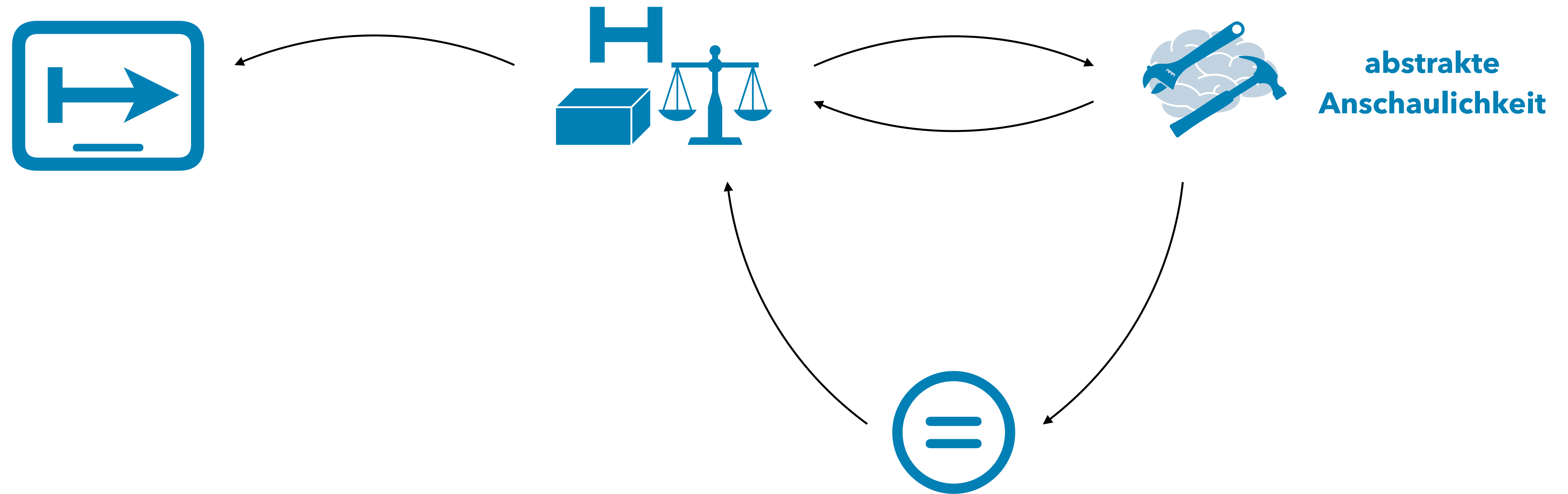


Lernmodelle zum Lösen von Gleichungen

Eine Analyse und Weiterentwicklung
aus tätigkeitstheoretischer Perspektive

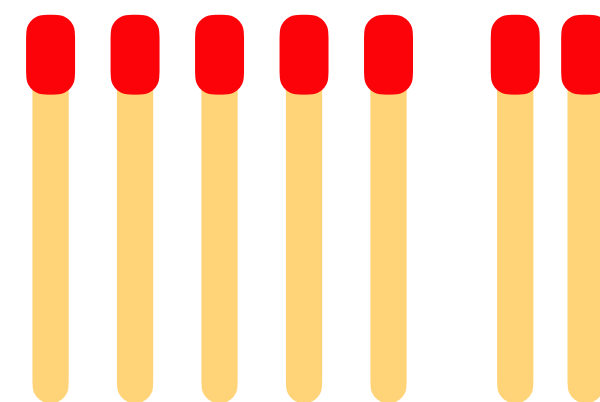
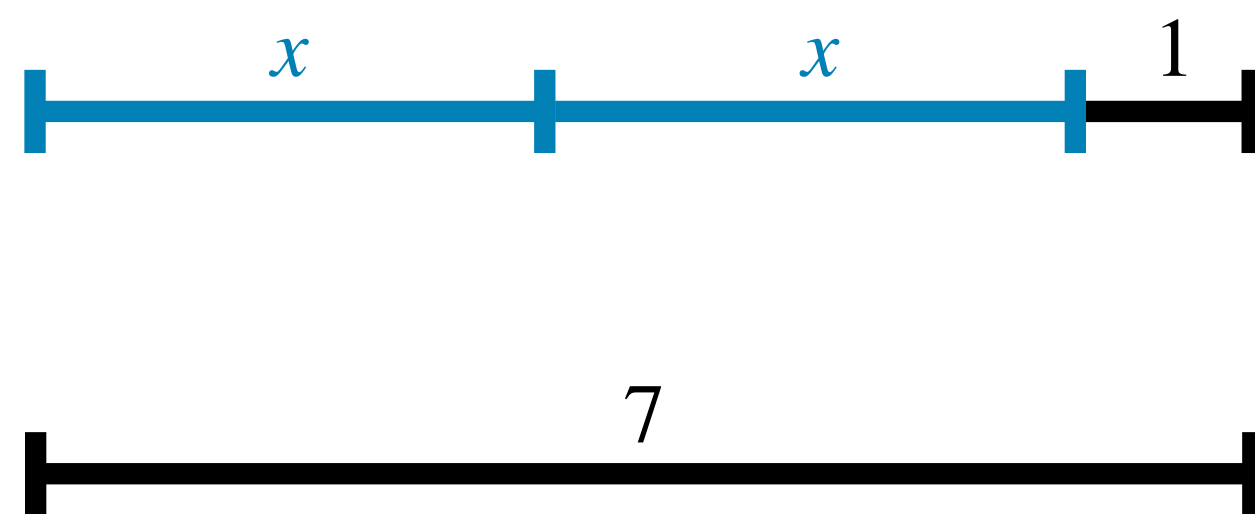
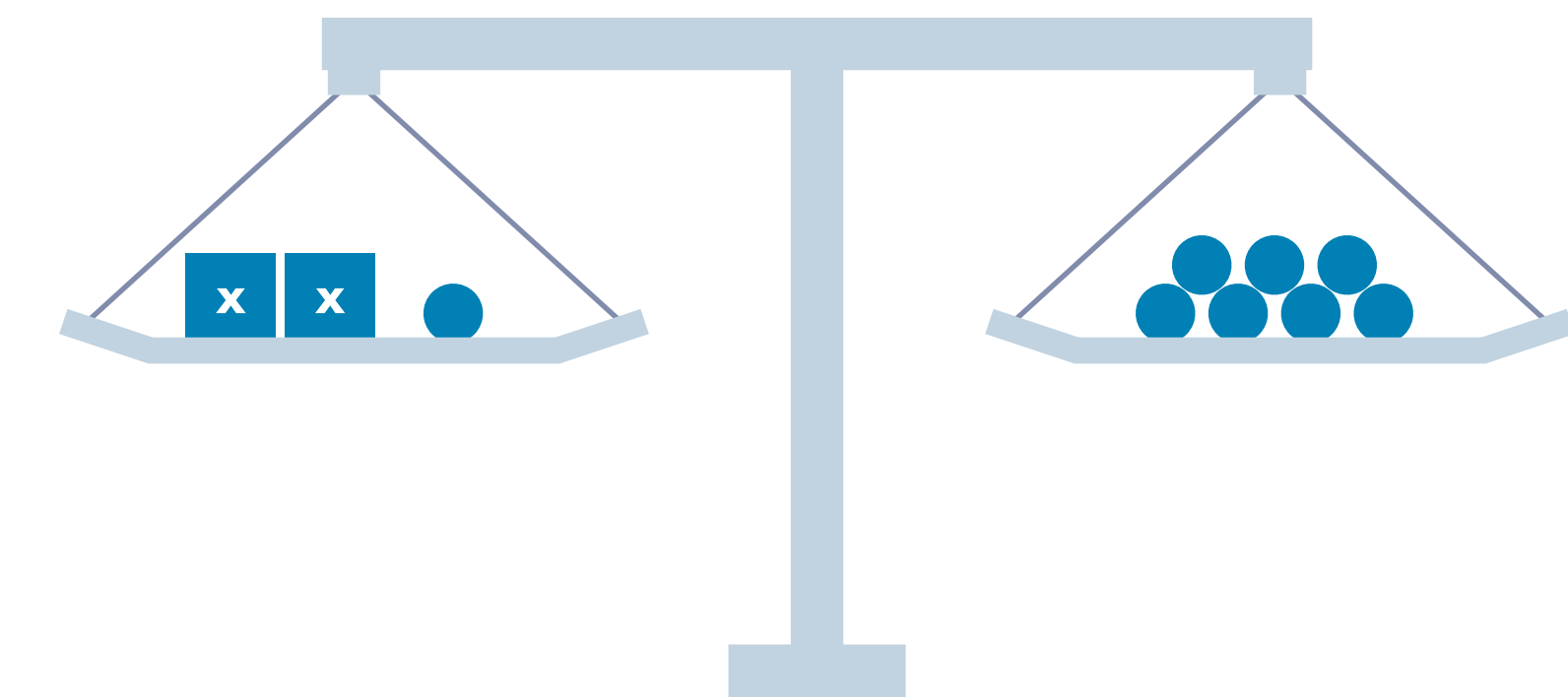
Lernmodelle



Lösen linearer Gleichungen mittels Äquivalenzumformungen



$$2x + 1 = 7$$



»Die Kritik lautet, dass [...] das Modell nur Gleichungen darstellen kann, bei denen neben den Variablen **nur positive Zahlen** vorkommen.« (Barzel & Holzäpfel, 2011, S. 6)

»Zum Zweiten geht beim Waagemodell mit dem **Dividieren ein Bündeln und Entnehmen** einher. Als Handlung ist das Dividieren dem Subtrahieren also sehr ähnlich.« (Weigand et al., 2022, S. 260)

»Beide Aufgaben nutzen gewisse ›Spielregeln‹ [...], wobei diese in ›Knack die Box‹ als solche **explizit vorgegeben** werden (**auf beiden Seiten sind gleich viele Hölzer** bzw. Plättchen). [...]

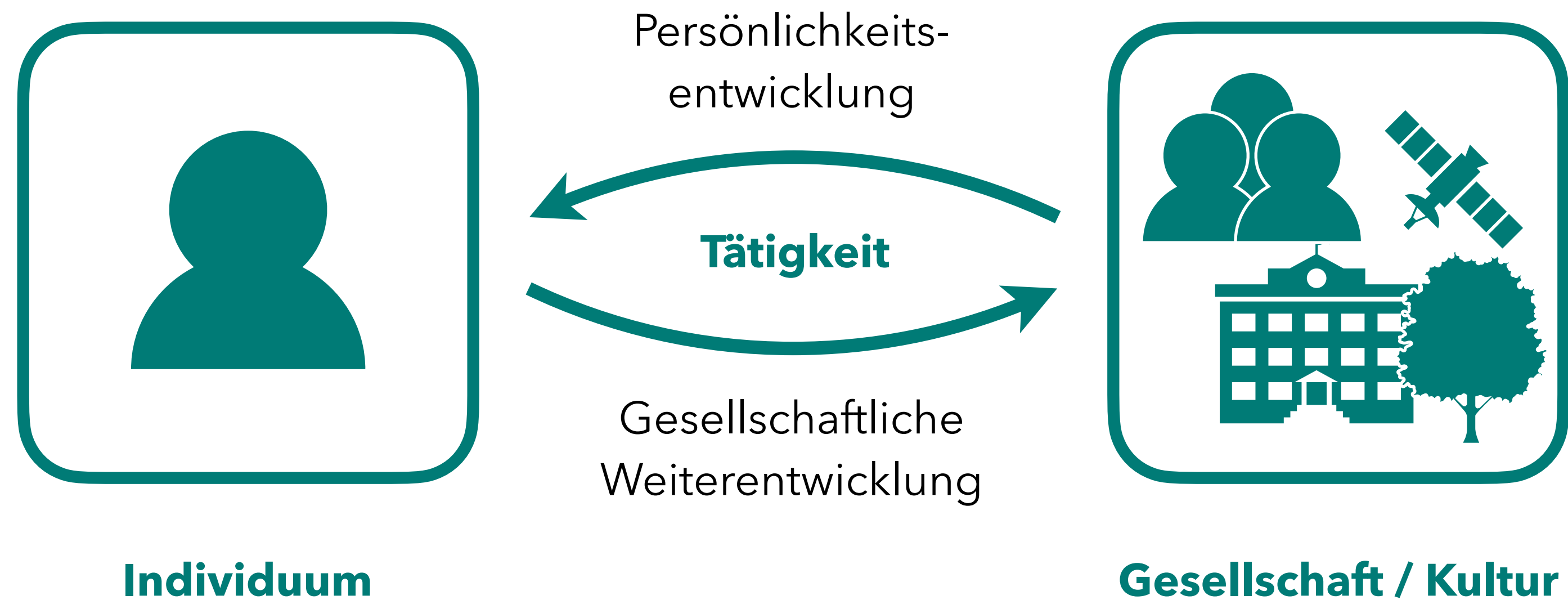
Eine weitere Grenze der Modelle liegt darin, dass bei beiden Modellen die **Lösung** der Aufgabe **bekannt** sein muss, **um** sie in einer realen Umgebung **im Modell dargstellen** [sic!] zu können.« (Weigand et al., 2022, S. 66)

»Eine Darstellung des Rechnens mit **negativen Werten** ist zwar möglich, **erfordert aber eine Erweiterung des Streckenbegriffs auf orientierte Strecken** bzw. Vektoren [...]« (Weigand et al., 2022, S. 262)



Was zeichnet ein gutes Modell aus?

Ausgewählte Grundlagen der Tätigkeitstheorie





Was zeichnet ein gutes Modell aus?

Ausgewählte Grundlagen der Tätigkeitstheorie





Was zeichnet ein gutes Modell aus?

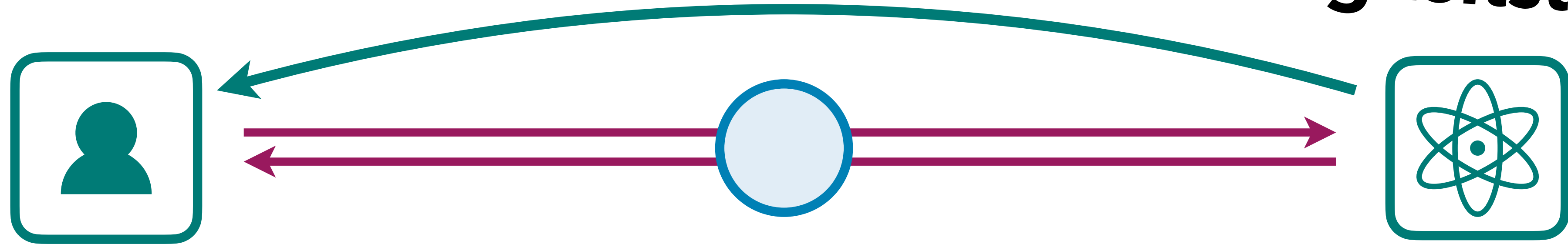
Ausgewählte Grundlagen der Tätigkeitstheorie





Was zeichnet ein gutes Modell aus?

Ausgewählte Grundlagen der Tätigkeitstheorie



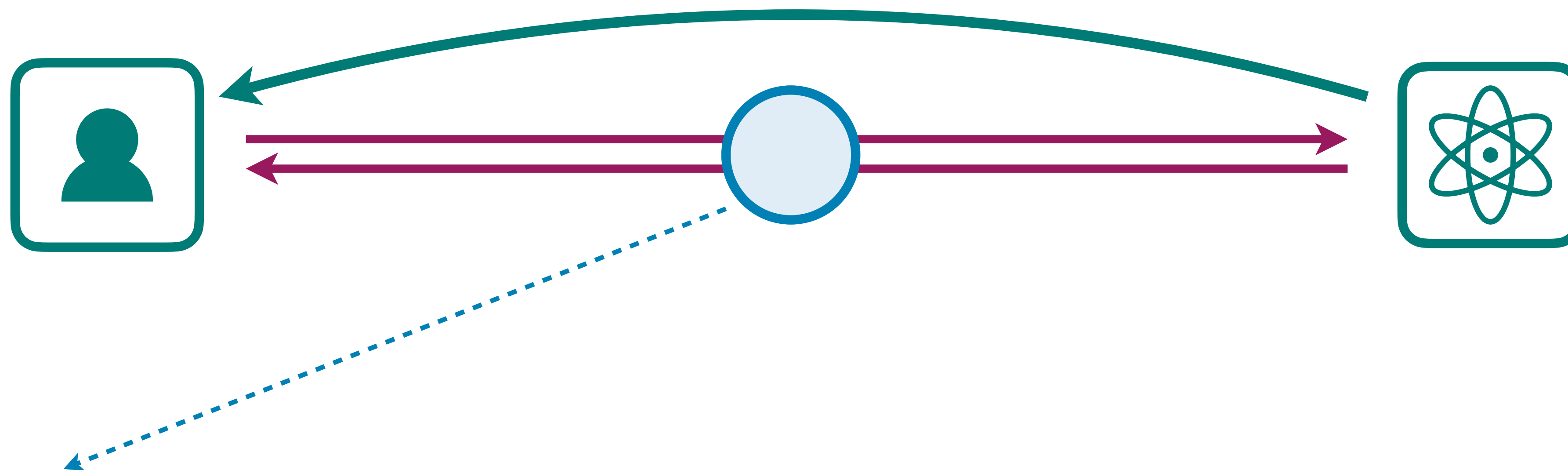
Lerntätigkeit als **Aneignung** gesellschaftlichen Wissens & Könnens

Aneignung als Einheit aus **Externalisierung** und **Internalisierung**

Interaktion mit Lerngegenstand über **Lernmittel**



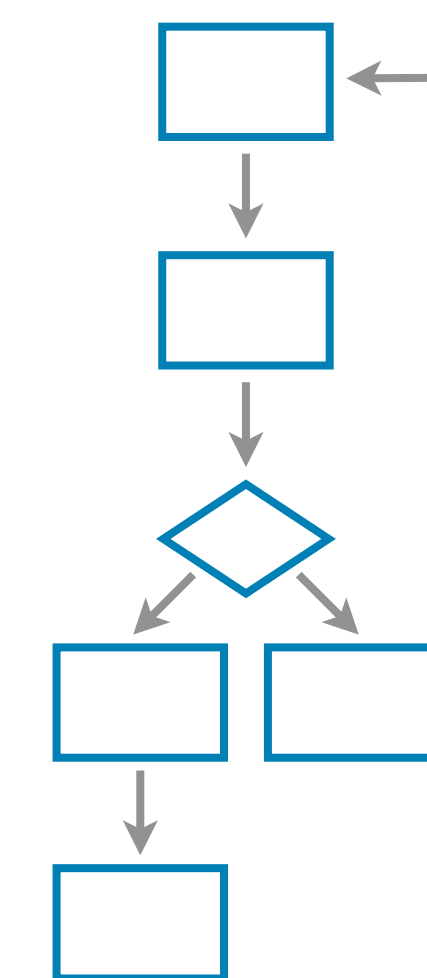
Was zeichnet ein gutes Modell aus?



Lernmodelle als »sinnliche Stützen geistigen Handelns«¹,
die die »abstrakte Struktur des Gegenstands zusammen
mit dem prinzipiellen Weg abbilden, der zur Aufdeckung
der Struktur geführt hat«²

$$\square \cdot (\triangle - \bigcirc) = \square \cdot \triangle - \square \cdot \bigcirc$$

Distributivgesetz



Algorithmus

(¹Giest & Lompscher, 2006, S. 225; ²Lompscher, 1996, S. 6)



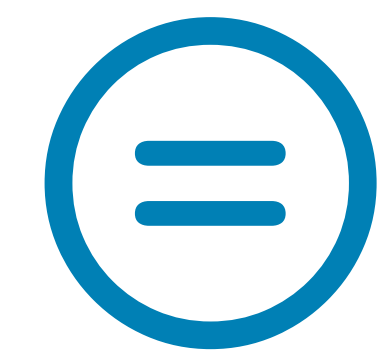
Was zeichnet ein gutes Modell aus?

Lernmodelle als »sinnliche Stützen geistigen Handelns«¹, die die »abstrakte Struktur des Gegenstands zusammen mit dem prinzipiellen Weg abbilden, der zur Aufdeckung der Struktur geführt hat«²

»Der besondere Wert von Modellen besteht darin, daß sie nicht die konkreten Merkmale der einzelnen Erscheinungen oder Situationen, sondern **nur** konstitutive, im gegebenen Kontext **wesentliche Merkmale und Relationen** enthalten, also **abstrakt** sind. Sie sind aber gleichzeitig **anschauliche** Abbildungen und machen damit die grundlegenden Zusammenhänge und Wesensmerkmale **der Wahrnehmung und Vorstellung zugänglich**.

Diese **»abstrakte Anschaulichkeit«** bildet den Lerngegenstand in relativ einfacher, überschaubarer Form ab und erleichtert dadurch, die Orientierung und die gedächtnismäßige Verfestigung.«³

(¹Giest & Lompscher, 2006, S. 225; ²Lompscher, 1996, S. 6; ³Lompscher, 1985, S. 64)



wesentliche Merkmale und Relationen

Terme und Variablen

Gleichung besteht aus 2 Termen, in denen i. d. R. Variablen enthalten sind

Gleichheit

Gleichung als Aussageform, die zur (ggf. wahren) Aussage werden kann

Lösung

Lösung: Wert für Variable, der zur wahren Aussage führt

Äquivalenzumformung

Äquivalenzumformungen ändern Lösungsmenge nicht

(vgl. Weigand et al., 2022, S. 235 ff.)

abstrakte Anschaulichkeit

nur wesentliche Merkmale
und Relationen;
der Wahrnehmung und
Vorstellung zugänglich



Variablen

negative Werte
rationale Werte
Variable ändern

unterschiedliche Massestücke

Löcher, schwebende Massen
gebrochene Massen
Masse vergrößern

Einzelobjekte und Boxen

verschiedenfarbige Einzelobjekte
gebrochene Einzelobjekte
Einzelobjekte hinzufügen/wegnehmen

feste und variable Strecken

gerichtete Strecken (Pfeile)
entsprechend lange Strecken
Pfeillänge ändern

Gleichheit

Gleichgewicht

wird angenommen

gleiche Länge

Lösung

Masse x

Anzahl d. Elemente in Box

Länge der var. Strecke

Äquivalenzumformung

auf beiden Seiten **+** hinzufügen, **-** wegnehmen,
× vervielfachen und **÷** bündeln (und wegnehmen)

... und **÷** zerteilen
(und vergleichen)

abstrakte Anschaulichkeit

nur wesentliche Merkmale
und Relationen;
der Wahrnehmung und
Vorstellung zugänglich



Variablen

feste und variable Strecken

negative Werte

gerichtete Strecken (Pfeile)

rationale Werte

entsprechend lange Strecken

Variable ändern

Pfeillänge ändern

Gleichheit

gleiche Länge

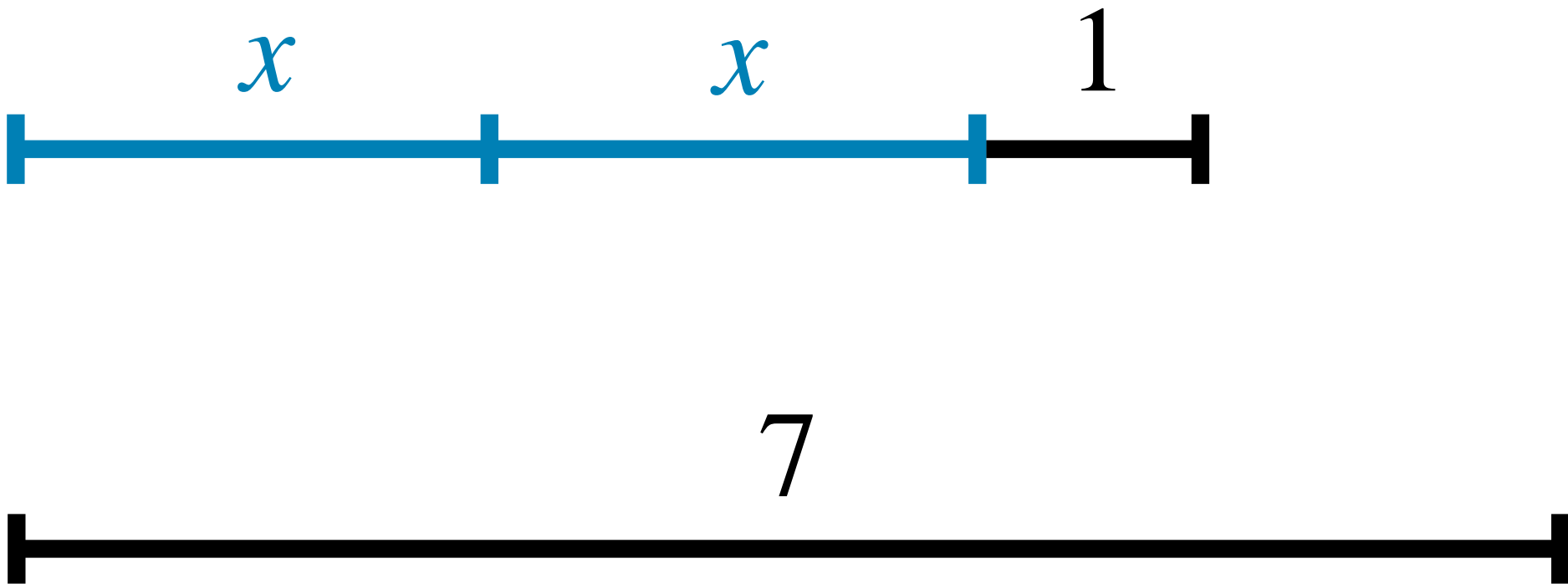
Lösung

Länge der var. Strecke

Äquivalenzumformung

auf beiden Seiten $+$ hinzufügen, $-$ wegnehmen,
 \times vervielfachen und \div zerteilen (und vergleichen)

$2x + 1 = 7$



abstrakte Anschaulichkeit

nur wesentliche Merkmale
und Relationen;
der Wahrnehmung und
Vorstellung zugänglich



Variablen

feste und variable Strecken

negative Werte
rationale Werte
Variable ändern

gerichtete Strecken (Pfeile)

entsprechend lange Strecken

Pfeillänge ändern

Gleichheit

gleiche Länge
bzw. gleiches Ende

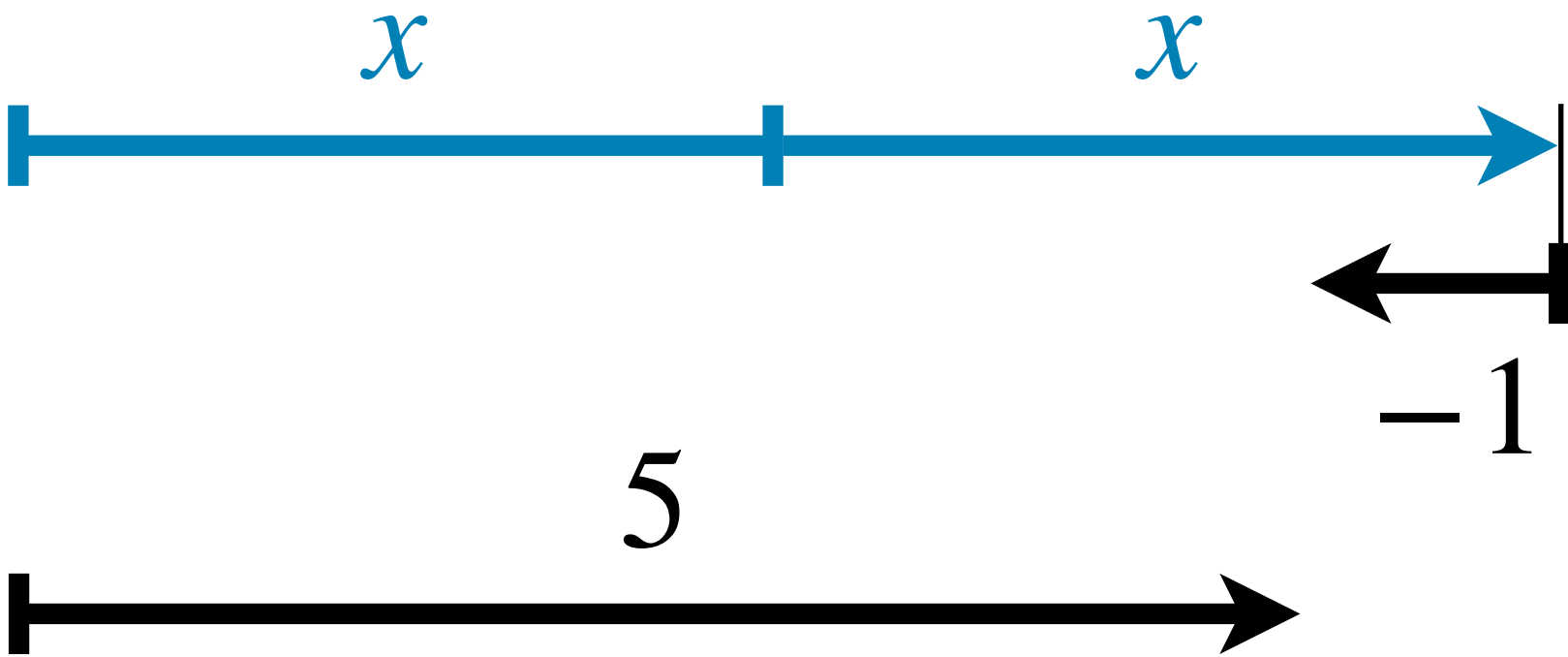
Lösung

Länge der var. Strecke

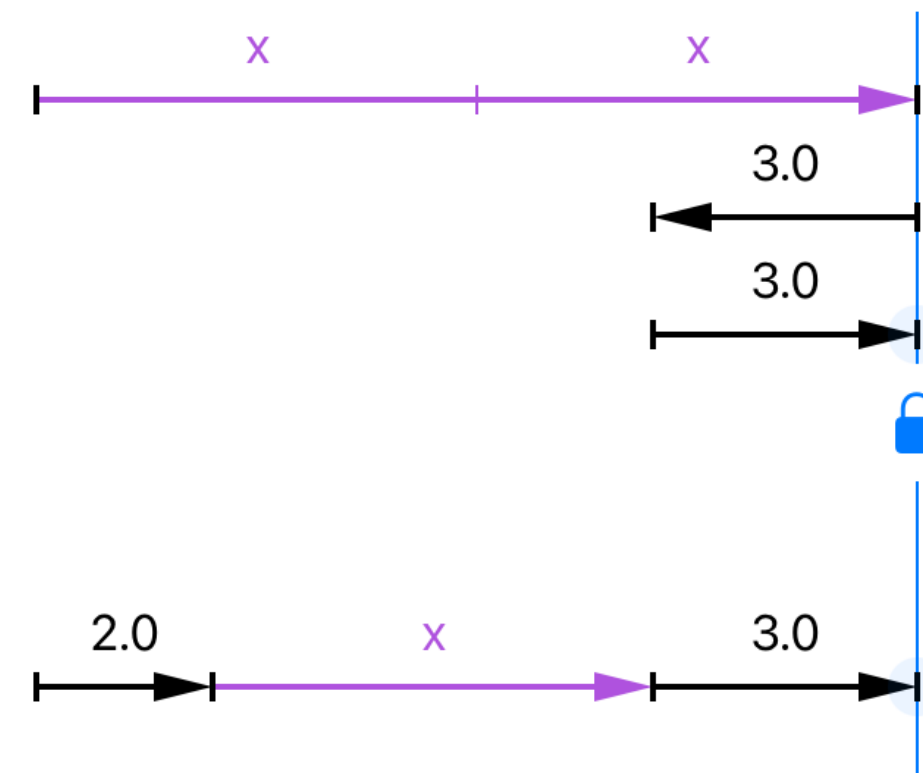
Äquivalenzumformung

auf beiden Seiten $+$ hinzufügen, $-$ wegnehmen,
 \times vervielfachen und \div zerteilen (und vergleichen)

$2x - 1 = 5$



Einblick



$$2x - 3 = 2 + x$$

+3 ↑

Beispiel 1 Beispiel 2 Beispiel 3

Quellen

Barzel, B., & Holzäpfel, L. (2011). Gleichungen verstehen. *mathematik lehren* 169, 2-7.

Giest, H., & Lompscher, J. (2006). *Lerntätigkeit – Lernen aus kultur-historischer Perspektive. Ein Beitrag zur Entwicklung einer neuen Lernkultur im Unterricht*. Lehmanns Media.

Lompscher, J. (1985). Die Ausbildung von Lernhandlungen. In J. Lompscher (Hrsg.), *Persönlichkeitsentwicklung in der Lerntätigkeit* (S. 53-78). Volk und Wissen.

Lompscher, J. (1996, 15.09). *Aufsteigen vom Abstrakten zum Konkreten – Lernen und Lehren in Zonen der nächsten Entwicklung*. Übersetzung eines Referats auf dem Symposium "Die ZdnE: Beziehungen zwischen Erziehung und Entwicklung" im Rahmen der 2. Internationalen Konferenz zur soziokulturellen Forschung, Genf. <https://publishup.uni-potsdam.de/opus4-ubp/frontdoor/deliver/index/docId/444/file/AUFSTEIG.pdf>

Weigand, H.-G., Schüler-Meyer, A., & Pinkernell, G. (2022). *Didaktik der Algebra: Nach der Vorlage von Hans-Joachim Vollrath*. Springer Berlin Heidelberg. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-64660-1>