Координатные функции и локализующие множества

Корешков Василий, 15.12.19

Система имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &=& -\dfrac{\lambda_c x_1 x_4}{K_c - x_3 + 1} + x_1^{3/4}\left(1 - \sqrt[4]{\dfrac{x_1}{C_0}}\right)(k_c + \mu_c x_2) \\ \dot{x}_2 &=& -\lambda_p x_2 + x_2\left(1 - \dfrac{x_2}{P_0}\right)\left(k_p + \dfrac{\mu_p x_1}{K_p + x_1}\right) \\ \dot{x}_3 &=& k_r - x_3\left(\gamma_c x_1 + \gamma_p x_2 + \lambda_r\right) \\ \dot{x}_4 &=& \dfrac{k_t x_3}{K_t - x_3 + 1} - \lambda_t x_4 \end{cases} \tag{1}$$

0.1 Координатные функции

Рассмотрим координатные функции вида $\varphi_i = x_i\,,\ i = \overline{1,4}$. Вернемся для этого к уравнению $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$:

$$\begin{cases} -\dfrac{\lambda_c x_1 x_4}{K_c - x_3 + 1} + x_1^{\frac{3}{4}}\left(1 - \sqrt[4]{\dfrac{x_1}{C_0}}\right)(k_c + \mu_c x_2) &=& 0 \\ -\lambda_p x_2 + x_2\left(1 - \dfrac{x_2}{P_0}\right)\left(k_p + \dfrac{\mu_p x_1}{K_p + x_1}\right) &=& 0 \\ k_r - x_3\left(\gamma_c x_1 + \gamma_p x_2 + \lambda_r\right) &=& 0 \\ \dfrac{k_t x_3}{K_t - x_3 + 1} - \lambda_t x_4 &=& 0 \end{cases}$$

1. Для первой координатной функции имеем:

$$S_{\varphi_1} = \{x_1 = 0\} \cup \left\{x_1 = \frac{C_0 \alpha^4(x_2, x_3)}{\left(\sqrt[4]{C_0}\lambda_c x_4 + \alpha(x_2, x_3)\right)^4}\right\}$$

Явное выражение для x_1:

$$x_1 = \frac{C_0 \alpha^4(x_2, x_3)}{\left(\sqrt[4]{C_0}\lambda_c x_4 + \alpha(x_2, x_3)\right)^4}, \text{ где } \alpha = (k_c + \mu_c x_2)(K_c - x_3 + 1) > 0$$

$$\nabla\varphi_1 = \begin{pmatrix} \dfrac{4C_0^{\frac{5}{4}}\lambda_c \mu_c x_4 (k_c + \mu_c x_2)^3 (K_c - x_3 + 1)^4}{\left(\sqrt[4]{C_0}\lambda_c x_4 + (k_c + \mu_c x_2)(K_c - x_3 + 1)\right)^5} \\ -\dfrac{4C_0^{\frac{5}{4}}\lambda_c x_4 (k_c + \mu_c x_2)^4 (K_c - x_3 + 1)^3}{\left(\sqrt[4]{C_0}\lambda_c x_4 + (k_c + \mu_c x_2)(K_c - x_3 + 1)\right)^5} \\ -\dfrac{4C_0^{\frac{5}{4}}\lambda_c (k_c + \mu_c x_2)^4 (K_c - x_3 + 1)^4}{\left(\sqrt[4]{C_0}\lambda_c x_4 + (k_c + \mu_c x_2)(K_c - x_3 + 1)\right)^5} \end{pmatrix}^T$$

Отсюда видно, что градиент ни в какой точке не обращается в нуль, потому что любая компонента нигде не ноль, поскольку $\alpha > 0$. Конкретнее, $\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_2} > 0$, $\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_3} < 0$, $\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_4} < 0$.

Очевидно, $\varphi_{1\min} = 0$ (при $x_1 = 0$). Для установления супремума воспользуемся сохренением знаков частных производных: значение будет тем больше, чем меньше x_3 и x_4 и чем больше x_2. Положив $x_3 = x_4 = 0$, получим $x_1 = C_0 \Rightarrow \varphi_{1\max} = C_0$

2. Для второй координатной функции:

$$S_{\varphi_2} = \{x_2 = 0\} \cup \left\{x_2 = \frac{P_0\left(K_p k_p - K_p\lambda_p + x_1\left(k_p - \lambda_p + \mu_p\right)\right)}{K_p k_p + x_1\left(k_p + \mu_p\right)}\right\}$$

Явное выражение для x_2:

$$x_2 = \frac{P_0\left(K_p k_p - K_p\lambda_p + x_1\left(k_p - \lambda_p + \mu_p\right)\right)}{K_p k_p + x_1\left(k_p + \mu_p\right)}$$

$$x_2' = -P_0\frac{\left(\left(k_p + \mu_p\right)\left(K_p k_p - K_p\lambda_p + x_1\left(k_p - \lambda_p + \mu_p\right)\right) + \left(K_p k_p - x_1\left(k_p + \mu_p\right)\right)\left(k_p - \lambda_p + \mu_p\right)\right)}{\left(K_p k_p + x_1\left(k_p + \mu_p\right)\right)^2}$$

А точнее, $x_2' = K_p P_0 \dfrac{k_p\lambda_p + (k_p + \mu_p)(\lambda_p - 2k_p)}{\left(K_p k_p + x_1\left(k_p + \mu_p\right)\right)^2}$

Докажем теперь, что производная (при допустимых значениях параметров) всегда меньше нуля. Для этого рассмотрим неравенство:

$$x_2' < 0 \;\Leftrightarrow\; k_p\lambda_p + (k_p + \mu_p)(\lambda_p - 2k_p) < 0 \;\Leftrightarrow\; 2k_p\lambda_p + \mu_p\lambda_p < 2k_p(k_p + \mu_p) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; \frac{\lambda_p}{k_p} < 2\frac{k_p + \mu_p}{2k_p + \mu_p}.$$

При этом известно, что $\lambda_p < k_p$. С другой стороны,

$$2\frac{k_p + \mu_p}{2k_p + \mu_p} = 1 + \frac{\mu_p}{2k_p + \mu_p} > 1.$$

Таким образом, данное неравенство выполняется при любых допустимых значениях параметров. Легко теперь получить $\varphi_{2\max}$ и $\varphi_{2\min}$:

$\varphi_2(0) = \varphi_{2\max} = P_0\left(1 - \frac{\lambda_p}{k_p}\right) > 0$; $\varphi_2(+\infty) = 1 - \frac{\lambda_p}{k_p + \mu_p}$. Однако $\varphi_{2\min} = 0$, так как $\{\, x_2 = 0\} \subset S_{\varphi_2}$.

3. Явное выражение для x_3:

$$x_3 = \frac{k_r}{\gamma_c x_1 + \gamma_p x_2 + \lambda_r}$$

$$\nabla\varphi_3 = \left(-\frac{\gamma_c k_r}{\left(\gamma_c x_1 + \gamma_p x_2 + \lambda_r\right)^2} \quad -\frac{\gamma_p k_r}{\left(\gamma_c x_1 + \gamma_p x_2 + \lambda_r\right)^2}\right)$$

Очевидно, что никогда не выполняется $\nabla x_3 = 0$ (раз все x неотрицательны), так что функция $\varphi_3(\vec{x}) = x_3$ достигает своих экстремальных значений (на универсальном сечении) лишь на границе, либо не достигает их вовсе. Действительно, видно, что достигается максимум при $x_1 = x_2 = 0$, при этом $\varphi_{3\max} = \dfrac{k_r}{\lambda_r}$. А вот минимального значения φ_3 не достигает, но $\varphi_{3\inf} = 0$, очевидно.

4. Явное выражение для x_4:

$$x_4 = \frac{k_t x_3}{\lambda_t \left(K_t - x_3 + 1\right)};$$

$$x_4' = \frac{k_t x_3}{\lambda_t \left(K_t - x_3 + 1\right)^2} + \frac{k_t}{\lambda_t \left(K_t - x_3 + 1\right)} > 0.$$

Приходим к выводу, что $\varphi_{4\min} = 0$ (достигается при $x_3 = 0$), а максимум достигается при $x_3 = 1, \varphi_{4\max} = \dfrac{k_t}{\lambda_t K_t}$

0.2 Построение последовательности локализующих функций и множеств

Мы смогли получить все 4 координатные функции. Каждая координатная функция определяет, таким образом, соответствующее локализующее множество Ω_i, полученное из $\overline{\mathbb{R}^4_+}$ следующим образом (далее всюду подразумеваются подмножества $\overline{\mathbb{R}^4_+}$):

$$\Omega_1 = \left\{x \mid x_1 \in [0, C_0]\right\}; \quad \Omega_2 = \left\{x \;\middle|\; x_2 \in \left[0, P_0\left(1 - \tfrac{\lambda_p}{k_p}\right)\right]\right\};$$

$$\Omega_3 = \left\{x \;\middle|\; x_3 \in \left[0, \frac{k_r}{\lambda_r}\right]\right\}; \qquad \Omega_4 = \left\{x \;\middle|\; x_4 \in \left[0, \frac{k_t}{\lambda_t K_t}\right]\right\}.$$

Приступим к построению первых четырех элементов последовательности локализующих функций, а именно: $\{\varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_1\}$.

1. **Первые 4 члена итерационной последовательности:**

   (a) Обозначим $G_1^1 \overset{\text{def}}{=} \Omega_2 = \left\{x_2 \in \left[0, P_0\left(1 - \dfrac{\lambda_p}{k_p}\right)\right]\right\}$.

   (b) φ_3 на G_1^1 имеет те же экстремальные значения на универсальном сечении, что и в $\overline{\mathbb{R}^4_+}$, так что

   $$G_2^1 = G_1^1 \cap \Omega_3 = \left\{\begin{aligned} & x_2 \in \left[0, P_0\left(1 - \frac{\lambda_p}{k_p}\right)\right] \\ & x_3 \in \left[0, \frac{k_r}{\lambda_r}\right] \end{aligned}\right\}.$$

   (c) Теперь воспользуемся тем, что ${x_4}'_{x_3} > 0$:

   $$\varphi_{4\sup}(G_2^1) = x_4(x_{3\max}) = \frac{k_t k_r}{\lambda_t (K_t \lambda_r - k_r + \lambda_r)}.$$

А $\varphi_{4\,\inf}$ остался неизменным. Таким образом:

$$G_3^1 = G_2^1 \cap S_{\varphi_4}(G_2^1) = \begin{Bmatrix} x_2 \in \left[0, P_0\left(1 - \frac{\lambda_p}{k_p}\right)\right] \\ x_3 \in \left[0, \frac{k_r}{\lambda_r}\right] \\ x_4 \in \left[0, \frac{k_t k_r}{\lambda_t(K_t\lambda_r - k_r + \lambda_r)}\right] \end{Bmatrix}.$$

(d) $\varphi_{1\,\inf}$ и $\varphi_{1\,\sup}$ не изменяются на G_3^1 из следующих соображений. Покуда x_4 не ограничен снизу числом, большим нуля, а $\varphi_1(x_4)$ на универсальном сечении — убывающая функция, то (в силу вида φ_1) $\varphi_{1\,\sup} = C_0$. Минимум же $= 0$, т.к. $\{x_1 = 0\} \subset S_{\varphi_1}$.

Таким образом,

$$G_4^1 = G_3^1 \cap S_{\varphi_1}(G_3^1) = \begin{Bmatrix} x_1 \in [0, C_0] \\ x_2 \in \left[0, P_0\left(1 - \frac{\lambda_p}{k_p}\right)\right] \\ x_3 \in \left[0, \frac{k_r}{\lambda_r}\right] \\ x_4 \in \left[0, \frac{k_t k_r}{\lambda_t(K_t\lambda_r - k_r + \lambda_r)}\right] \end{Bmatrix}.$$

2. **Вторые 4 члена итерационной последовательности:**

(a) $\varphi_{2\,\inf}(G_4^1) = 0\ (x_2 = 0),\ \varphi_{2\,\sup}(G_4^1) = P_0\left(1 - \frac{\lambda_p}{k_p}\right) \Rightarrow G_1^2 = G_4^1.$

(b) $\varphi_{3\,\sup}(G_1^2) = \dfrac{k_r}{\lambda_r},\ \varphi_{3\,\inf}(G_1^2) = \dfrac{k_r k_p}{\gamma_c C_0 k_p + \gamma_p P_0(k_p - \lambda_p) + \lambda_r k_p};$

$$G_2^2 = G_1^2 \cap S_{\varphi_3}(G_1^2) = \begin{Bmatrix} x_1 \in [0, C_0] \\ x_2 \in \left[0, P_0\left(1 - \frac{\lambda_p}{k_p}\right)\right] \\ x_3 \in \left[\frac{k_r k_p}{\gamma_c C_0 k_p + \gamma_p P_0(k_p - \lambda_p) + \lambda_r k_p}, \frac{k_r}{\lambda_r}\right] \\ x_4 \in \left[0, \frac{k_t k_r}{\lambda_t(K_t\lambda_r - k_r + \lambda_r)}\right] \end{Bmatrix}.$$

Это очень важный момент, поскольку мы наконец-то получили некоторое ограничение снизу для фазовых переменных, без которого многие оценки оказывались до этого бессмысленными.

(c) Опять воспользуемся тем, что ${x_4}'_{x_3} > 0$: $\varphi_{4\,\sup}(G_2^2)$ остается тем же, $\varphi_{4\,\inf}(G_2^2) = x_4\left(\frac{k_r k_p}{\gamma_c C_0 k_p + \gamma_p P_0(k_p - \lambda_p) + \lambda_r k_p}\right) \Rightarrow$

$$\varphi_{4\,\inf}(G_2^2) = \frac{k_p k_r k_t}{\lambda_t\left(-k_p k_r + (K_t + 1)\left(C_0\gamma_c k_p + P_0\gamma_p\left(k_p - \lambda_p\right) + k_p\lambda_r\right)\right)}. \Rightarrow$$

$$G_3^2 = G_2^2 \cap S_{\varphi_4}(G_2^2) = \begin{Bmatrix} x_1 \in [0, C_0] \\ x_2 \in \left[0, P_0\left(1 - \frac{\lambda_p}{k_p}\right)\right] \\ x_3 \in \left[\frac{k_r k_p}{\gamma_c C_0 k_p + \gamma_p P_0(k_p - \lambda_p) + \lambda_r k_p}, \frac{k_r}{\lambda_r}\right] \\ x_4 \in \left[\varphi_{4\,\inf}(G_2^2), \frac{k_t k_r}{\lambda_t(K_t\lambda_r - k_r + \lambda_r)}\right] \end{Bmatrix}.$$

(d) $\varphi_{1\,\inf}(G_3^2) = 0$. Памятуя, что $\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} > 0$, $\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_3} < 0$, $\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_4} < 0$, установим (если считать $\varphi_1 = x_1(x_2, x_3, x_4)$ на S_{φ_1}): $\varphi_{1\,\sup}(G_3^2) = x_1\left(P_0\left(1 - \frac{\lambda_p}{k_p}\right), \varphi_{3\,\inf}(G_1^2), \varphi_{1\,\inf}(G_2^2)\right)$, а именно:

$$\varphi_{1\,\sup}(G_3^2) = C_0 \frac{E^4}{D^4}, \text{ где:}$$

$$E = \lambda_t \left(k_p k_r - (K_c + 1)\left(C_0 \gamma_c k_p + P_0 \gamma_p \left(k_p - \lambda_p\right) + k_p \lambda_r\right)\right) \cdot \\ \cdot \left(k_p k_r - (K_t + 1)\left(C_0 \gamma_c k_p + P_0 \gamma_p \left(k_p - \lambda_p\right) + k_p \lambda_r\right)\right)\left(P_0 \mu_c \left(k_p - \lambda_p\right) + k_c k_p\right);$$

$$D = \sqrt[4]{C_0} k_p^2 k_r k_t \lambda_c \left(C_0 \gamma_c k_p + P_0 \gamma_p \left(k_p - \lambda_p\right) + k_p \lambda_r\right) + \\ + \lambda_t \left(k_p k_r - (K_c + 1)\left(C_0 \gamma_c k_p + P_0 \gamma_p \left(k_p - \lambda_p\right) + k_p \lambda_r\right)\right) \cdot \\ \cdot \left(k_p k_r - (K_t + 1)\left(C_0 \gamma_c k_p + P_0 \gamma_p \left(k_p - \lambda_p\right) + k_p \lambda_r\right)\right)\left(P_0 \mu_c \left(k_p - \lambda_p\right) + k_c k_p\right).$$

$$\text{Получили: } G_4^2 = G_3^2 \cap S_{\varphi_1}(G_3^2) = \left\{\begin{array}{l} x_1 \in \left[0, \varphi_{1\,\sup}(G_3^2)\right] \\ x_2 \in \left[0, P_0\left(1 - \frac{\lambda_p}{k_p}\right)\right] \\ x_3 \in \left[\frac{k_r k_p}{\gamma_c C_0 k_p + \gamma_p P_0 (k_p - \lambda_p) + \lambda_r k_p}, \frac{k_r}{\lambda_r}\right] \\ x_4 \in \left[\varphi_{4\,\inf}(G_2^2), \frac{k_t k_r}{\lambda_t (K_t \lambda_r - k_r + \lambda_r)}\right] \end{array}\right\}.$$