Nim-Spiel – Handreichung für Lehrerinnen und Lehrer

Heiko Etzold, Günter Krauthausen

Version 1.0, Mai 2022; angepasst an Version 1.0 der Nim-App

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Der Nim-App liegt das bekannte **Nim-Spiel** zugrunde, ein sehr altes **Strategie-Spiel**, das es in zahlreichen Varianten gibt: mit Wegnehmen statt Legen, mit mehreren Stapeln usw. Der vorliegenden App liegt eine elementare Version zugrunde (vgl. Müller & Wittmann, 1984, S. 72–75; E. Wittmann, 1982), die ab der 1. Klassenstufe eingesetzt werden kann und auch bereits mit Vorschulkindern sowie Kindern mit besonderen Lernschwierigkeiten erfolgreich erprobt wurde (Scherer, 1996). Aber auch für Jugendliche und Erwachsene bietet das Spiel eine Herausforderung, wenn es darum geht, die Gewinnstrategie (siehe Abschnit 1.3) zu identifizieren und v. a. zu verallgemeinern. Im *Handbuch produktiver Rechenübungen* (E. Ch. Wittmann & Müller, 2017, S. 42 f.) heißt das Spiel »Rot gegen Blau«.

Die Nim-App steht kostenlos für iPads und Macs unter https://apps.apple.com/de/app/nim/id1590325148 zur Verfügung.

Die aktuelle Version dieser Handreichung bezieht sich auf die **Nim-App in der Version 1.0**.

Über diese Handreichung

> zitiere als: Etzold, H. & Krauthausen, G. (2022). Nim-Spiel – Handreichung für Lehrerinnen und Lehrer (Version 1.0). https://heiko-etzold.github.io/nim-material/de/1.0

Diese Handreichung umfasst:

- Kapitel 1: Erläuterung des Spiels, seiner Regeln und der Gewinnstrategie (für diverse variierte Parameter, inkl. einer Verallgemeinerung)
- Kapitel 2: Didaktische Hinweise zum unterrichtlichen Einsatz des Spiels (ohne und mit ergänzendem Einsatz der App)
- Kapitel 3: Beschreibung der Nim-App und ihrer möglichen Einsatzszenarien im Unterricht
- Anhang zu Hintergründen zum Nim-Spiel und zu technischen Hintergründen zur App

Diese Reihenfolge ist bewusst gewählt. Auch wenn bei der Entwicklung der App versucht wurde, möglichst viele jener Intentionen, Optionen oder Herausforderungen aus den beiden erstgenannten Punkten umzusetzen, so soll und kann die App kein Ersatz für eine sachgerechte

Einbetting in didaktische Kontexte (Unterrich) sein. Sie kann eine didaktisch sinnvolle Ergänzung darstellen – es wird aber aus- und nachdrücklich empfohlen, die in den Kapiteln 1 und 2 genannten Erfahrungen händisch und im physischen Kontext zu erwerben.

Wir sprechen in dieser Handreichung mal von Schülern, Spielern und Partnern, mal von Schülerinnen, Spielerinnen, Partnerinnen oder auch von Personen, Lernenden, Lehrkräften usw. Die jeweils anderen wollen wir damit selbstredend ebenso ansprechen. Auch die männlichen Lehrpersonen meinen wir immer mit, wenn wir von Lehrerinnen sprechen, die in der Grundschule die absolute Mehrheit darstellen. Alle mögen sich darüber freuen, dass der Text dadurch ein wenig lesbarer wird.

Lizenz und Versionen dieser Handreichung

Es ist sowohl möglich als aus erwünscht, das **Material frei zu nutzen, zu ändern, weiterzuentwickeln** und entsprechend zu veröffentlichen. Bei entsprechender Passung können Änderungen oder Ergänzungen auch direkt hier im Dokument aufgenommen werden, z. B. auch Übersetzungen – nehmen Sie dazu einfach Kontakt auf.

Die **Rohdaten** der Handreichung stehen unter https://github.com/heiko-etzold/nim-material zur Verfügung. Dort können, ensprechend eines Git-Respositorys, auch vorherige Versionen und die Änderungen verfolgt werden.

Eine Übersicht über alle Versionen der Handreichung kann unter https://heiko-etzold.github.io/nim-material eingesehen werden.

Dankeschön

Wir danken allen Personen und Institutionen, die uns bei der Entwicklung der Nim-App unterstützt haben.

- Bei den Übersetzungen haben uns unterstützt:
  - Arabisch: Sophie Abdulkarim-Hoerster & Raam Abdulkarim, Potsdam
  - Kölsch: Ruth Wolfram & Alice Herrwegen, Köln, Akademie för uns kölsche Sproch (https://www.koelsch-akademie.de) und Dieter Krauthausen, Köln (https://www.tonstudio-krauthausen.de)
  - Russisch: Karen Reitz-Koncebovski, Potsdam
  - Ukrainisch: Tania Kosenkova, Potsdam

- Die Praxiserprobungen haben unterstützt:
  - Boris Kolberg, Einrichtungsleitung Schulkindbetreuung, Salzhausen
  - Sylvia Kirsch, Lehrerin, und Kinder der Grundschule Salzhausen

1 Das Nim-Spiel

1.1 Spielregeln

1.1.1 Klassische Spielregeln

Zwei Personen spielen gegeneinander. Abwechselnd legen sie (beginnend links bei Feld 1) Plättchen ihrer Farbe sukzessive auf den Spielplan. Man darf wahlweise jeweils ein oder zwei Plättchen auf die freien Plätze legen. Gewonnen hat, wer das letzte Feld belegt.

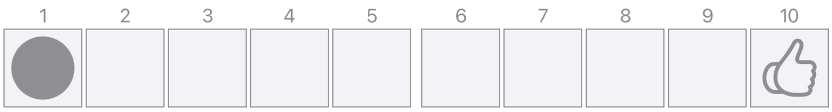

Abbildung 1.1: Spielplan mit 10 Feldern

1.1.2 Hinweise

- Das Nim-Spiel wird also immer von zwei[1] Personen gespielt.
- Die Spielregeln sind einfach und auch für **jüngere Kinder** unmittelbar zu verstehen.
- Der Pfiff: Dem Spiel liegt eine **Gewinnstrategie** zugrunde, d. h. dass man jedes Spiel zu *jedem* Zeitpunkt (!) des Spielverlaufs kontrollieren und damit auch *determinieren* kann, dass man sicher gewinnt – sofern man die Strategie kennt und ihr konsequent folgt.
- Ziel des Spiels ist es (zunächst), diese sichere Gewinnstrategie[2] zu erkunden, sowie erklären und begründen zu können.

Im Abschnitt 1.3 wird die Gewinnstrategie für den o. g. konkreten Fall und für diverse Regelvariationen bis hin zum allgemeinen Fall entwickelt und dargestellt. Es ist aber sehr zu empfehlen, sich zuvor **ausdauernde Selbsterfahrungen** mit diversen konkreten Spieldurchgängen zu gönnen.

[1]Weitere Personen, die eine Weile die Spielverläufe *beobachtend* verfolgen, können sich aber gedanklich ebenso an der Suche nach der Gewinnstrategie beteiligen.

[2]Wenn eine der spielenden Personen die Strategie kennt und beherrscht, verliert das Spiel natürlich – zunächst jedenfalls! – seinen Reiz. Neue Herausforderungen – auch für ältere Schülerinnen und Schüler und Erwachsene – stellen sich aber ad hoc ein, wenn man sich auf die verschiedenen Variationen einlässt (vgl. Abschnitte 1.3.2 bis 1.3.6)!

Versuchen Sie also zunächst, die Gewinnstrategie möglichst selbst herauszufinden – zumindest für den Fall der Feldlänge 10 und der Legeanzahl zwei Plättchen, denn:

- Selberfinden ist immer ergiebiger und bietet ein größeres **Spielvergnügen** als Vorgegebenes nur nachzuvollziehen (und dann manchmal nur irrtümlich zu glauben, man hätte das Prinzip verstanden).
- Ein eigener Erfahrungshintergrund – durchaus mit Aufs und Abs – ist sehr wertvoll, um als Beobachterin oder Beobachter die Spielverläufe anderer, z. B. Ihrer Schülerinnen und Schüler, einschätzen und ggf. sachgerechte **Hilfen oder Impulse** anbieten zu können.

Beobachten Sie sich selbst[3] gezielt daraufhin, wie Sie sich in einzelnen Phasen verhalten:

- Wie gehen Sie selbst vor? Wie reagieren Sie auf die Lege-Aktionen der Spielpartnerin/des Spielpartners?
- Welche Vermutungen haben Sie im Hinblick auf eine Gewinnstrategie?
- Wie prüfen Sie deren Gültigkeit?
- Wann geht Ihre Geduld oder Ausdauer zu Ende? Woran liegt das Ihrer Meinung nach? Wie viele Spieldurchgänge haben Sie realisiert?
- Wie könnten Sie einen anderen Ansatz finden?

Alle diese Fragen sind nicht nur in diesem Rahmen Ihrer Selbsterfahrungen relevant und hilfreich, sondern in gleicher Weise für die Organisation der Lernprozesse rund um das Nim-Spiel im Unterricht.

1.2 Typische Phasen im Spielverlauf

1.2.1 Freies Spielen

Zunächst werden – unbeschwert und noch wenig strategisch – **mehrere Spieldurchgänge** unternommen. Diese Phase ist nicht gering zu schätzen! Einerseits liefert sie den beschriebenen **Erfahrungshintergrund** für die folgende bewusstere Auseinandersetzung, und andererseits dient sie (v. a. bei jüngeren Kindern) der **Festigung der Spielregeln**. Insbesondere Kinder neigen in dieser Phase auch dazu, akribisch den Spielstand im Blick zu behalten (»Bei uns steht es 6:4!«), obwohl es um den eigentlich am wenigstens geht.

1.2.2 Erste Vermutungen

Bald werden auch **Ideen** darüber geäußert, **was wohl für das Gewinnen oder Verlieren verantwortlich sein könnte**. Diese sind anfangs noch wenig argumentativ durchdrungen oder abgesichert; sie beruhen eher auf spontanen Assoziationen, evoziert durch situativ Erlebtes wie einen gerade gewonnenen Spieldurchgang. Amüsanter – für Erwachsene, denn für

[3] Diese Beobachtung kann auch eine dritte, nicht mitspielende Person übernehmen/protokollieren.

Kinder kann auch das eine ernst gemeinte, wenn auch »magische« Vermutung sein – wirkt die Bitte: »Jetzt möchte ich aber mal die blauen Plättchen haben!«

1.2.3 Gezieltere Analyse

Nach einer gewissen Zahl von Spieldurchgängen – und diese kann, je nach Ausdauer, eine beträchtliche Variation aufweisen! – wird dann eine Position (**Gewinnposition**) auf dem Spielplan augenfällig (erkennbar am Stutzen oder großen Augen), ab der man mit Gewissheit sagen kann, ob man verlieren oder gewinnen wird. Auf dem Spielplan bis 10 ist das die Position 7. Denn wie die Abb. 1.2 zeigt, gibt es ab dann nur noch zwei Optionen für den bereits feststehenden Sieger: Entweder sein Spielpartner legt ein rotes Plättchen, dann gewinnt Blau mit zwei gelegten Plättchen. Oder der Spielpartner legt zwei rote Plättchen, dann belegt Blau mit einem Plättchen die 10 und gewinnt. Die Abbildung ist auch eine praktikable Darstellungsweise für eine Begründung im Unterricht.

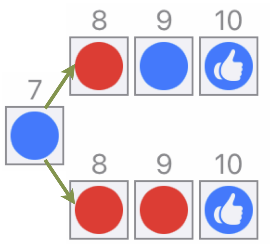

Abbildung 1.2: Gewinnposition 7

Auffällig ist an dieser Stelle – übrigens sowohl bei Erwachsenen als auch bei Grundschulkindern –, dass mancher sich hier bereits am Ziel wähnt, wenn die 7 als Gewinnposition identifiziert wurde. Man bedenke aber die Spielregeln, insbesondere Punkt 3 der eingangs genannten Hinweise: Nicht erst hier bei der 7 soll man wissen, dass/ob man gewinnen wird, sondern zu *jedem Zeitpunkt* des Spielverlaufs! Das meint im Prinzip: **Gleich zu Spielbeginn** und nicht erst vor der letzten Gewinnposition **kann man sein Gewinnen abschätzen**. Ansonsten würde dies ja (erst recht bei längeren Spielplänen) auch die Frage aufwerfen, ab wann man denn seine Aufmerksamkeit darauf fokussieren sollte, dass die erkannte Gewinnposition näher rückt und wie man sich dann verhalten sollte.

1.3 Gewinnstrategie

1.3.1 Ausgangsparameter

Feldlänge 10 – Legezahl 2 – letztes Feld gewinnt

Wie kann es nach der Identifikation der 7 als Gewinnposition weitergehen, wie bringt man sich also *garantiert* in die Lage, die 7 belegen zu können?

Mit einem Blick auf Abb. 1.2 lässt sich erkennen, dass die Konstellation zwischen den Positionen 10 und 7 ganz entsprechend auch zwischen den Positionen 7 und 4 auftritt: Wer die 4 belegen kann, hat mit der gleichen Argumentation auch die Position 7 für sich gesichert. Und wie sichert man sich die Position 4? Über die wiederum gleiche Argumentation für die Positionen 4 und 1. Mit anderen Worten: Wer die 1 belegt, hat die 4 sicher, damit auch die 7 und schlussendlich auch die 10 und damit gewonnen (siehe Abb. 1.3).

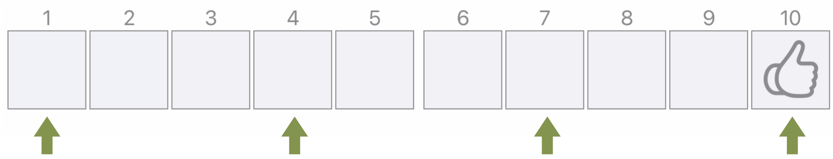

Abbildung 1.3: Gewinnstrategie

Somit lässt sich als Zwischenergebnis festhalten:

> Um zu gewinnen, muss man selbst anfangen, und zwar mit dem Legen eines Plättchens. Dann muss man die 4 und die 7 belegen, um mit der 10 zu gewinnen.

Warum ist das nur ein Zwischenergebnis? Nun, eine Information fehlt noch: Wie reagiert man auf das Lege-Verhalten des Spielpartners? Die Frage mutet an dieser Stelle vielleicht etwas seltsam an, weil man die wenigen Gewinnpositionen (1, 4, 7) gut übersehen und damit zielsicher auf jede Legeweise reagieren kann. Im Hinblick auf weitere Variationen der Spielparameter (s. u.) und v. a. im Hinblick auf ein generelles, *verallgemeinerbares* Verständnis der Gewinnstrategie macht die Frage aber Sinn. Somit lautet die präzisierte, abschließende Gewinnstrategie für den vorliegenden Fall:

> Um die 10 mit Sicherheit zu erreichen, muss man auch die Positionen 7, 4 und 1 belegen. Daher muss man selbst beginnen und zwar mit 1 Plättchen.
>
> Während des Spielverlaufs reagiert man auf die Züge des Spielpartners stets »gegensätzlich« (in Anführungszeichen, weil 1 ja nicht das Gegenteil von 2 ist und umgekehrt): Legt er 1, legt man selbst 2 und umgekehrt.

Die bisher erläuterte Gewinnstrategie kann man, wenn es sein müsste, auch rezepthaft lernen, ohne verstanden zu haben, warum die Regel so lauten muss. Und auch die Tatsache, dass man das bisher Gesagte durchweg plausibel finden kann und glaubt, verstanden zu haben, kann trügerisch sein! *Wirkliches* Verständnis der dem Spiel zugrunde liegenden Struktur lässt sich nämlich u. a. daran überprüfen, ob und inwieweit man das Wissen auf andere, variierte (aber strukturgleiche) Situationen übertragen und adaptieren kann. **An welchen »Stellschrauben« des Spiels könnte man drehen?** Es sind die *konstituierenden Bestandteile* des Kontextes:

- Spielplanlänge/*Feldlänge* F – hier: bis 10, lässt sich variieren zu $F > 10$,

- erlaubte *Legezahl L* – hier: bis 2, lässt sich variieren zu $L > 2$,
- letztes Feld *gewonnen* – lässt sich variieren zu letztes Feld *verloren*.

Man kann entweder, wie unten zu sehen, nur einen Parameter verändern, alle anderen bleiben gleich. Oder man verändert mehrere Parameter. Im Hinblick auf die **Strukturerkenntnis** ist es sinnvoll, zunächst nur mit einem Bestandteil zu »spielen«, um seinen Einfluss/Effekt zu isolieren. Würde man mehrere Parameter gleichzeitig verändern, wäre nur schwer entscheidbar, welcher Effekt auf welche Veränderung zurückzuführen ist.

1.3.2 Variation der Feldlänge

Feldlänge 15 (20) – Legezahl 2 – letztes Feld gewinnt

Dieser Abschnitt behandelt eine **Variation der Feldlänge** um ein weiterhin überschaubares Maß auf 15 (bzw. 20). Die Erfahrungen der ersten Version voraussetzend, lässt sich dann Folgendes festhalten:

- Um die 15 (resp. 20) garantiert zu erreichen, müssen auch die vorherigen Gewinnpositionen 12, 9, 6 und 3 (resp. 17, 14, 11, 8, 5 und 2) belegt werden. Folglich gilt:
- Bei Feldlänge 15 darf man nicht selbst beginnen. Bei Feldlänge 20 muss man selbst beginnen, und zwar mit 2 Plättchen.
- Im Spielverlauf legt man immer 1 Plättchen, wenn der Spielpartner 2 legt und umgekehrt.

Damit lassen sich aus Gemeinsamkeiten und Unterschieden zur ersten Version die Erkenntnisse wie folgt präzisieren:

Die Gewinnpositionen liegen in allen betrachteten Fällen gleich weit auseinander (drei Felder). Man findet sie, indem man von der letzten Gewinnposition in Dreierschritten rückwärts schreitet. Ein »kompletter« Dreierschritt (in Abb. 1.4 als Rahmen markiert) besteht immer aus einem eigenen Zug und einem Zug des Spielpartners. **Um zu gewinnen, sollte jeder Rahmen tunlichst mit dem Zug des Spielpartners beginnen, damit man selbst dann den Rahmen voll machen kann.**

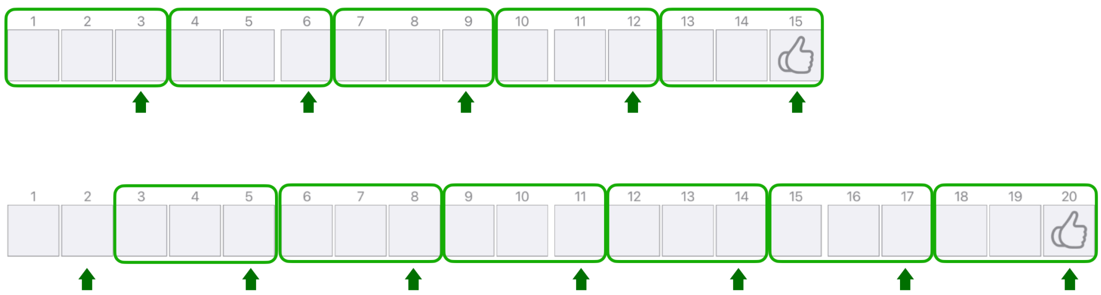

Abbildung 1.4: Gewinnstrategie bei 15 bzw. 20 Feldern

Was bedeutet dies aber für den Spielbeginn? Um diesen zu kontrollieren, reicht es aus, auf den ersten Dreierschritt zu fokussieren:

> **Bei Feldlänge 15** beginnt das Spiel mit einem »kompletten« Dreierschritt. Man selbst muss sich also, um die 3 als erste Gewinnposition zu erreichen, »großzügig« zeigen und dem Spielpartner die Spiel-Eröffnung überlassen, was er wahlweise mit 1 oder 2 Plättchen tun kann; ab dann »bleibt alles im Rahmen«.
> **Bei Feldlänge 20** beginnt das Spiel nicht mit einem kompletten Dreierschritt – vielmehr steht dem hier ein überzähliger Rest vor. Um zu gewinnen, muss man nun selbst zunächst diesen »Überstand« für sich vereinnahmen, um danach die gewohnten Dreierschritte der Rahmen abarbeiten zu können. Man muss also selbst beginnen und genau 2 Plättchen (den Rest) legen.

1.3.3 Variationen Status letztes Feld

> Feldlänge 10 (15, 20) – Legezahl 2 – letztes Feld verliert

Die **Status-Variation** des letzten Feldes besagt: Wer das letzte Feld belegt, hat nun **verloren**. Die Erfahrungen aus den ersten beiden Versionen voraussetzend, lässt sich dann Folgendes festhalten:

- Die letzte Gewinnposition lautet nun 9 (resp. 14, 19).
- Um die 9 (resp. 14, 19) mit Sicherheit zu erreichen, muss man auch die 6 und die 3 (resp. 11, 8, 5 und 2 bzw. 16, 13, 10, 7, 4 und 1) belegen. Folglich gilt:
- Bei Feldlänge 10 darf man nicht selbst beginnen. Bei Feldlänge 15 muss man selbst beginnen, und zwar mit 2 Plättchen. Bei Feldlänge 20 muss man ebenfalls selbst beginnen, und zwar mit 1 Plättchen.

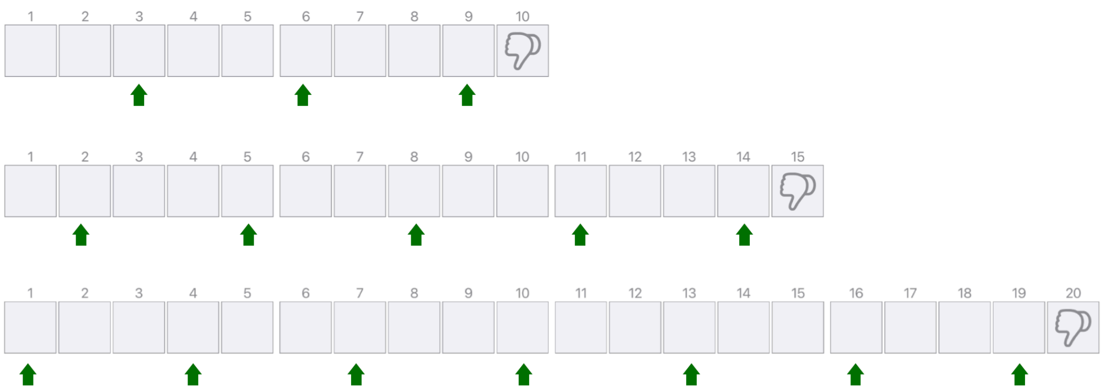

Abbildung 1.5: Gewinnstrategie, wenn letztes Feld verliert

Zwischen-Fazit:

> Die zuvor gewonnenen Erkenntnisse – über die Dreierschritte, wie sie »abgearbeitet« werden müssen, wer beginnen soll oder nicht darf – konnten prinzipiell aus den bisherigen Versionen des Spiels auf diese Variation übertragen werden (Transfer).
>
> Bei der Status-Variation des letzten Feldes schlägt sich der Austausch von *gewonnen/verloren* lediglich in einer Verschiebung der Dreierschritte um 1 Feld nach links nieder, denn jetzt ist – unabhängig von der Feldlänge – nicht das letzte, sondern das vorletzte Feld die letzte Gewinnposition.

1.3.4 Variation der Legezahl

> Feldlänge 20 – Legezahl 3 (bzw. 4) – 20 gewinnt

Dieser Abschnitt betrifft den dritten und letzten Parameter, die **Variation der maximal erlaubten Legezahl**. Die Erfahrungen aus den ersten drei Versionen voraussetzend, lässt sich dann Folgendes festhalten:

- Mit der maximalen Legezahl von 3 (bzw. 4) Plättchen beträgt die Schrittweite 4 (bzw. 5).
- *Allgemein* gilt für das Verhältnis zwischen Legezahl L und Schrittweite S stets: $S = L + 1$

Begründung: Ein »kompletter« Schritt (die Schrittweite) besteht aus genau einem Zug des Spielpartners und genau einem eigenen Zug (symbolisiert durch den Rahmen in Abb. 1.4). Der eigene Zug schließt dabei jede Schrittweite ab, komplettiert also den Rahmen.

Daher darf die dem Spielpartner maximal erlaubte Legezahl nicht so groß sein, dass er die nächste Gewinnposition erreichen könnte. Anders ausgedrückt: Es muss nach dieser maximalen Legezahl durch den Spielpartner noch genau ein Feld frei bleiben, das man selbst belegen kann, und das sollte eine Gewinnposition sein. Daher ist die Schrittweite stets um 1 größer als die maximale Legezahl.

Das ursprünglich erwähnte Rezept, stets »das Gegenteil« zu tun, funktioniert hier nun nicht mehr, ganz abgesehen davon, dass die Formulierung ja vorher bereits recht unpräzise war, weil 1 und 2 keine »Gegenteile« voneinander sind. Auch hier lässt sich also jetzt präzisieren:

> Im gesamten Spielverlauf ergänzt man stets die Legezahl des Spielpartners auf die Schrittweite, also den Wert »Legezahl plus 1«.
>
> Der Beginn des Spiels muss so gestaltet werden, dass man selbst die erste Gewinnposition sicher belegen kann.

1.3.5 Sehr große Feldlängen und Legezahlen

> Feldlänge 1000 – Legezahl 23 – letztes Feld gewinnt

Dieser Abschnitt zielt auf eine **zunehmende Verallgemeinerung der Gewinnstrategie**. Die bisherigen Erkenntnisse ließen sich allesamt durch konkretes Ausprobieren gewinnen und am Material anschaulich begründen. Das ist im Hinblick auf Unterricht ein Vorteil, denn diese Vorgehensweisen stehen auch bereits Grundschulkindern offen.

Mit der folgenden Variation soll diese empirische Praxis aber an ihre Grenzen geführt werden, um die *allgemeine Struktur* des Nim-Spiels aufzuklären. Die zunehmende Komplexität der Parameter verweist also auf leistungsfähigere Strategien als das empirische Ausprobieren. Und leistungsfähig meint zum einen eine ökonomischere Praxis als das tatsächliche Durchspielen; und zum anderen ein Verfahren, dass insofern *verallgemeinerungsfähig* ist, sodass man nicht für jede Regel-Variation eine erneute Erkundung benötigt, sondern sogleich sagen kann, was Sache ist.

Alles Erforderliche, um für die nach der Überschrift genannte Konstellation ohne konkrete Spielhandlungen oder umfangreiche Skizzen zum Ziel zu kommen, wurde bereits zuvor erkannt: Erkenntnisse zur Schrittweite zwischen den Gewinnpositionen, die Identifikation aller Gewinnpositionen, wer auf welche Weise mit dem Legen beginnen sollte und wie man auf die Lege-Aktionen des Mitspielers reagiert. Das bedeutet:

- Die maximale Legezahl $L = 23$ bedeutet eine Schrittweite zwischen den Gewinnpositionen von $L + 1 = 24$.
- Da das Feld 1000 eine Gewinnposition ist, müsste dort beginnend sukzessive immer wieder 24 subtrahiert werden, um die Folge der Gewinnpositionen zu erhalten.

Das ist bei diesen großen Zahlen aber erstens mühsam, und zweitens gar nicht notwendig. Das Verständnis von Rechenoperationen ausnutzend, versteht sich die **Division als verkürzte Subtraktion**.

Beispiel: Um die 20 mit Dreierschritten aufzufüllen, könnte man bei 20 beginnend schrittweise immer wieder 3 subtrahieren: $20 - 3 - 3 - 3 - 3 - 3 - 3$, um zu sehen, dass es sechs Mal geht und dann 2 übrig bleiben. Dieses Vorgehen lässt sich verkürzen durch die Frage: Wie oft passt die 3 in die 20? Und das lässt sich mit Hilfe der Division $20 : 3 = 6$ Rest 2 beantworten.

Die Frage, wie oft ein 24er-Schritt in die Feldlänge 1000 passt, führt also zur Rechnung $1000 : 24 = 41$ Rest 16. Das heißt:

> 41 Mal können 24er-Schritte (Rahmen in Abb. 1.4) kontrolliert ablaufen. Vorab muss nur der überzählige Rest (hier 16) »gesichert« werden, bevor der Spielpartner mit dem ersten 24er-Schritt beginnt. Mit anderen Worten:
>
> Man muss selbst beginnen, und zwar mit 16 Plättchen (dem berechneten Rest).

Was aber tut man dann weiterhin, zwischendurch ...? Wie in der letzten Version gesehen, braucht man weder alle Gewinnpositionen der 24er-Schritte ab 1000 rückwärts zu kennen noch sich zu merken!

> Während des weiteren Spielverlaufs achtet man auf die gelegte Anzahl des Spielpartners und ergänzt diese mit dem eigenen Zug auf den Wert der Schrittweite (hier: 24). Man landet dann automatisch auf einer Gewinnposition – und zwar ohne dass man sie namentlich kennen oder erinnern müsste!

Beispiel: Legt der Spielpartner 10 Plättchen, legt man selbst 14; legt der Spielpartner 2, reagiert man selbst mit 22 usw. Selbst bei einer vergleichsweise großen maximalen Legezahl wie etwa 24 sind solche Ergänzungsaufgaben immer noch leicht im Kopf zu erledigen.

1.3.6 Allgemeine Gewinnstrategie

Das bisher Erkannte erlaubt nun die Verallgemeinerung der Gewinnstrategie für beliebige Feldlängen F, beliebige Legezahlen L und ein beliebiges *gewonnen*/*verloren* für das letzte Feld:

1. Man dividiere die Feldlänge F (bzw. $F - 1$, wenn das letzte Feld *verliert*) durch die Schrittweite $S = L + 1$ und schaue, ob diese Division einen Rest R ergibt: $F : (L + 1) = \dots?$
2. Ist der Rest Null, dann sollte der Spielpartner beginnen. Ansonsten muss man selbst beginnen, und zwar mit R Plättchen.
3. Im weiteren Verlauf ergänzt man die Legezahl des Spielpartners durch den eigenen Zug stets auf die Schrittweite $L + 1$.

2 Didaktische Empfehlungen

2.1 Material & Einführung

Zur Einführung des Spiels empfiehlt sich die Variante mit Feldlänge 10 (oder 15) mit einer überschaubaren maximalen Legezahl von zwei Plättchen (siehe Abschnitt 1.3.1). Der Grund ist ein pragmatischer:

Bevor die Spielpartner *gezielt* nach einer Gewinnstrategie suchen, also während des noch freien Experimentierens, ist das Ereignis-Fenster zwischen Spiel-Eröffnung und dem Erkennen der vorletzten Gewinnposition *wenig ergiebig*. Das Augenmerk kann erst in späteren Phasen hierauf gerichtet werden, wenn zunehmend mehr Bewusstheit und Zielorientierung ins Spiel kommen wird. Daher sollten die **anfänglichen Spieldurchgänge nicht zu viel Zeit** durch zu lange Feldlängen absorbieren. Eine Feldlänge von 10 ermöglicht auch eher einen gewissen Überblick sowie Erinnerungsleistungen (»Eben hatte ich doch auch schon mal die 4 …!«).

Es hat sich immer wieder bewährt, das Spiel zunächst einmal entweder mit einem Kind vor der ganzen Klasse vorzuspielen, oder als Lehrperson alleine gegen die ganze Klasse, was einen zusätzlichen Motivationseffekt mit sich bringen kann, weil die Lehrperson ja in Kenntnis der Strategie erwartbar gewinnen wird.

Man kann dazu ein Stück Tapetenbahn mit aufgezeichnetem Spielfeld nutzen, um tatsächlich mit haptischen, analogen Erfahrungen zu beginnen (abgesehen vom unten beschriebenen Vorteil …). Damit alle Kinder die Spielregel lernen und verinnerlichen, müssen sie zunächst einige »Probespiele« erleben. Die Lehrerin kann dazu gegen das eine oder andere Kind spielen oder wie gesagt gegen die ganze Klasse – in der Frontalphase für alle sichtbar, damit sich die Spielregeln einprägen können.

2.2 Behutsame Fokussierung

Im Hinblick auf das mittelfristige Unterrichtsziel, eine Gewinnstrategie herauszufinden, gibt es dann **zwei prinzipielle Vorgehensweisen**. Beiden gemeinsam ist, dass die Kinder nach der Frontalphase und nachdem die Spielregeln verstanden sind, zu zweit auf eigenen Spielplänen spielen. Für beide Varianten gibt es pro & contra-Argumente.

Variante A

Man lässt die Kinder im freien Spiel agieren, solange bis erste Beobachtungen formuliert werden (etwa dass die 7 eine wichtige Rolle spielt). Alsdann erfolgt (mithilfe entsprechender Impulse) entweder eine Ermunterung, noch mehr zu entdecken, oder es wird (erst dann) verraten, dass es eine Gewinnstrategie gibt, die es nun zu entdecken gilt.

Bei diesem Vorgehen wird viel Wert auf das sog. **freie Spiel** gelegt, ein wichtiges pädagogisches Argument u. a. aus der Spieltheorie. Oft beobachtete Nachteile: Es kann u. U. recht lange dauern, bis die erwarteten Effekte des Stutzens und der ersten Vermutungen eintreten. Derweil spielen die Kinder nicht selten recht oberflächlich und planlos, legen die Plättchen hektisch auf das Spielfeld und achten vorrangig auf die Spielstände (»Wer hat wie oft gewonnen?«) – was ja im Hinblick auf das Ziel der Einheit eigentlich völlig nebensächlich ist. Dennoch kostet diese Phase unweigerlich Konzentration, die dann hinterher für die fokussierte Auseinandersetzung mit dem eigentlichen Kern der Sache fehlt. Gerade in den ersten Grundschulklassen kann dies die Kinder schnell an ihre Grenzen führen.

Variante B

Bevor die Kinder in die Partnerarbeit gehen, wird ihnen explizit mitgeteilt (Zielorientierung), dass es eine Gewinnstrategie gibt, die es nun zu suchen gilt.

Diese Variante beginnt mit einer **transparenten Zielorientierung**. Das nimmt den Kindern nicht die konkreten Spielerfahrungen, denn auch in diesen Fällen zeigen sie in der Regel große Ausdauer (20 bis 30 Durchgänge sind keine Seltenheit). Und die ersten Versuche sind auch noch ähnlich planlos wie in der Variante A.

Aber die *Wahrnehmungrichtung* ist bereits fokussiert: Die Kinder wissen, um was es anschließend gehen wird. Und so können sie selbst den Zeitpunkt bestimmen, wann eine bewusstere, zielorientierte Auseinandersetzung einsetzt. Weiterer Vorteil: Die Spiele haben weniger einen Wettkampf-Charakter, bei dem man gegeneinander spielt. Im Rahmen der Zielorientierung wird es gar als ausdrücklicher Auftrag formuliert, dass man *gemeinsam* nach der Gewinnstrategie fahnden soll. Dann spielt es eben auch für viele Kinder eine untergeordnete Rolle, ob es 6:2 oder 6:5 steht.

2.3 Risiko …!

Herausfordern

In eigenen Unterrichtserprobungen hat einer der Autoren stets so begonnen, dass er nach dem Erklären der Spielregel gegen die gesamte Klasse antrat. Im Hinblick auf den Motivationsaufbau zum Aufsuchen einer Gewinnstrategie ist es dabei hilfreich, wenn man diese **Probespiele**

»gegen« die Klasse allesamt gewinnt. Denn dann wird das entweder den Kindern von alleine schon suspekt vorkommen, sodass sie einen »Trick« dahinter vermuten. Oder man kann bereits hier die plausible Zielorientierung liefern, indem man zugibt, einen Wissensvorsprung zu haben, den es aufzuklären gilt.

Motivieren

Das wird viele Kinder motivieren, dieses Wissen ebenfalls zu erwerben, v. a. wenn man ihnen in Aussicht stellt, dass auch sie dann **jedes Spiel gewinnen** würden – vorausgesetzt natürlich, sie spielen es gegen jemanden, der die Strategie nicht kennt.

Eine Lehrerin hat seinerzeit berichtet, dass sie danach Anrufe von zahlreichen Eltern erhalten habe, die darüber berichteten, dass die Kinder jeden, aber auch jeden, der ihnen zu Hause über den Weg laufen würde, zum Nim-Spiel aufforderten, um dann ihren »Trick« auszuspielen und sämtliche Erwachsene zu besiegen. Ein beeindruckendes Beispiel für den Motivationsfaktor *Könnens-Erfahrung*.

Aber zurück zum möglichen Risiko: Als Lehrperson kennt man ja die Gewinnstrategie (mit 1 Plättchen beginnen und dann 4 und 7 anzielen), was soll da also schief gehen? Dass es vorkommt, dass die Kinder die Farben der Plättchen mit Ihnen tauschen wollen, kann man ja ganz souverän akzeptieren. Aber den Kindern wird es vermutlich auch bald auffallen, dass immer nur die *Lehrperson* beginnt.

»Souverän« bleiben

Auch in dieser Situation kann man Souveränität ausstrahlen und »selbstverständlich« auch mal die Klasse beginnen lassen. Denn wenn die Kinder dann als erstes 2 Plättchen legen, ist einem ja die 4 und damit der Sieg wieder sicher. Beginnen die Kinder allerdings mit 1 Plättchen (Achtung: Gewinnposition!), dann ist die Feldlänge 10 i. A. *lang genug*, dass man entweder vielleicht doch noch die 4 erreichen kann, oder zumindest die 7.

Aber gleichzeitig ist die Feldlänge 10 auch *so kurz*, dass das eben auch mal schief gehen kann und die Lehrperson verliert. In dem Fall ist sicher eine kleine »didaktische Schummelei« erlaubt: Die Lehrperson stutzt, zeigt sich irritiert und entschuldigt sich, »weil ich gerade etwas unkonzentriert war«. Weitere Probespiele mag man dann ja wieder gewinnen.

Und selbst im *Worst Case*, dass die Kinder grundsätzlich und mit 1 Plättchen beginnen wollten, hat man damit noch lange nicht die Gewinnstrategie enttarnt, sondern nur einen ganz kleinen Teil. Das Risiko, damit zwischendurch doch immer mal wieder verlieren zu können, ist jedenfalls zu hoch und rechtfertigt auch nicht den Begriff der Gewinnstrategie, den man ja auch als solchen den Kindern transparent machen sollte.

2.4 Vorschnell vermeintlich am Ziel

Das siebte Feld als relevante Position erkannt zu haben, führt, ein häufig zu beobachtendes Phänomen, nicht selten zur (vorschnellen) Zufriedenheit. Man hält die Aufgabe für gelöst, die Gewinnstrategie für erkannt, was aber angesichts der eingangs genannten Definition des Begriffs »Gewinnstrategie« leider noch nicht der Fall ist.

Wie aber motiviert man Kinder an dieser Stelle dazu, dennoch »dranzubleiben« und weiter zu denken? Die Rückmeldung »Das ist noch nicht alles« ist dazu weniger geeignet, weil sie das Augenmerk auf Defizite lenkt und wenig Mut macht. Ein erfahrungsgemäß wirksameres Vorgehen ist das folgende:

Hier kommt der o. g. Spielplan in Form der angesprochenen Tapetenbahn wieder in den Blick: Für die Kinder ist es durchaus plausibel, die Bahn nach der Erkenntnis der Position 7 hinter dieser Position nach unten weg zu falten; schließlich ist ja bei der 7 »alles klar«.

Der Frage »Wie kommt man denn auf die 7?« lässt sich nachgehen, indem bislang gewohnte Spiel-Erfahrungen weiter aktiviert werden; es bedarf keiner neuen Überlegungen. Auch Kinder mit Lernschwierigkeiten können hier wie zuvor mittun. Vergleichsweise schneller als zuvor bei der 7 können die Kinder auf der verkürzten Bahn die Bedeutung der Position 4 herausfinden. Und noch zügiger wird die 1 erkannt, wenn der Spielplan (nun nur noch als nonverbaler Impuls) hinter der 4 umgefaltet wird.

Die wieder *entfaltete* Tapetenbahn zeigt dann die sichtbaren Knickfalzen (in der Funktion der Rahmen aus Abb. 1.4) – sehr hilfreich für die anschließende Analysen.

2.5 Rolle der Dokumentation

2.5.1 Überblick behalten

Um die Gewinnstrategie herauszufinden, bedarf es einer ganzen Reihe von Spieldurchgängen, denn »die Kinder müssen die Vielfalt der Spielzüge (Operationen) und der Spielpositionen erfassen, die Wirkung der Spielzüge hinsichtlich Gewinn oder Verlust bewerten und ihre eigenen Züge mit denen des Gegners koordinieren« (E. Wittmann, 1982, S. 82). Es ist plausibel, dass insbesondere Grundschüler da schnell den Überblick verlieren. Aber auch Erwachsene wissen sehr schnell nicht mehr, ob sie diesen oder jenen Ansatz oder Zug nicht kurz zuvor so bereits einmal durchgespielt haben.

Nun ist maximale Ökonomie des Spielens und höchste Effektivität der Zielerreichung gar nicht von primärem Interesse. Der spielerische Charakter fragt nicht primär nach dem kürzesten oder elegantesten Weg. Die Vermeidung »unnötiger« Wiederholungen oder Überschneidungen ist aber auch gar nicht das Argument für eine Dokumentation des Tuns. Ihr Wert zeigt sich im Prinzip erst in der folgenden Phase der gemeinsamen *Analyse von Hypothesen* (vgl. Abschnitt 1.2).

2.5.2 Hypothesen-Prüfung

Die gezieltere Suche nach der Gewinnstrategie führt immer wieder zu Vermutungen und Hypothesen, die überprüft sein wollen. Man kann das tun, indem man einen oder mehrere weitere Spieldurchgänge mit den entsprechenden Parametern durchführt, d. h. sich einige Beispielfälle generiert. Im Unterricht, wo nicht unbegrenzt Zeit zur Verfügung steht (abgesehen von der »Kondition« der Kinder), kann der Bedarf nach weiteren Spielen schon einmal kritisch werden. Alternativ hat sich das folgende Vorgehen bewährt.

2.5.3 Pool an Spielverläufen

In der Phase des freien Explorierens oder der gezielteren Erkundung, für die ca. 15 bis 20 Minuten kalkuliert werden könnten, also während der Partnerarbeitsphase, sollen beide Spielpartner eines oder zwei ihrer »Lieblingsspiele« (Spiele, bei denen sie gewonnen haben oder die sie sonst für bemerkenswert halten) auf einen vorbereiteten großen Spielplan eintragen. Dazu reicht es, die entsprechenden Felder des Spielplans durch rote bzw. blaue Kreuze oder Punkte zu markieren. Das kostet in dieser Phase keine nennenswerte Zeit. Wenn aber alle Spielerpaare so verfahren, dann liegt am Ende der Stunde ein Pool von ca. 30 bis 40 protokollierten Spieldurchläufen vor. Dieser kann dann als Grundlage für die genauere Analyse im Klassenverband dienen.

Werden nun Vermutungen und Hypothesen geäußert – z. B. »Wer anfängt, gewinnt« – dann kann man anhand der gesammelten (und am besten sortierten) Spielverläufe recht gut überprüfen, ob man zunächst ein *Gegenbeispiel* findet – das wäre der einfachste Weg, um eine Vermutung zu *falsifizieren.*

Ein Pool von 30 bis 40 Beispielen ist da schon ein relativ guter Ereignisraum. Die Vermutung »Wer anfängt, gewinnt« ließe sich etwa in der Übersicht aus Abb. 2.1 (hier war die Spielfeldlänge 13 bei maximaler Legezahl 2) durch das dort zu findende 8. Spiel widerlegen.

Allerdings sollte man die Hypothese auch nicht vorschnell aussortieren, wenn es Beispiele gibt, wo sie zutrifft. Der näher zu untersuchende Grund dafür ist der, dass die genannte Hypothese zwar zutreffend ist, aber noch nicht die ganze Wahrheit enthält (*notwendig, aber nicht hinreichend*).

Ein solches Tableau muss also aufmerksam interpretiert werden, damit keine Kurzschluss-Folgerungen geschehen. Auch »Wer die 4 legt, gewinnt« (an sich ja eine Gewinnposition) wird durch das 8. Spiel widerlegt. Aber eben nur, weil die Hypothese nur unter der Voraussetzung gilt, dass die Gewinnstrategie konsequent durchgehalten wird, was eben dort nicht zutrifft (die 7 wird hier verpasst, sodass der Spielpartner die 10, die vorletzte Gewinnposition, erreichen kann).

Derartige Analysen und Überprüfungen können nur dann erfolgen, wenn vorherige Spielverläufe dokumentiert und leicht (um-)sortierbar vorliegen. Es würde jedes Gedächtnis überfordern, sich auch nur an die letzten wenigen Spielverläufe zu erinnern. Und wie will man dann

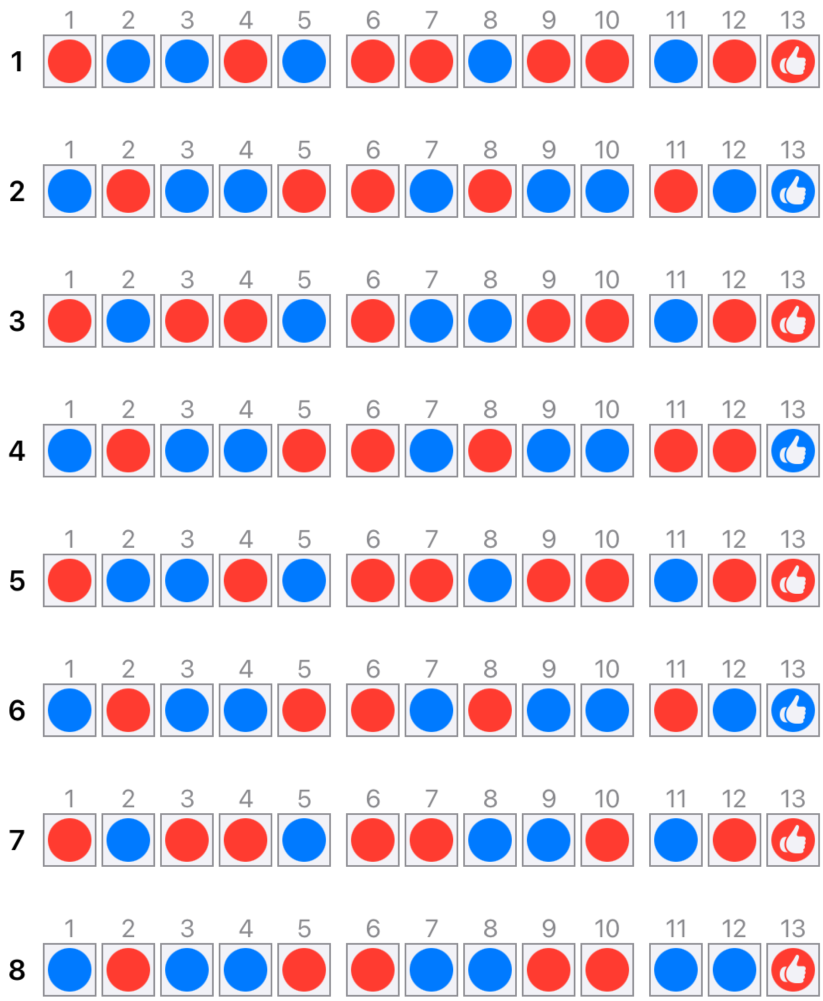

Abbildung 2.1: Übersicht über dokumentierte Spielverläufe

mental vergleichen und diese Überlegungen dann auch für andere verständlich kommunizieren? Ein zwingendes Argument für eine **adäquate Dokumentationspraxis**!

2.6 Rolle der Sprache

Es liegt auf der Hand, dass eine unterrichtliche Umsetzung des Nim-Spiels auch besonders geeignet ist, um allgemeine mathematische Kompetenzen wie das *Darstellen*, das *Kommunizieren*, das *Problemlösen* und das *Argumentieren* zu fördern – sowohl im Mündlichen als auch beim Verschriftlichen.

Das Sprachgefühl und die aktuelle sprachliche Ausdrucksfähigkeit der Kinder ist noch in der Entwicklung, weshalb der Satz »Jede Mathematikstunde ist auch eine Deutschstunde« insofern relevant ist, als die sprachliche Ausdrucksfähigkeit der Kinder auch im Fachunterricht zu fördern und zu fordern ist (wobei die Sprache der Lehrerin eine **Modellfunktion** hat!). Eine besondere Aufgabe für eine Lehrperson besteht z. B. darin, die manchmal sehr verkürzten Satzfragmente der Kinder zunächst selbst zu verstehen und einordnen zu können, und dann auch für die ganze Klasse verständlich zu machen. Dieser Bedarf erklärt sich u. a. wie folgt:

- Kinder formulieren zunächst sehr subjektiv aus ihrer individuellen Sicht als »Wissende».

  Sie haben sich mit einem Sachverhalt befasst und dabei vielfältige Detail-Erfahrungen gemacht, die sie nun nicht mehr für erklärungsbedürftig oder erwähnenswert halten (weil sie ihnen klar sind). Dass Außenstehende mehr Redundanz, mehr Einzelheiten benötigen, um die Erklärungen zu verstehen, ist ihnen nicht bewusst.

- (Über-)Motivation und Engagement in der Sache führen auch häufig dazu, dass der Kopf schneller denkt als es der »Sprachausgabe« gelingt, hinterherzukommen.

  Aus einem dadurch entstehenden Wortschwall (in der Fachsprache »Poltern« genannt) kann aber nicht geschlossen werden, dass das Kind den Sachverhalt nicht verstanden hätte. Für Außenstehende aber mag es sich wie ein »verbales Chaos« anhören, dem man überhaupt nicht folgen, geschweige etwas verstehen kann.

- Auch bei Kindern kann man schon einmal »die allmähliche Verfertigung der Gedanken beim Reden« (Kleist, 1978) beobachten.

  Auch wenn der Hinweis »Erst denken, dann reden« gewiss seine Berechtigung hat, so wird das Denken aber auch durch Reden (währenddessen) mitgeformt: Beim »Drauflosreden« ohne schon zu wissen, was man genau sagen und wo man hin will, formieren sich Gedanken, die Bewusstheit wächst und entwickelt den sprachlichen Ausdruck erst zu einer akzeptierten und verständlichen Form.

Bei all dem ist entscheidend, Sprache im Rahmen von Erklärungen, Berichten, Begründungen und Argumentationszusammenhängen nicht einfach nur »geschehen« zu lassen, sondern sie immer wieder auch in den Bewusstseinshorizont der Kinder zu heben – nicht nur *mit und* *durch* Sprache kommunizieren, sondern auch *über* Sprache kommunizieren. Das ist mit **aktiver Sprachförderung** als eine durchgängige Aufgabe jedweden Unterrichts gemeint.

3 Die Nim-App

Die Nim-App besteht aus bis zu vier Navigationsebenen:

1. Zunächst werden **Einstellungen** zum Spiel vorgenommen.
2. Anschließend kann **gespielt** werden.
3. Die Spiele können in einem **Archiv** gesammelt werden, das verschiedene Sortier- und Speicheroptionen zulässt.
4. Außerdem ist möglich, einzelne Spiele aus dem Archiv heraus zu **untersuchen**.

Dabei ist jede Navigationsebene so gestaltet, dass sie möglichst **einfach und übersichtlich** auf dem Bildschirm dargestellt wird. Wenn das Display zu klein ist, muss ggf. von oben nach unten gescrollt werden.

3.1 Einstellungen innerhalb der App

Wenn die App gestartet wird, zeigt sich ein Bildschirm mit diveresen Einstellungsmöglichkeiten für das Nim-Spiel. Folgende Werte können variiert werden:

- **Spielfeldlänge** von 5 bis 20
- **Legezahl** von 1 bis 4
- **letztes Feld** gewinnt oder verliert

Diese Begrenzungen wurden bewusst implementiert. Die App als solche soll keine »vollständige Simulation« bis hin zur Verallgemeinerung liefern, sondern eine Experimentierumgebung anbieten, deren Erfahrungen in didaktischen Kontexten zum weiteren (auch nicht-digitalen) Problemlösen und zu allgemeineren Begründungen anregen sollen.

Darüber hinaus können die **Namen** und **Farben** der beiden Spieler/-innen angepasst werden.

Am unteren Bildschirmrand gibt es noch die Möglichkeit, jederzeit die **Nummerierung der Felder** anzupassen: entweder gar keine, jedes fünfte Feld oder alle Felder. Diese Einstellung kann auch in der globalen Einstellungsapp vorgenommen bzw. geändert werden (siehe Abschnitt 3.4).

Sobald alle gewünschten Einstellungen vorgenommen wurden, kann das Spiel über den **Start**-Knopf oben rechts begonnen werden.

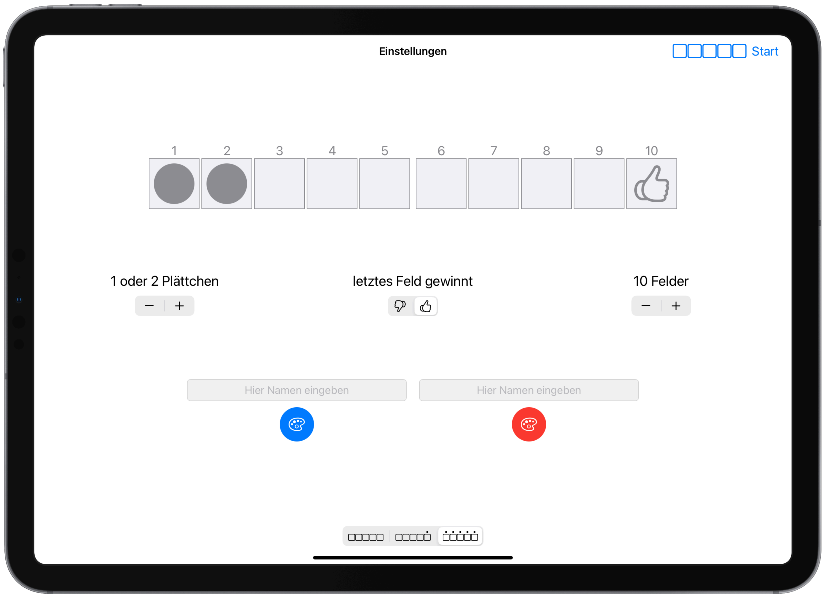

Abbildung 3.1: Einstellungsbildschirm der Nim-App

3.2 Spielen

Bevor das erste Plättchen positioniert wird, muss über die **farbigen Buttons** ausgewählt werden, wer beginnt.

Anschließend kann die maximale Anzahl an Plättchen über das **Antippen der entsprechenden Felder** gelegt werden. Die App gibt dabei **Rückmeldungen**, falls versucht werden sollte, zu viele Plättchen oder diese nicht in der richtigen Reihenfolge zu legen.

Sobald ein Spieler seinen Zug beenden will, betätigt er seinen Fertig-Button und der andere Spieler ist dran.

Mit dem Ausfüllen des letzten Feldes erfolgt eine Rückmeldung, welcher Spieler gewonnen hat. Anschließend kann das Spiel ins **Archiv bewegt** werden oder man startet jederzeit, ohne Archiv, ein **neues Spiel**.

3.2.1 Notizen machen

Über die Multitasking-Funktion des iPads (siehe https://support.apple.com/de-de/HT207582) ist es möglich, neben der Nim-App auch eine weitere App zu öffnen, die Multitasking unterstützt. So kann etwa die Notizen-App daneben gelegt werden, um Vermutungen hinsichtlich der Spielstrategie zu notieren.

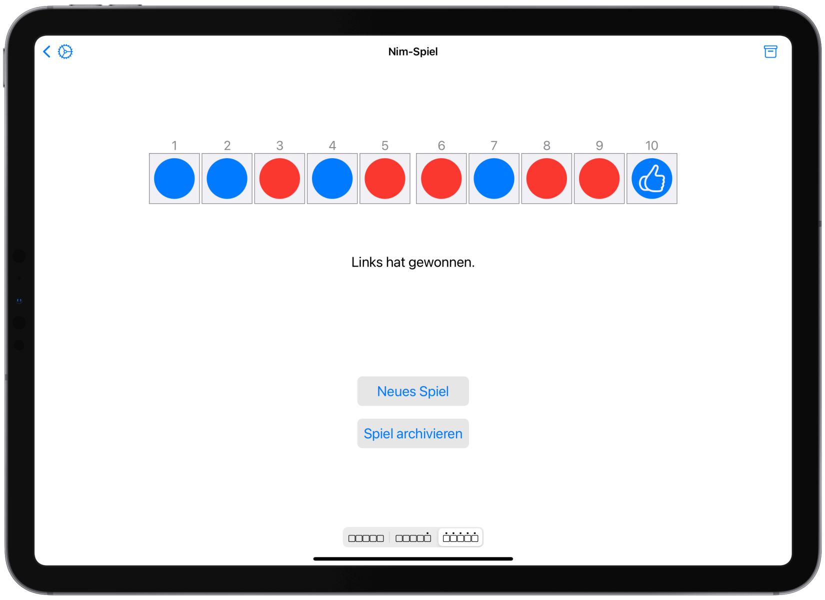

Abbildung 3.2: Spiel-Bildschirm der Nim-App

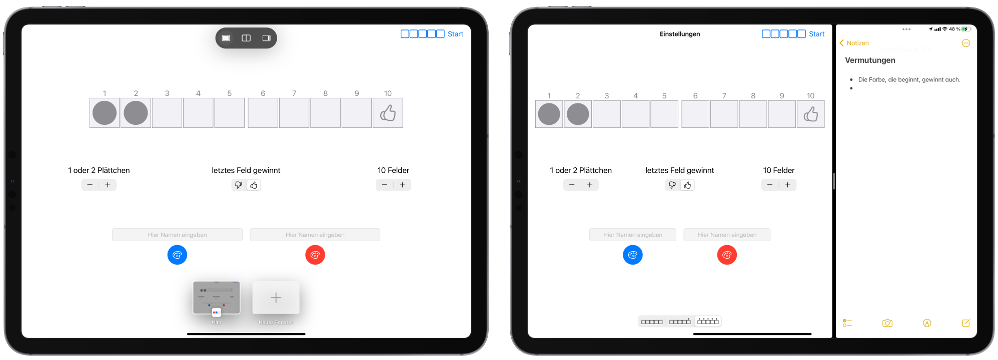

Abbildung 3.3: Splitscreen mit der Notizen-App

3.2.2 Doppelt spielen

Die Multitasking-Funktion ist ebenfalls geeignet, um die Nim-App selbst zweimal nebeneinander geöffnet zu haben, wenn etwa das Spiel mit verschiedenen Parametern vergleichend durchgeführt werden soll.

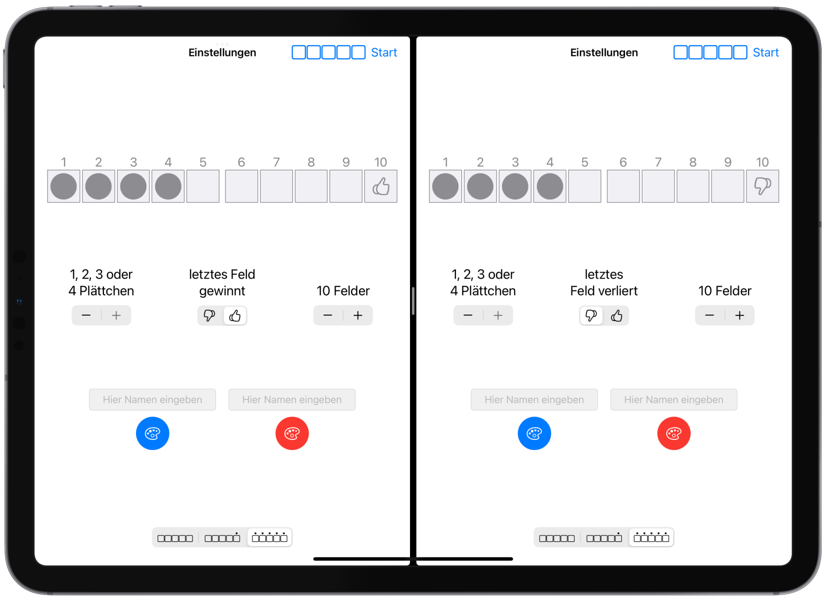

Abbildung 3.4: Splitscreen mit der Nim-App selbst

3.3 Archivieren und Untersuchen

Im Archiv werden alle gespeicherten Spiele dargestellt.

- Über **Drag-and-Drop-Gesen** können die **Archiveinträge umsortiert** werden. Bitte beachten Sie, dass es bei unterschiedlichen Feldlängen innerhalb des Archivs ggf. zu Verschiebungen in der Darstellung kommen kann.
- Über den **Sortier-Button** oben rechts gibt es die Möglichkeit, die Spiele **der Länge nach**, **chronologisch** zu sortieren, beides **sowohl aufsteigend als auch absteigend**, oder bezüglich der **beginnenden Farbe**.
- Das Archiv kann auch vollständig oder in einer Auswahl **exportiert** bzw. als **pdf-Datei** ausgedruckt/gespeichert/geteilt werden. Hierfür stehen die Buttons am unteren rechten Rand zur Verfügung. Die pdf-Datei wird dabei in schwarz-weiß dargestellt.

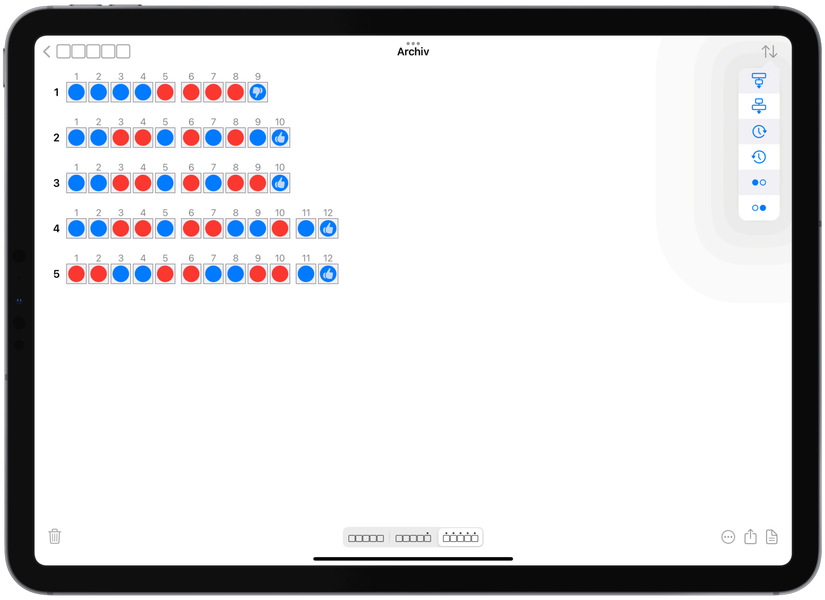

Abbildung 3.5: Sortiermöglichkeiten im Archiv

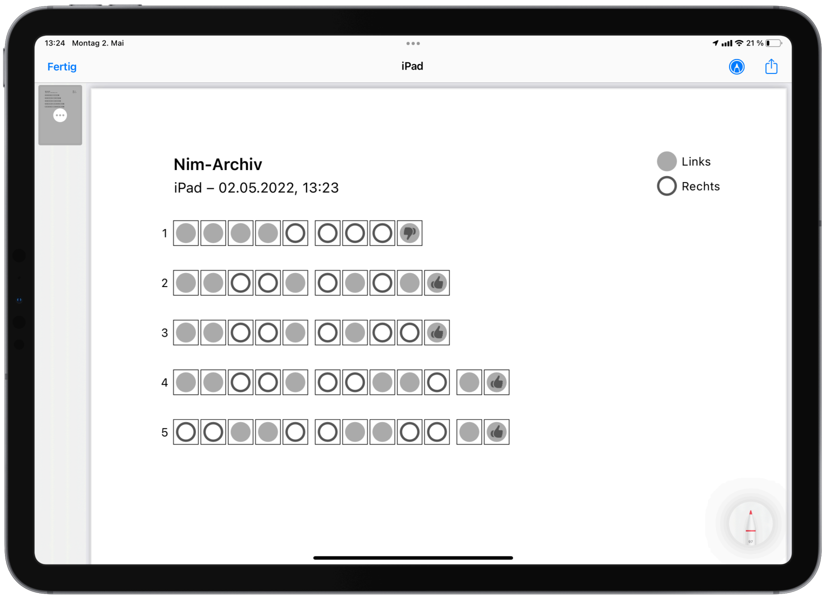

Abbildung 3.6: Export der pdf-Datei

- **Öffnet** man ein zuvor gespeichertes Archiv (z. B. über die Dateien-App), kann man dieses **zu seinem bisherigen Archiv hinzufügen** oder das **alte Archiv überschreiben**.
- **Tippt** man im Archiv ein einzelnes Spiel an, erhält man die Möglichkeit, dieses nach einer Bestätigungsabfrage zu **löschen** oder **genauer zu untersuchen**. Im letzteren Fall wird dann das gespielte Spiel sowie ein weiteres Spiel mit zunächst denselben Einstellungen dargestellt. Die Einstellungen des zweiten Spiels sind nun variierbar, d. h. es kann parallel und vergleichend zum ursprünglich dargestellten Spiel gespielt werden.

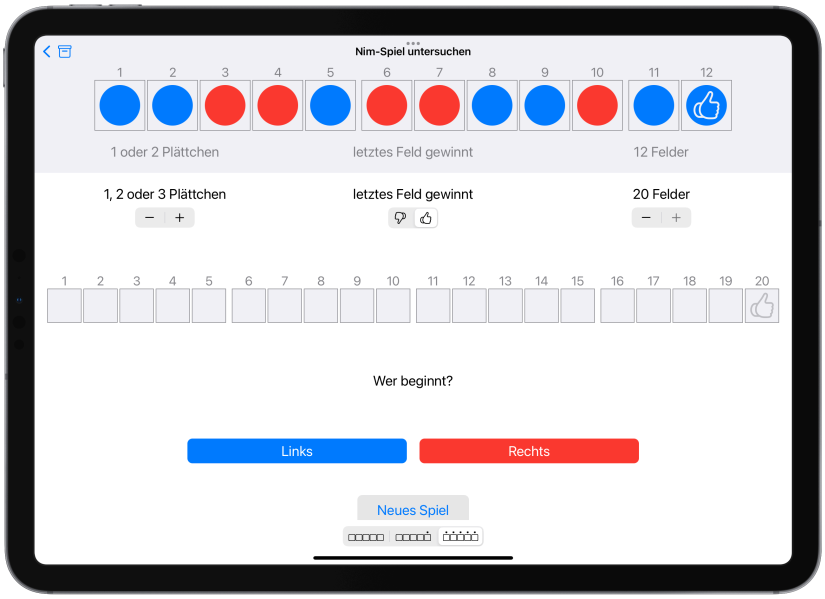

Abbildung 3.7: Untersuchen und Abwandeln eines bereits gespielten Spiels

- Über den **Papierkorb-Button** unten links kann das **vollständige Archiv gelöscht** werden (ebenfalls mit vorheriger Bestätigungsabfrage).

Für den Unterricht ergeben sich aus diesen Bedienmöglichkeiten einige ertragreiche Szenarien:

3.3.1 Sinnvolles Sortieren

Wie bereits in Abschnitt 2.5.3 erläutert, ist es für eine geziele Analyse und das Finden der Gewinnstrategie notwendig, eine *adäquate Dokumentationspraxis* zu schulen. Die App unterstützt dies dahingehend, dass die Spiele immer entsprechend der zu betrachtenden Parameter (»Wer fängt an?«, »Wie viele Plättchen durfte man legen?«, ...) umsortiert werden kann. Auch in der pdf-Datei wird die jeweils aktuelle Sortierung dargestellt, sodass eine Analyse ggf. auch »offline« stattfinden kann. Gleichzeitig bietet sich über die chronologische Sortierung immer die Möglichkeit, zur »Ausgangssituation« zurück zu springen.

3.3.2 Archive aus Klasse sammeln

Sobald Ihre Schülerinnen und Schüler einige Spiele im Archiv gespeichert haben, können sie es exportieren und Ihnen per AirDrop schicken (siehe https://support.apple.com/de-de/HT204144). Sie selbst können dann bei den empfangenen Dateien jeweils ihr Archiv ergänzen, so dass Sie letztlich die Spiele von allen Kindern gesammelt haben. Damit können anschließend im Plenum (z. B. auf einem interaktiven Whiteboard) vielfältige Vergleiche vorgenommen und Strategien besprochen werden.

3.3.3 Spiele zum Analysieren vorgeben

Auf dieselbe Weise können Sie Ihren Schülerinnen und Schülern auch einzelne Spiele schicken, so dass sie diese analysieren können. Dabei können Sie auf die Funktion zurückgreifen, nur Teile des Archivs zu versenden, wenn Sie den Auswahl-Button (drei Punkte im Kreis) vorher antippen.

3.4 Globale Einstellungen

In den globalen App-Einstellungen (graue Zahnrad-App, anschließend nach unten scrollen bis zur Nim-App) können mehrere globale Einstellungen vorgenommen werden:

- Die **Nummerierung der Felder** kann angepasst werden: keine, jedes fünfte oder alle.
- Sie können die **Änderung der Nummerierung aktivieren/deaktivieren**. Dies kann in bestimmten Unterrichtssituationen hilfreich sein, wenn Sie eine bestimmte Art der Nummerierung bevorzugen, die nicht während des Spiels spontan geändert werden soll.
- Es kann der **Einzel-Export** von Spielen aktiviert/deaktiviert werden. Ein Deaktivieren führt dazu, dass im Archiv ein Button weniger sichtbar ist. Dies ist in manchen Unterrichtssituationen von Vorteil, damit die Schülerinnen und Schüler nicht aus Versehen darauf tippen.
- Sie können aktivieren/deaktivieren, dass beim Export des Archivs die **Namen der Spieler/-innen anonymisiert** werden. Normalerweise werden beim Untersuchen eines Spiels aus dem Archiv die eingegebenen Namen beider Personen dargestellt, die gespielt hatten. Ein Anonymisieren ist insbesondere dann sinnvoll, wenn Archive zwischen verschiedenen Geräten hin und her geschickt werden und nicht nachvollzogen werden soll, wer ein Spiel gespielt hat. In der pdf-Datei werden standardmäßig keine Namen dargestellt.
- Weiterhin kann die **Sprache** des Spiels angepasst werden. Folgende Sprachen werden derzeit unterstützt:
  - Deutsch

- Englisch
- Französisch
- Arabisch
- Ukrainisch
- Russisch
- Kölsch

Üblicherweise wird im Spiel die Systemsprache des Gerätes verwendet. Wenn diese nicht vom Spiel unterstützt wird (z. B. Spanisch), dann wird im Spiel automatisch Englisch verwendet. Je nach Zusammensetzung Ihrer Klasse können so einzelne Schülerinnen und Schüler ggf. flexibel ihr Spiel anpassen.

Sollten Sie eine Sprache beherrschen, die derzeit nicht vom Spiel unterstützt wird, freuen wir uns über Ihre Unterstützung bei der Übersetzung, siehe dazu Abschnitt B.2.

3.5 Bedienungshilfen

Die App unterstützt einige der betriebssysteminternen Bedienungshilfen, die es Kindern mit besonderen Bedürfnissen ermöglichen, am Spielen teilhaben zu können.

3.5.1 Farben und Kontraste

Die Nim-App unterstützt die kontrastreichere Darstellung von Farben, wenn diese über die Bedienungshilfen aktiviert werden (siehe https://support.apple.com/de-de/HT207025). Über die entsprechenden Einstellungen können auch Farbfilter, bspw. bei Farbfehlsichtigkeiten, angepasst werden.

Auch der Dunkelmodus (siehe https://support.apple.com/de-de/HT210332) wird von der Nim-App unterstützt.

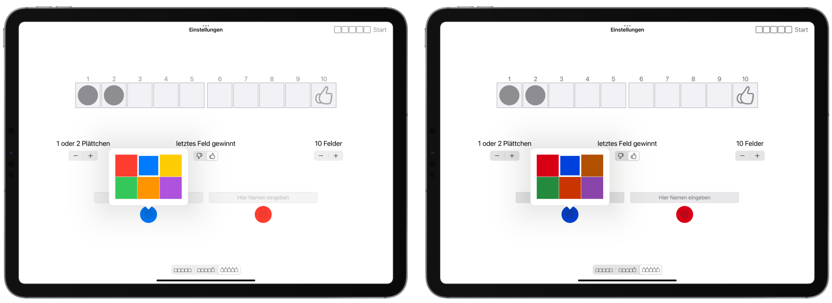

Abbildung 3.8: Hellmodus mit normalem und hohem Kontrast

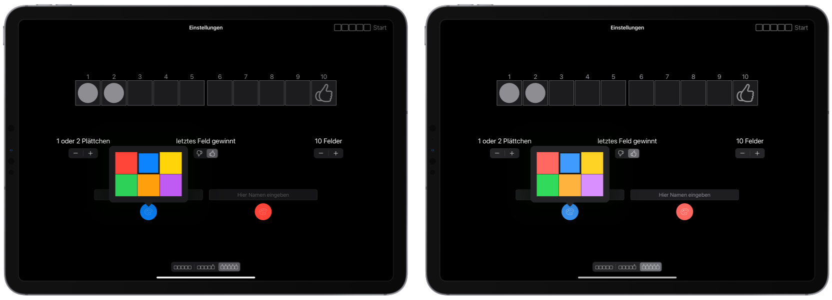

Abbildung 3.9: Dunkelmodus mit normalem und hohem Kontrast

3.5.2 Schriftgröße

Weiterhin werden von der App dynamische Schriftgrößen unterstützt. Diese können entweder global eingestellt werden (siehe https://support.apple.com/de-de/HT202828) bzw., ab iOS 15, auch für einzelne Apps (siehe https://support.apple.com/de-de/guide/ipad/ipad723b5a33/15.0/ipados/15.0). Mit dieser Option sollte jedoch behutsam umgegangen werden, da die Bildschirmdarstellung dadurch deutlich verschoben und zumindest ungewöhnlich aussehen kann.

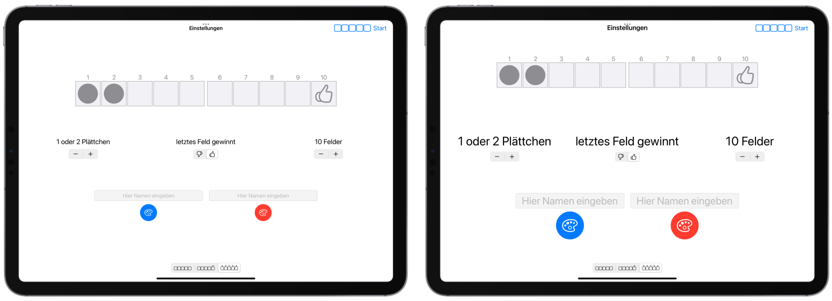

Abbildung 3.10: Normale und größere Schriftgröße

3.5.3 Texte vorlesen

Die im System verankerte Funktion »VoiceOver« (siehe https://support.apple.com/de-lu/guide/ipad/ipad9a246898/ipados) ermöglicht das Vorlesen einzelner Bildschirminhalte. Eine Bedienung bei eingeschalteter VoiceOver-Funktion ist nicht trivial und sollte daher nur dann genutzt werden, wenn (bspw. blinde oder sehbehinderte) Schülerinnen und Schüler darauf angewiesen sind.

Innerhalb der Nim-App wurden in der deutschen und englischen Sprachversion für einige Bedienelemente spezifische Texte hinterlegt. Wird beispielsweise die Farbwahl geöffnet und ein farbiges Feld angetippt, so wird vom Gerät die entsprechende Farbe vorgelesen. Auch beim Antippen des Spielfeldes wird vorgelesen, um welches Feld (z. B. »Feld 3 von 10«) es sich gerade handelt.

Die Realisierung dieser Unterstützung wurde jedoch bisher noch nicht mit Schülerinnen und Schülern erprobt, die auf das Vorlesen von Bildschirminhalten angewiesen sind. Sollten Sie über entsprechende Erfahrungen verfügen, freuen wir uns sehr über eine Rückmeldung

A Hintergründe zum Nim-Spiel

A.1 Das Strategiespiel Nim

Ein mathematisches Strategiespiel wie Nim ist ein Spiel, dessen Regeln, Strategien und Ergebnisse durch klare mathematische Parameter definiert werden (vgl. *Mathematisches Spiel*, 2021). Oft haben solche Spiele einfache Regeln (z. B. Tic-Tac-Toe). Dennoch können sie tiefere mathematische Grundlagen haben. Obwohl also die Spielregeln des Nim-Spiels sehr einfach sind, kann das Spiel mithilfe der kombinatorischen Spieltheorie mathematisch tiefgreifend analysiert werden (vgl. Wikibrief, 2021). Diese Hintergründe muss man beim Spielen aber nicht durchschauen. Das unterscheidet die mathematischen Spiele von mathematischen Rätseln, bei denen man für eine Lösung spezielle mathematische Kenntnisse mitbringen muss.

Der fachliche Kern mathematischer Spiele ist zwar für Spieler, die die enthaltenen mathematischen Aspekte (noch) nicht kennen, nicht ohne Weiteres ersichtlich – zumindest solange nicht, bis ein entsprechender Erfahrungshintergrund mit dem Spiel aufgebaut und den innewohnenden Strukturen bewusst Beachtung geschenkt wird. Diese Rahmenbedingungen lassen sich aber herstellen: Der Erfahrungsaufbau geschieht durch mehrfache eigene Spieldurchgänge sowie eigenes oder durch Unterricht angeregtes Erkenntnisinteresse, das gezielt nach den Funktionsweisen oder »Geheimnissen« des Spiels fragt.

Um generell ein solches Spiel und so auch das Nim-Spiel mathematisch zu analysieren, ist es besonders nützlich, die Spielregeln zu studieren, aus denen sich (für mathematisch vorgebildete Erwachsene) ggf. Gleichungen oder relevante Formalisierungen ergeben können. Im Grundschulalter (oder auch bei Erwachsenen, denen diese formalen Vorgehensweisen nicht (mehr) zur Verfügung stehen) lässt sich der fachliche Hintergrund – z. B. eine existierende Gewinnstrategie – aber auch über die Erkundung anschaulicher Phänomene (Muster und Strukturen) experimentell aufklären und auch informell, gleichwohl allgemeingültig begründen.

Mathematische Spiele wie z.B. Nim, Tic-Tac-Toe oder Sudoku sind sowohl in der Freizeitmathematik zu finden, als auch für den Mathematikunterricht von Interesse.

A.2 Spielregeln des Nim-Spiel

Beim *traditionellen* Nim-Spiel entfernen zwei Spieler abwechselnd Objekte (z. B. Streichhölzer), die in Haufen, Stapeln oder Reihen angeordnet sind (vgl. Wikibrief, 2021). Dabei muss ein Spieler mindestens einen Gegenstand entfernen und kann beliebig viele Gegenstände entfernen, vorausgesetzt, sie stammen alle vom gleichen Haufen oder Stapel. Je nach gespielter Version besteht das Ziel des Spiels darin, entweder den letzten Gegenstand zu vermeiden (Misere-Variante) oder den letzten Gegenstand zu nehmen (»normale« Gewinn-Variante).

Müller & Wittmann (1984, S. 72–75) schlagen folgende, bereits für Kinder im Grundschulalter geeignete *elementare* Variante des Nim-Spiels vor, die auch der vorliegenden App zugrunde liegt: Auf einer durchnummerierten Felderreihe (der Länge F) werden von zwei Spielern abwechselnd 1 oder 2 Plättchen ihrer vorher zugewiesenen Farbe sukzessive auf die Felder gelegt. Wer das letzte Feld belegen kann, hat gewonnen. Gesucht wird die Gewinnstrategie, also ein Vorgehen, welches garantiert, dass man zu jedem Zeitpunkt des Spielverlaufs das Spiel kontrollieren kann und mit Sicherheit gewinnt. In der Neubearbeitung des Handbuchs produktiver Rechenübungen firmiert das Spiel unter dem Namen »Rot gegen Blau« (E. Ch. Wittmann & Müller, 2017, S. 42 f.).

Die Parameter Feldlänge, erlaubte maximale Legezahl und der Status des letzte Feldes (gewonnen/verloren) können – einzeln oder in Kombinationen – variiert werden. Dadurch können Vermutungen über die Gewinnstrategie überprüft, begründet und zunehmend verallgemeinert werden.

A.3 Woher stammt das Nim-Spiel?

Der Ursprung des Nim-Spiels ist nicht zweifelsfrei geklärt, wird aber in China angenommen, da es sehr dem chinesischen Spiel *Steine sammeln* ähnelt. Varianten des Nim-Spiels sind bereits in der Antike nachgewiesen und die frühesten europäischen Hinweise auf Nim stammen vom Anfang des 16. Jahrhunderts (vgl. Wikibrief, 2021).

Auch der Ursprung der Namensgebung ist offenbar nicht abschließend aufgeklärt. Sein heutiger Name soll auf den amerikanischen Mathematiker Charles L. Bouton von der Harvard University zurückgehen, der bereits 1901 die vollständige Theorie des Nim-Spiels entwickelt hat (Wikibrief, 2021).

Eine erste elektro-mechanische Version des Nim-Spiels wurde anlässlich der Weltausstellung 1940 in New York vorgestellt (vgl. Wikibrief, 2021). Die Firma *Westinghouse Electric Corporation* zeigte eine Maschine, genannt *Nimatron*, die Nim spielte. Es gelang nur wenigen Menschen, die Maschine in diesem Computerspiel zu schlagen. Zehn Jahre später sollte ein Computer namens *Nimrod* in London für Furore sorgen:

Als geistiger Vater des *Nimrod* gilt der Australier John Makepeace Bennett. Sein Arbeitgeber Ferranti suchte 1950 verzweifelt nach einem geeigneten Exponat für das im Jahr 1951 geplante Festival of Britain. Sein Vorschlag: Einen Rechner zu konstruieren, gegen den die Besucher der Messe eine Partie Nim spielen konnten (GameGuideWiki, 2022).

A.4 Die erste Nim-»App«

A.4.1 Der Nimrod

Der *Nimrod* war im Prinzip der erste reine Spielcomputer, weil er nichts anderes konnte als Nim-Partien zu simulieren. Eigentlicher Sinn und Zweck seiner Entwicklung war es, der Öffentlichkeit zu demonstrieren, welch komplexe mathematische Entscheidungen Computer zu treffen in der Lage waren.

> »Am 1. Dezember 1950, mit nicht einmal mehr einem halben Jahr Vorlaufzeit, begann Ingenieur Raymond Stuart-Williams mit der Konstruktion des Computers nach Bennetts Entwürfen. Er schaffte es gerade noch rechtzeitig, den Nimrod fertigzustellen, sodass der riesige Rechner zur Festivaleröffnung am 5. Mai 1951 der Öffentlichkeit vorgestellt werden konnte. Der Nimrod mutierte schnell zum heimlichen Star des Festivals. Allerdings interessierten sich die Schlangen an Besuchern weniger für die Mathematik hinter dem System – wie es im Sinne von Erfinder Bennett gewesen wäre – sie kamen eher, um sich mit dem Computer in einer Partie Nim zu messen. Da man ihn aber nur schlagen konnte, wenn man mit der richtigen Strategie arbeitete, verlor er äußerst selten gegen seine menschlichen Kontrahenten« (GameGuideWiki, 2022).

Nach dem Festival of Britain stand der *Nimrod* drei Wochen lang auf der Industriemesse in Berlin, wo er großes Aufsehen erregte und von der Polizei bewacht werden musste. Auch der damalige Bundeswirtschaftsminister Ludwig Erhard wagte ein paar Spiele, verlor aber jedes Mal. Bundeskanzler Konrad Adenauer war ebenfalls anwesend, spielte aber nicht, da ein ein direkter Vergleich zwischen Staatschef und Computer zur damaligen Zeit nicht opportun war.

Die Herstellerfirma hat den *Nimrod* später wieder demontiert. Ein kleinerer Nachbau des Originalcomputers findet sich im Computerspielemuseum Berlin, eine Simulation findet sich unter Gaming (2010). Der *Nimrod* war sicher der erste Spielcomputer der Welt. Kontrovers diskutiert wird hingegen die Frage ob Nim auch als erstes Computerspiel gelten werden kann (GameGuideWiki, 2022).

A.4.2 Aufbau und Funktionsweise

Zwischen Aufbau und Funktionsweise des *Nimrod* und der vorliegenden Nim-App zeigen sich interessante Parallelen, weshalb das Vorgehen des Nimrod hier kurz beschrieben werden soll (vgl. GameGuideWiki, 2022; Gaming, 2010): Der Spieler musste vor einem Kontrollfeld Platz nehmen, über welches das Spiel gesteuert wurde.

- Zu Beginn galt es, diverse Einstellungen vorzunehmen: Wer soll beginnen (Computer oder Spieler)? Wie umfangreich sollen die Berechnungen des Systems dargestellt werden?

- Es gab einen Demomodus, in dem der Computer eine Partie gegen sich selbst spielte, und zwei Spielvarianten: die normale und eine umgekehrte Variante, bei der derjenige *verliert*, der das letzte Streichholz nimmt.
- Auf dem Kontrollpult gab es einen Knopf *Comp. Move*, mit dem der Rechner darüber informiert wurde, dass er am Zuge ist.
- War der Spieler an der Reihe, konnte er über vier Reihen mit farbigen Knöpfen, die den Glühbirnen am Gerät entsprachen, festlegen, wie viele Streichhölzer er aus welcher Reihe entfernen wollte. Es wurden dabei immer alle Streichhölzer rechts vom gedrückten Knopf entfernt und die entsprechenden Leuchten erloschen.
- Um dem Computer mitzuteilen, dass *er* nun an der Reihe war, musste ein Extraknopf betätigt werden.
- Neben den Glühbirnen wurden im langsamen Demonstrationsmodus noch alle Befehle und Berechnungen angezeigt, die gerade von *Nimrod* abgearbeitet wurden.
- Zusätzlich wurden auf einem weiteren Display der Speicherinhalt und die gewählten und geprüften Kombinationen dargestellt. Offensichtlich wurde diesen zusätzlichen Darstellungen aber von den spielenden Besuchern kaum Beachtung geschenkt (vgl. dazu die Abschnitte 2.5.3 und 3.3 zur Rolle der Dokumentation und ihrer Umsetzung in der Nim-App) .

B Technischer Hintergrund zur App

B.1 Quellcode

Der Quellcode zur App steht unter einer offenen Lizenz unter https://github.com/heiko-etzold/nim-app zur Verfügung.

Da die App derzeit nur für iPadOS und macOS entwickelt wurde, bietet sich über den freien Quelltext die Möglichkeit, auch Versionen für andere Plattformen zu realisieren. Solle diesbezüglich Interesse bestehen, freuen wir uns über eine Kontaktaufnahme über die entsprechende GitHub-Seite.

B.2 Übersetzungen

Um die App in möglichst vielen Sprachen anbieten zu können (vgl. Abschnitt 3.4), freuen wir uns über Ihre Mitarbeit bei der Übersetzung. Hierzu findet sich unter https://github.com/heiko-etzold/nim-app eine Anleitung, wie die entsprechenden Texte für eine neue Sprache erzeugt werden können.

B.3 Datenschutz und Archiv-Dateien

Die App speichert alle Informationen lokal auf dem iPad/Mac und besitzt keine Verbindung zum Internet. Dieser Abschnitt beschreibt, welche Daten des Archivs in welcher Form auf dem iPad/Mac gespeichert und ggf. beim Speichern/Teilen des Archivs (siehe Abschnitt 3.3) weitergegeben werden. Werden im Einstellungsbildschirm der App keine Namen eingegeben bzw. wird in den globalen Einstellungen die Anonymisierung der Namen aktiviert, werden keinerlei personenbezogene Daten von der App gespeichert bzw. beim Speichern/Teilen des Archivs weitergegeben.

Das Nim-Archiv wird als JSON-Datei[1] mit der Endung `.nim` gespeichert und kann mit einem einfachen Texteditor betrachtet (und auf Wunsch auch bearbeitet) werden. Im Folgenden ist der exemplarische Aufbau einer solchen Datei mit zwei Spielverläufen dargestellt:

[1] siehe auch https://de.wikipedia.org/wiki/JavaScript_Object_Notation

```
1 [
2   {
3     ”leftPlayerName” : ”Maxi”,
4     ”rightPlayerName” : ”Kim”,
5     ”leftPlayerColor” : ”red”,
6     ”rightPlayerColor” : ”blue”,
7     ”winMode” : ”lastWins”,
8     ”numberOfMaximalCircles” : 4,
9     ”listOfColors” : [
10      ”red”,
11      ”red”,
12      ”blue”,
13      ”blue”,
14      ”blue”,
15      ”blue”,
16      ”red”
17    ],
18    ”gameNumber” : 1
19  },
20  {
21    ”leftPlayerName” : ””,
22    ”rightPlayerName” : ”Flo”,
23    ”leftPlayerColor” : ”orange”,
24    ”rightPlayerColor” : ”green”,
25    ”winMode” : ”lastLoses”,
26    ”numberOfMaximalCircles” : 2,
27    ”listOfColors” : [
28      ”green”,
29      ”green”,
30      ”orange”,
31      ”green”,
32      ”orange”
33    ],
34    ”gameNumber” : 2
35  }
36 ]
```

- Die Zeilen `1` und `36` rahmen die Liste an Spielverläufen ein.
- Die Zeilen `2` und `19` rahmen das erste Spiel ein. Nach jedem Spiel (außer dem letzten) kommt ein Komma (siehe Zeile `19`).
- Unter `leftPlayerName` und `rightPlayername` (Zeilen `3` und `4`) werden die Namen der Spieler/-innen abgespeichert. Wird kein Name gespeichert (dies entspricht dem Wert ” ”,

siehe Zeile `21`), so wird beim Erkunden des Spiels *Links* oder *Rechts* als Name dargestellt. In den globalen App-Einstellungen kann eingestellt werden, dass die Namen beim Export nicht gespeichert werden (siehe Abschnitt 3.4).

- Unter `leftPlayerColor` und `rightPlayerColor` (Zeilen `5` und `6`) werden die Spielfarben der Spieler/-innen abgespeichert. Folgende Werte sind möglich:

  - `red`: rot
  - `blue`: blau
  - `yellow`: gelb
  - `green`: grün
  - `orange`: orange
  - `purple`: violett

  Wird ein anderer Wert eingetragen, erfolgt beim Öffnen der Datei mit der Nim-App eine Fehlermeldung.

- Unter `winMode` (Zeile `7`) wird der Gewinnmodus abgespeichert. Folgende Werte sind möglich:

  - `lastWins`: letztes Feld gewinnt
  - `lastLoses`: letztes Feld verliert

  Wird ein anderer Wert eingetragen, erfolgt beim Öffnen der Datei mit der Nim-App eine Fehlermeldung.

- Unter `numberOfMaximalCircles` (Zeile `8`) wird die maximale Anzahl an gleichfarbigen Plättchen gespeichert, die hintereinander gelegt werden dürfen. Der Wert muss `1`, `2`, `3`oder `4` betragen, ansonsten erfolgt beim Öffnen der Datei mit der Nim-App eine Fehlermeldung.

- Unter `listOfColors` (Zeilen `9`bis `17` wird die Liste der Farben abgespeichert, die die im Spiel gelegten Plättchen haben. Die Anzahl der Farben entspricht dann der Spielfeldlänge. Auch hier führen fehlerhaft angegebene Farben zu einer Fehlermeldung beim Öffnen der Datei mit der Nim-App.

- Unter `gameNumber` wird eine Nummer abgespeichert, um die Reihenfolge der Spiele nachvollziehen zu können. Bei jedem neuen Spiel, das in das Archiv gelegt wird, wird eine höhere Nummer als bei den vorherigen Spielen gewählt. Dies ist notwendig, um die Spiele im Archiv chronologisch ordnen zu können (siehe Abschnit 3.3).

C Literatur

GameGuideWiki. (2022). *Nimrod — GameGuideWiki*. https://gameguidewiki.de/index.php?title=Nimrod&oldid=63077

Gaming, O. C. R. (2010). *Nimrod Computer Game Simulation (1951)*. https://www.youtube.com/watch?v=yJZlozoQ4jI

Kleist, H. von. (1978). Über die allmähliche Verfertigung der Gedanken beim Reden. In H. Sembdner (Hrsg.), *Heinrich von Kleist – Werke in einem Band* (S. 810–814). Hanser.

Mathematisches Spiel. (2021). https://de.wikibrief.org/wiki/Mathematical_game

Müller, G., & Wittmann, E. Ch. (1984). *Der Mathematikunterricht in der Primarstufe*. Vieweg+Teubner Verlag. https://doi.org/10.1007/978-3-663-12025-4

Scherer, P. (1996). Das NIM-Spiel – Mathematisches Denken auch für Lernbehinderte? In W. Baudisch & D. Schmetz (Hrsg.), *Mathematik und Sachunterricht im Primar- und Sekundarbereich – Beispiele sonderpädagogischer Förderung* (S. 88–98). Diesterweg.

Wikibrief. (2021). *Nim — Wikibrief*. https://de.wikibrief.org/wiki/Nim

Wittmann, E. (1982). *Mathematisches Denken bei Vor- und Grundschulkindern. Eine Einführung in psychologisch-didaktische Experimente*. Vieweg.

Wittmann, E. Ch., & Müller, G. N. (2017). *Handbuch produktiver Rechenübungen. Band I: Vom Einspluseins zum Einmaleins* (Neufassung). Klett.