Universität Potsdam – Wintersemester 2023/24

Stoffdidaktik Mathematik

Kapitel 13 – Didaktik der Geometrie

Stoffdidaktik Mathematik

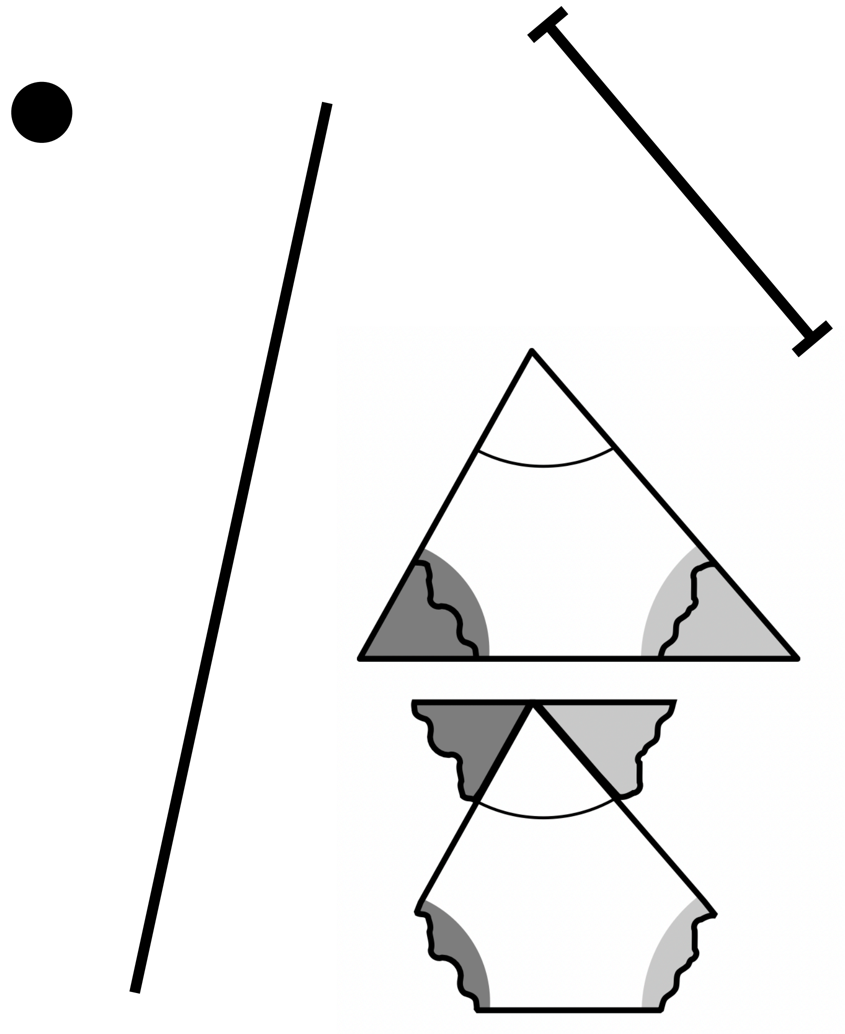
Kapitel 13 – Didaktik der Geometrie

- Sie sind sich der Verbindungen von Geometrie, Linearer Algebra und Analytischer Geometrie bewusst.
- Sie kennen enaktive, ikonische und symbolische Herangehensweisen zur Behandlung von Lagebeziehungen.
- Sie kennen Besonderheiten im Einsatz von DGS bei der Behandlung geometrischer Fragestellungen (wie Zugstabilität, Spuren und Ortslinien).

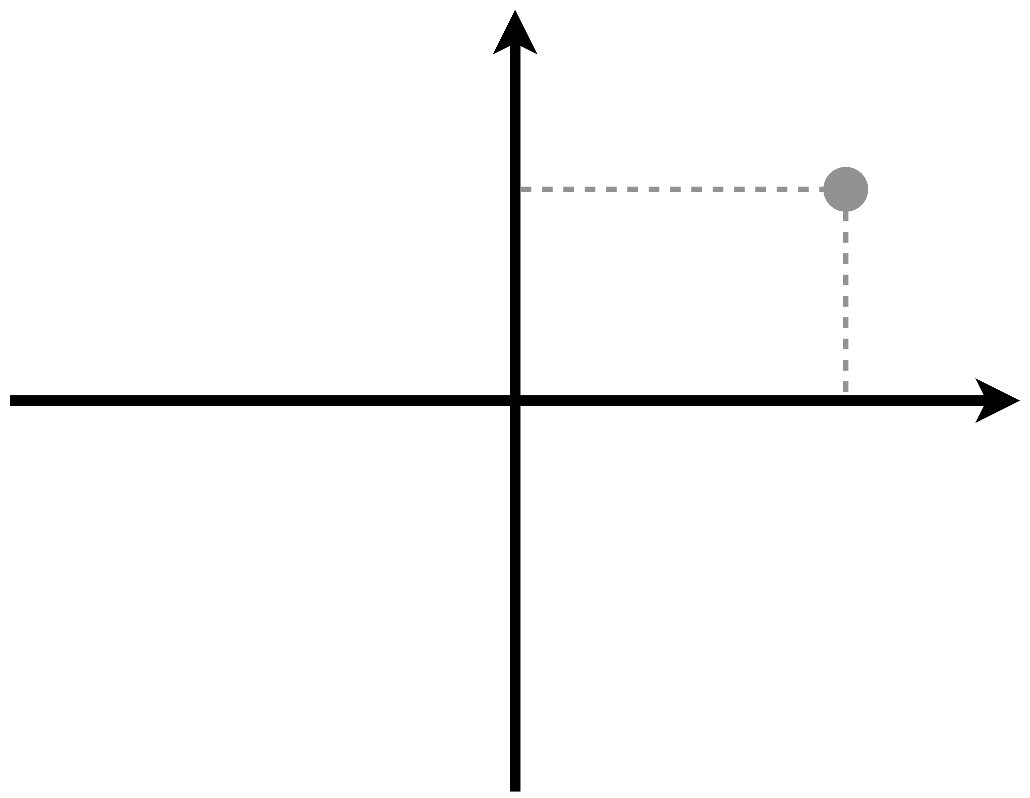
Geometrie

Elementar-geometrie

Vektor als Verschiebung



Koordinatisierung



Analytische Geometrie

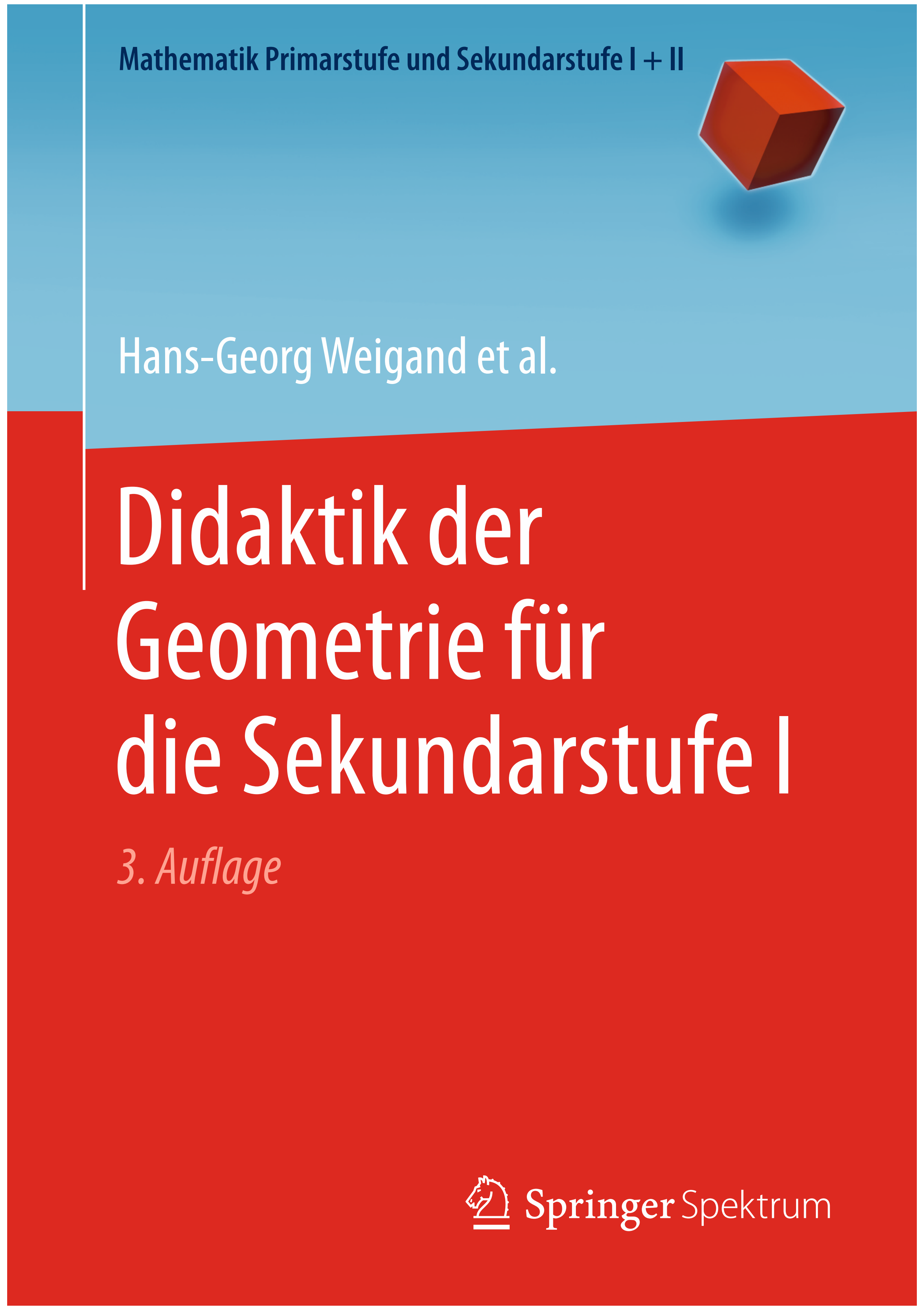
Vektor als n-Tupel

Lineare Algebra

Vektor als Element eines Vektorraumes

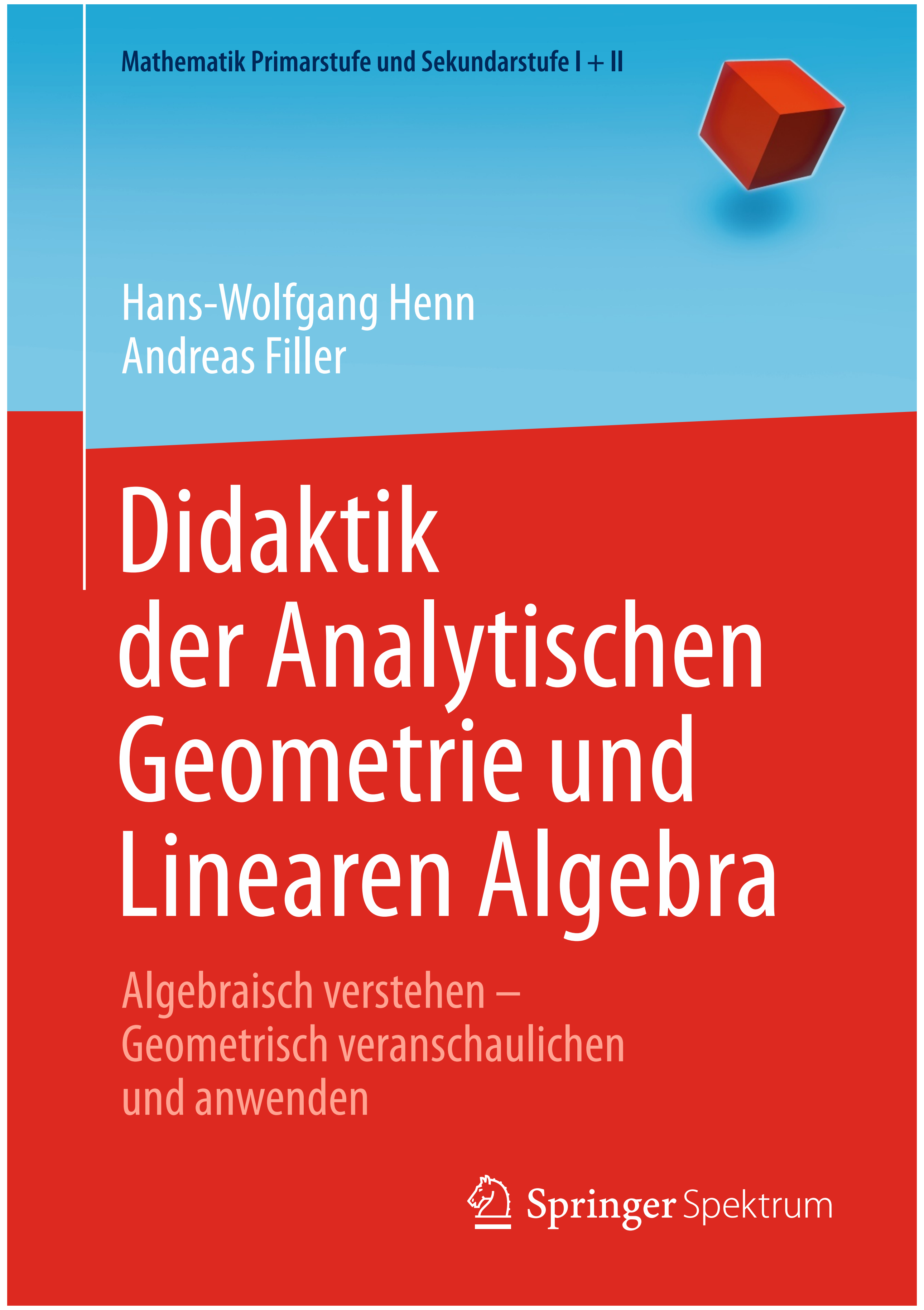
Heiko Etzold, 2024

Geometrie



(Weigand et al., 2018)

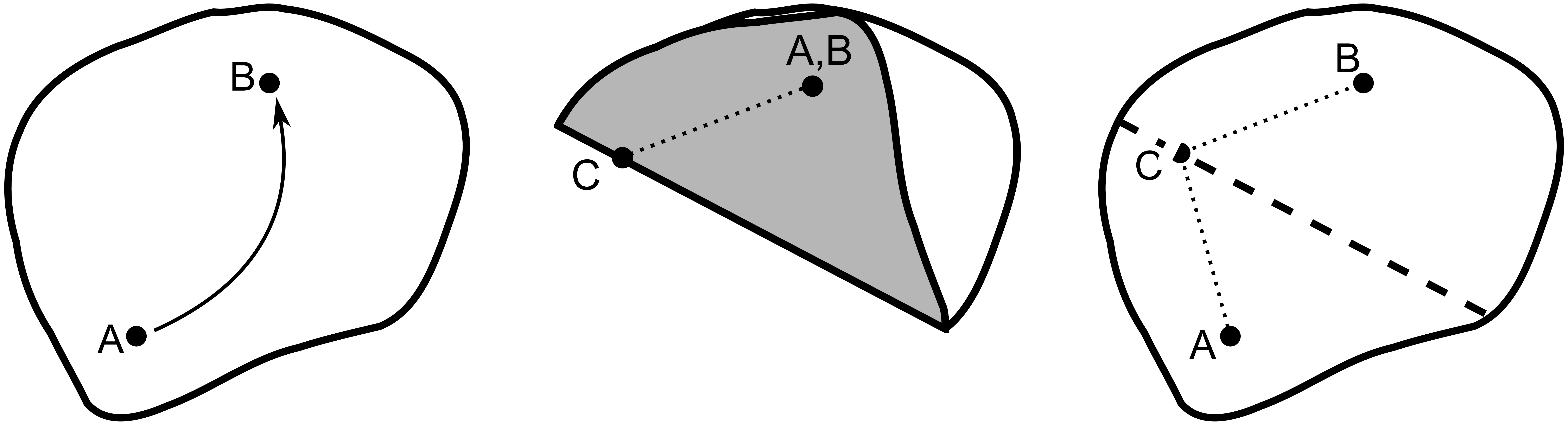
1. Ziele des Geometrieunterrichts
2. **Beweisen und Argumentieren**
3. **Konstruieren**
4. **Problemlösen**
5. **Begriffslernen und Begriffslehren**
6. Ebene Figuren und Körper
7. Flächeninhalt und Volumen
8. Symmetrie und Kongruenz
9. Ähnlichkeit
10. Trigonometrie
11. Geometrie und Geometrieunterricht



(Henn & Filler, 2015)

1. **Einführung: Analytische Geometrie/Lineare Algebra und Allgemeinbildung**
2. Lineare Gleichungssysteme
3. Der Vektorbegriff
4. Analytische Geometrie
5. Vertiefungen und Anwendungen der Analytischen Geometrie
6. Matrizen und affine Abbildungen
7. Ausblick

Lagebeziehungen

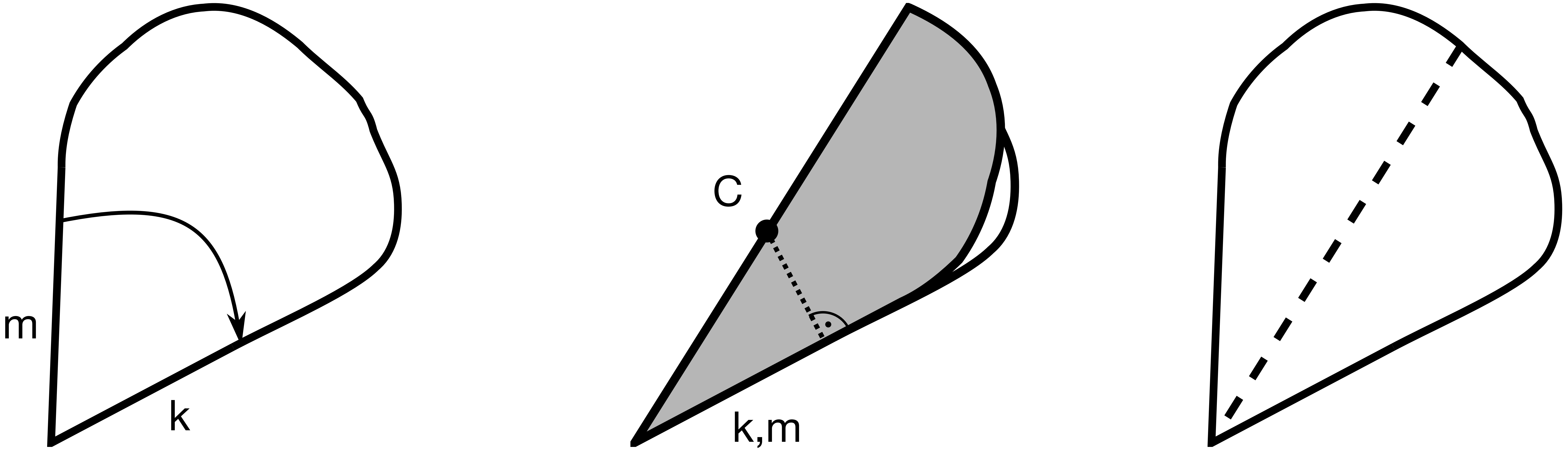


Mittelsenkrechte als Menge aller Punkte, die von zwei Punkten denselben Abstand haben

(Etzold & Petzschler, 2014, S. 5)

1

Lagebeziehungen



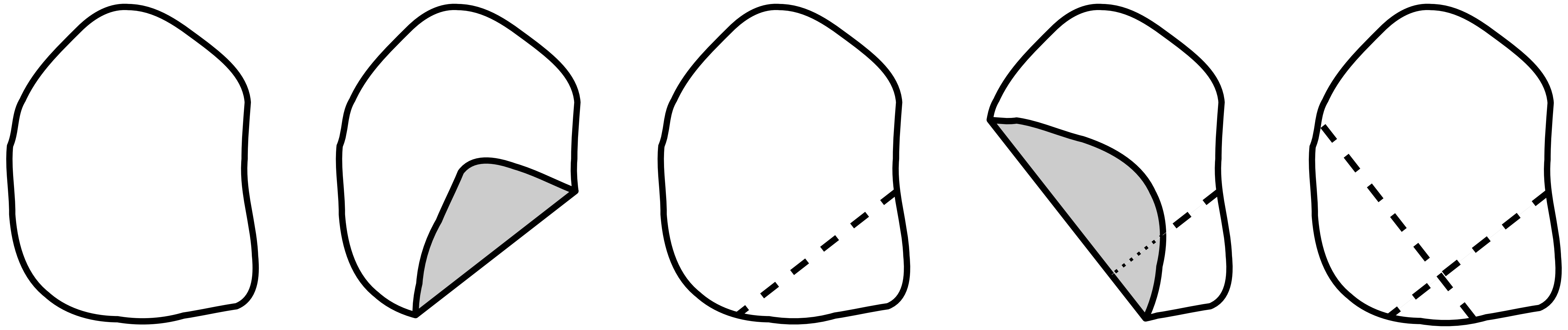
Winkelhalbierende als Menge aller Punkte, die von zwei Geraden denselben Abstand haben.

(Etzold & Petzschler, 2014, S. 5)

1

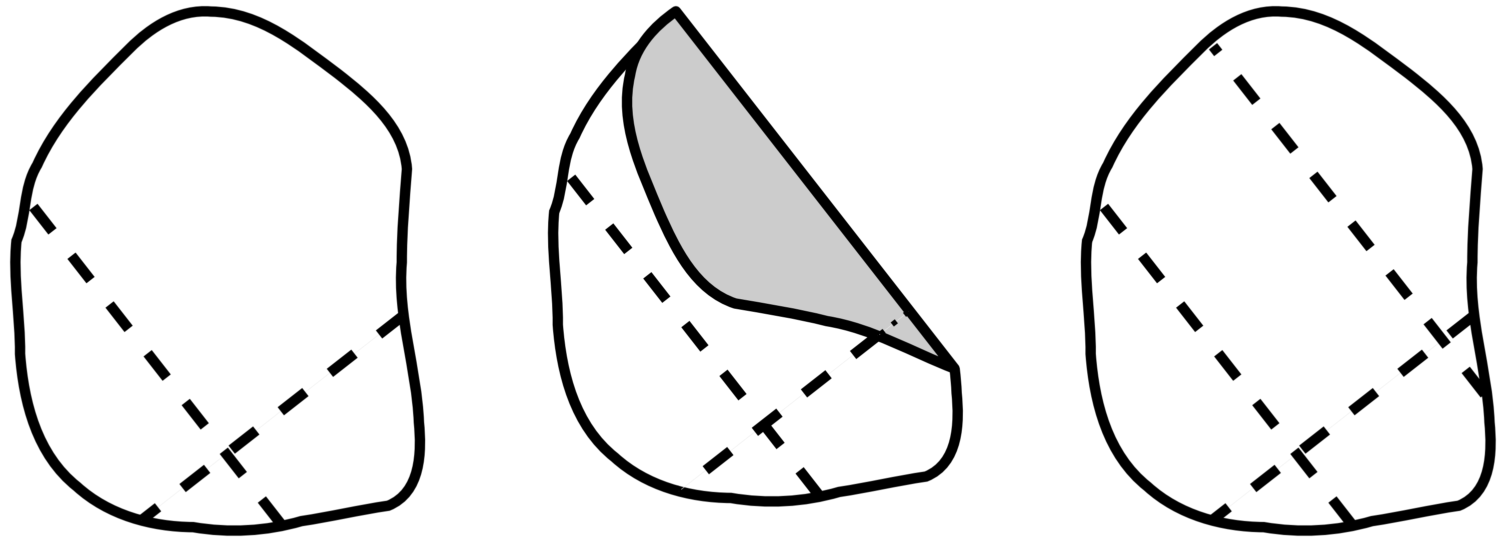
Lagebeziehungen

So werden zueinander senkrechte Linien gefaltet

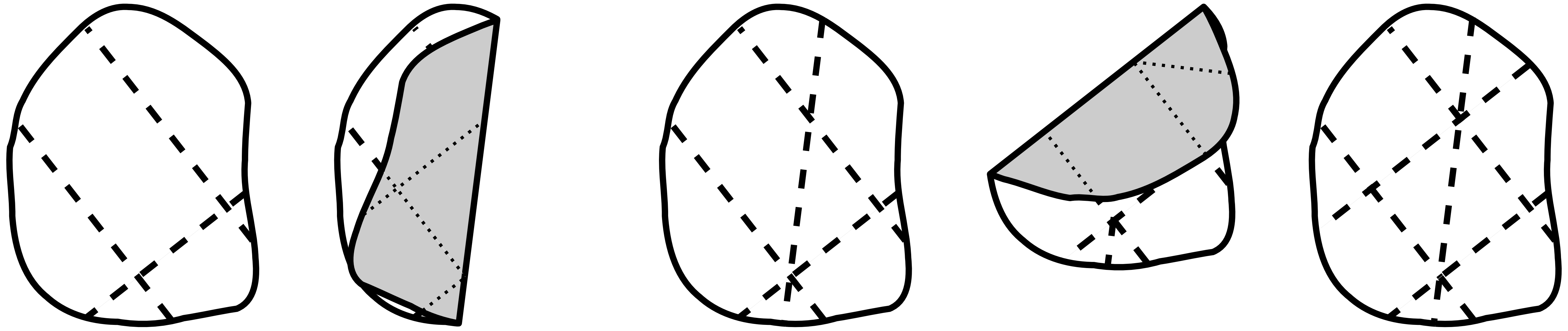


So werden zueinander parallele Linien gefaltet

Sie entstehen als Senkrechte der Senkrechten (s. o.):



Und so wird ein Quadrat gefaltet



Erinnerung an die Theorie

- **Lernhandlung:** *Erkennen* (als mehrfaches *Identifizieren* und *Realisieren*) der geometrischen Konfiguration der Faltung
- **Analyse der Lernhandlung** unterstützt Aneignung geometrischen Wissens

(Etzold & Petzschler, 2014, S. 10)

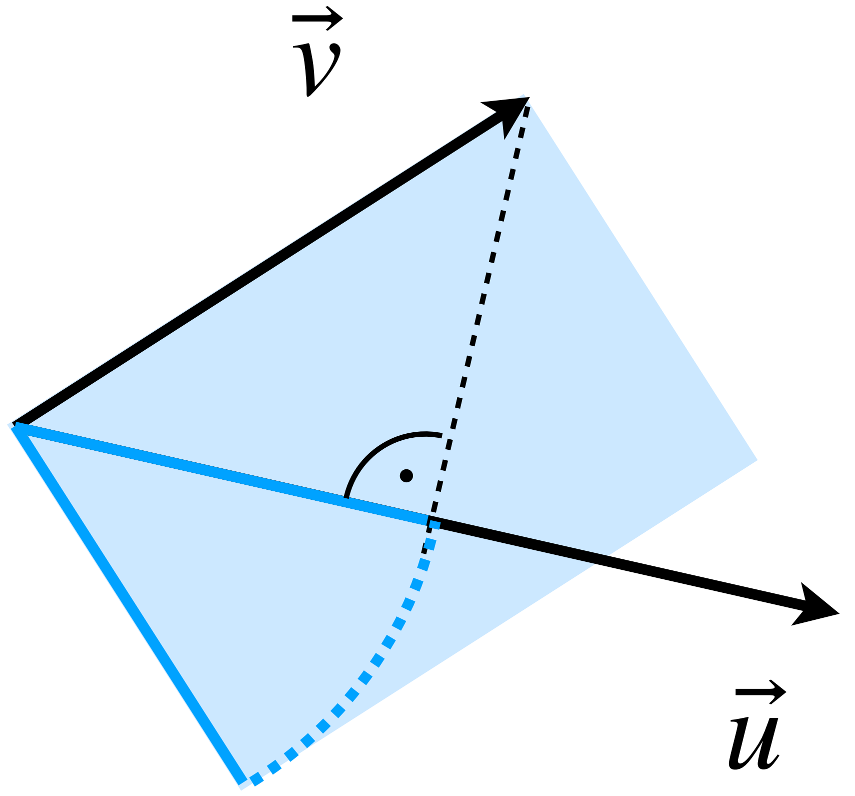
CC BY SA

1

Lagebeziehungen

Skalarprodukt

geometrischer Zugang



$$\left\langle \vec{u}, \vec{v} \right\rangle = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\left(\angle(\vec{u}, \vec{v})\right)$$

arithmetischer Zugang

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

$$\left\langle \vec{u}, \vec{v} \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$$

axiomatischer Zugang

positiv definite
symmetrische
Bilenearform

$$\left\langle \vec{u}, \vec{v} \right\rangle \geq 0 \quad \left\langle \vec{u}, \vec{u} \right\rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \mathbf{0}$$

$$\left\langle \vec{u}, \vec{v} \right\rangle = \left\langle \vec{v}, \vec{u} \right\rangle$$

$$\left\langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{w} \right\rangle = \left\langle \vec{u}, \vec{w} \right\rangle + \left\langle \vec{v}, \vec{w} \right\rangle$$

$$\left\langle \lambda\vec{u}, \vec{v} \right\rangle = \lambda \left\langle \vec{u}, \vec{v} \right\rangle$$

(Henn & Filler, 2015, 195 ff.)

CC BY SA

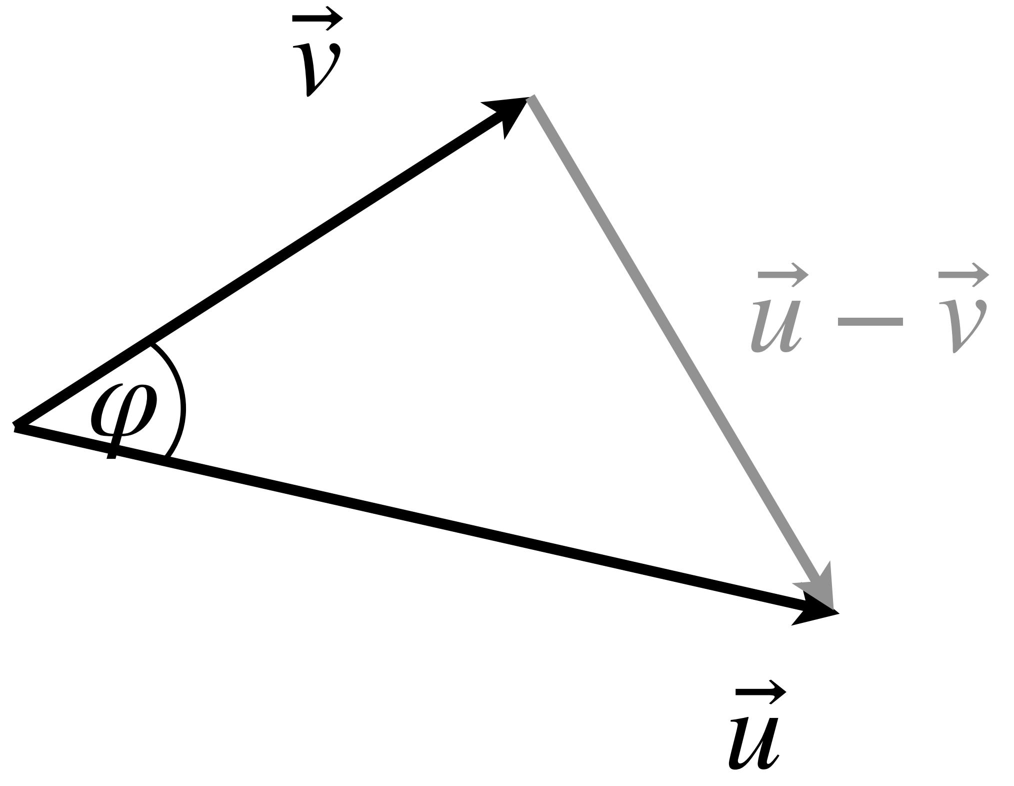
1

Lagebeziehungen

Skalarprodukt

geometrischer Zugang

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$$



$$|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + \ldots + u_n^2}$$

$$|\vec{u}-\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2 \cdot |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\varphi)$$

$$\sum (u_i^2 - 2u_iv_i + v_i^2) = \sum u_i^2 + \sum v_i^2 - 2 \cdot |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\varphi)$$

$$\sum u_iv_i = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\varphi)$$

$$\cos(\varphi) = \frac{\sum u_iv_i}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

(Henn & Filler, 2015, 195 ff.)

CC BY SA

1

Lagebeziehungen

Skalarprodukt

Schreibweisen

$$\langle \vec{u}, \vec{w} \rangle$$

$$\vec{u} \circ \vec{w}$$

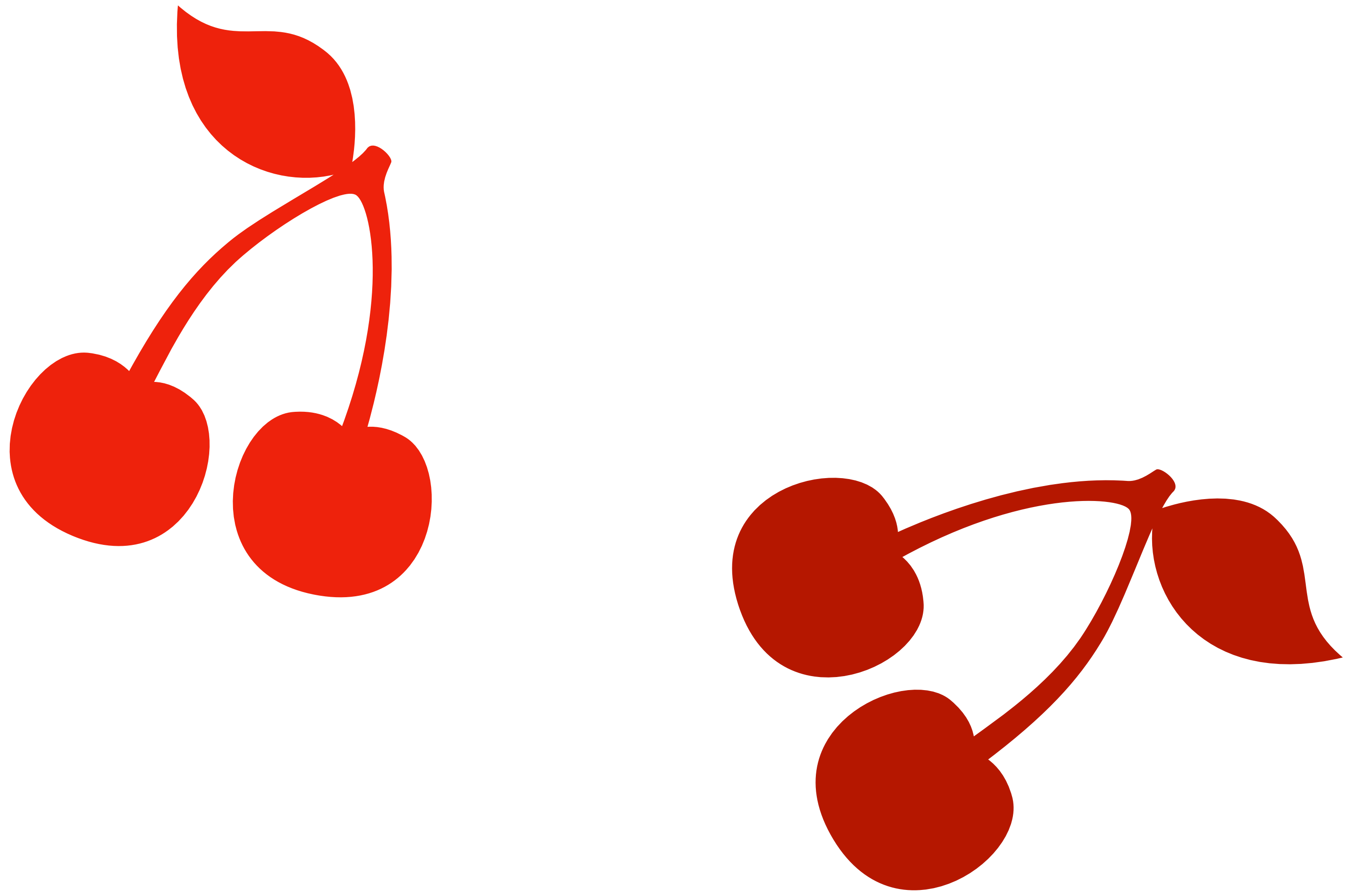
$$\vec{u} \bullet \vec{w}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{w}$$

2

Kongruenz

Kongruenz von Figuren



Relationsbegriff zwischen zwei Figuren

Kongruenzabbildung

$$f : E \to E$$

bijektiv, längentreu, winkeltreu, geradentreu

Verschiebung
Drehung
Spiegelung
Schubspiegelung

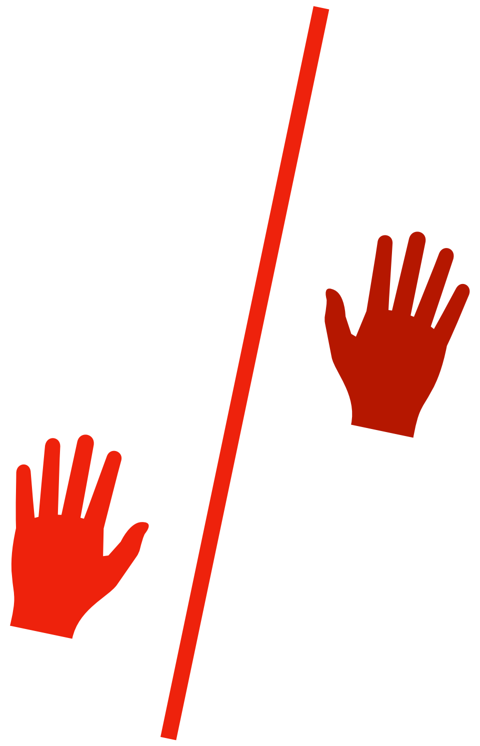


Abbildung der kompletten Ebene auf sich selbst

2

Kongruenzsätze

SSS SWS

WSW SsW

Begriff »Kongruenz«

Sachverhalt »Kongruenzsatz«

Verfahren »Dreieckskonstruktion«

Verstehen

Unter einer **Konstruktion** versteht man in der Mathematik die Zeichnung von Figuren aus gegebenen Stücken mithilfe bestimmter Zeichenwerkzeuge.

Schritte zur Konstruktion:

1 *Die Planfigur ist eine Skizze der Figur, in der die gegebenen Größen farbig markiert sind.*

2 *Die Zeichnung stellt die eigentliche Umsetzung der Konstruktion dar.*

3 *Die Beschreibung gibt in Stichworten an, mit welchen Schritten man die Zeichnung erhalten kann.*

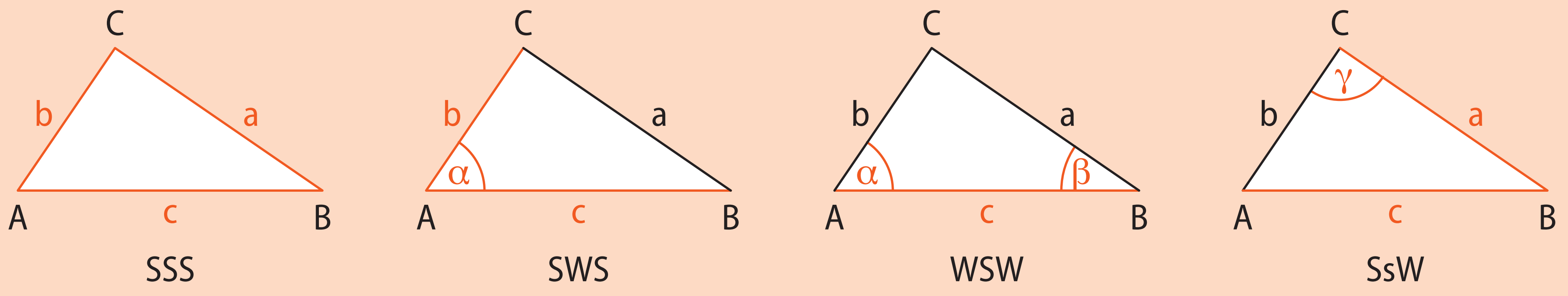
Die Sätze bezeichnet man auch als Kongruenzsätze für Dreiecke.

In der Regel sind als Konstruktionswerkzeuge nur Zirkel und Lineal zugelassen, das Geodreieck darf zum Winkelmessen benutzt werden. Eine Konstruktion besteht aus drei Schritten:

1 Planfigur **2** Zeichnung **3** Beschreibung

Für die Konstruktion von Dreiecken benötigt man drei Angaben, von denen eine eine Seitenlänge sein muss.
Dreiecke sind genau dann kongruent zueinander, wenn sie …

- in der Länge ihrer drei Seiten übereinstimmen (**SSS**).
- in der Länge zweier Seiten und der Größe des eingeschlossenen Winkels übereinstimmen (**SWS**).
- in der Länge einer Seite und der Größe der beiden anliegenden Winkel übereinstimmen (**WSW**).
- in der Länge zweier Seiten übereinstimmen und der Größe des Winkels, der der längeren Seite gegenüberliegt (**SsW**).



Beispiel

Gib den entsprechenden Kongruenzsatz an und konstruiere das Dreieck ABC.

a) $a = 3$ cm; $b = 4$ cm; $c = 3{,}5$ cm
b) $a = 4$ cm; $c = 3$ cm; $\beta = 40°$
c) $b = 3$ cm; $\alpha = 90°$; $\gamma = 30°$
d) $c = 3{,}5$ cm; $a = 3$ cm; $\gamma = 60°$

134

(Adam & Kleine, 2016, S. 134)

DGS-Einsatz

Dynamische Geometrie-Software

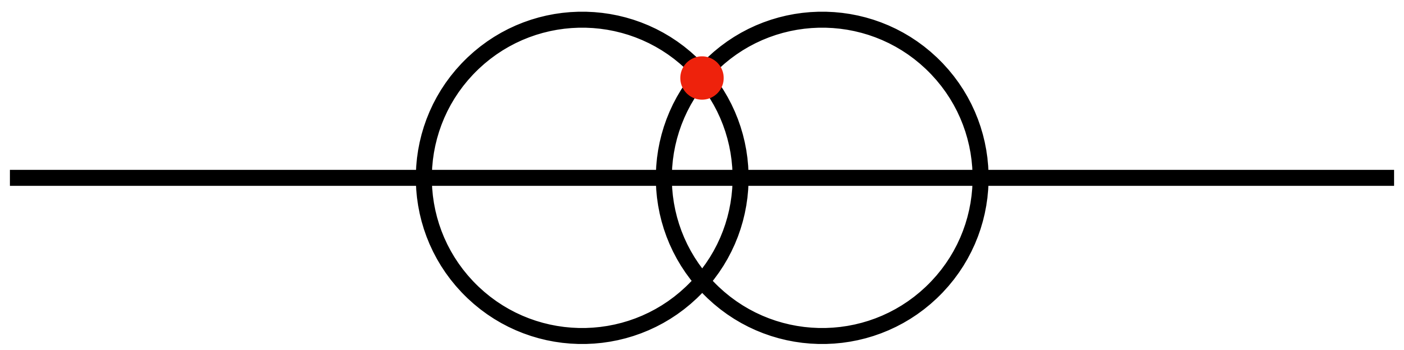
Tipp!
Euclidea

Zugstabilität

Figur (z. B. Parallelogramm) behält ihre Eigenschaften (Parallelität gegenüberliegender Seiten) auch dann, wenn einzelne Eckpunkte verschoben werden.

(vgl. Kortenkamp & Dohrmann, 2016)

deterministisches vs. kontinuierliches Verhalten

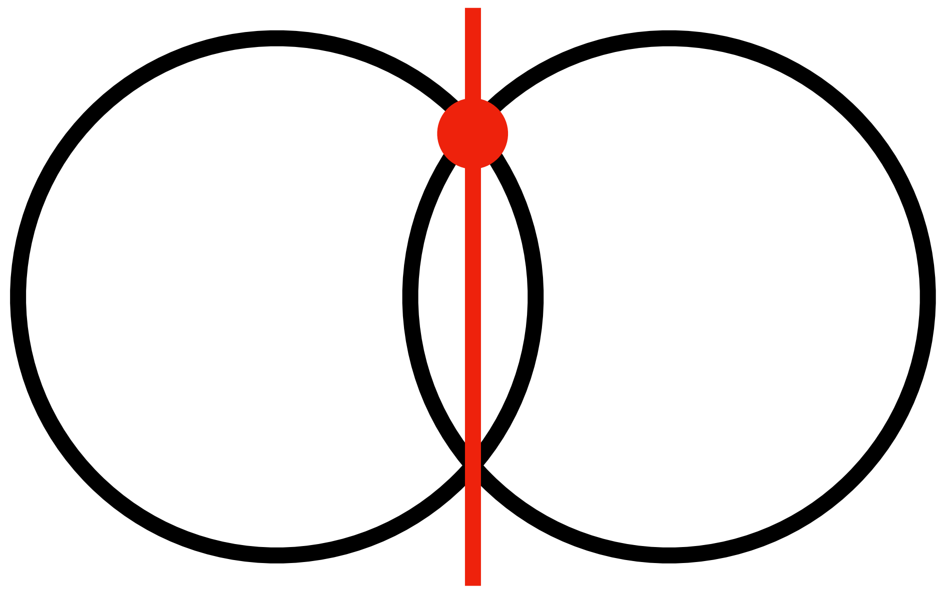


deterministisch: GeoGebra

kontinuierlich: Cinderella

(vgl. Labs, 2008, S. 57 ff.; Kortenkamp, 1999, S. 84 ff.)

Spuren und Ortslinien



Ortslinien als Menge aller Punkte, die eine bestimmte Eigenschaft erfüllen

CC BY SA

Literatur

Adam, V., & Kleine, M. (2016). *Mathe.delta: Mathematik für das Gymnasium 7, Berlin/Brandenburg* (1. Auflage). C.C. Buchner.

Etzold, H., & Petzschler, I. (2014). *Mathe verstehen durch Papierfalten*. Verlag an der Ruhr.

Euclidea [Software]. https://www.euclidea.xyz

Henn, H.-W., & Filler, A. (2015). *Didaktik der Analytischen Geometrie und Linearen Algebra: Algebraisch verstehen – Geometrisch veranschaulichen und anwenden*. Springer Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-662-43435-2

Kortenkamp, U. (1999). *Foundations of Dynamic Geometry* [Dissertation, ETH Zurich]. https://doi.org/10.3929/ETHZ-A-003876663

Kortenkamp, U., & Dohrmann, C. (2016). Vorwärts-Rückwärts zum Begriff. Konstruktion und Re-Konstruktion von Zugfiguren. *mathematik lehren*, *196*, 18–21.

Labs, O. (2008). *Dynamische Geometrie: Grundlagen und Anwendungen*. https://oliverlabs.net/data/0708_DynGeo.pdf

Weigand, H.-G., Filler, A., Hölzl, R., Kuntze, S., Ludwig, M., Roth, J., Schmidt-Thieme, B., & Wittmann, G. (2018). *Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I*. Springer Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-662-56217-8