

Universität Potsdam – Wintersemester 2023/24

# **Stoffdidaktik Mathematik**

Kapitel 6 – Kernideen und Kontexte

# Stoffdidaktik Mathematik

## Kapitel 6 – Kernideen und Kontexte

- Sie kennen das Konzept von Kernideen als das Wesen des Lerngegenstands aus der Perspektive der Schülerinnen und Schüler.
- Sie kennen Kernideen zu einzelnen Lerngegenständen.
- Sie können gegebene Kontexte zu Lerngegenständen hinsichtlich ihrer Sinnstiftung beurteilen.
- Sie sind sich der Möglichkeiten und Bedeutung horizontaler und vertikaler Mathematisierung bewusst.

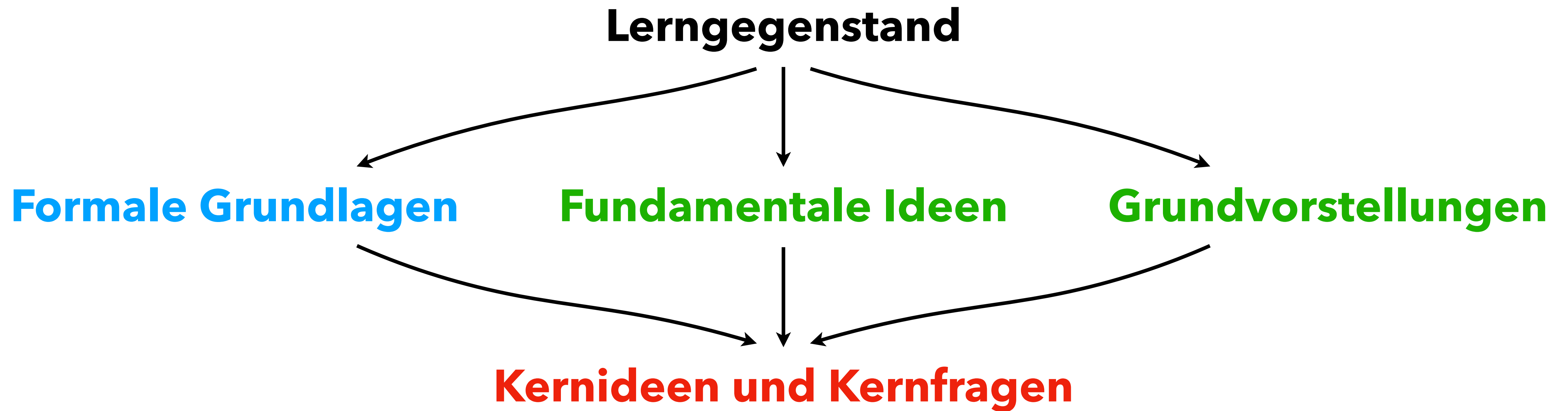
# Was? Wie?

## Stoffdidaktische Analyse als Spezifizieren & Strukturieren von Lerngegenständen

	Spezifizieren	Strukturieren
<b>konkrete Ebene</b>	<ul style="list-style-type: none"><li>- <b>Welche Kernfragen und Kernideen</b> können die Entwicklung der Begriffe, Sätze und Verfahren leiten?</li><li>- <b>Welche Kontexte und Probleme</b> sind geeignet, um an ihnen die Kernfragen und -ideen exemplarisch zu behandeln und die Inhalte zu rekonstruieren?</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>- Wie kann das Verständnis sukzessive <b>über konkrete Situationen</b> in den beabsichtigten Lernpfaden <b>konstruiert</b> werden (<i>horizontale Mathematisierung</i>)?</li><li>- Wie können die Lernpfade <b>in Bezug auf die Problemstruktur angeordnet</b> werden (<i>vertikale Mathematisierung</i>)?</li></ul>

**konkrete Ebene ≠ konkrete Unterrichtsplanung**

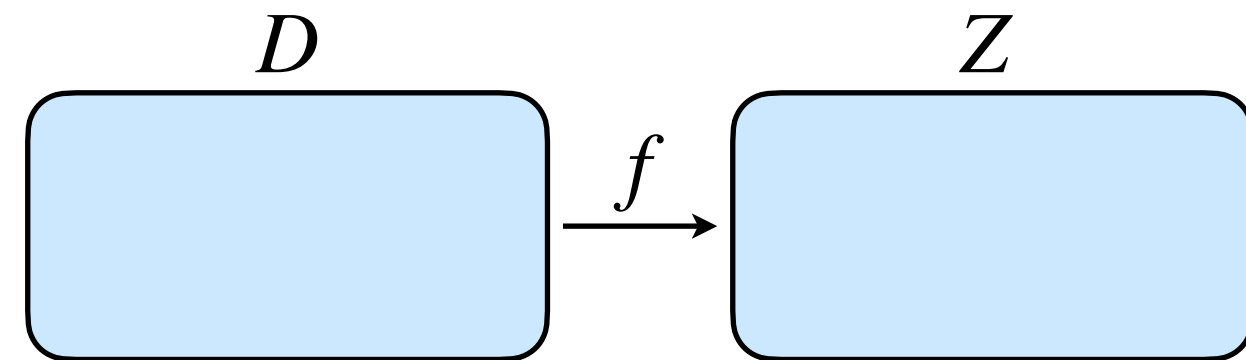
(Hußmann & Prediger, 2016)



**Was ist (aus Sicht der Schüler/-innen) das Wesentliche des Lerngegenstands?**

# Funktionen

## Formale Grundlagen



$$f \subseteq D \times Z$$

$f$  linkstotal und rechtseindeutig, d.h.

$$\forall x \in X \exists! y \in Z : (x, y) \in f$$

## Fundamentale Ideen

- Approximierung
- Optimierung
- Linearität
- Symmetrie
- Invarianz
- Rekursion
- Vernetzung
- Ordnen
- Strukturierung
- Formalisierung
- Exaktifizierung
- Verallgemeinern
- Idealisieren
- ...

**Muster erkennen**

**Algebraisierung**

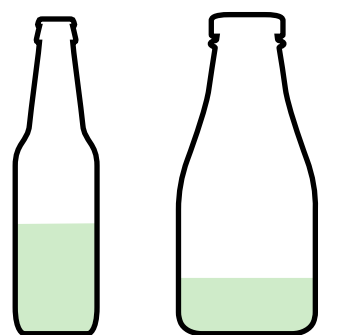
(vgl. Thiel-Schneider, 2018, S. 31).

## Grundvorstellungen

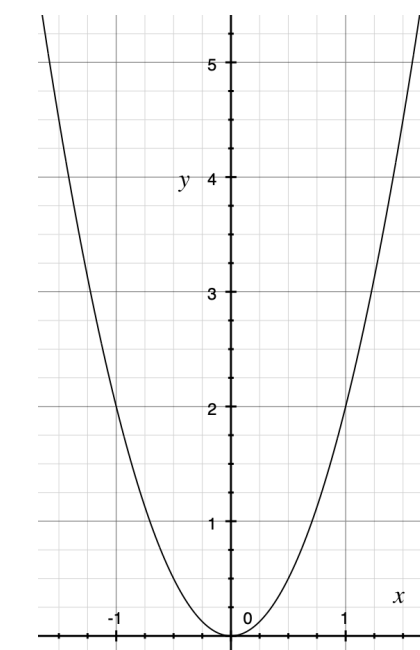
**Zuordnung**

$x$	-2	-1	0	1	2
$y$	8	2	0	2	8

**Änderung/Kovariation**



**Objekt**



## Kernideen und Kernfragen

**Was ist (aus Sicht der Schüler/-innen) das Wesentliche des Lerngegenstands?**

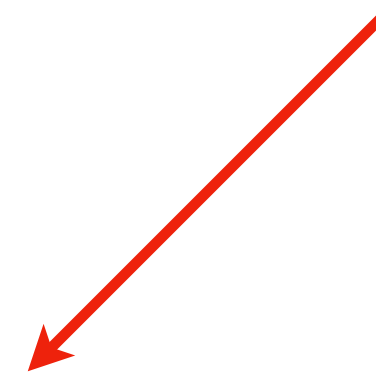
# Funktionen

## Kernideen und Kernfragen

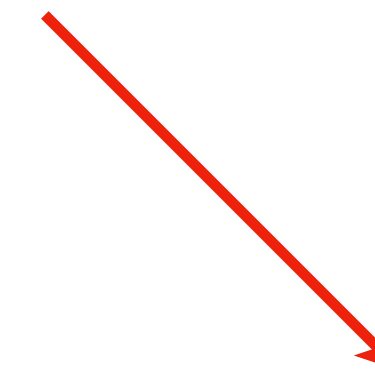
**Was ist (aus Sicht der Schüler/-innen) das Wesentliche des Lerngegenstands?**

»Wie kann man die Beziehung zwischen zwei sich verändernden Größen beschreiben und wie kann man damit weitere Werte bestimmen?«

(Thiel-Schneider, 2018, S. 49).



**Vorschauperspektive**



**Rückschauperspektive**

# Kernideen und Kernfragen

**Was ist (aus Sicht der Schüler/-innen) das Wesentliche des Lerngegenstands?**

Eine **Kernidee** beschreibt unter sinnstiftender Perspektive das mathematische Wesen eines Lerngegenstand.

Eine **Kernfrage** stellt die Kernidee in Frageform aus der Perspektive der Schülerinnen und Schüler dar.

Kernideen und Kernfragen verfolgen eine **Vorschauperspektive**, die der Orientierung und Initiierung der Auseinandersetzung mit dem neuen Lerngegenstand dient, sowie eine **Rückschauperspektive**, die es den Schülerinnen und Schülern ermöglicht, ihren eigenen Lernprozess zu reflektieren und den Lerngegenstand einzuordnen. (angelehnt an Leuders et al. 2011, S. 8)



# Kernideen und Kernfragen

Was ist (aus Sicht der Schüler/-innen) das Wesentliche des Lerngegenstands?

## Quadratische Funktionen

*Wie kann ich krumme  
Kurven beschreiben?*

(Barzel et al., 2016, S. 190)

## Konstruktion von Dreiecken

*Wie kann ich mit Dreiecken  
Landschaften vermessen?*

(Leuders et al., 2015, S. 164)

## Negative Zahlen

*Wie kann ich rechnen, wenn ich  
mehr wegnehme, als ich habe?*

(Leuders et al., 2015, S. 74)

## Bedingte Wahrscheinlichkeiten

*Wie kann ich einschätzen, einem  
medizinischen Testergebnis  
zu vertrauen?*

**Vorschauperspektive:** Orientierung, Initiierung der Auseinandersetzung mit Lerngegenstand

**Rückschauperspektive:** Reflexion des eigenen Lernprozesses, Einordnung des Lerngegenstands



## Quadratische Funktionen

»Wie kann ich krumme  
Kurven beschreiben?«  
(Barzel et al., 2016, S. 190)

# Kontexte



Ein **sinnstiftender Kontext** ist ein Ausschnitt einer inner- oder außermathematischen Welt, der folgende Anforderungen möglichst gut erfüllt:

- Er ist anschlussfähig an die Erfahrungen, Interessen und die Denk- und Handlungsmuster der Lernenden (**Lebensweltbezug**).
- Er ermöglicht es, authentische Fragen zu bearbeiten und dabei auch etwas über den Kontext zu lernen (**Kontextauthentizität**).
- Er ist problemhaltig und offen genug, um Lernende zum reichhaltigen Fragen und Erkunden anzuregen (**Reichhaltigkeit**).

(Leuders et al. 2011, S. 4)

# Kernfragen / Kernideen

## Funktionen

»Wie kann ich die Beziehung zwischen zwei sich verändernden Größen beschreiben und wie kann ich damit weitere Werte bestimmen?«  
(Thiel-Schneider, 2018, S. 49).

## Lineare Funktionen

Wie kann ich sich gleichmäßig verändernde Prozesse beschreiben?

## Quadratische Funktionen

»Wie kann ich krumme Kurven beschreiben?«  
(Barzel et al., 2016, S. 190)

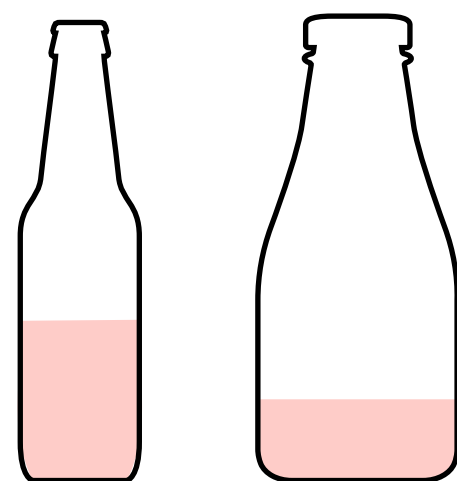
## Sinnstiftender Kontext

Ausschnitt aus inner- oder außermathematischer Welt; erfüllt folgende Anforderungen möglichst gut:

**Lebensweltbezug:** anschlussfähig an Erfahrungen, Interessen, Denk- und Handlungsmuster der Lernenden

**Kontextauthentizität:** ermöglicht, authentische Fragen zu bearbeiten und etwas über den Kontext zu lernen

**Reichhaltigkeit:** problemhaltig und offen genug, um zum reichhaltigen Fragen und Erkunden anzuregen (vgl. Leuders et al. 2011)



Füllexperimente



Abbrennen einer Kerze



Analyse eines Ballwurfs

# Kernfragen / Kernideen

## Wurzel

Wie kann ich Quadrieren rückwärts rechnen?

## Term

Wie kann ich komplizierte Berechnungen übersichtlich darstellen?

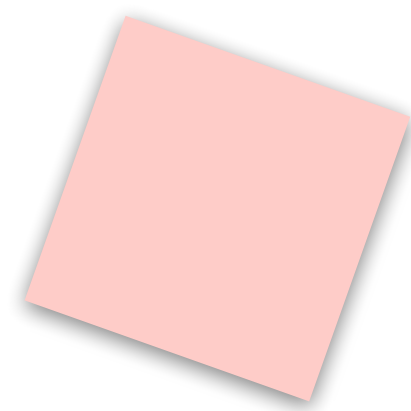
## Sinnstiftender **Kontext**

Ausschnitt aus inner- oder außermathematischer Welt; erfüllt folgende Anforderungen möglichst gut:

**Lebensweltbezug:** anschlussfähig an Erfahrungen, Interessen, Denk- und Handlungsmuster der Lernenden

**Kontextauthentizität:** ermöglicht, authentische Fragen zu bearbeiten und etwas über den Kontext zu lernen

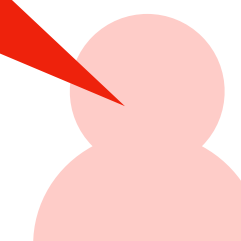
**Reichhaltigkeit:** problemhaltig und offen genug, um zum reichhaltigen Fragen und Erkunden anzuregen (vgl. Leuders et al. 2011)



Quadrat mit halben Flächeninhalt finden

*Denk dir eine Zahl.  
Addiere 5, ...*

Rechentricks







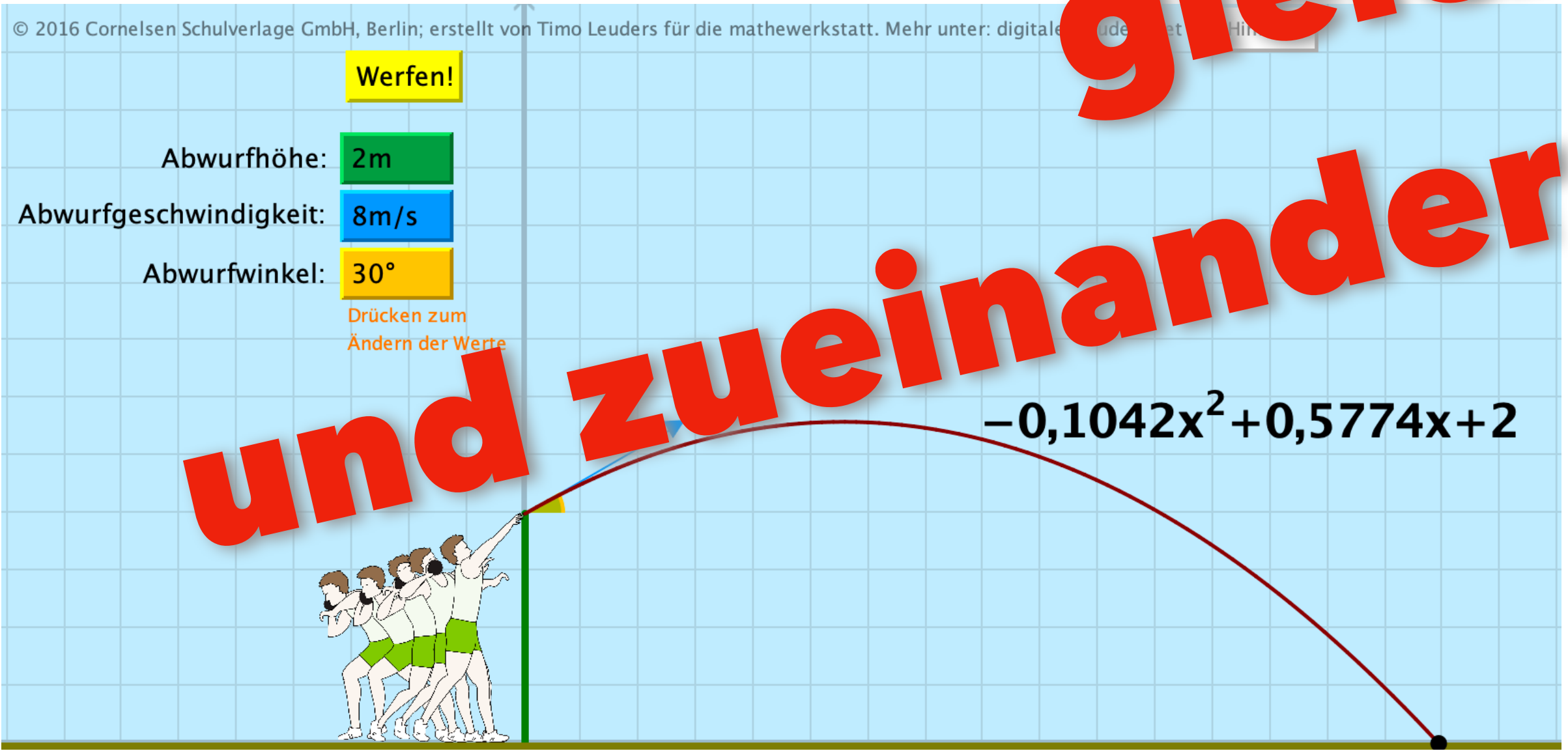
# horizontale Mathematisierung

Beschreiben, Ordnen und Lösen  
realer Situationen und alltäglicher  
Probleme mithilfe mathematischer  
Objekte und Operationen

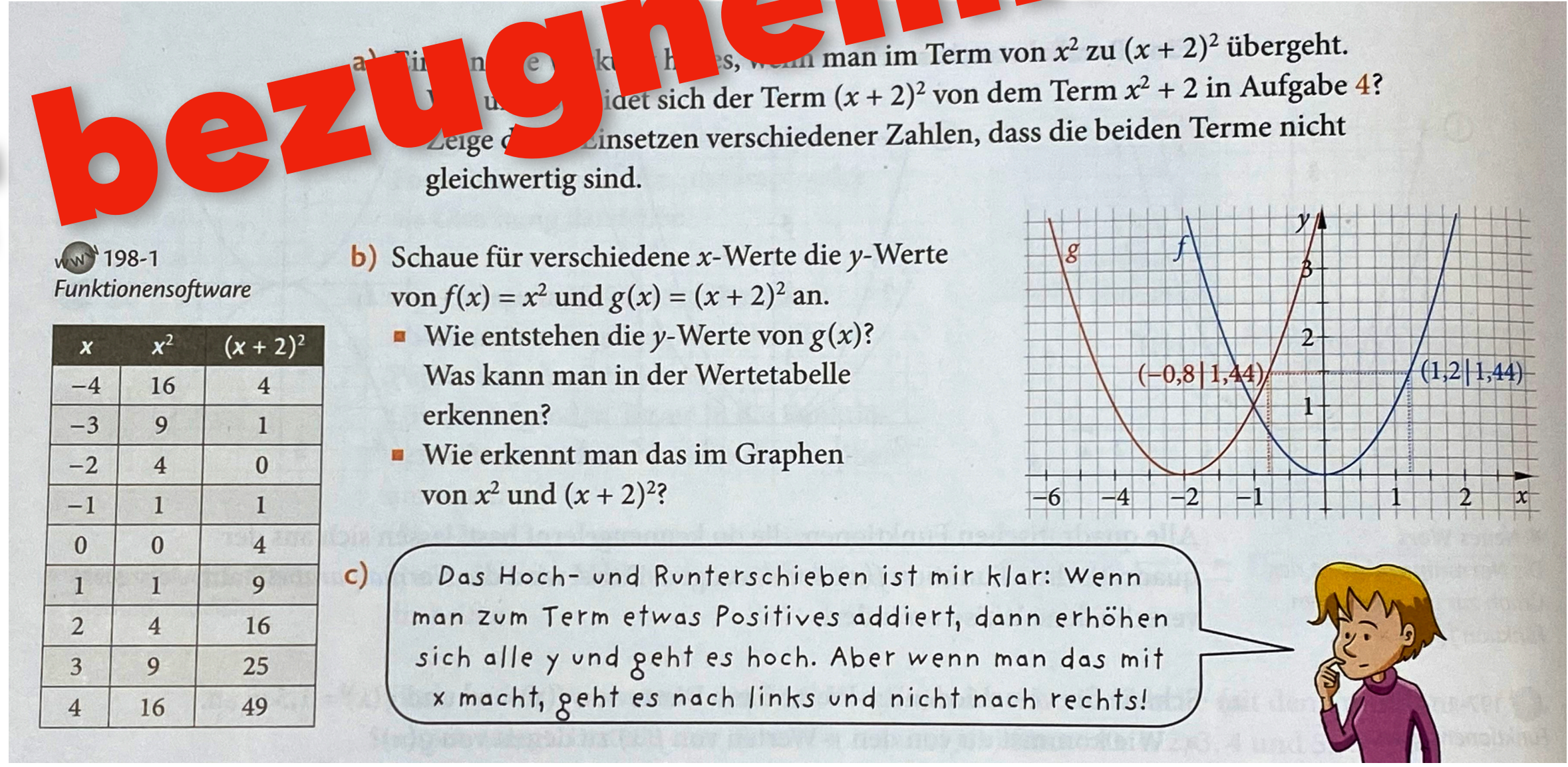
# vertikale Mathematisierung

Reorganisieren und  
operieren innerhalb des  
mathematischen Systems

**beides  
gleichwertig  
bezugnehmend  
und zueinander**



(Barzel et al., 2016, S. 194)



(Barzel et al., 2016, S. 198)



# Formale Grundlagen

## Fundamentale Ideen

## Grundvorstellungen

## Kernideen / Kernfragen

Vorschauperspektive &  
Rückschauperspektive

## Kontexte

Lebensweltbezug, Kontextauthentizität  
& Reichhaltigkeit

## Mathematisierung

horizontal & vertikal

- als Zahlenpaar:  $[(0,2)] = [(5,7)] \equiv -2$  oder  
als Gegenzahl:  $-2$  vs.  $2$

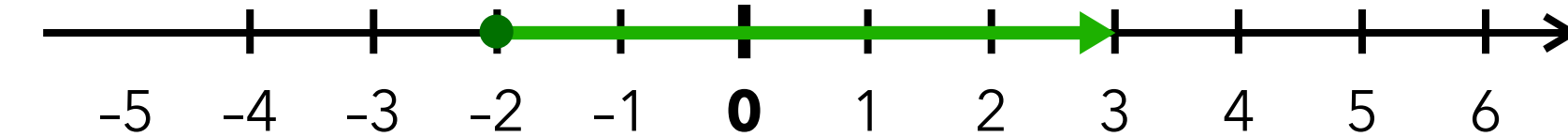
- $n - m$  mit  $m > n$  nun lösbar

- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

- Rechenregeln nach  
Permanenzprinzip erweitert



- Vernetzung, Verallgemeinerung, Erweiterung

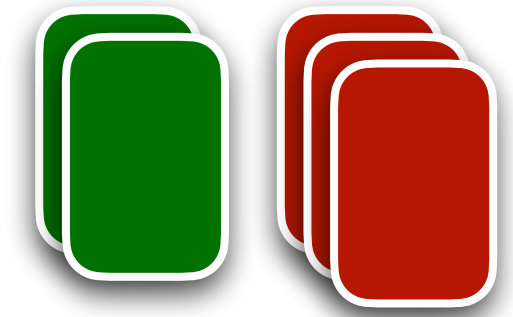


- als relative Zahlen bezüglich einer  
fest gewählten Vergleichsmarke

- als Richtungen

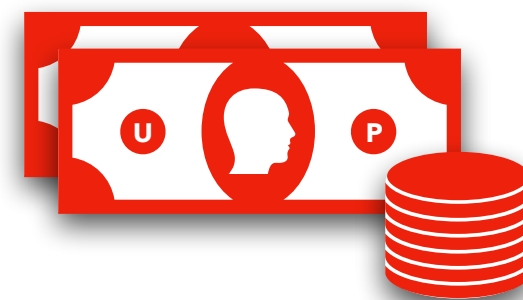
- als Gegensätze

- als Zustände und  
Zustandsänderungen



- Wie kann man rechnen, wenn man mehr wegnimmt, als man hat?
- Wie kann man mit negativen Zahlen wiederholt dasselbe rechnen?

(Leuders et al., 2015, S. 80, 82)



- horizontal: z. B. mehrfache Schulden
- vertikal: z. B. Permanenzenreihen

- Ergänzung: Blick- und Bewegungsrichtung  
beim Rechnen auf Zahlenstrahl

# Formale Grundlagen

## Fundamentale Ideen

## Grundvorstellungen

## Kernideen / Kernfragen

Vorschauperspektive &  
Rückschauperspektive

## Kontexte

Lebensweltbezug, Kontextauthentizität  
& Reichhaltigkeit

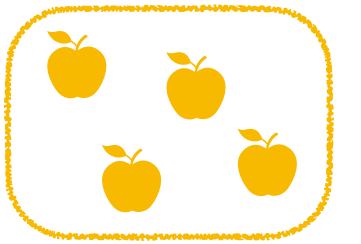
## Mathematisierung

horizontal & vertikal

# Schwierigkeiten und Herausforderungen



- Minus-Zeichens als Vor-, Rechen- und Inversionszeichen  $-5 + 2$   $7 - 3$   $-a$
- Kardinalzahlaspekt nicht mehr tragfähig
- Fehlinterpretation der Ordnungsrelation (nicht mehr über Mächtigkeit möglich; fehlerhafte spiegelbildliche Interpretation)  $-5 > -3$



- »negativ« als Wort mit mehreren verschiedenen Bedeutungen (*homonym*)

negative Stimmung

negativer Corona-Test

negative Zahl

- Generalisierung der Vorstellung »Hinzufügen vermehrt immer«
  - Übertragung von Vorstellung bei Addition als Hinzufügen
  - wird teils auch sprachlich gestützt

- komplexer Wortschatzaufbau, abhängig vom Kontext

»Obergeschoss«

»Meeresspiegel«

»Plusgrade«

»Erdgeschoss«

»Normal-Null«

»Gefrierpunkt«

»Untergeschoss«

»Tauchtiefe«

»Minusgrade«

»Frost«

- Vermischung der Rechenregeln

bewusste Sprachbildung

(wenige) Kontext(e)  
für Einführung auswählen

Kalkül vermeiden

**Formale Grundlagen**

**Fundamentale Ideen**

**Grundvorstellungen**

**Kernideen / Kernfragen**

**Kontexte**

**Mathematisierung** horizontal & vertikal

**Schwierigkeiten und Herausforderungen**

**All das beeinflusst die  
Auswahl und Anordnung  
der Unterrichtsinhalte**



# Vorschlag eines Lernpfades



Erfahrungen zum Umgang  
mit Guthaben/Schulden

Negative Zahlen als  
Beschreibungsinstrument  
für Schulden

Negative Zahlen als  
neue Zahlen

Repräsentation über  
Zahlengerade

Zustände und  
Zustandsänderungen

Gegensätze

relative Zahlen bezüglich einer  
fest gewählten Vergleichsmarke

Negative Zahlen als  
neuer Zahlenbereich

Ordnen und Vergleichen

Richtungen

Addieren/Subtrahieren  
(horizontal und vertikal)

Multiplizieren  
(horizontal und vertikal)

Dividieren durch  
Regelübertragung

Wie kann man rechnen, wenn man  
mehr wegnimmt, als man hat?

Wie kann man mit negativen Zahlen  
wiederholt dasselbe rechnen?

# Literatur

Barzel, B., Hußmann, S., Leuders, T., & Prediger, S. (Hrsg.). (2016). *Mathewerkstatt. 9, Schulbuch* (1. Auflage). Cornelsen.

Hußmann, S., & Prediger, S. (2016). Specifying and Structuring Mathematical Topics: A Four-Level Approach for Combining Formal, Semantic, Concrete, and Empirical Levels Exemplified for Exponential Growth. *Journal Für Mathematik-Didaktik*, 37(S1), 33-67. <https://doi.org/10.1007/s13138-016-0102-8>

Leuders, T., Hußmann, S., Barzel, B., & Prediger, S. (2011). Das macht Sinn! Sinnstiftung mit Kontexten und Kernideen. *Praxis der Mathematik in der Schule*, 53(37), 2-9. <https://www.researchgate.net/publication/233978329>

Leuders, T., Prediger, S., Barzel, B., & Hußmann, S. (Hrsg.). (2015). *Mathewerkstatt. 7, Schulbuch* (1. Auflage). Cornelsen.

Thiel-Schneider, A. (2018). Spezifizierung und Strukturierung des Lerngegenstandes. In A. Thiel-Schneider, *Zum Begriff des exponentiellen Wachstums* (S. 23-57). Springer Fachmedien Wiesbaden. [https://doi.org/10.1007/978-3-658-21895-9\\_4](https://doi.org/10.1007/978-3-658-21895-9_4)