Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ Фундаментальные науки

КАФЕДРА Математическое моделирование

РАСЧЕТНО-ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

К НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ

НА ТЕМУ:

«Исследование ресурсных сетей с приходящим ресурсом»

Студент ФН12-11М
(Группа) (Подпись, дата) Корешков В.Р.
(И.О.Фамилия)

Руководитель
(Подпись, дата) (И.О.Фамилия)

Научный консультант
(Подпись, дата) (И.О.Фамилия)

2021 г.

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

УТВЕРЖДАЮ

Заведующий кафедрой ___________
(Индекс)

_______________ _______________
(И.О.Фамилия)

« _____ » _____________ 20 ____ г.

З А Д А Н И Е
на выполнение научно-исследовательской работы

по теме ____________ Исследование ресурсных сетей с приходящим ресурсом ____________

Студент группы ФН12-11М

Корешков Василий Романович
(Фамилия, имя, отчество)

Направленность НИР (учебная, исследовательская, практическая, производственная, др.)

____

Источник тематики (кафедра, предприятие, НИР) _______________________________________

График выполнения НИР: 25% к ___ нед., 50% к ___ нед., 75% к __ нед., 100% к ___ нед.

Техническое задание Ознакомиться с понятием ресурсной сети, изучить поведение обыкновенных регулярных ресурсных сетей. Рассмотреть ресурсные сети с нетривиальной эргодической поглощающей компонентой. Изучить предельное поведение такой сети в регулярном случае при малом ресурсе. Написать программу для моделирования подобных ресурсных сетей и визуализации результатов.

Оформление научно-исследовательской работы:

Расчетно-пояснительная записка на 21 листе формата А4.
Перечень графического (иллюстративного) материала (чертежи, плакаты, слайды и т.п.)

____

____

____

Дата выдачи задания « 6 » октября 2021 г.

Руководитель НИР __________________ __________________
(Подпись, дата) (И.О.Фамилия)

Студент __________________ Корешков В.Р.
(Подпись, дата) (И.О.Фамилия)

Примечание: Задание оформляется в двух экземплярах: один выдается студенту, второй хранится на кафедре.

Содержание

1 Введение

Ресурсная сеть представляет собой динамическую графовую модель с дискретным временем, в которой каждой вершине в каждый момент времени ставится в соответствие «ресурс» – некоторое неотрицательное вещественное число. В каждый новый момент времени ресурс в сети некоторым образом перераспределяется между вершинами так, чтобы суммарное его количество ресурса оставалось неизменным.

Ресурсные сети впервые появились в работе [1] и с тех пор они, как и различные их модификации, изучались разными исследователями [2]. В зависимости от топологии сети выделяются разные случаи, обладающие разными свойствами. В частности, выделяют сети с поглощающими компонентами, то есть такие, у которых присутствуют стоковые вершины. Более сложный (и до сих пор не изученный) случай – наличие вместо стоковых вершин целых эргодических компонент.

Данная работа нацелена на изучение модификации модели ресурсной сети, в которую прибывает ресурс, в случае эргодической регулярной сети. Будут доказаны некоторые утверждения о таких сетях, а также приведены примеры и проведены численные эксперименты.

2 Основная часть

2.1 Основные понятия

Неформально говоря, ресурсная сеть – ориентированный размеченный граф, в каждой вершине которого находится некоторое количество «ресурса». Ресурс есть некоторое неотрицательное вещественное число. Можно мыслить о ресурсе как о жидкости, к примеру. Ресурсная сеть образует динамическую систему с дискретным временем. А именно, каждый такт ресурс перераспределяется между вершинами так, чтобы суммарное количество ресурса в сети оставалось неизменным. Каждая вершина «отдает» в каждое из своих ребер ресурс, пропорциональный пропускной способности (метке) этого ребра, но не больше, чем сама пропускная способность. Таким образом, если в каждой вершине ресурса достаточно мало, то система функционирует наподобие цепи Маркова (с поправкой на некоторый коэффициент). Если же ресурса много, то в каждую вершину приходит столько ресурса, какова суммарная пропускная способность входящих в эту вершину ребер (по крайней мере, некоторое время). Оба этих случая по отдельности кажутся очень простыми, однако сложность представляет исследование именно промежуточных состояний, то есть таких, при которых часть вершин содержит мало ресурса, а часть – много.

Определим теперь понятие ресурсной сети более формально.

Определение 1. *Ресурсная сеть* – это тройка $\mathcal{S} = (G, D, S)$, где:

- $G = (V, E)$ – ориентированный граф, дуги E которого размечены над множеством $\mathbb{R}_+$ неотрицательных вещественных чисел, а $|V| = n$. Метки дуг лучше всего понимать как аналог пропускной способности. Предположим, что зафиксирована некоторая нумерация вершин $num : V \to \overline{1, n}$. Тогда метку дуги e_{ij} будем записывать как r_{ij} ($r_{ij} = 0$ если дуги не существует);

- D – множество (допустимых) состояний динамической системы, т.е. некоторое подмножество множества $(V \to \mathbb{R}_+)$. Менее формально говоря: каждой вершине v может быть присвоено некоторое значение из множества $\mathbb{R}_+$, но, вообще говоря, не все значения из $\mathbb{R}_+$ могут быть допустимыми. Произвольное состояние из D будем обозначать как $q \in D$. Если нумерация вершин считается фиксированной, то под q будем понимать n-мерный вектор, т.е. $q \circ num^{-1}$;

- $S : D \to D$ – функция эволюции динамической системы, при этом S однозначно определяется G и D. Здесь и далее будем считать нумерацию вершин заданной. В этом случае максимальный выходной поток определим как:
$$r_i^{out} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^{n} r_{ij}$$
Затем определим матрицу потока:
$$f(q) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \min\left\{r_{11}, \frac{r_{11}}{r_1^{out}} \cdot q_1\right\} & \min\left\{r_{12}, \frac{r_{12}}{r_1^{out}} \cdot q_1\right\} & \ldots & \min\left\{r_{1n}, \frac{r_{1n}}{r_1^{out}} \cdot q_1\right\} \\ \min\left\{r_{21}, \frac{r_{21}}{r_2^{out}} \cdot q_2\right\} & \min\left\{r_{22}, \frac{r_{22}}{r_2^{out}} \cdot q_2\right\} & \ldots & \min\left\{r_{2n}, \frac{r_{2n}}{r_2^{out}} \cdot q_2\right\} \\ \ldots & \ldots & \ddots & \ldots \\ \min\left\{r_{n1}, \frac{r_{n1}}{r_n^{out}} \cdot q_n\right\} & \min\left\{r_{n2}, \frac{r_{n2}}{r_n^{out}} \cdot q_n\right\} & \ldots & \min\left\{r_{nn}, \frac{r_{nn}}{r_n^{out}} \cdot q_n\right\} \end{pmatrix}$$
Поток из i-й вершины в j-ю есть в точности то количество ресурса, которое придет из i-й вершины в j-ю под действием S. Следует отметить, что 1) ресурс, приходящий из разных вершин, складывается и 2) если выходной поток превышает текущее количество ресурса в вершине, то излишек не пропадает, а остается в вершине. Таким образом, сформулируем наконец определение функции динамической системы S:
$$S(q) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} q_1 + \sum\limits_{i=1}^{n} f_{1i}(q) - \sum\limits_{i=1}^{n} f_{i1}(q) \\ q_2 + \sum\limits_{i=1}^{n} f_{2i}(q) - \sum\limits_{i=1}^{n} f_{i2}(q) \\ \ldots \\ q_n + \sum\limits_{i=1}^{n} f_{ni}(q) - \sum\limits_{i=1}^{n} f_{in}(q) \end{pmatrix}.$$

За более подробными разъяснениями понятия ресурсной сети и характерными примерами следует обратиться к соответствующим работам, например [2].

Примечание: Как можно видеть, довольно сложно сформулировать определение ресурсной сети, инвариантное относительно выбранной нумерации вершин. В связи с этим для легкости дальнейшего изложения зафиксируем нумерацию, покуда это не вызовет недопониманий.

Дискретная динамическая система определяется стандартно: пусть дано некоторое начальное состояние $q^0 \in D$, тогда определим:

$$\begin{cases} q(0) = q^0; \\ q(t) = S(q(t-1)),\ t \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{1}$$

Введем еще несколько дополнительных определений, которые потребуются нам в дальнейшем.

Определение 2. Ресурсная сеть называется *эргодической*, если ее граф G сильно связен.

С каждой ресурсной сетью можно ассоциировать (взвешенную) матрицу смежности ее графа. Обозначим ее R.

Определение 3. Ресурсная сеть называется *регулярной*, если некоторая степень матрицы смежности содержит только положительные элементы. Иначе говоря, НОД длин всех циклов в графе равен 1.

Определим теперь поведение вершин в зависимости от количества ресурса в них.

Определение 4. Пусть дано некоторое состояние q ресурсной сети. Тогда определим

$$Z^-(q) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ v_i \in G \mid q_i \le r_i^{out} \right\};$$

$$Z^+(q) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ v_i \in G \mid q_i > r_i^{out} \right\}.$$

Очевидно, что $\forall q \in \mathbb{R}_+^n \quad Z^+(q) \bigsqcup Z^-(q) = V$.

Определение 5. *Стохастическая матрица ресурсной сети* R' определяется так:

$$r'_{ij} = \frac{r_{ij}}{r_i^{out}}, \text{ где } R = (r_{ij}), R' = (r'_{ij})$$

Можно заметить, что если $Z^-(q) = V$, то

$$S(q) = qR', \tag{2}$$

т.е. для получения следующего состояния достаточно умножить состояние q (здесь и далее будем считать, что q – вектор-строка) на стохастическую матрицу справа. Система получается линейной.

Рассмотрим модификацию ресурсной сети следующего вида: пусть в каждый момент времени в каждую вершину v_i поступает некоторое количество ресурса (быть может, нулевое) извне. Ясно, что суммарное количество ресурса в сети возрастет и, быть может, совершенно изменится динамика. На вопрос о поведении такой сети в некоторых случаях мы и попытаемся ответить в этой работе. Однако сначала сформулируем формальное определение.

Определение 6. *Ресурсной сетью с приходящим ресурсом (РСПР)* назовем кортеж $\hat{\mathcal{S}} = (\mathcal{S}, \hat{D}, \hat{S})$, где:

- $\mathcal{S}$ – ресурсная сеть;
- $\hat{D} \subset D \times (\mathbb{N}_0 \to V \to \mathbb{R}_+)$ – множество допустимых состояний и приходящих ресурсов. Приходящий ресурс можно также понимать как последовательность $\{a_i(t)\}$, $t \in \mathbb{N}_0,\ i \in \overline{1,n},\ a_i(t) \in \mathbb{R}_+$ ресурсов, приходящих в каждую вершину в каждый момент времени.
- $\hat{S} : \hat{D} \to D$ – функция эволюции динамической системы с приходящим ресурсом, определяющаяся так:

$$\hat{S}(q, a(t)) = S(q) + a(t),$$

Принимая во внимание определение выше, динамическая система для РСПР определяется следующим образом:

$$\begin{cases} q(0) = q^0; \\ q(t) = \hat{S}(q(t-1), a(t-1)) = S(q(t-1)) + a(t-1),\ t \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{3}$$

Отметим главное отличие системы (3) от (1): система (1) является стационарной, т.е. любой момент времени может восприниматься как начальный ($S^m(S^n(q)) = S^{m+n}(q)$). Однако в случае (3) это становится неверным. Укажем, впрочем, следующее: если начиная с какого-то момента времени приходящий ресурс становится нулевым, то система (3) принимает в точности вид (1) и с этого момента времени ее можно исследовать, используя исключительно аппарат обычных ресурсных сетей. В связи с этим такие случаи рассматриваться не будут и мы будем считать, что $\forall t \in \mathbb{N} \;\; \exists T > t : \sum_{i=1}^{n} a_i(T) > 0$.

Это не все ограничения, которые следует наложить на приходящий ресурс. С одной стороны, ответить на вопрос о поведении сети в случае произвольного приходящего ресурса довольно сложно. С другой, специфика задач, требующих исследования с помощью введенной модели, обычно такова, что множество рассматриваемых последовательностей $\{a(t)\}$ довольно узко и ведет себя «хорошо». Более подробно задачу описывает следующий раздел.

2.2 Постановка задачи

Рассмотрим некоторую неэргодическую ресурсную сеть, у которой две компоненты связности. Положим, первая компонента – регулярная, а вторая представляет собой одну вершину. Пример такой сети приведен на рис.1.

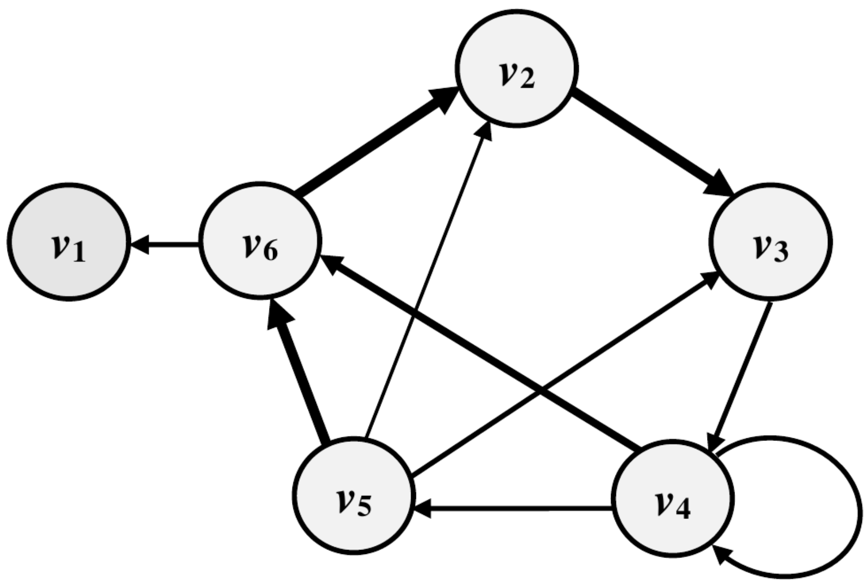


Рис. 1: Сеть с одной поглощающей вершиной

В такой сети весь ресурс будет постепенно перетекать в вершину v_1. Более того, в такой сети существует предельное состояние при любом начальном ресурсе, т.е. $\forall q^0 \in \mathbb{R}^6_+ \; \exists \; q^* : \lim\limits_{t\to\infty} q(t) = q^*$, такое, что весь ресурс в q^* сосредоточен в первой вершине, а остальные пустые.

Изолированных вершин, из которых не исходит никаких дуг, наподобие v_1, может быть несколько. Даже такой случай является хорошо исследованным и описан, например, в [2]. Более того, получена формула, по которой можно, при известном начальном ресурсе, получить предельное состояние за конечное время. Такие сети называются поглощающими.

Однако, если вместо v_1 будет стоять целая эргодическая компонента из нескольких вершин, каково будет ее поведение? Ясно, что весь ресурс постепенно перетечет в поглощающую компоненту, но как он распределится в ней? Для исследования именно таких случаев и было введено понятие РСПР. Интерпретация следующая: ресурсная сеть с прибывающим ресурсом есть поглощающая компонента поглощающей сети, а прибывающий ресурс – тот ресурс, который перетекает в нее из эргодической компоненты. Нас будут интересовать, в первую очередь, предельные состояния в такой сети.

Исходя из сказанного выше, имеет смысл ввести дополнительные ограничения на ресурс, приходящий в РСПР. А именно, будем считать, что

$$\{a(t)\} : \forall i \in \overline{1,n} \sum_{t=0}^{\infty} a_i(t) < \infty \tag{4}$$

, т.е. $\{a(t)\} \in \ell_1(\mathbb{R}^n_+)$. Такое ограничение очевидно в контексте рассматриваемой проблемы: в эргодической компоненте содержится конечное количество ресурса, поэтому в поглощающую компоненту бесконечное количество прийти никак не может. Можно было бы накладывать более жесткие ограничения на $\{a(t)\}$. Например, считать, что эта последовательность (по крайней мере, с некоторого момента) ограничивается сверху некоторой геометрической прогрессией. Пока что общность рассуждений позволяет нам избежать столь серьезных условий. РСПР, в которой всегда выполняется условие (4) будем называть *РСПР с суммируемым приходящим ресурсом.*

Скажем еще несколько слов о допустимых множествах. Пока что мы будем считать, что $D = (V \to \mathbb{R}_+)$, а $\hat{D} = D \times \ell_1(\mathbb{R}^n_+)$, если не оговорено иное.

2.3 Теоретические результаты

Из теории обыкновенных ресурсных сетей известно, что если суммарный ресурс в *регулярной* сети не превышает некоторого значения, то со временем все вершины перейдут в Z^- и предельное состояние будет существовать. Более того, предельное состояние не будет зависеть ни от чего, кроме суммарного ресурса в сети (обозначаемого W) и будет следующим:

$$q^* = \frac{W}{n}(1, 1, \ldots, 1)R'^{\infty}, \text{где } R'^{\infty} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{t\to\infty} R'^{t}.$$

Предел степеней матрицы понимается по любой из основных норм, например, матричной 1-норме, которую нам и будет удобно использовать в дальнейшем. Из теории цепей Маркова известно, что если сеть регулярная, то такой предел всегда существует.

Основной результат, полученный для РСПР, оказывается очень похожим. Для более формального определения и последующего доказательства докажем сначала небольшую лемму.

Лемма 1. *Пусть последовательности* $\{a_i\}, \{b_i\}$ *таковы, что* $\sum\limits_{i=0}^{\infty} |a_i| < \infty$, $b_i \xrightarrow[i\to\infty]{} 0$. *Тогда* $\sum\limits_{i=1}^{t} a_{i-1}b_{t-i} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$.

Доказательство. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Пусть $N_1 : \forall n > N_1$ $|b_n| < 1$, а N_2 : $\sum\limits_{i=N_2}^{\infty} |a_i| < \dfrac{\varepsilon}{2 \cdot \max\{\max\limits_{j\in\overline{0,N_1}}\{b_j\}, 1\}}$. Тогда определим $N = \max\{N_1, N_2\}$. Пусть $t > N$, тогда:

$$|\sum_{i=1}^{t} a_{i-1}b_{t-i}| \le \sum_{i=1}^{t} |a_{i-1}b_{t-i}| = \sum_{i=1}^{N} |a_{i-1}b_{t-i}| + \sum_{i=N+1}^{t} |a_{i-1}b_{t-i}| \qquad (*)$$

- $\sum\limits_{i=N+1}^{t} |a_{i-1}b_{t-i}| \le \sum\limits_{i=N_2}^{t} |a_i| \cdot \max\{\max\limits_{j\in\overline{0,N_1}}\{b_j\}, 1\} < \dfrac{\varepsilon}{2}$ – по определению N_2;

- $\sum\limits_{i=1}^{N}|a_{i-1}b_{t-i}| \le \max\limits_{i\in\overline{1,N}}|a_{i-1}| \cdot \sum\limits_{i=1}^{N}|b_{t-i}|$

  Пусть тогда $N_3 \ge N$ таково, что $\forall t > N_3$, $\forall i \in \overline{1,N} |b_{t-i}| < \dfrac{\varepsilon}{2N\max\limits_{i\in 1,N}|a_{i-1}|}$.

  Такое N_3 всегда существует, поскольку $b_i \xrightarrow[i\to\infty]{} 0$.

  В таком случае можно считать, что при $t > N_3$:

$$\sum_{i=1}^{N}|a_{i-1}b_{t-i}| \le \max_{i\in\overline{1,N}}|a_{i-1}| \cdot \sum_{i=1}^{N}|b_{t-i}| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Подставим полученные результаты в $(*)$ и получим, что

$$\forall\varepsilon > 0 \exists N_3 : \forall t > N_3 |\sum_{i=1}^{t} a_{i-1}b_{t-i}| \le \sum_{i=1}^{N}|a_{i-1}b_{t-i}| + \sum_{i=N+1}^{t}|a_{i-1}b_{t-i}| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Это и означает, что $\sum\limits_{i=1}^{t} a_{i-1}b_{t-i} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$. □

Перейдем к основному полученному результату.

Теорема 1. *Пусть дано некоторое начальное состояние q^0 из (3) и пусть:*

1. *в РСПР приходящий ресурс a таков, что $\forall i \in \overline{1,n} \sum\limits_{t=0}^{\infty} a_i(t) < \infty$;*
2. *в любой момент времени t выполняется $Z^-(q(t)) = V$.*

Тогда в РСПР существует предельное состояние $q^* = \lim\limits_{t\to\infty} q(t)$, при этом

$$q^* = \frac{W_0 + W_i}{n}(1, 1, \ldots, 1)R'^{\infty}, \tag{5}$$

где $W_0 \stackrel{def}{=} \sum\limits_{i=1}^{n} q_i^0$, а $W_i \stackrel{def}{=} \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{t=0}^{\infty} a_i(t)$. То есть предельное состояние не зависит ни от специфики начального состояния, ни от специфики приходящего ресурса, но только от суммарного ресурса, который скопится в сети через бесконечное время.

Доказательство. Рассмотрим состояние сети в произвольный момент времени t. Согласно (3), верно следующее: $q(t) = S(q(t-1)) + a(t-1)$. По нашему предположению, все вершины сети во все моменты времени находятся в Z^{-}. Так что функция эволюции принимает вид (2): $q(t) = q(t-1)R' + a(t-1)$. Аналогичным образом выразим $q(t-1)$: $q(t) = (q(t-2)R' + a(t-2))R' + a(t-1) = q(t-2){R'}^2 + a(t-2)R' + a(t-1)$. Продолжим этот процесс и дальше, пока не дойдем до начального состояния:

$$q(t) = q(0){R'}^t + a(0){R'}^{t-1} + a(1){R'}^{t-2} + ... + a(t-2)R' + a(t-1), \text{или}$$

$$q(t) = q(0){R'}^t + \sum_{i=1}^{t} a(i-1){R'}^{t-i}. \tag{**}$$

Предел первого слагаемого в этой сумме известен, о чем говорилось выше: он равен $q(0){R'}^{\infty}$. Здесь следует отметить, что матрица ${R'}^{\infty}$ имеет специфический вид: ее ранг равен единице. Любой вектор-строка при умножении справа на эту матрицу будет переходить в вектор, коллинеарный единственному левому собственному вектору матрицы ${R'}^{\infty}$, соответствующему собственному значению 1. Сверх того, известно, что ${R'}^{\infty}$, как и R', сохраняет сумму элементов вектора, на который действует справа. Так что значение $q(0){R'}^{\infty}$ в действительности зависит только от W_0.

Более интересно рассмотреть предел второго слагаемого. Рассмотрим

$$d(t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{t} a(i-1){R'}^{t-i} - \left(\sum_{i=1}^{\infty} a(i-1)\right){R'}^{\infty} = \\ = \sum_{i=1}^{t} a(i-1)({R'}^{t-i} - {R'}^{\infty}) + \left(\sum_{i=t}^{\infty} a(i-1)\right){R'}^{\infty}$$

Оценим норму данного выражения:

$$\|d(t)\| \leq \sum_{i=1}^{t} \|a(i-1)\| \cdot \left\|{R'}^{t-i} - {R'}^{\infty}\right\| + \left\|\left(\sum_{i=t}^{\infty} a(i-1)\right){R'}^{\infty}\right\|$$

- $\left\|\left(\sum\limits_{i=t}^{\infty} a(i-1)\right){R'}^{\infty}\right\| \leq \left\|\sum\limits_{i=t}^{\infty} a(i-1)\right\| \cdot \|{R'}^{\infty}\| \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$ – поскольку ряд a сходится, то его остаток стремится к нулю по норме.
- $\sum\limits_{i=1}^{t} \|a(i-1)\| \cdot \left\|{R'}^{t-i} - {R'}^{\infty}\right\|$. Здесь применим лемму 1. Последовательность a_i из леммы есть в точности $\{\|a(i)\|\}$, а последовательность b_i

есть $\left\{\left\|R'^{i} - R'^{\infty}\right\|\right\}$. В таком случае, $\sum\limits_{i=1}^{t} \|a(i-1)\| \cdot \left\|R'^{t-i} - R'^{\infty}\right\| \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$ согласно лемме.

Получили, что $\lim\limits_{t\to\infty} d(t) = 0$ или же $\lim\limits_{t\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{t} a(i-1) R'^{t-i} = \left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} a(i-1)\right) R'^{\infty}$. В таком случае подставим все полученные результаты в $(**)$ и получим

$$q(t) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} q(0)R'^{\infty} + \left(\sum_{i=1}^{\infty} a(i-1)\right) R'^{\infty} =$$
$$= \left(q(0) + \sum_{i=0}^{\infty} a(i)\right) R'^{\infty} = \frac{W_0 + W_i}{n}(1, 1, \ldots, 1) R'^{\infty}$$

$\square$

Несмотря на простоту и понятность полученного результата (для получения предельного состояния достаточно лишь просуммировать весь ресурс), применение теоремы оказывается весьма затруднительным. Крайне редко возникает ситуация, при которой в любой вершине в любой момент времени наблюдается недостаток ресурса. Впрочем, условие с «любым моментом» не является столь уж обязательным. А именно, верно следующее следствие из теоремы.

Следствие 1. *Пусть в РСПР с суммируемым приходящим ресурсом начальное состояние и приходящий ресурс таковы, что* $\exists T : \forall t > T \; Z^{-}(q(t)) = V$. *Тогда выполняется* (5).

Таким образом, вполне достаточно, чтобы во всех вершинах был недостаток ресурса только начиная с некоторого момента. Доказательство этого факта вполне очевидное: пусть первые T моментов времени сеть функционирует как угодно. В результате этого процесса мы получим некоторое значение $q(T)$. Однако, по предположению, дальше система функционирует линейно. Можно тогда взять $q(T)$ за новое начальное состояние q^0, для этого случая уже будет верна теорема 1. Учитывая, что предельное состояние зависит только от суммарного ресурса, мы получим и предельное состояние для исходной задачи, поскольку суммарный ресурс не зависит от момента времени.

Данное следствие, к сожалению, все равно оказывается достаточно узкоприменимым, поскольку указать, когда существует такой момент времени, довольно сложно. Можно, впрочем, указать один такой простой случай.

Следствие 2. *Пусть* $r_{\min} = \min\limits_{i \in \overline{1,n}} r_i^{out}$. *Если* $W_0 + W_i \leq r_{\min}$, *то* $\forall q^0, t\ Z^-(q(t)) = V$.

Доказательство. Даже если в какой-то момент времени весь ресурс сосредоточится в одной вершине, его все равно будет недостаточно, чтобы заполнить вершину. □

На основе данного результата уже можно построить различные примеры, что и будет сделано в практической части.

2.4 Практическая часть

Помимо теоретических результатов, была реализована компьютерная программа на языке python с использованием среды jupyter notebook. Основные особенности программы:

- Интеграция с библиотекой networkx. В сущности, ресурсная сеть использует класс `networkx.DiGraph` и на основе экземпляров этого класса можно создавать ресурсные сети, в том числе и РСПР. Поэтому у нас имеются все возможности для создания, изучения и манипуляции с графами, составляющими ресурсную сеть, которые допускает библиотека networkx;

- Удобные функции для отображения графа ресурсной сети;

- Возможность проводить численные симуляции по заданному начальному состоянию (и последовательности входящих ресурсов для случая РСПР). Результатами симуляции являются массивы состояний и потоков. Особенностью массивов, равно как и определения ресурсной сети, данного выше, является инвариантность относительно нумерации вершин;

- Возможность наглядного отображения результатов моделирования как с помощью протокола сети (таблицы состояний), так и динамически меняющихся картинок. Реализовано это с помощью массива svg-картинок, получаемых с помощью программы graphviz, и возможностей динамического отображения среды jupyter notebook.

Продемонстрируем полученные теоретические результаты на примере, используя написанную программу.

Рассмотрим ресурсную сеть с графом, как на рис. 2. В ней $V = 0, 1, 2$. Можно видеть, что эта сеть регулярная: в ней есть как цикл длины 3, так и цикл длины 2. Минимальная из пропускных способностей ребер равна 3. Таким образом, если в сети будет ресурса меньше, чем 3, то гарантированно во всех вершинах всегда будет недостаток ресурса, т.е. выполняются условия следствия 2.

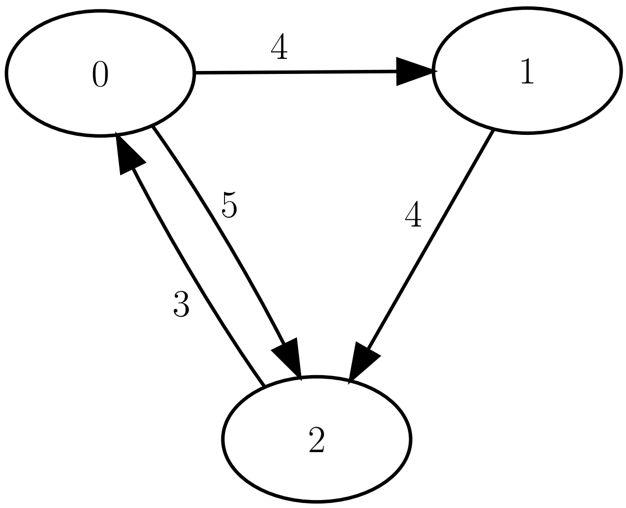
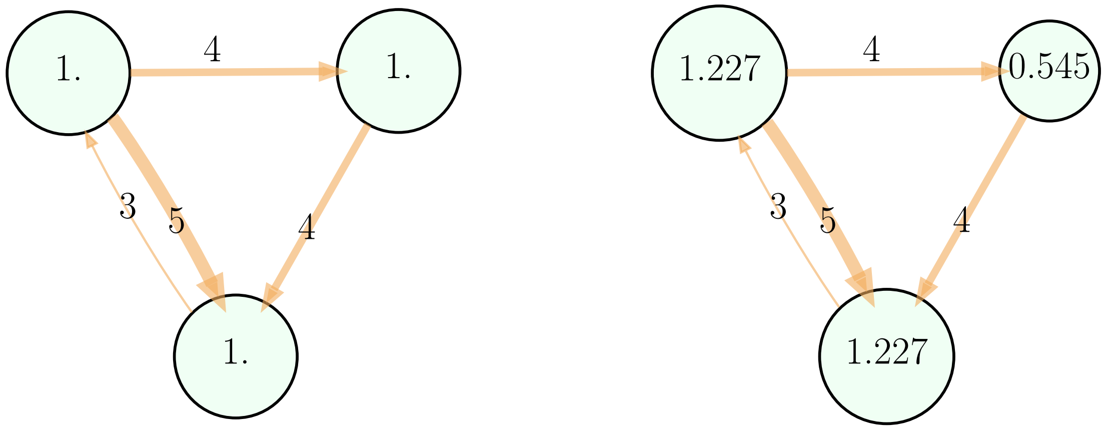


Рис. 2: Простая ресурсная сеть

Исследуем сначала поведение данной сети, если поместить в нее весь ресурс сразу, т.е. будем говорить сначала об обыкновенной регулярной сети, задаваемой данным графом. Для примера возьмем $q^0 = (1, 1, 1)$.

Как можно видеть, предельное состояние в такой сети действительно существует. Протокол сети представлен в таблице 1 (см. Приложение).

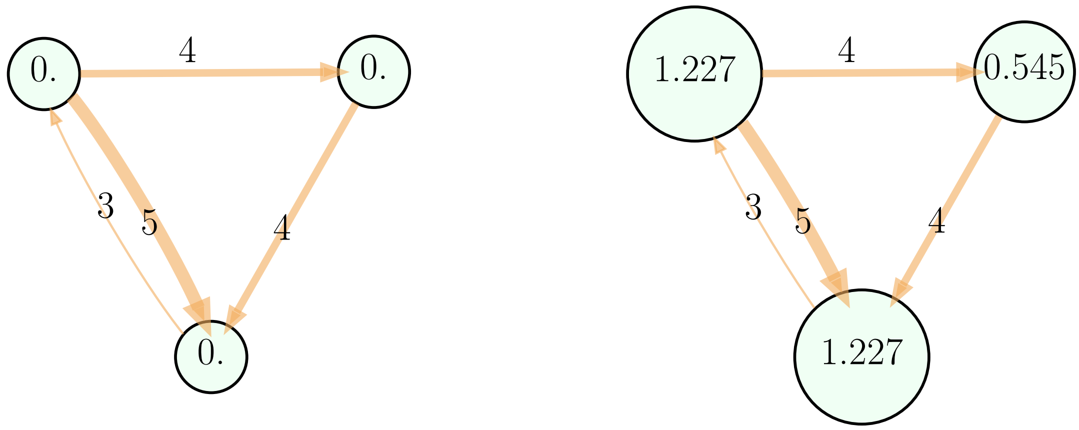
А теперь рассмотрим ту же сеть и то же количество ресурса, но будем подавать его постепенно. А именно, пусть $q^0 = 0$ и $\forall i \in \overline{1,3} \quad a_i(t) = \dfrac{1}{2^{t+1}}$.



(a) Начальное состояние (b) Предельное состояние

Рис. 3: Обыкновенная ресурсная сеть (2) с начальным состоянием $(1,1,1)$

Можно заметить, что $\forall i \ \sum\limits_{t=0}^{\infty} a_i(t) = 1$. Так что суммарный ресурс получается таким же.



(a) Начальное состояние (b) Предельное состояние

Рис. 4: РСПР (2) с начальным состоянием $(0,0,0)$

Здесь также есть предельное состояние. Что интереснее, оно совпадает с предельным состоянием для случая, при котором весь ресурс помещается сразу. Можно считать это экспериментальным подтверждением теоремы 1. Протокол сети представлен в таблице 2.

3 Заключение

В работе было введено понятие ресурсной сети с приходящим ресурсом и обоснована необходимость данного понятия применительно к исследованию обыкновенных ресурсных сетей. Был доказан ряд важных утверждений, касающийся поведения таких сетей в случае малого начального и приходящего ресурсов. Наконец, была написана программа, позволяющая проводить подобные расчеты и визуализацию. С помощью программы были проведены численные эксперименты, подтвердившие теоретические результаты.

Следует отдельно остановиться на возможностях дальнейшего исследования. Класс рассмотренных случаев оказывается довольно узок: не было оговорено поведение сети при большом ресурсе, а также не были указаны легко проверяемые достаточные условия для того, чтобы с некоторого момента во всех вершинах начинал наблюдаться недостаток ресурса. В случае с обыкновенными ресурсными сетями подобные случаи хоть и представляют изредка трудность, как правило поведение сетей в этих ситуациях оказывается также очень предсказуемым. Напрашивается вывод о том, что сети с приходящим ресурсом ведут себя схожим образом. К сожалению, математическое доказательство данного факта представляется довольно сложным. В связи с вышесказанным, в дальнейших работах планируется исследование случаев большого количества ресурса в сети.

Список литературы

1. Кузнецов О. П. Однородные ресурсные сети I. Полные графы //Автоматика и телемеханика. – 2009. – №. 11. – С. 136-147.

2. Жилякова Л.Ю., Кузнецов О.П. Теория ресурсных сетей: монография. М.: РИОР: ИНФРА-М, 2017. — 283 с. — (Научная мысль). —
— https://doi.org/10.12737/21451.

4 Приложение

t	0	1	2
0	1.000000	1.000000	1.000000
1	1.000000	0.444444	1.555556
2	1.555556	0.444444	1.000000
3	1.000000	0.691358	1.308642
4	1.308642	0.444444	1.246914
5	1.246914	0.581619	1.171468
6	1.171468	0.554184	1.274348
7	1.274348	0.520652	1.204999
8	1.204999	0.566377	1.228624
9	1.228624	0.535555	1.235821
10	1.235821	0.546055	1.218124
11	1.218124	0.549254	1.232622
12	1.232622	0.541388	1.225989
13	1.225989	0.547832	1.226179
14	1.226179	0.544884	1.228937
15	1.228937	0.544968	1.226094
16	1.226094	0.546194	1.227711
17	1.227711	0.544931	1.227358
18	1.227358	0.545649	1.226993
19	1.226993	0.545492	1.227515
20	1.227515	0.545330	1.227155
21	1.227155	0.545562	1.227283
22	1.227283	0.545402	1.227315
23	1.227315	0.545459	1.227226
24	1.227226	0.545473	1.227301
25	1.227301	0.545434	1.227266

Таблица 1: Протокол обычной сети

t	0	1	2
0	0.000000	0.000000	0.000000
1	0.500000	0.500000	0.500000
2	0.750000	0.472222	1.027778
3	1.152778	0.458333	1.013889
4	1.076389	0.574846	1.161265
5	1.192515	0.509645	1.204090
6	1.219715	0.545632	1.187779
7	1.195591	0.549908	1.231064
8	1.234970	0.535280	1.218031
9	1.219985	0.550829	1.223328
10	1.224304	0.543192	1.229574
11	1.230063	0.544623	1.223849
12	1.224093	0.546939	1.228236
13	1.228358	0.544164	1.227113
14	1.227174	0.545998	1.226646
15	1.226676	0.545441	1.227791
16	1.227807	0.545205	1.226943
17	1.226951	0.545699	1.227327
18	1.227331	0.545315	1.227343
19	1.227344	0.545482	1.227168
20	1.227169	0.545487	1.227341
21	1.227342	0.545409	1.227248
22	1.227248	0.545485	1.227265
23	1.227266	0.545444	1.227290
24	1.227290	0.545451	1.227258
25	1.227258	0.545462	1.227279

Таблица 2: Протокол сети с приходящим ресурсом