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten über den Lerngegenstand gewinnt. Um sich also einen Lerngegenstand *anzueignen*, sind sowohl stets Externalisierungs- als auch Internalisierungsprozesse notwendig. Man kann auch sagen, dass **Aneignung als Einheit aus Externalisierung und Internalisierung** aufzufassen ist.

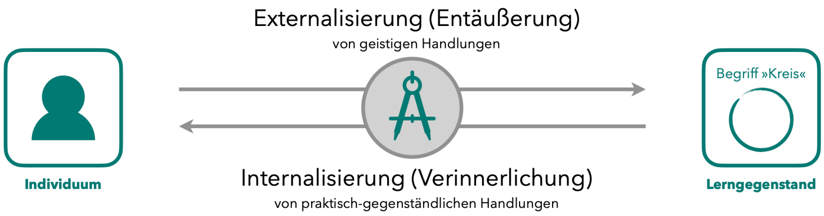

Abbildung 5.1: Werkzeuge als Vermittler in der Tätigkeitstheorie am Beispiel des Kreises

5.1.2 Zur Rolle des Sprechens

Eine wichtige Rolle beim Aneignen spielt das **Sprechen über die durchgeführten Handlungen**. Dieses dient quasi als Bindeglied zwischen geistiger Handlung und praktisch-gegenständlicher Handlung, da es sowohl den Externalisierungsprozess unterstützt (das Geistige muss über das Sprechen externalisiert werden) als aus der Internalisierung dienlich ist (über das Sprechen wird das Praktisch-Gegenständliche psychisch verarbeitet). Damit unterstützt das das Sprechen auch eine **schrittweise Abkehr vom externen Werkzeug** und damit eine geistige Durchdringung des betrachteten Lerngegenstands. Abbildung 5.2 zeigt eine entsprechende Schrittfolge zum Aufbau von Grundvorstellungen, wie sie Wartha & Schulz (2011, S. 11) vorschlagen.

In Abschnitt **??** wird diese Sichtweise noch einmal tätigkeitstheoretisch eingeordnet und in Kapitel **??** hinsichtlich der verschiedenen Arten mathematischen Wissens (Begriffe, Sachverhalte und Verfahren) konkretisiert.

5.1.3 Lernmittel und Lernmodelle

Im Zusammenhang mit Lernprozessen werden nun (ggf. psychische) Werkzeuge auch als ***Lernmittel*** bezeichnet und können entsprechend vielfältiger Natur sein, z. B.:

1	*Das Kind handelt am geeigneten Material.* Die mathematische Bedeutung der Handlung wird beschrieben. Zentral: Versprachlichen der Handlung und der mathematischen Symbole.
2	*Das Kind beschreibt die Materialhandlung mit Sicht auf das Material.* Es handelt jedoch nicht mehr selbst, sondern diktiert einem Partner die Handlung und kontrolliert den Handlungsprozess durch Beobachtung.
3	*Das Kind beschreibt die Materialhandlung ohne Sicht auf das Material.* Für die Beschreibung der Handlung ist es darauf angewiesen, sich den Prozess am Material vorzustellen.
4	*Das Kind arbeitet auf symbolischer Ebene, übt und automatisiert.* Gegebenenfalls wird die entsprechende Handlung in der Vorstellung aktiviert.

Abbildung 5.2: Aufbau von Grundvorstellungen nach Wartha & Schulz (2011, S. 11)

- Mithilfe eines *Zirkels* können Kreise erzeugt werden, indem der Zirkel seiner Funktion entsprechend verwendet wird (Externalisierung der Kenntnisse über den Kreis). Die Gestaltung und Handhabung des Zirkels selbst vermittelt jedoch auch Wissen über den Kreisbegriff, so dass dieses in der Verwendung des Werkzeugs aufgebaut werden kann (Internalisierung des Wissens über den Kreis).
- Die *digitale Stellenwerttafel* ermöglicht es, das Stellenwertverständnis zu Zahlen aufzubauen und Zahlen entsprechend darzustellen. Durch das Verhalten der Anwendung (dass z. B. ein Plättchen beim Verschieben von der Zehner- in die Einer-Spalte automatisch entbündelt wird) unterstützt diesen Aneignungsprozess (siehe Kortenkamp et al., 2018).
- Auch *Aufgaben* haben die Funktion eines (bedeutsamen!) Lernmittels, wenn sie als Aufforderung zum Lernhandeln aufgefasst werden. An ihnen erarbeiten sich die Schülerinnen und Schüler bestimmte Elemente des Lerngegenstands und die Gestaltung der Aufgabe sowie die vorhandenen Kenntnisse der Schülerinnen und Schüler bestimmen den Verlauf und Erfolg der Lernhandlung.

Als weiteres Unterstützungsinstrument und damit spezifisches Lernmittel dient in der Tätigkeitstheorie das Konzept des ***Lernmodells***. Lernmodelle sind »sinnliche Stützen geistigen Handelns« (Giest & Lompscher, 2006, S. 225) und können bspw. Zeichnungen, strukturierte Darstellungen, digitale Anwendungen usw. sein. Sie haben als Modelle dabei den Vorteil, dass sie »nicht die konkreten Merkmale der einzelnen Erscheinungen oder Situationen, sondern nur konstitutive, im gegebenen Kontext wesentliche Merkmale und Relationen enthalten, also *abstrakt* sind« (Lompscher, 1983, S. 64, Hervorhebung im Original). Gleichzeitig sind sie aber auch »*anschauliche* Abbildungen und machen damit die grundlegenden Zusammenhänge und Wesensmerkmale der Wahrnehmung und Vorstellung zugänglich« (Lompscher, 1983, S. 64, Hervorhebung im Original).

Lernmodelle können daher insbesondere für mathematische Lerngegenstände dienlich sein, da sie die »abstrakte Struktur des Gegenstands zusammen mit dem prinzipiellen Weg [..], der zur Aufdeckung der Struktur geführt hat«, beinhalten (Lompscher, 1996, S. 6). Dass es sich dabei nicht ausschließlich um Abbildungen, sondern eben auch haptische Materialien oder digitale

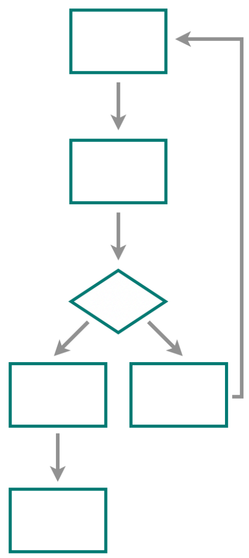

Abbildung 5.3: Beispiel eines Lernmodells für die Bestandteile eines Algorithmus

Anwendungen handeln kann, machen die obigen und noch folgenden Beispiele deutlich.

5.2 Begriffsklärung Arbeitsmittel

Die Begriffe *Lernmittel* und *Lernmodell* als tätigkeitstheoretisch geprägte Konzepte werden in der aktuellen Mathematikdidaktik kaum verwendet. Verbreiteter ist dagegen der Begriff des **Arbeitsmittels**. Nach Krauthausen (2018, S. 310) sind Arbeitsmittel im Mathematikunterricht Veranschaulichungsmittel (zum Illustrieren oder Visualisieren mathematischer Konzepte) oder Anschauungsmittel (d. h. »Darstellungen mathematischer Ideen in der Hand der Lernenden [...] zur (Re-)Konstruktion mathematischen Verstehens«). Entscheidend ist hierbei eine »aktivistische« Sichtweise, also dass die Schülerinnen und Schüler die Arbeitsmittel aktiv als »Denkwerkzeug« verwenden. Die Aufgabe der Lehrkraft ist es dabei, »in den sachgerechten Gebrauch ein[zu]führen und Hilfen (zur Selbsthilfe) im Umgang mit Anschauungsmitteln [zu] gewähren« (Krauthausen, 2018, S. 310). Reinhold et al. (2023, S. 5251) formulieren in inhaltlich ähnlicher Weise:»Arbeitsmittel im Mathematikunterricht repräsentieren mathematische Objekte und erlauben Handlungen mit den dargestellten Objekten.«[1]

In dieser Einordnung übernehmen Arbeitsmittel demnach die Aufgabe eines Lernmittels (auch wenn es weitere Lernmittel gibt, die keine Arbeitsmittel sind). In der obigen Aufzählung der Beispiele kann die *digitale Stellenwerttafel* als Arbeitsmittel aufgefasst werden.

[1]Den Arbeitsmitteln werden hier *Anschauungsmittel* entgegengestellt, jedoch in einer eher demonstrierenden Bedeutung (Reinhold et al., 2023, S. 526), was eher dem Begriff der *Veranschaulichungsmittel* bei Krauthausen (2018, S. 310) entspricht.

Als Definition für Arbeitsmittel, die sowohl mathematikdidaktische als auch tätigkeitstheoretische Bezüge aufgreift, wird im Folgenden gewählt:

Definition 5.1 (Arbeitsmittel)**.** Ein Arbeitsmittel ist eine **materielle oder materialisierte**[2] sowie durch die Schülerinnen und Schüler **operierbare Repräsentation** eines Lerngegenstands. Damit muss ein Arbeitsmittel folgende Bedingungen erfüllen:

- Es enthält die dem Wesen des Lerngegenstands entsprechenden Merkmale und Relationen **(Abstraktheit)**.
- Es macht die dem Lerngegenstand zugrundeliegende Struktur der Wahrnehmung und Vorstellung zugänglich **(Anschaulichkeit)**.
- Es ermöglicht, Lernhandlungen durchzuführen, die der Aneignung des Wesens des Lerngegenstands dienlich sind **(Operierbarkeit)**.

Bei der Auswahl (oder Entwicklung) eines Arbeitsmittels ist es für Sie als Lehrkraft daher von besonderer Bedeutung, was der *Kern* des entsprechenden mathematischen Gegenstands ist. Hierfür ist es notwendig, dass also das **Arbeitsmittel mit der Kernidee des Lerngegenstands in Einklang** steht – mehr dazu finden Sie hinsichtlich der konkreten Ebene des Vier-Ebene-Ansatzes im nächsten Kapitel. Bezugnehmend auf die Grundvorstellungsidee auf der semantischen Ebene ermöglicht das Arbeitsmittel nun auch **operatives Handeln in Bezug auf (visuelle) Repräsentationen** und unterstützt damit auch den zweiten Aspekt von Definiton 4.1.

5.3 Beispiel Äquivalenzumformungen

Bevor Arbeitsmittel für Äquivalenzumformungen von Gleichungen untersucht werden, ist es zunächst notwendig, auf der formalen und semantischen Ebene zu klären, was Gleichungen sind und was man sich unter diesen vorstellen kann.

5.3.1 Der Gleichungsbegriff

Offensichtlich handelt es sich bei dem Ausdruck $2 + 3 = 5$ um eine Gleichung. Auch der Ausdruck $2 + 3 = 8$ stellt eine Gleichung dar – jedoch eine falsche Aussage. Relevant ist bei beiden Ausdrücken, dass zwei Terme durch ein Gleichheitszeichen miteinander verbunden sind. Über den Wahrheitsgehalt einer solchen Gleichung kann jedoch nicht immer eine Aussage getroffen werden. Betrachtet man etwa $2x = 14$, so kann es sich dabei um eine wahre Aussage (für $x = 7$) oder um eine falsche Aussage (für $x \neq 7$) handeln. In dem Fall spricht man also von einer *Aussageform*, die erst durch Einsetzen der Variable zu einer Aussage wird.

[2] Damit sind auch Abbildungen, Strukturdiagramme oder Apps eingeschlossen.

Zusammenfassend gilt: **Eine Gleichung ist eine Aussageform, in der zwei Terme $T_1(x)$ und $T_2(x)$ durch ein Gleichheitszeichen miteinander verbunden werden:** $T_1(x) = T_2(x)$ (vgl. Weigand et al., 2022, 242 ff.)

Liegt eine Gleichung als Aussageform vor, z. B. $\frac{7}{x} = 2$, interessiert in der Regel die Lösung der Gleichung, also $x = 3{,}5$. Ob eine solche Lösung existiert, hängt jedoch von der **Grundmenge** ab, in der die Aussageform betrachtet wird. Wird für die Gleichung $\frac{7}{x} = 2$ als Grundmenge $\mathbb{Z}$ festgelegt, so ist sie nicht lösbar. Ist dagegen $\mathbb{Q}$ die Grundmenge, so kann eine Lösung angegeben werden. Die Grundmenge entspricht in der Regel dem zur Verfügung stehenden Zahlbereich. Dagegen beschreibt die **Definitionsmenge** diejenige Teilmenge der Grundmenge, für die die Aussageform überhaupt definiert ist – im obigen Fall also $\mathbb{Z}\backslash\{0\}$. Die Menge aller Lösungen, für die die Ausageform eine wahre Aussage ergibt, wird dann als **Lösungsmenge** bezeichnet und ist demnach wiederum eine Teilmenge der Definitionsmenge.

Weigand et al. (2022, S. 257) unterscheiden in vier Grundvorstellungen zu Gleichungen:

- **Operationale Grundvorstellung.** Gleichung als Ausdruck einer Berechnung oder Umformung, z. B. $2 + 3 = 5$ oder $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.
- **Relationale Grundvorstellung.** Gleichung als Anlass, Zahlen oder Terme zu ermitteln, für die beide Seiten der Gleichung denselben Wert besitzen, z. B. $2x + 1 = 7$.
- **Funktionale Grundvorstellung.** Gleichung als Ausdruck eines Vergleichs zwischen zwei Funktionstermen, z. B. $x + 1 = -3x$.
- **Objekt-Grundvorstellung.** Gleichung als ein Objekt, das charakteristische Eigenschaften hat, z. B. $x^2 + y^2 = r^2$ als Kreisgleichung.

Innerhalb dieser Grundvorstellungen kann nun das **Lösen von Gleichungen** unterschiedlich interpretiert werden. In der operationalen Grundvorstellung bietet sich bspw. ein Rückwärtsrechnen an, in der funktionalen Grundvorstellung die Schnittpunktbestimmung in einem Diagramm, in dem beide Terme als Funktionsgraphen dargestellt werden. In der Objekt-Grundvorstellung kann das Überprüfen der Passung von Koordinaten zum (ggf. teilweise) Lösen der Gleichung führen, während sich in der relationalen Grundvorstellung Äquivalenzumformungen anbieten.

Für letzteres ist es zunächst notwendig zu klären, was unter der *Äquivalez von Gleichungen* zu verstehen ist. Einerseits ist dies über eine **Lösungsmengenäquivalenz** möglich, d. h. zwei Gleichungen (mit derselben Grundmenge) heißen lösungsmengenäquivalent zueinander, wenn sie dieselbe Lösungsmenge besitzen. Die ist etwa bei den Gleichungen $2x+1 = 7$ und $2x+3 = 9$ offensichtlich mit der Lösungmenge $\{3\}$. Jedoch besitzen auch die Gleichungen $|\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}| = 1$ und $\sin(x) = 0$ dieselbe Lösungsmenge, obwohl die beiden Gleichungen nicht durch offensichtliche Umformungen ineinander übergeführt werden können. Es bietet sich daher auch an, eine **Umformungsäquivalenz** zu definieren, von der man spricht, wenn zwei Gleichungen durch ***Äquivalenzumformungen*** ineinander übergeführt werden können. Letztere wiederum ergeben sich, wenn auf beide Seiten der Gleichungen eine eineindeutige, also injektive Funktion angewandt wird, da diese nicht die Lösungsmenge der Gleichung ändert.[3] Dabei sind die Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division (bis auf Division durch Null) derartige injektive Funktionen, also Äquivalenzumformungen. Das Quadrieren einer Gleichung dagegen erhält im Allgemeinen nicht die Lösungsmenge, da die Funktion $^2 : x \mapsto x^2$ nicht injektiv ist.

5.3.2 Umformungen verstehen

Um Äquivalenzumformungen nachvollziehen zu können, haben sich für den Mathematikunterricht verschiedene Unterstützungsinstrumente etabliert. Diese sollen nun kurz vorgestellt und hinsichtlich ihrer Eignung als Arbeitsmittel (also inwiefern sie die Kriterien aus Definiton 5.1 erfüllen) untersucht werden. Die folgenden Betrachtungen beziehen sich ausschließlich auf lineare Gleichungen mit einer Variablen.

5.3.2.1 Waage-Modell

Im Waage-Modell werden Gleichungen über Massestücke auf einer Balkenwaage dargestellt, wobei i. d. R. absolute Werte in anderer Größe oder Form dargestellt werden als die Variable. Die Gleichheit wird visualisiert über das Gleichgewicht der Waage, also dass deren Balken horizontal ausgerichtet ist.

Eine Äquivalenzumformung besteht nun darin, in beiden Waagschalen dieselbe Operation durchzuführen, so dass die Waage stets im Gleichgewicht bleibt.

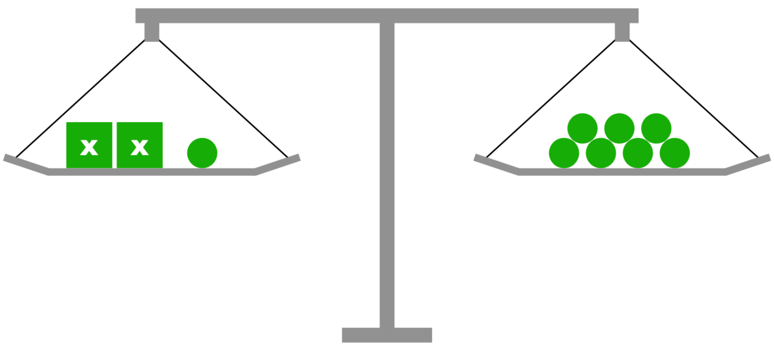

Abbildung 5.4: Waage-Modell für die Gleichung $2x + 1 = 7$

[3] Dies folgt aus folgender Überlegung:Sei eine Gleichung $T_1(x) = T_2(x)$ mit der Grundmenge $\mathbb{G}$ gegeben, $\mathbb{L}$ die Lösungsmenge der Gleichung und $\varphi : \mathbb{G} \to \mathbb{G}$ eine injektive Funktion. Für $x \in \mathbb{L}$ ist $T_1(x) = T_2(x)$ eine wahre Aussage und damit $\varphi(T_1(x)) = \varphi(T_2(x))$, also $x \in \mathbb{L}_\varphi$, d. h. Lösung der umgeformten Gleichung. Sei weiterhin $y \in \mathbb{L}_\varphi$, d. h. $\varphi(T_1(y)) = \varphi(T_2(y))$. Dann ist wegen der Injektivität $\varphi^{-1}(\varphi(T_1(y))) = \varphi^{-1}(\varphi(T_2(y)))$, also $T_1(y) = T_2(y)$, also $y \in \mathbb{L}$. Daraus folgt $\mathbb{L} = \mathbb{L}_\varphi$.

Ein Vorteil besteht in der hohen **Anschaulichkeit** des Modells. Auch die **Operierbarkeit** ist für Gleichungen mit natürlichen Vorfaktoren und ausschließlich Summen gegeben. Hier zeigen sich aber auch schon erste Schwächen. Nach Weigand et al. (2022, 260 f.) bestehen folgende weitere Hürden und Herausforderungen:

- Negative Zahlen können kaum sinnvoll dargestellt werden. Hier gäbe es etwa die Möglichkeit, dass z. B. $x - 1$ als ein Massestück für x mit einem Loch der Größe 1 dargestellt wird. Auch ermöglichen digitale Umsetzungen, dass negative Werte eine Bewegung der Waage entgegen der Schwerkraft bewirken. So kann aber nicht mehr an die Handlungserfahrungen mit echten Balkenwaagen angeknüpft werden, in denen das Modell eigentlich seinen Ursprung hat.

- Gleichzeitig muss auch zugegeben werden, dass nur noch wenige Schülerinnen und Schüler tatsächlich Erfahrungen mit Balkenwaagen haben. Der Waagetyp ist einerseits unüblich, andererseits auch sehr empfindlich gegenüber kleinen Masseabweichungen. Es ist also in der praktischen Ausführung recht kompliziert, ein Gleichgewicht herzustellen. Außerdem muss, damit das Gleichgewicht jederzeit bestehen bleibt, auf beiden Seiten gleichzeitig operiert werden.

- Um die Ausgangssituation der gleichgewichteten Waage herzustellen, muss bereits bekannt sein, über welche Masse das x repräsentierende Massestück verfügt. Wird also die Situation nicht vorgegeben, erscheint das Lösen unnötig. Außerdem bestünde in der Realität die Möglichkeit, durch Versuch und Irrtum die Masse von x mit der Waage zu bestimmen, so dass Äquivalenzumformungen ggf. nicht notwendig erschienen und das Vorgehen noch nicht einmal dem Einsetzen verschiedener Werte für x in die Gleichung entspräche (was einem innermathematischen Versuchen entspräche).

- Hinzu kommt, dass das Dividieren zunächst mit einem Bündeln und dann einem Wegnehmen einhergeht. Dies weist (in der äußeren Handlung) Ähnlichkeiten zum Subtrahieren auf, was es jedoch nicht ist.

All diese Einschränkungen und mögliche »Reparaturen« des Modells bzw. des Umgangs mit ihm lassen darauf deuten, dass die **Abstraktheit** des Modells zu gering ist, es also nicht in ausreichendem Maße das Wesen des Lerngegenstand darstellen kann. Der Drang, nicht mögliche Operationen in das anschauliche Modell zu »pressen«, spricht dafür, dass das Modell auf mathematischer Ebene nicht geeignet genug erscheint, um die Anforderungen an die obige Arbeitsmittel-Definition zu erfüllen.

Dies soll jedoch nicht bedeuten, dass das Modell keinesfalls genutzt werden darf. Barzel & Holzäpfel (2011, S. 7) empfehlen, »das Waage-Modell für den Einsatz mit natürlichen Zahlen auf jeden Fall zu nutzen, um das Prinzip der Äquivalenzumformungen zu erläutern.« Dabei sollten die Grenzen des Modell deutlich gemacht werden und anschließend entweder innermathematisch oder mit alternativen Modellen weitergearbeitet werden.

5.3.2.2 Streichholzschachtel-Modell

Eine weitere Möglichkeit bietet das Streichholzschachtel-Modell, bei denen x die Anzahl der Streichhölzer in einer Schachtel beschreibt, die Gleichung entsprechend mit Schachteln und einzelnen Streichhölzern dargestellt und dann ähnlich wie beim Waage-Modell über gleichartiges Operieren auf beiden Seiten gelöst wird.

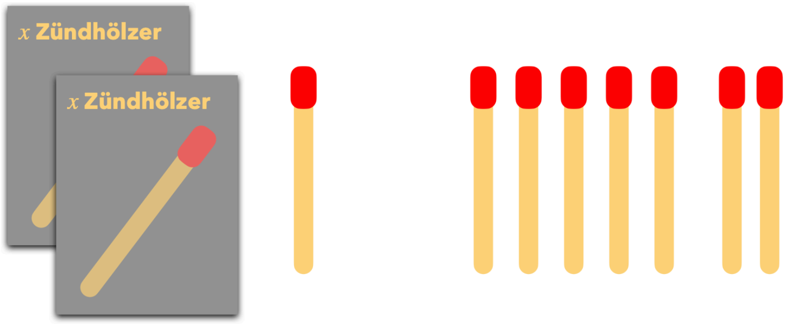

Abbildung 5.5: Streichholzschachtel-Modell für die Gleichung $2x + 1 = 7$

Gegenüber dem Waage-Modell bietet dieses Modell eine einfachere Zugänglichkeit (v. a. in der tatsächlichen Unterrichtssituation) und die Anzahl der Hölzer pro Schachtel ist tatsächlich unbekannt. Jedoch muss man einerseits darauf vertrauen, dass in allen Schachteln dieselbe Anzahl an Streichhölzern vorhanden ist und auch die Gleichheit beider Seiten kann nicht (wie z. B. durch die ausgeglichene Waage) visualisiert werden. In dem Sinne ist die **Anschaulichkeit** etwas geringer, die **Operierbarkeit** für die Schülerinnen und Schüler etwas besser als beim Waage-Modell.

Hinsichtlich der **Abstraktheit** sind keine Unterschiede zu verzeichnen: Es ist weiterhin nur eine Bearbeitung mit natürlichen Vorfaktoren und Variablen sinnvoll möglich.

Barzel & Holzäpfel (2011, S. 6) betonen, dass Streichholzschachteln, Plättchen oder Dosen bereits beim Aufstellen von Termen geeignete Visualisierungsinstrumente sind. Insofern bietet dieses Modell eine gute Anschlussfähigkeit zu vorherigen Erfahren.

5.3.2.3 Strecken-/Pfeil-Modell

Weigand et al. (2022, 261 f.) beschreibt ein Modell, in dem die beiden Terme einer Gleichung über zwei Strecken dargestellt werden, jeweils zusammengesetzt aus Repräsentanten für die Variablen und für die absoluten Werte. Die Gleichheit zeigt sich dann über die gleiche Länge der Strecken. Eine Verallgemeinerung zu Pfeilen ist möglich und wird unten noch diskutiert.

Äquivalenzumformungen sind nun über gleichzeitiges Abziehen oder Hinzufügen bzw. Auftrennen von (Teil-)Strecken visualisierbar. Dieses Modell greift offensichtlich nicht auf derart

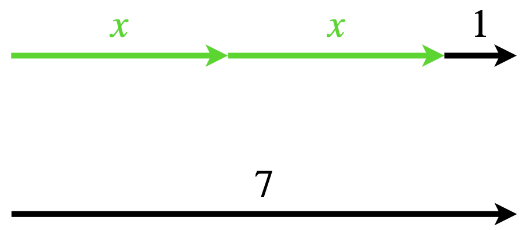

Abbildung 5.6: Pfeil-Modell für die Gleichung $2x + 1 = 7$

enaktive Erfahrungen zurück, wie es das Waage- oder Streichholzschachtel-Modell tun. Dennoch erfüllt es das Kriterium der **Anschaulichkeit**, weil es die dem Lerngegenstand zugrundeliegende Struktur der Wahrnehmung und Vorstellung zugänglich macht. Die **Operierbarkeit** ist für gedankliche Operationen und, wenn die Strecken z. B. über Papierstreifen realisiert werden, auch in Form von real durchgeführten Operationen möglich. Eine digitale Umsetzung des Modells kann bspw. die Operierbarkeit erhöhen und zu einer virtuell-enaktiven Handlungsoption führen.

Ein großer Vorteil des Modells liegt jedoch in der **Abstraktheit**:

- So sind gleichermaßen natürliche wie (positive) gebrochenrationale Vorfaktoren visualisierbar, was sich nur in der Länge der (Teil-)Strecken auswirkt.
- Auch negative Vorfaktoren können über Pfeile in die Gegenrichtung repräsentiert werden. Eine solche Darstellung ist im Umgang mit der Zahlengeraden bekannt, kann auch bei Termen wieder aufgegriffen und hier nun zum Lösen von Gleichungen weiter genutzt werden.

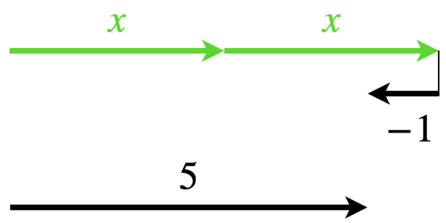

Abbildung 5.7: Pfeil-Modell für die Gleichung $2x - 1 = 5$

- Das Modell bietet weiterhin die Möglichkeit, die Gleichheit der beiden Terme abhängig vom Wert für x nachvollziehbar zu machen. Je nachdem, wie groß x ist, kann also die Gleichung $2x + 1 = 7$ wahr sein (beide Strecken gleich lang) oder eben nicht. Unterstützt werden kann dies, indem x dynamisch variiert wird, etwa in einem digitalen Arbeitsmittel.

Insofern erfüllt eine Umsetzung dieses Modells über ein digitales Arbeitsmittel, in dem virtuell-enaktiv operiert werden kann, die Forderungen aus Definition 5.1.

5.4 Zum Nachbereiten

In Kapitel 4 sollten Sie sich in der Nachbereitung mit Grundvorstellungen zu *Variablen* oder *Termen* beschäftigen.

1. Recherchieren Sie in Schulbüchern und fachdidaktischer Literatur, welche Materialien üblicherweise zur Unterstützung des Aufbaus entsprechender Grundvorstellungen verwendet werden.
2. Analysieren Sie eines dieser Materialien hinsichtlich der Eignung als Arbeitsmittel nach Definition 5.1.

A Vollständiges Literaturverzeichnis

Ableitinger, C., Kramer, J., & Prediger, S. (Hrsg.). (2013). *Zur doppelten Diskontinuität in der Gymnasiallehrerbildung: Ansätze zu Verknüpfungen der fachinhaltlichen Ausbildung mit schulischen Vorerfahrungen und Erfordernissen.* Springer Fachmedien Wiesbaden. https://doi.org/10.1007/978-3-658-01360-8

Barzel, B., & Holzäpfel, L. (2011). Gleichungen verstehen. *mathematik lehren*, *169*, 2–7.

Beutelspacher, A., Danckwerts, R., Nickel, G., Spies, S., & Wickel, G. (2012). *Mathematik Neu Denken.* Vieweg+Teubner Verlag. https://doi.org/10.1007/978-3-8348-8250-9

Brückler, F. M. (2018). *Geschichte der Mathematik kompakt: Das Wichtigste aus Analysis, Wahrscheinlichkeitstheorie, angewandter Mathematik, Topologie und Mengenlehre.* Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-662-55574-3

Bruner, J. S. (1976). Die Bedeutung der Struktur im Lernprozeß. In A. Holtmann (Hrsg.), *Das sozialwissenschaftliche Curriculum in der Schule: Neue Formen und Inhalte* (S. 77–90). VS Verlag für Sozialwissenschaften. https://doi.org/10.1007/978-3-322-85275-5

Danckwerts, R. (1988). Linearität als organisierendes Element zentraler Inhalte der Schulmathematik. *Didaktik der Mathematik*, *16*(2), 149–160.

Danckwerts, R. (2013). Angehende Gymnasiallehrer(innen) brauchen eine „Schulmathematik vom höheren Standpunkt"! In C. Ableitinger, J. Kramer, & S. Prediger (Hrsg.), *Zur doppelten Diskontinuität in der Gymnasiallehrerbildung* (S. 77–94). Springer Fachmedien Wiesbaden. https://doi.org/10.1007/978-3-658-01360-8_5

Etzold, H. (2019a). *Winkel-Farm* (Version 2) [App]. https://apps.apple.com/de/app/winkel-farm/id1369585218

Etzold, H. (2019b). *Winkel-Farm – Leitfaden für Lehrerinnen und Lehrer* (Version 2). Zenodo. https://doi.org/10.5281/zenodo.4747700

Etzold, H. (2021). *Neue Zugänge zum Winkelbegriff* [Dissertation, Universität Potsdam]. https://doi.org/10.25932/publishup-50418

Freudenthal, H. (1973a). *Mathematics as an Educational Task.* Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/978-94-010-2903-2

Freudenthal, H. (1973c). *Mathematik als pädagogische Aufgabe* (Bd. 1). Klett.

Freudenthal, H. (1973b). *Mathematik als pädagogische Aufgabe* (Bd. 2). Klett.

Gellert, W., Küstner, H., Hellwich, M., Kästner, H., & Reichardt, H. (Hrsg.). (1986). *Kleine Enzyklopädie Mathematik* (13. Aufl.). VEB Bibliographisches Institut.

Giest, H., & Lompscher, J. (2006). *Lerntätigkeit – Lernen aus kultur-historischer Perspektive. Ein Beitrag zur Entwicklung einer neuen Lernkultur im Unterricht.* Lehmanns Media.

Greefrath, G., Oldenburg, R., Siller, H.-S., Ulm, V., & Weigand, H.-G. (2016). *Didaktik der Analysis. Aspekte und Grundvorstellungen zentraler Begriffe* (F. Padberg & A. Büchter, Hrsg.; 4. Aufl.). Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-662-48877-5

Hefendehl-Hebeker, L. (2016). Subject-matter didactics in German traditions: Early historical developments. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *37*(S1), 11–31. https://doi.org/10.1007/s13138-016-0103-7

Henn, H.-W., & Filler, A. (2015). *Didaktik der Analytischen Geometrie und Linearen Algebra: Algebraisch verstehen – Geometrisch veranschaulichen und anwenden*. Springer Spektrum.

Hußmann, S., & Prediger, S. (2016). Specifying and Structuring Mathematical Topics: A Four-Level Approach for Combining Formal, Semantic, Concrete, and Empirical Levels Exemplified for Exponential Growth. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *37*(S1), 33–67. https://doi.org/10.1007/s13138-016-0102-8

Hußmann, S., Rezat, S., & Sträßer, R. (2016). Subject Matter Didactics in Mathematics Education. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *37*(S1), 1–9. https://doi.org/10.1007/s13138-016-0105-5

Jahnke, T. (2010). Vom mählichen Verschwinden des Fachs aus der Mathematikdidaktik. *GDM-Mitteilungen 89*, 21–24. https://ojs.didaktik-der-mathematik.de/index.php/mgdm/article/view/559/550

Klein, F. (1925). *Elementarmathematik vom Höheren Standpunkte aus II. Geometrie*. Springer Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-642-90852-1

Klein, F. (1955). *Elementarmathematik vom Höheren Standpunkte aus III. Präzisions- und Approximationsmathematik* (C. H. Müller, Hrsg.). Springer Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-662-00246-9

Klein, F. (1967). *Elementarmathematik vom Höheren Standpunkte aus I. Arithmetik, Algebra, Analysis*. Springer Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-662-11652-4

Kortenkamp, U., Etzold, H., Goral, J., Schmidt, A., & Börrnert, M. (2018). *Digitale Stellenwerttafel – Leitfaden für Lehrerinnen und Lehrer (Version 5)*. Zenodo. https://doi.org/10.5281/zenodo.4761419

Krainer, K. (1989). *Lebendige Geometrie. Überlegungen zu einem integrativen Verständnis von Geometrieunterricht anhand des Winkelbegriffs* [Dissertation]. Alpen-Adria-Universität Klagenfurt.

Krauthausen, G. (2018). *Einführung in die Mathematikdidaktik* (F. Padberg & A. Büchter, Hrsg.; Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II). Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-662-54692-5

Krüger, K., Sill, H.-D., & Sikora, C. (2015). *Didaktik der Stochastik in der Sekundarstufe I*. Springer Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-662-43355-3

Lambert, A. (2012). *Gedanken zum aktuellen Kompetenzbegriff für den (Mathematik-)unterricht* [Vortrag]. Eingangsstatement zur Podiumsdiskussion im Rahmen des 3. Fachdidaktischen Kolloquiums an der Universität des Saarlandes, Saarbrücken. https://www.uni-saarland.de/fileadmin/upload/einrichtung/zfl/PDF_Fachdidaktik/PDF_Kolloquium_FD/Kompetenzbegriff_für_den_Mathematikunterricht_Statement_mit_Folien.pdf

Lompscher, J. (1983). Die Ausbildung von Lernhandlungen. In J. Lompscher (Hrsg.), *Persönlichkeitsentwicklung in der Lerntätigkeit* (S. 53–78). Volk und Wissen.

Lompscher, J. (1985). Die Lerntätigkeit als dominierende Tätigkeit des jüngeren Schülers. In J. Lompscher (Hrsg.), *Persönlichkeitsentwicklung in der Lerntätigkeit* (S. 23–52). Volk und Wissen.

Lompscher, J. (1996). *Aufsteigen vom Abstrakten zum Konkreten - Lernen und Lehren in Zonen der nächsten Entwicklung*. https://publishup.uni-potsdam.de/opus4-ubp/frontdoor/deliver/

index/docId/444/file/AUFSTEIG.pdf
Ministerium für Bildung, J. und S. des L. B. (Hrsg.). (2022). *Rahmenlehrplan für die gymnasiale Oberstufe. Teil C. Mathematik*. https://bildungsserver.berlin-brandenburg.de/fileadmin/bbb/unterricht/rahmenlehrplaene/gymnasiale_oberstufe/curricula/2022/Teil_C_RLP_GOST_2022_Mathematik.pdf
Ministerium für Bildung, J. und S. des L. B. (Hrsg.). (2023). *Rahmenlehrplan Brandenburg. Teil C, Mathematik, Jahrgangsstufen 1 – 10*. https://bildungsserver.berlin-brandenburg.de/fileadmin/bbb/unterricht/rahmenlehrplaene/Rahmenlehrplanprojekt/amtliche_Fassung/getrennt_2023/BB_RLP_2023_Teil_C_Ma_GenF_1.pdf
Mitchelmore, M. (1990). Psychologische und mathematische Schwierigkeiten beim Lernen des Winkelbegriffs. *mathematica didactica*, *13*, 19–37.
Mitchelmore, M., & White, P. (1998). Development of Angle Concepts: A Framework for Research. *Mathematics Education Research Journal*, *10*(3), 4–27.
Padberg, F., & Wartha, S. (2017). *Didaktik der Bruchrechnung* (5. Aufl.). Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-662-52969-0
Reinhold, F., Walter, D., & Weigand, H.-G. (2023). Digitale Medien. In R. Bruder, A. Büchter, H. Gasteiger, B. Schmidt-Thieme, & H.-G. Weigand (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (S. 523–559). Springer Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-662-66604-3_17
Salle, A., & Clüver, T. (2021). Herleitung von Grundvorstellungen als normative Leitlinien – Beschreibung eines theoriebasierten Verfahrensrahmens. *Journal für Mathematik-Didaktik*. https://doi.org/10.1007/s13138-021-00184-5
Schecker, H., Wilhelm, T., Hopf, M., & Duit, R. (Hrsg.). (2018). *Schülervorstellungen und Physikunterricht: Ein Lehrbuch für Studium, Referendariat und Unterrichtspraxis*. Springer Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-662-57270-2
Schubert, S., & Schwill, A. (2011). *Didaktik der Informatik* (2. Aufl). Spektrum, Akad. Verl. https://doi.org/10.1007/978-3-8274-2653-6
Schupp, H. (2016). Gedanken zum „Stoff“ und zur „Stoffdidaktik“ sowie zu ihrer Bedeutung für die Qualität des Mathematikunterrichts. *Mathematische Semesterberichte*, *63*(1), 69–92. https://doi.org/10.1007/s00591-016-0159-y
Schwill, A. (1994). *Fundamentale Ideen in Mathematik und Informatik*. Herbsttagung des Arbeitskreises Mathematikunterricht und Informatik, Wolfenbüttel. http://www.informatikdidaktik.de/didaktik/Forschung/Wolfenbuettel94.pdf
Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland. (2012). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife. (Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 18.10.2012)*. https://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/veroeffentlichungen_beschluesse/2012/2012_10_18-Bildungsstandards-Mathe-Abi.pdf
Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland. (2022a). *Bildungsstandards für das Fach Mathematik Erster Schulabschluss (ESA) und Mittlerer Schulabschluss (MSA). (Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 15.10.2004 und vom 04.12.2003, i.d.F. vom 23.06.2022)*. https://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/veroeffentlichungen_beschluesse/2022/2022_06_23-Bista-ESA-MSA-Mathe.pdf
Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland. (2022b). *Bildungsstandards für das Fach Mathematik Primarbereich. (Beschluss*

der Kultusministerkonferenz vom 15.10.2004, i.d.F. vom 23.06.2022). https://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/veroeffentlichungen_beschluesse/2022/2022_06_23-Bista-Primarbereich-Mathe.pdf

Steinhöfel, W., Reichold, K., & Frenzel, L. (1988). *Zur Gestaltung typischer Unterrichtssituationen im Mathematikunterricht.* Ministerium für Volksbildung.

Strehl, R. (1983). Anschauliche Vorstellung und mathematische Theorie beim Winkelbegriff. *mathematica didactica*, *6*, 129–146.

Taylor, B. (1715). *Linear perspective.* printed for R. Knaplock at the Bishop's-Head in St. Paul's Church-Yard. https://nl.sub.uni-goettingen.de/id/0590700700

Tietze, U.-P., Klika, M., & Wolpers, H. (Hrsg.). (2000a). *Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II. Band 1: Fachdidaktische Grundfragen, Didaktik der Analysis* (2. Aufl.). Vieweg+Teubner Verlag. https://doi.org/10.1007/978-3-322-90568-0

Tietze, U.-P., Klika, M., & Wolpers, H. (Hrsg.). (2000b). *Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II. Band 2: Didaktik der Analytischen Geometrie und Linearen Algebra.* Vieweg+Teubner Verlag. https://doi.org/10.1007/978-3-322-86479-6

Tietze, U.-P., Klika, M., & Wolpers, H. (Hrsg.). (2002). *Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II. Band 3: Didaktik der Stochastik.* Vieweg+Teubner Verlag. https://doi.org/10.1007/978-3-322-83144-6

Vohns, A. (2000). *Das Messen als fundamentale Idee* [1. Staatsexamensarbeit, Universität-Gesamthochschule Siegen]. https://wwwu.aau.at/avohns/pdf/messen.pdf

Vollrath, H.-J., & Roth, J. (2012). *Grundlagen des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe* (F. Padberg, Hrsg.; 2. Aufl.). Spektrum Akademischer Verlag. https://doi.org/10.1007/978-3-8274-2855-4

vom Hofe, R. (1995). *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte.* Spektrum Akademischer Verlag.

vom Hofe, R. (2014). Primäre und sekundäre Grundvorstellungen. In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014, 48. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik vom 10.03.2014 bis 14.03.2014 in Koblenz.* WTM. https://doi.org/10.17877/DE290R-8808

vom Hofe, R., & Hattermann, M. (2014). Zugänge zu negativen Zahlen. *mathematik lehren*, 2–7.

von der Bank, M.-C. (2013). Fundamentale Ideen, insbesondere Optimierung. In A. Filler & M. Ludwig (Hrsg.), *Wege zur Begriffsbildung für den Geometrieunterricht. Ziele und Visionen 2020. Vorträge auf der 29. Herbsttagung des Arbeitskreises Geometrie in der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik vom 14. bis 16. September 2012 in Saarbrücken* (S. 83–124). Franzbecker. https://www.math.uni-sb.de/service/lehramt/AKGeometrie/AKGeometrie2012.pdf

von der Bank, M.-C. (2016). *Fundamentale Ideen der Mathematik: Weiterentwicklung einer Theorie zu deren unterrichtspraktischer Nutzung* [Dissertation, Universität des Saarlandes]. https://doi.org/10.22028/D291-26673

Wartha, S., & Schulz, A. (2011). *Aufbau von Grundvorstellungen (nicht nur) bei besonderen Schwierigkeiten im Rechnen.* IPN Kiel. http://www.sinus-an-grundschulen.de/fileadmin/uploads/Material_aus_SGS/Handreichung_WarthaSchulz.pdf

Weigand, H.-G., Filler, A., Hölzl, R., Kuntze, S., Ludwig, M., Roth, J., Schmidt-Thieme, B., & Wittmann, G. (2018). *Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I.* Springer Berlin Heidelberg.

https://doi.org/10.1007/978-3-662-56217-8
Weigand, H.-G., Schüler-Meyer, A., & Pinkernell, G. (2022). *Didaktik der Algebra: nach der Vorlage von Hans-Joachim Vollrath*. Springer Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-662-64660-1
Wikipedia. (2021). *Peano-Axiome — Wikipedia, die freie Enzyklopädie*. https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Peano-Axiome&oldid=216675163
Wikipedia. (2022). *Kultusministerkonferenz — Wikipedia, die freie Enzyklopädie*. https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Kultusministerkonferenz&oldid=228417777
Wittmann, E. C. (2015). Strukturgenetische didaktische Analysen – empirische Forschung „erster Art". *mathematica didactica*, 239–255. http://www.mathematica-didactica.com/altejahrgaenge/md_2015/md_2015_Wittmann_Stoffdidaktik.pdf
Wygotski, L. (1985). Die instrumentelle Methode in der Psychologie. In J. Lompscher (Hrsg.), *Lew Wygotski. Ausgewählte Schriften. Teil 1: Arbeiten zu theoretischen und methodologischen Problemen der Psychologie* (S. 309–317). Volk und Wissen.