

Система имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{\lambda_c x_1 x_4}{K_c - x_3 + 1} + x_1^{3/4} \left(1 - \sqrt[4]{\frac{x_1}{C_0}}\right) (k_c + \mu_c x_2) \\ \dot{x}_2 = -\lambda_p x_2 + x_2 \left(1 - \frac{x_2}{P_0}\right) \left(k_p + \frac{\mu_p x_1}{K_p + x_1}\right) \\ \dot{x}_3 = k_r - x_3 (\gamma_c x_1 + \gamma_p x_2 + \lambda_r) \\ \dot{x}_4 = \frac{k_t x_3}{K_t - x_3 + 1} - \lambda_t x_4 \end{cases} \quad (1)$$

0.1 Координатные функции

Рассмотрим координатные функции вида $\varphi_i = x_i$, $i = \overline{1, 4}$. Вернемся для этого к уравнению $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$:

$$\begin{cases} -\frac{\lambda_c x_1 x_4}{K_c - x_3 + 1} + x_1^{3/4} \left(1 - \sqrt[4]{\frac{x_1}{C_0}}\right) (k_c + \mu_c x_2) = 0 \\ -\lambda_p x_2 + x_2 \left(1 - \frac{x_2}{P_0}\right) \left(k_p + \frac{\mu_p x_1}{K_p + x_1}\right) = 0 \\ k_r - x_3 (\gamma_c x_1 + \gamma_p x_2 + \lambda_r) = 0 \\ \frac{k_t x_3}{K_t - x_3 + 1} - \lambda_t x_4 = 0 \end{cases}$$

1. Для первой координатной функции имеем:

$$S_{\varphi_1} = \{x_1 = 0\} \cup \left\{x_1 = \frac{C_0 \alpha^4(x_2, x_3)}{(\sqrt[4]{C_0} \lambda_c x_4 + \alpha(x_2, x_3))^4}\right\}$$

Явное выражение для x_1 :

$$x_1 = \frac{C_0 \alpha^4(x_2, x_3)}{(\sqrt[4]{C_0} \lambda_c x_4 + \alpha(x_2, x_3))^4}, \text{ где } \alpha = (k_c + \mu_c x_2) (K_c - x_3 + 1) > 0$$

$$\nabla \varphi_1 = \begin{pmatrix} \frac{4C_0^{5/4} \lambda_c \mu_c x_4 (k_c + \mu_c x_2)^3 (K_c - x_3 + 1)^4}{(\sqrt[4]{C_0} \lambda_c x_4 + (k_c + \mu_c x_2) (K_c - x_3 + 1))^5} \\ -\frac{4C_0^{5/4} \lambda_c x_4 (k_c + \mu_c x_2)^4 (K_c - x_3 + 1)^3}{(\sqrt[4]{C_0} \lambda_c x_4 + (k_c + \mu_c x_2) (K_c - x_3 + 1))^5} \\ -\frac{4C_0^{5/4} \lambda_c (k_c + \mu_c x_2)^4 (K_c - x_3 + 1)^4}{(\sqrt[4]{C_0} \lambda_c x_4 + (k_c + \mu_c x_2) (K_c - x_3 + 1))^5} \end{pmatrix}^T$$

Отсюда видно, что градиент ни в какой точке не обращается в нуль, потому что любая компонента нигде не ноль, поскольку $\alpha > 0$. Конкретнее, $\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} > 0$, $\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_3} < 0$, $\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_4} < 0$.

Очевидно, $\varphi_{1\min} = 0$ (при $x_1 = 0$). Для установления супремума воспользуемся сохранением знаков частных производных: значение будет тем больше, чем меньше x_3 и x_4 и чем больше x_2 . Положив $x_3 = x_4 = 0$, получим $x_1 = C_0 \Rightarrow \varphi_{1\max} = C_0$

2. Для второй координатной функции:

$$S_{\varphi_2} = \{x_2 = 0\} \cup \left\{ x_2 = \frac{P_0 (K_p k_p - K_p \lambda_p + x_1 (k_p - \lambda_p + \mu_p))}{K_p k_p + x_1 (k_p + \mu_p)} \right\}$$

Явное выражение для x_2 :

$$x_2 = \frac{P_0 (K_p k_p - K_p \lambda_p + x_1 (k_p - \lambda_p + \mu_p))}{K_p k_p + x_1 (k_p + \mu_p)}$$

$$x'_2 = -P_0 \frac{((k_p + \mu_p) (K_p k_p - K_p \lambda_p + x_1 (k_p - \lambda_p + \mu_p)) + (K_p k_p - x_1 (k_p + \mu_p)) (k_p - \lambda_p + \mu_p))}{(K_p k_p + x_1 (k_p + \mu_p))^2}$$

А точнее, $x'_2 = K_p P_0 \frac{k_p \lambda_p + (k_p + \mu_p)(\lambda_p - 2k_p)}{(K_p k_p + x_1 (k_p + \mu_p))^2}$

Докажем теперь, что производная (при допустимых значениях параметров) всегда меньше нуля. Для этого рассмотрим неравенство:

$$\begin{aligned} x'_2 < 0 &\Leftrightarrow k_p \lambda_p + (k_p + \mu_p)(\lambda_p - 2k_p) < 0 \Leftrightarrow 2k_p \lambda_p + \mu_p \lambda_p < 2k_p (k_p + \mu_p) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{\lambda_p}{k_p} < 2 \frac{k_p + \mu_p}{2k_p + \mu_p}. \end{aligned}$$

При этом известно, что $\lambda_p < k_p$. С другой стороны,

$$2 \frac{k_p + \mu_p}{2k_p + \mu_p} = 1 + \frac{\mu_p}{2k_p + \mu_p} > 1.$$

Таким образом, данное неравенство выполняется при любых допустимых значениях параметров. Легко теперь получить $\varphi_{2\max}$ и $\varphi_{2\min}$:

$$\varphi_2(0) = \varphi_{2\max} = P_0 \left(1 - \frac{\lambda_p}{k_p}\right) > 0; \quad \varphi_2(+\infty) = 1 - \frac{\lambda_p}{k_p + \mu_p}. \quad \text{Однако } \varphi_{2\min} = 0, \text{ так как } \{x_2 = 0\} \subset S_{\varphi_2}.$$

3. Явное выражение для x_3 :

$$x_3 = \frac{k_r}{\gamma_c x_1 + \gamma_p x_2 + \lambda_r}$$

$$\nabla \varphi_3 = \left(-\frac{\gamma_c k_r}{(\gamma_c x_1 + \gamma_p x_2 + \lambda_r)^2} \quad -\frac{\gamma_p k_r}{(\gamma_c x_1 + \gamma_p x_2 + \lambda_r)^2} \right)$$

Очевидно, что никогда не выполняется $\nabla x_3 = 0$ (раз все x неотрицательны), так что функция $\varphi_3(\vec{x}) = x_3$ достигает своих экстремальных значений (на универсальном сечении)

лишь на границе, либо не достигает их вовсе. Действительно, видно, что достигается максимум при $x_1 = x_2 = 0$, при этом $\varphi_{3\max} = \frac{k_r}{\lambda_r}$. А вот минимального значения φ_3 не достигает, но $\varphi_{3\inf} = 0$, очевидно.

4. Явное выражение для x_4 :

$$x_4 = \frac{k_t x_3}{\lambda_t (K_t - x_3 + 1)};$$

$$x_4' = \frac{k_t x_3}{\lambda_t (K_t - x_3 + 1)^2} + \frac{k_t}{\lambda_t (K_t - x_3 + 1)} > 0.$$

Приходим к выводу, что $\varphi_{4\min} = 0$ (достигается при $x_3 = 0$), а максимум достигается при $x_3 = 1$, $\varphi_{4\max} = \frac{k_t}{\lambda_t K_t}$.

0.2 Построение последовательности локализующих функций и множеств

Мы смогли получить все 4 координатные функции. Каждая координатная функция определяет, таким образом, соответствующее локализующее множество Ω_i , полученное из $\overline{\mathbb{R}_+^4}$ следующим образом (далее всюду подразумеваются подмножества $\overline{\mathbb{R}_+^4}$):

$$\Omega_1 = \{x \mid x_1 \in [0, C_0]\}; \quad \Omega_2 = \left\{x \mid x_2 \in \left[0, P_0 \left(1 - \frac{\lambda_p}{k_p}\right)\right]\right\};$$

$$\Omega_3 = \left\{x \mid x_3 \in \left[0, \frac{k_r}{\lambda_r}\right]\right\}; \quad \Omega_4 = \left\{x \mid x_4 \in \left[0, \frac{k_t}{\lambda_t K_t}\right]\right\}.$$

Приступим к построению первых четырех элементов последовательности локализующих функций, а именно: $\{\varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_1\}$.

1. Первые 4 члена итерационной последовательности:

(а) Обозначим $G_1^1 \stackrel{\text{def}}{=} \Omega_2 = \left\{x_2 \in \left[0, P_0 \left(1 - \frac{\lambda_p}{k_p}\right)\right]\right\}$.

(б) $\frac{\varphi_3}{\overline{\mathbb{R}_+^4}}$ на G_1^1 имеет те же экстримальные значения на универсальном сечении, что и в $\overline{\mathbb{R}_+^4}$, так что

$$G_2^1 = G_1^1 \cap \Omega_3 = \left\{ \begin{array}{l} x_2 \in \left[0, P_0 \left(1 - \frac{\lambda_p}{k_p}\right)\right] \\ x_3 \in \left[0, \frac{k_r}{\lambda_r}\right] \end{array} \right\}.$$

(с) Теперь воспользуемся тем, что $x_{4x_3}' > 0$:

$$\varphi_{4\sup}(G_2^1) = x_4(x_{3\max}) = \frac{k_t k_r}{\lambda_t (K_t \lambda_r - k_r + \lambda_r)}.$$

А $\varphi_{4\inf}$ остался неизменным. Таким образом:

$$G_3^1 = G_2^1 \cap S_{\varphi_4}(G_2^1) = \left\{ \begin{array}{l} x_2 \in \left[0, P_0 \left(1 - \frac{\lambda_p}{k_p}\right)\right] \\ x_3 \in \left[0, \frac{k_r}{\lambda_r}\right] \\ x_4 \in \left[0, \frac{k_t k_r}{\lambda_t (K_t \lambda_r - k_r + \lambda_r)}\right] \end{array} \right\}.$$

- (d) $\varphi_{1\inf}$ и $\varphi_{1\sup}$ не изменяются на G_3^1 из следующих соображений. Покуда x_4 не ограничен снизу числом, большим нуля, а $\varphi_1(x_4)$ на универсальном сечении — убывающая функция, то (в силу вида φ_1) $\varphi_{1\sup} = C_0$. Минимум же $= 0$, т.к. $\{x_1 = 0\} \subset S_{\varphi_1}$.

Таким образом,

$$G_4^1 = G_3^1 \cap S_{\varphi_1}(G_3^1) = \left\{ \begin{array}{l} x_1 \in [0, C_0] \\ x_2 \in \left[0, P_0 \left(1 - \frac{\lambda_p}{k_p}\right)\right] \\ x_3 \in \left[0, \frac{k_r}{\lambda_r}\right] \\ x_4 \in \left[0, \frac{k_t k_r}{\lambda_t (K_t \lambda_r - k_r + \lambda_r)}\right] \end{array} \right\}.$$

2. Вторые 4 члена итерационной последовательности:

- (a) $\varphi_{2\inf}(G_4^1) = 0$ ($x_2 = 0$), $\varphi_{2\sup}(G_4^1) = P_0 \left(1 - \frac{\lambda_p}{k_p}\right) \Rightarrow G_1^2 = G_4^1$.

- (b) $\varphi_{3\sup}(G_1^2) = \frac{k_r}{\lambda_r}$, $\varphi_{3\inf}(G_1^2) = \frac{k_r k_p}{\gamma_c C_0 k_p + \gamma_p P_0 (k_p - \lambda_p) + \lambda_r k_p}$;

$$G_2^2 = G_1^2 \cap S_{\varphi_3}(G_1^2) = \left\{ \begin{array}{l} x_1 \in [0, C_0] \\ x_2 \in \left[0, P_0 \left(1 - \frac{\lambda_p}{k_p}\right)\right] \\ x_3 \in \left[\frac{k_r k_p}{\gamma_c C_0 k_p + \gamma_p P_0 (k_p - \lambda_p) + \lambda_r k_p}, \frac{k_r}{\lambda_r}\right] \\ x_4 \in \left[0, \frac{k_t k_r}{\lambda_t (K_t \lambda_r - k_r + \lambda_r)}\right] \end{array} \right\}.$$

Это очень важный момент, поскольку мы наконец-то получили некоторое ограничение снизу для фазовых переменных, без которого многие оценки оказывались до этого бессмысленными.

- (c) Опять воспользуемся тем, что $x_{4x_3}' > 0$: $\varphi_{4\sup}(G_2^2)$ остается тем же, $\varphi_{4\inf}(G_2^2) = x_4 \left(\frac{k_r k_p}{\gamma_c C_0 k_p + \gamma_p P_0 (k_p - \lambda_p) + \lambda_r k_p} \right) \Rightarrow$

$$\varphi_{4\inf}(G_2^2) = \frac{k_p k_r k_t}{\lambda_t (-k_p k_r + (K_t + 1) (C_0 \gamma_c k_p + P_0 \gamma_p (k_p - \lambda_p) + k_p \lambda_r))}. \Rightarrow$$

$$G_3^2 = G_2^2 \cap S_{\varphi_4}(G_2^2) = \left\{ \begin{array}{l} x_1 \in [0, C_0] \\ x_2 \in \left[0, P_0 \left(1 - \frac{\lambda_p}{k_p}\right)\right] \\ x_3 \in \left[\frac{k_r k_p}{\gamma_c C_0 k_p + \gamma_p P_0 (k_p - \lambda_p) + \lambda_r k_p}, \frac{k_r}{\lambda_r}\right] \\ x_4 \in \left[\varphi_{4\inf}(G_2^2), \frac{k_t k_r}{\lambda_t (K_t \lambda_r - k_r + \lambda_r)}\right] \end{array} \right\}.$$

(d) $\varphi_{1\inf}(G_3^2) = 0$. Памятуя, что $\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2} > 0$, $\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_3} < 0$, $\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_4} < 0$, установим (если считать $\varphi_1 = x_1(x_2, x_3, x_4)$ на S_{φ_1}): $\varphi_{1\sup}(G_3^2) = x_1 \left(P_0 \left(1 - \frac{\lambda_p}{k_p} \right), \varphi_{3\inf}(G_1^2), \varphi_{1\inf}(G_2^2) \right)$, а именно:

$$\varphi_{1\sup}(G_3^2) = C_0 \frac{E^4}{D^4}, \text{ где:}$$

$$E = \lambda_t (k_p k_r - (K_c + 1) (C_0 \gamma_c k_p + P_0 \gamma_p (k_p - \lambda_p) + k_p \lambda_r)) \cdot \\ \cdot (k_p k_r - (K_t + 1) (C_0 \gamma_c k_p + P_0 \gamma_p (k_p - \lambda_p) + k_p \lambda_r)) (P_0 \mu_c (k_p - \lambda_p) + k_c k_p);$$

$$D = \sqrt[4]{C_0} k_p^2 k_r k_t \lambda_c (C_0 \gamma_c k_p + P_0 \gamma_p (k_p - \lambda_p) + k_p \lambda_r) + \\ + \lambda_t (k_p k_r - (K_c + 1) (C_0 \gamma_c k_p + P_0 \gamma_p (k_p - \lambda_p) + k_p \lambda_r)) \cdot \\ \cdot (k_p k_r - (K_t + 1) (C_0 \gamma_c k_p + P_0 \gamma_p (k_p - \lambda_p) + k_p \lambda_r)) (P_0 \mu_c (k_p - \lambda_p) + k_c k_p).$$

$$\text{Получили: } G_4^2 = G_3^2 \cap S_{\varphi_1}(G_3^2) = \left\{ \begin{array}{l} x_1 \in [\varphi_{1\sup}(G_3^2), C_0] \\ x_2 \in \left[0, P_0 \left(1 - \frac{\lambda_p}{k_p} \right) \right] \\ x_3 \in \left[\frac{k_r k_p}{\gamma_c C_0 k_p + \gamma_p P_0 (k_p - \lambda_p) + \lambda_r k_p}, \frac{k_r}{\lambda_r} \right] \\ x_4 \in \left[\varphi_{4\inf}(G_2^2), \frac{k_t k_r}{\lambda_t (K_t \lambda_r - k_r + \lambda_r)} \right] \end{array} \right\}.$$