Координатные функции и первые координатные множества

Корешков Василий, 04.12.19

Система имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &=& -\dfrac{\lambda_c x_0 x_3}{K_c - x_2 + 1} + x_0^{3/4}\left(1 - \sqrt[4]{\dfrac{x_0}{C_0}}\right)(k_c + \mu_c x_1) \\ \dot{x}_2 &=& -\lambda_p x_1 + x_1\left(1 - \dfrac{x_1}{P_0}\right)\left(k_p + \dfrac{\mu_p x_0}{K_p + x_0}\right) \\ \dot{x}_3 &=& k_r - x_2(\gamma_c x_0 + \gamma_p x_1 + \lambda_r) \\ \dot{x}_4 &=& \dfrac{k_t x_2}{K_t - x_2 + 1} - \lambda_t x_3 \end{cases} \tag{1}$$

0.1 Координатные функции

Рассмотрим координатные функции вида $\varphi_i = x_i\,,\ i = \overline{1,4}$. Вернемся для этого к уравнению $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$:

$$\begin{cases} -\dfrac{\lambda_c x_1 x_4}{K_c - x_3 + 1} + x_1^{\frac{3}{4}}\left(1 - \sqrt[4]{\dfrac{x_1}{C_0}}\right)(k_c + \mu_c x_2) &=& 0 \\ -\lambda_p x_2 + x_2\left(1 - \dfrac{x_2}{P_0}\right)\left(k_p + \dfrac{\mu_p x_1}{K_p + x_1}\right) &=& 0 \\ k_r - x_3(\gamma_c x_1 + \gamma_p x_2 + \lambda_r) &=& 0 \\ \dfrac{k_t x_3}{K_t - x_3 + 1} - \lambda_t x_4 &=& 0 \end{cases}$$

1. Для первой координатной функции имеем:

$$S_{\varphi_1} = \{x_1 = 0\} \cup \left\{x_1 = \frac{C_0 \alpha^4(x_2, x_3)}{\left(\sqrt[4]{C_0}\lambda_c x_4 + \alpha(x_2, x_3)\right)^4}\right\}$$

Явное выражение для x_1:

$$x_1 = \frac{C_0 \alpha^4(x_2, x_3)}{\left(\sqrt[4]{C_0}\lambda_c x_4 + \alpha(x_2, x_3)\right)^4}, \text{ где } \alpha = (k_c + \mu_c x_2)(K_c - x_3 + 1) > 0$$

$$\nabla\varphi_1 = \begin{pmatrix} \dfrac{4C_0^{\frac{5}{4}}\lambda_c \mu_c x_4 (k_c + \mu_c x_2)^3 (K_c - x_3 + 1)^4}{\left(\sqrt[4]{C_0}\lambda_c x_4 + (k_c + \mu_c x_2)(K_c - x_3 + 1)\right)^5} \\ -\dfrac{4C_0^{\frac{5}{4}}\lambda_c x_4 (k_c + \mu_c x_2)^4 (K_c - x_3 + 1)^3}{\left(\sqrt[4]{C_0}\lambda_c x_4 + (k_c + \mu_c x_2)(K_c - x_3 + 1)\right)^5} \\ -\dfrac{4C_0^{\frac{5}{4}}\lambda_c (k_c + \mu_c x_2)^4 (K_c - x_3 + 1)^4}{\left(\sqrt[4]{C_0}\lambda_c x_4 + (k_c + \mu_c x_2)(K_c - x_3 + 1)\right)^5} \end{pmatrix}^T$$

Отсюда видно, что градиент ни в какой точке не обращается в нуль, потому что любая компонента нигде не ноль, поскольку $\alpha > 0$. Конкретнее, $\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_2} > 0$, $\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_3} < 0$, $\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_4} < 0$.

Очевидно, $\varphi_{3\min} = 0$ (при $x_1 = 0$). Для установления супремума воспользуемся знаниями частных производных: значение будет тем больше, чем меньше x_3 и x_4 и чем больше x_2. Положив $x_3 = x_4 = 0$, получим $x_1 = C_0 \Rightarrow \varphi_{1\max} = C_0$

2. Для второй координатной функции:

$$S_{\varphi_2} = \{x_2 = 0\} \cup \left\{ x_2 = \frac{P_0 \left(K_p k_p - K_p \lambda_p + x_1 \left(k_p - \lambda_p + \mu_p\right)\right)}{-K_p k_p + x_1 \left(k_p + \mu_p\right)} \right\}$$

Явное выражение для x_2:

$$x_2 = \frac{P_0 \left(K_p k_p - K_p \lambda_p + x_1 \left(k_p - \lambda_p + \mu_p\right)\right)}{-K_p k_p + x_1 \left(k_p + \mu_p\right)}$$

$$x_2' = -P_0 \frac{\left(\left(k_p + \mu_p\right)\left(K_p k_p - K_p \lambda_p + x_1 \left(k_p - \lambda_p + \mu_p\right)\right) + \left(K_p k_p - x_1 \left(k_p + \mu_p\right)\right)\left(k_p - \lambda_p + \mu_p\right)\right)}{\left(K_p k_p - x_1 \left(k_p + \mu_p\right)\right)^2}$$

А точнее, $x_2' = K_p P_0 \dfrac{k_p \lambda_p + (k_p + \mu_p)(\lambda_p - 2k_p)}{\left(K_p k_p - x_1 \left(k_p + \mu_p\right)\right)^2}$

Таким образом, в зависимости от параметров, производная либо строго меньше нуля, либо больше, либо функция постоянна. В любом случае, экстремальные значения будут достигаться на границе.

$\varphi_2(0) = P_0 \left(\frac{\lambda_p}{k_p} - 1\right); \varphi_2(+\infty) = 1 - \frac{\lambda_p}{k_p + \mu_p}$ (на универсальном сечении, очевидно, φ_2 является функцией только x_1).

3. Явное выражение для x_3:

$$x_3 = \frac{k_r}{\gamma_c x_1 + \gamma_p x_2 + \lambda_r}$$

$$\nabla \varphi_3 = \begin{pmatrix} -\dfrac{\gamma_c k_r}{\left(\gamma_c x_1 + \gamma_p x_2 + \lambda_r\right)^2} & -\dfrac{\gamma_p k_r}{\left(\gamma_c x_1 + \gamma_p x_2 + \lambda_r\right)^2} \end{pmatrix}$$

Очевидно, что никогда не выполняется $\nabla x_3 = 0$ (раз все x неотрицательны), так что функция $\varphi_3(\vec{x}) = x_3$ достигает своих экстремальных значений (на универсальном сечении) лишь на границе, либо не достигает их вовсе. Действительно, видно, что достигается максимум при $x_1 = x_2 = 0$, при этом $\varphi_{3\max} = \dfrac{k_r}{\lambda_r}$ А вот минимального значения φ_3 не достигает, но $\varphi_{3\inf} = 0$, очевидно.

4. Явное выражение для x_4:

$$x_4 = \frac{k_t x_3}{\lambda_t \left(K_t - x_3 + 1\right)}$$

$$x_4' = \frac{k_t x_3}{\lambda_t \left(K_t - x_3 + 1\right)^2} + \frac{k_t}{\lambda_t \left(K_t - x_3 + 1\right)}$$

Приходим к выводу, что $\varphi_{4\,\min} = 0$ (достигается при $x_3 = 0$), а максимум достигается при $x_3 = 1, \varphi_{4\,\max} = \dfrac{k_t}{\lambda_t K_t}$

0.2 Построение последовательности локализующих функций и множеств

Мы смогли получить все 4 координатные функции. Каждая координатная функция определяет, таким образом, соответствующее локализующее множество Ω_i, полученное из $\overline{\mathbb{R}^4_+}$ следующим образом (далее всюду подразумеваются подмножества $\overline{\mathbb{R}^4_+}$):

$$\Omega_1 = \{x \mid x_1 \in [0, C_0]\}\,; \quad \Omega_2 = \{x \mid x_2 \in [\varphi_{2\,\inf}, \varphi_{2\,\sup}] \vee x_2 = 0\}$$

$$\Omega_3 = \left\{x \mid x_3 \in \left[0, \frac{k_r}{\lambda_r}\right]\right\}; \qquad \Omega_4 = \left\{x \mid x_3 \in \left[0, \frac{k_t}{\lambda_t K_t}\right]\right\};$$