РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
Институт проблем управления

Д. А. Губанов, Д. А. Новиков, А. Г. Чхартишвили

СОЦИАЛЬНЫЕ СЕТИ: модели информационного влияния, управления и противоборства

Издание третье, переработанное и дополненное

Москва
Издательство МЦНМО
2018

УДК 519:301
ББК 60.54; 32.81
Г93

Рецензенты:
доктор технических наук, профессор В. В. Кульба
доктор технических наук, профессор В. В. Цыганов

Губанов Д. А., Новиков Д. А., Чхартишвили А. Г.
Г93 Социальные сети: модели информационного влияния, управления и противоборства / Под ред. чл.-корр. РАН Д. А. Новикова. — 3-е изд., перераб. и дополн. — М.: МЦНМО, 2018. — 224 с.

ISBN 978-5-4439-1302-5

Онлайновые социальные сети, помимо выполнения функций поддержки общения, обмена мнениями и получения информации их членами, в последнее время все чаще становятся объектами и средствами информационного управления и ареной информационного противоборства. Они уже стали существенным инструментом информационного влияния, в том числе — в целях манипулирования личностью, социальными группами и обществом в целом, а также полем информационных войн.

Книга посвящена обзору известных и описанию оригинальных результатов исследования математических моделей социальных сетей. Основной акцент делается на моделях информационного влияния, управления и противоборства.

Работа рассчитана на студентов вузов, аспирантов и специалистов по информационным технологиям и моделированию социальных систем и процессов.

Предыдущее издание книги вышло в 2010 г.

ББК 60.54; 32.81

12+

ISBN 978-5-4439-1302-5

Оглавление

ПРЕДИСЛОВИЕ. ФЕНОМЕН СОЦИАЛЬНЫХ СЕТЕЙ

Сети существовали издревле: сеть дорог в Древнем Риме, почтовые сети в Средневековье, железнодорожные сети, телеграфные, телефонные сети. И, наконец, телекоммуникационные сети. Каждый новый вид сетей способствовал развитию коммуникаций между людьми и, тем самым, обеспечивал прогресс.

В то же время, как любое явление, развитие сетей имело и имеет как свои положительные, так и отрицательные стороны. Так, многие учёные предсказывают в перспективе развитие нового «рабовладельческого общества». Власть захватят и уже захватывают глобальные сети и корпорации, которым каждый человек будет подконтролен и требования которых он будет выполнять. Появился даже термин «*нетократия*» (net — сеть) [10] — новая форма управления обществом, в рамках которой основной ценностью является не материальные ресурсы (деньги, недвижимость и т. д.), а *информация* и структуры, её сохраняющие, обрабатывающие и передающие. Уже сегодня: «корпоративная символика», «корпоративный стиль», «корпоративная этика», «корпоративные вечеринки», «корпоративный отдых» и т. п. — понятия, ставшие уже повсеместными. А ещё покупки только в корпоративных магазинах. За всем этим кроется стремление держать человека, и не только его, но и его семью, его социальное окружение «на виду», под контролем. Повсеместно устанавливаются камеры слежения — на улицах, в банках, в магазинах и т. п. Практически каждый человек со всеми его личными данными во всех деталях уже включён в десятки сетевых баз и банков данных (в том числе и у нас, в России). Сегодня вы можете в Интернете найти о себе такие сведения, о существовании и/или доступности которых вы даже не подозреваете…

Среди сетевых ресурсов всё большую роль играют *онлайновые социальные сети*, которые помимо выполнения функций поддержки общения, обмена мнениями и получения информации их членами, в последнее время всё чаще становятся объектами и средствами информационного управления и ареной информационного противоборства. Они уже стали существенным инструментом информационного влияния, в том числе — в целях манипулирования личностью, социальными группами и обществом в целом, а также полем информационных войн.

Социальные сети. В настоящей работе рассматриваются модели социальных сетей, получивших в последнее время значительное распространение как неформальные сообщества — инструмент общения, обмена мнениями и получения информации. Под *социальной сетью* на качественном уровне понимается социальная структура, состоящая из множества *агентов* (субъектов — индивидуальных или коллективных, например, индивидов, семей, групп, организаций) и определённого на нём множества *отношений* (совокупности *связей* между агентами, например, знакомства, дружбы, сотрудничества, коммуникации). Формально социальная сеть представляет собой *граф* $G(N, E)$, в котором $N = \{1, 2, \dots, n\}$ — конечное множество вершин (агентов) и E — множество рёбер, отражающих взаимодействие агентов. Многочисленные примеры социальных сетей приведены ниже.

Социальные сети способствуют, во-первых, организации *социальных коммуникаций* между людьми и, во-вторых, — реализации их базовых *социальных потребностей*. Можно выделить две пересекающихся трактовки социальной сети — как социальной структуры и её специфической Интернет-реализации.

Техника *социометрии* (описания социальных групп в терминах теории графов) была впервые предложена и развита в работах Дж. Морено (см. обзор в [37]). Термин «социальная сеть» был введён в 1954 году социологом Джоном Барнсом в [155], но массовое распространение (не только среди учёных-социологов[1]) получил с начала 2000-х годов с развитием соответствующих Интернет-технологий. В настоящее время, как справедливо отмечается в [36, 56], ощущается дефицит систематического изложения методов и алгоритмов сетевого анализа, пригодных для современных прикладных исследований.

Обобщая причины привлекательности социальных сетей, можно выделить следующие предоставляемые ими пользователям **возможности**:

— получение информации (в том числе, обнаружение ресурсов) от других членов социальной сети;

[1] Исследования структуры социальных объектов активно ведутся в социологии начиная с 50-х годов XX века (момента начала активного применения в социометрии теории графов). В 1978 г. была образована Международная ассоциация специалистов по анализу социальных сетей, учреждён журнал «Social Networks». В Интернете доступны другие издания по этой тематике — электронные журналы «Connections», «Journal of Social Structure» и др. В настоящей работе мы не претендуем на обзор многочисленных результатов анализа социальных сетей, полученных в социологии (см., например, [38, 222, 288]).

— верификация идей через участие во взаимодействиях в социальной сети;
— социальная выгода от контактов (сопричастность, самоидентификация, социальное отождествление, социальное принятие и др.);
— рекреация (отдых, времяпрепровождение).

«Ключевыми словами» практически любой модели социальной сети являются: агент, *мнение*, *влияние/доверие*, *репутация* (рис. 1). Строго эти понятия определяются ниже, хотя обыденное их значение понятно каждому.

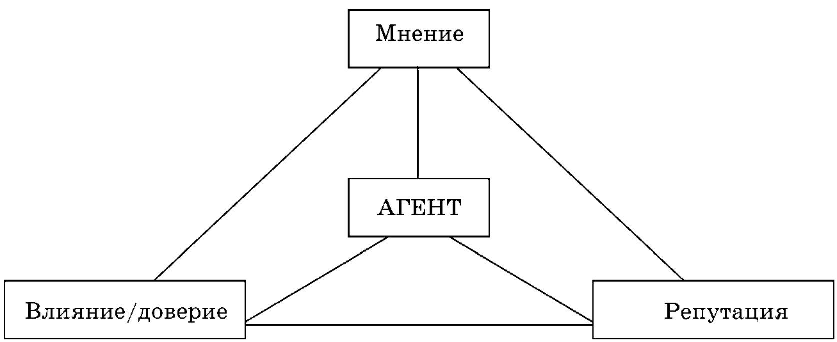

Рис. 1. Базовые понятия модели социальной сети

Примеры и классификация мнений членов онлайновых социальных сетей. Одна из причин привлекательности онлайновых социальных сетей для пользователей состоит в возможности выразить своё мнение (т. е. высказать своё суждение по какому-то вопросу, свою оценку). В общем случае оно выражается в *тексте сообщения*, например:

1. В личной переписке в виде *текста*: Пользователь А: «Сегодня холодно. Думаю, что завтра, и не только завтра, а всю неделю будет под −30 градусов». Пользователь В: «Не может быть, чтобы холода стояли так долго».

2. В блоге на странице *сообщения* или в *комментариях*: на рис. 2 в качестве примера приведена экранная форма страницы блога «Просто о финансах» (`http://prostofinansy.com`), посвящённой прогнозу курса доллара по отношению к украинской гривне. Здесь мнение является действительным *числом*.

Ещё один пример — мнение, высказанное на автомобильном форуме (`http://www.drive.ru`): «Вопрос: за сколько секунд моя тачка пуляет до сотки? Правильный ответ: „Чёрт его знает!“ А вот владелец

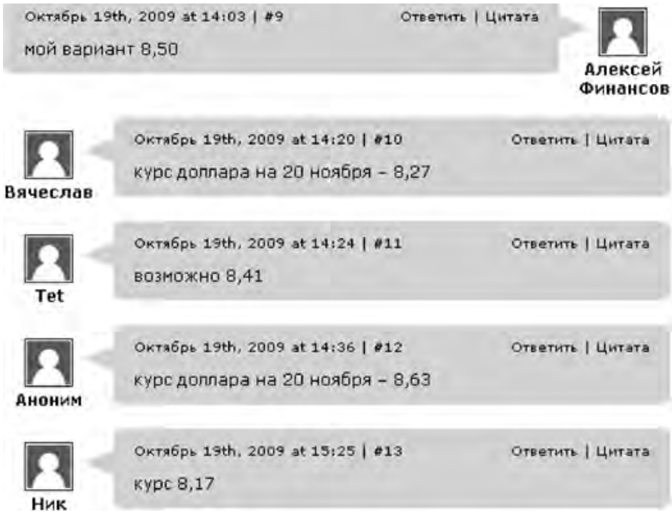

Рис. 2. Экранная форма страницы блога «Просто о финансах»

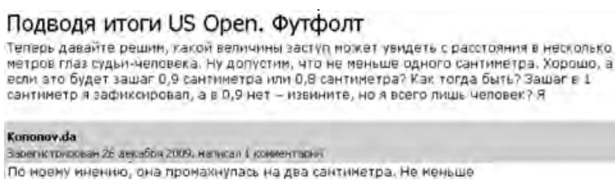

Рис. 3. Пример из мира спорта

Audi RS6, уверен, скажет хоть во сне. Четыре с половиной… нет, не так! Четыре и шесть десятых». Здесь мнение также является действительным числом.

Другой пример мнений, выражаемых числами, приведён на рис. 3.

Или мнение выражается *при помощи специальных механизмов*, реализованных разработчиками социальной сети, например:

3. В виде *фактов*.

В социальной сети МойКруг (`http://moikrug.ru`) можно выразить факт (или мнение) о другом пользователе на его странице в разделе фактов (рис. 4).

4. В виде *опроса*, как на сайте `http://gotennis.ru`. Пользователь может высказать мнение о том, кто выиграет турнир (рис. 5). То есть пользователь должен выбрать одну из фиксированного набора альтернатив (*фиксированное нечисловое значение*), например: «выиграет Серена Уильямс», и высказать, таким образом, своё мнение.

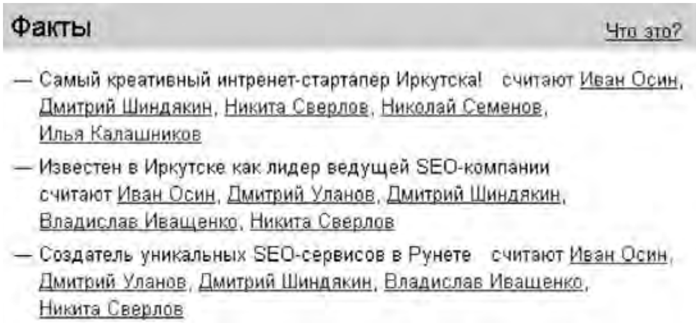

Рис. 4. Пример экранной формы раздела фактов

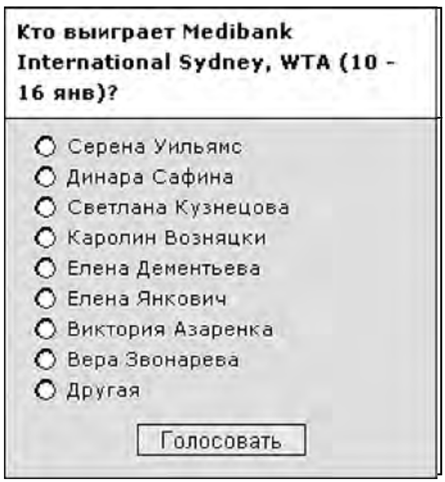

Рис. 5. Пример экранной формы голосования

5. Оценки кого-либо и/или чего-либо в зависимости от тематической направленности социальной сети. Примером могут быть оценки в *баллах* (по пятибалльной шкале) фотографий пользователей в сети общего типа «Одноклассники» (рис. 6).

Ещё один пример балльной оценки — в рекомендательной системе Imhonet (In My Humble Opinion, `http://imhonet.ru`) оценки книг, фильмов, музыки и т. п. производятся по десятибалльной шкале от «хуже не бывает» до «лучше не бывает» (рис. 7).

6. Оценки могут быть *векторными* (*многокритериальными*). Примером является взгляд на пользователя как на совокупность его оценок (рис. 8).

Рис. 6. Пример экранной формы оценки фотографии пользователя

Рис. 7. Оценка произведения братьев Стругацких на «отлично»

7. Частным случаем балльных оценок являются *бинарные оценки* (например, 0/1 или +1/–1 и т. д.). Например — сообщения пользователя в социальной сети Habrahabr, созданной для публикации новостей и статей в области информационных технологий и бизнеса.

Классификация видов/форм мнений приведена на рис. 9.

В настоящей работе мы не рассматриваем математические модели социальных сетей, учитывающие возможность наличия нечисловых и многокритериальных мнений их членов. Все остальные случаи нашли отражение (см. жирные линии на рис. 9) в моделях, рассматриваемых ниже.

Рис. 8. Многокритериальная оценка пользователя

Рис. 9. Классификация видов мнений

Свойства социальных сетей. При моделировании социальных сетей, взаимного влияния их членов, динамики их мнений и т. д. возникает необходимость учёта факторов (эффектов), имеющих место в реальных социальных сетях. В целом, в реальных социальных сетях могут иметь место следующие эффекты и свойства, обусловленные как характеристиками и потребностями агентов (оказывающих влияние и подвергающихся влиянию), характером их взаимодействия, так и свойствами самой социальной сети[2]:

1) наличие собственных *мнений* агентов;
2) изменение мнений под *влиянием* других членов социальной сети;
3) различная *значимость мнений* (влиятельности, доверия) одних агентов для других агентов;
4) различная степень *подверженности агентов влиянию* (конформизм, устойчивость мнений);
5) существование *косвенного влияния* в цепочке социальных контактов. Уменьшение косвенного влияния с увеличением «расстояния»;
6) существование «*лидеров мнений*» (агентов с максимальным «влиянием»), формализация индексов влияния;
7) существование *порога чувствительности* к изменению мнения окружающих;
8) локализация *групп* («по интересам», с близкими мнениями);
9) наличие специфических социальных *норм*;
10) учёт факторов «*социальной корреляции*» (общих для групп агентов);
11) существование (обычно менее значимых) *внешних факторов* влияния (реклама, маркетинговые акции) и, соответственно, внешних агентов (средства массовой информации, производители товаров и т. п.);
12) наличие *стадий* — характерных этапов динамики мнений членов социальной сети (например, процесса диффузии инноваций);
13) лавинообразные эффекты (*каскады*);
14) воздействие *структурных свойств* социальных сетей на динамику мнений:
    - чем больше у агента связей, тем, с одной стороны, больше у него возможностей через своё окружение повлиять на всю сеть, а с другой — больше *уязвимость* к чужому влиянию;
    - *эффект кластеризации* (чем выше плотность связей активных агентов-соседей, тем больше вероятность изменения состояния связанного с ними агента; см. ниже связанное понятие «сильная связь» («strong tie»));
    - *локальное посредничество* (чем больше значение посредничества агента, тем, с одной стороны, больше его значение в распространении мнения/информации из одной части сети в другую (роль информационного брокера), а, с другой сторо-

[2] Ключевые слова в приводимом ниже перечислении выделены подчёркиванием.

ны, меньше его влияние на агента-соседа — см. ниже связанное понятие «слабая связь» («weak tie»[3]));
— малый диаметр социальной сети обуславливает короткую *цепочку* распространения мнения в сети;

15) *активность* (целенаправленное поведение) агентов;
16) возможность образования группировок, *коалиций*;
17) *неполная* и/или *асимметричная информированность* агентов, принятие ими решений в условиях *неопределённости*;
18) нетривиальная взаимная информированность (*рефлексия*) агентов;
19) *игровое* взаимодействие агентов;
20) *оптимизация* информационных воздействий;
21) *информационное управление* в социальных сетях.

Перечисленные эмпирические эффекты и свойства, подробно рассматриваемые ниже, находят отражение в моделях, претендующих на адекватное описание реальных социальных сетей (см. вторую главу настоящей работы).

Размер и «ценность» сети. Социальные сети вызывают интерес у исследователей, в частности (см. обзор [42]), в связи с тем, что в них возникают качественно новые (по сравнению с набором невзаимодействующих агентов) свойства поведения агентов. Например, давно идёт активная дискуссия вокруг такого понятия, как *ценность* (value, utility) социальной сети. Это понятие можно перевести, кроме того, как важность, полезность, выгодность, но ниже будет использоваться именно термин «ценность социальной сети».

Ценность социальной сети — это потенциальная доступность агентов, с которыми любой агент может «связаться» в случае необходимости [13]. Эта ценность имеет вполне определённую величину. Так, если рассмотреть американский рынок телефонов, которые могут набирать только номер 911, то покупатели таких телефонов платят за предоставленную возможность связаться со службой спасения, хотя этой возможностью могут никогда и не воспользоваться. Если в данном случае связь даже с одним агентом имеет ценность (которая определяется ценой, уплаченной за купленные телефоны), то потенциальная связь со многими агентами должна иметь, по-видимому, намного большую полезность.

Наверное, одним из первых на ценность социальной сети обратил внимание основатель американской Национальной Радиовещатель-

[3] См., например, статью Грановеттера [204] и книгу Барта [167]. Согласно Грановеттеру социальная сеть представлена совокупностью тесно связанных кластеров (*групп*), которые объединены в слабосвязанные кластеры.

ной Компании (NBC) Давид Сарнов. Закон Сарнова (Sarnoff's Law) гласит, что ценность радио- или телевещательной сети растёт пропорционально количеству зрителей n.

С развитием локальных компьютерных сетей один из авторов технологии *Ethernet*, Роберт Меткалф, определил (Metcalfe's Law) [271], что ценность социальной сети асимптотически растёт как n^2. Обоснование этому закону следующее: каждый агент социальной сети может быть соединён с $n-1$ остальными агентами, и, таким образом, ценность для него пропорциональна $n-1$. В сети всего n агентов, поэтому ценность всей сети пропорциональна $n\ (n-1)$.

Появление Интернета внесло коррективы в оценку роста ценности социальной сети. Давид Рид в своей работе [260], допуская правильность предыдущих двух законов, добавил (Reed's Law) в выражение для ценности социальной сети ещё одну составляющую, связанную с объединением многих пользователей Интернета в группы. Эта составляющая равна $2^n - n - 1$ и определяется как число подмножеств (групп) множества из n агентов за исключением одиночных элементов и пустого множества. Добавляя к каждому из законов свой коэффициент пропорциональности a, b или c, получается следующее выражение для ценности социальной сети с большим количеством агентов n: $an + bn^2 + c2^n$.

В конце 90-х годов произошло массовое разорение ориентированных на Интернет-технологии компаний (так называемых *dot-com companies*), что заставило исследователей более осторожно отнестись к вопросу о ценности социальных сетей. В работе [164] приводится критика законов Меткалфа и Рида и предлагается оценивать рост ценности как $n\ln(n)$. Главный аргумент в пользу этого закона (который называется *законом Ципфа* — Zipf's Law) состоит в том, что в нём, в отличие от первых трёх законов, ранжируются ценности связей. Так, если для произвольного агента социальной сети, состоящей из n членов, связи с остальными $n-1$ агентами имеют ценности от 1 до $1/(n-1)$, то вклад этого агента в общую ценность сети составляет (для больших n):

$$1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n-1} \approx \ln(n).$$

Просуммировав по всем агентам, получим полную ценность социальной сети порядка $n\ln(n)$. В рамках изложенной аргументации возникает много вопросов. Почему, например, ценности связей распределяются «равномерно» между другими агентами, а не по какому-либо другому принципу? И т. д.

Все приведённые законы, кроме, быть может, закона Сарнова, подвергаются критике, и на сегодняшний день исследователи не пришли ещё к единому мнению. По-видимому, эти дискуссии продлятся достаточно долго, так как трудно сформулировать непротиворечивое правило, объясняющее явление в максимальной степени общности и не обращающее внимания на многочисленные детали.

Прибавим ещё одно критическое замечание ко всем законам ценности социальных сетей. Очевидно, что ценность двух изолированных социальных сетей должна быть равна сумме ценностей каждой из них, так как из-за отсутствия связей между последними дополнительной ценности не возникает. Такую аддитивность приведённые законы не описывают.

Для ценности социальной сети можно предложить ещё одно, вероятностное, описание, которое отражает указанное свойство аддитивности. Ценность социальной сети как величина, зависящая от потенциальных связей всех агентов, очевидно должна возрастать с увеличением количества возможных конфигураций (потенциальных возможностей) этих связей в сети. Действительно, как видно из примера рынка телефонов, который приведён выше, увеличение количества потенциальных возможностей связей в случае необходимости повышает ценность сети. Обозначим через $m \in \mathbb{N}$ количество этих возможных конфигураций, а через $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ — ценность сети (где $\mathbb{N}$ и $\mathbb{R}$ — соответственно множество натуральных и действительных чисел). Тогда *свойство монотонности* — неубывания ценности с возрастанием количества возможных конфигураций — можно записать в виде: $f(m_1) \geqslant f(m_2)$ для всех $m_1 \geqslant m_2$.

Рассмотрим две изолированные социальные сети, т. е. любой агент из одной из них не связан ни с каким из агентов другой. Тогда ценность объединения этих двух сетей будет равна сумме ценностей каждой из них. Так как количество возможных конфигураций объединения двух сетей равно произведению $m_1 m_2$, где m_1 и m_2 — количества конфигураций первой и второй сетей соответственно, для ценности изолированных социальных сетей должно быть справедливо *свойство аддитивности*: $f(m_1 m_2) = f(m_1) + f(m_2)$.

Если существует только одна конфигурация связей агентов, то ценность такой социальной сети примем равной нулю, так как эта социальная сеть не даёт возможности агентам установить другие потенциальные связи. Поэтому можно ввести *свойство нормировки*: $f(1) = 0$.

В теории вероятностей (см., например, [145]) доказано, что функция, удовлетворяющая последним трём свойствам, пропорциональна $\ln(m)$, где m — число конфигураций, и носит название *энтропии*. Если считать, что каждая конфигурация равновероятна, то существует априорная неопределённость, численно равная энтропии $\ln(m)$ от числа конфигураций. Так как каждая конкретная конфигурация устраняет неопределённость о связях в сети, энтропия (апостериорная) каждой конкретной конфигурации становится равной нулю. Смысл ценности социальной сети в приводимой интерпретации состоит в том, что она показывает, насколько в сети может быть полностью устранена априорная неопределённость. Иными словами, осуществляется потенциальная доступность агентов в смысле введённого первоначально определения ценности [13].

Пусть сеть состоит из n агентов. Перенумеруем всех агентов сети и предположим, что конфигурация сети определяется тем, какой агент от какого получает информацию. Например, агент 1 получает информацию от агента 2, агент 2 получает от агента 3 и т. д. Агент n получает информацию от агента 1. Остальные конфигурации получаются перестановками агентов в описанной исходной конфигурации (кольце). Легко показать, что существует $m = n!$ таких конфигураций сети. Воспользовавшись упрощённой формулой Стирлинга [128, 186], можно показать, что для большого количества агентов n ценность (в смысле энтропии) социальной сети равна

$$\ln(n!) \approx n\ln(n) - n.$$

Таким образом, мы получили закон ещё более умеренного роста ценности сети по сравнению с законом Ципфа — $n\ln(n)$.

Что же касается практической реализации, то в настоящее время определился целый класс социальных сетей, существующих в Интернете, которые объединены единой технологией *Web* 2.0 [255].

Web 2.0 (определение О'Рейли) — методика проектирования систем, которые путём учёта сетевых взаимодействий становятся тем лучше, чем больше людей ими пользуются. Особенностью *Web* 2.0 является принцип привлечения многих пользователей к наполнению и многократной выверке содержания (контента).

В этом определении, как и в приведённых выше законах, существенным фактором является большое количество агентов (современные социальные сети могут охватывать десятки миллионов пользователей), взаимодействие которых в сети увеличивает её ценность. Исходя из этого, целесообразно использовать развитый аппарат статистической физики и теории информации, который позволяет описывать поведение больших систем на языке теории вероятностей.

Примем, что поведение агента в социальной сети может зависеть от следующих факторов (рис. 10):

— *индивидуального* — внутренней склонности (предпочтений) агента выбрать то или иное действие в отсутствие какого-то ни было внешнего влияния;
— *социального* — определяемого взаимодействием (взаимовлияниями) с другими агентами сети;

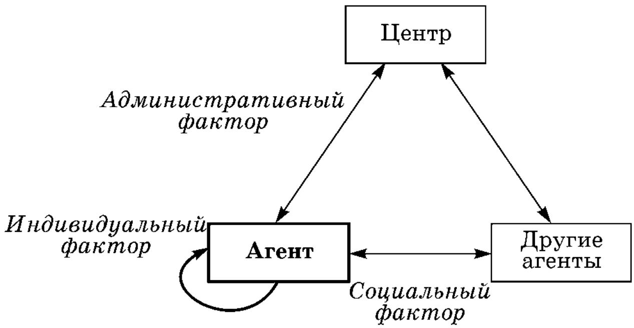

Рис. 10. Факторы, влияющие на поведение агента в социальной сети

— *административного* — результата воздействия (влияния) на него (*управлением*) со стороны управляющего органа — *центра*.

Агентов, которые подвержены описанным факторам, будем называть *зависимыми* (от одного или нескольких из этих факторов). Если на агентов действует как минимум социальный фактор, то объединяющую их сеть будем называть *невырожденной социальной сетью*. Не подверженных перечисленным факторам агентов будем называть *независимыми*. Если у агентов отсутствует зависимость от социального фактора, то такую сеть, состоящую из невзаимодействующих агентов, будем называть *вырожденной* социальной сетью [13].

Проводя условно аналогии с моделями *термодинамики* и *статистической физики* [128], вырожденная социальная сеть с независимыми агентами соответствует идеальному газу. Вырожденная социальная сеть с зависимыми агентами соответствует многоатомному газу. Невырожденная социальная сеть соответствует другим веществам, где присутствует взаимодействие между частицами (взаимовлияние между агентами). Сеть с управлением и без него соответствует наличию или отсутствию воздействия, например, внешнего поля (влияние центра).

Для *теории информации* [133] можно привести следующие сопоставления. Вырожденной социальной сети соответствует кодирование сообщения без штрафов, а невырожденной социальной сети — кодирование со штрафами. Неаддитивные штрафы соответствуют взаимовлиянию между агентами, аддитивные — влиянию центра. Соответствующие модели рассматривались во второй главе [46].

Влияние. Управление. Противоборство. Как отмечалось выше, социальные сети в последнее время всё чаще становятся объектами и средствами информационного управления и ареной информационного противоборства. Поэтому при рассмотрении моделей, учитываю-

Рис. 11. Информационное влияние, управление и противоборство

щих *информированность* агентов (т. е. ту информацию, которой они обладают на момент принятия решений), традиционно выделяют три вложенных класса моделей: информационного влияния, информационного управления и информационного противоборства (рис. 11).

Модель информационного влияния даёт возможность исследовать зависимость поведения субъекта от его информированности и, следовательно, от информационных воздействий. Имея модель информационного влияния, можно ставить и решать задачу *информационного управления* — какими должны быть информационные воздействия (с точки зрения управляющего субъекта), чтобы добиться от управляемого субъекта требуемого поведения. И, наконец, умея решать задачу информационного управления, можно моделировать *информационное противоборство* — взаимодействие нескольких субъектов, обладающих несовпадающими интересами и осуществляющих информационные воздействия на один и тот же управляемый субъект. Если модели информационного влияния (*социального влияния* в терминах социологии и социальной психологии) являются предметом многочисленных исследований на протяжении уже более полувека, то математические модели именно информационного управления и информационного противоборства в социальных сетях, а тем более — комплекс этих задач (рис. 11), гораздо менее исследованы.

В разделе 2.1 ниже рассматривается информационное влияние агентов на формирование мнений друг друга в социальных сетях (модель в целом следует традиции использования марковских цепей для исследования социальных сетей [192, 206] (см. также [124])). Структура сети описывается с помощью введённых понятий: *сообщество* (множество агентов, которые не подвергаются влиянию агентов вне него), *группа* (сообщество агентов, в котором каждый агент влияет или подвергается влиянию каждого другого агента группы прямо или косвенно) и *спутник* (агент, не оказывающий влияния ни на одну из групп). Предположим, что в каждой группе хотя бы один агент хоть сколько-нибудь доверяет своему мнению. Как оказывается, тогда в конечном итоге мнения спутников определяются мнением групп, а внутри групп мнения агентов сходятся и равны (общие необходимые и/или достаточные условия сходимости — правильность цепи Маркова др. — можно найти в [34, 199, 216], обзор и исследование роли структуры коммуникаций агентов — в [2]). В такой социальной сети представляется вполне естественным рассмотрение *задачи информационного управления* (изменение мнений, репутации и/или доверия небольшого множества ключевых агентов в сети таким образом, что в результате распространения изменения мнений формируются требуемые мнения участников всей сети или её части — см. описание моделей информационного управления в разделах 2.2–2.6).

Выше были выделены три компоненты модели социальной сети: мнение, доверие и репутация (см. табл. 1). Так как *управление* — воздействие на управляемую систему с целью обеспечения требуемого её поведения [106], предметом управления в социальной сети могут выступать мнения агентов, их репутация и доверие друг другу. Модели информационного управления мнениями агентов рассматриваются в разделах 2.2 и 2.3, модели информационного управления репутацией агентов — в разделе 2.4, модели информационного управления доверием агентов — в разделе 2.4 и 2.5, модель информационного управления при неполной информированности центра — в разделе 2.6. В разделе 2.7 рассмотрена модель распространения действий в социальной сети и основанный на ней метод расчёта влияния. Такая модель позволяет на основе наблюдаемых в реальной онлайновой социальной сети данных получать оценки влияния и влиятельности агентов сети, которые в дальнейшем можно использовать в моделях формирования мнений.

Также ставится и анализируется вытекающая из неё теоретико-игровая задача *информационного противоборства* нескольких игроков в сети (см. разделы 3.1 и 3.2). При этом можно выделить два случая. Если несколько игроков, осуществляющих информационные воздействия, выбирают свои действия одновременно — их взаимодействие описывается *игрой в нормальной форме* (см. разделы 2.2 и 3.1). Если же последовательный порядок ходов этих игроков фиксирован, то получаем игру типа *игры «защита-нападение»*, рассмотренной в разделе 3.2.

В разделе 3.3 рассматривается иной подход к построению теоретико-игровых моделей информационного противоборства, «надстраиваемых» над пороговыми моделями толпы, в которых толпа рассматривается как множество агентов, демонстрирующих так называемое конформное поведение, т. е. осуществляющих бинарный выбор (действовать, быть активными и т. п. или бездействовать) с учётом решений, принимаемых другими агентами (см. также обзор пороговых моделей в главе 1).

Безопасность. Помимо перечисленных выше возможностей, онлайновые социальные сети, как и любое другое масштабное социальное явление, порождают ряд проблем: отрыв пользователя от реальности; нехватка живого общения; пользователь начинает тратить слишком много времени на общение, в том числе с незнакомыми ему людьми, что может отрицательно сказаться на его учёбе, работе и личной жизни; и т. д. Обсуждать соответствующие проблемы, не достигшие адекватного уровня формализации, в настоящей работе мы не будем.

Подчеркнём, что, если социальные сети позволяют осуществлять информационное управление (манипулирование, скрытое управление), то неизбежно возникает и «двойственная» задача — анализ и обеспечение *информационной безопасности* социальных сетей.

Известно также, что информационные системы уже стали неотъемлемым инструментом поддержки принятия и реализации управленческих решений на всех уровнях — от оператора технологического процесса на предприятии, вплоть до руководства страны. Поэтому категория информационной безопасности может и, наверное, должна быть дополнена такой категорией как *социальная безопасность информационно-коммуникационных технологий* (ИКТ) — защищённость пользователей ИКТ, их групп и общества целом от информационных воздействий и негативных последствий управленческих решений, принимаемых с использованием современных ИКТ.

Из вышесказанного вытекает важность исследования вопросов информационного влияния, информационного управления и информационного противоборства, в частности, в следующих аспектах:

- информационное влияние на отдельные личности, социальные и другие группы, общество в целом;
- целенаправленное влияние (информационное управление), в том числе при помощи средств массовой информации (СМИ);
- борьба за информационную влиятельность и формирование требуемых мнений в обществе;
- влияние информации на безопасность управленческих решений, принимаемых на основе этой информации;
- информационное противоборство (в том числе — скрытое) на межгосударственном, национальном, региональном, территориальном, отраслевом и корпоративном уровнях.

Некоторые модели обеспечения безопасности социальных сетей рассматриваются в настоящей работе. Однако следует признать, что соответствующая область не привлекла ещё должного внимания исследователей, поэтому создание и изучение *моделей социальной безопасности ИКТ* (включая модели безопасности социальных сетей) представляется чрезвычайно интересным и востребованным направлением будущих исследований.

Структура изложения. Введение содержит краткий анализ использования теоретико-игровых моделей для описания взаимодействия элементов сетевых структур. Первая глава представляет собой аналитический обзор моделей информационного влияния в социальных сетях. Вторая глава содержит оригинальные результаты авторов и их коллег по построению и исследованию теоретических моделей информационного влияния и управления в социальных сетях. В третьей главе рассматриваются оригинальные теоретические модели информационного противоборства в социальных сетях. Каждый из разделов второй и третьей главы завершается обсуждением соответствующих перспективных направлений дальнейших исследований, что объясняет отсутствие в книге заключения.

ВВЕДЕНИЕ. ИГРЫ И СЕТИ

На протяжении многих лет и игровые, и графовые модели успешно используются для описания сложных систем. Так как в настоящей работе, посвящённой моделям социальных сетей, последние описываются с помощью графов, а задачи информационного управления и информационного противоборства формулируются, в том числе, в терминах теории игр, то для позиционирования соответствующего класса моделей в настоящем вводном разделе кратко рассматривается современное соотношение игровых и графовые моделей.

Согласно определению, приведённому в [33], *теория игр* — раздел прикладной математики, исследующий модели принятия решений в условиях несовпадения интересов сторон (*игроков*), когда каждая сторона стремится воздействовать на развитие ситуации в собственных интересах. Результаты, полученные в теории игр, нашли множество приложений в самых разных областях — в социологии [121, 124, 270], экономике [91, 240, 245], организационном управлении [53, 106], экологии [26, 124], военном деле [28, 61] и др.

Теория графов в качестве теоретической дисциплины может рассматриваться как раздел дискретной математики, исследующий свойства конечных множеств с заданными отношениями между их элементами [25]. Как прикладная дисциплина теория графов позволяет описывать и исследовать многие технические, экономические, биологические и социальные системы (см. примеры приложений теории графов в [25, 28, 121, 124, 216]).

Графы и игры. Между теорией игр и теорией графов существует глубокая взаимосвязь. Можно привести множество примеров использования конструкций и результатов теории графов в игровых постановках:

— древовидный граф задаёт структуру принятия решений в игре в развёрнутой форме [119];
— граф (вершины — игроки) задаёт структуру возможных коалиций [53];
— на графе в дискретном времени осуществляется «игра поиска» (вершины — позиции игроков, рёбра — возможные пути переходов) [118];
— ориентированный граф описывает, от чьих действий зависят выигрыши агентов (например, для реализуемости равновесия Нэша

достаточно связности графа), в более общем случае граф отражает структуру информированности игроков [110] или структуру коммуникаций между игроками [96];
— граф отражает постоянные или вре́менные связи (информационные, технологические, подчинённости и т. п.) между игроками [52, 88, 96, 98].

И т. д.

Отдельно следует выделить *теорию сетевых игр* — относительно молодой (развивающийся с конца 70-х годов прошлого века) раздел теории игр, акцентирующий внимание как раз на формировании сетевых структур — устойчивых связей между игроками — в условиях несовпадения интересов и/или различной информированности последних (для ознакомления см. обзор [51] и монографию [216]).

Здесь уместно сделать два терминологических замечания. Во-первых, в сетевых играх термин «сеть» употребляется в более широком, чем принято в теории графов [25], значении — практически любой граф называется сетью. Во-вторых, наряду с термином «сетевые игры» (network games), всё чаще встречается термин «*игры формирования сетей*» (network formation games), более соответствующим сути игры, результатом которой является сеть, связывающая игроков. Эта тенденция имеет своё обоснование — сетевые игры могут рассматриваться как включающие в себя (рис. 12) игры формирования сетей и «*игры на сетях*» (network-based games), причём в последних «сеть» фиксирована. Среди игр на сетях можно, в свою очередь, выделить (рис. 12) [55]:

— *игры сетевого взаимодействия* (networking games)[4];
— *«когнитивные» игры* (cognitive maps games);
— *игры на социальных сетях* (social networks games);
— *игры на сетевых графиках*[5].

На качественном уровне различие между играми формирования сетей и играми на сетях состоит в том, что в первых предметом выбора игроков являются переменные, относящиеся к парному взаимодействию между игроками, а в играх на сетях — переменные, описы-

[4] В данном классе игр, имеющих, в основном, транспортные и телекоммуникационные интерпретации (см. монографию [263], пионерскую статью [280] и обзор [190]), сеть является «инструментом» и/или ограничением взаимодействия игроков.

[5] Играм на сетевых графиках пока не было уделено должного внимания исследователей. Этот класс игр может быть охарактеризован как игры субъектов, выделяющих ресурсы, необходимые для выполнения операций сетевого графика некоторого проекта. То есть игры на сетевых графиках — теоретико-игровое обобщение задачи распределения ресурсов на сетях, являющейся хрестоматийной для календарно-сетевого планирования и управления.

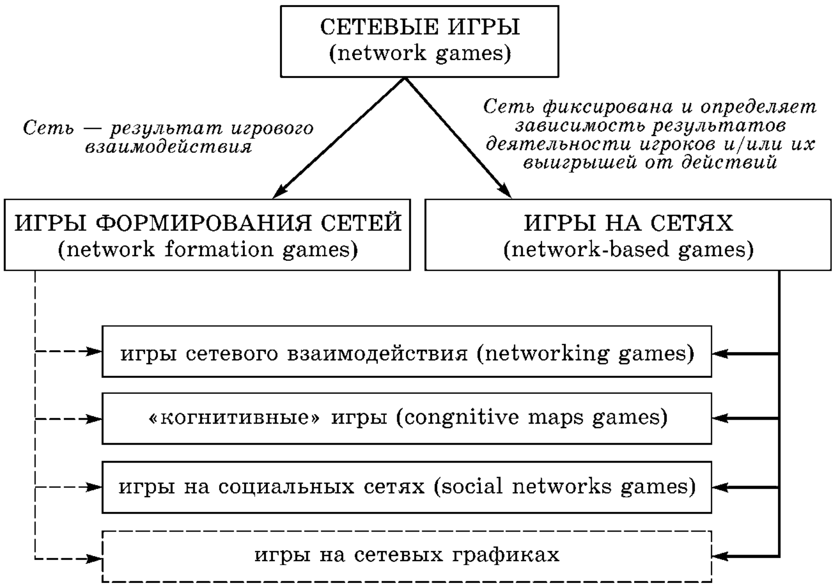

Рис. 12. Сетевые игры

вающие вершины сети (значения факторов в играх на когнитивных картах, мнения агентов в играх на социальных сетях и т. д.). В будущем эти модели, наверное, целесообразно формально объединить (см. пунктирные линии на рис. 12). Эффект от такого объединения может быть обусловлен тем, что во многих играх формирования сетей (например, в моделях информационных коммуникаций в многоагентных системах) для расчёта выигрышей игроков требуется привлекать модель сетевой динамики, как и в играх на сетях. Объединение моделей приведёт к двухэтапной игре, на первом этапе которой игроки формируют сеть, а на втором этапе используют сформированную сеть для передачи информации, ресурсов и т. д. в соответствии с концепцией игр на сетях.

Игры на сетях. В последние годы всё чаще появляются разнообразные содержательные постановки задач описания и исследования такого взаимодействия игроков, что результат их взаимодействия (или связь между выбираемыми действиями или стратегиями и выигрышами) определяется той или иной «сетевой» («теоретико-графовой») моделью. Такого рода игры, как отмечалось выше, называют играми на сетях. Приведём несколько примеров.

Когнитивные игры [95], в которых когнитивная карта [153] — взвешенный ориентированный граф (вершинами которого являются факторы, значения которых измеряются в непрерывной или нечёткой шкале, а взвешенными или функциональными дугами отражается взаимовлияние факторов) — используется для учёта причинно-следственных связей и взаимовлияния факторов, а также для моделирования динамики слабоформализуемых систем [1, 79, 92]. Когнитивные модели имеют множество приложений — см. [92, 124, 153]. Для первоначального ознакомления с этой областью можно порекомендовать классические монографии [124, 153] и современные обзоры [1, 74, 78].

Основной целью использования когнитивных карт является качественный анализ, основывающийся в большинстве случаев на имитационном моделировании (реже аналитически решаются обратные задачи управления) динамики ситуаций (тенденций, направлений изменения значений факторов, исследовании сценариев и т. д.). Например, описав взаимосвязь между факторами в виде разностной схемы второго порядка и задав начальные значения, можно анализировать динамику факторов, «установившиеся» значения и т. д., рассматривая все эти аспекты с точки зрения лиц, заинтересованных в том или ином развитии ситуации, или исследуя несовпадение целей различных субъектов. Имея модель связи между факторами можно рассматривать игровую постановку — пусть игроки имеют возможность влиять на начальные значения факторов (например, для каждого игрока задано множество «контролируемых» им факторов), а их выигрыши зависят от «установившихся» значений факторов. Пример линейной игры такого рода рассмотрен в [95].

Игры на социальных сетях, в которых вершинами являются агенты — участники социальной сети, а взвешенные дуги отражают степени их «доверия» друг другу или влияния друг на друга — см. монографию [216] и вторую главу настоящей работы. Мнение каждого агента формируется под влиянием его начального мнения и мнений других агентов с учётом их доверия друг другу (динамика мнений описывается системой линейных дифференциальных или разностных уравнений). Помимо агентов, в модели существуют игроки, которые могут влиять на агентов и их взаимодействие, т. е. игроки могут осуществлять *управление* агентами. Зная связь между начальными мнениями, а также структурой социальной сети, и итоговыми мнениями, можно ставить и решать задачу формирования игроками таких начальных мнений у агентов и таких связей между ними (включая как структуру, так и степени доверия), которые были бы равновесием (в том или ином смысле) соответствующей игры. Отметим, что с рассматриваемой точки зрения («соотношения» теоретико-игровых и теоретико-графовых моделей) настоящая работа посвящена играм на социальных сетях.

Третьим примером является использование аппарата сетей Петри [146]. И так далее.

Общим для приведённых примеров, да и для игр на сетях вообще, является следующее. Связь между действиями игроков и результатом, который определяет их выигрыши, описывается в рамках достаточно простой «сети» динамической системой, или системой разностных уравнений и т. п. То есть сеть является моделью взаимодействия игроков (факторов и т. п.). Далее всё сводится к анализу свойств соответствующей динамической системы, а затем — к той или иной классической теоретико-игровой постановке (в общем случае — к динамической игре [95, 120]). Отметим, что несколько в стороне находятся networking games, в которых динамики как таковой обычно нет, а решением считается равновесие Вардропа [280].

Более того, если рассматривать сеть как объект управления, то, исследовав свойства этой сети — умея описывать её динамику в зависимости от тех или иных параметров и выделив управляемые переменные (параметры, которые подвергаются целенаправленному изменению со стороны управляющего органа), можно ставить и решать задачи управления. Поясним последнее утверждение.

Задача управления. Обсудим качественно общую постановку задачи управления некоторой системой. Пусть имеется *управляющий орган* и управляемая система (*объект управления*). Состояние управляемой системы зависит от внешних воздействий, воздействий со стороны управляющего органа (управления) и, быть может (если объект управления активен, т. е. также является субъектом, что характерно для социально-экономических, организационных систем), действий самой управляемой системы (рис. 13). Задача управляющего органа заключается в том, чтобы осуществить такие управляющие воздей-

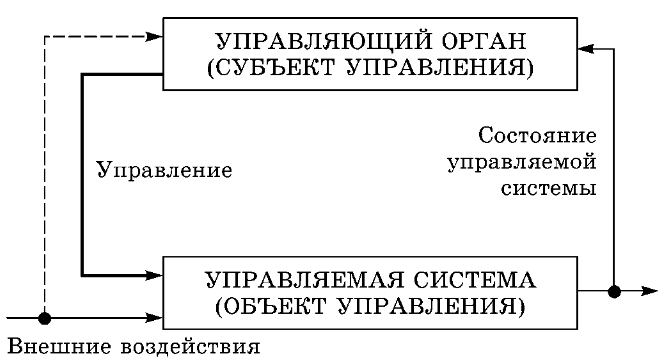

Рис. 13. Структура системы управления

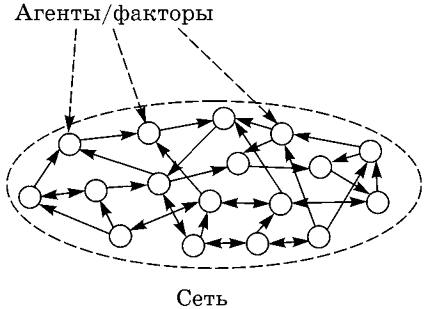

Рис. 14. Сеть как модель объекта (объекта управления)

ствия (жирная линия на рис. 13), чтобы с учётом информации о внешних воздействиях (пунктирная линия на рис. 13) обеспечить требуемое состояние управляемой системы.

Управляемая система может описываться различными способами — системой дифференциальных уравнений, набором логических правил и др., — отражающими зависимость состояний от внешних факторов, управлений, предшествующих состояний и т. д. В частности, может использоваться и та или иная сетевая модель (рис. 14), в которой, например, вершины соответствуют компонентам вектора состояний или агентам — участникам системы, а дуги — их влиянию друг на друга.

В [106] была предложена система классификаций задач управления, в которой основанием являлся предмет, на который оказывается воздействие в процессе управления. Так, были выделены:

— управление составом (набором элементов, входящих в состав управляемой системы);
— управление структурой (связями между элементами);
— институциональное управление (управление ограничениями и нормами деятельности элементов системы);
— мотивационное управление (управление предпочтениями);
— информационное управление (управление информированностью элементов системы — той информацией, которой они обладают на момент принятия решений).

В «сетевой» интерпретации, т. е. когда объект управления описывается графом (причём вершины графа «пассивны», т. е. не обладают собственными предпочтениями и информированностью), получаем, что управление может заключаться в целенаправленном воздействии на следующие компоненты объекта управления (рис. 15):

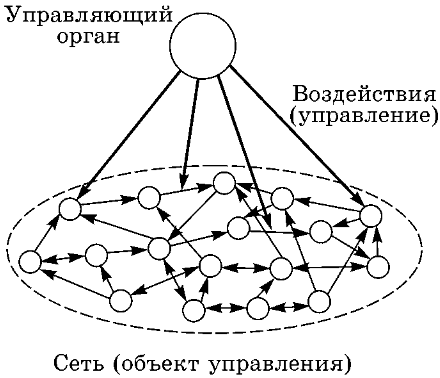

Рис. 15. Управление объектом, описываемым сетью

— состав управляемой системы (т. е. управление может заключаться в удалении или добавлении вершин);
— структуру (связи между элементами) управляемой системы (т. е. управление может заключаться в удалении или добавлении дуг);
— значения параметров, соответствующих вершинам графа (значения состояний) и его дуг (значения параметров, отражающих взаимосвязи между элементами системы).

Применительно к рассматриваемым в настоящей работе социальным сетям, большинство известных на сегодняшний день моделей управления описывает именно воздействия на параметры графа, почти не затрагивая состава сети и его структуры. Поэтому постановка и решение задач управления составом и структурой социальных сетей следует отнести к перспективным направлениям будущих исследований.

Отметим, что изучение «управления сетью» представляет собой самостоятельную нетривиальную задачу, для решения которой может использоваться аппарат исследования операций и оптимального управления. Кроме того, отдельным вопросом является устойчивость, причём как устойчивость, например, по Ляпунову управляемой системы, так и устойчивость решений по параметрам модели (корректность задачи и т. д.) [90, 134].

Усложним рассматриваемую модель, предположив, что существуют несколько (как минимум, два) управляющих органа — *игрока*, каждый из которых может оказывать определённые воздействия на те или иные (контролируемые им) компоненты объекта управления (рис. 16).

Если предпочтения каждого из игроков (их «критерии эффективности» или целевые функции) зависят от состояния управляемого

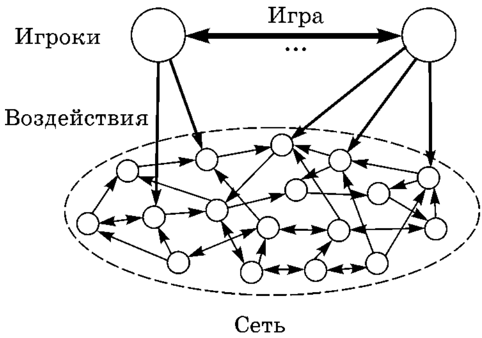

Рис. 16. Игра «на сети» (противоборство)

объекта (определяемого, в общем случае, действиями всех игроков), то получаем игру на сети (см. определение выше).

Предположим, что множество игроков, множества их допустимых действий, целевые функции (определённые на множестве действий и состояний сети) и сеть (включая все её свойства, в том числе — взаимосвязь между действиями игроков и состоянием сети), информированность игроков и порядок принятия ими решений являются общим знанием среди игроков[6]. Совокупность перечисленных параметров задаёт *динамическую игру* (см. обзоры в [28, 105, 120, 245]), т. е. игра на сети в рассматриваемом случае может быть сведена к динамической игре.

Исследование игр на сетях включает следующие общие этапы:

1) описание сети и исследование её динамики;
2) описание множества игроков, их предпочтений, информированности, множеств допустимых стратегий и контролируемых ими параметров;
3) сведение игры на сети к той или иной известной теоретико-игровой модели (игре в развёрнутой форме, игре в нормальной форме, кооперативной игре и т. д.).

На этом «сетевая» специфика заканчивается и начинается этап классического теоретико-игрового анализа, результаты которого, конечно, должны затем интерпретироваться в «сетевых» терминах. Другими словами, задача заключается в том, чтобы свести исходную «игру на сети» к такой игре, для которой уже приме́ним весь тот богатый инструментарий, который на сегодняшний день накоплен в теории игр.

[6] То есть перечисленные параметры известны всем игрокам, всем известно, что всем это известно, и т. д. до бесконечности [110]. Отказ от этого предположения приведёт к рассмотрению рефлексивных игр на сетях.

Множество вариантов различных моделей «сетей» и определений игр на них обусловливают необходимость введения соответствующей системы классификаций. При этом возможны две почти независимые системы классификаций — с точки зрения игр и с точки зрения сетей, «на которых» эти игры определяются.

Классификация игр на сетях. Введём систему оснований классификации с точки зрения теории игр, перечислив основания классификации и возможные значения признаков классификации[7].

1. Вид динамической системы (при наличии в сетевой модели динамики). По этому основанию можно различать *линейные игры* (когда приращения «значений вершин» линейно зависят от значений других вершин, их приращений и «управления») и *нелинейные игры*.

2. Информированность игроков. Возможные значения признаков классификации — параметры и текущие результаты игры являются общим знанием, или общее знание отсутствует. В последнем случае получаем *рефлексивные игры на сетях* (см. в [110] описание рефлексивных игр в нормальной форме). Использование этого класса игр может оказаться эффективным инструментом моделирования информационного противоборства, информационных войн и т. д. [79, 109, 122]. В зависимости от того, какие параметры наблюдаемы для различных игроков, может иметь место *информационная дискриминация* [119] некоторых игроков.

3. Наличие или отсутствие неопределённости (как симметричной, так и асимметричной — когда игроки обладают различной априорной частной информацией, и этот факт является общим знанием). Более простым является детерминированный случай, в то время как, например, *игры на сетях с неопределённостью* (симметричной) могут отражать ситуации принятия решений и/или сценарного моделирования в условиях неопределённости.

4. Дискретность или непрерывность времени. В случае зависимости «значений вершин» от действий только соответствующих игроков получаем классические *дифференциальные игры*, представляющие чрезвычайно развитое и богатое результатами направление теории игр (см. [69, 119, 120] и ссылки в них).

5. Структура целевых функций игроков. Целевая функция каждого игрока может зависеть от динамики «значений всех вершин» (траектории) и его собственного действия. Возможны обобщения, ко-

[7] По каждому основанию возможно выделение большего числа подклассов (числа значений признаков классификации). Можно также увеличивать и число оснований, заимствуя их из теории оптимального управления, из исследования операций и т. д.

гда выигрыш каждого игрока явным образом зависит от действий всех игроков. Возможны *интегральные критерии*, когда выигрышем игрока является интеграл по времени (быть может, нормированный на продолжительность — *усреднённый критерий*) от траектории и действий игроков, или *терминальные критерии*, когда выигрыши игроков зависят от «значений вершин» в конечный момент времени. Возможно выделение для каждого из игроков собственного множества целевых вершин и т. д.

6. Интервал времени, на котором рассматривается динамика и для которого решается задача управления. Этот интервал может быть *конечным* или *бесконечным*.

7. Структура ограничений. Могут присутствовать только ограничения на индивидуальные действия игроков. Дополнительно могут присутствовать и *ограничения совместной деятельности* [96, 106], или/и индивидуальные ограничения могут задаваться конструктивно (например, в виде ограниченности тех или иных «интегралов» по времени от действий игроков).

8. Дальновидность игроков. В условиях полной информированности и общего знания при конечном интервале времени, на котором рассматривается динамика, игроки могут сразу выбрать вектор своих действий на все будущие периоды времени (так называемое «*программное*» принятие решений). *Дальновидность игроков*, т. е. число учитываемых ими будущих периодов, может быть меньше интервала времени, на котором рассматривается динамика. Тогда необходимо рассматривать *скользящее принятие решений*, при котором игроки могут брать или не брать на себя обязательства друг перед другом о выборе определённых действий (см. модели динамических активных систем в [105]).

9. Моменты времени выбора игроками своих действий. В частности, возможны следующие варианты: так называемое «*импульсное*» *управление* — когда действия игроков явно влияют на изменения значений вершин только в одном (как правило, в начальном) периоде или в течение нескольких первых периодов, а дальше имеет место релаксационная динамика. Управление может быть «*непрерывным*» — когда действия игроков явным образом влияют на значения вершин в каждом периоде. Наконец[8], управление может быть *периодическим*.

10. Множества вершин, контролируемых различными игроками. В общем случае в динамической игре динамика значения

[8] Естественно, в общем случае у каждого игрока может иметься собственная последовательность моментов времени, в которые выбранные им действия в явном виде влияют на изменение значений тех или иных вершин.

каждой вершины зависит от действий всех игроков. В частном случае возможно выделение для каждого игрока множества непосредственно управляемых им вершин графа. Множества вершин, управляемых различными игроками, могут пересекаться или пересечения могут быть запрещены.

11. Последовательность ходов. Игроки могут принимать решения (выбирать действия) *одновременно*. Последовательность выбора игроками действий может быть различна внутри одного временно́го интервала — получаем в случае двух игроков *многошаговые иерархические игры* [35, 69, 98], в случае бо́льшего числа игроков — *многошаговые многоуровневые иерархические игры*. Или различные игроки могут выбирать свои действия в различные временны́е интервалы — получаем аналог игр в развёрнутой форме или *позиционных игр*.

12. Возможность образования коалиций. Принимая решения, игроки могут обмениваться информацией, договариваться о совместных действиях и перераспределении выигрышей, что приведёт к *кооперативной игре*.

Вторая система оснований классификации (классификации сетевых структур) может быть описана с точки зрения теории графов. Могут использоваться [95]:

— *функциональные графы* (в которых «сила влияния» одной вершины на другую является известной функцией от «значений этих вершин»);
— *графы с запаздыванием* (в которых изменение «значения одной вершины» приводит к изменению «значения другой вершины» с некоторой задержкой);
— *модулируемые графы* (в которых «сила» влияния одной вершины на другую может зависеть от «значения» третьей — модулирующей — вершины);
— *иерархические графы*;
— *вероятностные графы* (в которых каждой дуге, помимо силы связи, поставлена в соответствие вероятность реализации воздействия);
— *нечёткие графы* [77]

и т. д. Различные интерпретации вершин, дуг и «весов» на дугах, а также различные функции, определяющие взаимовлияние вершин, приводят к многообразию возможных моделей сетевых структур.

Промежуточные итоги. Комбинируя различные значения признаков по каждому из перечисленных оснований классификации, а также выбирая тот или иной вид сетевой структуры, можно, с одной стороны, систематически перечислить различные виды игр на сетях.

С другой стороны, любую конкретную игру можно попытаться отнести к тому или иному классу[9].

Наличие системы классификаций позволяет, имея результаты исследования некоторой игры на сети, систематически генерировать смежные задачи и пытаться переносить или/и обобщать на них полученные результаты.

Полученные на сегодняшний день результаты исследования игр на сетях, заключающиеся, по сути, в корректном сведении некоторых из них к классическим играм в нормальной форме [43,77,95] или к рефлексивным играм [110], представляются более чем скромными. Перспективными с теоретической точки зрения видятся такие перспективные задачи будущих исследований, как теоретическое изучение и практическое использование моделей игр на сетях, перечисленных выше в рамках введённой системы их классификаций: нелинейных, рефлексивных, иерархических, кооперативных, описывающих принятие качественных решений (на основе нечётких и/или вероятностных и/или функциональных графов) в условиях неопределённости и др.

[9] Можно порекомендовать уважаемому читателю повторно вернуться к данной классификации после ознакомления с основным материалом книги, что позволит чётко увидеть место рассмотренных моделей.

Глава 1

МОДЕЛИ ВЛИЯНИЯ В СОЦИАЛЬНЫХ СЕТЯХ

Первая глава посвящена аналитическому обзору современных моделей социальных сетей и установлению соответствия между классами моделей и отражаемыми ими свойствами моделируемого объекта (см. предисловие). Изложение материала имеет следующую структуру.

Раздел 1.1 («Влияние и влиятельность») включает четыре подраздела. В первом рассматриваются определения и модели влияния в социальных сетях, а также подходы к описанию влиятельности агентов. Во втором рассматриваются модели диффузии инноваций. В третьем разделе — модели формирования мнений в социальных сетях. В четвёртом разделе — модели распространения влияния и информации.

Раздел 1.2 («Общее знание. Коллективные действия») включает следующие подразделы: первый посвящён анализу роли информированности, второй — общественным благам и индивидуальной специализации, третий — коммуникации и координации в социальных сетях, четвёртый — социальному контролю и коллективным действиям, а также стабильности сети.

Раздел 1.3 («Модели и свойства социальных сетей») подводит итоги обзора и устанавливает соответствие между свойствами социальных сетей, отражаемыми теми или иными их моделями.

1.1. Влияние и влиятельность

1.1.1. Влияние. Классификация моделей

Влияние — процесс и результат изменения субъектом (субъектом влияния) поведения другого субъекта (индивидуального или коллективного объекта влияния), его установок, намерений, представлений и оценок (а также основывающихся на них действий) в ходе взаимодействия с ним [214]. *Влияние* — это способность воздействовать на чьи-либо представления или действия [256]. Различают направленное и ненаправленное влияние [214]. Направленное (целенаправленное) влияние — влияние, использующее в качестве механизмов воздействия на другого субъекта убеждение и внушение. При этом субъект влияния ставит перед собой задачу добиться определённых результатов (например, выбора определённых действий) от объекта влияния. Ненаправленное (нецеленаправленное) влияние — влияние, при котором индивид не ставит перед собой задачу добиться определённых результатов от объекта влияния (а иногда и не подозревает о существовании последнего). В данной работе будем говорить наряду с влиянием о влиятельности, под которой будем понимать влияние на сообщество (сеть) в целом.

Как показывают наблюдения психологов [180], в социальной сети агенты часто не имеют достаточной для принятия решений информации или не могут самостоятельно обработать её, поэтому их решения могут основываться на наблюдаемых ими решениях или представлениях других агентов (*социальное влияние*). Социальное влияние реализуется в двух процессах: *коммуникации* (в ходе общения, обмена опытом и информацией, обсуждения тех или иных вопросов с авторитетными для агента соседями он приходит к определённым представлениям, установкам, мнениям) и *сравнения* (в поисках социальной идентичности и социального одобрения агент принимает представления и действия, ожидаемые от него другими агентами в данной ситуации; агент задаётся вопросом «что бы сделал другой агент (эталон для сравнения), будь он в моей ситуации?» и, сравнивая себя с ним, определяет свою адекватность и играет соответствующую роль; можно объяснить сравнение и поиском стратегического преимущества: сравнивая себя с другими агентами, занимающими те же позиции в социальной системе, агент может ввести или принять нововведения, которые сделают его более привлекательным в качестве объекта отношений). Необходимо отметить, что при коммуникативном подходе к влиянию агенты могут прийти к сходным представлениям, но не обязательно к сходному поведению. При сравнении же агент обычно косвенным образом копирует поведение. Очевидно, поведение агента определяется не только представлениями, но и ограничениями, с которыми он сталкивается. Поэтому агенты со схожими представлениями могут вести себя по-разному, и наоборот, агенты с разными представлениями могут вести себя одинаково. В социальных сетях видимая взаимосвязь между действиями агентов-соседей может определяться не столько социальным влиянием (выполнение действия агентом или его мнение может побудить поступить аналогичным образом его соседей), сколько другими факторами «*социальной корреляции*»: внешней среды (общее место жительства, схожая профессия и т. п.) или схожестью самих агентов (например, близостью вкусов). Тем не менее, выявить влияние в сети можно в силу его причинно-следственной природы, в частности, в работе [239] рассматриваются тесты, выявляющие фактор социального влияния.

Социальная сеть играет большую роль в распространении информации, идей и влияния между её членами. Один из самых значимых вопросов в исследовании информационных процессов в социальных сетях (о различных возникающих при работе с сетями задачах см. в [47]) — определение влиятельности пользователей. Существуют разные подходы к определению влияния и влиятельности пользователей, среди которых можно выделить следующие. *Структурный подход* к моделированию и оценке влияния основан на применении понятия структурной центральности теории социально-сетевого анализа (Social Network Analysis) [150, 188, 272, 281]. Ещё со второй половины XX века разрабатываются и исследуются различные показатели (близость узла, степень узла, посредничество связи и др. — см., например, [191]), которые в той или иной степени характеризуют влияние. Но информационное взаимодействие в сети не всегда обусловлено её структурой (см. [49]), что является серьёзным изъяном данного подхода. Отметим также многочисленные исследования индексов влияния (индекс Банцафа, индекс Хёде-Баккера и др. — см., например, [4, 189, 203, 211, 264]) в теории принятия решений. *Подход на основе моделирования динамики* исходит из той или иной модели информационных процессов в социальных сетях. Считается, что влияние определяет динамику информационных процессов (например, формирование мнений и распространение информации). Исследователями предлагаются марковские модели, пороговые модели, модели каскадов, модели Изинга, модели клеточных автоматов, модели распространения эпидемий и другие. В рамках данного подхода решаются различные оптимизационные задачи, чаще всего — задача выявления конечного множества наиболее влиятельных пользователей, опосредованное влияние которых вызывает наибольшее распространение заданной информации в сети (см. [224]). *Подход на основе действий и интересов* (*акциональная модель*, см. раздел 2.7 настоящей книги) исходит из действий, совершаемых пользователями социальной сети (написание поста, написание комментария и т. п.), а также формализованных интересов управляющего органа. Отметим также *вычислительный подход*, в рамках которого влиятельность определяется либо на основе модифицированных методов ранжирования веб-страниц и наукометрических методов (см. [149]), либо при помощи методов машинного обучения (см. [259]).

Далее будут рассматриваться такие модели динамики информационных процессов, в основе которых лежит некоторая фиксированная сеть и локальные правила взаимодействия её членов (основанные на межличностном влиянии). В меньшей степени уделяется внимание моделям динамики информационных процессов, оперирующим переменными макроуровня (см., например, макромодели эпидемий в обзоре [247] или модели коммуникаций в обществе [87, 117]).

Классификация моделей влияния в социальных сетях. Анализ литературы позволяет выделить следующие общие классы моделей.

Оптимизационные и имитационные модели, включающие следующие их классы, рассматриваемые в разделе 1.1 настоящей работы:

1.1. *Модели диффузии инноваций*.

1.2. *Модели формирования мнений*.

1.3. *Модели распространения влияния и информации*.

В моделях 1.1–1.3 (см. их описание ниже в разделе 1.1), в основном, рассматриваются правила взаимодействия агентов, но что касается самой сети влияния в целом и её свойств, взаимосвязи её структуры и процессов взаимодействия, то, к сожалению, существующие результаты анализа этих моделей отражают очень немногое.

«Теоретико-игровые» модели, в которых акцент делается на информированность и взаимосвязь между игроками (агентами). Выигрыш, получаемый агентом (игроком), зависит от действий оппонентов (других игроков). Агент действует так, чтобы максимизировать свою выгоду. Ряд теоретико-игровых моделей рассматривается ниже (в разделе 1.2 и в третьей главе настоящей работы), в том числе:

2.1. *Модели взаимной информированности*.

2.2. *Модели согласованных коллективных действий* (и общественных благ).

2.3. *Модели коммуникаций* и задачи поиска минимально достаточной сети.

2.4. *Модели стабильности сети*.

2.5. *Модели информационного влияния и управления*.

2.6. *Модели информационного противоборства*.

Перейдём к описанию перечисленных классов моделей.

1.1.2. Влияние и диффузия инноваций

Влияние в литературе по социальным сетям тесно связано с термином «*диффузия инноваций*» (diffusion of innovations) [63], поэтому кратко рассмотрим соответствующие модели диффузии инноваций.

Свойствам крупномасштабных сетей посвящены работы [248, 282]. Динамика процесса распространения изменений (доля популяции, воспринявшая нововведение) традиционно моделируется S-образной (логистической) кривой (такая кривая — характеристика, в сущности, лю-

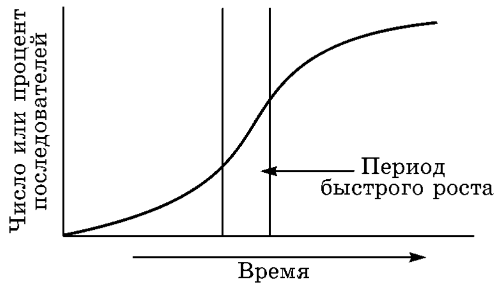

Рис. 17. *S*-образная кривая (логистическая функция)

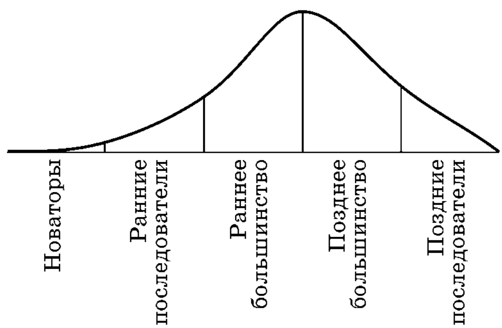

Рис. 18. Кривая стадий

бого инфекционного процесса [283], процесса научения [93], диффузии инноваций [63]; рис. 17), на которой различают стадии [196]: новаторы (innovators, начинающие первыми воспринимать и использовать нововведение), ранние последователи (early adopters, начинающие воспринимать и использовать нововведение вскоре после его появления), раннее большинство (early majority, воспринимающие нововведение после новаторов и ранних последователей, но раньше большинства других агентов), позднее большинство (late majority, воспринимающие нововведение после широкого его распространения) и поздние последователи (late adopters, воспринимают последними). Условно перечисленные группы изображены на рис. 18, на котором приведена так называемая «кривая стадий», являющаяся производной логистической кривой.

Процесс распространения нововведений, как и многие другие процессы в природе и обществе, имеет пределы возможных изменений, в первую очередь из-за ограниченности ресурсов: ограничения возможностей и ёмкости социальной системы. *S*-образная функция содержит три фазы развития: первая — формирование базы развития (медленный рост), вторая — резкий рост, третья — насыщение (медленный рост). Одним из главных факторов, определяющих скорость процессов диффузии, является межличностное общение между сторонниками данной инновации и теми, кто ещё колеблется или вообще ничего не слышал о предлагаемом нововведении.

Если новаторов можно охарактеризовать как нонконформистов и «оригиналов», а ранних последователей — как агентов, легко поддающихся социальному нормативному и информационному влиянию (или имеющих «нюх» на перспективное), то поздних последователей — как трудно поддающихся влиянию и устойчивых агентов в сети. В работе [262] рассмотрены стадии принятия нововведений агентами.

Зачастую небольшие изменения в состояниях вершин сетей могут привести к *каскадным* (лавинообразным) *изменениям* (*локальным*, затрагивающим окружение инициатора, и *глобальным*, ограниченным только размером всей сети). Эмпирическому изучению влияния «из уст в уста» (Word of Mouth), или по-русски — *сарафанного радио*, посвящены работы [197, 231], однако они не рассматривают детально структуру сети. В работах же [223, 230], хотя и рассматривается взаимосвязь между структурой сети и процессами групповой координации, но в них сети искусственно генерируются экспериментаторами и поэтому не всегда ясно, насколько они похожи на реальные сети.

Модели «диффузии инноваций», связанные с формированием общественного мнения (т. е. само общественное мнение является нововведением — инновацией). Данный класс содержит значительное число моделей. Например, существуют модели, рассматривающие агентов как разобщённые объекты влияния средств массовой информации [159], однако наибольшее распространение получила двухступенчатая модель [185], в которой средствами массовой информации сначала формируются мнения так называемых «лидеров мнений» (имеющих статус хорошо информированных, уважаемых или просто характеризуемых большим количеством связей агентов), а затем посредством лидеров формируются мнения «обычных» агентов. При этом неясно, насколько оправдана такая «эвристически понятная» точка зрения: отсутствуют объяснения того, насколько лидеры мнений через своё ближайшее окружение действительно влияют на всё сообщество, насколько их влияние критично; не учитывается также то, что не только лидеры влияют на обычных агентов, но и обычные агенты влияют на лидеров; влияние может передаваться более чем на два шага. Более того, многие математические модели (см., например, [154, 181, 182, 205, 269, 286]) не требуют введения в явном виде предположения о наличии лидеров мнений или каких-то «особенных» индивидов для формирования S-образной кривой диффузии инноваций.

Роль лидеров в «диффузии инноваций». В статье [283] выявляется роль лидеров в распространении нововведений в простой модели социального влияния (насколько изменения мнений таких лидеров приводит к крупным каскадным изменениям мнений в сети). Как оказалось, в большинстве случаев лидеры лишь умеренно «важнее» обычных агентов (за исключением некоторых исключительных случаев): фактически к возникновению больших каскадов приводит влияние одних легко поддающихся влиянию агентов на других, столь же легко поддающихся влиянию.

Поясним последнее утверждение. В линейной пороговой модели [283] агент i должен принять бинарное решение относительно некоторой проблемы. Вероятность того, что i-й агент предпочтёт альтернативу CB (вместо альтернативы CA), увеличивается с числом других агентов, выбравших CB (как известно из социальной психологии, хотя здесь и исключается, например, «реактивное сопротивление» [82]). Правило порога следующее:

$$P[\text{принять } CB] = \begin{cases} 1, & \text{если } r_i \geqslant \phi_i, \\ 0, & \text{если } r_i < \phi_i; \end{cases}$$

где φ_i — порог; r_i — доля агентов, выбравших альтернативу CB. Отметим, что непосредственным обобщением данной модели является использование вероятности, более «чувствительной» к изменению доли агентов r_i.

Дополнительно к правилу влияния одних агентов на решения других необходимо знать сеть влияния (кто из агентов на кого влияет). В [283] предполагается, что i-й агент в популяции размером n влияет на n_i других выбираемых случайно агентов. Число n_i берётся из распределения влияния $p(n)$ (среднее $n_{\text{avg}} \ll n$) и означает влияние i-го агента на n_i других относительно данной проблемы. В этой сети влияния все агенты могут (прямо или косвенно) влиять друг на друга. Авторы [283] определяют *лидеров мнений* как агентов, входящих в верхний дециль распределения влияния $p(n)$.

Далее в [283] рассматривается динамика влияния. В начальной стадии агенты не активны (имеют состояние 0) за исключением одного случайно выбранного так называемого *активного инициатора* i (лидера мнений), имеющего состояние 1. Этот инициатор может активировать соседей, далее по цепочке инициируя *каскад*. Если большое число *ранних последователей* — агентов, непосредственно связанных в рамках сети с инициатором, — связано между собой, то может возникнуть глобальный каскад, хотя в целом такие последователи могут составлять небольшую часть всей популяции. Для сравнения среднего размера каскада, инициируемого лидером мнений, и среднего размера каскада, инициируемого обычным агентом, авторами [283] проводится серия экспериментов.

Необходимо отметить, что средний порог φ одинаково влияет на способность инициировать каскад и лидера мнений, и обычного агента, поэтому относительное сравнение их значимости не зависит от φ. Размер каскадов, генерируемых одиночными инициаторами, сильно зависит от «средней плотности» сети n_{avg}: если это значение мало, то многие агенты уязвимы, но сеть недостаточно плотна для распространения, и, в конечном итоге, активируется только небольшая часть сети; если же значение n_{avg} велико, то сеть сильно связана, но для активации агентам требуется большое число уже активированных соседей, т. е. небольшое число инициаторов не приведёт к образованию глобального каскада. Только средний интервал — так называемое *«окно каскадов»* — может привести к образованию глобальных каскадов. В этом промежутке и лидеры, и обычные агенты могут инициировать каскады. Таким образом, способность агента инициировать каскад зависит скорее от глобальной структуры сети, нежели от персональной степени влияния агента. Если в сети в принципе могут возникать каскады, то любой агент может их инициировать, если нет, то никто. Данное утверждение не зависит от значения порога φ, так как последнее просто одинаково сдвинет «окно каскада» и для лидеров, и для обычных агентов.

Как показывают эксперименты [283], лидеры инициируют каскады, размеры которых ненамного больше размеров каскадов, инициируемых обычными агентами (соотношение практически равно единице), за исключением узких границ «окна каскадов», в пределах которых лидеры существенно значимее, чем обычные агенты. С другой стороны, лидеры могут оказать ключевую роль в инициировании глобальных каскадов в качестве образующих критическую массу ранних последователей. Если сеть имеет низкую плотность (n_{avg} примерно равно нижней границе «окна каскадов»), то ранние последователи в среднем более влиятельны (т. е. $n_i > n_{\text{avg}}$), но если сеть имеет высокую плотность (n_{avg} у верхней границы «окна каскадов»), то ранние последователи в среднем менее влиятельны (т. е. $n_i < n_{\text{avg}}$). Объясняется это тем, что агенты с высоким влиянием (у которых велико n_i) менее уязвимы, но при активации потенциально способны активировать больше других агентов. Однако эксперименты показывают, что, хотя ранние последователи являются более влиятельными, чем в среднем агенты всей сети, они не являются лидерами мнений (не всегда достаточно влиятельны для генерации глобальных каскадов) [283].

Вариации модели, предложенной в [283], с разными предположениями о межличностном влиянии и структуре сети влияния дают различную динамику формирования мнения, но, тем не менее, общие выводы остаются почти теми же.

Сети с групповой структурой. В реальных сетях существует определённая *локальная структура*. Авторы [283] вводят простую локальную структуру: «знакомые» больше влияют друг на друга, и агенты имеют множественные, обычно перекрывающиеся группы знакомств. Популяция из n агентов делится на m групп размером g. В среднем каждая группа случайно связана с m_{avg} группами. Каждый агент i-й группы с вероятностью p связан с каждым агентом в своей группе и с вероятностью q связан с каждым агентом из m_i соседних групп. Рассматриваются две структуры сети: *интегрированная* ($p = q$) и *концентрированная* (агент в своей группе связан, по крайней мере, с таким же числом агентов, как и вне неё). Как оказалось, у таких сетей «окно каскадов» шире, чем у рассматриваемых ранее случайных сетей. Однако введение групповой структуры снижает значимость лидеров мнений, за исключением интегрированной сети в левой границе «окна каскадов», т. е. в сети с низкой плотностью. То же происходит и с ролью ранних последователей: в разреженных сетях бóльшую роль играют более влиятельные ранние последователи, и наоборот. И всё же эти влиятельные ранние последователи не являются лидерами мнений.

Изменение правила влияния. Предположение о том, что для активации лидера требуется большее число активных соседей, представляется разумным. Тем не менее, интересно знать, что произойдёт, если на лидеров можно повлиять так же легко, как и на остальных агентов. В работе [283] рассматривается каноническая модель *SIR* («Susceptible–Infected–Removed» [210]), в которой в одном взаимодействии независимо от других взаимодействий агент становится активным (в моделях эпидемий — «*инфицируется*») с вероятностью β и становится неактивным со скоростью γ («*выздоравливает*») в единицу времени, т. е. наиболее влиятельные агенты более легко поддаются влиянию. В этом случае нет верхней границы «окна каскадов»: чем выше плотность сети (возрастает уязвимость всех (!) агентов), тем большего размера возникают каскады. Но и здесь выводы те же: как и ранее, размеры каскадов, инициируемые лидерами, относительно больше размеров каскадов, инициируемых обычными агентами, но не существенно. А ранние последователи, связанные с инициаторами, в среднем более влиятельны, чем обычные агенты, но не настолько, чтобы быть лидерами.

1.1.3. Формирование мнений

Из определения социального влияния следует, что воздействие одного субъекта на другого в социуме приводит к изменению мнений подвергающегося воздействию субъекта (помимо изменения эмоций и поведения). В настоящем разделе приведён краткий обзор исследовательских работ, которые посвящены динамике мнений в социальных сетях, основывающейся на влиянии одних агентов на других агентов.

Основополагающие работы в этой области исследуют и моделируют в первую очередь феномен согласования мнений агентов (достижения консенсуса), когда взаимодействие между членами сети (социума) приводит к постепенному уменьшению различий между мнениями участников взаимодействий. Этот феномен объясняется в социальной психологии целым рядом причин, в том числе конформизмом (конформностью), результатом принятия доказательств (убеждением), неполной информированностью, неуверенностью в собственных решениях и т. п.

В классических формальных моделях динамики мнений ([177, 192, 206], см. также обзоры в [124, 216], в том числе модели динамики мнений в [24] и разделе 2.1 настоящей работы) рассматривается последовательное усреднение непрерывных мнений агентов в дискретном времени. Существуют различные вариации такого рода моделей, в которых усреднение происходит в непрерывном времени [147, 151], рассматриваемые мнения имеют порядковые или даже номинальные шкалы и т. д. Приведём немного модифицированный пример классической модели (условно её можно назвать моделью Френча — Харари — Де Гроота), в которой изучается динамика формирования консенсуса мнений в сетевой структуре. В этой структуре узлы из множества $N = \{1, \ldots, n\}$ на каждом шаге формируют своё текущее мнение по следующему правилу: взвешенная сумма мнений соседей, а также и своего мнения на предыдущем шаге:

$$x_i^{(t+1)} = \sum_{j \in N} a_{ij} x_j^{(t)}, \quad t \geqslant 0,$$

где $x_i^{(0)}$ — мнение i-го агента в некий начальный момент времени. Параметр $a_{ij} \in [0, 1]$ отражает степень влияния j-го агента на i-го агента ($\sum_j a_{ij} = 1$).

В матричном виде динамику мнений можно записать следующим образом:

$$x^{(t+1)} = Ax^{(t)},$$

где A — стохастическая по строкам матрица влияний.

Такая динамика приводит, в частности, к тому, что в социальной сети, имеющей сильную связность, достигается консенсус. Мнения агентов начинают совпадать, поскольку каждый агент оказывает прямое или косвенное влияние на любого другого агента сети и различия во мнениях агентов нивелируются. Подробнее эта модель рассмотрена далее в главе 2.

Следует отметить, что структура сети взаимодействий (влияния) накладывает серьёзные ограничения на возможность достижения консенсуса. Очевидно, например, что в несвязной сети консенсус может быть достигнут лишь в особых случаях. Различия во мнениях агентов могут наблюдаться и в сильно связных сетях, если, например, агенты будут в какой-то степени обладать «нечувствительными» к влиянию предубеждениями [193]. В такого рода моделях мнение агента на каждом шаге формируется как взвешенная сумма мнений на предыдущем шаге и своего начального мнения:

$$x^{(t+1)} = \Lambda A x^{(t)} + [I_n - \Lambda] x^0,$$

где $\Lambda = I_n - \mathrm{diag}(A)$.

Содержательно начальные мнения агентов можно интерпретировать как такие их индивидуальные предпочтения или укоренившиеся убеждения, влияние которых сохраняется в процессе обмена мнениями.

Сходную с рассмотренной динамику мнений можно получить при помощи модели формирования мнений со сложными узлами [137], в которой каждый узел состоит из двух взаимодействующих между собой агентов — внешнего и внутреннего. Информационный обмен узла с другими узлами сети осуществляет внешний агент, внутренний (который интерпретируется как доверенное лицо внешнего — друг или консультант) взаимодействует только с соответствующим внешним.

Многомерным обобщением модели с «нечувствительными» агентами является модель [257], в которой рассматривается не один, а сразу несколько взаимосвязанных вопросов (m различных тем), по каждому из которых у каждого из агентов имеется своё мнение. Мнение i-го агента ($i \in N$) по m различным темам задаётся вектором:

$$x_i^{(t)} = \left(x_i^{(t)}(1), \ldots, x_i^{(t)}(m)\right).$$

Динамика мнений i-го агента в момент t задаётся следующим образом:

$$x_i^{(t)} = \lambda_{ii} \sum_{j \in N} a_{ij} y_j^{(t-1)} + (1 - \lambda_{ii}) x_i^{(0)}, \quad y_j^{(t-1)} = C x_j^{(t-1)},$$

где C — матрица взаимовлияния обсуждаемых тем, а $y_j^{(t-1)}$ — выпуклые комбинации j-го агента по нескольким темам. В матричном виде динамику можно представить следующим образом:

$$x^{(t)} = [(\Lambda A) \otimes C] x^{(t-1)} + [(I_n - \Lambda) \otimes I_m] x^{(0)},$$

где $\otimes$ — произведение Кронекера, $\Lambda = I_n$ или $\Lambda = I_n - \mathrm{diag}\, A$ (в зависимости от модели).

В целом можно отметить, что в вышерассмотренных моделях, несмотря на учёт каких-то дополнительных факторов (наличие предубеждений и наличие взаимовлияющих тем), сохраняющих определённое рассогласование мнений, взаимовлияние между агентами приводит к уменьшению различий во мнениях с течением времени. В частности, предположение об усреднении подразумевает, что мнения никогда не выйдут за пределы диапазона начальных мнений.

На настоящий момент для моделей динамики формирования мнений получены многочисленные теоретические результаты, связанные с достижением консенсуса в сети. Как правило, для исследования такого рода моделей используется аппарат теории стохастических матриц, теории однородных и неоднородных марковских цепей. Известно, что динамику мнений можно моделировать при помощи цепей Маркова. В однородной марковской цепи достижение консенсуса определяется сходимостью степеней стохастической матрицы. В [157, 177] приведены некоторые достаточные условия сходимости степеней стохастической матрицы. Для класса стохастических матриц, не гарантирующих консенсус, в работе [157] приведены необходимые условия достижения консенсуса, а в работе [148] найдены минимальные изменения начальных состояний агентов (представлений), приводящие к консенсусу.

Модель динамики представлений агентов была обобщена в работе [172], где матрица коммуникаций меняется на каждом шаге и итеративный процесс задаётся произведением матриц. Решение задачи согласования мнений в такой постановке сводится к исследованию сходимости неоднородных цепей Маркова. Базовые результаты в этой области представлены в обзоре [3]. Отметим также, что рассмотренный класс моделей формирования мнений имеет тесную связь с исследованиями, посвящёнными консенсусу в многоагентных системах, которых на настоящий момент огромное число (см. обзоры [3, 169]). Полученные в этой области теоретические результаты могут быть перенесены и на область социальных сетей.

В рассмотренных выше моделях динамики мнений моделируется феномен консенсуса, когда различия во мнениях взаимодействующих агентов уменьшаются со временем. Однако в социальных сетях наблюдается не только консенсус, в них проявляются и другие социально-психологические феномены: групповая поляризация (в групповой дискуссии усиливается любая изначально доминирующая точка зрения) [243], поляризация мнений (когда происходит усиление разногласий между двумя оппозиционными группами), нонконформизм и т. п. Классические модели динамики мнений плохо объясняют сохранение различий во мнениях, кластеризацию мнений (появление множеств агентов, в каждом из которых имеется своё единое мнение) или даже усиление радикальных мнений в сильно связных сетевых структурах. Поэтому разрабатываются формальные математические модели, моделирующие помимо консенсуса и другие феномены [151, 178, 179, 208, 209, 218, 277] (см. также раздел 2 настоящий книги). В частности, кластеризация мнений (макро-эффект) моделируется в моделях ограниченного доверия (bounded confidence) [178, 208, 209], в которых только достаточно близкие агенты могут оказывать влияние друг на друга (это правило взаимодействия обычно мотивируется явлениями гомофилии и социальной идентификации).

1.1.4. Распространение влияния и информации

Воздействие одного субъекта на другого в социуме приводит не только к изменению мнений, но и к изменению поведения подвергающегося воздействию субъекта. В настоящем разделе приведён краткий обзор исследовательских работ, которые посвящены распространению активности (мнений, информации, нововведений) в социальных сетях, основывающегося на влиянии одних агентов на других. Одними из основополагающих моделей в классе оптимизационных и имитационных моделей распространения информации (распространения активности) являются линейные пороговые модели и модели независимых каскадов.

Модели независимых каскадов (Independent Cascade Model) принадлежат к моделям так называемых «систем взаимодействующих частиц» (Interacting Particle Systems) и тесно связаны с моделями эпидемий (см. ниже семейство SI-моделей).

В этих моделях [198, 224] агенты из множества $N = \{1, \ldots, n\}$ образуют социальную сеть. Агенты могут находиться в активном или в неактивном состоянии, $S_t \subseteq N$ — множество активных агентов в момент времени $t \geqslant 0$. Веса рёбер графа задают вероятность активации j-го агента i-м — $p_{ij} \in [0, 1]$.

В начальный момент времени $t = 0$ известно начальное множество активных агентов $S_0 \subseteq N$. В каждый последующий момент времени $t \geqslant 1$:

(1) все активные на шаге $t - 1$ агенты остаются активными,

(2) каждый агент $i \in S_{t-1} \backslash S_{t-2}$ независимо от других агентов активирует каждого из своих ещё неактивных соседей $j \in N \backslash S_{t-1}$ с вероятностью $p_{ij} \in [0, 1]$.

Влиятельность множества агентов A определяется как ожидаемое количество активных агентов в конце процесса распространения в предположении, что $S_0 = A$.

Модели порогового поведения. Если модели независимых каскадов моделируют вирусное распространение некоторой активности, то пороговые модели моделируют более сложное поведение агентов в сети [205]: агент становится активным только в том случае, если значение агрегирующей функции всех полученных им положительных сигналов (например, сумма сигналов или количество сигналов) превосходит заданный порог. Такое пороговое поведение часто называется сложным заражением [171]. Для описания порогового поведения предложено большое количество математических моделей [23, 205, 224] (см. также обзоры [16, 17]).

Одной из классических моделей порогового поведения является линейная пороговая модель (Linear Threshold Model) [224, 225]. В этой модели агенты из множества $N = \{1, \dots, n\}$ могут находиться в активном или в неактивном состоянии, $S_t \subseteq N$ — множество активных агентов в момент времени $t \geqslant 0$. Влияние j-го агента на i-го задаётся весом соответствующего ребра графа сети $w_{ij} \in [0, 1]$. Сумма влияний соседей на агента не превосходит единицы: $\sum_j w_{ij} \leqslant 1$.

Консервативность i-го агента определяется его порогом активации $\phi_i \in [0, 1]$. В некоторых моделях значение φ_i фиксируется одинаковым для всех агентов (см., например, [224]), в других выбирается случайно согласно некоторому вероятностному распределению [242], а в общем индивидуальные различия могут обуславливаться опытом агента, его убеждённостью, личностными чертами, воздействием средств информации [278].

Динамика в линейной пороговой модели задаётся следующим образом. В начальный момент времени $t = 0$ задано множество активных агентов $S_0 \subseteq N$. В каждый последующий момент времени $t \geqslant 1$:

(1) все активные на шаге $t - 1$ агенты остаются активными,

(2) каждый неактивный агент $i \in N \backslash S_{t-1}$ становится активным, если влияние его активных соседей превзойдёт порог активации:

$$\sum_{j \in S_{t-1}} w_{ij} \geqslant \phi_i.$$

В статье [224] предлагается обобщение модели с линейным порогом и модели независимых каскадов.

Обобщённая пороговая модель. Решение агента об активации определяется монотонной функцией активации (локального влияния соседей) $f_v \colon S \subseteq N_v \to [0, 1]$, где N_v — множество соседей v и $f_v(\varnothing) = 0$. Каждый агент изначально выбирает равномерно случайно порог θ_v и становится активным, если $f_v(S) \geqslant 0$ (см. также [251]).

Обобщённая модель каскадов. Вероятность $p_v(u, S)$ того, что агент u активирует агента v, зависит от множества S агентов, уже безуспешно пытавшихся активировать агента v. На модель накладывается ограничение: если соседи $u_1, \dots, u_l$ пытаются активировать v, то вероятность того, что v станет активным после l попыток, не зависит от порядка попыток активации.

В общем случае линейная пороговая модель и модель независимых каскадов не являются эквивалентными, но для обобщённой модели каскадов получены условия её эквивалентности обобщённой пороговой модели [224]: для любой обобщённой модели независимых каскадов с заданными параметрами найдётся эквивалентная ей обобщённая модель с порогами и наоборот.

Максимизация влияния в моделях распространения информации. Основной целью субъекта, оказывающего информационные воздействия на социальную сеть, как правило, является максимально широкое распространение нужной информации (информации, идей, мнений, действий, нововведений) в сети. Достичь этой цели можно разными способами, но наиболее часто предлагается оказывать воздействия на небольшое число ключевых (влиятельных) узлов.

Формально задача максимизации распространения информации (влияния) задаётся следующим образом. Обозначим через S начальное множество активных узлов — инициаторов распространения информации в сети $G = (V, E)$. Предположим, что известна зависимость ожидаемого конечного числа активных узлов от начального множества инициаторов $\sigma(S)\colon 2^V \to \mathbb{R}^+$ (можно её назвать функцией глобального влияния, результирующего влияния или функцией влиятельности). Бюджетное ограничение следующее: оказать активирующее воздействие можно на не более чем на k узлов. Тогда задача состоит в поиске такого множества S из k узлов, которое максимизирует $\sigma(S)$. Возможны и другие постановки задачи максимизации [173, 202, 237], в которых заданы ограничения на время распространения информации, требуется активировать заданный объём пользователей за минимальное время и/или при помощи минимального числа инициаторов или активирующие воздействия могут оказываться в разные моменты времени, а не только в начальные.

В работе [224] рассматривается задача максимизации влияния на примере следующих двух базовых моделей распространения влияния и информации: линейная пороговая модель и модель независимых каскадов. Показано, что такая задача является NP-трудной. Авторы [224] предлагают жадный эвристический $(1–1/e)$-оптимальный алгоритм для выбора начального множества S. Поскольку задача максимизации влияния схожа с известной задачей максимизации субмодулярных функций[10], для которой достигнуты определённые результаты

[10] Субмодулярная (submodular) функция f отображает конечное множество U в неотрицательные действительные числа и удовлетворяет естественному свойству «сокраща-

(см. работу [246] и современные обзоры в монографиях [194, 274]), то для соответствующего применения алгоритма необходимо лишь доказать, что $\sigma(M)$ является субмодулярной функцией, что и удалось сделать авторам [224].

Следует отметить, что не для всех моделей из класса обобщённых пороговых и каскадных моделей можно гарантировать субмодулярность функции глобального влияния и, следовательно, использовать жадный эвристический $(1–1/e)$-оптимальный алгоритм. В работе [244] доказано, что для моделей из класса обобщённых пороговых моделей, в которых функции локального влияния f_v являются монотонными и субмодулярными, результирующая функция глобального влияния $\sigma(\cdot)$ также является монотонной и субмодулярной.

Серьёзным недостатком жадного эвристического $(1–1/e)$-оптимального алгоритма является его плохая масштабируемость при увеличении размера социальной сети. Ключевым элементом жадного алгоритма является вычисление влиятельности (глобального влияния) заданного множества узлов, что является #P-трудной задачей (см. [174, 279]). Для оценки влиятельности используется метод Монте-Карло: выполняется многократный запуск распространения активности. Фактически такой жадный алгоритм является $(1–1/e–\varepsilon)$-оптимальным, где ε зависит от числа реализаций (запусков) процесса распространения активности.

Во многих исследовательских работах предложены эвристики, ускоряющие работу алгоритма выбора начального множества S. В частности, предложены эвристики [200], гарантирующие $(1–1/e)$-оптимальность и основанные на отложенных вычислениях целевой функции (функции влиятельности): субмодулярность функции приводит к тому, что на текущей итерации жадного алгоритма нет необходимости в вычислении значения целевой функции для нового узла (кандидата в элементы искомого множества), если известно, что оценка приращения функции от добавления этого кандидата на предыдущей итерации меньше наилучшего приращения функции от добавления какого-то другого узла на текущей итерации. Другие эвристики основаны на аппроксимациях целевой функции и не гарантируют $(1–1/e)$-оптимальность [174, 201, 220, 221, 279].

В работе [224] также рассматривается постановка задачи максимизации влиянии в сфере маркетинга. Пусть имеется m различных маркетинговых действий $M_1, \ldots, M_m$, каждое из которых может повли-

ющихся доходов» (предельный доход от добавления элемента к множеству S, по крайней мере, столь же высок как предельный доход от добавления того же элемента в любое множество, включающее S).

ять на некоторое подмножество агентов социальной сети, увеличивая их вероятность активации. То есть начальное множество активных агентов N_0 не определено. Выбирается объём инвестиций x_i в каждое маркетинговое действие, ограниченный совокупно бюджетом. Маркетинговая стратегия — вектор $\boldsymbol{x} = \{x_1, \ldots, x_m\}$. Вероятность $h_v(x)$ того, что агент v станет активным, определяется стратегией x. Функция $h_v(\cdot)$ — неубывающая и обладает свойством «*сокращающихся доходов*», т. е.

$$\forall\, x \geqslant y \quad \forall\, a \geqslant 0 \quad h_v(x+a) - h_v(x) \leqslant h_v(y+a) - h_v(y).$$

Результирующее ожидаемое количество активных агентов в таком случае (с учётом прямого маркетинга и последующего влияния) равно

$$EL(\boldsymbol{x}) = \sum_{Z \subseteq V} \sigma(Z) \prod_{u \in Z} h_u(\boldsymbol{x}) \prod_{v \notin Z} [1 - h_v(\boldsymbol{x})].$$

Для того чтобы приближённо максимизировать этот функционал, предполагается, что можно оценить $EL(x)$ в каждой точке $\boldsymbol{x}$ и можно найти направление i с приближённо максимальным градиентом. Пусть e_i — единичный вектор оси i, а δ — константа. Предполагается, что существует такое $\gamma \leqslant 1$, что можно найти i, для которого

$$EL(\boldsymbol{x} + \delta e_i) - EL(\boldsymbol{x}) \geqslant \gamma(EL(\boldsymbol{x} + \delta e_i) - EL(\boldsymbol{x}))$$

для любого j. Тогда, поделив бюджет k на части размером δ, на каждом шаге (всего таких частей k/δ) можно инвестировать δ средств из бюджета в M_i, которое максимизирует градиент $EL(\cdot)$.

Минимизация влияния в моделях распространения информации. Во многих прикладных областях (в частности, в области информационной безопасности) необходимо как можно раньше обнаружить распространение информации (обычно нежелательной) в социальных сетях / минимизировать распространение. Как правило, для этого отслеживается состояние небольшой части узлов социальной сети (так называемых *сенсоров*). В конечном итоге выигрыш управляющего субъекта может зависеть от времени обнаружения распространения информации, количества обнаруженных каскадов распространения и количества «заражённых» узлов, а затраты могут зависеть от свойств узлов, выбранных в качестве сенсоров (см. также раздел 3.2).

В работе [232] социальная сеть представлена графом $G(N, E)$, ресурсы управляющего субъекта ограничены величиной B, считаются заданными данные о распространении каскадов по сети (для каждого каскада, инициированного в i-м узле, известно время $T(i, u)$, за которое он дойдёт до узла u). Множество сенсоров Z находится в результате максимизации ожидаемого выигрыша:

$$\max_{Z \subseteq V} R(Z) \equiv \sum_i P(i) R_i(T(i, Z)),$$

где $T(i, Z)$ — минимальное время обнаружения сенсорами каскада, инициированного в i-м узле, P — вероятностное распределение каскадов (по «типам» — узлам возникновения), $R_i(T(i, Z))$ — выигрыш от обнаружения i-го каскада в момент времён $T(i, Z)$, затраты

$$c(Z) = \sum_{a \in Z} c(a) \leqslant B.$$

Как показано в [232], функции выигрыша субмодулярны (т. е. чем больше сенсоров, тем меньше «маржинальная выгода»). Следовательно, для нахождения множества Z можно применять жадные алгоритмы [246].

Конкурирующие нововведения. Выше рассматривались модели распространения только одной активности (агент может быть активен или не активен), однако более реалистичен случай распространения по сети сразу нескольких активностей (конкурирующих, часто похожих нововведений: идей, мнений, продуктов и т. д.). В литературе обычно рассматривается распространение двух противоположных активностей (распространение нововведений A и B, или в общем случае — распространение позитивной и негативной активности, см., например, [60]), предлагается два вида моделей: модели конкурирующих независимых каскадов (Competitive Independent Cascade, CIC) и модели конкурирующих пороговых поведений (Competitive Linear Threshold, CLT).

Кратко рассмотрим модель конкурирующих независимых каскадов. В этой модели каждый агент в сети находится в одном из трёх состояний: неактивном, позитивно активном и негативно активном. Агент может перейти только из неактивного состояния в активное, но не наоборот, также активный агент не может поменять вид активности и блокирует распространение чужого для себя вида активности. В начальный момент времени множество позитивно активных агентов задаётся множеством S_0^+, а негативно активных агентов — множеством S_0^- ($S_0^+ \cap S_0^- = \varnothing$). На каждой дуге графа (u, v) определены две вероятности: $p^+(u, v)$ — вероятность «передачи» позитивной активности и $p^-(u, v)$ — вероятность «передачи» негативной активности. На каждом шаге $t \geqslant 1$ активированные на предыдущем шаге агенты независимо пытаются активировать своих неактивных соседей (в соответствии с вероятностями на дугах графа). В случае успешных попыток активации вид активности активированного агента определяется согласно некоторому решающему правилу (например, пропорционально доле успешных попыток активации соответствующего вида). В результате формируются новые множества активных агентов S_t^+ и S_t^-.

Аналогично тому, как это было в исходных классических моделях (LTM и ICM), определяются функции результирующего позитивного и негативного влияния: $\sigma^+(S_0^+, S_0^-)$ и $\sigma^-(S_0^+, S_0^-)$.

Тогда можно привести следующие постановки задачи максимизации.

В первой [165, 207] управляющий субъект максимизирует

$$\left(\sigma^-(\varnothing, S_0^-) - \sigma^-(S_0^+, S_0^-)\right),$$

выбирая начальное множество S_0^+ мощностью k при заданном множестве S_0^-; иными словами, он стремится минимизировать распространение чужой активности (вредной активности, например, опасных мнений или ложных слухов) при помощи распространения по сети своей активности (контрпропаганда).

Во второй постановке [160, 170, 238] управляющий субъект максимизирует распространение своей (позитивной) активности $\sigma^+(S_0^+, S_0^-)$, выбирая начальное множество S_0^+ мощностью k при заданном множестве S_0^- (возможная интерпретация — известно текущее распространение конкурирующего продукта/слуха).

Рассмотрим такую постановку для модели конкурирующих независимых каскадов в несколько других обозначениях. В [170] рассматривается задача максимизации влияния для случая двух конкурирующих нововведений A и B (существуют игрок A и игрок B) для модели независимых каскадов. Соответственно, агент в сети, представленной графом $G(N, E)$, может находиться в трёх состояниях: A (принято нововведение A), B (принято нововведение B) и C (решение ещё не принято). Агент может перейти из состояния C в любое другое и только. Начальные непересекающиеся активные множества узлов — соответственно I_A и I_B ($I_A \cup I_B = I$). Задача максимизации влияния рассматривается для игрока A. Формально нужно максимизировать $f(I_A|I_B)$ — ожидаемое число агентов, которые выберут нововведение A, при заданном I_B с помощью выбора I_A.

Предлагаются две расширенные по отношению к модели независимых каскадов модели.

1. *Модель, основанная на расстоянии* (distance-based), в которой агент принимает соответствующее нововведение от ближайшего активированного агента из I.

2. *Волновая модель*: нововведение распространяется по шагам; агент, не являющийся активным на предыдущем шаге, активируется

на текущем шаге, «выбирая» равномерно случайно одного из соседей, находящихся на расстоянии, пропорциональном номеру шага.

В [170] утверждается, что функции субмодулярны, монотонны и неотрицательны, и предлагаются аппроксимирующие алгоритмы для вычисления множества I_A. Отмечается, что перспективным является вычисление равновесия Нэша и рассмотрение игры Штакельберга.

Вышерассмотренные постановки можно рассматривать в терминах иерархических игр, когда один из игроков выбирает наилучшее действие, уже зная действие другого игрока. Основной результат состоит в применении жадных алгоритмов максимизации влияния для поиска наилучшего ответа.

Возможны и другие теоретико-игровые постановки, когда игроки выбирают свои действия одновременно и независимо. В работах [152, 276] рассмотрены теоретико-игровые модели конкурирующих нововведений (активностей), в которых существует множество игроков, каждый из которых заинтересован в максимальном распространении в сети своей активности и имеет возможность в начальный момент времени повлиять на активность пользователей сети. Таким образом рассматривается некооперативная игра в нормальной форме, для которой приведены условия существования равновесий Нэша в чистых стратегиях.

В моделях конкурирующих распространений часто упускается из вида то, что у онлайновой социальной сети имеется владелец, который её контролирует и может наложить ограничения на возможность оказания воздействий на сеть (например, каким-то образом ограничить проведение определённых маркетинговых кампаний). В работе [238] рассматривается задача справедливого распределения начальных множеств пользователей между субъектами, стремящимися распространить свою активность в сети.

Прочие модели распространения активности. Необходимо отметить, что большая часть из рассматриваемых моделей влияния являются имитационными и используемые в них подходы традиционны для имитационного моделирования и близки к моделям коллективного поведения (см. [13, 86, 96, 113]), моделям эволюционных игр (см., например, [29, 30], обзор в [31]) и моделям искусственных обществ, которые чрезвычайно интенсивно развиваются в настоящее время в рамках агентного имитационного моделирования [83, 229, 268].

Рассмотрим ряд моделей влияния, базирующихся на аналогиях с медициной, физикой и другими разделами науки (см. также обзоры в [75, 131]).

Модели просачивания и заражения. *Модели просачивания* (percolation) и *заражения* (contagion), используемые в различных приложениях — от моделей эпидемий до исследования нефтяных месторождений, представляют собой популярный способ изучения распространения информации. Классическая модель распространения *эпидемии* основана на следующем цикле заболевания носителя: первоначально человек восприимчив к заболеванию (susceptible); если он входит в контакт с инфицированным, то заражается (infected & infectious) с некоторой вероятностью β; впоследствии через некоторый период времени человек становится здоровым, приобретая иммунитет, или умирает (recovered/removed); иммунитет со временем снижается, и человек снова становится восприимчивым к болезни (susceptible).

В модели *SIR* (по первым буквам трёх этапов цикла заболевания) [154] выздоровевший становится невосприимчивым к болезни: $S \to I \to R$. Соответственно общество представляется тремя группами: $S(t)$ — численность группы людей, ещё не инфицированных или восприимчивых к болезни в момент времени t; $I(t)$ — численность группы инфицированных людей; $R(t)$ — численность группы выздоровевших людей. Пусть

$$N = \mathrm{const} = S(t) + I(t) + R(t).$$

Динамика следующая:

$$\frac{dS(t)}{dt} = -\beta N \frac{S(t)}{N} I(t) = -\beta S(t) I(t),$$

т. е. каждый из инфицированных в единицу времени, контактируя с восприимчивыми к болезни, заражает их с вероятностью β;

$$\frac{dR(t)}{dt} = \gamma I(t),$$

инфицированные выздоравливают через средний период времени $1/\gamma$; соответственно:

$$\frac{dI(t)}{dt} = \beta S(t) I(t) - \gamma I(t).$$

Существуют и другие аналогичные более сложные модели эпидемий (см. обзоры в [216, 247], а также [115, 116]), в частности, в модели *SIRS* выздоровевший становится восприимчивым к болезни через некоторое время. Простейшим примером ситуации, где такая модель является естественной — заболевание гриппом. Другой пример — распространение информации в социальной сети. Блогер в социальной сети может прочитать блог друга (восприимчив), посвящённый некоторой теме, а затем может и сам написать об этой теме (инфицирован), и позже вернуться к ней (восприимчив).

Для социальных сетей ключевым показателем является *«эпидемический порог»* λc — критическая вероятность заражения соседа, при превышении которой «инфекция» распространяется по всей сети. Эпидемический порог зависит от свойств графа социальной сети, например, числа вершин, распределения связей, коэффициента кластеризации и т. д. Поэтому распространение инфекции сильно зависит от выбранной модели представления графа сети.

Если социальную сеть представить случайным графом, то инфекция с вероятностью заражения выше порога экспоненциально быстро размножается $\lambda = \beta/\gamma > \lambda c$; инфекция с вероятностью заражения ниже порога экспоненциально быстро «вымирает».

Более реалистичной моделью социальной сети является *безмасштабный граф*, в котором некоторые вершины связаны с тысячами и даже миллионами других вершин, в большинстве своём имеющих всего по нескольку связей (т. е. отсутствует характерный масштаб). В таком графе распределение количества связей узлов описывается степенным законом [9]. Анализ распространения компьютерных вирусов в безмасштабных сетях показал, что в них эпидемический порог отсутствует — эпидемия охватит всю сеть, если возникнет инфекция [261]. Однако в социальных сетях обсуждаемые темы могут распространяться без возникновения эпидемий, поэтому порог всё же отличен от нуля, следовательно, нужна или более адекватная модель сетей со степенным распределением (т. е. необходимо учесть более «тонкие» свойства таких сетей, например, коэффициент кластеризации [184]) или нужно модифицировать модель передачи инфекции (т. е. ослаблять вероятность заражения с увеличением «дистанции от инициатора» [285]).

Лавинообразные процессы. Как отмечается в [57], широкий круг явлений в природе и обществе (процессы горения и взрыва, размножение вирусов или накопление продуктов распада в живом организме, социальные конфликты [62] с митинговым характером протекания [112], валютные и биржевые паники, ажиотажный спрос на те или иные товары [64], распространение технологических и управленческих новшеств, в том числе информационных систем и технологий, информационные воздействия на индивидуальных и коллективных субъектов [123]) обладают общей отличительной чертой, объединяющей эти объекты, процессы и системы в один класс. Такой чертой является лавинообразный, по типу цепной реакции, характер распространения, развития процессов и, как следствие, наличие внутренних или внешних связей, характеризующихся большим, чаще всего экспоненциальным, изменением одного параметра при небольшом изменении другого. Такие процессы в [57] были определены как *быстрые социально-экономические процессы*. Упомянутая монография содержит как широкий спектр моделей этих процессов (а также моделей просачивания и заражения и моделей на основе клеточных автоматов), так и результаты их имитационного моделирования и идентификации моделей по многочисленным реальным данным.

Модели на основе клеточных автоматов. Для описания процессов распространения информации в социальной сети последнюю можно рассматривать как сложную адаптивную систему, состоящую из большого количества агентов, взаимодействие между которыми приводит к коллективному поведению, которое трудно предсказать и анализировать. Для моделирования и анализа таких сложных систем иногда используются клеточные автоматы. Клеточный автомат (см., например, [266]) состоит из набора объектов (в данном случае агентов), обычно образующих регулярную решётку. Состояние отдельно взятого агента в каждый дискретный момент времени характеризуется некоторой переменной. Состояния синхронно изменяются через дискретные интервалы времени в соответствии с неизменными локальными вероятностными правилами, которые могут зависеть от состояний ближайших соседних агентов в *окрестности* данного агента, а также, возможно, от состояния самого агента.

В работе [198] моделируется эффект «*из уст в уста*» в распространении информации в социальных сетях. Каждый агент в большой сети относится к одной персональной сети, агенты в которой связаны *сильными* (стабильными и постоянными) *связями*. Агент также имеет *слабые связи* с агентами из других персональных сетей (о слабых и сильных связях см. [204]). Вероятность того, что информированный агент повлияет по сильной связи на неинформированного агента (т. е. последний станет информированным) в данный период времени равна β_s, а по слабой — β_w ($\beta_s > \beta_w$). Также неинформированные агенты в данный момент времени с вероятностью α (которая меньше вероятности, достигаемой посредством эффекта «из уст в уста», согласно эмпирическим данным [168]) становятся информированными благодаря рекламе и другим маркетинговым приёмам.

Итак, в момент времени t неинформированный агент, имеющий m сильных связей с информированными агентами из его персональной сети и j слабых связей с информированными агентами из других персональных сетей, станет информированным с вероятностью:

$$p(t) = \left(1-(1-\alpha)(1-\beta_w)^j(1-\beta_s)^m\right).$$

В [198] предлагается использовать вероятностный клеточный автомат со следующим алгоритмом.

1. Первоначально все агенты не информированы (значение 0).

2. В начальный момент времени агенты становятся информированными благодаря рекламе, поскольку распространение информации

способом «из уст в уста» требует наличия информированных агентов. Для каждого агента генерируется случайное число U $(0 < U < 1)$, которое сравнивается с вероятностью $p(t)$ реализации информированности. Если $U < p(t)$, то агент станет информированным (значение 1).

3. В следующие моменты времени подключается эффект «из уст в уста» (сильные и слабые связи). Опять-таки, если $U < p(t)$, то агент станет информированным (значение 1).

4. Процесс повторяется, пока 95 % агентов не станут информированными.

Для имитационного эксперимента в [198] задавались следующие параметры: размер каждой персональной сети, число слабых связей для каждого агента, вероятность β_s, вероятность β_w и α. Как оказалось, хотя вероятность распространения по слабым связям ниже, но влияние слабых связей на скорость распространения информации, по крайней мере, такое же, как и сильных связей. В начальной фазе («early informed») большее влияние на информированность агентов оказывает реклама (см. выше, в дальнейшем её роль незначительна), в следующей фазе («middle informed») информация распространяется в персональных сетях благодаря сильным связям; по мере того, как информированных агентов в таких сетях становится больше, эффект сильных связей ослабляется, и возрастает роль слабых связей в активации новых сетей. При увеличении размера персональной сети роль сильных связей увеличивается, а слабых — уменьшается. При увеличении количества слабых связей эффект от сильных связей снижается, а от слабых — увеличивается. При усилении рекламы эффект от сильных связей немного увеличивается, а от слабых — уменьшается.

Модель маркетинговых акций на основе марковской сети. Если рассматривать социальную сеть как множество агентов — потенциальных потребителей некоторого товара или услуги или множество потенциальных последователей новой технологии (инновации, нововведения), то, с точки зрения продавца последних, *ценность* (полезность) *агента* в социальной сети зависит не только от него самого (например, непосредственной ожидаемой прибылью от продажи товара или технологии именно ему), но и от его влияния на других агентов (т. е. важна конфигурация и состояние сети — совокупность мнений потенциальных потребителей относительно «товара» — см. примеры в [84]). Поэтому часто возникает потребность в выявлении небольшого числа агентов (*задача максимизации влияния*), которым, например, предоставляются льготы, способствующие распространению нововведения по всей сети.

К проблеме определения k самых влиятельных агентов в социальной сети обращались (в контексте так называемого вирусного маркетинга (viral marketing)) авторы работы [183]. Они моделируют рынок как социальную сеть агентов (марковскую сеть), ценность каждого из которых определяется не только непосредственной ожидаемой прибылью от продажи (intrinsic value of customer), но и ожидаемой прибылью от продаж другим агентам, на которых повлияет данный, от продаж агентам, на которых они могут повлиять и т. д. (сетевая ценность агента-потребителя — network value of customer).

В [183] ставится задача определения оптимальных маркетинговых действий $MA = \{MA_1, \ldots, MA_n\}$ (MA_i может быть как булевой переменной: 1 — наличие скидки, 0 — её отсутствие для i-го агента; так и непрерывной — размер скидки) для множества n агентов с предикатом $X_i = 1$, если агент i купил товар и $X_i = 0$ иначе. Предположим, что товар описывается следующим множеством атрибутов: $Y = \{Y_1, \ldots, Y_m\}$. У каждого агента i существует множество соседей N_i, которые прямо влияют на X_i, определяя тем самым сеть агентов. В свою очередь, i-й агент влияет на своих соседей.

Пусть задана стоимость маркетинга в расчёте на одного агента c, выручка rv_1 от продажи товара агенту, если для него была проведена маркетинговая акция и выручка rv_0 от продажи продукта агенту, если маркетинговая акция не была проведена. Если маркетинговая акция включает скидку, то $rv_1 < rv_0$, иначе $rv_1 = rv_0$. Для простоты пусть MA — булев вектор.

Пусть $f_i^1(MA)$ — множество-результат установки MA_i в 1 (все остальные значения неизменны), аналогично определяется $f_i^0(MA)$. Тогда ожидаемое повышение прибыли от маркетинговой акции для агента без учёта её воздействия на других агентов, т. е. ожидаемая прибыль от продажи (*персональная ценность агента*) определяется формулой

$$\begin{aligned} &ELP_i(X^k, Y, MA) = \\ &\quad = rv_1 P\big(X_i = 1 \mid X^k, Y, f_i^1(MA)\big) - rv_0 P\big(X_i = 1 \mid X^k, Y, f_i^0(MA)\big) - c, \end{aligned}$$

где X^k — множество агентов, значения которых известны (про которых известно, купили ли они товар), $P(X_i \mid X^k, Y, MA)$ — условная вероятность покупки товара i-м агентом.

Тогда ожидаемое повышение прибыли от маркетинговых акций для выбранных агентов составит

$$\begin{aligned} &ELP(X^k, Y, MA) = \\ &= \sum_{i=1}^{n} rv_i P(X_i = 1 \mid X^k, Y, MA) - \sum_{i=1}^{n} rv_0 P(X_i = 1 \mid X^k, Y, MA_0) - |MA| c, \end{aligned}$$

где MA_0 — нулевой вектор; $rv_i = rv_1$, если $MA_i = 1$ (иначе $rv_i = rv_0$); $|MA|$ — число выбранных агентов.

Результирующая ценность агента определяется следующим образом:

$$ELP(X^k, Y, f_i^1(MA)) - ELP(X^k, Y, f_i^0(MA))$$

(т. е. значение MA уже для других агентов изменится и может повлиять на их вероятность покупки). Тогда *сетевая ценность агента* определяется как разница между его результирующей и персональной ценностью. Как видно, значение ценности зависит от того, проведены ли акции для других агентов и купили ли товар другие агенты.

Вернёмся к задаче поиска k самых влиятельных агентов в социальной сети. Очевидно, для их нахождения в данном случае следует найти такое MA, которое максимизирует ELP. В общем случае нахождение оптимального MA требует перебора всех его возможных комбинаций. Возможны следующие аппроксимирующие процедуры, дающие приближённое решение.

1) Одиночный обход. Для i-го агента проводится акция $MA_i = 1$, если

$$ELP(X^k, Y, f_i^1(MA_0)) > 0.$$

2) Жадный алгоритм. Установим $MA = MA_0$. Необходимо обойти в цикле MA_i, устанавливая значение в единицу, если

$$ELP(X^k, Y, f_i^1(MA)) > ELP(X^k, Y, MA).$$

3) Поиск с восхождением по выпуклой поверхности (hill-climbing search): установим $MA = MA_0$; установим $MA_{i_1} = 1$, где

$$i_1 = \arg\max_i \big(ELP(X^k, Y, f_i^1(MA))\big);$$

повторять, пока существует агент i, установка для которого $MA_i = 1$ приводит к увеличению ELP.

Модели влияния на основе байесовых сетей. В статье [287] представлена модель, в которой изучается влияние в команде (группе агентов). Предлагаемая модель является динамической байесовой сетью (Dynamic Bayesian Network — DBN) с двухуровневой структурой: уровнем индивидов (моделируются действия каждого агента) и уровнем группы (моделируются действия группы в целом). Всего имеются N агентов; i-й агент в момент времени t находится в состоянии S_t^i, вероятность которого $P(S_t^i \mid S_{t-1}^i, S_{t-1}^G)$ зависит от предыдущего состояния агента и состояния команды, и предпринимает действие O_t^i с условной вероятностью $P(O_t^i \mid S_t^i)$. Команда в каждый момент времени t находится в некотором состоянии S_t^G, вероятность которого $P(S_t^G \mid S_t^1, \ldots, S_t^N)$ зависит от состояний всех агентов. Таким образом, для N агентов вероятность того, что в некоторый момент времени T

они будут находиться в совокупном состоянии S и предпримут совокупное действие O, равна

$$P(S,O)=\prod_{i=1}^{N}P(S_1^i)\prod_{i=1}^{N}\prod_{t=1}^{T}P(O_t^i\mid S_t^i)\times$$
$$\times\prod_{t=1}^{T}P(S_t^G\mid S_t^1,\dots,S_t^N)\prod_{t=2}^{T}\prod_{i=1}^{N}P(S_t^i\mid S_{t-1}^i S_{t-1}^G).$$

Если ввести переменную Q, определяющую состояние группы, и предположить, что:

а) она не зависит от состояний других агентов;
б) при значении $Q=i$ состояние группы S_t^G зависит только от состояния i-го агента S_t^i;

то $P(S_t^G\mid S_t^1,\dots,S_t^N)$ можно записать как

$$\sum_{i=1}^{N}P(Q=i)P(S_t^G\mid S_t^i)=\sum_{i=1}^{N}\alpha_i P(S_t^G\mid S_t^i),$$

где α_i — влияние i-го агента на состояние группы.

Описанная двухуровневая модель влияния тесно связана с рядом других моделей: Mixed-memory Markov Model (MMM) [265], Coupled Hidden Markov Models (CHMM) [253], модели влияния и деревья динамических систем (DST — Dynamical Systems Trees) [212]. MMM декомпозирует сложную модель (например, марковскую модель k-го порядка) следующим образом:

$$P(S_t\mid S_{t-1},S_{t-2},\dots,S_{t-K})=\sum_{i=1}^{K}\alpha_i P(S_t\mid S_{t-i}).$$

В модели *CHMM* моделируется взаимодействие нескольких цепей Маркова прямой связью текущего состояния одного потока с предыдущими состояниями всех других потоков: $P(S_t^i\mid S_{t-1}^1,S_{t-1}^2,\dots,S_{t-1}^N)$, однако такая модель вычислительно сложна, поэтому её упрощают следующим образом:

$$P(S_t^i\mid S_{t-1}^1 S_{t-1}^2,\dots,S_{t-1}^N)=\sum_{j=1}^{N}\alpha_{ji}P(S_t^i\mid S_{t-1}^j),$$

где α_{ji} — влияние j-го агента на i-го. Предлагаемая модель расширяет эти модели, используя переменную S^G уровня группы, которая позволяет моделировать влияние между всеми агентами и командой

$$P(S_t^G\mid S_t^1,\dots,S_t^N)=\sum_{i=1}^{N}\alpha_i P(S_t^G\mid S_t^i)$$

и дополнительно устанавливает динамику каждого агента от состояния команды $P(S_t^i \,|\, S_{t-1}^i, S_{t-1}^G)$. Деревья динамических систем имеют структуру дерева, которая моделирует интерактивные процессы через скрытые цепи Маркова. Есть два различия между *DST* и рассмотренной выше моделью [287]. Во-первых, в *DST* родитель имеет собственную цепочку Маркова, в то время как в данной модели текущее состояние команды прямо не зависит от её предыдущего состояния (т. е. действие группы — это агрегированное действие агентов). Во-вторых, в модели [287] как команда влияет на агентов, так и агенты влияют на команду.

Авторы [287] выдвигают гипотезу, что предложенный ими подход к многоуровневому влиянию послужит средством анализа социальной динамики для выявления шаблонов возникающего группового поведения.

Модели голосования (voter model). Стохастическая модель голосования (принадлежит к классу марковских процессов с локальным взаимодействием — Interacting Particle Systems) была предложена Клиффордом и Садбери [176, 235] и исходно имела интерпретацию в терминах голосования избирателей по двум политическим позициям. Тем не менее модель голосования может быть использована и для моделирования распространения противоположных мнений в социальных сетях [187, 234, 258].

В [187] рассматривается задача максимизации влияния на примере модели голосования. В этой модели голосования социальная сеть представлена неориентированным графом с петлями $G(N, E)$. Каждый узел $v \in N$ имеет множество соседей $N(v)$ и произвольно инициализируется (ему приписывается значение 1 или 0). В момент времени $t+1$ узел v случайно выбирает одного из соседей (вероятность выбора каждого соседа одна и та же) и принимает его мнение:

$$f_{t+1}(v) = \begin{cases} 1, & \text{с вероятностью } \dfrac{|\{u \in N(v) : f_t(u) = 1\}|}{|N(v)|}, \\[2ex] 0, & \text{с вероятностью } \dfrac{|\{u \in N(v) : f_t(u) = 0\}|}{|N(v)|}. \end{cases}$$

Такая модель похожа на классическую линейную пороговую модель в том смысле, что агент с большей вероятностью изменит своё мнение на мнение, поддерживаемое большинством его соседей. Однако в отличие от пороговой модели в модели голосования агент может перейти в неактивное состояние.

В рассматриваемой модели считается, что затраты на начальное «убеждение» агента v ($f_0(v) = 1$) составляют c_v. Задача максимизации влияния формулируется следующим образом: найти $f_0 \colon N \to \{0, 1\}$, максимизирующее математическое ожидание $E\left[\sum_{v \in N} f_t(v)\right]$ при заданном ограничении бюджета $\sum_{\{v \in N | f_0(v)=1\}} c_v \leqslant R$. Показано [187], в частности, что в случае одинаковой стоимости агентов (одинаковых затрат на их убеждение) оптимальным решением будет выбор k узлов сети с наибольшей степенью, что соответствует часто используемой на практике эвристике.

Модели влияния на основе модели Изинга. Модель Изинга — математическая модель, описывающая возникновение намагничивания материала [80] (отметим, что модель Изинга часто рассматривается как один из примеров марковских сетей). Учитывается взаимодействие только ближайших атомов-соседей в кристаллической решётке (аналогия — агенты-соседи в социальной сети), энергия взаимодействия $E_{ij} = -JS_iS_j$, где s — спин атома, равный ± 1; J — константа обменного взаимодействия. Полная энергия $E(S)$ может быть найдена суммированием по всей решётке

$$E(S) = -J \sum_{i \sim j} S_i S_j.$$

В случае наличия внешнего поля h

$$E(S) = -J \sum_{i \sim j} S_i S_j + h \sum_i S_i.$$

Для ферромагнетика константа обменного взаимодействия $J > 0$ и энергия минимальна для спинов, направленных в одну сторону. Энтропия минимальна в упорядоченном состоянии (при минимальной энергии) и быстро растёт с ростом энергии. При температуре ниже критической большая часть спинов атомов будет ориентирована одинаково (с вероятностью близкой к единице), при более высокой температуре ориентация спинов будет случайной.

В [273] предполагается, что конформность или независимость в большой социальной группе может моделироваться с помощью модели Изинга; влияние ближайших соседей является определяющим, а аналогом температуры является готовность группы мыслить творчески, готовность принять новые идеи. Внешним полем для социальной группы является влияние «авторитета» или управление. Несколько более сложные модели, описывающие социальные сети и основывающиеся на термодинамических аналогиях, рассматривались в [13].

1.2. Общее знание. Коллективные действия

1.2.1. Роль информированности

Рассмотрим агента, входящего в некоторую социальную сеть. Агент информирован о текущей *ситуационной обстановке* (действиях и представлениях других агентов, параметрах среды — так называемом *состоянии природы* (state of nature) и т. п.). Ситуационная обстановка влияет на имеющийся у агента набор ценностей, установок и представлений, связанных следующим образом: ценности влияют на установки, а те, в свою очередь, приводят к предрасположенности к представлениям того или иного уровня, с предрасположенностями согласована находящаяся «в памяти» агента иерархическая система представлений о мире[11]. Предрасположенность к тем или иным представлениям и ситуационная обстановка (например, действия других агентов) приводят к формированию новых или модификации старых представлений. В соответствии с этими представлениями и установленной целью агент принимает решение и выполняет действие. Результаты действий приводят к изменению как самой ситуационной обстановки, так и внутренних ценностей, установок и представлений.

Представления *n*-го порядка. Взаимные представления. Если рассмотреть представления агента, то в ситуации принятия решения важными оказываются также его представления о представлениях других агентов и т. д. (пример представлений второго порядка (второго *ранга рефлексии*): агенту A известно, что агенту B известно, что C известно p), поскольку агент перед действием пытается предсказать поведение других агентов. Другие агенты, соответственно, могут иметь свои представления разных порядков (см. обзор и модели взаимных представлений в [110, 111]).

Во многих социальных отношениях, событиях и действиях, участники которых не используют каких-либо явных соглашений и контрактов, важны взаимные представления, предполагающие представление агентов об идентичности их представлений (см. описание *конвенций* в [110, 233]). В [275] выделены следующие два подхода к определению понятия взаимного представления.

I. Итеративный подход. Согласно этому подходу в группе M существует взаимное представление о p тогда и только тогда, когда: всем агентам из M известно p; всем известно, что всем известно p, и так далее до бесконечности (т. е. факт p является *общим знанием* (см., например, [110]) для агентов из M). Данный подход гипотетически предполагает наличие у агентов представлений такого ранга рефлексии, которые они в действительности не смогут иметь или не смогут ими оперировать из-за ограниченности когнитивных возможностей, отсутствия информации и недостатка рациональности (пробле-

[11] Отметим, что термины «ценности», «представления», «установки» и т. п. в современной психологии и в теории многоагентных систем не согласованы и употребляются в различных толкованиях, которые не совпадают друг с другом.

ма определения *максимальных целесообразных рангов рефлексии* в зарубежной литературе получила название «level problem»). Выделяют несколько способов решения данной проблемы (см. также [110, 111]):

а) агент группы может действовать с позиции отсутствия недоверия к суждению p (lack of disbelief, определяется как отсутствие у агента представлений об отрицании p);

б) для агентов группы предполагается наличие только предрасположенности к приобретению представлений более высокого порядка; при этом агенты этой группы должны быть должным образом информированы и должны обладать общими для всех шаблонами рассуждений для вывода одних и тех же заключений.

В обоих случаях агенты должны быть достаточно рациональны, интеллектуальны и при необходимости без каких-либо помех способны приобрести представления более высокого уровня (предпосылкой для такого приобретения может послужить вопрос о представлениях более высокого уровня). Однако часто для успешных действий достаточно представлений второго порядка (но далеко не всегда — см. достаточные условия в [110, 142]).

Пример 1.1 (выполнение совместного действия двумя агентами). Высказывания базового порядка:

1) Агент А выполнит свою часть X, $p(A)$;
2) Агент В выполнит свою часть X, $p(B)$.

Предположим:

i) А верит, что 1) и 2);
ii) В верит, что 1) и 2).

Утверждается [275], что уровень $n = 2$ в данном примере необходим и достаточен для выполнения совместного действия: агент А, очевидно, должен предполагать, что агент В выполнит свою часть действия, поскольку только в этом случае у него возникнут основания для выполнения собственной части. Агент А должен также предполагать, что агент В предполагает, что агент А выполнит свою часть работы. В противном случае, у агента А нет достаточных оснований для того, чтобы предполагать, что В выполнит свою часть работы (так как если по предположению агента А агент В не предполагает выполнение агентом А своей части, то он не выполнит свою тоже), а значит, нет оснований для выполнения собственной части. Аналогично для В. Необходимо наличие у агентов представлений следующего порядка:

iii) А предполагает, что i) и ii);
iv) В предполагает, что i) и ii). •[12]

[12] Символ • здесь и далее обозначает окончание примера.

Пример 1.2. Предположим, что каждому участнику «Общества Плоской Земли» не только известно о том, что Земля является плоской, но и то, что всем участникам известно это (поскольку они состоят в этом обществе). Агенты осознают, что другие агенты в группе предполагают то же самое, и это устанавливает социальную связь между ними, основанную на «вере», но на первом уровне рефлексии такое осознание отсутствует. И вновь второй уровень рефлексии необходим и обычно достаточен для согласованных действий участников общества в вопросах, связанных с формой Земли. Однако кто-то мог бы обнаружить, что все они верят в данное представление второго порядка, и мог бы задаться вопросом о представлениях третьего порядка и т. п. •

Отметим, что не все социальные понятия зависят от взаимного представления: скрытое социальное влияние и власть не требуют этого.

II. Рефлексивный подход. В группе G существует взаимное представление о p тогда и только тогда, когда все в группе предполагают p и все предполагают, что в группе G существует взаимное представление о p. Данное представление соответствует второму уровню рефлексии [110].

Взаимное представление как общее (shared) *«мы-представление»*. «Мы-представление» агента — это такое представление агента о p, что:

(a) каждый агент имеет данное представление (требуется, поскольку не может быть общей позиции без всех участников) и предполагает, что

(b) все в группе имеют такое представление (предоставляет социальную причину для того, чтобы принять и иметь такую позицию), а также каждый агент предполагает, что

(c) все предполагают, что есть взаимное представление в смысле (b) (усиливает причину, делая её межсубъектной).

Общее «мы-представление» предполагает наличие у каждого агента группы «мы-представлений», т. е. соответствует третьему уровню рефлексии [110].

С помощью взаимных представлений можно пытаться объяснить коллективное мышление и коллективное действие [96, 142]. Некоторые модели, учитывающие стратегическую и информационную рефлексию членов социальной сети, рассматривались в [44].

1.2.2. Общественные блага и индивидуальная специализация

Коллективные действия, общественные блага и координационные игры. В *коллективном действии* важны следующие факторы: информированность, коммуникация и координация. Теория коллективного действия (collective action theory) объясняет широкий круг явлений (общественные движения, электоральное поведение, членство в группах по интересам), связанных с достижением общественных благ посредством согласованного совместного участия двух или более людей. Теория также рассматривает влияние внешних факторов на поведение людей в данной группе.

Как известно, *общественное благо* (public goods) — это благо, характеризующееся:

1) неисключаемостью из потребления, т. е. невозможно исключить из числа потребителей общественного блага тех, кто не платил за него;

2) отсутствием конкуренции при потреблении блага: потребление блага одним субъектом не ведёт к сокращению потребления этого блага другими людьми.

Чистое общественное благо — национальная оборона, мосты, общественное мнение, выборы, открытая информационная база данных, система коммуникации и т. д.

Ради достижения одного и того же общественного блага (цель) *коллективное действие* (collective action) совершается двумя или более людьми. Каждый человек решает участвовать (participate) или не участвовать (free riding) в коллективном действии. Поскольку перед каждым участником встаёт вопрос, готов ли он нести затраты ради достижения общественного блага (т. е. участвовать в коллективном действии), и поскольку для него существует возможность получения выгоды без участия в издержках (если число людей велико, то увеличиваются общественные затраты на выявление «безбилетников» и наложение санкций), то возникает затруднённость осуществления взаимовыгодных коллективных действий. То есть возникает так называемая «проблема безбилетника» (free rider problem), широко известная в современной микроэкономической теории (см., например, [91, 240]).

Для того чтобы побудить агентов к приложению усилий по созданию общественного блага, можно стимулировать их материальными поощрениями, оказывать влияние в рамках тех или иных схем социального влияния. По мнению [89, 254] только *организация* может справиться с затратами на решение этих задач (ей принадлежит ключевая роль в обеспечении взаимодействия, мотивации, коммуникации и координации участников коллективного действия [96, 106]). Или, по крайней мере, потенциально должны существовать латентные группы, т. е. сообщества с общими групповыми интересами в коллективном благе, которые ещё не построили организационную структуру для решения коммуникативных и организационных задач, но со структурами лидерства, центрами, где аккумулируются ресурсы и принимаются решения [89].

Однако следует отметить, что развитие информационно-телекоммуникационных технологий (персональных компьютеров, мобильных телефонов, электронной почты, чатов, Интернета) в коллективных действиях во много раз снижает затраты на коммуникацию и координацию [158], а также иногда освобождает от необходимости построения формальной структуры. Если, например, рассматривать общественно полезную информацию как общественное благо, то при целенаправленном создании информационной базы и построении сообщества на начальном этапе всё же требуется координация участников и возникает «проблема безбилетника»; при нецеленаправленном создании такой базы, когда участники могут и не знать других участников, самостоятельно размещая информацию на общественно доступных ресурсах (форумах, Интернет-страницах), возникает по большей части не *проблема участия*, а *проблема доверия*.

Ситуации с коллективным действием, в которых все стороны могут получить взаимную выгоду, если примут взаимно согласованные решения (проблема координации), часто моделируются координационными играми. *Координационные игры* — класс игр с множественными чистыми равновесиями Нэша, в которых игроки выбирают одинаковые или согласованные стратегии [53, 110, 139, 213, 245]. В рамках настоящей работы нас интересуют коллективные действия агентов в социальных сетях.

Коллективные действия в социальных сетях. Ключевое значение здесь имеют социальные связи. С одной стороны, социальные связи могут обеспечить эффективный локальный социальный контроль для стимулирования участия в коллективном действии (в силу давления со стороны своих соседей, доверия к ним, социального одобрения, необходимости сохранения положительных отношений и соответствия ожиданиям, эмоциональной привязанности, сохранения своей репутации, отождествления себя с соседями и т. п.). Так, например, поведение соседей агента повлияет на его собственное поведение. С другой стороны, социальные связи обеспечивают агента информацией о намерениях и действиях других агентов в сети и формируют его (неполные) представления, на основе которых агент принимает свои решения. И, наконец, в пределах социальных связей агенты могут прикладывать совместные усилия по созданию локального общественного блага и совместно пользоваться им. Поэтому структура социальной сети оказывает сильное воздействие на решения агентов о принятии участия в коллективном действии.

В статье [135] была рассмотрена теоретико-игровая модель коллективных действий в сети. Агенты прикладывают усилия к некоторому совместному действию, которое окажется успешным (даёт положительный вклад в целевые функции агентов) в случае, если сумма усилий превышает некоторый порог. Если действие оказалось успешным, то выигрыш агента тем больше, чем больше его усилие. С другой стороны, само по себе усилие агента вносит в его целевую функцию отрицательный вклад, который зависит от его типа — чем больше тип, тем «легче» агенту прикладывать усилие (в частности, это может быть психологически объяснено большей лояльностью, симпатией агента к совместному действию). В статье найдено условие на количество агентов и значения их эффективностей, при котором ненулевые действия являются равновесными, а также описано воздействие на типы агентов, при котором единственным равновесием является нулевое (отсутствие действий агентов).

Общественные блага в социальных сетях. В статье [161] рассматривается предоставление общественных благ (public goods) в социальной сети, в которой агенты, соединённые связями, могут прикладывать совместные усилия по созданию благ и пользованию ими. По мнению авторов [161], это может привести к *специализации* в сети в обеспечении общественных благ (см. также обзоры теории *сетевых игр* [51, 217]). В [161] доказано, что существует равновесие, в котором агенты вносят определённый вклад (усилия), а другие пользуются этим. Такая специализация может принести пользу обществу в целом, если вкладчики («специалисты») связаны со многими агентами в сети. Новые связи в сети увеличивают доступность общественного блага, но уменьшают индивидуальные стимулы для приложения усилий (увеличения вклада). Следовательно, общее благосостояние всей сети выше в неполных сетях. В этом смысле для будущих исследований перспективно изучение динамики, процессов формирования социальной сети.

В [161] вводится сетевая модель общественного блага, где фиксирована структура сети (связь между агентами i и j задаётся бинарным значением $r_{ij} = r_{ji}$). i-й агент выбирает размер e_i своих усилий, вкладываемых в общественное благо, которым смогут воспользоваться все его соседи из множества N_i. Получаемый им выигрыш задаётся дважды дифференцируемой строго вогнутой функцией выигрыша $f(\cdot)$, которая зависит от *усилий* (действий) как самого агента e_i, так и усилий его соседей: e_{-i}. Тогда его функция выигрыша задаётся вектором усилий агентов $\boldsymbol{e}$ и графом G:

$$U_i(\boldsymbol{e}; G) = f\left(e_i + \sum_{j \in N_i} e_j\right) - ce_i,$$

где c — стоимость единицы усилий.

В [161] рассматривается игра, в которой при заданной структуре сети G агенты одновременно выбирают значения своих усилий так, чтобы максимизировать свои функции выигрыша. Очевидно (исходя из вида игры), что для всех агентов уровень усилий, максимизирующих их целевые функции, одинаков и составляет такое значение e^*, при котором $f'(e^*) = c$. Вектор $\boldsymbol{e}$ является *равновесным по Нэшу*, если и только если для любого агента i выполняется либо $e_{-i} \geqslant e^*$ и $e_i = 0$ (агент не прикладывает усилий), либо $e_{-i} < e^*$ и $e_i = e^* - e_{-i}$ (агент прикладывает усилия).

Позитивные и негативные эффекты введения новых связей. С одной стороны, новая связь обеспечивает лучший доступ к общественному благу, а с другой — уменьшает стимулы для приложения агентом собственных усилий. Обозначим через $W(\boldsymbol{e}, G)$ суммарный выигрыш членов социальной сети G при векторе действий $\boldsymbol{e}$. Вектор $\boldsymbol{e}$ называется second-best (*утилитарный* [91]) вектор действий агентов (в общем случае, second-best — наилучший с учётом существующих ограничений вариант), если не существует другого такого вектора $\boldsymbol{e}'$, что $W(\boldsymbol{e}', G) > W(\boldsymbol{e}, G)$. Предположим, что $\boldsymbol{e}$ существует в графе G, в котором агенты i и j не связаны. Введём новую связь (i, j), тогда: если агент i ранее не прикладывал усилий, то равновесие остаётся тем же, и, следовательно, $W(\boldsymbol{e}, G + ij) > W(\boldsymbol{e}, G)$; если же оба агента прикладывали усилия, то равновесие $\boldsymbol{e}$ исчезнет, возникнет новое равновесие и общее благосостояние может уменьшиться.

Далее авторы [161] вводят в модель следующие изменения.

1. Несовершенная замена усилий (усилия самого агента приводят к большему собственному выигрышу, нежели усилия других агентов):

$$e_i + \delta \sum_{j \in N_i} e_j, \quad 0 < \delta \leqslant 1.$$

Если величина δ достаточно мала, то агенты прилагают строго положительные усилия и существует единственное *рассредоточенное* равновесие Нэша (специализации нет). Доказано, что *специализированный вектор* является равновесием, если и только если «неспециалисты» связаны, по крайней мере, с $s = 1/\delta$ «специалистами» из максимального независимого множества.

2. *Выпуклые затраты*. Пусть затраты на усилия $c(e_i)$ — такая возрастающая и выпуклая функция, что $c'(0) > f'(+\infty)$. В этом случае агентам выгодны совместные усилия. В полном графе существует единственное равновесие с рассредоточенным вектором (все агенты прилагают некоторые усилия). Специализация всё же возможна в неполных графах. Усилие $\boldsymbol{e}^*$, максимизирующее целевую функцию, достигается при $f'(\boldsymbol{e}^*) = c'(\boldsymbol{e}^*)$. Пусть целое s таково, что $f'(s\boldsymbol{e}^*) \leqslant c'(0)$. Доказано, что специализированный вектор является равновесием, если

и только если «неспециалисты» связаны по крайней мере с s «специалистами» из максимального независимого множества.

3. *Неоднородность агентов*. Предположим, что для каждого агента затраты c_i и выигрыш f_i — свои, так же, как и свой характерный уровень максимизирующих усилий e_i^*. Вектор $\boldsymbol{e}$ является равновесным по Нэшу, если и только если для любого i-го агента выполняется либо $\bar{e}_i \geqslant e_i^*$ и $e_i = 0$ (агент i не прикладывает усилий) либо $\bar{e}_i < e_i^*$ и $e_i = e_i^* - \bar{e}_i$ (агент i прикладывает усилия). В полном графе (для неполного графа — тем более) существует единственное равновесие Нэша, в котором агенты с высоким уровнем порога прикладывают усилия (т. е. неоднородность приводит к специализации).

1.2.3. Коммуникация и координация

В [175] социальная сеть рассматривается как коммуникационная, посредством которой агенты сообщают друг другу о своей готовности принять участие в коллективном действии. Каждый агент информирован о готовности только своих ближайших соседей и на основе этого локального знания принимает решение об участии, используя правило принятия решений «я приму участие, если примешь участие ты» (механизм координации). То есть рассматривается координационная игра с неполной информированностью. *Коммуникационная сеть* способствует координации, и основной интерес представляет то, каковы свойства таких сетей, которые допускают коллективное действие. В [175] рассматриваются минимально достаточные сети, которые выстраивают агентов в *иерархию социальных ролей*/ступеней: «ведущие» (initial adopters), «последователи» (followers) и так далее до «поздних последователей» (late adopters). Такие сети способствуют координации следующим образом:

1) информируя каждую ступень о более ранних ступенях;
2) формируя общее знание в пределах каждой ступени.

То есть обеспечивается понимание роли (локально) общего знания в коллективном действии и соотношение между структурой социальной сети и общим знанием.

В модели [175] группа агентов представлена конечным множеством $N = \{1, 2, \ldots, n\}$. Каждый агент $i \in N$ расположен (w) к участию в коллективном действии или не расположен (x). Множество состояний природы: $\Theta = \{w, x\}^n$. Агент принимает решение об участии $a_i \in \{r, s\}$, r — принять участие или s — не участвовать. Выигрыш агента зависит от его склонности к участию и от решений всех агентов группы; функция его полезности $u_i\colon \{w, x\} \times \{r, s\}^n \to \mathbb{R}$ обладает следующими свойствами:

1) $u_i(x, a) = \begin{cases} 0, & \text{если } a_i = r, \\ 1, & \text{если } a_i = s, \end{cases}$

т. е. если агент не расположен к участию, то он всегда предпочтёт остаться в стороне;

2) $\forall\, a, a' \in \{r, s\}^n : a'_j = r \Rightarrow a_j = r$ выполняется

$$u_i(w, r, a_{N\setminus\{i\}}) - u_i(w, s, a_{N\setminus\{i\}}) \geqslant u_i(w, r, a'_{N\setminus\{i\}}) - u_i(w, s, a'_{N\setminus\{i\}}),$$

т. е. расположенность агента к участию возрастает с увеличением количества других агентов, которые примут участие в коллективном действии (функция полезности супермодулярна — см. определение выше).

Однако нужно учесть ещё и существование социальной (коммуникационной, в которой социальная связь указывает направление передачи информации) сети. Каждому агенту известно о существовании всех остальных агентов в сети (этот факт — общее знание). Сеть задаётся бинарным отношением $\to$ на множестве N: отношение $j \to i$ означает, что i-й агент информирован о намерениях j-го. Агент i информирован только о своих намерениях и намерениях своих соседей $B(i) = \{j \in N \mid j \to i\}$. Поэтому если $\theta \in \Theta$ — действительное состояние природы, то i-й агент знает только то, что оно находится во множестве неразличимых для него состояний природы

$$P_i(\theta) = \left\{(\theta_{B(i)}, \varphi_{N\setminus B(i)}) \mid \varphi_{N\setminus B(i)} \in \{w, x\}^{n-\#B(i)}\right\}.$$

Такие множества формируют $\mathfrak{I}_i = \{P_i(\theta)\}_{\theta\in\Theta}$ — *информационное разбиение* возможных состояний природы Θ для i-го агента.

Стратегией для i-го агента является такая функция $\boldsymbol{f}_i : \Theta \to \{r, s\}$, что для любых $\theta, \theta' \in \Theta$, если $\theta, \theta' \in P \in \mathfrak{I}_i$, то $f_i(\theta) = f_i(\theta')$. То есть если два состояния находятся в одном и том же элементе разбиения $\mathfrak{I}_i$, то агент i не может различить их и принимает одно и то же решение. Пусть F_i — множество всех стратегий для i-го агента,

$$F = \prod_{i\in N} F_i.$$

Ожидаемый выигрыш i-го агента для $f \in F$:

$$EU_i(\boldsymbol{f}) = \sum_{\theta\in\Theta} \pi(\theta) u_i(\theta_i, \boldsymbol{f}(\theta)),$$

где $\pi \in \Delta\Theta$ — считающиеся заданными априорные представления агентов о намерениях друг друга (prior beliefs — вероятностное распределение на $\{w, x\}^n$), являющиеся в рамках традиции байесовых игр [110, 245] общим знанием среди агентов.

Вектор $\boldsymbol{f}$ является *равновесием Байеса — Нэша* [245] в игре $\Gamma(\to, \pi)$, если $\forall\, i \in N,\ \forall\, \xi_i \in F_i\ (EU_i(\boldsymbol{f}) \geqslant EU_i(\xi_i, \boldsymbol{f}_{N\setminus\{i\}}))$. Поскольку функции выигрыша супермодулярны, можно показать, что равновесие существует всегда.

Минимально достаточные сети. Если все агенты имеют достаточно «оптимистичные» представления, то все агенты примут участие в коллективном действии независимо от структуры коммуникационной сети. Однако, как отмечается в [175], представляет интерес то, какими свойствами должны обладать коммуникационные сети, чтобы вся[13] группа агентов приняла участие в коллективном действии независимо от их априорных представлений. Такие сети были названы достаточными. То есть *достаточная сеть* — сеть, для которой существует такое равновесие, в котором все агенты выбирают участие в коллективном действии (напомним, что такое возможно только если все они готовы/желают участвовать) независимо от их априорных представлений.

Существуют достаточные сети, называемые *минимальными*, в которых отсутствуют избыточные коммуникационные связи. Формальное определение таково: сеть $\to$ минимально достаточная, если она достаточна и если для любой достаточной сети $\to' \subset \to$ следует $\to' = \to$. То есть она не содержит в себе меньших достаточных сетей.

Такая минимально достаточная сеть принимает форму иерархии клик. *Клика* — подмножество агентов, в которой каждый непосредственно информирует каждого другого агента, т. е. клика сети $\to$ — множество $M_k \subseteq P$ такое, что $\forall\, i, j \in M_k\ i \to j$. Любая минимальная достаточная сеть разбивает агентов на клики, и между кликами существует коммуникационная связь только в одном направлении. Минимально достаточная сеть распределяет агентов в социально-сетевой иерархии ролей, определённой кликами и их отношением $\to^*$: «ведущие» (leading adopters) и «последователи» (followers).

В целом, следует отметить, что задача поиска минимальной структуры коммуникаций между агентами, обеспечивающей требуемые свойства социальной сети (как правило, такой структурой является остовное дерево в орграфе коммуникаций — см, например, [2, 284]) является общей для множества моделей влияния в социальных сетях, а именно — для моделей подражательного поведения, координации, марковских и др. моделей.

«Игра порогов», локальное общее знание. В [175] рассматривается на примерах частный случай $\Gamma_{e_1 \ldots e_n}$ теоретико-игровой модели, в которой i-й агент принимает решение об участии, если примут

[13] Хотя, надо сказать, существуют и другие равновесные ситуации, в которых лишь часть игроков принимает участие, и это выгодно для них.

участие, по крайней мере, e_i агентов (порог). То есть его функция выигрыша (#D обозначает число элементов множества D)

$$u_i(w,a)=\begin{cases} 1, & \text{если } a_i=r \text{ и } \#\{j\in N\colon a_j=r\}\geqslant e_i,\\ -1, & \text{если } a_i=r \text{ и } \#\{j\in N\colon a_j=r\}< e_i,\\ 0, & \text{если } a_i=s.\end{cases}$$

У каждого агента своё значение порога в диапазоне от 1 до $n+1$. Если порог равен единице, то агент всегда примет участие; если порог равен двум, то агент обязательно будет участвовать при условии участия своего соседа и т. д. Агент i знает свой порог и знает пороги только своих соседей. И, наконец, хотя это явно не отмечено, в [175] подразумевается, что агент знает то, как информированы его соседи друг о друге.

Пример 1.3. Игра $\Gamma_{2,2,4,4}$.

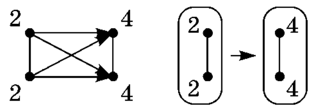

Рис. 19. Минимально достаточная сеть и её иерархия ролей

Агенты со значением порога 2 — клика «ведущих», 4 — клика «последователей». •

Пример 1.4. Игра $\Gamma_{1,3,3,4,4,4,4,6,6,9,9,9}$.

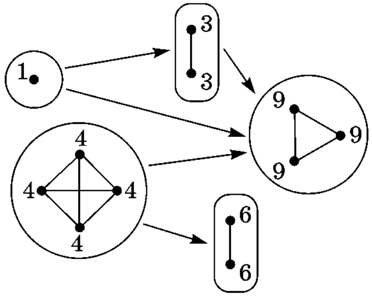

Рис. 20. Иерархия ролей игры $\Gamma_{1,3,3,4,4,4,4,6,6,9,9,9}$

Имеются две ведущие клики. Необходимо отметить, что агентам клики со значением 9 необходимо знать о значении порога агента клики со значением 1, поскольку для своего участия они должны быть уверены в участии агентов клики 3.

Интересно то, что в рассматриваемом примере клики однородны (агенты в них имеют одни и те же значения порогов), а агенты с высоким значением порога находятся на низшем уровне иерархии. •

Пример 1.5. Игра $\Gamma_{3,3,3,3}$ и представления высокого порядка. Рассмотрим игру $\Gamma_{3,3,3,3}$ («квадрат»), в которой все агенты готовы к участию (числами обозначаются не значения порогов, а номера агентов), см. рис. 21.

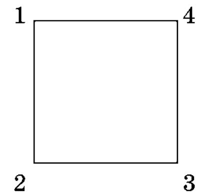

Рис. 21. Сеть игры $\Gamma_{3,3,3,3}$

Здесь первый агент знает о том, что второй и четвёртый имеют значение порога равное 3. Но он не знает о пороге третьего агента и знает, что второй не осведомлён о значении порога четвёртого агента. Эта неопределённость приводит к тому, что первый агент не будет участвовать в коллективном действии, несмотря на то, что оно потенциально возможно (его порог равен трём и число склонных к участию агентов, как он знает, тоже равно трём). И так для каждого агента, следовательно, никто не примет участия. Хотя агентов, желающих участвовать, достаточно и они все по отдельности знают это, но ни один из агентов не знает, что другие знают это. Этот пример показывает, что знания первого порядка ещё недостаточно для принятия решения, для этого необходимо знание более высокого порядка.

Рассмотрим игру $\Gamma_{3,3,3,3}$ с другой структурой (минимально достаточная сеть).

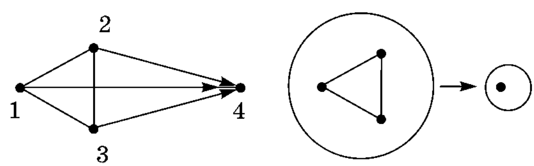

Рис. 22. Минимально достаточная сеть игры $\Gamma_{3,3,3,3}$ и её иерархия ролей

Первый агент знает, что второй и третий агенты имеют значение порога, равное 3, и знает, что они знают о значениях порогов друг друга, и знает, что они знают, что он знает о том, что они знают о порогах друг друга, и т. д. (локально общее знание «у всех агентов 1, 2, 3 порог равен 3»). Аналогично для второго и третьего агента. Этого оказывается достаточно для того, чтобы они приняли участие в коллективном действии, поскольку они знают о готовности друг друга. Четвёртому агенту это тоже известно, и он также примет участие.

Рассматриваемый пример подчёркивает важность того, что структура сети должна быть не просто известна агентам, но быть общим знанием для агентов. То есть важную роль играют такие структуры, как клики, в которых «локально» общее знание (ограниченная частью агентов структура) возникает естественно. Информация о готовности «течёт» от «ведущих» клик по цепочке. Агенты знают готовность других агентов, но не их действия. Минимальные достаточные сети — неотъемлемые для игры структуры, интерпретируемые как иерархические социальные роли. Коммуникационные сети способствуют координации следующим образом:

1) информируя каждую ступень о более ранних/предшествующих ступенях;
2) формируя общее знание в пределах каждой ступени (роли). •

О сильных и слабых связях. Интуитивно понятно, что в сети с большим количеством сильных связей сразу формируются небольшие клики из-за «транзитивности»: друзья моих друзей часто оказываются и моими друзьями. Поэтому в них формирование общего знания на локальном уровне происходит быстрее. И если значения порогов достаточно низки, т. е. шансы, что группа, связанная сильной связью, станет ведущей кликой. Однако если пороги высоки, то локальное общее знание в маленьких кликах останется бесполезным, а большее значение приобретут слабые связи в силу того, что они пересекают общество быстро, ускоряют коммуникацию и усиливают распространение знания, создавая предпосылки для коллективного действия.

1.2.4. Социальный контроль и коллективное действие. Стабильность сети

В статье [219] рассматривается взаимосвязь между механизмами социального контроля, свойствами социальных сетей и коллективным действием (collective action), предпринимаемым для обеспечения общественного блага всего сообщества агентов. Показано, что ключевыми факторами, влияющими на решения агентов сети в рамках конфликта частных и общественных интересов, являются осуществляемые посредством межличностных связей в социальной сети различные виды социального контроля: *поведенческое подтверждение* (behavioral confirmation) — следование агента социальным ожиданиям, и *социальные стимулы* (social selective incentives) — дополнительные персональные блага, предоставляемые данному агенту другими агентами.

Принятие коллективного решения моделируется в некооперативной игре (авторы [219] вводят понятие «*структурно обусловленной игры общественного блага*» (structurally embedded public goods game) с однократным взаимодействием, $n > 2$ агентами ($N = \{1, \dots, n\}$), где каждый агент принимает решение об участии ($\sigma_i = 1$) или неучастии

($\sigma_i = 0$) в коллективном действии (см. также выше). Участие требует общих затрат c и приносит дополнительное благо α для каждого агента сети (если $c > \alpha$, то всё же участие достаточно большого количества агентов n^* может оказаться «прибыльным»: $\alpha n^* > c$). Наличие неориентированной связи между i-м и j-м агентами обозначается как $r_{ij} = 1$ (отсутствие — как $r_{ij} = 0$), петли в графе связей отсутствуют, а общее количество связей i-го агента равно $r_i = \sum_{j=1}^{n} r_{ij}$. На агента по связям оказывают влияние следующие факторы: поведенческие стимулы от соседей, принявших аналогичное решение (аддитивный стимул b_1 и пропорциональный стимул b_2) и социальные стимулы (s от каждого соседа). Для простоты положим $c, \alpha > 0$ и $b_1, b_2, s \geqslant 0$. Пусть C — множество агентов, принимающих решение об участии, D — множество «безбилетников». Тогда для i-го агента-участника $r_i = r_{id} + r_{ic}$. И выигрыши от участия/неучастия для i-го агента соответственно следующие ($j \neq i$):

$$\pi_i(\sigma_i = 1) = r_i s + r_{ic} b_1 + \frac{r_{ic}}{r_i} b_2 + \alpha \left(\sum_{j=1}^{n} \sigma_j + 1 \right),$$

$$\pi_i(\sigma_i = 0) = c + r_{id} b_1 + \frac{r_{id}}{r_i} b_2 + \alpha \sum_{j=1}^{n} \sigma_j.$$

Таким образом, для рационального агента выгоднее участвовать, если

$$r_i s + (r_{ic} - r_{id}) \left(b_1 + \frac{b_2}{r_i} \right) + \alpha \geqslant c.$$

Для простоты примем $r_i > 0$, $i \in N$. Тогда участие в коллективном действии всех агентов будет равновесным по Нэшу, если сеть обладает следующим свойством:

$$\min_i \{r_i\} \geqslant \frac{c - \alpha - b_2}{s + b_1}.$$

Видно, что нет ни одного агента, для которого неучастие при участии всех соседей было бы выгодно. Содержательно это означает, что усиление стимулов, так же как и высокая минимальная степень вершин сети, приводит к повышению вероятности успешности коллективного действия.

Однако в некоторых случаях возможно участие только части агентов сети n^* в коллективном действии, которое будет всё же выгодно для участников (если $\alpha n^* > c$) и равновесно по Нэшу в случае, если для непустых множеств C и D

$$\forall\, i \in C \quad r_i s + (r_{ic} - r_{id}) \left(b_1 + \frac{b_2}{r_i} \right) + \alpha \geqslant c,$$

$$\forall\, j \in D \quad r_j s + (r_{jc} - r_{jd}) \left(b_1 + \frac{b_2}{r_j} \right) + \alpha \leqslant c.$$

В том случае, когда возможно несколько равновесий Нэша, выбирается равновесие, обеспечивающее больший выигрыш для каждого агента, нежели какое-либо другое. Если возможны как равновесие Нэша полного участия агентов, так и равновесие Нэша полного неучастия, и число агентов превосходит n^*, то равновесие Нэша с полным участием агентов Парето-доминирует. Если есть равновесие Нэша для полного участия и равновесие Нэша для частичного участия, то первое из них доминирует в случае, если из выражений для $\pi_i(\cdot)$ следует:

$$\forall\, j \in D \quad n_d \alpha + r_j s + r_{jc}\left(b_1 + \frac{b_2}{r_j}\right) > c.$$

Другими словами, чем меньше «безбилетников» в равновесии Нэша с частичным участием, тем реже равновесие полного участия будет доминировать, так как шансы «безбилетников» получить больший выигрыш увеличиваются.

Кроме того, в статье [219] обсуждается *возможность формирования и разрыва связей в сети*. Социальная сеть с данным вектором стратегий *стабильна*, если нет ни одного агента, для которого разрыв и/или образование связей привели бы к лучшему для него результату. Пусть заданы стоимость разрыва связи a и стоимость образования новой связи f.

Для «безбилетника» $i \in D$ выгодны структурные изменения связей с образованием y новых с «безбилетниками» и разрывом x старых связей с агентами-участниками, если

$$y b_1 + b_2 \frac{y r_{ic} + x r_{id}}{r_i(r_i - x + y)} > xa + yf.$$

Для агента-участника $j \in C$ выгодны структурные изменения связей с образованием y новых с агентами участниками и разрывом x старых связей с «безбилетниками», если

$$(y-x)s + y b_1 + b_2 \frac{y r_{jd} + x r_{jc}}{r_j(r_j - x + y)} > xa + yf.$$

Если образование и разрыв связей ничего не стоят, то стабильной будет только такая сеть, в которой множества C и D полносвязны и не имеют связей между собой.

Устойчивое сетевое равновесие (stable network equilibrium) определяется в [219] как ситуация, в которой не существует агента, для которого любая комбинация изменения его действия и изменения его связей приведёт к лучшему результату. Доказывается, что только равновесия с полным участием или полным неучастием являются равновесиями стабильной сети (($s > 0$ или $b_1 > 0$ или $b_2 > 0$) и ($f = a = 0$)).

Ограничением рассматриваемой модели является то, что связи между агентами не ориентированы, и для агента стимулы, предоставляемые всеми его соседями, равнозначны. Кроме того, рассматриваются только внешние стимулы, «внутренние» (собственные) стимулы агентов отсутствуют. Предполагается также, что агенты рациональны и полностью информированы, что маловероятно в больших сетях. Перспективным представляется ограничить информированность, например, структурно, и/или предположить, что агенты ограниченно рациональны [94, 129].

1.3. Модели и свойства социальных сетей

В целом, на основании обзора такой интенсивно развивающейся области, как моделирование влияния в социальных сетях, можно сделать вывод, что модели влияния в социальных сетях пока ещё только становятся самостоятельной дисциплиной, представляя собой синтетический «сплав» теории графов, теории игр, социальной психологии, социологической теории малых групп, теории марковских цепей, теории синтеза механизмов (mechanism design), теории многоагентных систем и других научных направлений. Тем не менее, можно с достаточной степенью уверенности предположить, что в ближайшие годы модели социальных сетей станут самостоятельной ветвью исследований, привлекающей внимание всё большего числа учёных — специалистов в области прикладной математики, психологии, экономики и социологии. Наряду с этим следует признать, что в настоящей работе мы оставили без внимания существующие многочисленные примеры анализа конкретных социальных сетей с использованием рассмотренных моделей. Их, даже схематичное, описание потребовало бы обзора не меньшего объёма.

Приведённый выше в разделах 1.1 и 1.2 обзор свидетельствует, что известные на сегодняшний день и кратко описанные выше модели социальных сетей (см. их классификацию в разделе 1.1.1) адекватно отражают многие свойства и эффекты, имеющие место в реальных социальных сетях (см. перечисление этих свойств и эффектов во введении) — см. таблицы 1 и 2, в которых столбцы соответствуют моделям, а строки — эффектам, присущим социальным сетям. Символ «+» на пересечении строки и столбца свидетельствует, что соответствующая модель более или менее адекватно отражает соответствующий эффект, «•» — учитывает.

Проведённый в настоящей главе анализ (а также его краткая сводка, приведённая в таблицах 1 и 2) свидетельствует, что ряд свойств социальных сетей ещё ждёт своего исследования — разработки адекватного аппарата моделирования.

Таблица 1. **Модели («оптимизационные» и «имитационные») социальных сетей и их свойства**

Свойства	Классы моделей					
	Модели с порогами	Модели независимых каскадов	Модели просачивания и заражения	Модели Изинга	Модели на основе клеточных автоматов	Модели на основе цепей Маркова
Наличие собственных «мнений» (состояний) агентов	+	+	+	+	+	+
Изменение мнений под влиянием других членов социальной сети	+	+	+	+	+	+
Различная значимость мнений (влиятельности, доверия) одних агентов для других	+	+	+	•	+	•
Различная степень подверженности агентов влиянию	+	–	–	–	+	–
Существование косвенного влияния	–	–	–	–	–	–
Существование «лидеров мнений»	+	•	–	–	–	–
Существование порога чувствительности к изменению мнения окружающих	+	–	–	–	+	–
Локализация групп	–	•	–	–	–	–
Наличие специфических социальных норм	–	–	–	–	–	–
Учёт факторов «социальной корреляции»	•	–	–	–	–	–
Существование внешних факторов влияния	+	–	–	+	+	–

Таблица 1 (окончание)

Свойства	Классы моделей					
	Модели с порогами	Модели независимых каскадов	Модели просачивания и заражения	Модели Изинга	Модели на основе клеточных автоматов	Модели на основе цепей Маркова
Наличие стадий	+	–	–	–	•	–
Лавинообразные эффекты (каскады)	+	+	•	–	–	–
Влияние структурных свойств социальных сетей на динамику мнений, включая степенной эффект, эффект кластеризации, локальную промежуточность	+	•	–	–	+	–
Активность агентов	–	–	–	–	–	–
Возможность образования группировок, коалиций	–	–	–	–	–	–
Неполная и/или асимметричная информированность агентов	–	–	–	–	–	–
Нетривиальная взаимная информированность (рефлексия) агентов	–	–	–	–	–	–
Игровое взаимодействие агентов	–	–	–	–	–	–
Оптимизация информационных воздействий	+	+	–	–	•	–
Информационное управление в социальных сетях	–	–	–	–	–	–

Таблица 2. **Модели («теоретико-игровые») социальных сетей и их свойства**

Свойства	Классы моделей					
	Модели взаимной информированности	Модели согласованных коллективных действий	Модели коммуникаций	Модели стабильности сети	Модели информационного влияния и управления	Модели информационного противоборства
Наличие собственных мнений агентов	+	+	+	+	+	+
Изменение мнений под влиянием других членов социальной сети	+	+	+	+	+	+
Различная значимость мнений (влиятельности, доверия) одних агентов для других	–	•	•	–	+	+
Различная степень подверженности агентов влиянию	–	•	•	+	+	+
Существование косвенного влияния	•	–	–	–	+	+
Существование «лидеров мнений»	–	–	–	–	+	–
Существование порога чувствительности к изменению мнения окружающих	–	–	•	–	–	–
Локализация групп	–	–	+	–	+	•
Наличие специфических социальных норм	–	–	–	–	+	•
Учёт факторов «социальной корреляции»	•	•	•	–	–	–
Существование внешних факторов влияния	–	•	–	•	+	+

Таблица 2 (окончание)

Свойства	Классы моделей					
	Модели взаимной информированности	Модели согласованных коллективных действий	Модели коммуникаций	Модели стабильности сети	Модели информационного влияния и управления	Модели информационного противоборства
Наличие стадий	–	–	+	–	•	–
Лавинообразные эффекты (каскады)	–	–	–	–	•	–
Влияние структурных свойств социальных сетей на динамику мнений, включая степенной эффект, эффект кластеризации, локальную промежуточность	•	+	+	+	•	•
Активность агентов	•	+	•	•	•	+
Возможность образования группировок, коалиций	–	–	–	–	•	•
Неполная и/или асимметричная информированность агентов	+	+	+	–	•	+
Нетривиальная взаимная информированность (рефлексия) агентов	+	–	•	–	+	•
Игровое взаимодействие агентов	•	+	•	+	•	+
Оптимизация информационных воздействий	–	–	–	–	+	+
Информационное управление в социальных сетях	–	–	–	–	+	+

Глава 2

МОДЕЛИ ИНФОРМАЦИОННОГО УПРАВЛЕНИЯ В СОЦИАЛЬНЫХ СЕТЯХ

Настоящая глава посвящена разработке и исследованию теоретико-игровых и оптимизационных моделей и методов информационного влияния и управления в социальных сетях. В разделе 2.1 рассматривается модель информационного влияния, в которой изучается формирование и динамика мнений агентов в социальной сети. Динамика влияний описывается марковским процессом, а мнения рассчитываются при помощи графа влияний. Вводятся понятия сообществ, групп и спутников. С помощью результирующей структуры влияний доказывается, что мнения спутников определяются мнением групп, а в группах мнения стабилизируются и равны.

В разделах 2.2–2.6 на основе модели информационного влияния рассматриваются модели информационного управления:

— мнениями членов социальной сети (разделы 2.2, 2.3 и 2.6);
— репутацией членов социальной сети (раздел 2.4);
— доверием членов социальной сети (разделы 2.2, 2.4 и 2.5).

Показывается, что «стабильное» состояние сети линейно по управлению. Вводится понятие *репутации* и рассматриваются модели информационного управления и противоборства, позволяющие моделировать динамику репутации членов социальной сети и исследовать роль репутации в осуществлении информационных воздействий. Как оказывается, чем выше репутация *активного агента*, осуществляющего манипулирование, тем больше его возможности по влиянию на итоговое мнение агентов в социальной сети. Поэтому, как следует из модели, активный агент максимизирует свою репутацию, манипулируя своими начальными мнениями по каждому из вопросов, чтобы добиться определённого результирующего мнения всех членов социальной сети по последнему вопросу. Задача информационного противоборства (игры нескольких манипулирующих агентов) в рамках такой модели, фактически, сводится к задаче динамической активной экспертизы с репутацией. Также анализируются подходы к построению моделей стратегической и информационной рефлексии агентов.

В разделе 2.7 рассматривается модель распространения действий в социальной сети и основанный на ней метод расчёта влияния. В этой модели базовым элементом анализа является действие, совершенное агентом (пользователем сети), поэтому модель названа акциональной.

Следует отметить, что рассматриваемые во второй главе модели отражают многие эффекты, наблюдаемые в реальных социальных сетях (см. предисловие).

2.1. Марковская модель информационного влияния

В настоящем разделе изучаются формирование и динамика мнений в социальной сети, моделируемые при помощи цепей Маркова: динамика влияний описывается марковским процессом, а мнения рассчитываются при помощи графа влияний. Рассмотренная модель в целом следует традиции использования марковских цепей для исследования социальных сетей [177, 192, 206] (см. также [124]).

Выводы, полученные в рамках модели, согласуются с результатами социальных психологов (см., например, [5, 62, 82, 141, 144]). Например, в группе «тесно связанных» вершин устанавливается одинаковое мнение.

Прямое и косвенное информационное влияние. Будем описывать агентов, входящих в социальную сеть, множеством $N=\{1, 2, \ldots, n\}$. Агенты в сети влияют друг на друга, и степень влияния задаётся *матрицей прямого влияния* A размерности $n \times n$, где $a_{ij} \geqslant 0$ обозначает степень доверия i-го агента j-му агенту. Здесь и далее мы будем говорить как о влиянии, так и о доверии, и считать, что эти два понятия являются противоположными в следующем смысле: выражение «степень доверия i-го агента j-му равна a_{ij}» тождественно по смыслу выражению «степень влияния j-го агента на i-го равна a_{ij}».

Доверие в социальной сети можно наглядно изображать в виде стрелок с весами, соединяющих вершины. Например, стрелка от i-го агента к j-му с весом a_{ij} (рис. 23) означает соответствующую степень доверия.

$$\textcircled{i} \xrightarrow{\alpha_{ij}} \textcircled{j}$$

Рис. 23. Прямое (непосредственное) доверие

Будем считать, что агент i достоверно знает только «свою» (i-ю) строчку матрицы A — кому и насколько он доверяет.

Будем считать выполненным условие нормировки[14]:

$$\forall\, i \in N \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1, \tag{1}$$

т. е. предположим, что «суммарное доверие» агента равно единице. Это условие означает, что матрица A является стохастической по строкам [34]. Отметим, что агент может доверять и самому себе, чему соответствует $a_{ii} > 0$.

Если i-й агент доверяет j-му, а j-й доверяет k-му (рис. 24), то это означает следующее: k-й агент *косвенно влияет* на i-го (хотя i-й может даже не знать о его существовании).

$$(i) \xrightarrow{\alpha_{ij}} (j) \xrightarrow{\alpha_{jk}} (k)$$

Рис. 24. Косвенное доверие (влияние)

Это соображение побуждает к поиску ответа на вопрос о том, как в итоге формируются мнения членов социальной сети.

Формирование и динамика мнений агентов. Пусть у каждого агента в некий начальный момент времени имеется мнение по некоторому вопросу, мнение i-го агента отражает вещественное число x_i^0, $i \in N$. Мнение всех агентов сети отражает вектор-столбец мнений x^0 размерности n.

Агенты в социальной сети взаимодействуют, обмениваясь мнениями. Этот обмен приводит к тому, что мнение каждого агента меняется в соответствии с мнениями агентов, которым данный агент доверяет. Будем считать это изменение линейным, т. е. положим, что мнение агента в следующий момент времени является взвешенной суммой мнений агентов, которым он доверяет (весами являются степени доверия a_{ij}):

$$x_i^{\tau} = \sum_{j} a_{ij} x_j^{\tau-1}, \quad i \in N, \tag{2}$$

где индекс τ обозначает момент времени [43].

Нетрудно убедиться, что в векторной записи первое изменённое мнение агентов равно произведению матрицы непосредственного доверия на вектор начальных мнений: $x^1 = Ax^0$. Если обмен мнениями продолжается и далее, то вектор мнений агентов становится равным $x^2 = (A)^2 x^0$, $x^3 = (A)^3 x^0$ и т. д.

[14] В настоящей главе принята независимая внутри разделов нумерация формул.

Если взаимодействие агентов продолжается достаточно долго, то их мнения стабилизируются — сходятся к результирующему мнению $X = \lim_{\tau\to\infty} x^\tau$ (об условиях существования предела см. ниже).

Будем называть *матрицей результирующего влияния* предел

$$A^\infty = \lim_{\tau\to\infty} (A)^\tau$$

(условиях существования предела также описываются ниже). Тогда можно записать соотношение

$$X = A^\infty = x^0, \tag{3}$$

где x^0 — вектор начальных мнений, A^∞ — матрица результирующего влияния, X — вектор итоговых мнений.

Структуру косвенного доверия (влияния) также удобно изображать в виде ориентированного графа (агенты — вершины), где стрелками обозначено доверие агентов (стрелка идёт от агента к тем агентам, кому он доверяет; если степень доверия равна нулю, то стрелка не проводится).

Пример 2.1. Пример преобразования прямых доверий (влияний) в результирующие приведён на рис. 25.

На рис. 25б видно, что всё результирующее доверие агентов сети сосредоточено на двух агентах с номерами 3 и 6. Именно эти два агента, по сути, определяют мнение в данной социальной сети. •

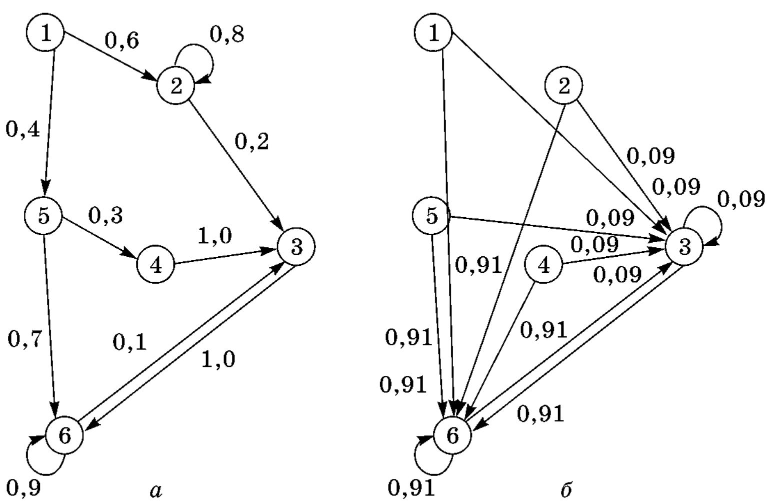

Рис. 25. Преобразование прямого доверия (а) в результирующее (б)

Чтобы описать структуру результирующего доверия (влияния) в общем случае нам понадобятся некоторые понятия, вводимые ниже.

Группы и сообщества. Назовём *сообществом* множество агентов, которые не подвергаются влиянию агентов вне него. Формально, сообщество — это такое подмножество $S \subset N$, что $\forall\, i \in S\ \forall j \in N \setminus S\ (\alpha_{ij} = 0)$. Обозначим через $\aleph$ множество таких подмножеств.

Назовём *группой* сообщество агентов, которые взаимодействуют таким образом, что каждый агент влияет или подвергается влиянию каждого другого агента группы прямым или косвенным образом. Формально, группа — это «минимальное» сообщество, т. е. такое, внутри которого нельзя выделить никакое другое сообщество, т. е. множество $Q \in \aleph$ такое, что $\neg \exists\, S \in \aleph\ (S \subset Q)$.

Спутник — агент, подвергающийся влиянию агентов тех или иных групп, однако не оказывающий влияния ни на одну из них (ни на одного из агентов ни одной из групп). Это агент, не входящий ни в одну из групп.

Таким образом, каждый агент либо принадлежит ровно одной группе, либо является спутником. В то же время, агент может принадлежать нескольким «вложенным» друг в друга сообществам.

На рис. 26 выделены группа, сообщество и спутники в социальной сети примера 2.1. Здесь имеется единственная группа, включающая агентов 3 и 6; остальные агенты являются спутниками.

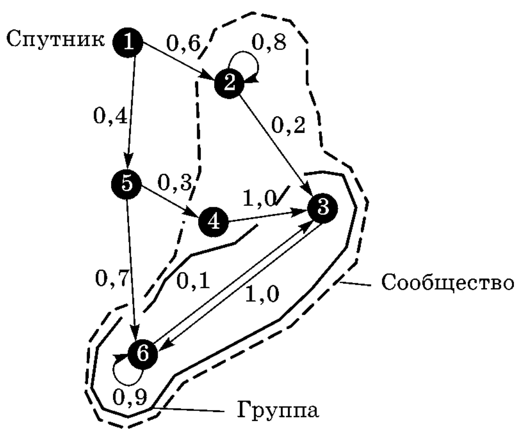

Рис. 26. Сообщество, группа и спутник социальной сети примера 2.1

Структура результирующих влияний. Для описания структуры результирующих влияний мы используем известные результаты, полученные при исследовании конечных цепей Маркова (см., например, [68]). Для этого установим соответствие между введёнными нами понятиями и понятиями теории марковских цепей следующим образом:

- агент — состояние марковской цепи,
- степень доверия — вероятность перехода из одного состояния в другое,
- матрица прямых доверий — матрица переходных вероятностей,
- косвенное доверие — достижимость,
- группа — неразложимый класс существенных состояний,
- спутник — несущественное состояние.

Далее, будем считать выполненным следующее условие.

Условие 1. В каждой группе существует хотя бы один агент $i \in N$, для которого $\alpha_{ii} > 0$. Иными словами, в каждой группе хотя бы один агент хоть сколько-нибудь доверяет своему мнению.

В этом случае каждой группе соответствует (в теории марковских цепей) неразложимый апериодический класс. Поэтому справедливы следующие утверждения, являющееся следствием известных фактов в теории цепей Маркова (подчеркнём, что условие 1 здесь и далее будем считать выполненным, если явно не оговорено обратное).

Утверждение 2.1. *Существует матрица результирующих влияний — предел* $A^\infty = \lim_{\tau\to\infty}(A)^\tau$.

Утверждение 2.2. *Мнения агентов стабилизируются, т. е. существует предел* $X = \lim_{\tau\to\infty} x^\tau$.

Утверждение 2.3. *Результирующее влияние любого спутника на любого агента равно нулю. Это, в частности, означает, что начальные мнения спутников не оказывают никакого влияния на итоговые мнения каких-либо агентов.*

Утверждение 2.4. *В матрице результирующих влияний строки, соответствующие членам одной группы, совпадают. Это, в свою очередь, означает, что совпадают итоговые мнения агентов, т. е. каждая группа имеет общее мнение* (*которое можно считать мнением группы*).

Отметим, что утверждение 2.4 соответствует наблюдениям социальных психологов: в группе её участники, испытывая информационное влияние, приходят к *консенсусу* [72].

Таким образом, структура результирующих влияний в социальной сети выглядит следующим образом (рис. 27). Имеется некоторое количество групп, в каждой из которых итоговые мнения агентов совпадают (имеет место консенсус) и не зависят от начальных мнений

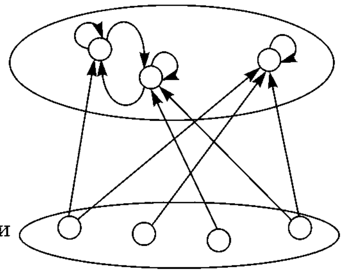

Рис. 27. Структура графа результирующих влияний

агентов, не входящих в данную группу. Остальные агенты являются спутниками, их итоговые мнения полностью определяются мнением одной или нескольких групп.

Как уже было отмечено, каждый агент из группы является *существенным состоянием* в терминологии теории конечных цепей Маркова[15] [34, 68, 140]. Из этой теории известно, что если у процесса имеется несколько неразложимых классов существенных состояний (которые соответствуют нашему понятию групп), то матрица переходов A может быть представлена в виде

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & A_k & 0 \\ Q_1 & Q_2 & \dots & Q_k & R \end{pmatrix},$$

где A_l — соответствует матрице переходов внутри группы l (*неразложимые* стохастические матрицы), k — число неразложимых классов, Q_l — матрица, описывающая влияние группы l на спутников, при этом суммарное влияние группы l на спутника j определяется как сумма индексов в соответствующей строке матрицы Q_l.

Если конечный марковский процесс оказывается в каком-либо существенном состоянии из класса A_l, то далее возможны существенные состояния только из этого же класса. При этом возврат в это же существенное состояние возможен через какое-то число шагов (которое, очевидно, не превышает число состояний в данной группе). Минимальное число шагов, через которое процесс, выйдя из существенного состояния, может вернуться в него, называется *периодом состояния*, которой в описываемой модели социальной сети будет длиной минимального цикла в графе, описываемого матрицей A_l, проходящего через агента, соответствующего данному существенному состоянию.

[15] Матричный анализ структуры результирующих влияний принадлежит д-р техн. наук Н. А. Коргину.

Наибольший общий делитель периодов всех существенных состояний из одного класса называется *цикличностью* d_l класса [68]. Данная характеристика является крайне важной, так как необходимым и достаточным условием сходимости мнений внутри отдельной группы l является *ацикличность* (или *примитивность* по Колмогорову [34]) матрицы взаимовлияний агентов данной группы: $d_l = 1$.

В [43] было показано, что достаточным условием сходимости мнений внутри отдельно взятой группы является наличие в ней хотя бы одного агента, который хоть немного доверяет себе. Легко убедиться, что матрица взаимовлияний данной группы ациклична, так как длинна минимального цикла для данного агента будет равна единице. Если все неразложимые классы в матрице A ацикличны, то матрица называется *простой*. Если в простой матрице A есть только один неразложимый класс, то такая матрица называется *регулярной* [34, 68].

Далее для простоты иногда (оговаривая это в каждом конкретном случае) будем предполагать, что все элементы стохастической матрицы прямого влияния A строго положительны. Если все члены социальной сети образуют одну группу, это является достаточным условием регулярности. Отметим, что даже в рамках этого достаточно сильного предположения нельзя гарантировать, что мнения агентов сойдутся в точности к консенсусу за конечное время.

Известно, что для регулярной матрицы A каждая строка матрицы A^∞ представляет из себя один и тот же вероятностный положительный вектор $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1, \quad \forall\, i \in \{1, \ldots, n\} \quad \alpha_i > 0.$$

Более того, этот вектор является решением уравнения $\alpha A = \alpha$, которое в силу регулярности матрицы Aимеет единственное решение [34, 68]. Вектор α известен как *финальное* или *предельное* распределение регулярной цепи Маркова [68].

При заданном векторе начальных мнений x^0 итоговым мнением каждого агента будет αx^0. Поэтому, с точки зрения рассматриваемой модели, величина α_i может трактоваться как *влиятельность* i-го агента, так как она определяет, насколько сильно его начальное мнение отражается в итоговом. Также очевидным является тот интересный факт, что для всех $\tau = 1, 2, \ldots$ выполнено равенство

$$\alpha x^0 = \alpha x^\tau, \quad \text{где} \;\; x^\tau = (A)^\tau x^0.$$

Из этого факта следует, что для $\forall\, a \in \mathbb{R}^1$ можно определить *область притяжения* — множество начальных мнений, из которых достижимо данное значение как консенсус группы — $X = a\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$:

$$X(a) \subseteq \mathbb{R}^{n-1} = \{x^0 \in \mathbb{R}^n : \alpha x^0 = a\}.$$

Причём $\forall\, a, b \in \mathbb{R}^1$, $a \neq b$, $X(a) \cap \mathrm{X}(b) = \varnothing$, из любого вектора начальных мнений возможно достижение лишь одного вектора итогового мнений. Иными словами, пространства достижимости для различных итоговых мнений «параллельны». Геометрические интерпретации данного утверждения тесно связаны с условием, фигурирующим в формулировке утверждения 2.6в), приведённого ниже в разделе 2.2.

В качестве отступления отметим, что задача определения относительного влияния агентов в социальной сети (анализ уравнений типа $\alpha A = \alpha$), чрезвычайно близка в определённом смысле к так называемой *задаче ранжирования Интернет-страниц* (PageRank problem) — см., например, обзоры в [227, 228, 284].

Возникает вопрос об информированности самих агентов о создавшейся ситуации. Знает ли агент, является ли он членом одной из групп либо спутником? Логично считать, что каждый агент в каждый момент времени знает своё мнение, мнение тех агентов, кому он доверяет, а также степень своего доверия каждому из них (здесь идёт речь о прямом доверии). Если агент знает, что его итоговое мнение не совпадает с мнением тех, кому он доверяет, то он является спутником и знает это. В то же время, если итоговые мнения агента и тех, кому он доверяет, совпадают, то агент может быть как членом группы, так и спутником.

Примеры формирования и динамики мнений агентов. В данном разделе мы рассмотрим несколько модельных примеров, иллюстрирующих формирование мнений агентов.

Начнём с «предельных» случаев.

Пример 2.2. Пусть имеется агент $i \in N$, который доверяет только самому себе: $\forall\, j \neq i$ $\alpha_{ij} = 0$, $\alpha_{ii} = 1$. Мнения такого агента меняться во времени не будут: $x_i^\tau = x_i^0$, $\tau = 0, 1, \ldots$ •

Пример 2.3. Пусть имеется агент, который доверяет в некоторой (отличной от нуля) степени всем остальным агентам, которые все имеют одно и то же мнение и никому, кроме себя, не доверяют. Тогда мнение этого агента со временем будет стремиться к мнению других агентов, которое меняться не будет. •

Пример 2.4. Пусть имеются два агента, каждый из которых полностью доверяет оппоненту ($\alpha_{12} = \alpha_{21} = 1$). Тогда введённое выше условие 1 не имеет места, и будут наблюдаться колебания мнений агентов с периодом 2. •

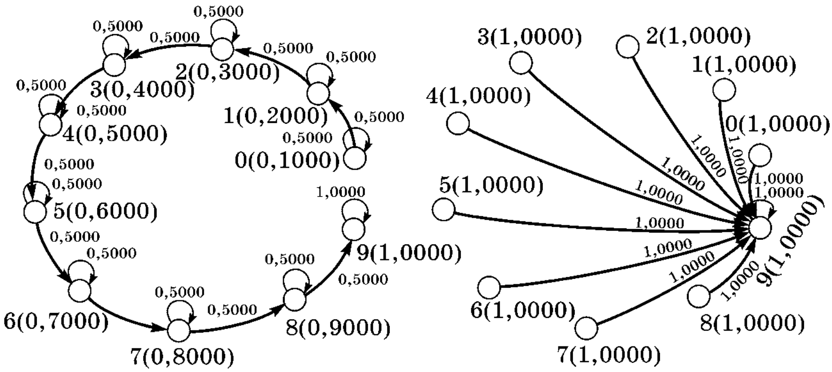

Рис. 28. Иллюстрация пункта А примера 2.7

Пример 2.5. Пусть имеются два агента и ситуация симметрична: $\alpha_{11} = \alpha_{22} < 1$. Начальные мнения агентов — 0 и 1 соответственно. Результирующее мнение будет единым и равным 0,5, причём максимальная «скорость сходимости» будет иметь место при $\alpha_{11} + \alpha_{22} = 1$. •

Пример 2.6. Пусть социальная сеть — полный граф, а степени доверия всех агентов друг другу и себе одинаковы. Тогда результирующее мнение будет единым для всех агентов и равным среднему арифметическому их начальных мнений. •

Пример 2.7. Пусть социальная сеть представлена линейной цепочкой агентов.

А. Последний агент доверяет только себе, каждый из остальных доверяет себе и своему последователю в цепи $\alpha_{i,i+1} = 0{,}5$. Тогда по цепи агентов пробежит затухающая волна мнений, т. е. мнение i-го агента в момент времени τ будет $x_i^\tau = 0{,}5x_i^{\tau-1} + 0{,}5x_{i+1}^{\tau-1}$. Итоговые мнения будут одинаковыми (рис. 28)[16].

Б. Каждый из агентов доверяет себе $\alpha_{i,i} = 0{,}5$. Для первого агента $\alpha_{1,2} = 0{,}5$, для n-го агента $\alpha_{n,n-1} = 0{,}5$, для всех остальных $\alpha_{i,i-1} = 0{,}25$ и $\alpha_{i,i+1} = 0{,}25$. Тогда итоговые мнения будут одинаковыми:

$$X = \frac{1}{n-1}\left(0{,}5x_1^0 + 0{,}5x_n^0 + \sum_{i=2}^{n-1} x_i^0\right)$$

(на рис. 29 представлены начальные и итоговые мнения и доверия в сети из десяти агентов). •

[16] Изображение сети и расчёт динамики мнений в этом и некоторых последующих примерах получены в рамках системы имитационного моделирования. В этом и в последующих примерах раздела 2.1 агенты на рисунках индексируются с 0.

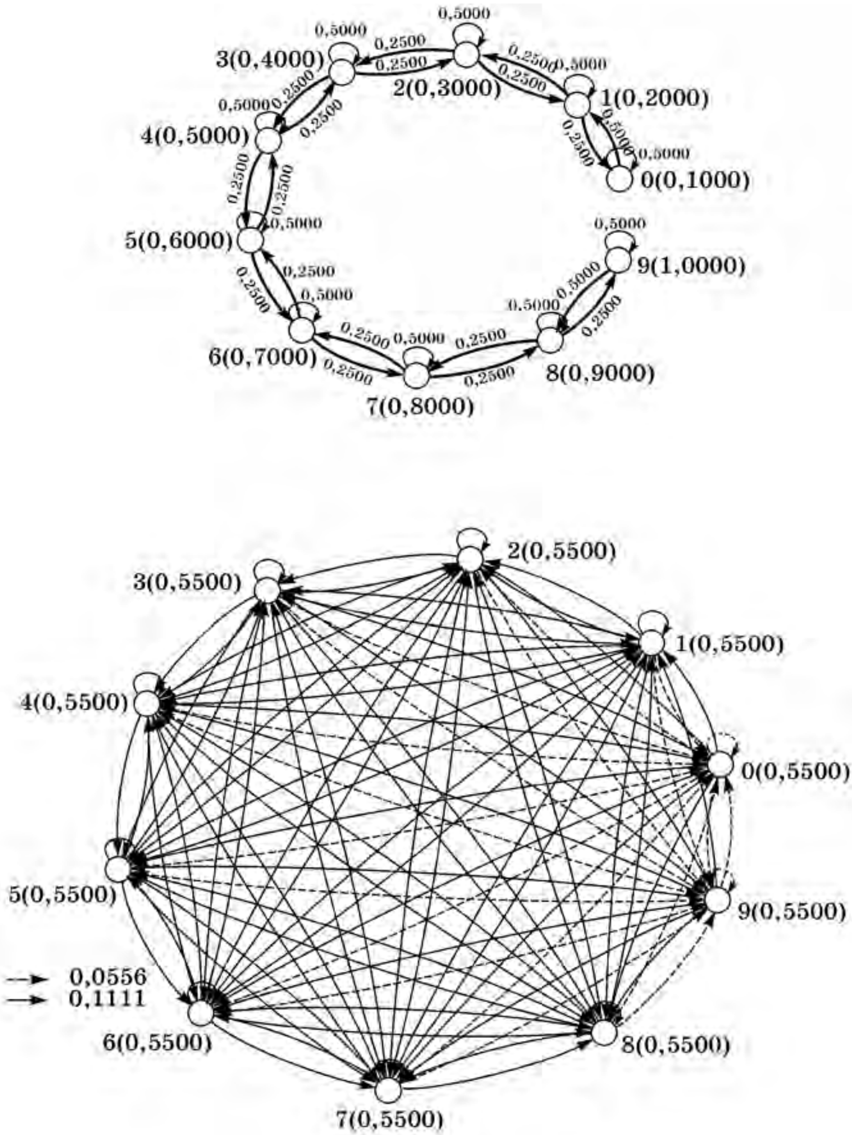

Рис. 29. Иллюстрация пункта Б примера 2.7

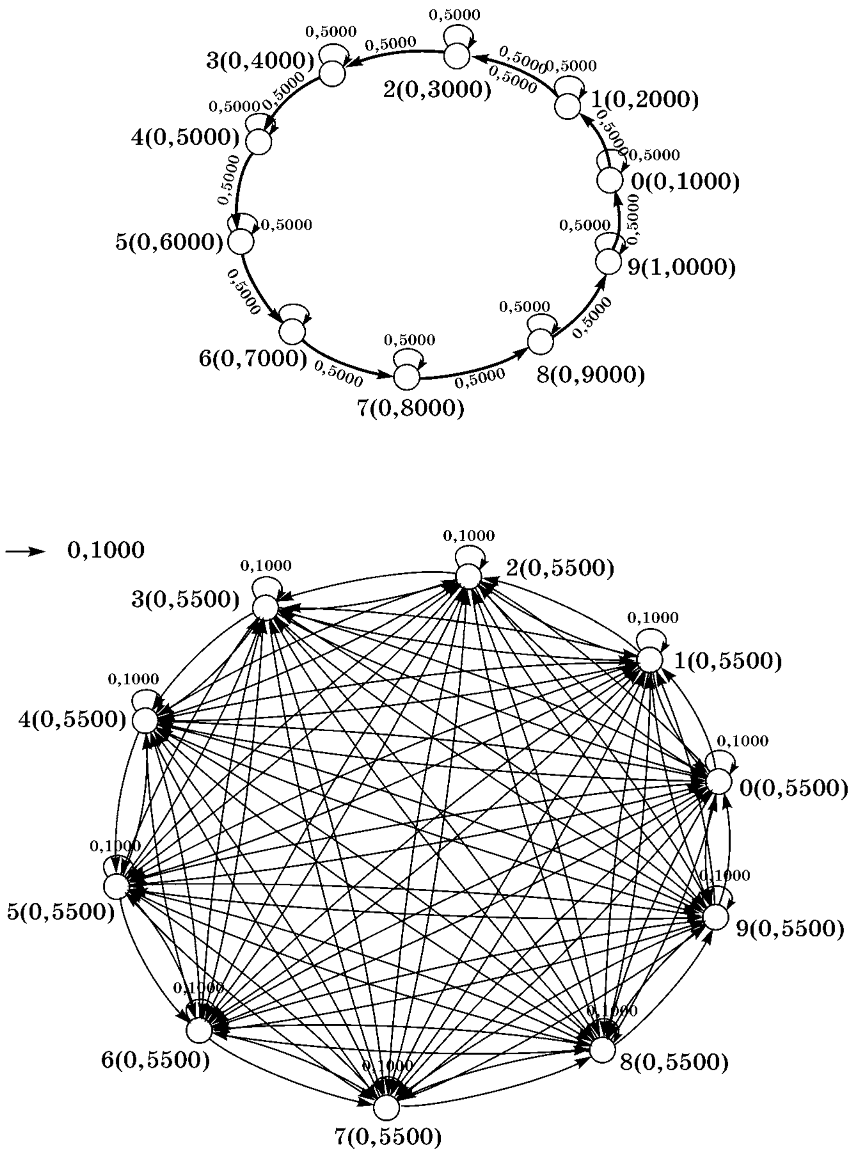

Рис. 30. Иллюстрация пункта А примера 2.8

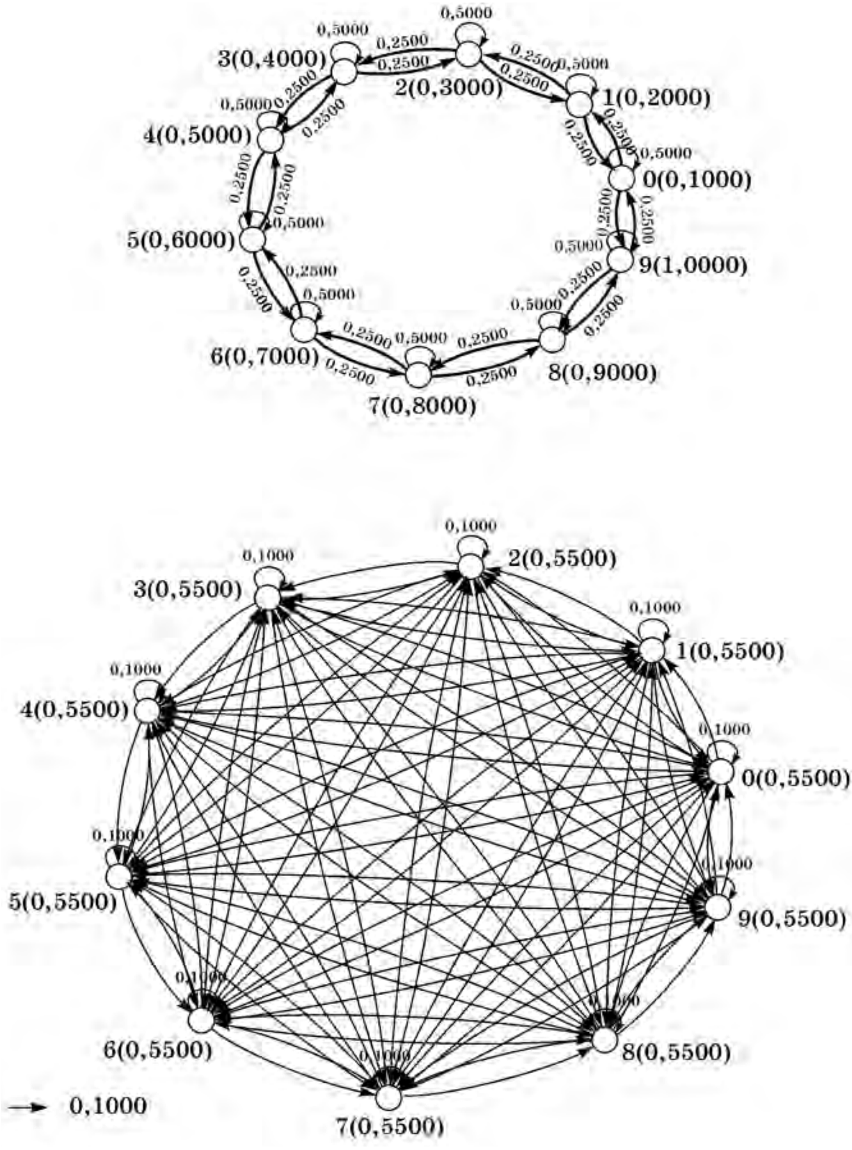

Рис. 31. Иллюстрация пункта Б примера 2.8

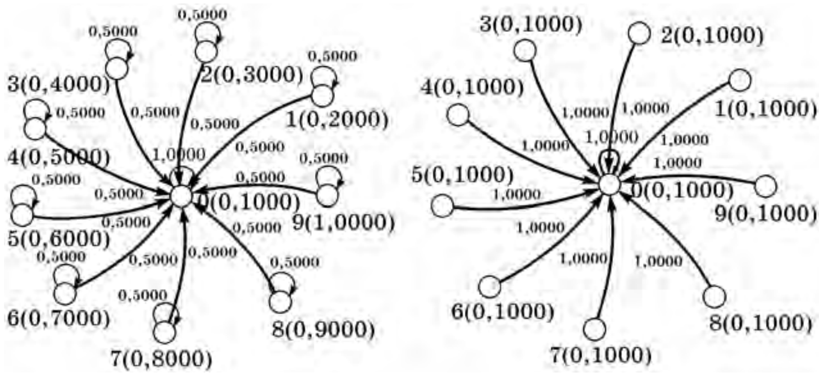

Рис. 32. Иллюстрация пункта А примера 2.9

Пример 2.8. Пусть социальная сеть является кольцом.

А. Каждый из агентов доверяет себе $\alpha_{i,i} = 0{,}5$ и следующему агенту в кольце $\alpha_{i,i+1} = 0{,}5$, тогда итоговые мнения будут одинаковыми

$$X = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^0 \quad \text{(рис. 30)}.$$

Б. Для каждого из агентов $\alpha_{i,i} = 0{,}5$, $\alpha_{i,i+1} = 0{,}25$ и $\alpha_{i,i-1} = 0{,}25$, тогда итоговые мнения будут одинаковыми

$$X = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^0 \quad \text{(рис. 31)}. \ \bullet$$

Пример 2.9. Пусть социальная сеть является звездой.

А. Все агенты доверяют центру $\alpha_{i,1} = 0{,}5$ и себе $\alpha_{i,i} = 0{,}5$, а центр звезды (агент с номером 1) доверяет только себе $\alpha_{1,1} = 1{,}0$. Тогда итоговые мнения агентов станут равными начальному мнению центра звезды: $X = x_1^0$ (рис. 32).

Б. Центральный агент доверяет себе $a_{1,1} = 0{,}5$ и периферийным агентам $\alpha_{1,i} = 0{,}5/(n-1)$, а те — себе $\alpha_{i,i} = 0{,}5$ и центру $\alpha_{i,1} = 0{,}5$. Тогда итоговые мнения будут одинаковыми

$$X = 0{,}5x_1^0 + \frac{0{,}5}{n-1}\sum_{i=2}^{n} x_i^0 \quad \text{(рис. 33)}. \ \bullet$$

Пример 2.10. Пусть социальная сеть представлена полным графом. Каждый из агентов доверяет себе $\alpha_{i,i} = 0{,}5$ и каждому из остальных $\alpha_{i,j} = 0{,}5/(n-1)$, тогда в сети установится итоговое мнение

$$X = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^0 \quad \text{(рис. 34)}. \ \bullet$$

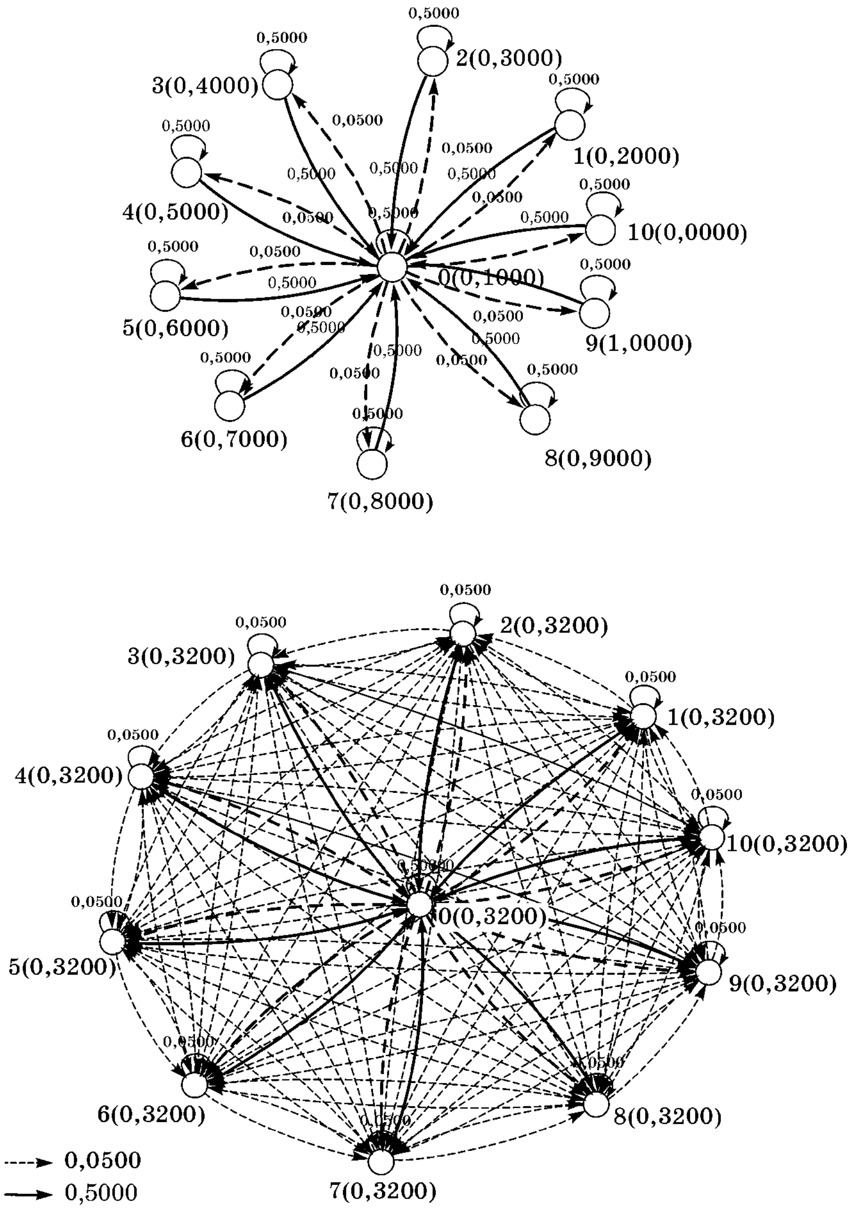

Рис. 33. Иллюстрация пункта Б примера 2.9

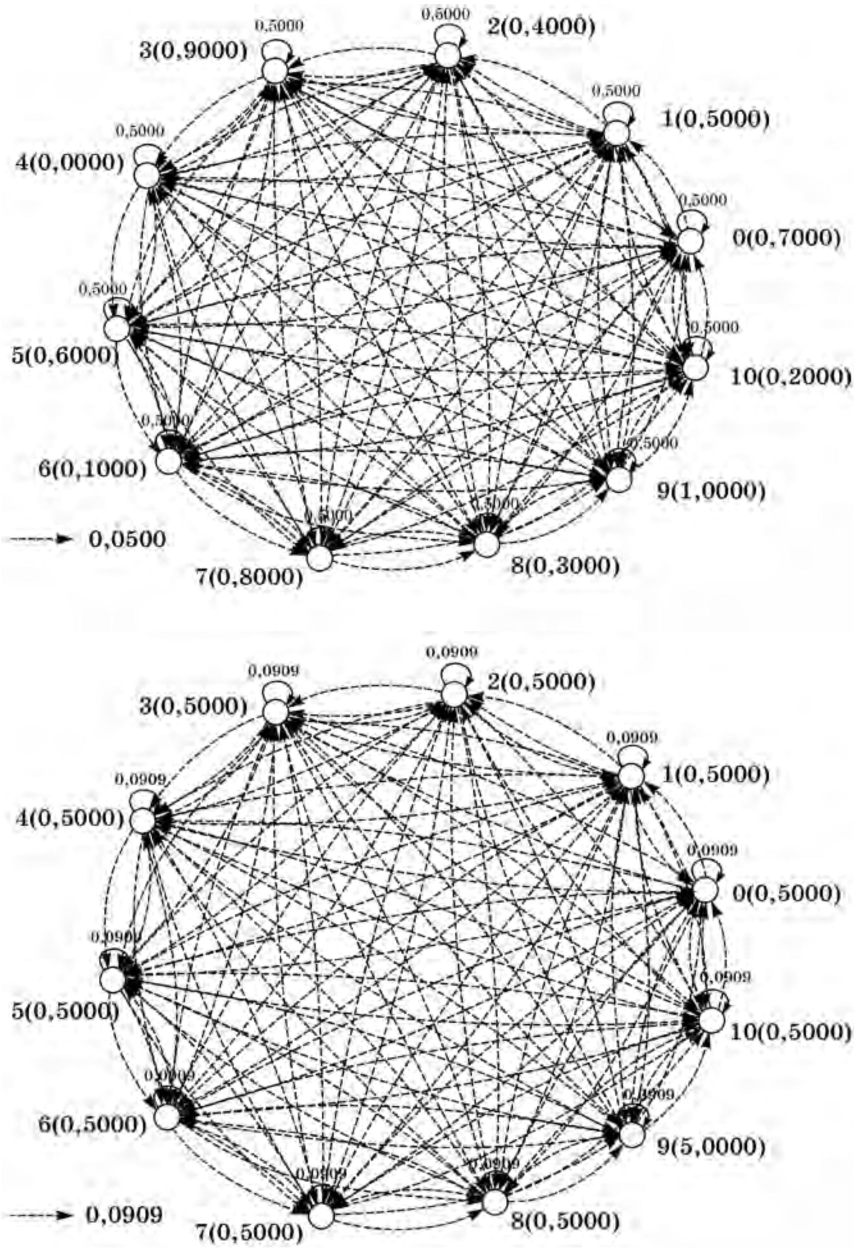

Рис. 34. Иллюстрация примера 2.10

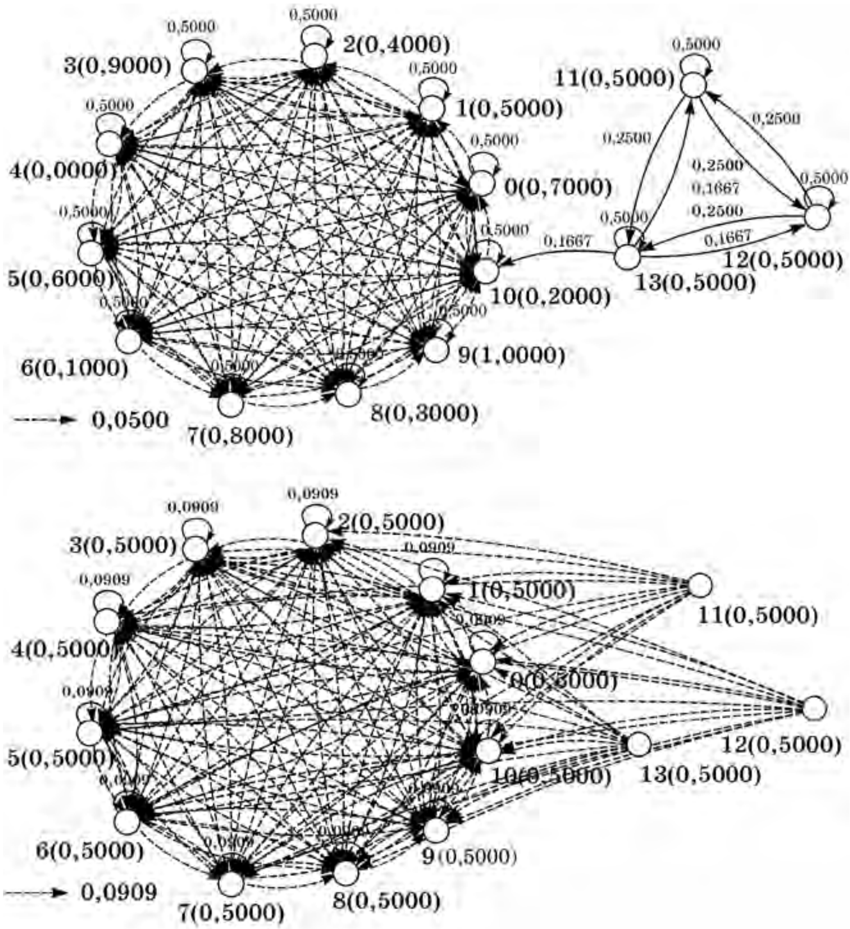

Рис. 35. Иллюстрация примера 2.11

Пример 2.11. Пусть социальная сеть представлена двумя полными графами (состоящими соответственно из n и m агентов): каждый агент доверяет себе $\alpha_{i,i} = 0{,}5$, в первом графе $\forall\, j \neq i$ $(\alpha_{ij} = 0{,}5/(n-1))$, второй граф соединён с первым исходящей дугой. Тогда итоговые мнения всех агентов в сети будут одинаковыми

$$X = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^0 \quad \text{(рис. 35).} \ \bullet$$

Пример 2.12. Пусть социальная сеть представлена регулярным деревом.

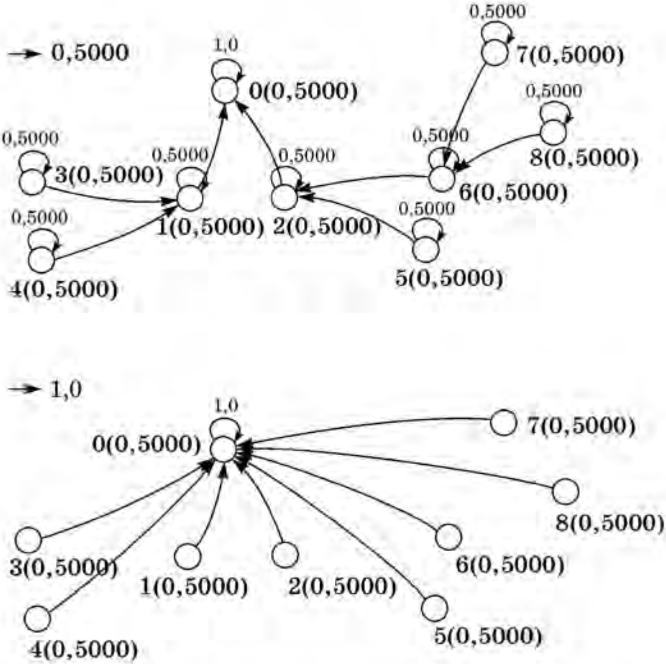

Рис. 36. Иллюстрация пункта А примера 2.12

А. Агент в корне дерева (первый агент) доверяет только себе, остальные доверяют себе $\alpha_{i,i} = 0{,}5$ и агенту-родителю. Тогда итоговые мнения всех агентов в сети будут одинаковыми: $X = x_1^0$ (рис. 36).

Б. Пусть у каждого узла в дереве m потомков, агент в дереве доверяет себе $\alpha_{i,i} = 0{,}5$ и доверяет одинаково агенту-родителю и потомкам. Пусть N_l — множество листьев, N_{int} — множество промежуточных узлов, а r — корень ($N = N_{\text{int}} \cup N_l \cup \{r\}$), тогда (рис. 37):

$$X = \frac{m x_r^0 + (m+1)\sum_{i \in N_{\text{int}}} x_i^0 + \sum_{i \in N_l} x_i^0}{m + (m+1)|N_{\text{int}}| + |N_l|}. \quad \bullet$$

Пример 2.13. Пусть имеются три агента, каждый из которых в некоторой степени доверяет себе и другим. Начальные мнения агентов различны. Тогда мнения агентов будут сходиться, и результирующее мнение будет единым для всех агентов.

Иллюстрацией данного вывода является эксперимент Шерифа. Приведём его описание согласно [82].

Вы сидите в тёмной комнате, и в 4,5 метрах от вас появляется светящаяся точка. Затем она передвигается в течение нескольких

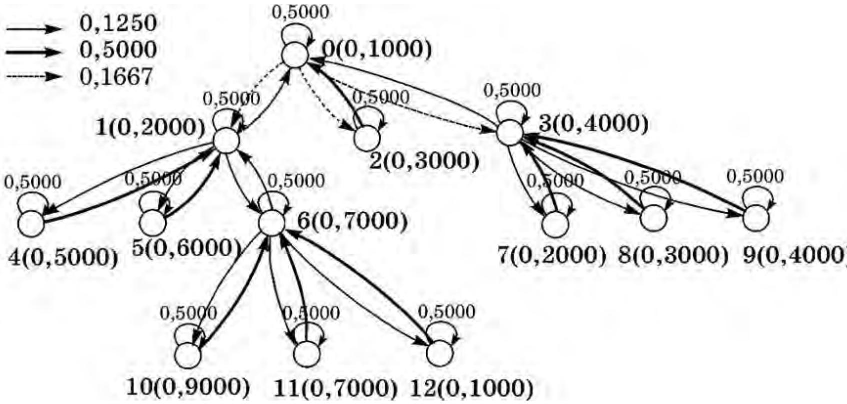

Рис. 37. Иллюстрация пункта Б примера 2.12

секунд, после чего исчезает. А вам нужно ответить на вопрос, на какое расстояние она сместилась. И вы начинаете гадать: «Может быть, сантиметров на 15». Все ваши последующие ответы колеблются вокруг цифры «20». На следующий день, вернувшись в лабораторию, вы оказываетесь в обществе ещё двух испытуемых, которые накануне, как и вы, наблюдали за светящейся точкой поодиночке. Когда заканчивается первая процедура, ваши товарищи предлагают свои ответы, исходя из уже имеющегося у них опыта. «2,5 сантиметра», — говорит первый. «5 сантиметров», — говорит второй. Несколько растерявшись, вы, тем не менее, говорите: «15 сантиметров». Если процедура будет повторяться в том же составе и в течение этого дня, и в течение двух последующих дней, изменится ли ваш ответ? Ответы участников эксперимента Шерифа... изменились весьма существенно... оценки сближались... обычно складывалась некая групповая норма. Она не соответствовала действительности. Почему? Потому что световая точка вообще не двигалась. •

Пример 2.14. Пусть имеются шесть агентов, пятеро из которых доверяют только себе, а шестой доверяет себе и в некоторой степени всем остальным. Начальные мнения пяти агентов — 0, шестого — 1. Тогда мнение шестого агента со временем будет стремиться к мнению других агентов — 0, которое меняться не будет.

Иллюстрацией данного вывода является эксперимент Аша. Приведём его описание согласно [82].

Вы сидите шестым в ряду, в котором всего 7 человек. Сначала экспериментатор объясняет вам, что все вы принимаете участие в исследовании процесса восприятия и связанных с ним суждений, а затем просит ответить на вопрос: какой из трёх отрезков прямой равен по длине стандартному отрезку? Вам с первого взгляда понятно, что стандартному отрезку равен отрезок № 2. Поэтому нет ничего удивительного в том, что все 5 человек, которые ответили до вас, сказали: «Отрезок № 2».

Следующее сравнение проходит столь же легко… Однако третий раунд очень удивляет вас. Хотя правильный ответ кажется таким же бесспорным, как и в первых двух случаях, первый отвечающий даёт неверный ответ. А когда и второй говорит то же самое… Четвёртый и пятый соглашаются с первыми тремя. И вот взгляд экспериментатора устремлён на вас. Вы испытываете то, что называется «эпистемологической дилеммой»: «Как мне узнать, кто прав? Мои товарищи или мои глаза?» В ходе экспериментов Аша в подобной ситуации оказывались десятки студентов. В целом 37 % ответов оказались «конформными» (или следует сказать, что в 37 % случаев испытуемые «*полагались* на других»?). •

Таким образом, выводы последних двух примеров вполне соответствуют наблюдениям социальных психологов.

Подведём промежуточные итоги. Следует признать, что рассмотренная выше марковская модель представляет собой, наверное, простейшую модель влияния в социальной сети с учётом репутации агентов. Возможные обобщения этой модели очевидны — можно отказываться от предположений о полноте графа, определять доверие/влияние в зависимости от репутации более сложным образом, учитывать мнения агентов с весами, зависящими от отклонения от некоторого «среднего» мнения, принимать во внимание взаимные оценки агентами друг друга и т. д. Несмотря на простоту базовой модели социальной сети, ниже мы будем пользоваться ею, так как она позволяет получить ряд аналитических решений для задач информационного управления и информационного противоборства.

К перспективам дальнейшего развития моделей информационного влияния в социальных сетях следует также отнести рассмотрение *мультисетей*. Основная идея заключается в следующем — каждый субъект является членом нескольких реальных и/или виртуальных (онлайновых) социальных сетей одновременно (например, в рамках виртуальной сети «Одноклассники» можно выделить подсети выпускников такой-то школы, такого-то вуза, имеющих определённое хобби и т. д.). В реальности каждый выполняет определённые социальные роли в различных социальных сетях (на работе, в семье, с друзьями и т. д.). Формальное описание мультисети — набор подграфов на одном множестве вершин. Как «пересекаются» эти сети «в голове» конкретного человека ка — вопрос, на который адекватного ответа на сегодня не существует. Для того чтобы связать различные сети с пересекающимися (или даже совпадающими) наборами участников, можно предположить, что участие в них требует от каждого агента времени, которое ограничено. Введя ту или иную модель принятия агентом решений о распределении времени, получим отражение эффекта взаимодействия сетей.

2.2. Информационное управление и мнения членов сети[17]

Статическая модель. Имея «основное уравнение», связывающее начальные и итоговые мнения агентов (см. выражение (2) раздела 2.1), можно ставить и решать задачу управления — воздействия на агентов социальной сети с целью формирования требуемых их мнений. Для сохранения аддитивности модели будем считать, что управляющему органу (центру) известна матрица влияния (доверия), а управляющее (информационное) воздействие заключается в изменении центром начальных мнений агентов x^0 путём «добавления» вектора управлений $u \in \mathbb{R}^n$. Содержательно, управление заключается в изменении мнения i-го агента с x_i на $x_i + u_i$, $i \in N$.

Предположим, что $u_i \in U_i$, $i \in N$ (подобное ограничение имеет прозрачные содержательные интерпретации). Обозначим $U = \prod_{i \in N} U_i$.

Тогда итоговые мнения будут определяться следующим уравнением:

$$X = A^\infty (x^0 + u), \tag{1}$$

или в покоординатном виде:

$$X_{ui} = \sum_{j \in N} A_{ij}^\infty (x_j^0 + u_j) = \sum_{j \in N} A_{ij}^\infty x_j^0 + \sum_{j \in N} A_{ij}^\infty u_j, \quad i \in N.$$

То есть результирующее мнение агента, сложившееся в результате информационного управления, является суммой его «невозмущённого» результирующего мнения $\sum_{j \in N} A_{ij}^\infty x_j^0$ и изменений $\sum_{j \in N} A_{ij}^\infty u_j$, вызванных управляющими воздействиями. В силу (1) «стабильное» состояние социальной сети линейно по управлению [43].

Пусть целевая функция центра $\Phi(X, u)$ — *критерий эффективности управления* — зависит от итоговых мнений агентов и вектора управлений. Тогда задача управления будет заключаться в выборе допустимого вектора управлений, максимизирующего критерий эффективности:

$$\Phi(A^\infty(x^0 + u), u) \to \max_{u \in U}.$$

[17] Раздел написан совместно с к. ф.-м. н. И. Н. Барабановым.

В соответствии с утверждениями 2.1–2.4 воздействовать на мнения спутников не имеет смысла, поэтому можно априори (имея только матрицу доверия) сказать, на каких агентов должно быть нацелено информационное воздействие.

В целевой функции центра можно, следуя традиции теории управления организационными системами [106], выделить две аддитивные компоненты: $\Phi(X, u) = H(X) - c(u)$, где $H(\cdot)$ — выигрыш («доход») центра, зависящий от итоговых мнений агентов[18], $c(\cdot)$ — затраты на осуществление управляющих воздействий (может быть, целесообразно в некоторых моделях считать, что $c = c(x^0, u)$).

Пример 2.15. Если условно считать, что мнения агентов отражают степень их «убеждённости» в том, в чём их хотел бы убедить центр (поддержать того или иного кандидата на выборах, приобрести определённый товар, принять определённое решение и т. д.), то примерами функции дохода центра $H(\cdot)$ могут служить:

— $\frac{1}{n}\sum_{i\in N} X_i$ — «среднее мнение» коллектива агентов;
— $\sum_{i\in N} \lambda_i X_i$ — «взвешенное» ($\lambda_i \geqslant 0$, $\sum_{i\in N} \lambda_i = 1$) мнение коллектива агентов;
— $n_\theta = |\{i \in N \mid X_i \geqslant \theta\}|$ — число агентов (в случае пороговых голосований может использоваться их доля), мнение которых превышает пороговое значение $\theta \in [0; 1]$;
— $\min_{i\in N} X_i$ — «наихудшее» из мнений агентов,

и т. д. — в зависимости от содержательной постановки задачи. •

Пример 2.16. Пусть

$$H(X) = \frac{1}{n}\sum_{i\in N} X_i,$$

а затраты центра однородны и линейны по управляющим воздействиям:

$$c(u) = \beta \sum_{i\in N} u_i$$

(содержательно, β — стоимость единичного изменения мнения любого агента), причём ресурсы центра ограничены величиной $R \geqslant 0$:

$$\beta \sum_{i\in N} u_i \leqslant R. \tag{2}$$

[18] В рамках теории рефлексивных игр [110] считается, что действия субъектов определяются их информированностью. Поэтому, считая эту зависимость известной, можно от предпочтений центра, зависящих от действий агентов (что представляется естественным), перейти к его предпочтениям, зависящим от информированности (т. е. мнений) агентов.

Задача управления примет вид следующей задачи линейного программирования (ЛП):

$$\frac{1}{n}\left(\sum_{i\in N}\sum_{j\in N} A_{ij}^{\infty} x_j^0 + \sum_{i\in N}\sum_{j\in N} A_{ij}^{\infty} u_j\right) - \beta \sum_{i\in N} u_i \to \max_{\{u_i \geqslant 0\},(2)}.$$

Обозначая

$$F_j = \frac{1}{n}\sum_{i\in N} A_{ij}^{\infty}, \quad j \in N,$$

запишем рассматриваемую задачу в виде

$$\sum_{j\in N} (F_j - \beta) u_j \to \max_{\{u_i \geqslant 0\},(2)}. \tag{3}$$

Решение задачи (3) очевидно — следует весь ресурс вкладывать в изменение мнения агента, для которого величина F_j максимальна. Содержательно это решение интерпретируется следующим образом. Величина F_j отражает среднюю степень итогового доверия всех агентов j-му агенту. Назовём эту характеристику *влиятельностью агента*. Весь ресурс следует расходовать на воздействие на того агента, которому больше всего доверяют другие агенты.

Полученное свойство решения задачи (3) обусловлено тем, что в ней, как в задаче ЛП, всего одно ограничение (2). Можно усложнить ситуацию, предположив, что $U_i = [0; R_i]$. При достаточно малых величинах $\{R_i\}$ (например, не превышающих пороги обнаружения внешних воздействий агентами или некоторой системой защиты) данную модель можно интерпретировать как отражающую так называемое *скрытое управление* (см. его содержательные примеры в [109, 122]). Тогда решение соответствующего аналога задачи (3) будет следующим — выделять агентам, упорядоченным по убыванию величин F_i, «ресурс» в максимальном количестве R_i до тех пор, пока не станет существенным ограничение (2). При этом последний из агентов, среди получивших ресурс, может получить его в объёме, меньшем максимально для него возможного. •

Перечислим ряд перспективных направлений дальнейших исследований задачи управления мнениями агентов, входящих в социальную сеть.

Во-первых, задачу, рассмотренную в примере 2.16, можно обобщать в различных направлениях, содержательно соответствующих тем или иным постановкам *задач медиапланирования* (в том числе — выбора оптимального набора информационных мероприятий) и распределения информационных ресурсов в рекламе, маркетинге, информационных войнах, обеспечении информационной безопасности и т. д. (см. [27, 39, 73, 79, 143]).

Во-вторых, целесообразно рассмотрение более сложных, в том числе — нелинейных, зависимостей, отражающих изменение мнений агентов под влиянием других агентов и центра (см. классификацию «сетей» во введении).

В-третьих, для агентов по матрице A^∞ можно вычислять их «индексы влияния» и другими способами, отличными от определённой выше «влиятельности» (см. [4, 185, 189, 267]), и по этим индексам в рамках тех или иных эвристик или точных решений судить, на кого из агентов надо, в первую очередь, воздействовать.

В-четвёртых, представляет интерес решение задачи управляемости — определения множества состояний, в которое может быть переведена система при заданных ограничениях на управление (см. ниже).

В-пятых, в силу «аддитивности» (1) по управлению, можно ставить и решать динамические задачи выработки оптимальной последовательности информационных воздействий (см. ниже).

В-шестых, прозрачные содержательные интерпретации имеет обратная задача — определения множества управляющих воздействий (или «минимальных» ограничений на них), обеспечивающих достижение системой заданного состояния (или их множества), т. е. формирование требуемых мнений агентов.

И, наконец, в рамках предложенной модели можно ставить и решать задачи *информационной безопасности* — определения оптимальных вариантов защиты от информационных воздействий на агентов, образующих социальную сеть.

Выше рассмотрена модель информационного управления, заключающегося в однократном формировании управляющим органом — *центром* — начальных мнений агентов. Представляет интерес анализ возможностей информационного управления, осуществляемого на протяжении, как минимум, нескольких периодов времени. Перейдём к рассмотрению соответствующей модели [6].

Динамическая модель: анализ. Пусть центр имеет возможность оказывать влияние на начальные мнения не всех агентов, а только на их подмножество $M \subseteq N$, которых будем условно называть «*агентами влияния*», число которых равно $m = |M|$.

Рассмотрим случай динамического информационного управления, когда центр имеет возможность оказывать влияние на мнения агентов не только в начальный, но и в другие моменты времени.

Без потери общности предположим, что агентами влияния являются агенты с номерами $1, 2, \ldots, m$. Обозначим через

$$u^k = (u_j^k)_{j \in M}, \quad k = 0, 1, \ldots,$$

вектор управлений в момент времени k, $B = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \cdots & 1 \\ & 0 & \end{pmatrix}$ — матрица $n \times m$.

Утверждение 2.5. *Пусть все элементы стохастической матрицы прямого влияния A строго положительны, а управления не ограничены. Тогда при наличии, как минимум, одного (произвольного) агента влияния может быть реализовано любое единогласное значение итоговых мнений членов социальной сети.*

Справедливость утверждения 2.5 следует из того, что в рамках предположения о строгой положительности элементов матрицы A все строки матрицы A^∞ одинаковы и не содержат нулевых элементов (столбцовые суммы матрицы A^∞ отражают *влиятельность* соответствующих агентов — см. выше) [199]. Из (1) следует, что, например, для любого значения $\frac{1}{n}\sum_{i\in N} X_i$ всегда можно найти соответствующее управление.

Считая, что в каждом периоде (в том числе, в нулевом) управление оказывается до обмена мнений между агентами, уравнение динамики мнений можно записать в матричном виде следующим образом (ср. с выражением (1)):

$$x^{k+1} = A[x^k + Bu^k], \quad k = 0, 1, \dots \tag{4}$$

Выражение (4) представляет собой разностное уравнение, которое описывает *линейную дискретную систему управления* [132]. Его решение при заданном начальном условии (аналог решения задачи Коши в непрерывном случае) можно записать в виде

$$x^k = A^k x^0 + \sum_{\tau=0}^{k-1} A^{k-\tau} B u^\tau, \quad k = 1, 2, \dots \tag{5}$$

Обозначим *матрицу управляемости* через

$$\Phi_0 = [B' \quad AB' \quad \dots \quad A^{n-1}B'], \quad \text{где} \quad B' = AB.$$

Предположим пока, что ограничения на управления отсутствуют (т. е. $U_j = \mathbb{R}^1$, $j \in M$). Тогда вопрос о достижимости произвольного состояния x^T линейной системы (4) за T $(T \geqslant n)$ шагов сводится к вопросу о невырожденности пары матриц A и AB, или, что то же самое — равен ли ранг матрицы Φ_0 числу n [132]. Искать ответ на этот вопрос, используя известные результаты, можно в каждом конкретном случае.

Если предпочтения центра зависят именно от итоговых мнений агентов, то следующее утверждение позволяет существенно упростить задачу, сведя её к статической.

Утверждение 2.6 (а). *Пусть центр оказал воздействия $u^0, \dots, u^l$, $l < +\infty$. Вектор итоговых (при $t = +\infty$) мнений агентов не изменится, если те же (по величине) воздействия были оказаны в любые другие конечные моменты времени.*

Утверждение 2.6 (б). *Пусть управления не ограничены. Тогда для любой конечной последовательности векторов управляющих воздействий $u^0, \ldots, u^l$, $l < +\infty$, существует такой вектор управлений v в начальный (нулевой) момент времени, который приводит к тем же итоговым мнениям агентов.*

Утверждение 2.6 (в). *Пусть управления не ограничены и*

$$\mathrm{span}(\Phi_0) \subseteq \mathrm{span}(A^{l+1}B).$$

Тогда для любой конечной последовательности векторов управляющих воздействий $u^0, \ldots, u^l$, $l < +\infty$, и реализовавшегося в результате этих воздействий в момент времени l состояния x^{l+1} социальной сети, существует такой вектор управлений $\widehat{v}$ в начальный (нулевой) момент времени, который приводит к тому же состоянию x^{l+1} социальной сети в момент времени $l+1$.

Доказательство утверждений 2.6 (а)–2.6 (б). В силу (1), (4) и равенства $A^\infty\ A = A^\infty$ имеем:

$$X = A^\infty[\ldots A(A(A(x^0 + Bu^0) + Bu^1) + Bu^2) + \ldots + Bu^l] =$$
$$= A^\infty(x^0 + Bu^0) + A^\infty \sum_{\tau=1}^{l} Bu^\tau. \quad (6)$$

Обозначая

$$v = \sum_{\tau=0}^{l} u^\tau, \quad (7)$$

получим $X = A^\infty(x^0 + Bv)$, что и требовалось доказать. □

Доказательство утверждения 2.6 (в). В соответствии с выражением (5) можно записать:

$$x^{l+1} = A^{l+1}[x^0 + Bu^0] + \sum_{\tau=1}^{l} A^{l-\tau+1}Bu^\tau.$$

С другой стороны, требуется найти такой вектор $\widehat{v}$, что

$$x^{l+1} = A^{l+1}[x^0 + B\widehat{v}].$$

Если выполнены условия утверждения 2.6(в), то по теореме Кронекера — Капелли можно найти вектор $\widehat{v}$, являющийся решением системы линейных алгебраических уравнений

$$A^{l+1}B\widehat{v} = A^{l+1}Bu^0 + \sum_{\tau=1}^{l} A^{1-\tau}Bu^\tau.$$ □

Следствие. *Пусть управления не ограничены, а предпочтения центра зависят только от итоговых мнений агентов и суммы (по агентам и периодам времени) управлений. Тогда для любой конечной последовательности векторов управляющих воздействий существует вектор* (7) *начальных управлений не меньшей эффективности.*

Итак, в рамках условий следствия **использование зависящего от времени управления не даёт ничего нового по сравнению со статическим случаем**. Следует подчеркнуть, что данный результат может оказаться чрезвычайно эффективным в моделях когнитивных карт (см. обсуждение задач управления «на когнитивных картах» в [95]). Поэтому существенным предположением, которое будем считать выполненным в ходе последующего изложения, является то, что предпочтения центра зависят от мнений агентов в конечном числе $T < +\infty$ первых периодов их взаимодействия.

Назовём *влиятельностью* агента j в момент t следующую сумму:

$$w_j^t = \sum_{i \in N} (A)_{ij}^t.$$

Назовём *суммарным мнением* агентов в момент t сумму $\sum_{i \in N} x_i^t$. Пусть центр оказал воздействия $u^0, \ldots, u^l$. Назовём *суммарным воздействием* сумму

$$\sum_{\xi=0}^{l} \sum_{j \in M} u_j^\xi.$$

Для удобства вычислений введём матрицу

$$C = \underbrace{\|1 \quad 1 \quad \ldots \quad 1\|}_{n}$$

и запишем в матричном виде: $w^t = CA^t$ — матрица-строка размерности n, состоящая из влиятельностей агентов, суммарное мнение агентов в момент времени t: $x_\Sigma^t = Cx^t$, суммарное воздействие

$$u_\Sigma = \sum_{\xi=0}^{l} CBu^\xi.$$

Утверждение 2.7. *Пусть управления неотрицательны* ($u_j^t \geqslant 0$, $j \in M$, $t = 0, 1, \ldots$). *Если центр стремится достичь максимального суммарного мнения агентов в момент T при заданном суммарном воздействии, то для этого достаточно оказать в момент времени t^* единственное воздействие на одного агента j^* с максимальной влиятельностью*:

$$(j^*, t^*) \in \operatorname*{Arg\,max}_{j \in M,\, t \in \{0, \ldots, T-1\}} w_j^{T-t}. \tag{8}$$

Доказательство. Вектор мнений агентов в момент T имеет следующий вид (см. выражение (5)):

$$x^T = A^T x^0 + \sum_{t=0}^{T-1} A^{T-t} B u^t, \quad T = 1, 2, \ldots$$

Как и ранее, обозначим суммарное воздействие через u_Σ:

$$u_\Sigma = \sum_{t=0}^{T-1} \sum_{j \in M} u_j^t = CB \sum_{t=0}^{T-1} u^t.$$

Далее, обозначим за (j^*, t^*) пару (агент, момент времени), на которой достигается максимум влиятельности агента:

$$(j^*, t^*) \in \operatorname*{Arg\,max}_{j \in M,\, t \in \{0,\ldots,T-1\}} w_j^{T-t}.$$

Для суммарного мнения агентов в момент T справедлива следующая цепочка соотношений:

$$\begin{aligned} x_\Sigma^T &= \sum_{i \in N} x_i^T = \sum_{i \in N} (A^T x^0)_i + \sum_{t=0}^{T-1} \sum_{i \in N} (A^{T-t} B u^t)_i = C A^T x^0 + \sum_{t=0}^{T-1} C A^{T-t} B u^t = \\ &= w^T x_0 + \sum_{t=0}^{T-1} w^{T-t} B u^t \leqslant w^T x_0 + \max_{j \in M,\, t \in \{0,1,\ldots,T-1\}} w_j^t \sum_{t=0}^{T-1} C B u^t = \\ &= w^T x_0 + w_{j^*}^{t^*} u_\Sigma. \end{aligned}$$

С другой стороны, если взять управления $u_{j^*}^{t^*} = u_\Sigma$, $u_j^t = 0$ $(j \neq j^*, t \neq t^*)$, то неравенство выше обратится в равенство. Утверждение 2.7 доказано. $\square$

Аналогичный утверждению 2.7 результат будет иметь место и в случае, когда целевая функция центра частично монотонна по мнениям агентов (в любой момент времени в течение планового горизонта), а на ограничения заданы не на суммарное, а на индивидуальные, управляющие воздействия. При этом оптимальные управления будут однократными и будут лежать на границе множества допустимых управлений.

Ситуация усложнится, если целевая функция центра не будет частично монотонна по действиям агентов. Тогда динамическая задача синтеза оптимального информационного управления сведётся к той или иной (в зависимости от структуры целевой функции центра) оптимизационной задаче, которая в каждом конкретном случае может быть решена численно. Существенным упрощающим фактором при этом является линейность управляемой системы (см. выражение (5)).

Влиятельность агентов может сильно меняться с течением времени, что показывает следующий пример.

Пример 2.17. Рассмотрим социальную сеть из трёх участников, задаваемую матрицей влияния

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1-\alpha & \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где $\alpha \in (0, 1)$ — константа. Эта же сеть задаётся ориентированным графом, изображённым на рис. 38.

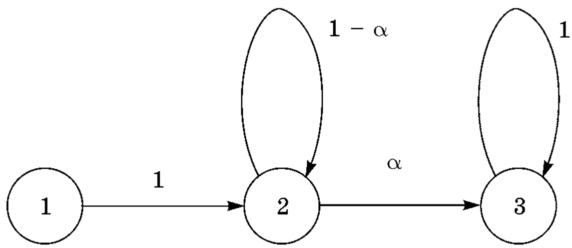

Рис. 38. Социальная сеть из примера 2.17

Содержательно структура сети следующая:

1) 1-й агент абсолютно доверяет 2-му;

2) 2-й агент доверяет 3-му со степенью α, а себе — со степенью $(1-\alpha)$;

3) 3-й агент абсолютно доверяет себе.

Нетрудно убедиться, что

$$A^t = \begin{pmatrix} 0 & (1-\alpha)^{t-1} & 1-(1-\alpha)^{t-1} \\ 0 & (1-\alpha)^t & 1-(1-\alpha)^t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^\infty = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вычислим влиятельность агентов:

$$\begin{aligned} w_1^t &= 0, \\ w_2^t &= (2-\alpha)(1-\alpha)^{t-1}, \\ w_3^t &= 3-(2-\alpha)(1-\alpha)^{t-1}. \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что влиятельность второго агента с течением времени монотонно убывает от $(2-\alpha)$ до 0, а влиятельность третьего агента монотонно возрастает от $(1+\alpha)$ до 3. Это означает, в частности, что при бесконечном горизонте планирования мнение третьего агента является доминирующим, а мнения первого и второго агентов не играют никакой роли. Поэтому, если центр стремится максимизировать суммарное мнение агентов, то информационное воздействие следует оказывать на третьего агента.

Однако при рассмотрении конечного горизонта $t < \infty$ ситуация может существенно измениться. Ясно, что для любого такого t существует интервал достаточно малых значений α, при которых второй агент остаётся более влиятельным, чем третий, на протяжении всего промежутка времени от 0 до t. •

Пример 2.18. Пусть центр стремится найти оптимальное управляющее воздействие в социальной сети с тремя агентами, рассмотренной в примере 2.17. Для его нахождения при заданном горизонте планирования t следует сравнить величины w_2^t и w_3^t.

Если $w_2^t > w_3^t$, то максимально возможное воздействие следует оказать на 2-го агента в момент $\tau = t - 1$, если же $w_2^t < w_3^t$, то на 3-го агента в момент $\tau = 0$ (в случае $w_2^t = w_3^t$ оба эти воздействия оптимальны). •

Перейдём к постановке динамической задачи синтеза оптимального информационного управления.

Динамическая модель информационного управления. Синтез. В общем случае задача синтеза формулируется следующим образом. Обозначим: $y = Y(x) \in \mathbb{R}^k$ — вектор *наблюдаемых состояний* социальной сети, $Y : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ — известная функция, $k \leqslant n$, T — плановый горизонт, $x^{1,T} = (x^1, x^2, \ldots, x^T)$ — траектория состояний социальной сети, $y^{1,T} = (y^1, y^2, \ldots, y^T)$ — траектория наблюдаемых состояний социальной сети, $u(y) : \mathbb{R}^k \to U$ — *закон управления*, $u^{1,T} = (u(y^1), u(y^2), \ldots,$ $\ldots, u(y^T))$ — последовательность управлений, $F(y^{1,T}, u^{1,T})$ — критерий эффективности управления.

Пусть известно начальное наблюдаемое состояние социальной сети. В общем виде динамическая *задача синтеза оптимального позиционного информационного управления* заключается в нахождении допустимого закона управления дискретной системой (4), обладающего максимальной эффективностью:

$$F\Big(y^{1,T}(x^{1,T}(u^{1,T})), u^{1,T}\Big) \to \max_{u(\cdot)}. \tag{9}$$

В общем виде динамическая *задача синтеза оптимального программного информационного управления* заключается в нахождении последовательности управлений дискретной системой (4), обладающей максимальной эффективностью:

$$F\Big(y^{1,T}(x^{1,T}(u^{1,T})), u^{1,T}\Big) \to \max_{u^{1,T}}. \tag{10}$$

Задача построения оптимального управления для систем с дискретным временем исследовалась многими авторами. Некоторые подходы к решению этой задачи можно найти, например, в [132].

Рассмотрим ряд практически важных частных случаев задач (9) и (10). Пусть фиксирован вектор y^*, являющийся «целью» информационного управления в пространстве наблюдаемых состояний социальной сети.

Задачи

$$\|y^T - y^*\| \to \min_{u(\cdot)} \tag{11}$$

и

$$\|y^T - y^*\| \to \min_{u^{1,T}} \tag{12}$$

назовём условно *задачами позиционного и программного управления конечным состоянием социальной сети*.

Рассмотрим задачу (12), причём для простоты будем считать, что $y = x$, т. е. наблюдаемыми являются состояния всех агентов системы. Если выполнены условия утверждения 2.6 (в), то минимум в выражении (12) будет равен нулю, а управление достаточно будет приложить только один раз (утверждения 2.6 (а) и 2.6 (б). Если условие span $(\Phi_0) \subseteq \mathrm{span}(A^T B)$ не будет выполнено, то, вообще говоря, не придёт в положение y^* (в нашем случае $x^* = y^*$), здесь можно говорить только о том, чтобы перевести систему в некоторое состояние, лежащее на множестве $A^T x^0 + \mathrm{span}(\Phi_0)$, максимально близкое к y^* в смысле евклидовой метрики. Задача отыскания соответствующего управления сведётся в этом случае к задаче безусловной минимизации неотрицательно определённой квадратичной формы. Решение при этом не будет единственным и, опять же в силу утверждений 2.6 (а) и 2.6 (б), одним из решений будет однократное управляющее воздействие на системы.

К известной задаче задача (12) также сводится при условии, что управление u_i принимает значения в некотором выпуклом множестве U, например $|u_i| \leqslant 1$. Тогда задача нахождения программного управления, которое переводит систему из некоторого заданного начального состояния x^0 в положение, максимально близкое к x^*, сведётся к задаче выпуклого программирования:

$$\left\| A^T x^0 + \sum_{t=1}^{T-1} A^{T-t} B u^t - x^* \right\| \to \min_{u_i^t \in U},$$

которая может быть решена известными методами (см., например, [32]).

В заключение настоящего раздела приведём пример постановки задачи позиционного управления — синтеза линейного регулятора, осуществляющего стабилизацию социальной сети.

Пусть $y = C_0 x$, где $C_0 \in \mathbb{R}^{k \times n}$ — некоторая матрица. Выберем линейный закон управления в виде $u = Ky$ (если $u = Kx$, $C_0 = E_n$ в случае, если наблюдению доступны состояния всех агентов). Уравнение замкнутой систем управления:

$$x^{k+1} = (A + ABKC_0)x^k. \tag{13}$$

В силу линейности рассматриваемой системы стабилизация произвольного положения x^* будет эквивалентна стабилизации нулевого положения равновесия замкнутой системы (13). Управление будет стабилизирующим, если спектр матрицы замкнутой системы $A + ABKC_0$ будет лежать внутри единичного круга на комплексной плоскости с центром в нуле. Заметим, что в случае $C_0 = E_n$ и невырожденности пары A, AB соответствующая матрица K всегда найдётся.

В общем случае для данной задачи можно применять методы синтеза линейных стабилизирующих регуляторов для линейных дискретных систем [132].

Основным результатом настоящего раздела является, наверное, сведение динамических задач управления определённым классом социальных сетей к каноническим для теории управления задачам исследования управляемости и синтеза линейных дискретных систем управления. Поэтому явной перспективой является дальнейшая трансляция результатов теории управления в такую область, как управление в социальных сетях. Кроме того, многообещающими выглядят:

1) отказ от очень сильного предположения (в том случае, когда оно вводится) о строгой положительности матрицы влияний, а, в более общем случае — исследование влияния графа коммуникаций на свойства социальной сети и её управляемость;
2) рассмотрение критериев эффективности управления более общего вида;
3) рассмотрение задач управления «нелинейными» социальными сетями, т. е., такими, в которых уравнения динамики мнений агентов, аналогичные выражению (2), нелинейны;
4) введение нескольких управляющих органов, каждый из которых управляет некоторым множеством агентов, причём на одного и того же агента могут оказывать воздействие различные управляющие органы. Тогда, предполагая аддитивность управляющих воздействий на одного и того же агента, получим обычную динамическую игру управляющих органов (модель так называемого информационного противоборства — см. [45] и ниже), для которой можно искать, например, совершенное по подиграм равновесие (subgame perfect equilibrium) и т. д. [245].

5) постановка и решение задачи управления структурой коммуникаций между агентами с взаимной трансляцией результатов на задачу о консенсусе [2, 284];
6) разработка имитационных моделей, позволяющих анализировать динамические процессы информационного управления.

2.3. Унифицированное информационное управление в однородных сетях. Роль СМИ

Предположим, что у каждого агента в начальный момент времени имеется *мнение* по некоторому вопросу. Мнение всех агентов сети отражает вектор-столбец $x^0 \in \mathbb{R}^n$ начальных мнений. Будем считать, что в результате обмена мнениями со своими «соседями» из множества $N_i = \{j \in N \,|\, a_{ij} > 0\}$ мнение i-го агента $x_i^k \in \mathbb{R}^1$ в момент времени k равно

$$x_i^k = \sum_{j \in N_i} a_{ij} x_j^{k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{1}$$

Понятно, что любой вектор одинаковых мнений является неподвижной точкой отображения (1). Предположим, что каждый агент хоть сколько-нибудь доверяет сам себе, т. е. $a_{ii} > 0 \ \forall\, i$. Тогда, как показано в разделе 2.1, в конечном итоге (при многократном обмене мнениями) вектор мнений агентов сходится к результирующему (итоговому) вектору мнений $X = \lim_{k \to \infty} x^k$ Если мнения агентов со временем стабилизируются, то можно записать соотношение

$$X = A^\infty x^0, \quad \text{где } A^\infty = \lim_{k \to \infty} (A)^k. \tag{2}$$

В настоящем разделе рассматривается модификация марковской модели в случае, когда агенты однородны, а структура связей между ними представляет собой связный регулярный граф [41]. В отличие от модели (2) ниже считается, что, помимо агентов, входящих в социальную сеть, существуют *средства массовой информации* (СМИ), сообщения которых также влияют на мнения членов социальной сети.

С этой точки зрения рассматриваемая в настоящем разделе модель близка к *модели подражательного поведения* (см. [29]), в которой каждый агент осуществляет выбор одного из двух действий (так называемый бинарный выбор). Отличие модели однородной социальной сети от модели подражательного поведения заключается в наличии динамики, а также в том, что множества возможных мнений агентов континуальны.

Однородная социальная сеть. «Доверчивые» агенты. Рассмотрим случай однородной сети, в которой начальные мнения всех агентов одинаковы и равны $x^0 \in \mathbb{R}^1$, а граф связей между ними связный и l-регулярный (т. е. $|N_i| = l$, $i \in N$).

Будем считать, что кроме агентов существуют СМИ, влияющие на мнения членов социальной сети.

Каждый агент с некоторой (одинаковой для всех агентов) степенью $\alpha \in (0; 1]$ доверяет сам себе; с некоторой (тоже одинаковой для всех агентов) степенью $\beta \in [0; 1]$ $(\alpha + \beta \leqslant 1)$ он доверяет средствам массовой информации (можно условно считать, что через СМИ осуществляется информационное управление [106] — агент получает от СМИ информацию якобы о мнениях тех агентов, с которыми не связан непосредственно), а «остаток доверия» $(1 - \alpha - \beta)$ агент делит поровну между теми агентами, с которыми непосредственно связан. СМИ сообщает всем агентам одинаковое мнение $u \in \mathbb{R}^1$. Получаем, что динамика мнений агентов описывается следующим выражением:

$$x_i^k = \alpha x_i^{k-1} + \beta u + \frac{1-\alpha-\beta}{l} \sum_{j \in N_i} x_j^{k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{3}$$

причём, в силу однородности сети и регулярности графа связей, от его степени l (т. е. от числа связей каждого агента с другими агентами), а также от размера n социальной сети и от степени α доверия агента самому себе, выражение (3) не зависит (см. (4)). Отметим, что (4) имеет и вероятностную трактовку: агент с вероятностью α останется при своём мнении, с вероятностью β примет мнение СМИ и т. д.

Опуская в силу однородности сети индекс, соответствующий номеру агента, из (3) получим:

$$x^k = \beta u + (1-\beta) x^{k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{4}$$

или

$$x^k = u\beta \sum_{\tau=1}^{k} (1-\beta)^{\tau-1} + x_0 (1-\beta)^k, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{5}$$

Преобразовывая (5), можно записать:

$$x^k = u(1-(1-\beta)^k) + x^0(1-\beta)^k, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{6}$$

Для любого момента времени мнения агентов не выходят за диапазон, ограниченный их начальным мнением x^0 и управлением u. Предел последовательности (6) мнений агентов при $k \to +\infty$ равен значению управления u.

Отметим, что «экспоненциальная» кривая (6) может интерпретироваться в терминах научения, запоминания и забывания информации и т. д. (см. обзор моделей научения в [93]).

Управление, при котором управляющее воздействие в любой момент времени планового горизонта одинаково для всех агентов влияния, называется *унифицированным информационным управлением*. В рассматриваемой модели управление является постоянным (не зависящим от времени) и унифицированным (см. выражение (3)). Задача управления заключается в нахождении управления $u(x^*, x^0, T)$, которое при известных начальных мнениях агентов в заданный момент времени T приводит агентов к требуемому мнению x^*. Если ограничения на управление отсутствуют, то эта задача решается тривиально посредством алгебраических преобразований выражения (6):

$$u(x^*, x^0, T) = \frac{x^* - x^0(1-\beta)^T}{1-(1-\beta)^T}. \tag{7}$$

При $T \to +\infty$ управление (7) стремится к итоговому мнению x^*.

Пример 2.19. Пусть $\beta = 1/2$, $x_0 = 0$, $u = 1$. График динамики (6) мнений агентов приведён на рис. 39.

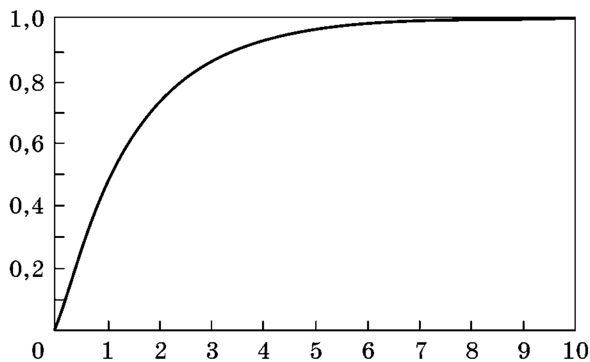

Рис. 39. Динамика мнений агентов в примере 2.19

Для того чтобы добиться в десятом периоде ($T = 10$) мнения $x^* = 1$, управление, в соответствии с выражением (7), должно равняться

$$u(1, 0, 10) = \frac{1024}{1023}. \bullet$$

Отметим, что, сделав предположения об однородности агентов и регулярности графа связей между ними, мы, фактически, **свели всю однородную регулярную социальную сеть к единственному агенту, подвергающемуся влиянию СМИ** (см. выражение (6)). Для того чтобы такие параметры, как степень доверия агента своему собственному мнению, размер сети и степень регулярного графа влияли на динамику мнений агентов, необходимо использовать отличные от выражения (3) законы изменения мнений агентов под влиянием друг друга и СМИ.

Рассмотрим следующий (один из множества возможных — в каждом конкретном случае необходимо, в первую очередь, руководствоваться содержательной спецификой рассматриваемой задачи) вариант такого закона. Предположим, что динамика мнений агентов описывается следующим выражением (ср. с выражением (3)):

$$x_i^k = \alpha x_i^{k-1} + \beta \frac{n-l}{n} u + \frac{1-\alpha-\beta\dfrac{n-l}{n}}{l} \sum_{j \in N_i} x_j^{k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{8}$$

Содержательно выражение (8) означает, что СМИ якобы отражает мнение той части социальной сети, которая не взаимодействует с данным агентом (доля таких агентов составляет $(n-l)/n$; данное отношение можно условно интерпретировать как «*вес общественного мнения*»).

Опуская в силу однородности сети индекс, соответствующий номеру агента, из (8) получим

$$x^k = \beta \frac{n-l}{n} u + \left(1 - \beta \frac{n-l}{n}\right) x^{k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{9}$$

или

$$x^k = u\beta \frac{n-l}{n} \sum_{\tau=1}^{k} (1-\beta)^{\tau-1} + x^0 \left(1 - \beta \frac{n-l}{n}\right)^k, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{10}$$

Преобразовывая (10), получим (ср. с выражением (6):

$$x^k = u \frac{n-l}{n} \left(1 - \left(1 - \beta \frac{n-l}{n}\right)^k\right) + x^0 \left(1 - \beta \frac{n-l}{n}\right)^k, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{11}$$

Отметим, что на динамику (11) мнений агентов в рамках рассматриваемой модели влияет не абсолютное число связей у каждого агента с другими (степень l графа), а относительный показатель $(n-l)/n$. Кроме того, величина $u(n-l)/n$ является значением предела выражения (11) при $k \to +\infty$.

«Предельными» случаями выражения (11) являются следующие:

— при $l = n$, т. е. когда граф связей — полный, тогда $x^k = x^0$, т. е. влияние СМИ отсутствует, так как каждый агент получает всю информацию только от членов социальной сети;

— при $l = 0$, т. е. когда связи между агентами отсутствуют, тогда влияние СМИ максимально и динамика мнений агентов будет описываться выражением (6).

Аналогом выражения (7) в рассматриваемом случае будет

$$u(x^*, x^0, T) = \frac{n}{(n-l)} \frac{x^* - x^0\left(1-\beta\dfrac{n-l}{n}\right)^T}{1-\left(1-\beta\dfrac{n-l}{n}\right)^T}. \tag{12}$$

П р и м е р 2.20. Рассмотрим в условиях предыдущего примера два графа связей между агентами. В первом графе $l/n = 0{,}1$, т. е. каждый агент связан только с каждым десятым членом социальной сети, во втором графе $l/n = 0{,}01$, т. е. каждый агент связан только с каждым сотым членом социальной сети. Графики динамики (11) мнений агентов приведены на рис. 40 (случай, соответствующий первому графу, выделен жирной линией). Для наглядности на рис. 40 пунктирной линией приведена кривая динамики мнений в примере 2.19.

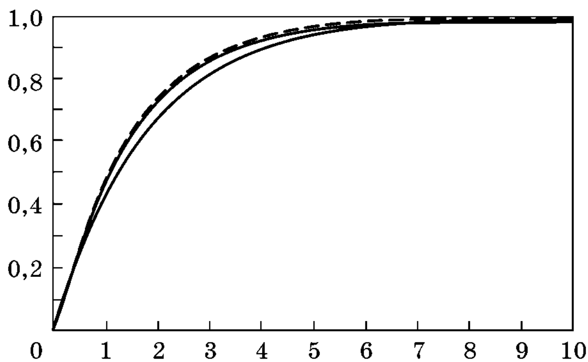

Рис. 40. Динамика мнений агентов в примерах 2.19–2.20

Из выражения (11) следует (см. в качестве иллюстрации рис. 40), что при фиксированном размере социальной сети рост числа связей агента с другими агентами приводит к уменьшению влияния СМИ (как в терминах скорости изменений мнений агентов, так и в терминах «равновесного» мнения). И, наоборот, при фиксированной степени графа с ростом размера социальной сети влияние СМИ возрастает.

Если $l/n = 0{,}1$, то для того чтобы добиться в десятом периоде мнения $x^* = 1$, управление, в соответствии с выражением (12), должно равняться $u(1, 0, 10) \approx 1{,}114$. Если $l/n = 0{,}01$, то $u(1, 0, 10) \approx 1{,}011$, т. е. чем выше вес общественного мнения, тем меньше должно отличаться от мнения агента сообщение СМИ, обеспечивающее формирование требуемых мнений. •

В рассмотренной модели степень доверия агента сообщениям СМИ была постоянной и не зависела от того, насколько сообщения СМИ совпадают с мнением агента или ему противоречат. Условно такой случай соответствует *«доверчивым» агентам*. Рассмотрим другой вариант — *«осторожных» агентов*, доверие которых к сообщениям СМИ, условно говоря, зависит от содержания этих сообщений.

«Осторожные» агенты. Для того чтобы отразить зависимость степени доверия агента сообщениям СМИ от их содержания (см. также многочисленные примеры и экспериментальные данные в литературе по социальной психологии — например, в [82]), введём описывающую эту зависимость *функцию доверия* $G(x,u)$, где x — мнение агента, u — управление (сообщение СМИ). Относительно свойств функции доверия можно предполагать следующее (далее мы будем пользоваться теми или иными комбинациями вводимых предположений).

Предположение А.1. Функция $G(x,u)$ принимает неотрицательные значения и достигает своего максимального значения, равного β, при $u = x$: $G(x,x) = \beta$.

Предположение А.2. Функция $G(x,u)$ принимает неотрицательные значения и достигает своего минимального значения, равного β, при $u = x$: $G(x,x) = \beta$.

Предположение А.3. Функция $G(x,u)$ зависит только от разности $(x-u)$.

Предположение А.4. Функция $G(x,u)$ монотонно убывает с ростом $|x-u|$.

Предположение А.5. Функция $G(x,u)$ монотонно возрастает с ростом $|x-u|$.

Предположение А.6. Пусть выполнены предположения А.1, А.3 и $\forall\, x \in \mathbb{R}^1$

$$\lim_{u\to-\infty} G(x,u) = \beta_-, \quad \lim_{u\to+\infty} G(x,u) = \beta+, \quad \beta_- \leqslant \beta, \quad \beta_+ \leqslant \beta,$$

а на полуинтервалах $(-\infty; x]$ и $[x; +\infty)$ значений u функция $G(x,u)$ имеет единственные точки минимума.

Предположение А.7. Пусть выполнены предположения А.2, А.3 и $\forall\, x \in \mathbb{R}^1$

$$\lim_{u\to-\infty} G(x,u) = \beta_-, \quad \lim_{u\to+\infty} G(x,u) = \beta+, \quad \beta \leqslant \beta_-, \quad \beta \leqslant \beta_+,$$

а на полуинтервалах $(-\infty; x]$ и $[x; +\infty)$ значений u функция $G(x,u)$ имеет единственные точки максимума.

Содержательно предположение А.1 (А.2) означает, что агент максимально (минимально) доверяет СМИ, сообщающим информацию, совпадающую с его мнением. Предположение А.3 означает, что доверие к сообщению СМИ зависит только от того, насколько оно отличается от мнения агента и не зависит от их значений. Предположение А.4 (А.5) означает, что доверие к сообщению СМИ тем выше (ниже), чем оно ближе к мнению агента. Примерами являются соответственно:

$$G(x,u) = \beta \exp(-\gamma|x-u|), \quad \gamma > 0, \tag{13}$$

и

$$G(x,u) = 1-(1-\beta)\exp(-\gamma|x-u|), \quad \gamma > 0. \tag{14}$$

Предположение А.6 означает, что:

— агент максимально доверяет СМИ, сообщающим информацию, совпадающую с его мнением (А.1);

— при сообщениях СМИ, всё более отличающихся от его мнения, агент им всё менее доверяет;

— но при «экстремальных» мнениях СМИ агент начинает всё больше доверять СМИ («чем чудовищнее ложь, тем быстрее в неё поверят»).

Примером при $\beta_- = \beta_+ = \beta$ является функция

$$G(x,u) = \beta\left[1-(1-\exp(-\gamma|x-u|))\exp(-\gamma|x-u|)\right]. \tag{15}$$

Предположение А.7 означает, что:

— агент минимально доверяет СМИ, сообщающим информацию, совпадающую с его мнением (А.2);

— при сообщениях СМИ, всё более отличающихся от его мнения, агент им всё больше доверяет;

— но при «экстремальных» мнениях СМИ агент начинает всё меньше доверять СМИ (люди восприимчивы к выводам, не превышающим их порога приемлемого).

Примером при $\beta_- = \beta_+ = \beta$ является функция

$$G(x,u) = (1-\beta)\exp(-\gamma|x-u|)\exp(-\gamma|x-u|) + \beta. \tag{16}$$

Эскизы графиков функций доверия (13), (14), (15) и (16) приведены на рис. 42, представленном ниже.

Итак, можно условно выделить пять случаев — в качестве функций доверия можно использовать функцию, тождественно равную β — случай 1, (13) — случай 2, (14) — случай 3, (15) — случай 4 или (16) — случай 5. Содержательные интерпретации в рамках вероятностной трактовки (когда значение функции доверия интерпретируется, например, как вероятность выделить/заметить данное сообщение из общего потока сообщений) следующие.

Случай 1 (функция доверия — константа) — агент независимо от содержания реагирует на сообщение СМИ.

Случай 2 (функция доверия описывается выражением типа (13)) соответствует агенту-консерватору, у которого вероятность выделить сообщение будет уменьшаться с возрастанием отклонения его мнения от мнения СМИ.

Случай 3 (функция доверия описывается выражением типа (14)) соответствует агенту-новатору, у которого вероятность выделить сообщение будет возрастать с ростом отклонения его мнения от мнения СМИ.

Случай 4 (функция доверия описывается выражением типа (15)) соответствует агенту-умеренному консерватору, который выделяет и воспринимает информацию СМИ, совпадающую с его мнением, до тех пор, пока различие во мнениях не станет достаточно велико. Но при очень больших отклонениях вероятность того, что агент заметит такую информацию, растёт.

Случай 5 (функция доверия описывается выражением типа (16)) соответствует агенту-умеренному новатору, у которого, пока отличие его мнения от мнения СМИ не слишком велико, вероятность выделить сообщение СМИ только возрастает, но при достаточно больших отклонениях, эта вероятность начинает уменьшаться.

Завершив содержательные интерпретации введённых случаев функций доверия, предположим, что управление не обязательно постоянно во времени. Обозначим: $u^{0,T-1} = (u^0, u^1, \ldots, u^{T-1}) \in \mathbb{R}^T$ — последовательность управлений, $x^{0,T} = (x^0, x^1, \ldots, x^T) \in \mathbb{R}^{T+1}$ — траекторию состояний социальной сети, $T \geqslant 0$, $F(x^{0,T}, u^{0,T-1})$ — критерий эффективности управления, где $F(\cdot,\cdot)\colon \mathbb{R}^{(T+1)T} \to \mathbb{R}^1$ — заданная функция. Ограничения на управления пока рассматривать не будем, считая, что, если таковые существуют, то они учтены в критерии эффективности.

По аналогии с выражением (4), управляемая динамика состояний социальной сети будет описываться выражением

$$x^k = G(x^{k-1}, u^{k-1})u^{k-1} + (1 - G(x^{k-1}, u^{k-1}))x^{k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{17}$$

Сделав маленькое отступление, отметим, что перспективным направлением будущих исследований представляется анализ следующей динамики мнений агентов в неоднородной и нерегулярной (в общем случае) социальной сети:

$$x_i^k = a_{ii}x_i^{k-1} + \beta G_i(x_i^{k-1}, u^{k-1})u^{k-1} + \\ + \sum_{j \in N_i} a_{ij} G_i(x_i^{k-1}, x_j^{k-1}) x_j^{k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{17$'$}$$

где индивидуальные функции доверия $\{G_i(\cdot)\}_{i \in N}$ таковы, что выполняется условие нормировки. В рамках такой модели можно условно содержательно считать, что матрица A отражает доверие агентов *источникам информации*, а функции доверия отражают доверие агентов *содержанию информации*.

В общем виде *задача синтеза оптимального информационного управления* в однородной социальной сети может быть сформулирована как задача поиска такой последовательности управлений динамической системой (17), которая максимизирует критерий эффективности:

$$F(x^{0,T}, u^{0,T-1}) \to \max_{u^{0,T-1} \in \mathbb{R}^T} \tag{18}$$

Задача (18) является задачей оптимального управления и может быть решена известными методами (см. пример 2.21 ниже), например, при аддитивном по периодам времени критерии эффективности — применением принципа оптимальности Беллмана.

Если управление постоянно, то выражение (17) примет вид

$$x^k = G(x^{k-1}, u)u + (1 - G(x^{k-1}, u))x^{k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{19}$$

а задача (18) может быть записана как

$$F_0(x^{0,T}, u) \to \max_{u \in \mathbb{R}^1}, \tag{20}$$

т. е. является задачей безусловной скалярной оптимизации, где

$$F_0(\cdot, \cdot) : \mathbb{R}^{T+1} \to \mathbb{R}^1$$

— заданный критерий эффективности в задаче с постоянным управлением.

Частным случаем задачи (18) является следующая постановка: пусть фиксирован вектор x^*, являющийся «целью» информационного управления, и заданы затраты

$$C(u^{0,T-1}) : \mathbb{R}^T \to \mathbb{R}^1$$

на управление, а также ограничение $R \geqslant 0$ на эти затраты. Тогда задача (18) может быть записана в виде

$$\|x^T - x^*\| \to \min_{u^{1,T}}, \quad C(u^{0,T-1}) \leqslant R. \tag{21}$$

Приведём пример решения задач синтеза оптимального информационного управления, иллюстрирующий зависимость оптимального решения от свойств функции доверия.

Пример 2.21. Рассмотрим задачу (21). Пусть $\beta = 0{,}5$, $\gamma = 0{,}1$, $x_0 = 0$, $x^* = 1$, $T = 10$, $C(u^{0,T-1}) = \sum_{\tau=0}^{T-1} u^\tau$, $R = 5$, и в целевой функции задачи (21) используется квадратичная норма. Соответствующие выделенным выше пяти случаям функции доверия изображены на рис. 41 (по горизонтали отложен $|x - u|$).

Из рис. 41 видно, что при малых значениях параметра γ функции доверия в рассматриваемом примере ведут себя почти линейно, а (13) и (15) ((14) и (16)) вообще слабо различимы. С ростом γ они

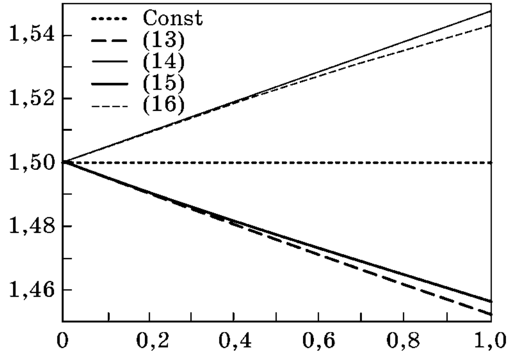

Рис. 41. Значения функций доверия в примере 2.21 ($\gamma = 0{,}1$)

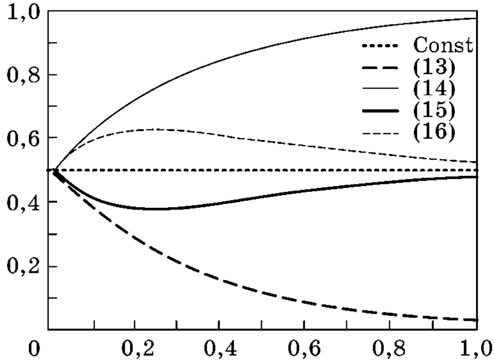

Рис. 42. Значения функций доверия в примере 2.21 ($\gamma = 3$)

начинают всё больше различаться — на рис. 42 приведены графики функций доверия при $\gamma = 3$.

Постоянное управление во всех случаях равно 0,5.

На рис. 43 и 44 приведены графики динамики мнений для функций доверия (13), (14), (15) или (16) при оптимальном постоянном управлении и значениях параметра γ равном 0,1 и 3 соответственно. Ограничение на управление не позволяет добиться того, чтобы мнения агентов стали достаточно близкими к целевому значению $x^* = 1$.

На рис. 45 и 46 приведены графики динамики доверия для функций доверия (13), (14), (15) или (16) при оптимальном постоянном управлении и значениях параметра γ равных 0,1 и 3 соответственно.

Рассмотрим теперь более сложный случай — переменное управление, т. е. решим для рассматриваемого примера частный случай

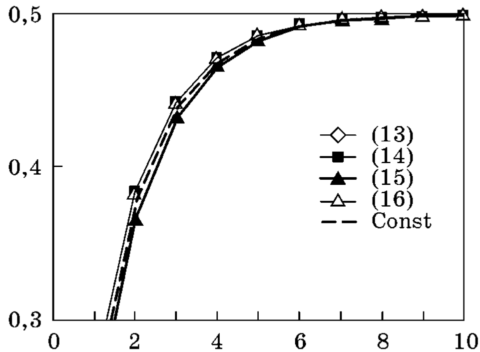

Рис. 43. Динамика мнений при оптимальном постоянном управлении в примере 2.21 ($\gamma = 0{,}1$)

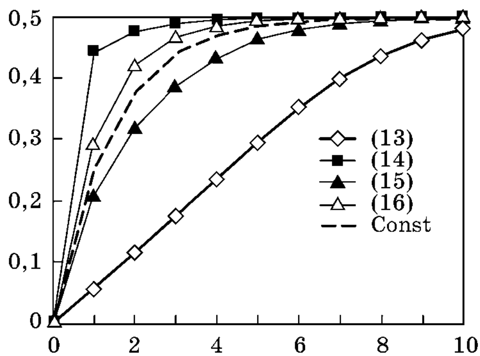

Рис. 44. Динамика мнений при оптимальном постоянном управлении в примере 2.21 ($\gamma = 3$)

задачи (18), а именно — задачу (17), (21), которая в данном случае является линейной дискретной задачей с квадратичным интегральным критерием на фиксированном промежутке времени.

На рис. 47 и 48 приведены графики динамики мнений для функций доверия (13), (14), (15) или (16) при оптимальном переменном управлении и значениях параметра γ равных 0,1 и 3 соответственно.

На рис. 49 и 50 приведены графики динамики доверия для функций доверия (13), (14), (15) или (16) при оптимальном переменном управлении и значениях параметра γ равных 0,1 и 3 соответственно.

Графики оптимальных зависимостей управления от времени при значениях параметра γ равных 0,1 и 3 приведены соответственно на рис. 51 и 52.

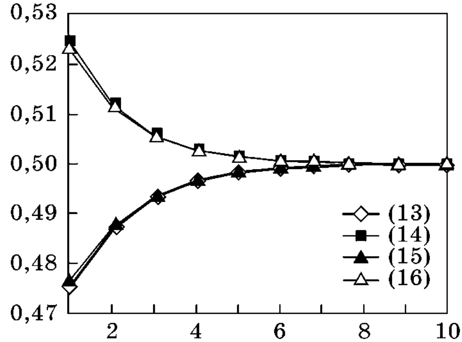

Рис. 45. Динамика доверия при оптимальном постоянном управлении в примере 2.21 ($\gamma = 0{,}1$)

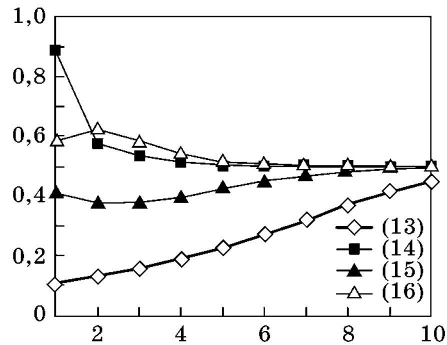

Рис. 46. Динамика доверия при оптимальном постоянном управлении в примере 2.21 ($\gamma = 3$)

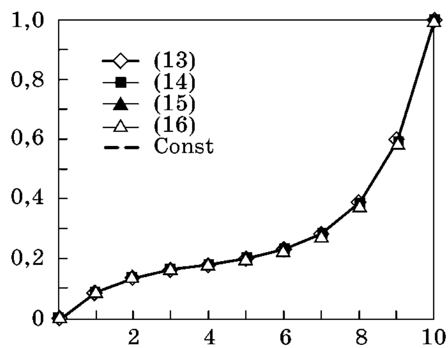

Рис. 47. Динамика мнений при оптимальном переменном управлении в примере 2.21 ($\gamma = 0{,}1$)

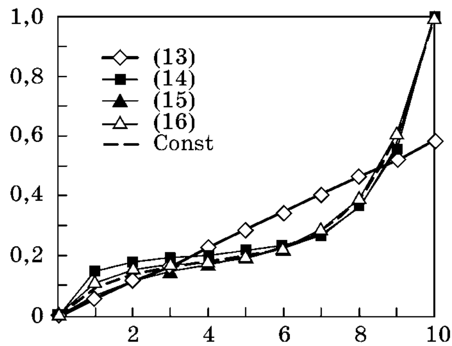

Рис. 48. Динамика мнений при оптимальном переменном управлении в примере 2.21 ($\gamma = 3$)

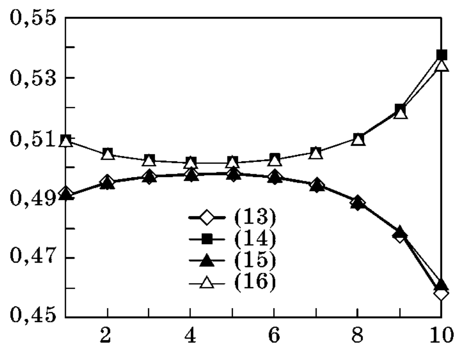

Рис. 49. Динамика доверия при оптимальном переменном управлении в примере 2.21 ($\gamma = 0{,}1$)

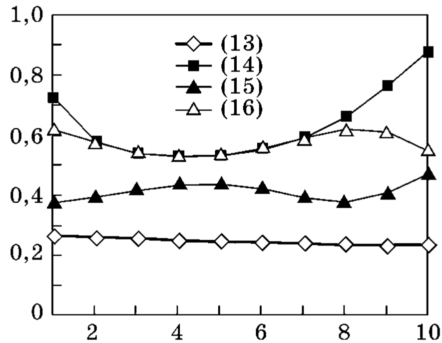

Рис. 50. Динамика доверия при оптимальном переменном управлении в примере 2.21 ($\gamma = 3$)

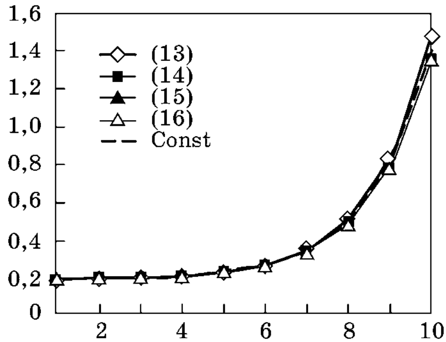

Рис. 51. Оптимальное переменное управление в примере 2.21 ($\gamma = 0{,}1$)

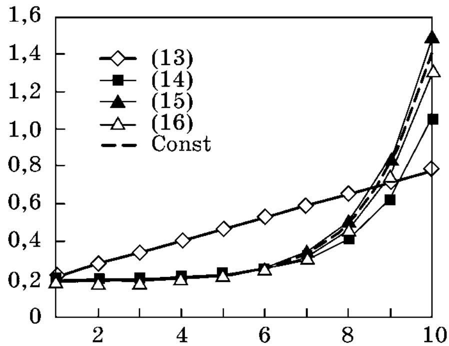

Рис. 52. Оптимальное переменное управление в примере 2.21 ($\gamma = 3$)

Значения критерия эффективности (напомним, что решается задача минимизации) для рассмотренных случаев приведены в табл. 3. •

Основной результат настоящего раздела на качественном уровне заключается, во-первых, в сведении задачи унифицированного информационного управления в однородных социальных сетях, описываемых регулярным графом взаимодействия их членов, к задаче анализа изменений мнений одного агента под воздействием сообщений СМИ. Во-вторых, представляется интересным рассмотрение зависимости доверия агента к сообщаемой СМИ информации не только от того, кто сообщает ему эту информацию (что традиционно учитывается в марковских моделях социальных сетей), т. е. того, какова репутация источника информации (см. модели репутации в разделе 2.4), но и от содержания этой информации (т. е. от того, насколько она противоречит представлениям самого агента).

Таблица 3. **Значения критерия эффективности**

Случай	Эффективность постоянного управления		Эффективность переменного управления	
	$\gamma = 0{,}1$	$\gamma = 3$	$\gamma = 0{,}1$	$\gamma = 3$
1. $G(\cdot) = \beta$	0,2505	0,2505	0	0
2. $G(\cdot)$ описывается выражением (13)	0,2505	0,2711	0	0,1736
3. $G(\cdot)$ описывается выражением (14)	0,2504	0,25	0	0
4. $G(\cdot)$ описывается выражением (15)	0,2505	0,2515	0	0
5. $G(\cdot)$ описывается выражением (16)	0,2504	0,2502	0	0

Существенным представляется то, что введённые (достаточно сильные) предположения о регулярности графа связей и одинаковости агентов позволили получить простые аналитические выражения для динамики мнений агентов и свести задачу информационного управления к простым и известным оптимизационным задачам.

Очень перспективным выглядит описание и изучение нелинейных моделей социальных сетей с учётом доверия (когда степень учёта агентом мнения своего «соседа» зависит не только от того, кто сообщает информацию, но и какую информацию он сообщает — см. выражение (17′)). При этом, правда, в общем случае неоднородных агентов вряд ли удастся получить простые (типа (2)) аналитические выражения для «равновесных» состояний социальной сети.

Для моделей порогового поведения агентов в социальных сетях существует целый ряд работ, в которых формулируется и аналитически решается задача информационного управления в дискретном или непрерывном времени [7, 8, 21, 23].

Можно рассматривать другие (в том числе пороговые) классы функций доверия, можно усложнить внутреннюю структуру агента (по аналогии с моделями биполярного выбора [142] или логическими моделями В. А. Лефевра [81]). Можно ввести в модель рефлексию и предполагать, что агенты, в зависимости от своих мнений выбирают действия и наблюдают результаты этих действий (т. е. разделить «мнение — действие — результат»). Тогда можно исследовать не только эффективность, но и стабильность информационных воздействий [109, 142]. В конце концов, можно рассматривать немарковский закон динамики мнений агентов, а более сложный, в рамках которого каждый агент пытается прогнозировать изменение мнений остальных и т. д. Для этого, правда, придётся потребовать, чтоб вся социальная сеть была общим знанием среди агентов, что является очень сильным предположением. Всё это — перспективные направления исследования моделей информационного управления в социальных сетях.

2.4. Информационное управление и репутация членов сети

Репутация. Возможности влияния одних членов социальной сети на других её членов существенно зависят от репутации первых. *Репутация* — «создавшееся общее мнение о достоинствах или недостатках кого-либо, чего-либо, общественная оценка» [130, с. 431]. Репутацию можно рассматривать, во-первых, как ожидаемую (другими агентами) норму деятельности агента — какого поведения от него ожидают остальные [59]. Во-вторых, как «весомость» мнения агента, определяемую предшествуемой оправдываемостью его суждений и/или эффективностью его деятельности. Репутация оправдывается и, как правило, возрастает, если выбор агента (его суждения, действия и т. п.) совпадает с тем, чего от него ожидают остальные и/или с тем, что остальные впоследствии считают нормой (например, эффективной деятельностью). Репутация может и снижаться, например, при нарушении субъектом принятых в сообществе норм поведения, при принятии неэффективных решений и т. д. Отметим, что репутация может быть как индивидуальной, так и коллективной. Обзор моделей индивидуальной и коллективной репутации приведён в [59].

Пусть $r_i \geqslant 0$ — параметр, описывающий *репутацию* i-го агента. Вектор репутаций $r = (r_1, r_2, \ldots, r_n)$, если не говорено особо, будем считать общим знанием среди агентов. Потребуем, чтобы в сети всегда существовал агент с ненулевой репутацией. Также будем считать, что сеть представляет собой полный граф, следовательно, в силу приведённых выше результатов (см. раздел 2.1), результирующее мнение будет единым для всех агентов, входящих в рассматриваемую социальную сеть.

Определим степень доверия i-го агента j-му агенту как

$$\alpha_{ij} = \frac{r_j}{\sum\limits_{k \in N} r_k}, \quad i, j \in N, \tag{1}$$

т. е. будем считать, что степень влияния каждого агента не зависит явным образом от объектов влияния и пропорциональна его относительной репутации. В соответствии с выражением (1) агент i тем более подвержен влиянию со стороны агента j, чем ниже репутация первого, чем выше репутация второго и чем ниже репутация других членов социальной сети[19].

Отметим, что при определении степени доверия в виде (1), условие нормировки (1) всегда выполнено. Обозначим через

$$R = \sum_{k \in N} r_k$$

суммарную («*коллективную*») *репутацию* членов сети.

Тогда линейную динамику мнений агентов можно записать в виде:

$$x_i^\tau = \frac{1}{R} \sum_{j \in N} r_j x_j^{\tau-1}, \quad i \in N, \tag{2}$$

а итоговое мнение агентов будет:

$$X = \frac{1}{R}(r \cdot x^0), \tag{3}$$

т. е. скалярное (одинаковое для всех агентов) итоговое мнение агентов X (которое сформируется за один шаг, так как правая часть выражения (2) не зависит от i), будет определяться скалярным произведением вектора репутаций r и вектора начальных мнений агентов x^0 и нормироваться на суммарную репутацию [44].

Манипулирование мнениями членов социальной сети. Простейшей моделью *информационного управления* (манипулирования мнениями членов социальной сети[20]) является следующая. Пусть некоторый агент (без потери общности здесь и далее будем считать, что это агент с номером один, имеющий $r_1 > 0$) заинтересован в том, чтобы итоговое мнение агентов было равно X_*. При заданном векторе репутаций и фиксированных мнениях остальных агентов для этого, в силу (3),

[19] Естественно, можно определять зависимость степени влияния от репутации и другим образом, удовлетворяющим перечисленным свойствам частичной монотонности, имеющим прозрачную содержательную интерпретацию (см. обсуждение ниже).

[20] Под манипулированием мы будем понимать целенаправленное формирование мнений участников социальной сети, т. е. информационное управление. При этом не предполагается негативная окраска этого термина, т. е. будем считать манипулирование этически нейтральным. Вопрос об этико-психологических аспектах манипулирования подробно рассмотрен в [58]. Второе (близкое) значение термина «манипулирование» — искажение агентом сообщаемой кому-либо информации (см. также ниже).

ему достаточно сообщить

$$s_1 = \frac{1}{r_1}\left[RX_* - \sum_{k>1} r_k x_k^0\right]. \tag{4}$$

Из условия неотрицательности начальных мнений (в том числе, и $x_1^0 \geqslant 0$) можно найти нижнюю границу «диапазона манипулирования» первого агента (любого большего значения при неограниченных сверху своих сообщениях и ненулевой репутации он всегда может добиться):

$$X_* \geqslant \frac{1}{R}\sum_{k>1} r_k x_k^0. \tag{5}$$

Из выражения (5) следует, что, **чем выше репутация агента, осуществляющего манипулирование, тем больше его возможности по влиянию на итоговое мнение агентов в социальной сети.**

В общем случае манипулировать итоговым мнением могут все агенты (если предположить, что любой из агентов может сообщать другим мнение, отличное от его истинного мнения). В результате получим модель линейной (см. выражение (3)) *активной экспертизы*[21], хорошо известную в литературе (см., например, [106]).

Исследуем теперь возможности манипулирования со стороны первого агента в зависимости от его репутации. Предположим, что значение начального мнения, которое может сообщать первый агент, ограничено снизу величиной $x_1^{\min} > 0$. Тогда из (3) получаем оценку репутации первого агента, минимально необходимой для обеспечения равновесия X_* при ограничении $x_1^{\min}$ на свои сообщения:

$$r_1 = \frac{\sum_{j>1} r_j (x_j^0 - X_*)}{X_* - x_1^{\min}}. \tag{6}$$

Из выражения (6) следует, что чем выше репутации других агентов, тем жёстче требования к репутации манипулирующего агента.

В реальных социальных сетях агенты зачастую могут сообщать свои мнения в достаточно широком диапазоне. Однако самостоятельно выбирать непосредственно свою репутацию они, как правило, не могут, так как последняя в существенной степени зависит от предыстории взаимодействия агентов.

На качественном уровне идея дальнейших рассмотрений заключается в следующем. Если некоторый агент хочет осуществлять манипулирование мнениями членов социальной сети, то для этого он должен

[21] Обмен мнениями между членами социальной сети с формированием некоторого итогового «коллективного» мнения можно интерпретировать как экспертизу.

иметь достаточную репутацию. Поэтому необходимо рассмотрение сценария, при котором этот агент сначала предпринимает действия по увеличению своей репутации, а затем использует её для достижения своих целей — эффективного манипулирования. Следовательно, возникает задача описания, во-первых, динамики репутации и, во-вторых — процессов целенаправленного её формирования.

Динамика репутации. Для моделирования динамики репутации агентов предположим, что описанное выше их взаимодействие повторяется последовательно (при различных «начальных условиях») конечное число раз. Содержательно — агенты могут последовательно обсуждать ряд интересующих их вопросов, причём репутация каждого агента в общем случае зависит от всей предшествующей «истории» обсуждений.

Предположим, что члены социальной сети последовательно рассматривают T вопросов (имеются T последовательных периодов времени — в каждый период времени «обсуждается» соответствующий вопрос), по каждому из которых у каждого из агентов имеется своё начальное мнение x_i^τ, $i \in N$, $\tau = \overline{1, T}$. Начальные репутации агентов обозначим r_i^1, $i \in N$. Будем считать, что общим знанием среди агентов являются репутации (начальные и текущие — для соответствующего момента времени, а также история изменения репутаций), начальные и результирующие мнения всех агентов для текущего и всех прошлых периодов[22].

Обозначим R^τ — суммарную репутацию агентов в начале периода τ, X^τ — результирующее мнение агентов к концу периода τ (из (3) следует, что это мнение будет одинаковым для всех агентов).

Итак, вопросы, рассматриваемые агентами, независимы, и результирующие мнения будут определяться

$$X^\tau = \frac{1}{R^t}(r^\tau \cdot x^\tau), \tag{7}$$

где $r^\tau = (r_1^\tau, \ldots, r_n^\tau)$, $x^\tau = (x_1^\tau, \ldots, x_n^\tau)$ — соответственно, вектора репутаций и начальных мнений агентов в начале периода времени τ, $\tau = \overline{1, T}$.

Для описания всей траектории изменения мнений и репутаций агентов необходимо доопределить, как изменяется репутация каждого из агентов в каждом периоде времени. Будем считать, что репутация является «кумулятивной» характеристикой (забывание отсутствует), и репутация любого агента в начале любого периода равна репутации данного агента в конце предыдущего периода времени.

[22] Условно можно считать, что социальная сеть функционирует в двух временах — «быстром» (в котором сходятся мнения членов социальной сети по фиксированному вопросу) и «медленном» (в котором члены социальной сети последовательно рассматривают различные вопросы).

Содержательно обсуждаемые агентами вопросы принадлежат примерно одной тематике, так, что агент, имеющий высокую репутацию по одному вопросу (по результатам обсуждения этого вопроса), будет иметь эту же репутацию при начале обсуждения следующего вопроса.

В общем случае можно предположить, что репутация i-го агента в момент времени τ определяется начальными и результирующими мнениями всех агентов (пока считаем, что каждый из них ведёт себя честно и сообщает достоверную информацию) и их репутациями во всех предшествующих периодах:

$$r_i^\tau = F_i(r^1, \ldots, r^{\tau-1}, x^1, \ldots, x^{\tau-1}, X^1, \ldots, X^{\tau-1}), \quad i \in N, \ \tau = \overline{2, T}, \quad (8)$$

причём, наверное, логично предположить, как минимум, что функция $F_i(\cdot)$ монотонно убывает по разности $|x_i^{\tau-1} - X^{\tau-1}|$ и возрастает по предыдущим значениям репутации данного агента. В качестве частного можно использовать, например, следующий закон изменения репутации:

$$r_i^\tau = \frac{r_i^{\tau-1}}{\gamma + \beta |x_i^{\tau-1} - X^{\tau-1}|}, \quad i \in N, \ \tau = \overline{2, T}, \quad (9)$$

где $\gamma \in (0; 1]$, $\beta > 0$ — заданные константы. В соответствии с выражением (9) репутация агента в начале некоторого периода времени зависит только от его репутации в предыдущем периоде, а также того, насколько его начальное мнение в предыдущем периоде оказалось отличным от результирующего мнения всех агентов к концу этого периода. Другими словами, репутация агента возрастает (уменьшается), причём скорость изменения определяется константами γ и β, если итоговое мнение всех агентов оказывается близким к (сильно отличается от) его мнению(я).

Закон (9) изменения репутации является одним из множества возможных. Нередко используют логистический закон изменения репутации (см. [59]) и др. — в каждом конкретном случае необходимо решать задачу идентификации — поиска тех зависимостей, которые наилучшим образом приближают или объясняют наблюдаемые или прогнозируемые эффекты.

Можно надеяться, что сложные динамические модели репутации позволят имитировать такие распространённые на практике эффекты, как создание ложной репутации, использование инерционности репутации (прекратив «инвестиции» в свою репутацию, агент может пользоваться тем, что её снижение происходит не сразу) и др. (см. примеры в [59]). Разработка подобных теоретико-игровых моделей представляется перспективной задачей будущих исследований и выходит за рамки настоящей работы.

Описав информационное влияние и динамику репутации, перейдём к постановке и решению для рассматриваемой модели задачи управления.

Задача информационного управления. Имея уравнения (7) и (8), описывающих соответственно динамику мнений агентов в зависимости от репутации и динамику репутации в зависимости от динамики мнений, можно ставить и решать задачу *управления* — воздействия на агентов социальной сети с целью формирования требуемых их мнений.

Ограничимся случаем манипулирования со стороны одного (первого) агента, целью которого является такое *манипулирование* своими начальными мнениями по каждому из вопросов, чтобы (с учётом соответствующей динамики его репутации) добиться определённого результирующего мнения всех членов социальной сети по последнему вопросу.

Итак, имеем динамическую систему (7)–(8). Требуется найти последовательность сообщаемых другим агентам начальных мнений первого агента $s_1^1, s_1^2, \ldots, s_1^T$ (манипулирование как раз и заключается в возможности сообщения им $s_1^\tau \neq x_1^\tau$), удовлетворяющую ограничениям $s_1^\tau \geqslant x_1^{\tau\,\min}$, $\tau = \overline{1, T}$, и минимизирующую заданную монотонную целевую функцию $F(|X^T - X_*^T|)$, где формирование итогового мнения X_*^T по последнему вопросу может интерпретироваться как цель управления (манипулирования).

В общем случае сформулированная задача является задачей динамического программирования (при наложении соответствующих ограничений на свойства функций и допустимых множеств) и в каждом конкретном случае может быть решена численно.

Рассмотрим следующую *эвристику* поведения первого агента. Напомним, что выше было показано, что, чем выше репутация агента, осуществляющего манипулирование, тем при фиксированных репутациях остальных агентов больше его возможности по влиянию на итоговое мнение агентов в социальной сети. Значит, можно предполагать, что к началу последнего периода первому агенту желательно иметь максимально возможную репутацию. Если функция $F_1(\cdot)$ удовлетворяет введённому выше условию монотонности и такова, что репутация первого агента на текущем шаге зависит только от его репутации на предыдущем шаге, его начального мнения на предыдущем шаге и от результирующего мнения на предыдущем шаге (обозначим это предположение $(*)$), то рассмотрим следующее решение задачи информационного управления — первому агенту следует на каждом шаге (независимо от других шагов), кроме последнего шага, выбирать такое значение своего начального мнения на этом шаге, чтобы к его завершению максимизировать свою репутацию. На последнем шаге (при сложившейся и фиксированной в рамках этого шага его репутации) первому агенту следует выбирать своё начальное мнение с целью минимизации $F(|X^T - X_*^T|)$, причём значение X^T будет зависеть только от его начального мнения s_1^T на шаге T.

Формально, первый агент должен решить задачу, состоящую из $T-1$ независимой задачи максимизации репутации и одной задачи выбора своего начального мнения на последнем шаге:

$$\left| s_1^\tau - \frac{1}{R^\tau}\left[r_1^\tau s_1^\tau + \sum_{j>1} r_j^\tau x_j^\tau \right] \right| \to \min_{s_1^\tau \geqslant x_1^{\tau\,\min}}, \quad \tau = \overline{1, T-1}, \tag{10}$$

$$\left| \frac{1}{R^\tau}\left[r_1^T s_1^T + \sum_{j>1} r_j^T x_j^T \right] - X_*^T \right| \to \min_{s_1^T \geqslant x_1^{T\,\min}}. \tag{11}$$

При отсутствии ограничений на сообщаемые первым агентом начальные мнения решение задачи (10) имеет вид:

$$s_1^\tau = \frac{\sum\limits_{j>1} r_j^\tau x_j^\tau}{\sum\limits_{j>1} r_j^\tau}, \quad \tau = \overline{1, T-1}, \tag{12}$$

т. е. для максимизации своей репутации ему всегда следует высказывать «средневзвешенное» (с учётом репутаций) мнение остального коллектива. Образно говоря, выражение (12) иллюстрирует принцип «всегда говори то же, что и большинство — сойдёшь за умного»[23]

Итак, на первых $T-1$ шагах манипулирующий агент максимизирует свою репутацию, а на последнем шаге использует её для достижения целей информационного управления. Подчеркнём, что такое поведение, хотя и выглядит рациональным с точки зрения здравого смысла, является только эвристикой, т. е. не даёт точного решения задачи информационного управления. Причина заключается в том, что в суммарной репутации R^T агентов в периоде T (см. выражение (11)) фигурирует сумма репутаций всех агентов, а, выбирая в каждом периоде свои действия в соответствии с принципом (10), в рамках предположения (∗) первый агент, не учитывая этого, влияет на репутацию других агентов (см. также пример в разделе 3.1). Избежать этого, превратив эвристическое решение в точное, можно, определив, вместо (1), влияние и репутацию таким образом, чтобы суммарная

[23] Точнее говоря, выражение (12) всё-таки подразумевает прогнозирование результатов обмена мнениями.

репутация была постоянна[24], или обосновав тем или иным образом *гипотезу слабого влияния* [106].

Нечёткая модель социальной сети. Описанную выше (в настоящем параграфе и разделе 2.1) модель социальной сети, отражающую информационное влияние агентов, их репутацию и динамику их мнений, можно условно назвать *базовой моделью социальной сети*. Обобщим её на нечёткий случай.

Достаточно простое выражение (3), описывающее зависимость итогового мнения членов социальной сети от их начальных мнений и репутаций, даёт возможность получить аналогичное выражение и для случая, когда репутации и начальные мнения агентов являются нечёткими, т. е. для *нечёткой модели социальной сети*.

Предположим, что нечёткое начальное мнение i-го агента описывается функцией принадлежности $\nu_i(x_i)\colon [0;+\infty) \to [0;1]$, $i \in N$. Репутации агентов также будем считать нечёткими и описываемыми функциями принадлежности $\mu_i(r_i)\colon [0;+\infty) \to [0;1]$, $i \in N$.

В соответствии с принципом обобщения [114] можно записать следующее выражение для функции принадлежности нечёткого итогового мнения членов социальной сети:

$$\mu(X) = \max_{\left\{(r,x)\,\middle|\,\frac{\sum_{j\in N} r_j x_j}{\sum_{i\in N} r_i}=X\right\}} \min_{i\in N}\left\{\min[\mu_i(r_i);\nu_i(x_i)]\right\}.$$

Произведённый переход от базовой к нечёткой модели социальной сети, естественно, удовлетворяет принципу соответствия: при «предельном переходе» (когда репутации и начальные мнения агентов являются чёткими) приведённое выше выражение для $\mu(X)$ даёт тот же результат, что и выражение (2).

Пример 2.22. Пусть имеются два агента, чьи репутации являются чёткими, а нечёткие начальные мнения определены на бинарном носителе — множестве $\{0;1\}$ и имеют вид

$$\nu_1(0) = 1-p, \quad \nu_1(1) = p, \quad \nu_2(0) = 1-q, \quad \nu_2(1) = q,$$

где $p, q \in [0;1]$.

Получим

$$\mu(X) = \max_{\left\{(x_1,x_2)\,\middle|\,\frac{r_1x_1+r_2x_2}{r_1+r_2}=X\right\}} \min[\nu_1(x_1);\nu_2(x_2)].$$

---

[24] Произведя нормировку индивидуальной репутации на суммарную, получим марковскую модель, в которой вероятности стационарных состояний (принятия коллективом агентов решения, совпадающего с мнением одного из агентов) будут определяться относительными репутациями соответствующих агентов.

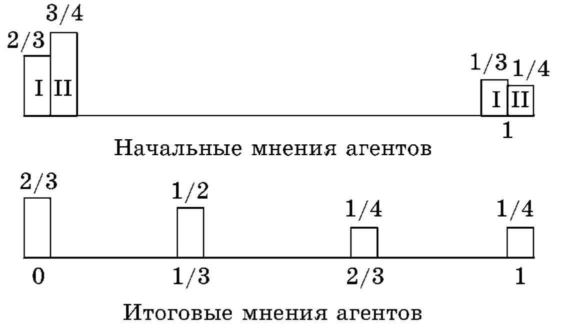

Рис. 53. Начальные и итоговые мнения агентов в примере 2.22

Итак, итоговое мнение является нечёткой величиной $\tilde{X}$ с конечным носителем

$$\left\{0;\ \frac{r_2}{r_1+r_2};\ \frac{r_1}{r_1+r_2};\ 1\right\}$$

и функцией принадлежности, принимающей, соответственно, значения

$$\big(\min[(1-p);\,(1-q)];\,\min[(1-p);\,q];\,\min[p;\,(1-q)];\,\min[p;\,q]\big).$$

Если $p=1/3$, $q=1/4$, $r_1=1$; $r_2=2$, то нечёткое итоговое мнение членов социальной сети будет равно $\{0\,|\,2/3;\ 1/3\,|\,1/3;\ 2/3\,|\,1/4;\ 1\,|\,1/4\}$ (рис. 53), на котором значения функции принадлежности выделены жирным шрифтом. •

Рассмотренный пример иллюстрирует такое свойство нечёткой модели социальной сети, что, даже при одинаковых носителях нечётких начальных мнений агентов, носитель их нечёткого итогового мнения может отличаться от носителя начальных мнений. Это свойство, даже в случае конечного числа попарно различных возможных начальных мнений агентов, существенно с точки зрения возможности решения задач информационного управления.

Информационное противоборство. Предположим, что часть агентов — назовём их *активными* — имеет возможность осуществлять манипулирование, выбирая из заданного множества на каждом (или, в более общем случае, заранее оговорённом) шаге значения сообщаемых другим агентам своих мнений, естественно, учитывая не только влияния этих сообщений на итоговые мнения, но и принимая во внимание влияние этих сообщений на репутацию. Предпочтения активных агентов определены на множестве последовательностей итоговых мнений социальной сети по рассматриваемым вопросам. Требуется найти решение игры активных агентов — множества их равновесных (в том или ином смысле) действий. Используемая концепция равновесия определяется как содержательными соображениями, так и последовательностью и объёмом получаемой агентами информации — можно рассматривать повторяющиеся, в развёрнутой форме, кооперативные и другие игры на социальных сетях.

В рамках предложенной модели социальной сети задача информационного противоборства, фактически, сводится к *задаче динамической активной экспертизы с репутацией*, что представляется перспективным обобщением классической задачи теории коллективного выбора. В рамках динамической активной экспертизы с репутацией возникает ключевой для теории коллективного выбора вопрос о *манипулируемости* (strategy-proofness) результатов экспертизы — в каких случаях (при каких процедурах принятия решений, т. е. при каких процессах информационного влияния агентов друг на друга) агентам невыгодно манипулирование информацией, а выгодно сообщение достоверной информации о своих мнениях? Этот вопрос ждёт своего ответа.

Пример 2.23. Рассмотрим пример взаимодействия трёх агентов ($n=3$) в течение двух периодов ($T=2$). Начальные мнения агентов: $x_1^1=1$, $x_2^1=2$, $x_3^1=3$, $x_1^2=4$, $x_2^2=5$, $x_3^2=6$, $x_i^{t\,\min}=0{,}5$, $i=1,2,3$, $\tau=1,2$, начальные репутации агентов одинаковы и равны единице ($r_1^1=1$, $r_2^1=1$, $r_3^1=1$), репутация меняется в соответствии с законом (9), в котором $\gamma=1/2$, $\beta=1$.

Сначала найдём результирующие мнения и репутации в отсутствии манипулирования (когда все агенты сообщают достоверную информацию). Суммарная репутация в первом периоде $R^1=3$. В соответствии с выражением (3) вычисляем $X^1=2$. В соответствии с выражением (9) находим репутации агентов во втором периоде: $r_1^2=2/3$, $r_2^2=2$, $r_3^2=2/3$. Опять же в соответствии с выражением (3) вычисляем итоговое мнение агентов в конце второго периода: $X^2=5$.

Предположим теперь, что первый агент осуществляет манипулирование с целью максимально приблизить результирующее мнение во втором периоде к своему мнению, т. е. $X_*^2=x_1^2$ (содержательная интерпретация такой целевой функции такая же, как и в моделях активной экспертизы [106]). Для этого он должен выбрать два числа: $s_1^1, s_1^2 \geqslant x_1^{\min}=0{,}5$, минимизирующие (см. выражение (11)), следующую целевую функцию:

$$F(|X^T-X_*^T|)=\left|\frac{1}{R^2}[r_1^2 s_1^2+r_2^2 x_2^2+r_3^2 x_3^2]-X_*^T\right|. \tag{13}$$

Из выражения (3) имеем:

$$X^1(s_1^1)=\frac{s_1^1+5}{3}.$$

Подставляя выражение (9), найдём зависимость репутаций агентов во втором периоде от действий первого агента в первом периоде:

$$r_1^2(s_1^1)=\frac{6}{3+2|2s_1^1-5|},\quad r_2^2(s_1^1)=\frac{6}{3+2|1-s_1^1|},\quad r_3^2(s_1^1)=\frac{6}{3+2|4-s_1^1|}.$$

Задача (13) окончательно примет вид:

$$\left|\frac{r_1^2(s_1^1)s_1^2+5r_2^2(s_1^1)+6r_3^2(s_1^1)}{r_1^2(s_1^1)+r_2^2(s_1^1)+r_3^2(s_1^1)}-4\right|\to\min_{s_1^1\geqslant 1/2,\, s_1^2\geqslant 1/2}. \tag{14}$$

Решение этой задачи — $s_1^1=2{,}5$, $s_1^2=2{,}5$ (репутации агентов во втором периоде равны: $r_1^2=2$, $r_2^2=1$, $r_3^2=1$). При этом целевая функция (14) принимает значение 0, т. е. цель управления полностью достижима при заданных ограничениях ($X^2=4=4=X_*^2$). Отметим, что в рассмотренном примере эвристический алгоритм даёт оптимальное решение.

Предположим теперь, что первый агент осуществляет манипулирование с целью максимально приблизить результирующее мнение в первом периоде к своему мнению, т. е. $X_*^1=x_1^1$, а второй агент осуществляет манипулирование с целью максимально приблизить результирующее мнение к своему мнению во втором периоде ($X_*^2=x_2^2$). Тогда $X^1(s_1^1,s_2^1)=(s_1^1+s_2^1+3)/3$. Найдём зависимость репутаций агентов во втором периоде от действий первого и второго агента в первом периоде:

$$r_1^2(s_1^1,s_2^1)=\frac{6}{3+2|2s_1^1-s_2^1-3|},$$
$$r_2^2(s_1^1,s_2^1)=\frac{6}{3+2|2s_2^1-s_1^1-3|},$$
$$r_3^2(s_1^1,s_2^1)=\frac{6}{3+2|6-s_1^1-s_2^1|}.$$

Первый агент должен выбрать s_1^1 и минимизировать свою целевую функцию:

$$F(X^1-x_1^1)=\left|\frac{1}{3}[s_1^1+s_2^1+3]-1\right|=\left|\frac{1}{3}[s_1^1+s_2^1]\right|$$

при заданных ограничениях на мнения. Очевидно, что независимо от действий второго игрока минимум достигается при $s_1^1=0{,}5$.

Второй игрок в первом периоде выбирает s_2^1 для максимизации своей репутации. Для этого ему необходимо минимизировать (при заданных ограничениях на мнения):

$$\left|s_2^1-\frac{1}{3}[s_1^1+s_2^1+3]\right|.$$

То есть $s_2^1 = 1{,}75 = X^1$ (следовательно, первый агент не полностью достиг своей цели $1{,}75 - 1{,}0 = 0{,}75$). Репутации агентов во втором периоде равны: $r_1^2 = 4/7$, $r_2^2 = 2$, $r_3^2 = 4/7$.

Во втором периоде второй игрок должен выбрать s_2^2 и минимизировать свою целевую функцию:

$$F(X^2 - x_2^2) = \left| \frac{4r_1^2(s_1^1, s_2^1) + s_2^2 r_2^2(s_1^1, s_2^1) + 6r_3^2(s_1^1, s_2^1)}{r_1^2(s_1^1, s_2^1) + r_2^2(s_1^1, s_2^1) + r_3^2(s_1^1, s_2^1)} - 5 \right|$$

при заданных ограничениях на мнения. Откуда $s_2^2 = 5$ при полном достижении цели вторым агентом. •

Аналогично можно рассматривать и другие игры с фиксированной последовательностью ходов.

Рефлексия агентов. Выше мы предполагали, что такие параметры социальной сети, как начальные мнения каждого из агентов по каждому из вопросов, репутации агентов, законы формирования результирующего мнения и динамики репутации являются общим знанием среди агентов. Однако на практике это не всегда так — например, в больших социальных сетях агенты могут не знать всего множества членов сети, представления агентов о мнениях и/или репутации друг друга могут быть неполными и/или различающимися. Для адекватного отражения подобных ситуаций целесообразно рассматривать неопределённость (неполную информированность) и/или нетривиальную взаимную информированность агентов. Неопределённость в задачах информационного управления в социальных сетях может вводиться по аналогии с тем, как это делается в других моделях принятия решений и теоретико-игровых моделях (см., например, [111]). Поэтому рассмотрим кратко аспекты рефлексии агентов.

Наряду с *информационной рефлексией*, основанной на асимметричной информированности агентов, интерес представляет более традиционная для теоретико-игровых моделей *стратегическая рефлексия* — процесс и результат размышления агентов о том, какое действие выберут оппоненты. Однако здесь необходимо сделать важное замечание: в рамках данной модели агенты не являются активными участниками ситуации, поскольку не выбирают своё действие и не имеют собственных предпочтений. Они лишь пассивно (или «доверчиво») формируют своё мнение на основе мнений других. Исключение представляет манипулирующий агент — он как раз является игроком, т. е. стремится достичь определённой цели и выбирает наиболее оптимальное действие для её достижения. Иными словами, «обычные» агенты и игрок-«манипулятор» — это два принципиально разных объекта моделирования. Их различие незаметно в простых случаях (см. предыдущий пример), но в более сложных (например, когда несколько манипулирующих агентов осуществляют информационное противоборство) оно весьма существенно. Повторим: это различие между агентом, меняющим своё мнение в зависимости от мнений других, и игроком, который формирует мнение других (не меняя при этом своего), преследуя определённые цели. То есть узлы сети рассматриваются как *агенты*, которые управляются «более интеллектуальными» как *игроками* (в частном случае игрок может являться агентом или их группой).

Как нам представляется, возможны два подхода к моделированию игроков. Первый состоит в том, что игроки сами не являются элементами социальной сети (агентами), а лишь воздействуют на неё тем или иным способом (см. реализацию данного подхода в разделах 2.3 и 3.1). Второй подход состоит в рассмотрении игроков как агентов (элементов социальной сети), для которых репутация других агентов не имеет значения и которые не меняют своего мнения. Проработка данных подходов, однако, выходит за рамки данной работы.

В качестве иллюстративного примера рассмотрим следующую модель принятия произвольным агентом из множества N решений (случай стратегической рефлексии [110]) о сообщаемом другим агентам своём мнении[25]: пусть он заинтересован в том, чтобы результирующее мнение совпадало с сообщённым им мнением[26]. Содержательно, при этом его «вес» (репутация) в глазах оппонентов будет высок — всё сообщество «соглашается с ним».

Если рефлексия отсутствует, то из (3) следует, что i-й агент сообщит мнение (см. также выражение (12)):

$$s_i^*(r, x_{-i}) = \frac{\sum\limits_{j \neq i} r_j x_j^0}{R - r_i}, \tag{15}$$

где $x_{-i} = (x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$, $i \in N$. Содержательно выражение (15) означает, что при рассматриваемом принципе принятия решений агент не обращает внимания на своё мнение и сообщает «среднее» (взвешенное с учётом репутаций) мнение остальных агентов. Вектор (15) можно условно назвать «*рефлексивным равновесием*» (первого ранга — см. ниже).

Возникает вопрос, какие предположения о принципах принятия решений оппонентами использует агент. Если предположить, что каж-

[25] Если каждый из агентов честно сообщает своё мнение, то рассмотрение рефлексии вряд ли имеет смысл.

[26] Отметим, что такое определение целей поведения агента отличается от принятого в моделях активной экспертизы и рассмотренного выше (когда агент хочет приблизить результирующее мнение к своему «истинному», а не к сообщаемому мнению).

дый агент использует принцип принятия решений типа (15), то единственным «равновесием» будет сообщение всеми агентами одного и того же мнения, причём, например, в случае одинаковых репутаций агентов равновесием Нэша это «равновесие» будет только при условии, что и истинные мнения всех агентов одинаковы.

Поэтому добавим фактор стратегической рефлексии, т. е. будем считать, что, выбирая своё сообщение в соответствии с выражением (15), i-й агент полагает, что все остальные агенты **честно сообщат свои истинные мнения** (это предположение в рамках приведённого выше обсуждения различий между «агентами» и «игроками» означает, что в рассматриваемом случае все агенты являются «не очень интеллектуальными»[27] игроками). Если все агенты ведут себя так же, то сложится следующее итоговое мнение:

$$\widehat{X} = \frac{1}{R} \sum_{i \in N} \frac{\sum\limits_{j \neq i} r_j x_j^0}{R - r_i} r_i. \tag{16}$$

В случае двух агентов выражение (16) примет вид

$$\widehat{X} = \frac{x_1^0 r_2 + x_2^0 r_1}{r_1 + r_2},$$

т. е. осуществляя стратегическую рефлексию, агенты «обмениваются» своими репутациями и сообщают не своё мнение, а мнение оппонента.

Условием стабильности [142] рефлексивного равновесия (15) можно считать условие совпадения результирующих мнений, определяемых выражениями (3) и (16):

$$\sum_{i \in N} r_i [s_i^*(r, x_{-i}^0) - x_i^0] = 0. \tag{17}$$

Перейдём теперь к краткому качественному обсуждению случая *информационной рефлексии*, которая в соответствии с [110] предшествует стратегической. Обозначим Σ — множество всевозможных конечных последовательностей индексов из N, $r_{i\sigma}$ — представления i-го агента о репутации σ-агента [110], $i \in N$, $\sigma \in \Sigma$. Например, r_{ij} — представления i-го агента о репутации j-го, r_{ijk} — представления i-го агента о представлениях j-го агента о репутации k-го агента и т. д. (в случае общего знания $r_{ij} = r_j$, $i, j \in N$). К такой конструкции применим аппарат теории рефлексивных игр [110], с помощью которого

[27] Более интеллектуальный игрок должен был бы, как минимум, предполагать, что остальные агенты-игроки также способны к рефлексии.

можно искать *информационные равновесия*, исследовать их стабильность и т. д., что представляется актуальной задачей будущих исследований.

В заключение настоящего раздела отметим, что информационные воздействия, направленные на формирование той или иной структуры информированности агентов в социальной сети о репутациях друг друга, также являются разновидностью информационного управления. Исследование этого вида информационного управления, наряду с изучением такого его вида как манипулирование агентами информацией (см. выше), также представляется перспективным направлением будущих исследований.

Пример 2.24. Рассмотрим пример стратегической рефлексии при взаимодействии трёх агентов ($n=3$). Начальные мнения агентов: $x_1^0=1$, $x_2^0=2$, $x_3^0=3$, репутации агентов одинаковы и равны единице. Если бы все агенты честно сообщали свои мнения, то сложилось бы результирующее мнение $X=2$.

В соответствии с выражением (15) находим:

$$s_1^* = \frac{5}{2}, \quad s_2^* = 2, \quad s_3^* = \frac{3}{2}.$$

При таких сообщениях результирующее мнение $\widehat{X}=2$, т. е. условие (17) выполнено.

Примером невыполнения условия (17) является ситуация, когда мнение третьего агента $x_3=4$. Тогда

$$s_1^* = 3, \quad s_2^* = \frac{5}{2}, \quad s_3^* = \frac{3}{2} \quad \text{и} \quad \widehat{X} = \frac{7}{3} > X = 2.$$

Рассмотрим пример информационной рефлексии при взаимодействии двух агентов ($n=2$). Начальные мнения агентов: $x_1^0=1$, $x_2^0=2$, репутации агентов: $r_1=2$, $r_2=1$. Если бы все агенты честно сообщали свои мнения, то сложилось бы результирующее мнение $X=4/3$. При стратегической рефлексии результат будет $5/3$.

Предположим, что имеет место следующая структура информированности: $1 \to 2 \longleftrightarrow 21$, т. е. второй агент имеет свои представления $r_{21}=3$ о репутации первого агента и считает, что это является общим знанием. Первый агент об этом полностью информирован. Найдём информационное равновесие: второй агент в соответствии с выражением (15) выберет $s_2^*(r_{21}, r_2, x_1^0) = x_1^0$ (отметим, что в случае двух агентов этот выбор не зависит от представлений второго агента о репутации первого), рассчитывая на такое же сообщение первого агента; первый же агент выберет свой наилучший ответ s_1^* из условия

$$\frac{s_1^* r_1 + x_1^0 r_2}{r_1 + r_2} = s_1^*,$$

т. е. $s_1^* = x_1^0$. Информационное равновесие (x_1^0, x_1^0) *стабильно*, но является *ложным равновесием*, так как приводит к итоговому мнению $2/3$, отличающемуся от итогового мнения $X = 4/3$ в условиях полного знания. •

Перспективным направлением дальнейших исследований представляется, во-первых, рассмотрение обобщений описанных выше моделей за счёт ослабления вводимых предположений, в первую очередь — допущение неполной и асимметричной информированности агентов. Во-вторых, представляется целесообразной разработка теоретико-игровых моделей информационного управления и информационного противоборства, учитывающих неопределённость, рефлексию агентов и возможность образования их коалиций.

2.5. Информационное управление и доверие членов сети

В настоящем разделе рассматриваются две постановки задачи информационного управления доверием членов социальной сети. Первая предполагает возможность управления репутацией агентов, вторая — управление непосредственно доверием агентов друг другу.

Управление репутацией. Предположим, что существует множество $M \subseteq N$ агентов влияния, на репутацию которых может оказывать влияние управляющий орган — центр.

Пусть начальные мнения всех агентов, а также репутации всех агентов, кроме агентов влияния, фиксированы. Пусть также известны: затраты центра $c_j(r_j)$ на создание репутации r_j j-го агента влияния, $j \in M$ $(|M| = m)$, и зависимость выигрыша центра $H(X)$ от итогового мнения агентов X. Обозначим $r_M = (r_j)_{j \in M}$ — вектор репутаций агентов влияния, $C_0(r_M) = \sum_{j \in M} c_j(r_j)$ — суммарные затраты центра.

В соответствии с результатами предыдущего раздела, итоговое мнение членов социальной сети зависит от их начальных мнений и репутаций следующим образом:

$$X(r_M) = \frac{1}{\sum\limits_{i \in N \setminus M} r_i + \sum\limits_{j \in M} r_j} \left(\sum_{i \in N \setminus M} r_i x_i^0 + \sum_{j \in M} r_j x_j^0 \right).$$

Предположим, что ограничения на репутацию отсутствуют. Тогда, считая, что целевая функция центра

$$\Phi(r_M) = H(X(r_M)) - C_0(r_M)$$

представляет собой разность между выигрышем и затратами, получим, что *задача управления репутацией* может быть записана в виде следующей стандартной оптимизационной задачи:

$$H\left[\frac{1}{\sum\limits_{i\in N\setminus M} r_i + \sum\limits_{j\in M} r_j}\left(\sum_{i\in N\setminus M} r_i x_i^0 + \sum_{j\in M} r_j x_j^0\right)\right] - \sum_{j\in M} c_j(r_j) \to \max_{r_M \geqslant 0}.$$

Управление элементами матрицы доверия. В данной работе в основном предполагается, что предметом управления являются мнения агентов. Центр может воздействовать на эти мнения, вообще говоря, в некоторые моменты времени. В результате этого информационного воздействия результирующие мнения агентов меняются, становятся более желательными для центра. Однако возможны случаи, когда предметом управления являются не мнения агентов, а их взаимное доверие (влияние). Управляя взаимным доверием агентов, т. е. элементами матрицы доверия, центр также может добиваться требуемых ему результатов.

Для того чтобы построить формальную модель управления доверим, вспомним, что в отсутствии управления состояние социальной сети (т. е. вектор мнений агентов) в момент $t \geqslant 0$ задаётся соотношением

$$x^t = (A)^t x, \tag{1}$$

где $x = x^0$ — начальное состояние сети, A — матрица прямого влияния размерности $n \times n$. Будем считать, что центр осуществляет *управление доверием* путём аддитивного изменения матрицы A — увеличения её на матрицу управлений $V = \|v_{ij}\|$. Предположим, что эта матрица принадлежит множеству возможных управлений $\overline{V}$. Содержательно множество $\overline{V}$ отражает возможности центра по оказанию воздействия на те или иные связи между агентами, а также общие ресурсные ограничения.

Рассмотрим сначала случай, когда воздействие оказывается центром единственный раз в начальный момент времени. Тогда в результате этого воздействия формула (1) приобретает следующий вид:

$$x^t = (A + V)^t x. \tag{2}$$

Поскольку добавление матрицы V не должно менять свойство стохастичности матрицы влияния, необходимо наложить следующие дополнительные ограничения на её выбор центром:

$$\begin{aligned} &\forall\, i \in N \quad \sum_{j\in N} v_{ij} = 0,\\ &\forall\, i, j \in N \quad -a_{ij} \leqslant v_{ij} \leqslant 1 - a_{ij}. \end{aligned} \tag{3}$$

Обозначим $\widehat{V}$ — множество матриц размерности $n \times n$ удовлетворяющих условиям (3).

Пусть целевая функция центра $\Phi(x^t, V)$ — критерий эффективности управления — зависит от мнений агентов в момент t и матрицы управлений. Тогда задача управления будет заключаться в выборе допустимой матрицы управлений, максимизирующей критерий эффективности:

$$\Phi(x^t, V) \to \max_{V \in \overline{V} \cap \widehat{V}}.$$

Пример 2.25. Вновь обратимся к социальной сети с тремя агентами, рассмотренной выше в примерах 2.17 и 2.18. Предположим, что центр может в начальный момент изменить (уменьшить либо увеличить) степень доверия второго агента третьему, причём не более чем на заданную константу Δ, где $\Delta \leqslant \min\{\alpha, 1-\alpha\}$. Таким образом, множество допустимых управлений составляют матрицы вида

$$V = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -v & v \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $|v| \leqslant \Delta$. Предположим, что центр стремится максимизировать суммарное мнение агентов в фиксированный момент t:

$$\Phi = x_1^t + x_2^t + x_3^t \to \max_{|v| \leqslant \Delta}.$$

Путём непосредственного вычисления нетрудно убедиться, что

$$x^t = (A+V)^t x = \begin{pmatrix} (1-\alpha-v)^{t-1}x_2 + [1-(1-\alpha-v)^{t-1}]x_3 \\ (1-\alpha-v)^t x_2 + [1-(1-\alpha-v)^t]x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \Phi &= x_1^t + x_2^t + x_3^t = \\ &= [(2-\alpha-v)(1-\alpha-v)^{t-1}]x_2 + [3-(2-\alpha-v)(1-\alpha-v)^{t-1}]x_3 = \\ &= 3x_3 + (2-\alpha-v)(1-\alpha-v)^{t-1}(x_2 - x_3). \end{aligned}$$

Из последнего соотношения ясно, что

— если $x_2 > x_3$, то оптимальным для центра является выбор $v = -\Delta$;

— если $x_2 < x_3$, то оптимальным для центра является выбор $v = \Delta$;

— если $x_2 = x_3$, то управление центра не влияет на ситуацию (формально любое допустимое управление является оптимальным). •

В более общем случае воздействие на взаимное влияние агентов может оказываться центром в разные моменты времени, причём для каждого момента могут быть свои ограничения.

Обозначим множество возможных управлений в момент τ через $\overline{V}^\tau$, а саму матрицу управлений — через V^τ. Тогда матрица влияния в момент t рассчитывается по следующей формуле:

$$A^t = A + \sum_{\tau=0}^{t} V^\tau, \tag{4}$$

а рекуррентная формула вычисления состояния сети приобретает следующий вид:

$$x^{t+1} = (A^t + V^t)x^t. \tag{5}$$

При этом допустимыми на горизонте планирования T являются лишь такие управления V^τ, $\tau = 0, \ldots, T-1$, для которых все матрицы A^t, $t = 1, \ldots, T-1$, являются стохастическими по строкам:

$$\begin{gathered} \forall\, i \in N \quad \forall\, t \in \{0, \ldots, T-1\} \quad \sum_{j \in N} v_{ij}^t = 0, \\ \forall\, i, j \in N \quad \forall\, t \in \{0, \ldots, T-1\} \quad -a_{ij} \leqslant \sum_{\tau=0}^{t} v_{ij}^t \leqslant 1 - a_{ij}. \end{gathered} \tag{6}$$

Обозначим $\widehat{V}(T)$ — множество конечных последовательностей матриц $(V^0, \ldots, V^{T-1})$ размерности $n \times n$, удовлетворяющих условиям (6).

Соотношение (2) в этом случае приобретает (с учётом (4)) следующий вид:

$$x^T = \left(\prod_{t=0}^{T-1} A^{T-t-1} \right) x.$$

Пусть целевая функция центра зависит от итоговых мнений агентов в момент T и матриц управления в моменты времени $0, \ldots, T-1$. Тогда задача управления будет заключаться в выборе допустимой последовательности матриц управления, которая максимизирует критерий эффективности:

$$\Phi(x^T, V^0, \ldots, V^{T-1}) \to \max_{\substack{V^0 \in \overline{V}^0, \ldots, V^{T-1} \in \overline{V}^{T-1} \\ (V^0, \ldots, V^{T-1}) \in \widehat{V}(T)}}. \tag{7}$$

В общем случае задача управления (7) является довольно сложной. Формулировка и анализ интересных с содержательной точки зрения частных случаев представляется перспективным направлением дальнейших исследований.

Следует также отметить следующую особенность управления доверием: если в начальный момент мнения агентов находятся в некотором промежутке, то они и дальше будут находиться в этом промежутке при любом управлении. Сформулируем этот факт в виде утверждения.

Утверждение 2.8. *При осуществлении управления доверием для любого $t = 0, 1, \ldots$ и любого $i \in N$ справедливо соотношение*

$$x_{\min} \leqslant x_i^t \leqslant x_{\max}, \tag{8}$$

где $x_{\min} = \min\{x_1^0, \ldots, x_n^0\}$, $x_{\max} = \max\{x_1^0, \ldots, x_n^0\}$.

Доказательство. Введём обозначение Γ^t для стохастической матрицы, фигурирующей в рекуррентном соотношении выражения (5): $\Gamma^t = A^t + V^t$.

Будем рассуждать, используя индукцию по t. Для $t = 0$ соотношение (8) выполняется по определению $x_{\min}$ и $x_{\max}$. Пусть соотношение (8) выполняется для всех $i \in N$ при некотором t. Запишем мнение i-го агента в момент $(t+1)$, используя элементы матрицы $\Gamma^t = \|\gamma_{ij}^t\|$ (напомним, что $\sum_{j \in N} \gamma_{ij}^t = 1$ для любого $i \in N$):

$$x_i^{t+1} = \sum_{j \in N} \gamma_{ij}^t x_j^t.$$

Для правой части последнего соотношения справедлива следующая цепочка неравенств:

$$x_{\min} = \sum_{j \in N} \gamma_{ij}^t x_{\min} \leqslant \sum_{j \in N} \gamma_{ij}^t x_j^t \leqslant \sum_{j \in N} \gamma_{ij}^t x_{\max} = x_{\max}.$$

Последнее соотношение означает, что $x_{\min} \leqslant x_i^{t+1} \leqslant x_{\max}$. Утверждение 2.8 доказано. □

Следствие. *Если мнения агентов в начальный момент совпадают, то они не меняются со временем при осуществлении центром управления доверием.*

Для доказательства следствия достаточно в утверждении 2.8 положить $x_{\min} = x_{\max}$.

Утверждение 2.8 накладывает серьёзные ограничения на возможности центра достигать своих целей посредством управления доверием: мнения агентов ни при каком управлении не могут выйти за пределы отрезка $[x_{\min}, x_{\max}]$. Однако, наряду с этим, справедливо следующее утверждение.

Утверждение 2.9. *Если не накладывать ограничения на возможные управляющие воздействия центра, то управление доверием позволяет за один шаг сделать мнением каждого агента любое наперёд заданное значение* $x^* \in [x_{\min}, x_{\max}]$.

Доказательство. Если $x_{\min} = x_{\max}$, то утверждение очевидно (см. следствие к утверждению 2.8). Пусть $x_{\min} < x_{\max}$ и задано значение $x^* \in [x_{\min}, x_{\max}]$. Определим величину γ исходя из соотношения

$x^* = \gamma x_{\min} + (1-\gamma)x_{\max}$, т. е.

$$\gamma = \frac{x_{\max} - x^*}{x_{\max} - x_{\min}}.$$

Пусть, далее, $k \in N$ и $l \in N$ такие числа, что $x_k = x_{\min}$ и $x_l = x_{\max}$. Определим матрицу управления $V = \|v_{ij}\|$ следующим образом: для всех $i \in N$

$$v_{ik} = \gamma - a_{ik}, \quad v_{il} = 1 - \gamma - a_{il}, \quad v_{ij} = -a_{ij}, \quad j \in N \backslash \{k, l\}.$$

Тогда все элементы вектор-столбца $x^1 = (A+V)x$ равны x^*, поскольку

$$\sum_{j \in N} (a_{ij} + v_{ij}) x_j = \gamma x_k + (1-\gamma) x_l = x^*.$$

Таким образом, за один шаг удалось сделать «единогласным» мнением агентов величину x^*. Утверждение 2.9 доказано. □

В заключение данного раздела подчеркнём, что раздельное рассмотрение управления мнениями и управления доверием обусловлено удобством их теоретического изучения, в то время как на практике оба эти вида управления должны применяться (и применяются) совместно. Поэтому перспективным направлением дальнейших исследований представляется разработка моделей одновременного управления мнениями агентов (см. разделы 2.2 и 2.3) и их доверием/репутацией друг другу (см. разделы 2.1, 2.4 и 2.5).

2.6. Информационное управление и структура сети[28]

Случай полностью информированного центра. В данном разделе, следуя [136], рассмотрим ситуацию, в которой агенты, как и в описанной в разделе 2.1 модели, меняют своё мнение по линейному закону:

$$x_i^\tau = \sum_j a_{ij} x_j^{\tau-1}, \quad i \in N. \tag{1}$$

Пусть центр стремится достичь максимального суммарного значения характеристик агентов $\sum_{i \in N} x_j^\infty$, имея возможность оказывать на агентов в начальный момент времени управляющие воздействия u_i, изменяющее их характеристики. Тогда суммарное итоговое изменение характеристик агентов составляет (здесь $u = (u_1, \ldots, u_n)$):

$$F = \sum_{j \in N} (A^\infty u)_j = \sum_{j \in N} \left(\sum_{i \in N} a_{ij}^\infty \right) u_j = \sum_{j \in N} w_j u_j. \tag{2}$$

[28] Раздел написан совместно с Д. Н. Федяниным.

Функция $F(u)$ из соотношения (2) является функцией полезности центра, которую он стремится максимизировать. Из соотношения (2) видно, что при ограниченных ресурсах на управление (например, если из n компонент вектора u лишь k могут быть отличны от нуля) центру следует воздействовать на агентов с большей влиятельностью. Это даст ему больший итоговый выигрыш.

Далее в настоящем разделе будем рассматривать (при различных вариантах информированности центра) следующую ситуацию: центр может оказать управляющее воздействие, равное 1, ровно на k агентов (где $1 \leqslant k < n$). Нас будут интересовать следующие два вопроса:

1) каково оптимальное управляющее воздействие центра;
2) какие сетевые структуры являются для центра наиболее и наименее выгодными.

В случае полной информированности о влиятельностях агентов центру следует, как уже было отмечено, воздействовать на k наиболее влиятельных агентов. Выгодность для центра будем понимать в смысле максимизации его функции полезности (2).

Далее нам потребуется следующая лемма.

Лемма 1. *Для любого натурального числа n и любых неотрицательных действительных чисел w_i, $i \in N = \{1, \ldots, n\}$, таких, что $\sum_{i \in N} w_i = n$, существует такая матрица прямого влияния, что влиятельность i-го агента будет равна в точности w_i.*

Доказательство. Пусть заданы натуральное число n и неотрицательные действительные числа w_i, $i \in N$, такие, что $\sum_{i \in N} w_i = n$. Построим матрицу A с элементами

$$a_{ij} = \frac{w_j}{n}.$$

Она является стохастической матрицей и, следовательно, может являться матрицей прямого влияния в некоторой сети. В тоже время, как легко убедиться, она инвариантна относительно операции умножения на себя:

$$\sum_{k \in N} a_{ik} a_{kj} = \sum_{k \in N} \frac{w_k}{n} \frac{w_j}{n} = \frac{w_j}{n^2} \sum_{k \in N} w_k = \frac{w_j}{n} = a_{ij}.$$

Поэтому $A^\infty = A$ и влиятельности агентов равны

$$\sum_{i \in N} a_{ij} = \sum_{i \in N} \frac{w_j}{n} = \frac{w_j}{n} \sum_{i \in N} 1 = w_j.$$

Таким образом, матрица A является искомой матрицей влияния. $\square$

Теперь мы можем доказать следующие утверждения, описывающие наиболее и наименее выгодные для центра сети.

Утверждение 2.10 (а). *В случае полной информированности наиболее выгодной для центра является ситуация, в которой влиятельности не более чем k агентов отличны от нуля.*

Доказательство. Максимальное значение функции полезности центра (2) равно n:

$$F = \sum_{j \in N} w_j u_j \leqslant \sum_{j \in N} w_j = n.$$

Достигается это значение в том случае, когда $u_j = 1$ для всех таких j, что $w_j > 0$. □

Наименее выгодную сеть описывает следующее утверждение.

Утверждение 2.10 (б). *В случае полной информированности существует единственная наименее выгодная для центра ситуация, а именно та, при которой влиятельности всех агентов одинаковы*:

$$w_1 = \ldots = w_n = 1. \qquad (3)$$

Доказательство. Предположим, что существует сеть, для которой условие (3) не выполнено, и при этом она является наименее выгодной для центра. Не ограничивая общности, перенумеруем агентов в порядке невозрастания влиятельностей. Для этой сети $w_1 > w_n$ поэтому существует такой номер $l \in N$, что

$$w_1 = \ldots = w_l > w_{l+1} \geqslant \ldots \geqslant w_n. \qquad (4)$$

Тогда в силу леммы 1 можно построить сеть с меньшими влиятельностями первых l агентов и одновременно большими влиятельностями агентов с номерами от $l+1$ до n включительно (с сохранением соотношений (1) и (4)). Для такой сети значение целевой функции центра будет меньше, чем в исходной сети, что противоречит тому, что исходная сеть является наименее выгодной для центра. □

Случай информированного центра. Рассмотрим теперь ситуацию, когда центр не знает о влиятельностях конкретных агентов, поэтому оказывает одинаковые управляющие воздействия, равные 1, на k случайно выбранных агентов из n (где $1 < k < n$). Как и ранее, центр заинтересован в максимизации суммы итоговых характеристик агентов.

В рассматриваемом случае неинформированного центра величины u_i, $i = 1, \ldots, n$, являются случайными. Каждая из них принимает значения 0 либо 1, при этом

$$\sum_{i \in N} u_i = k.$$

Поскольку воздействие осуществляется на k случайно выбранных агентов из n, вероятность события $u_i = 1$ (т. е. вероятность того, что именно на данного агента осуществлено единичное воздействие) составляет k/n, так же как и математическое ожидание:

$$p(u_i = 1) = \mathrm{E}u_i = \frac{k}{n}.$$

Полезность центра

$$F = \sum_{j \in N} w_j u_j$$

также является случайной величиной. Находя её математическое ожидание, получаем (в силу свойства линейности операции нахождения математического ожидания):

$$\mathrm{E}F = \mathrm{E}\Bigg(\sum_{j \in N} w_j u_j\Bigg) = \sum_{j \in N} w_j \mathrm{E}(u_j) = \frac{k}{n} \sum_{j \in N} w_j = \frac{k}{n} \cdot n = k.$$

Таким образом, математическое ожидание выигрыша центра не зависит от значений влиятельностей агентов. Иными словами, в среднем центр получает один и тот же результат вне зависимости от того, каковы взаимные влияния агентов друг на друга. Заметим, что этот результат совпадает с наименее благоприятным (среди всевозможных сетевых структур) для рассмотренного ранее случая полной информированности центра.

Помимо математического ожидания важнейшей характеристикой полезности центра является её дисперсия. Обычно предполагается, что осуществляющий управление рациональный субъект, принимающий решение в условиях неопределённости, стремится минимизировать дисперсию. Поэтому будем считать, что в данном случае для центра предпочтительна низкая дисперсия.

Утверждение 2.11. *В случае неинформированного центра наиболее выгодной для него (в смысле минимизации дисперсии полезности) является ситуация, в которой влиятельности всех агентов одинаковы; наименее выгодной является ситуация, когда в сетевой структуре имеется единственный элемент, обладающий ненулевой влиятельностью.*

Доказательство. Поскольку случайные величины u_i, $i = 1, \ldots, n$, являются попарно зависимыми, дисперсия $\mathrm{D}F$ полезности центра вычисляется следующим образом (см., например, [145]):

$$\mathrm{D}F = \mathrm{D}\Bigg(\sum_{i \in N} w_i u_i\Bigg) = \sum_{i \in N} w_i^2 \mathrm{D}(u_i) + 2 \sum_{i > j} w_i w_j \operatorname{cov}(u_i, u_j). \qquad (5)$$

Дисперсия величин u_i, $i = 1, \ldots, n$, составляет

$$\mathrm{D}u_i = \mathrm{E}(u_i^2) - \mathrm{E}^2(u_i) = \frac{k}{n} - \left(\frac{k}{n}\right)^2.$$

Случайное произведение $u_i u_j$ принимает значение 1 либо 0. Его математическое ожидание, равное вероятности значения 1, составляет

$$\mathrm{E}(u_i u_j) = p(u_i u_j = 1) = p(u_i = 1)p(u_j = 1 \mid u_i = 1) = \frac{k}{n} \cdot \frac{k-1}{n-1}.$$

(здесь $p(A|B)$ означает условную вероятность события A при происшедшем событии B). Поэтому

$$\mathrm{cov}(u_i, u_j) = \mathrm{E}[(u_i - \mathrm{E}u_i)(u_j - \mathrm{E}u_j)] = \mathrm{E}u_i u_j - (\mathrm{E}u_i)^2 = \frac{k}{n} \cdot \frac{k-1}{n-1} - \left(\frac{k}{n}\right)^2.$$

Подставляя в (5) значения $\mathrm{D}u_i$ и $\mathrm{cov}(u_i, u_j)$, получаем

$$\mathrm{D}F = \sum_i w_i^2 \cdot \frac{k}{n}\left(1 - \frac{k}{n}\right) + 2\sum_{i>j} w_i w_j \frac{k}{n} \cdot \left(\frac{k-1}{n-1} - \frac{k}{n}\right) =$$
$$= \frac{k(n-k)}{n^2}\left(\sum_i w_i^2\right) - \frac{2k(n-k)}{n^2(n-1)}\left(\sum_{i>j} w_i w_j\right).$$

Последнее выражение может быть записано более наглядно, если воспользоваться алгебраической формулой

$$\sum_{i>j}(w_i - w_j)^2 = (n-1)\sum_{i \in N} w_i^2 - 2\sum_{i>j} w_i w_j. \tag{6}$$

Поскольку общее число слагаемых в левой части (6) составляет $n(n-1)/2$, введём в рассмотрение величину Δ, равную среднему квадрату разности влиятельностей несовпадающих агентов:

$$\Delta = \frac{2}{n(n-1)}\sum_{i>j}(w_i - w_j)^2.$$

С учётом этого обозначения, а также (5), выражение для дисперсии можно записать следующим образом:

$$\mathrm{D}F = \frac{k(n-k)}{2n}\Delta.$$

Из последнего соотношения видно, что дисперсия $\mathrm{D}F$ достигает минимального значения (n и k считаем фиксированными) при $\Delta = 0$, т. е. в случае, когда влиятельности всех агентов одинаковы.

Далее будем считать, не ограничивая общности, что агенты упорядочены по невозрастанию влиятельностей: $w_1 \geqslant \ldots \geqslant w_n$.

Для нахождения максимального значения DF достаточно показать, что максимальное значение Δ равно $2n$ и достигается при

$$w_1 = n; \quad w_i = 0, \ i > 1 \tag{7}$$

(содержательно это означает, что всё влияние в сетевой структуре сосредоточено у одного агента).

Действительно, справедливо соотношение

$$n^2 = \left(\sum_{i\in N} w_i\right)^2 = \sum_{i\in N} w_i^2 + 2\sum_{i>j} w_i w_j,$$

откуда

$$\sum_{i>j}(w_i - w_j)^2 = (n-1)\sum_{i\in N} w_i^2 - 2\sum_{i>j} w_i w_j =$$
$$= (n-1)\left(n^2 - 2\sum_{i>j} w_i w_j\right) - 2\sum_{i>j} w_i w_j = n^2(n-1) - 2n\sum_{i>j} w_i w_j.$$

Если выполняется (7), то правая часть последнего выражения принимает максимальное значение равное $n^2(n-1)$. При этом

$$\Delta = \frac{2}{n(n-1)}\sum_{i>j}(w_i - w_j)^2 = \frac{2}{n(n-1)} n^2(n-1) = 2n.$$

Таким образом, максимальное значение DF равно $k(n-k)$ и достигается в случае, когда в сетевой структуре имеется единственный элемент, обладающий ненулевой влиятельностью. □

Случай частично информированного центра. Рассмотрим теперь ситуацию частичной информированности центра: сетевая структура разбита на непересекающиеся *информационные подмножества*, внутри каждого из которых центр не различает агентов, однако для каждого подмножества знает количество агентов и их суммарную влиятельность.

Обозначим информационные подмножества через G_i, $i \in M = \{1, 2, \ldots, m\}$: $G_1 \cup \ldots \cup G_m = N$. Стратегией центра в данном случае является выбор объёма воздействия на каждое информационное подмножество, т. е. количества агентов k_iиз подмножества G_i, $i \in M$, на которое он оказывает управляющее воздействие (при этом в каждом подмножестве центр поддерживает случайно выбранных агентов). Суммарное количество агентов по-прежнему считаем равным k, а каждое k_i, разумеется, не превосходит количества агентов n_i в информационном подмножестве G_i:

$$\sum_{i\in M} k_i = k; \quad k_i \leqslant n_i, \ i \in M.$$

Как и в случае неинформированного центра, его полезность является случайной величиной. Найдём её математическое ожидание:

$$\mathrm{E}F = \mathrm{E}\left(\sum_{j\in N} w_j u_j\right) = \mathrm{E}\left(\sum_{i\in M}\sum_{j\in G_i} w_j u_j\right) = \sum_{i\in M}\sum_{j\in G_i} w_j E(u_j) =$$
$$= \sum_{i\in M}\sum_{j\in G_i} w_j \frac{k_i}{n_i} = \sum_{i\in M} k_i\left(\frac{1}{n_i}\sum_{j\in G_i} w_j\right) = \sum_{i\in M} k_i \overline{w}_i, \qquad (8)$$

где за w'' обозначена средняя влиятельность агентов, входящих в подмножество G_i.

Из соотношения (8) (которое, заметим, аналогично (2)) видно, что центру следует воздействовать на подмножества с максимальной средней влиятельностью. При этом наиболее выгодная для центра сеть описывается следующим утверждением.

Утверждение 2.12 (а). *В случае частичной информированности наиболее выгодной для центра является ситуация, в которой суммарное количество агентов в информационных подмножествах, средняя влиятельность в которых отлична от нуля, не превосходит* k.

Доказательство. Максимальное значение ожидаемой полезности центра (8) равно n:

$$\mathrm{E}F = \sum_{i\in M} k_i \overline{w}_i = \sum_{i\in M} \frac{k_i}{n_i}\sum_{j\in G_i} w_j \leqslant \sum_{i\in M}\sum_{j\in G_i} w_j = \sum_{j\in N} w_j = n.$$

Достигается это значение в том случае, когда $k_i = n_i$ для всех таких $i \in M$, что $\overline{w}_i > 0$. □

Наименее выгодную сеть описывает следующее утверждение.

Утверждение 2.12 (б). *В случае частичной информированности существует единственная наименее выгодная для центра ситуация, а именно та, которой средние влиятельности во всех информационных подмножествах одинаковы*:

$$\overline{w}_1 = \ldots = \overline{w}_m = 1. \qquad (9)$$

Доказательство. Не ограничивая общности, перенумеруем подмножества в порядке невозрастанию средних влиятельностей:

$$\overline{w}_1 \geqslant \ldots \geqslant \overline{w}_m$$

Предположим, что существует сеть, для которой условие (9) не выполнено, и при этом она является наименее выгодной для центра. Для этой сети $\overline{w}_1 > \overline{w}_m$, поэтому существует такой номер $l \in M$, что

$$\overline{w}_1 = \ldots = \overline{w}_l > \overline{w}_{l+1} \geqslant \ldots \geqslant \overline{w}_m. \qquad (10)$$

Тогда в силу леммы 1 можно построить сеть с меньшими средними влиятельностями первых l информационных подмножеств и одновременно большими средними влиятельностями остальных подмножеств с номерами от $l+1$ до n включительно (с сохранением соотношений (1) и (10)). Для такой сети значение целевой функции центра будет меньше, чем в исходной сети, что противоречит тому, что исходная сеть является наименее выгодной для центра. □

Утверждения 2.12 (а) и 2.12 (б) являются, по сути, обобщениями утверждений 2.10 (а) и 2.10 (б) соответственно, поскольку информационные подмножества могут трактоваться как мета-агенты со средней по множеству влиятельностью.

В заключение настоящего раздела отметим, что перспективным направлением дальнейших исследований является анализ различных вариантов информированности центра о структуре сети и их влияния на эффективность информационного управления.

2.7. Акциональная модель влияния

В данном разделе мы опишем, следуя работам [48, 50], формальную модель распространения действий в социальной сети и основанный на ней метод расчёта влияния. В этой модели базовым элементом анализа является действие, совершённое агентом (пользователем сети), поэтому модель названа акциональной.

Участниками сети будем считать агентов из фиксированного множества $N = \{1, 2, \ldots, n\}$, которые выбирают действия из фиксированного множества возможных видов действий $K = \{1, 2, \ldots, k\}$ в те или иные моменты времени из интервала T. Видом действия может быть создание (написание) поста, создание комментария к посту и т. д. Обозначим множество действий (создание конкретного поста, комментария и т. д.) через Δ и далее будем считать его конечным.

Каждое действие $a \in \Delta$ характеризуется тремя параметрами — совершившим его агентом, видом действия и моментом времени t, в который действие было совершено: $a(i, j, t)$, $i \in N$, $j \in K$, $t \in T$.

Определим функцию $\alpha(a)$, которая каждому действию $a \in \Delta$ ставит в соответствие совершившего его агента $\alpha \in N$.

Далее, пусть на множестве действий задано бинарное отношение частичного порядка «a является причиной b» (или, что будем далее считать эквивалентным, «b является последствием a»), обозначаемое следующим образом: $a \to b$.

Пример такого отношения в онлайновой социальной сети: a — создание поста, b — создание комментария к этому посту.

Будем считать, что заданное бинарное отношение удовлетворяет свойствам рефлексивности, антисимметричности и транзитивости.

Если $a \to b$ и $a \neq b$, но при этом не существует такого $c \in \Delta$, что $a \to c$ и $c \to b$, то будем говорить, что a является *непосредственной причиной* b (или, что будем далее считать эквивалентным, b является *прямым последствием* a). Это позволяет выделить класс бинарных отношений, в которых у каждого действия существует не более одной непосредственной причины. Будем называть такие бинарные отношения *однозначными*.

Приведём пример неоднозначного бинарного отношения. Пусть a — пост, b — комментарий к этому посту, c — другой пост, при этом комментарий b содержит ссылку на пост c. Тогда, если считать справедливым $a \to b$ и $c \to b$, бинарное отношение является неоднозначным.

Если задано множество $A \subseteq \Delta$, то можно определить множество всех действий, являющихся последствиями действий из A:

$$\pi(A) = \{b \in \Delta \mid \exists\, a \in A,\ a \to b\}.$$

Отметим, что для всех множеств $A \subseteq \Delta$ выполняется включение $A \subseteq \pi(A)$, которое справедливо в силу рефлексивности бинарного отношения.

Среди всех действий Δ выделим множество Δ^0 *начальных действий*, которые не являются последствиями какого-либо другого действия:

$$\Delta^0 = \{a \in \Delta \mid \forall\, b \in \Delta (b \to a) \Rightarrow (a = b)\}.$$

Заметим, что для однозначных бинарных отношений у каждого действия существует ровно одно начальное действие, являющееся его причиной. Поэтому множества $\pi(A)$ и $\pi(B)$ не пересекаются для любых непересекающихся $A, B \in \Delta^0$.

Как было сказано выше, существует множество методов для расчёта влиятельности пользователей онлайновых социальных сетей. Однако, как правило, за рамками рассмотрения остаётся вопрос о том, с чьей точки зрения и для каких целей оценивается влиятельность. Между тем этот вопрос является весьма важным, если трактовать влиятельность как способность побуждать других к тем или иным действиям.

Поэтому рассмотрим проблему расчёта влиятельности с точки зрения некоего управляющего органа (*центра*). Пусть центр определяет (исходя из каких-либо собственных соображений) значимость действий агентов в социальной сети (важно отметить, что значимые действия могут быть как желательными для центра, так и нежелательными). Для того, чтобы учитывать установки центра при расчёте влиятельности, введём в рассмотрение *значимость множества действий* — функцию $\Phi(S)$: $\Phi\colon 2^{\Delta} \to [0; +\infty)$.

Естественно предположить, что если к некоторому множеству действий добавить ещё действия, то значимость множества увеличится (по крайней мере, не уменьшится). Поэтому будем считать, что значимость множества действий (далее для краткости будем называть её просто значимостью) является монотонной функцией: если $A \subseteq B$, то $\Phi(A) \leqslant \Phi(B)$. Кроме того, примем естественное предположение о том, что хотя бы какие-то действия обладают положительной значимостью: $\Phi(\Delta) > 0$.

Важный класс функций значимости составляют *аддитивные* функции, для которых выполняется соотношение

$$\Phi(A \cup B) = \Phi(A) + \Phi(B)$$

для любых непересекающихся $A, B \in \Delta$.

Опишем теперь подход к определению влияния на основе акциональной модели. Будем сразу определять влияние мета-агента (или мета-пользователя), представляющего собой любое непустое подмножество множества агентов N. В реальной социальной сети эти подмножества могут формироваться различным образом, как на основе изначально заданных (например, при регистрации нового пользователя в онлайновой сети) индивидуальных свойств (характеристик) отдельных агентов, так и на основе заранее рассчитанных параметров (в том числе зависящих от взаимосвязей внутри сети). Подчеркнём, что мета-агентом является как каждый отдельный агент $i \in N$ (одноэлементное подмножество $\{i\}$), так и множество всех агентов N.

Для каждого мета-агента $I \subseteq N$ определим множество $\delta \subseteq \Delta$ всех совершённых им (т. е. входящими в множество I агентами) действий

$$\delta_I = \{a \in \Delta \mid \alpha(a) \in I\},$$

а также множество совершённых им начальных действий

$$\delta_I^0 = \{a \in \Delta^0 \mid \alpha(a) \in I\}.$$

Предварительное неформальное понимание влияния можно сформулировать следующим образом: влияние мета-агента $I \subseteq N$ на мета-агента $J \subseteq N$ велико, если деятельность агентов из множества J в достаточно большой степени обусловлена деятельностью агентов из множества I. Формализовать это понимание можно различным образом в зависимости от решаемой практической задачи. В данной работе мы будем исходить из следующих предположений:

1) интерес представляет влияние начальных действий, т. е. те пользователи, которые вводят в рассмотрение в сети те или иные материалы (в других случаях можно рассматривать и эффективных распространителей чужих материалов);

2) интерес представляет количество пользователей вне зависимости от их активности в сети, т. е. суммарное влияние на всех агентов сети будем считать нормированным.

При этих предположениях функцию влияния мета-агента I на мета-агента J можно определить следующим образом:

$$\chi(I,J) = \begin{cases} \dfrac{\Phi(\pi(\delta_I^0) \cap \delta_J)}{\Phi(\delta_J)}, & \Phi(\delta_J) > 0; \\ 0, & \Phi(\delta_J) = 0. \end{cases}$$

Далее будем считать, что $\Phi(\delta_J) > 0$ для любого $J \subseteq N$ (т. е. агентов, все действия которых в совокупности обладают нулевой значимостью, исключим из рассмотрения). Нетрудно видеть, что в этом случае справедливо соотношение

$$\chi(I,J) \leqslant \frac{\Phi(\pi(\delta_N^0) \cap \delta_J)}{\Phi(\delta_J)} = \chi(N,J) = 1.$$

Отметим важный частный случай, когда мета-агент J совпадает со всем множеством агентов (т. е. $J = N$) и функция влияния характеризует влияние мета-агента I на всю сеть, которое назовём *влиятельностью* и обозначим $\varepsilon(I)$:

$$\varepsilon(I) = \chi(I,N) = \frac{\Phi(\pi(\delta_I^0))}{\Phi(\Delta)}.$$

Сформулируем некоторые свойства введённой таким образом функции влияния.

Утверждение 2.13. *Функция влияния $\chi(I,J)$ является монотонной по первому аргументу, т. е. если $I_1 \subseteq I_2$, то для любого J выполняется неравенство $\chi(I_1,J) \leqslant \chi(I_2,J)$.*

Доказательство. Утверждение доказывает следующая цепочка соотношений:

$$\begin{aligned} I_1 \subseteq I_2 \;\; &\Rightarrow \;\; \delta_{I_1}^0 \subseteq \delta_{I_2}^0 \;\; \Rightarrow \;\; \pi(\delta_{I_1}^0) \subseteq \pi(\delta_{I_2}^0) \;\; \Rightarrow \\ &\Rightarrow \;\; \pi(\delta_{I_1}^0) \cap \delta_J \subseteq \pi(\delta_{I_2}^0) \cap \delta_J \;\; \Rightarrow \\ &\Rightarrow \;\; \Phi(\pi(\delta_{I_1}^0) \cap \delta_J) \leqslant \Phi(\pi(\delta_{I_2}^0) \cap \delta_J) \;\; \Rightarrow \\ &\Rightarrow \;\; \chi(I_1,J) \leqslant \chi(I_2,J). \end{aligned}$$ □

Утверждение 2.13 означает, что чем «больше» мета-агент (т. е. чем обширнее множество составляющих его агентов), тем больше его влияние, независимо от прочих обстоятельств.

Утверждение 2.14. *Если бинарное отношение является однозначным, а функция значимости — аддитивной, то функция влияния является аддитивной по первому аргументу, т. е. для любых*

$I_1, I_2, J \subseteq N$, $I_1 \cap I_2 = \varnothing$, *выполняется равенство*

$$\chi(I_1 \cup I_2, J) = \chi(I_1, J) + \chi(I_2, J).$$

Доказательство. Утверждение доказывает следующая цепочка равенств:

$$\chi(I_1 \cup I_2, J) = \frac{\Phi(\pi(\delta^0_{I_1 \cup I_2}) \cap \delta_J)}{\Phi(\delta_J)} = \frac{\Phi\big((\pi(\delta^0_{I_1}) \cup \pi(\delta^0_{I_2})) \cap \delta_J\big)}{\Phi(\delta_J)} =$$
$$= \frac{\Phi\big((\pi(\delta^0_{I_1}) \cap \delta_J) \cup (\pi(\delta^0_{I_2}) \cap \delta_J)\big)}{\Phi(\delta_J)} \overset{(*)}{=}$$
$$= \frac{\Phi(\pi(\delta^0_{I_1}) \cap \delta_J)}{\Phi(\delta_J)} + \frac{\Phi(\pi(\delta^0_{I_2}) \cap \delta_J)}{\Phi(\delta_J)} = \chi(I_1, J) + \chi(I_2, J).$$

Здесь ключевым является равенство $(*)$, которое вытекает из аддитивность функции Φ, а также того факта, что вследствие однозначности бинарного отношения множества $\pi(\delta^0_{I_1})$ и $\pi(\delta^0_{I_2})$ (и, следовательно, множества $\pi(\delta^0_{I_1}) \cap \delta_J$ и $\pi(\delta^0_{I_2}) \cap \delta_J$) не пересекаются. □

Ясно, что влиятельность мета-агента также в данном случае является аддитивной функцией: для любых непересекающихся множеств $I_1, I_2 \subseteq N$, выполняется равенство $\varepsilon(I_1 \cup I_2) = \varepsilon(I_1) + \varepsilon(I_2)$.

Примеры расчёта влиятельности пользователей реальных онлайновых социальных сетей можно найти в работах [48] (сеть Facebook) и [50] (сеть ВКонтакте).

Рассмотрим пример расчёта влиятельности пользователей онлайновой социальной сети ВКонтакте (vk.com)[29]. Будем считать, что значимыми для центра являются посты, в которых содержится ключевое слово «Назарбаев»[30] (в любых падежных формах), а также их репосты, комментарии и лайки к ним. В качестве интервала T будем рассматривать 2015 год (т. е. T — это промежуток от 0 часов 0 минут 0 секунд 1 января 2015 года до 23 часов 59 минут 59 секунд 31 декабря 2015 года).

Значимость действий для центра рассмотрим в двух несколько различающихся вариантах, имеющих разный содержательный смысл.

В данной ситуации целесообразно ограничиться рассмотрением следующих видов действий: 1) создание поста (оригинального поста или репоста), 2) создания комментария к посту, 3) выставление лайка посту, 4) выставление лайка комментарию. Следовательно, множество K состоит из четырёх элементов: $K = \{1, 2, 3, 4\}$.

[29] Анонимизированные данные были предоставлены для исследований компанией DSS Lab (dss-lab.ru).

[30] Фамилия президента Республики Казахстан.

Будем считать, что бинарное отношение причинности $a \to b$ выполнено в следующих случаях: a — создание поста, b — создание комментария к посту; a — создание поста или комментария, b — выставление ему лайка; a — создание поста, b — его репост. Также будем считать отношение причинности выполненным при совпадении a и b.

Поскольку в данном случае каждое действие оценивается отдельно, значимость совокупности действий $S \subseteq \Delta$ зависит аддитивно от каждого из них следующим образом:

$$\Phi(S) = \sum_{a \in S} \Phi(a).$$

Положим

$$\Phi(a) = \frac{1}{|\delta_{\alpha(a)}|}$$

(где $|\cdot|$ означает мощность множества), если a — пост с упоминанием ключевого слова, созданный в интервале T, или комментарий к такому посту, созданный в интервале T, или лайк такому посту или комментарию, созданный в интервале T, иначе $\Phi(a) = 0$. Такой способ расчёта значимости означает, что суммарная значимость действий каждого пользователя равна 1 (иначе говоря, значимость каждого пользователя одинакова с точки зрения центра).

Таким образом, получены все необходимые данные для расчёта влиятельности. Приведём некоторые результаты расчётов влиятельности отдельных пользователей (т. е. для одноэлементных множеств I).

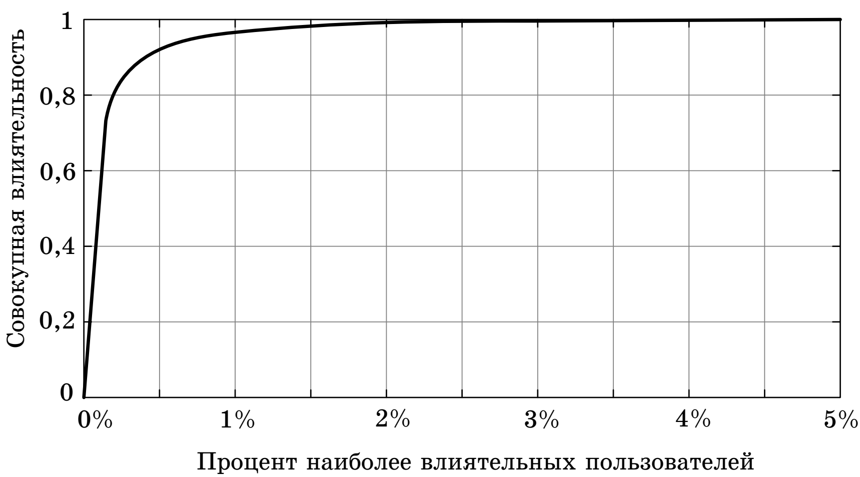

Рис. 54. Зависимость совокупной влиятельности пользователей от их количества

Оказалось, что совокупная влиятельность всего одного процента наиболее влиятельных пользователей составляет 96 % общей влиятельности всех пользователей, совокупная влиятельность двух процентов — 98 % общей влиятельности, а совокупная влиятельность пяти процентов — 100 % общей влиятельности (см. график зависимости доли влиятельности от процента наиболее влиятельных пользователей на рис. 54).

Таким образом, предложенный способ расчёта влиятельности позволяет эффективно выявлять небольшое множество пользователей, которые оказали наибольшее влияние на действия остальных пользователей сети в рамках указанных центром тематики и предпочтений.

В заключение данного раздела отметим, что акциональная модель является не столько жёстко фиксированным методом расчёта, сколько семейством методов, позволяющим учитывать различные аспекты влияния. Например, если для центра значимость разных пользователей различается, это может быть учтено путём модификации функции значимости.

Глава 3

МОДЕЛИ ИНФОРМАЦИОННОГО ПРОТИВОБОРСТВА В СОЦИАЛЬНЫХ СЕТЯХ

В работе [100] выделены пять уровней описания и анализа активных сетевых структур (примерами которых служат социальная сеть, толпа и др.). На первом (нижнем) уровне сеть рассматривается «в целом» (соответствующее описание, хотя и не является детализированным, обычно необходимо для экспресс-анализа общих свойств объекта). На втором уровне анализируются структурные свойства сети. На третьем уровне рассматривается информационное взаимодействие агентов. На четвёртом уровне ставятся и решаются задачи информационного управления. И, наконец, на пятом уровне производится описание и исследование информационного противоборства — взаимодействия субъектов, воздействующих на сеть каждый в своих интересах. Модель, используемая на некотором уровне перечисленной иерархии, учитывает результаты предыдущих уровней. Поэтому одно из условий возможности перехода к следующему уровню состоит в наличии достаточно простых (но адекватных моделируемой реальности) и сопряжённых моделей предыдущих уровней.

Для задачи описания информационного противоборства, решаемой на самом верхнем (пятом) уровне иерархии, необходимо иметь простые результаты анализа информационного взаимодействия агентов и информационного управления ими. Первый класс моделей, в которых удаётся конструктивно «сопрячь» всю цепочку от первого уровня до пятого, составляют модели социальных сетей, описываемых в терминах «задач о консенсусе» (или так называемых «марковских» моделей), в настоящей главе в разделах 3.1 и 3.2 рассматриваются соответствующие им теоретико-игровые модели информационного противоборства (см. также модели [40]).

В разделе 3.1 рассматриваются модели *распределённого информационного управления* членами социальных сетей. Для субъектов, осуществляющих информационные воздействия на агентов, формулируются условия согласования интересов (в общем случае, несовпадающих).

В разделе 3.2 рассматривается модель *информационного противоборства* для случая двух управляющих субъектов с несовпадающими интересами (защитника и нападающего). Проводится анализ *информационной эпидемии* (т. е. мнение распространяется в сети от одного активного агента к другому пассивному агенту) в социальной сети и защиты от неё. Для такой задачи информационного противоборства представлен алгоритм сведения к биматричной игре. Для частного случая социальной сети — полного графа — доказано, что существует хотя бы одно равновесие Нэша такой игры. Для биматричной игры также показано, что стратегическая рефлексия приводит к уменьшению числа равновесий (не более двух) Нэша и может привести к лучшим результатам для игроков.

Вторым удачным примером служит рассматриваемый в разделе 3.3 подход к построению теоретико-игровых моделей информационного противоборства, «надстраиваемых» над пороговыми моделями толпы. В работе [163] предложена модель толпы, рассматриваемой как множество агентов, демонстрирующих так называемое конформное поведение [16, 17, 205], т. е. осуществляющих бинарный выбор (действовать, быть активными и т. п. или бездействовать) с учётом решений, принимаемых другими агентами. В работе [21] введены в рассмотрение стохастические модели управления толпой, в которых некоторая часть агентов случайным образом «возбуждается» (всегда действует), а некоторая часть «иммунизируется» (никогда не действует). В случае, когда два подобных воздействия осуществляются различными субъектами, обладающими собственными несовпадающими предпочтениями относительно реализующегося «равновесного» состояния толпы, получаем ситуацию информационного противоборства этих субъектов, которая далее описывается в теоретико-игровых терминах.

Теоретико-игровые модели информационного противоборства над активными сетевыми структурами имеют приложения в задачах: обеспечения информационной безопасности онлайновых социальных сетей, противодействия деструктивным информационным воздействиям на социальные группы различного масштаба, предупреждения их массовых противоправных действий и др. (см. обзоры и обсуждения в настоящей книге и в [163, 252]).

3.1. Информационное противоборство: распределённый контроль и согласование интересов

Теоретико-игровая модель информационного противоборства. Общая постановка. Пусть существует множество *игроков*, имеющих возможность влиять на начальные мнения агентов и заинтересованных в формировании определённых их итоговых мнений. Отметим, что агенты в рассматриваемых нами моделях «пассивны» — они меняют свои мнения в соответствии с заданным линейным законом учитывая мнения других агентов. В отличие от агентов, игроки активны, имеют собственные интересы и возможность, выбирая собственные действия, влиять на агентов[31]. Опишем возникающую между игроками игру.

Обозначим: $M = \{1, 2, \ldots, m\}$ — множество игроков,

$$u_{ij} \in U_{ij} = [-r_{ij}; R_{ij}]$$

— действие j-го игрока по изменению мнения i-го агента, $r_{ij}, R_{ij} \geqslant 0$,

$$\boldsymbol{u} = \|u_{ij}\|, \quad \boldsymbol{u}_j = (u_{1j}, u_{2j}, \ldots, u_{nj}) \in U_j = \prod_{i \in N} U_{ij}, \quad u_i = \sum_{j \in M} u_{ij},$$

$u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ — вектор «воздействий», $g_j(X)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ — целевая функция j-го игрока, $i \in N$, $j \in M$.

Будем считать, что воздействия игроков на мнение каждого из агентов аддитивны. Тогда итоговое мнение будет

$$X_i(\boldsymbol{u}) = \sum_{j \in N} A_{ij}^{\infty} \left[x_j^0 + \sum_{k \in M} u_{jk} \right] = \sum_{j \in N} A_{ij}^{\infty} x_j^0 + \sum_{j \in N} A_{ij}^{\infty} \sum_{k \in M} u_{jk}, \quad i \in N. \tag{1}$$

Отметим, что каждый из игроков в общем случае имеет возможность влиять на начальные мнения всех агентов (в случае отсутствия такой возможности следует положить нижнюю и верхнюю границы соответствующего множества U_{ij} допустимых действий равными нулю).

Обозначая

$$G_j(\boldsymbol{u}) = g_j\big(X_1(\boldsymbol{u}), X_2(\boldsymbol{u}), \ldots, X_n(\boldsymbol{u})\big), \quad j \in M,$$

и считая, что игроки выбирают свои действия однократно, одновременно и независимо, получим игру $\Gamma = (M, \{U_j\}_{j \in M}, \{G_j(\cdot)\}_{j \in M})$ в нормальной форме, определяемую заданием соответственно множества игроков, их множеств допустимых действий и целевых функций [53]. Имея игру в нормальной форме, можно исследовать её равновесия, определять «на ней» кооперативные, повторяющиеся и другие виды игр (см. классификацию в [53]).

Пример 3.1. Пусть целевые функции игроков линейны:

$$g_j(X) = \sum_{i \in N} \beta_{ji} x_i^0, \quad j \in M.$$

[31] Отметим, что такой подход не исключает возможности совпадения некоторых агентов и игроков — совмещение двух ролей (управляющего органа и управляемой системы) одним субъектом.

Подставляя в целевые функции выражение (1), получим:

$$G_l(\boldsymbol{u}) = \sum_{i\in N} \beta_{li} \sum_{j\in M} A^{\infty}_{ij} x^0_j + \sum_{i\in N} \beta_{li} \sum_{j\in N} A^{\infty}_{ij} \sum_{k\in M} u_{jk}, \quad l \in M. \qquad (2)$$

От выбранных игроками действий зависит только второе слагаемое. Обозначим

$$\gamma_{lj} = \sum_{i\in N} \beta_{li} A^{\infty}_{ij}, \quad l \in M.$$

В силу линейности целевых функций игроков по их действиям, в рассматриваемой игре существует равновесие в доминантных стратегиях $\boldsymbol{u}^d$ [53], когда l-й игрок будет выбирать независимо от других игроков действие, максимизирующее $\sum_{j\in M} \gamma_{lj} u_{jl}$, т. е.

$$u^d_{jl} = \begin{cases} -r_{jl}, & \text{если } \gamma_{lj} < 0, \\ R_{jl}, & \text{если } \gamma_{lj} \geqslant 0, \end{cases} \quad j \in N,\ l \in M. \qquad (3)$$

Содержательно выражение (3) означает, что каждый игрок осуществляет на каждого агента максимально возможное воздействие, знак которого зависит от того, к каким итоговым изменениям мнения этого агента приведёт данное воздействие («ценности» этих изменений для игроков определяются величинами $\{\gamma_{lj}\}$). •

Пример 3.2. Пусть имеются два игрока, преследующих несовпадающие цели. Перенумеруем агентов таким образом, что первый игрок имеет возможность влиять на начальное мнение первого агента, а второй игрок — второго агента. Обозначим эти аддитивные воздействия $u_1 \in U_1$ и $u_2 \in U_2$ соответственно.

Тогда результирующие мнения агентов имеют следующий вид:

$$X_i(u_1, u_2) = \sum_{j\in N} A^{\infty}_{ij} x^0_j + A^{\infty}_{i1} u_1 + A^{\infty}_{i2} u_2, \quad i \in N. \qquad (4)$$

Обозначим $\boldsymbol{X}(u_1, u_2)$ — вектор мнений агентов с компонентами (4). Равновесие Нэша (u^*_1, u^*_2) имеет вид:

$$\begin{aligned} &\forall\, u_1 \in U_1 \quad g_1(\boldsymbol{X}(u^*_1, u^*_2)) \geqslant g_1(\boldsymbol{X}(u_1, u^*_2)), \\ &\forall\, u_2 \in U_2 \quad g_2(\boldsymbol{X}(u^*_1, u^*_2)) \geqslant g_2(\boldsymbol{X}(u^*_1, u_2)). \end{aligned} \qquad (5)$$

В силу достаточно простой аддитивной зависимости (4) результирующих мнений агентов от управлений (действий игроков), можно рассматривать на базе данной модели игры с фиксированной последовательностью ходов (иерархические игры) [35, 53, 69], содержательно интерпретируемые как игры «нападение-защита».

Рассмотренная в настоящем примере модель легко обобщается на случай, когда каждый из игроков может воздействовать на начальные мнения любого множества агентов. •

П р и м е р 3.3. Пусть имеются два игрока, каждый из которых имеет возможность влиять на начальное мнение одного из агентов из множеств $N_1 \subseteq N$ и $N_2 \subseteq N$ соответственно, причём $N_1 \cap N_2 = \varnothing$. Тогда действия игроков будут заключаться в выборе, на кого из «управляемых» ими агентов воздействовать. Так как множества возможных действий в этом случае конечны, рассчитав соответствующие выигрыши, получим стандартную биматричную игру [33], в которой можно аналитически искать равновесие в чистых и/или смешанных стратегиях. •

Отметим, что, формулируя теоретико-игровую информационного противоборства, мы предположили, что игроки выбирают свои действия однократно, одновременно и независимо, т. е. разыгрывают *игру в нормальной форме* [53]. Это же предположение останется в силе и в модели распределённого контроля, к описанию которой мы и переходим.

Распределённый контроль. Во многих реальных системах один и тот же агент оказывается подчинён одновременно нескольким управляющим органам — *центрам*, находящимся либо на одном, либо на различных уровнях иерархии. Первый случай называется *распределённым контролем* (английский аналог в теории контрактов — agency [156, 240]), второй — *межуровневым взаимодействием* [97, 108]. Наиболее ярким примером распределённого контроля являются *матричные структуры управления* [52, 106].

В настоящем разделе рассматривается распределённый контроль в социальных сетях, когда субъекты, осуществляющие информационные воздействия на членов социальной сети, могут иметь, в общем случае, несовпадающие интересы.

Условно систему с распределённым контролем (РК), состоящую из k управляющих органов — *центров* и одного управляемого субъекта — *агента*, можно представить в виде, приведённом на рис. 55.

В модели РК центры, осуществляющие управление агентом, оказываются вовлечёнными в «игру» (на рис. 55 эта «игра в нормальной форме» условно обозначена Γ_0; она разыгрывается «над» набором иерархических игр (Γ_1, Γ_2 или Γ_3 [98]), в каждой из которых поведение агента описывается гипотезой рационального поведения — ГРП [53]). Равновесие этой игры имеет достаточно сложную структуру. В частности, можно выделить два устойчивых режима взаимодействия центров — режим сотрудничества и режим конкуренции [108].

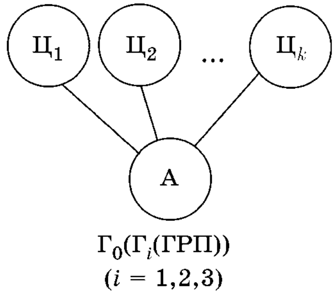

Рис. 55. Структура системы с распределённым контролем

В *режиме сотрудничества* центры действуют совместно, что позволяет добиваться требуемых результатов деятельности управляемого агента с использованием минимального количества ресурсов.

В *режиме конкуренции*, который возникает, если цели центров различаются достаточно сильно, ресурсы расходуются неэффективно.

Приведём, следуя [106], простейшую (базовую) модель РК, на основе которой затем сформулируем задачу распределённого контроля для социальной сети. Пусть организационная система (ОС) состоит из одного агента и k центров. Стратегией агента является выбор *действия* $y \in A$, что требует от него затрат $c(y)$. Каждый центр получает от деятельности агента «*доход*», описываемый функцией $H_i(y)$, и несёт затраты $\sigma_i(y)$ на изменение мнений и/или действий агента (далее — *затраты центра*), $i \in K = \{1, 2, \ldots, k\}$ — множеству центров. Таким образом, целевая функция i-го центра имеет вид

$$\Phi_i(\sigma_i(\cdot), y) = H_i(y) - \sigma_i(y), \quad i \in K, \tag{6}$$

а целевая функция агента:

$$f(\{\sigma_i(\cdot)\}) = \sum_{i\in K} \sigma_i(y) - c(y). \tag{7}$$

Порядок функционирования следующий: центры одновременно и независимо выбирают, какие мнения они будут пытаться формировать у агента (тем самым определяются затраты центров), который затем выбирает своё действие. Ограничимся рассмотрением множества *Парето-эффективных* равновесий Нэша игры центров, в которых, как показано в [67, 108] их стратегии имеют вид

$$\sigma_i(x, y) = \begin{cases} \lambda_i, & y = x, \\ 0, & y \neq x, \end{cases} \quad i \in K. \tag{8}$$

Содержательно, центры договариваются о том, что будут побуждать агента выбирать действие $x \in A$ — *план* — и вместе нести затраты, деля их между собой тем или иным эффективным по Парето образом (см. ниже). Такой режим взаимодействия центров называется режимом сотрудничества.

Из условий оптимальности по Парето следует, что сумма затрат центров в случае выполнения агентом плана, равна его затратам (обобщение принципа компенсации затрат [106] на системы с распределённым контролем), т. е.

$$\sum_{i \in K} \lambda_i = c(x). \tag{9}$$

Условие выгодности сотрудничества для каждого из центров можно сформулировать следующим образом: в режиме сотрудничества каждый центр должен получить полезность не меньшую, чем он мог бы получить, осуществляя воздействие на агента в одиночку (компенсируя последнему затраты по выбору наиболее выгодного для данного центра действия). Полезность i-го центра от «самостоятельного» взаимодействия с агентом в силу результатов решения соответствующих задач, приведённых в [106], равна

$$W_i = \max_{y \in A}(H_i(y) - c(y)), \quad i \in K. \tag{10}$$

Обозначим $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)$, через

$$S = \Big\{x \in A \mid \exists\, \lambda \in \mathbb{R}^k_+ : H_i(x) - \lambda_i \geqslant W_i,\ i \in K,\ \sum_{i \in K} \lambda_i = c(x)\Big\} \tag{11}$$

обозначим множество таких действий агента, для реализации которых сотрудничество выгодно для центров. Множество пар $x \in S$ и соответствующих векторов λ называется *областью компромисса*:

$$\Lambda = \Big\{x \in A,\ \lambda \in \mathbb{R}^k_+ \mid H_i(x) - \lambda_i \geqslant W_i,\ i \in K,\ \sum_{i \in K} \lambda_i = c(x)\Big\}. \tag{12}$$

Режим сотрудничества по определению имеет место, если область компромисса не пуста: $\Lambda \neq \varnothing$. В режиме сотрудничества агент получает нулевую полезность. Обозначим

$$W_0 = \max_{y \in A}\Big(\sum_{i \in K} H_i(y) - c(y)\Big). \tag{13}$$

Основным результатом исследования РК является следующий критерий: область компромисса не пуста тогда и только тогда, когда [108]:

$$W_0 \geqslant \sum_{i \in K} W_i. \tag{14}$$

Таким образом, критерием реализуемости режима сотрудничества является условие (14). Содержательно оно означает, что, действуя совместно, центры могут получить бо́льшую суммарную полезность, чем действуя в одиночку. Разность $W_0 - \sum_{i \in K} W_i$ может интерпретироваться как мера согласованности интересов центров и характеристика эмерджентности ОС.

Если условие (14) не выполнено и $\Lambda = \varnothing$, то имеет место режим конкуренции центров, характеризуемый так называемым *аукционным решением*. Упорядочим (перенумеруем) центры в порядке убывания величин $\{W_i\}$: $W_1 \geqslant W_2 \geqslant \ldots \geqslant W_k$. Победителем будет первый центр (т. е. имеющий максимальный ресурс), который предложит агенту, помимо компенсации затрат, полезность, на сколь угодно малую величину превышающую W_2.

Общая технология постановки и решения задач согласования интересов элементов систем с распределённым контролем. В соответствии с [11] технология заключается в следующем:

1. Описывается состав и структура системы, состоящей, как минимум, из нескольких управляющих органов и одного или нескольких управляемых ими агентов на более низких уровнях иерархии.

2. Задаётся порядок функционирования: центры одновременно и независимо выбирают управления и сообщают их агентам, которые затем, в свою очередь, одновременно и независимо выбирают свои действия при известных управлениях.

3. Задаются целевые функции и множества допустимых действий участников. При этом обычно предполагается, что управления центров аддитивно входят в целевую функцию каждого из агентов, а управления, сообщаемые каждым из центров разным агентам, также входят аддитивно в целевую функцию первого.

4. Обосновывается, что при рассмотрении эффективных по Парето равновесий Нэша игры центров последним достаточно ограничиться квазикомпенсаторными стратегиями вида (8) — в многоэлементных системах — декомпозирующими взаимодействие агентов [106]. Для этого целесообразно использовать общие результаты, приведённые в [67], в соответствии с которыми для любой Парето-эффективной стратегии любого центра найдётся стратегия не меньшей эффективности, в которой затраты этого центра будут отличны от нуля не более чем в k точках.

Тем самым задача поиска набора функций сводится к поиску[32] значений $k+1$ параметра — одного для всех центров согласованного плана и размеров затрат каждого из k центров.

5. Записывается балансовое условие типа (9), означающее, что суммарные затраты центров в случае выбора агентом требуемых действий должны в точности компенсировать затраты последнего.

6. Для каждого из центров вычисляется величина вида (10) его выигрыша от взаимодействия с агентом в одиночку.

7. Записывается область компромисса вида (12).

8. Вычисляется максимально возможное значение суммарного выигрыша центров при совместной деятельности вида (13).

9. Проверяется условие типа (14), гарантирующее непустоту области компромисса.

10.1. Если условие типа (14) выполнено, то возможен режим сотрудничества и задача заключается в поиске механизма компромисса — процедуры определения конкретной точки внутри области компромисса.

10.2. Если условие типа (14) не выполнено, то имеет место режим конкуренции центров, характеризуемый аукционным решением их игры. В этом случае проводится анализ эффективности этого решения, и, если оно признано неудовлетворительным, то исследуется возможность обеспечения согласованности интересов центров за счёт вмешательства органов управления более высоких уровней или использования концепции ограниченной рациональности.

Приведённая выше технология постановки и решения задачи согласования интересов элементов системы с распределённым контролем является общей. Проиллюстрируем её применение к задаче информационного управления в социальных сетях.

В соответствии с моделью, описанной выше в разделе 2.1, будем описывать агентов, входящих в социальную сеть, множеством $N = \{1, 2, \ldots, n\}$. Агенты влияют друг на друга, а степень этого влияния определяется их репутацией или доверием. У каждого агента в начальный момент времени имеется *мнение* по некоторому вопросу. Мнение всех агентов сети отражает вектор-столбец неотрицательных начальных мнений y^0 размерности n. Агенты в социальной сети взаимодействуют, обмениваясь мнениями. Мнение i-го агента в момент времени τ равно

$$y_i^\tau = \sum_{j \in N} \alpha_{ij} y_j^{\tau-1}. \qquad (15)$$

[32] Если центры управляют несколькими ($n \geqslant 2$) агентами, то число искомых параметров равно $n(k+1)$.

Если при многократном обмене мнениями мнения агентов сходятся к итоговому вектору мнений $Y = \lim_{\tau\to\infty} y^{\tau}$, то можно записать соотношение

$$Y = A^{\infty} y^0. \tag{16}$$

Таким образом, вектор результирующих мнений членов социальной сети в рассматриваемой модели однозначно определяется вектором их начальных мнений и матрицей влияния/доверия. Этот факт позволяет ставить и решать задачи информационного управления — поиска таких целенаправленных воздействий на начальные мнения агентов, которые приводили бы к требуемым итоговым мнениям. Далее формулируется задача согласования интересов органов, осуществляющих информационное управление.

Условия согласования интересов управляющих органов. Обозначим:

- $\{N_i\}_{i\in K}$ — совокупность подмножеств множества агентов N, где N_i — множество агентов, на которые может оказывать информационные воздействия i-й центр, $i \in K$;
- $K_j = \{k \in K \mid j \in N_k\}$ — множество центров, которые могут оказывать информационные воздействия на j-го агента, $j \in N$;
- $c_i(y^0, x)$ — затраты на изменение мнения i-го агента с y_i^0 на x_i, причём эти затраты могут в общем случае зависеть от векторов мнений всех агентов — вектора y^0 (начальные мнения до информационного воздействия) и вектора x (начальные мнения после информационного воздействия), $i \in N$;
- $H_i(x)$ — предпочтения i-го центра на множестве мнений агентов[33], $i \in K$;
- $\sigma_{ij}(y^0, x)$ — затраты i-го центра на осуществление информационных воздействий на j-го агента, $j \in N_i$, $i \in K$.

Содержательно, центры осуществляют информационные воздействия на агентов, меняя их мнения, причём на одного и того же агента могут воздействовать одновременно несколько центров (система с распределённым контролем). Если каждый из центров будет пытаться изменить мнение некоторого агента в свою сторону, то необходимо иметь модель того, как будет изменяться мнение агента под влиянием таких «противоречивых» воздействий. Соответствующих формальных моделей, хоть сколько-нибудь адекватных действительности, на сегодняшний день не существует, поэтому в настоящем

[33] Конечно, более естественным было бы считать, что предпочтения центров определены на множестве результирующих мнений агентов, но последние, в силу выражения (11), однозначно определяются начальными мнениями.

разделе мы ограничимся анализом условий согласованности интересов управляющих органов — когда они смогут договориться между собой, каковы должны быть формируемые мнения агентов (при этом можно быть уверенным, что ни один из агентов не будет получать «противоречивых» воздействий).

Целевая функция i-го центра имеет вид

$$\Phi_i\big(\{\sigma_{ij}(\cdot)\}_{j\in N_i}, y^0, x\big) = H_i(x) - \sum_{j\in N_i} \sigma_{ij}(y^0, x), \quad i \in K, \tag{17}$$

а целевая функция j-го агента:

$$f(\{\sigma_{ij}(\cdot)\}_{i\in K_j}, y) = \sum_{i\in K_j} \sigma_{ij}(y^0, x) - c_i(y^0, x). \tag{18}$$

Порядок функционирования следующий: центры одновременно и независимо выбирают свои управляющие воздействия и сообщают их агентам. Ограничимся, как и выше, рассмотрением множества Парето-эффективных равновесий Нэша игры центров, т. е. исследуем стратегии центров вида

$$\sigma_{ij}(y^0, x) = \begin{cases} \lambda_{ij}, & y_j = x_j, \\ 0, & y_j \neq x_j, \end{cases} \quad j \in N_i,\ i \in K. \tag{19}$$

Содержательно, центры договариваются о сотрудничестве, т. е. о том, что они будут совместно формировать единый вектор x мнений агентов и вместе нести соответствующие затраты.

Из условий оптимальности по Парето следует, что сумма затрат центров должна быть равна затратам агента, т. е.

$$c_i(y^0, x) = \sum_{j\in K_i} \lambda_{ji}, \quad i \in N. \tag{20}$$

Условие (20) означает, что центры должны распределить между собой затраты на изменение мнений каждого из агентов.

По аналогии с выражением (10) вычислим

$$W_i = \max_x \Big[H_i(x_{N_i}, y^0_{-N_i}) - \sum_{j\in N_i} c_i(y^0, x)\Big], \quad i \in K, \tag{21}$$

и

$$W_0 = \max_x \Big[\sum_{i\in K} H_i(x) - \sum_{j\in N} c_j(y^0, x)\Big]. \tag{22}$$

Обозначим $\lambda = \|\lambda_{ij}\|$, через

$$S = \Big\{x \in \mathbb{R}^n_+ \,|\, \exists\, \lambda \in \mathbb{R}^{nk}_+ : H_i(x) - \sum_{j\in N_i} \lambda_{ij} \geqslant W_i,\ i \in K,\ c_i(y^0, x) = \sum_{j\in K_i} \lambda_{ij},\ i \in N\Big\} \tag{23}$$

обозначим множество таких векторов мнений агентов, для реализации которых сотрудничество выгодно для центров. Множество пар векторов $x \in S$ и соответствующих матриц затрат центров λ назовём *областью компромисса* в задаче распределённого управления социальной сетью:

$$\Lambda = \Big\{ x \in \mathbb{R}^n_+,\ \exists\, \lambda \in \mathbb{R}^{nk}_+ \,|\, H_i(x) - \sum_{j \in N_i} \lambda_{ij} \geqslant W_i,\ i \in K,\ c_i(y^0, x) = \sum_{j \in K_i} \lambda_{ij},\ i \in N \Big\}. \tag{24}$$

Режим сотрудничества (условно говоря, в случае социальных сетей — *информационная кооперация*) по определению имеет место, если область компромисса (24) не пуста: $\Lambda \neq \varnothing$.

По аналогии с соответствующими критериями непустоты области компромисса (см. [11, 67, 106, 108]) можно доказать справедливость следующего утверждения.

Утверждение 3.1. *Согласование интересов управляющих органов, осуществляющих информационные воздействия на членов социальной сети, возможно тогда и только тогда, когда*

$$\max_x \Big[\sum_{i \in K} H_i(x) - \sum_{j \in N} c_j(y^0, x) \Big] \geqslant \sum_{i \in K} \max_x \Big[H_i(x_{N_i}, y^0_{-N_i}) - \sum_{j \in N_i} c_i(y^0, x) \Big]. \tag{25}$$

Условие (25) гарантирует возможность согласования интересов управляющих органов. Если оно не выполнено, то имеет место режим конкуренции. Если считать, что воздействия центров не «интерферируют», т. е. агент соглашается принять мнение того центра, который предложил максимальное поощрение, не обращая внимания на информацию от других центров, то будет иметь место аукционное решение. Содержательно, режим конкуренции соответствует *информационной войне*, победителем в которой будет центр, имеющий максимальный ресурс (21). Обозначим

$$x^i = \arg\max_x \Big[H_i(x_{N_i}, y^0_{-N_i}) - \sum_{j \in N_i} c_i(y^0, x) \Big], \quad i \in K.$$

Упорядочим (перенумеруем) центры в порядке убывания величин $\{W_i\}$: $W_1 \geqslant W_2 \geqslant \ldots \geqslant W_k$. По аналогии с анализом аукционных решений в [11, 108] можно доказать справедливость следующего утверждения.

Утверждение 3.2. *Если условие* (25) *не выполнено, то мнение членов социальной сети, сложившееся в результате информационных воздействий, будет* $(x_{N_1}, y^0_{-N_1})$

Умея анализировать модели распределённого контроля в социальных сетях, можно ставить и решать задачу более высокого уровня, а именно — *задачу раздела сфер влияния*, т. е. определения того, какие из подмножеств членов социальной сети будут контролироваться тем или иным управляющим органом. Исследование соответствующих кооперативных теоретико-игровых моделей представляется перспективным направлением дальнейших исследований.

Кроме того, в рамках рассматриваемых моделей социальных сетей агенты пока пассивны и неинтеллектуальны. Поэтому наделение агентов более сложным внутренним устройством (в первую очередь, наверное, за счёт использования *логических моделей*), которое позволяло бы моделировать их способность к нетривиальному *целевыполнению*, *целеполаганию*, *адаптации* и *рефлексии*, также представляется чрезвычайно многообещающим. Например, в идеале можно стремиться к предложенной в [107] обобщённой иерархической архитектуре агента, включающую следующие уровни (в порядке возрастания сложности) — см. рис. 56:

1) *исполнительный* (*оперативный*) *уровень*, на котором реализуются алгоритмы управления поведением при заданных частных целях и способах их достижения;
2) *тактический уровень*, на котором реализуются алгоритмы распознавания ситуаций и выбора соответствующего поведения;
3) *стратегический уровень*, на котором реализуются алгоритмы принятия решений о частных целях (задачах, распределении функций между агентами группы и т. д.), алгоритмы адаптации, обучения и рефлексии[34];
4) *уровень целеполагания*, на котором реализуются алгоритмы выбора глобальных целей и способов их достижения — механизмов функционирования.

Первым шагом рассмотрения «активных» и «интеллектуальных» агентов может быть разделение их мнений (информированности) и самостоятельно выбираемых ими на основании этих мнений действий (связь между информированностью и выбираемыми действиями может производиться, например, как и в задачах принятия решений [53, 106] и/или информационного управления, рассматриваемых в [110, 111, 142]).

Перспективным также видится рассмотрение задач управления в рамках *мультисетей*, для которых управляющие воздействия в раз-

---

[34] На данном уровне могут быть выделены четыре подуровня, соответствующих принятию решений, адаптации, обучению и рефлексии.

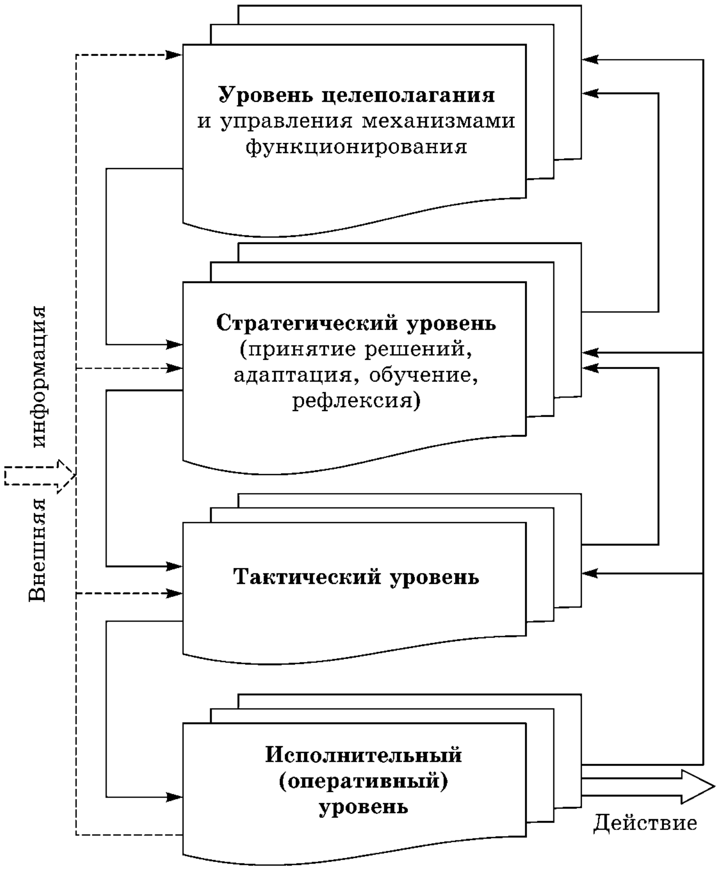

Рис. 56. Обобщённая иерархическая архитектура агента

ных сетях могут быть разнородными (например, через одну сеть у агентов создаётся впечатление нестабильности текущей ситуации, через вторую доводится определённая информация, а через третью осуществляется побуждение к действиям). Здесь может оказаться эффективным более полный учёт рефлексии — построение и исследование моделей *фантомных сетей*.

3.2. Информационная эпидемия и защита от неё

При моделировании социальных сетей возникает необходимость рассмотрения распространения мнений агентов в сети, т. е. когда мнение распространяется в сети от одного агента (активного) к другому агенту (пассивному). Такое распространение мнений рассматривается, например, в теории распространения инноваций (diffusion of innovations) — см. первую главу настоящей работы. Кроме того, часто (например, в области *информационной безопасности*) необходимо как можно раньше обнаружить каскады распространения в социальной сети. В этом случае выделяются два управляющих субъекта с несовпадающими интересами: защитник и атакующий, а также управляемые объекты — узлы в сети. Для каждого субъекта объект обладает своей ценностью. Защитник должен выбрать интервал сканирования сети и отслеживать состояние узлов, а атакующий — выбрать узел для атаки. Возникает информационное противоборство, и для его исследования требуется найти решение игры таких субъектов, т. е. найти множества их равновесных действий. В данном разделе приведена постановка задачи информационного противоборства в социальной сети, описан алгоритм сведения информационного противоборства защитника и атакующего к биматричной игре. Доказано, что в случае полного графа у игры всегда существует равновесие Нэша в чистых стратегиях.

Исходные данные и предпосылки. Между агентами в социальной сети существуют связи, заданные симметричной квадратной матрицей $G = (g_{km})_{k,m \in N}$. Элемент g_{km} равен 1 (ненулевое доверие), если между агентами k и m имеется связь, либо агенты совпадают (т. е. $g_{mm} = 1$ для всех m); в противном случае $g_{km} = 0$.

Наряду с агентами в ситуации участвуют два игрока — A и B. Игрок B стремится «инфицировать» сеть, т. е. распространить в сети некоторую информацию, мнение и пр. Для этого он может выбрать одного из агентов и «инфицировать» его, далее «инфекция» распространяется по сети. Распространение инфекции (здесь и далее кавычки будем опускать) будем моделировать наиболее простым способом: предположим, что в каждый момент дискретного времени инфицированным оказывается каждый агент, связанный с агентом, инфицированным в предыдущий момент.

Формально: имеется последовательность моментов времени $\tau = 0, 1, \ldots$ Пусть в момент τ имеется множество инфицированных агентов $S_\tau \subset N$. Тогда в следующий момент $\tau + 1$ инфицированными окажутся все агенты, инфицированные ранее, либо имеющие связь хотя бы с одним из инфицированных:

$$S_{\tau+1} = \{m \in N \mid \exists\, k \in S_\tau \quad g_{km} = 1\}. \tag{1}$$

Игрок A стремится противодействовать инфицированию. Он проводит периодический мониторинг сети (будем считать, что мониторинг осуществляется мгновенно), в ходе которого безошибочно выявляет множество инфицированных агентов. Выявив инфекцию, игрок A может мгновенно остановить её дальнейшее распространение.

Стратегией игрока B в данной игре является выбор единственно агента $j \in N$, с которого он начинает инфицирование сети.

Стратегией игрока A является выбор периода мониторинга — целого неотрицательного числа i. Выбор периода $i = 1$ означает, что инфицированным оказывается — при стратегии j игрока B — единственный агент j. Выбор $i = 2$ означает, что инфицированными оказываются агент j и все агенты, связанные с ним (т. е. такие агенты $m \in N$, что $g_{mj} = 1$). Будем считать, что множеству стратегий игрока A принадлежит также элемент ∞ («бесконечный период»), что означает отсутствие мониторинга.

В общем случае множеством инфицированных агентов при выборе игроками A и B стратегий i и j соответственно является множество S_i, определяемое за i шагов из рекуррентного соотношения (1) с начальным значением $S_1 = \{j\}$. Обозначим это множество через $\delta(i, j)$.

Завершая описание стратегий игроков A и B, примем следующее предположение: стратегии они выбирают одновременно и независимо, т. е. разыгрывается игра в нормальной форме.

Опишем теперь выигрыши игроков при выборе ими пары стратегий (i, j).

В рамках описываемой модели будем предполагать, что

1) каждый агент $k \in N$ обладает для игроков некоторой ценностью: a_k для игрока A и b_k для игрока B;
2) затраты игрока A на мониторинг с периодичностью i составляют c_i.

При этих двух предположениях выигрыши игроков A и B при выборе пары стратегий (i, j) составляют, соответственно,

$$f_{ij} = -\sum_{k \in \delta(i,j)} a_k - c_i, \tag{2}$$

$$h_{ij} = \sum_{k \in \delta(i,j)} b_k. \tag{3}$$

Для завершения описания модели необходимо ввести предположения об информированности игроков. Будем считать, что структура социальной сети (т. е. матрица G), а также параметры a_k, b_k, $k \in N$; c_i, $i = 0, 1, \ldots$, являются общим знанием [110] игроков A и B.

Алгоритм сведения к биматричной игре. Выше были определены стратегии, информированность и выигрыши игроков A и B, т. е. модель информационного противоборства в социальной сети была формализована. Однако применение формул (2) и (3) может оказаться неудобным для анализа конкретных случаев. Поэтому опишем алгоритм построения биматрицы игры (см., например, [53]), в которой на пересечении i-й строки и j-го столбца находится пара выигрышей (f_{ij}, h_{ij}).

Алгоритм основан на известном свойстве матрицы G (см., например, [138]), которое состоит в следующем: элемент (k, j) матрицы G^i (где $k \neq j$)[35] не равен нулю тогда и только тогда, когда расстояние между вершинами k и j (т. е. количество рёбер в минимальном пути, соединяющем эти вершины) не превосходит i.

Рассмотрим следующую последовательность $(n \times n)$-матриц:

$$Q_1 = E, \quad Q_i = \varphi(G^{i-1}), \quad i = 2, 3, \ldots, \tag{4}$$

где E — единичная матрица, а оператор φ преобразует все ненулевые элементы матрицы в 1. Легко видеть, что в j-м столбце матрицы Q_i единице равны элементы в точности тех строк $k \in N$, для которых агент k входит во множество $\delta(i, j)$.

Обозначим через f_i i-ю строку матрицы выигрышей игрока A, а за h_i — i-ю строку матрицы выигрышей игрока B. Введя также обозначения: $a = (a_1, \ldots, a_n)$, $b = (b_1, \ldots, b_n)$, $e = (1, \ldots, 1)$ — вектор-строка длины n, каждый элемент которой равен 1, можно записать $(i = 1, 2, \ldots)$:

$$f_i = -aQ_i - c_i e, \quad h_i = bQ_i. \tag{5}$$

Также в биматрицу выигрышей будет входить строка, соответствующая стратегии $i = \infty$, т. е. отсутствию мониторинга (в этом случае затраты на мониторинг игрока A являются нулевыми).

Таким образом, матрицы выигрышей игроков A и B могут быть последовательно определены по строкам при помощи соотношений (4) и (5).

Число строк биматрицы выигрышей можно считать конечным при выполнении следующего условия:

$$c_1 \geqslant c_2 \geqslant \ldots \tag{6}$$

(содержательно условие (6) означает, что чем чаще осуществляется мониторинг, тем больше (по крайней мере, не меньше) затраты на него). Действительно, для матрицы Q_i справедливо тождество $Q_{d+1} = Q_{d+2} = \ldots$, где d — диаметр (максимальное из попарных расстояний между двумя вершинами) компоненты связности сети с наибольшим диаметром. Поэтому справедливы соотношения (см. (5)): $f_{d+1} \leqslant f_{d+2} \leqslant \ldots$ Формально это означает, что стратегии проведения мониторинга $i = d+1, d+2, \ldots$ никогда не будут оптимальными для игрока A (и доминируются стратегией $i = \infty$). Содержательно: если период

[35] Элемент (k, k) матрицы G^i не равен нулю для любых k, i.

между двумя мониторингами настолько велик, что игрок B успевает инфицировать всю сеть (или, для несвязной сети — любую компоненту связности), то игроку A невыгодно проводить мониторинг.

Таким образом, для определения d на каждом шаге алгоритма надо проверить условие $Q_{i+1} = Q_i$, и, если для некоторого номера i оно выполнено, то $d = i + 1$. В этом случае размерность матриц выигрышей f и h составляет $(d + 1) \times n$. Будем считать, что последняя, $(d + 1)$-я строка биматрицы выигрышей соответствует стратегии $i = \infty$ и равна

$$(-aQ_{d+1}, bQ_{d+1}). \tag{7}$$

Пример 3.4. Пусть социальная сеть состоит из трёх агентов (рис. 57), на котором обозначены номера агентов.

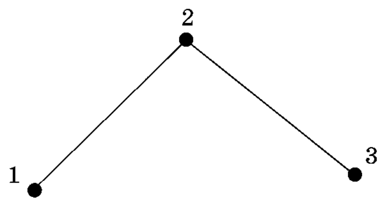

Рис. 57. Сеть в примере 3.4

Матрица, соответствующая данной сети, имеет следующий вид:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пусть, далее, ценности агентов для игроков A и B одинаковы и задаются вектором $a = b = (4; 1; 5)$, а затраты агента A на осуществление мониторинга таковы: $c_1 = 3$, $c_2 = 1$, $c_i = 0{,}5$, $i \geqslant 3$.

Тогда величины в соотношениях (4), (5) (с учётом (7)) приобретают следующий вид:

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q_i = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad i \geqslant 3, \ d = 2,$$

$$(f, h) = \begin{pmatrix} (-7; 4) & (-4; 1) & (-8; 5) \\ (-6; 5) & (-11; 10) & (-7; 6) \\ (-10; 10) & (-10; 10) & (-10; 10) \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Так как $d = 2$, значения c_i при $i \geqslant 3$ не играют никакой роли.

Биматрица (8) полностью описывает ситуацию информационного противоборства. Заметим, что в игре информационного противоборства (8) отсутствует равновесие Нэша в чистых стратегиях. •

Сеть, являющаяся полным графом. Опишем модель противоборства в социальной сети, задаваемой полным графом, т. е. графом, любые две вершины которого соединены ребром.

Рассмотрим следующий пример, отличающийся от примера 3.4 лишь структурой социальной сети.

Пример 3.5. Пусть социальная сеть состоит из трёх агентов (рис. 58), на котором обозначены номера агентов.

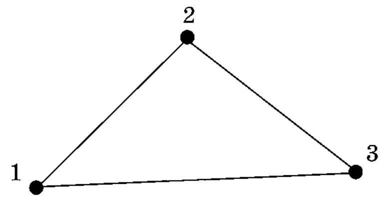

Рис. 58. Сеть в примере 3.5

Матрица, соответствующая данной сети, имеет следующий вид:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Остальные параметры такие же, как в примере 3.4: $a = b = (4; 1; 5)$, $c_1 = 3$, $c_2 = 1$, $c_i = 0{,}5$, $i \geqslant 3$.

В данном случае величины в соотношениях (4), (5) (с учётом (7)) приобретают следующий вид:

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q_i = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad i \geqslant 2,\ d = 1,$$

$$(f, h) = \begin{pmatrix} (-7; 4) & (-4; 1) & (-8; 5) \\ (-10; 10) & (-10; 10) & (-10; 10) \end{pmatrix}. \tag{9}$$

В игре (9) имеется ровно одно равновесие Нэша в чистых стратегиях: $i = 1$, $j = 3$, т. е. игрок A выбирает минимальный период мониторинга, а игрок B инфицирует агента 3. •

Оказывается, что полнота графа социальной сети является достаточным условием существования равновесия в игре информационного противоборства.

Утверждение 3.3. *В произвольной игре информационного противоборства на полном графе существует* (*хотя бы одно*) *равновесие Нэша*.

Доказательство. Поскольку в полном графе $d = 1$, биматрица игры имеет размерность $2 \times n$, причём во второй строке все элементы одинаковы.

Для каждой такой биматрицы имеет место ровно один из следующих двух возможных случаев.

1. Существует номер $j \in N$, для которого $f_{2j} \geqslant f_{1j}$. Тогда пара стратегий $(2; j)$ является равновесием Нэша.
2. Для всех $j \in N$ справедливо неравенство $f_{2j} < f_{1j}$. Тогда равновесием Нэша является пара стратегий $(1; j)$, где $j \in \mathrm{Arg}\max_{k \in N} h_{1k}$.

Таким образом, в любом случае существует хотя бы одно равновесие Нэша. □

Итак, рассмотрена задача информационного противоборства в социальной сети для двух игроков. Представлен алгоритм сведения задачи к биматричной игре. Для частного случая социальной сети — полного графа — доказано, что существует хотя бы одно равновесие Нэша такой игры. Можно задаться вопросом о том, приведёт ли стратегическая рефлексия (процесс и результат размышления агентов о том, какое действие выберут оппоненты) в соответствующей биматричной игре (или любой другой) к каким-либо преимуществам для агентов. Оказывается, может привести.

Стратегическая рефлексия агентов. Одним из основных вопросов теории игр является моделирование того, какие действия[36] изберут агенты (или иначе — какие действия им надо избрать) в той или иной ситуации. «Устойчивый» в том или ином смысле набор действий агентов обычно называется *решением игры*, что подчёркивает важность данного аспекта.

Поскольку выигрыш (значение целевой функции) агента зависит от действий других агентов, постольку выбор агента в большой степени зависит от того, как он учитывает (или не учитывает) возможные рассуждения оппонентов о выборе ими своего действия, т. е. как он осуществляет *стратегическую рефлексию*. Агент может, например, при принятии решения вообще не учитывать действия оппонентов, основываясь лишь на своей целевой функции (нулевой ранг стратегической рефлексии). Если так действуют все агенты, то мы получаем концепцию *максимального гарантированного результата* решения игры — каждый агент максимизирует свой наихудший результат при всевозможных действиях оппонентов.

[36] Отметим, что мы рассматриваем игры в нормальной форме, т. е. агенты выбирают действия однократно, одновременно и независимо друг от друга. В более сложных случаях (например, в многошаговых играх) следует различать действие агента и его стратегию.

Если агент считает, что оппоненты обладают нулевым рангом, то сам он обладает первым рангом стратегической рефлексии. При этом он выбирает своё наилучшее (т. е. максимизирующее целевую функцию) действие, ожидая от оппонентов выбора гарантирующих действий.

Если агент считает, что оппоненты выбрали второй ранг стратегической рефлексии, то сам он обладает третьим рангом и т. д. Таким образом, обладая k-м рангом, агент считает, что оппоненты обладают $(k-1)$-м. Выбирая любой ненулевой конечный ранг рефлексии, агент считает себя рефлексирующим иначе, чем оппоненты. Выбирая равновесие Нэша, агент считает всех участников игры рефлексирующими одинаковым образом.

Рассмотрим игру двух участников, число действий каждого из которых конечно. Как известно, такие игры называются *биматричными*, и целевые функции первого и второго агентов в них обычно задаются матрицами $A=(a_{ij})$ и $B=(b_{ij})$, вместе составляющими матрицу игры $(A,B)=(a_{ij},b_{ij})$.

Обозначим $I=\{1,2,\ldots,m\}$ — множество действий первого агента, $J=\{1,2,\ldots,n\}$ — множество действий второго агента. Введём следующие предположения. Пусть матрицы выигрышей таковы, что у каждого агента существует единственный наилучший ответ на любое действие оппонента:

$$\forall\, j\in J \quad \Big|\operatorname*{Arg\,max}_{i\in I} a_{ij}\Big|=1, \quad \forall\, i\in I \quad \Big|\operatorname*{Arg\,max}_{j\in J} b_{ij}\Big|=1 \tag{10}$$

(здесь и далее за $|M|$ обозначено количество элементов множества M).

Пусть, кроме того, максимальный гарантированный результат каждого агента достигается ровно на одном действии:

$$\Big|\operatorname*{Arg\,max}_{i\in I}\min_{j\in J} a_{ij}\Big| = \Big|\operatorname*{Arg\,max}_{j\in J}\min_{i\in I} b_{ij}\Big| = 1. \tag{11}$$

Условия (10) и (11), обеспечивающие однозначное соответствие между рангом рефлексии агента и его действием, далее будем считать выполненными.

Как было сказано выше, каждый агент может выбрать конечный ранг свой рефлексии. Это приводит к выбору соответствующего действия: обладая нулевым рангом, первый агент выбирает гарантирующую стратегию — действие

$$i_0=\arg\max_{i\in I}\min_{j\in J} a_{ij},$$

а обладая рангом $k\geqslant 1$ — действие

$$i_k=\arg\max_{i\in I} a_{ij_{k-1}}.$$

Аналогично для действий второго агента:

$$j_0 = \arg\max_{j\in J} \min_{i\in I} b_{ij} \quad \text{при нулевом ранге;}$$

$$j_k = \arg\max_{j\in J} b_{i_{k-1}j} \qquad \text{при ранге } k \geqslant 1.$$

Справедливо следующее утверждение.

Утверждение 3.4 [110]. *В биматричных играх неограниченное увеличение ранга рефлексии заведомо нецелесообразно, т. е. существует ранг рефлексии, превышение которого не приводит к новым действиям агентов. Максимальный целесообразный ранг рефлексии не превышает* $\max\{\min\{n, m+1\}, \min\{m, n+1\}\}$.

Из утверждения 3.4 следует, что множество допустимых действий по выбору ранга конечно. Поэтому мы можем перейти из исходной игры к *игре рангов* стратегической рефлексии, в которой стратегией агента является выбор ранга стратегической рефлексии (см. табл. 4).

Таблица 4. **Ранги рефлексии и действия агентов**

Ранг k	0	1	…	R
Действие первого агента	i_0	i_1	…	i_R
Действие второго агента	j_0	j_1	…	j_R

Верхняя оценка количества возможных попарно-различных пар стратегий составляет $R=|I|\times|J|=m\times n$. Тогда исходную биматричную игру можно преобразовать в биматричную игру $R \times R$.

Ясно, что некоторые строки и столбцы этой новой матрицы могут совпадать (это означает, что выбор агентами разных рангов приводит к одному и тому же действию в исходной игре). Отождествив совпадающие строки и столбцы, мы получаем матрицу новой игры, которую будем называть *игрой выбора ранга стратегической рефлексии*, или для краткости *игрой рангов*.

В силу того, что $i_k \in I$, $j_k \in J$, все действия агентов в игре рангов соответствуют действиям в исходной игре. Следовательно, справедливым является следующее утверждение.

Утверждение 3.5. *Матрица выигрышей в игре рангов является подматрицей матрицы исходной биматричной игры.*

Утверждение 3.5 наводит на мысль о том, что при переходе к игре рангов равновесия могут исчезать (т. е. отсутствовать в матрице игры рангов). Действительно, приведём пример биматричной игры.

Пример 3.6. Пусть

$$\begin{pmatrix} (2,3) & (0,0) & (3,2) \\ (0,0) & (4,4) & (0,1) \\ (3,2) & (1,0) & (2,3) \end{pmatrix}.$$

Чтобы построить матрицу игры рангов, проанализируем выбор агентов при том или ином ранге рефлексии (см. табл. 5).

Таблица 5. **Ранги рефлексии и действия агентов в примере 3.6**

Ранг k	0	1	2	…
Действие первого агента	3	1	3	…
Действие второго агента	3	1	3	…

Таким образом, матрица игры рангов выглядит следующим образом:

$$\begin{pmatrix} (2,3) & (3,2) \\ (3,2) & (2,3) \end{pmatrix}.$$

Нетрудно видеть, что равновесная пара выигрышей исходной игры (4, 4) исчезла при переходе к игре рангов. •

Возникает вопрос: могут ли при переходе к игре рангов появляться новые равновесия (которых не было в исходной игре)? Оказывается, что это невозможно.

Утверждение 3.6. *Для произвольной биматричной игры переход к игре рангов не приводит к появлению новых равновесий.*

Доказательство. Пусть, как и ранее, I — множество действий первого агента, J — множество действий второго агента. Пусть, далее, $I' \subseteq I$ и $J' \subseteq J$ — множества действий первого и второго агентов соответственно в игре рангов.

Рассмотрим пару действий (i_u, j_v), $i_u \in I'$, $j_v \in J'$, являющуюся равновесием игры рангов.

Покажем сначала, что наилучшим ответом второго игрока на действие первого i_u в исходной игре является j_v. Действительно, наилучший ответ на множестве J входит в J' (по правилу построения игры рангов), поэтому наилучший ответ на множестве J' такой же, как наилучший ответ на множестве J. Но наилучший ответ на множестве J' — это как раз j_v (по определению равновесия[37]).

[37] Напомним, что под равновесием мы понимаем равновесие Нэша.

Аналогично наилучшим ответом первого игрока на стратегию второго j_v в исходной игре является i_u. Поэтому пара действий (i_u, j_v) является равновесием исходной игры.

В силу произвольности выбора равновесной пары получаем, что любое равновесие игры рангов является равновесием исходной игры, т. е. новых равновесий не появится. □

Итак, при переходе к игре рангов новые равновесия не появляются (утверждение 3.6), а существующие могут исчезать (пример 3.6). Относительно количества равновесий в игре рангов справедливо следующее утверждение (которое существенно использует условия (10) и (11)).

Утверждение 3.7. *В игре рангов существует не более двух равновесий.*

Доказательство. Пусть в игре рангов существует три различных равновесия: (i_u, j_v), $(i_{u'}, j_{v'})$ и $(i_{u''}, j_{v''})$. По утверждению 3.3 они являются равновесиями и в исходной игре. Тогда в силу (10) $i_u \neq i_{u'} \neq i_{u''}$. Без ограничения общности предположим, что $u = \max[u; u'; u'']$. Поскольку в равновесии действие агента является наилучшим ответом на действие оппонента, справедливы следующие соотношения: $i_u = i_{v+1} = i_{u+2} = i_{v+3} = i_{u+4} = \ldots$; $j_v = j_{u+1} = j_{v+2} = \ldots$ Аналогичные соотношения верны для $i_{u'}$, $i_{u''}$. Следовательно, $i_{u+1} = i_{u'}$, $i_u = i_{u''}$. Но тогда $i_u = i_{u''}$. Полученное противоречие доказывает утверждение 3.7. □

Следует отметить, что в некоторых случаях любой исход игры рангов даёт обоим игрокам лучший результат, чем равновесие. Приведём пример такой биматричной игры:

Пример 3.7. Пусть

$$\begin{pmatrix} (6,10) & (0,0) & (10,6) \\ (0,0) & (5,5) & (0,1) \\ (10,6) & (1,0) & (6,10) \end{pmatrix}.$$

Равновесие приводит к паре выигрышей $(5, 5)$, что хуже (для обоих агентов) любого из исходов игры рангов:

$$\begin{pmatrix} (6,10) & (10,6) \\ (10,6) & (6,10) \end{pmatrix}. \quad \bullet$$

Перспективным представляется исследование игр рангов, «надстроенных» над биматричными играми, в которых отсутствует равновесие Нэша в чистых стратегиях. Например, в работе [70] показано, что в игре рангов не может быть больше двух равновесий Нэша в чистых стратегиях и что у равновесных по Нэшу стратегий первого и второго игрока ранги рефлексии отличаются не больше, чем на единицу. В работе [71] рассмотрен вопрос о влиянии игры рангов на смешанные равновесия по Нэшу в матричных играх, для биматричных игр данный вопрос остаётся открытым.

3.3. Информационное противоборство в управлении толпой

В настоящем разделе рассматривается проблематика информационного противоборства, в основном, на примере такой активной сетевой структуры, как толпа. Сначала описывается модель толпы (на основе результатов работы [163]), затем описывается информационное противоборство в рамках стохастических моделей управления толпой (на основе результатов работы [21]). Далее приводятся результаты анализа теоретико-игровых моделей информационного противоборства в терминах игр в нормальной форме (для которых характеризуются равновесия Нэша и равновесия в безопасных стратегиях), а также иерархических и рефлексивных игр (см. [103]). Многочисленные примеры содержат аналитические зависимости равновесий от параметров моделей.

Модель толпы

Обозначим через $N=\{1,\ldots,n\}$ конечное множество агентов. Агент $i\in N$, находящийся в толпе, характеризуется своим *решением* $x_i\in\{0;1\}$ («бездействие» или «действие») и своим *порогом* $\theta_i\in[0;1]$, определяющим, будет ли агент действовать при той или иной *обстановке* (векторе x_{-i} решений всех остальных агентов); т. е. агент выбирает своё действие как *наилучший ответ* (Best Response — BR) на обстановку:

$$x_i=\mathrm{BR}_i(x_{-i})=\begin{cases}1, & \text{если } \dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{j\neq i}x_j\geqslant\theta_i,\\[2ex] 0, & \text{если } \dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{j\neq i}x_j<\theta_i.\end{cases}\qquad(1)$$

Поведение, описываемое выражением (1), называется *пороговым* (см. пионерскую работу [205] и обзоры в работах [16, 17, 166, 241]; отметим, что в статье [16, 17] приведены примеры целевых функций агентов, приводящих к наилучшему ответу (1)).

Рассмотрим *модель динамики коллективного поведения* [163]: в начальный (нулевой) момент времени все агенты бездействуют, далее в каждый из последующих моментов времени агенты одновременно и независимо действуют в соответствии с процедурой (1). Обозначим

$$\begin{aligned} &Q_0 = \varnothing, \\ &Q_1 = \{i \in N \mid \theta_i = 0\}, \\ &Q_k = Q_{k-1} \cup \{i \in N \mid \#Q_{k-1} \geqslant n\theta_i\}, \quad k = 2, \ldots, n-1, \end{aligned} \tag{2}$$

где # обозначает мощность множества, Q_k — множество агентов, действующих на k-м шаге. Очевидно $Q_0 \subseteq Q_1 \subseteq \ldots \subseteq Q_n \subseteq N$. Обозначим через $\theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n)$ — вектор порогов агентов. Вычислим показатель:

$$q(\theta) = \min\left\{k = \overline{0, n-1} \mid Q_{k+1} = Q_k\right\}.$$

Равновесие коллективного поведения (РКП) определяется как [163]

$$x_i^*(\theta) = \begin{cases} 1, & \text{если } i \in Q_{q(\theta)}, \\ 0, & \text{если } i \in N \backslash Q_{q(\theta)}, \end{cases} \qquad i \in N.$$

Величина

$$x^* = \frac{\#Q_{q(\theta)}}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i \in N} x_i^*(\theta) \in [0; 1]$$

характеризует «состояние толпы» — долю действующих в РКП агентов. Показано [162, 163], что РКП является одним из равновесий Нэша игры агентов с наилучшим ответом (1).

Пусть число агентов велико. Обозначим через $F(\cdot)\colon [0; 1] \to [0; 1]$ *функцию распределения порогов* агентов ($F(\cdot)$ — неубывающая функция, определённая на единичном отрезке (множестве возможных значений порогов агентов), в каждой точке непрерывная слева и имеющая предел справа).

Предположим, что известна доля x^k агентов, действующих на k-м шаге, $k = 0, 1, \ldots$ Для последующих шагов справедливо рекуррентное соотношение, описывающее динамику поведения агентов, принимающих решения в соответствии с выражением (1) [162, 205]:

$$x^{l+1} = F(x^l), \tag{3}$$

где $l = k, k+1, \ldots$ — моменты времени.

Положения равновесия дискретной динамической системы (3) определяются начальной точкой x^0 (далее, если не оговорено особо, считается, что $x^0 = 0$) и точками пересечения графика функции $F(\cdot)$ с биссектрисой первого квадранта (в силу свойств функции распределения одним из потенциальных равновесий является единица):

$$F(x) = x. \tag{4}$$

Устойчивыми могут быть точки равновесия системы (3) (РКП является одной из точек равновесия), в которых график функции $F(\cdot)$ пересекает биссектрису, приближаясь к ней «слева-сверху». Обозначим через $y = \inf\{x : x \in (0, 1],\ F(x) = x\}$ наименьший отличный от нуля корень уравнения (4). В соответствии с выражениями (2) и (3) РКП будет точка [40]:

$$x^* = \begin{cases} y, & \text{если } \forall\, z \in [0, y] \ \ F(z) \geqslant z, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases} \tag{5}$$

Модель информационного противоборства

Рассмотрим толпу как объект управления, осуществляемого двумя субъектами — *центрами*. Так как поведение динамической системы (3), описывающей изменение во времени доли действующих агентов, определяется функцией распределения порогов $F(\cdot)$, будем анализировать управленческие воздействия, приводящие к изменению этой функции распределения.

Отметим, что в работе [163] решалась задача определения множества/доли первоначально возбуждаемых агентов или/и функции распределения их порогов, приводящих к требуемому равновесию. В рассматриваемых в настоящей работе моделях агенты возбуждаются «самостоятельно» — см. выражение (2).

Рассмотрим две предложенные в работе [21] модели воздействия со стороны центров на функцию распределения порогов агентов.

Модель I. Пусть в результате управленческого воздействия порог каждого агента независимо от других агентов может стать равным нулю с одинаковой для всех агентов вероятностью $\alpha \in [0; 1]$. Так как в соответствии с выражением (1) агенты, имеющие нулевые пороги, выбирают единичные действия независимо от действий других агентов, параметр α может интерпретироваться как доля первоначально *возбуждаемых* агентов [21].

Пусть в результате управленческого воздействия порог каждого агента независимо от других агентов может стать равным единице с одинаковой для всех агентов вероятностью $\beta \in [0; 1]$. Так как, в соответствии с выражением (1), агенты, имеющие единичные пороги, действовать не будут (точнее — будут, если действуют все остальные агенты), параметр β может интерпретироваться как доля первоначально «*иммунизируемых*» агентов [21].

В работе [21] рассмотрен случай информационного противоборства, когда имеются два управляющих субъекта — *центра* и доля $\alpha \in [0; 1]$ агентов «возбуждается» первым центром, а доля $\beta \in [0; 1]$ агентов «иммунизируется» (или каждый агент независимо с соответствующей вероятностью может быть возбуждён или/и иммунизирован) вторым центром. Для определённости (хотя возможны и другие варианты, приводящие к другим результатам) предположим, что если некоторый агент возбуждается и иммунизируется одновременно, то его порог не меняется. Показано [21], что, в рамках предположения о «бесконечном» числе агентов, функция распределения порогов агентов имеет вид:

$$F_{\alpha,\beta}(x) = \begin{cases} \alpha(1-\beta) + (1-\alpha-\beta+2\alpha\beta)F(x), & x \in [0;1), \\ 1, \quad x = 1. \end{cases} \tag{6}$$

Обозначим через $x^*(\alpha,\beta)$ РКП (5), соответствующее функции распределения (6), через

$$y_{\alpha,\beta} = \inf\{x\colon x \in (0,1],\ F_{\alpha,\beta}(x) = x\}$$

— наименьший отличный от нуля корень уравнения $F_{\alpha,\beta}(x) = x$. Тогда

$$x^*(\alpha,\beta) = \begin{cases} y_{\alpha,\beta}, & \text{если } \forall\, z \in [0, y_{\alpha,\beta}] \;\; F_{\alpha,\beta}(z) \geqslant z, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases} \tag{7}$$

Из выражений (4) и (6) можно найти пары (α,β), которые приводят к реализации заданного РКП (7).

Обозначим через

$$\Omega(x) = \{(\alpha,\beta) \in [0;1]^2 \mid x^*(\alpha,\beta) = x\}$$

множество комбинаций управлений, *реализующих* заданное значение $x \in [0;1]$ как РКП.

Обозначим через

$$W = \bigcup_{(\alpha,\beta)\in[0;1]^2} x^*(\alpha,\beta)$$

множество достижимости. Для проводимого далее теоретико-игрового анализа существенны полученные в работе [21] результаты о том, что $x^*(\alpha,\beta)$ монотонно (нестрого) возрастает по α и монотонно (нестрого) убывает по β; а для строгой монотонности достаточно выполнения условия

$$F(0) > 0, \quad F(1-0) < 1. \tag{8}$$

В работе [21] также получены достаточные условия (сформулированные в терминах свойств функции распределения порогов) реализуемости заданной точки $x \in [0;1]$ как РКП при некоторых управлениях $(\alpha,\beta) \in [0;1]^2$.

Модель II. Рассмотрим ситуацию информационного противоборства, когда первый центр добавляет к исходному множеству N агентов k «провокаторов» с нулевыми порогами, а второй центр добавляет l «иммунизаторов» с единичными порогами. Считая, что число агентов n велико, будем пользоваться непрерывным приближением: $\delta = k/n$, $\gamma = l/n$, считая $\delta, \gamma \in \mathbb{R}^1_+$, в рамках которого, как показано в работе [21], функция распределения порогов агентов примет вид:

$$F_{\delta,\gamma}(x) = \begin{cases} \dfrac{\delta + F(x)}{1+\delta+\gamma}, & x \in [0; 1), \\ 1, & x = 1. \end{cases} \tag{9}$$

Обозначим через $x^*(\delta,\gamma)$ РКП (5), соответствующее функции распределения (9), через

$$y_{\delta,\gamma} = \inf\{x\colon x \in (0,1],\ F_{\delta,\gamma}(x) = x\}$$

— наименьший отличный от нуля корень уравнения $F_{\delta,\gamma}(x) = x$. Тогда

$$x^*(\delta,\gamma) = \begin{cases} y_{\delta,\gamma}, & \text{если } \forall\, z \in [0, y_{\delta,\gamma}]\ \ F_{\delta,\gamma}(z) \geqslant z, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases} \tag{10}$$

Доказано [21], что в модели II $W = (0; 1]$, а если выполнено $F(0) = 0$, то множество $W = [0; 1]$.

Обозначим через

$$\Lambda(x) = \{(\delta,\gamma) \in \mathbb{R}^2_+ \mid x^*(\delta,\gamma) = x\}$$

множество комбинаций управлений, реализующих заданное значение $x \in [0; 1]$ как РКП.

Для исследования теоретико-игровых моделей взаимодействия центров нам потребуется результат, который доказывается полностью по аналогии с утверждениями 3 и 4 в работе [21].

Утверждение 3.8. *В модели II РКП* $x^*(\delta,\gamma)$:

1) *монотонно* (*нестрого*) *возрастает по* δ; *а для строгой монотонности достаточно выполнения условия*: $F(1-0) < 1$ *или* $\gamma > 0$;

2) *монотонно* (*нестрого*) *убывает по* γ; *а для строгой монотонности достаточно выполнения условия*: $F(0) > 0$ *или* $\delta > 0$.

Пример 3.8. В качестве примера функции распределения порогов агентов рассмотрим равномерное распределение $F(x) = x$, для которого $x^*(\delta,\gamma) = \delta/(\delta+\gamma)$, $\Lambda(x) = \{(\delta,\gamma) \in \mathbb{R}^2_+ \mid \gamma/\delta = (1/x - 1)\}$. •

Сделав маленькое отступление, отметим, что в социально-экономических и организационных системах в случае, когда существует несколько субъектов, заинтересованных в тех или иных состояниях управляемой системы (например, сети взаимодействующих агентов) и имеющих возможность оказывать на неё управляющие воздействия (так называемая *система с распределённым контролем* [54, 108, 250]), возникает, как и в рассматриваемом нами случае, взаимодействие между этими субъектами, которое в случае информационных воздействий, оказываемых ими на объект управления, называется *информационным противоборством* (см. обзор в текущей работе и в работе [99], а также раздел 3.1).

Такие ситуации обычно описываются игрой в нормальной форме между центрами, причём выбираемые центрами стратегии, в свою очередь определяют параметры игры между агентами [250]. Примерами служат модели информационного противоборства в социальных сетях (см. предыдущие разделы главы 3, а также [40]). Как отмечается [249], возможны и более сложные ситуации, когда управленческие воздействия «несимметричны» — например, в ситуации «нападение/защита» один центр воздействует на начальные состояния агентов, а другой (одновременно с первым или уже зная его выбор) изменяет структуру связей между ними или/и их пороги. Такие ситуации могут быть описаны в рамках моделей иерархических игр.

Далее рассматривается ряд теоретико-игровых моделей взаимодействия центров, результаты информационных воздействий которых на толпу определяются выражениями (6) и (7) в рамках модели I или выражениями (9) и (10) в рамках модели II.

Игра центров в нормальной форме

Модель I. Предположим, что имеются два центра, которые осуществляют информационное воздействие на толпу, разыгрывая *игру в нормальной форме*, т. е. выбирая свои стратегии ($\alpha \in [0;1]$ и $\beta \in [0;1]$ соответственно) однократно, одновременно и независимо. Пусть *целевые функции* первого и второго центров имеют соответственно вид:

$$f_\alpha(\alpha,\beta) = H_\alpha(x^*(\alpha,\beta)) - c_\alpha(\alpha), \tag{11}$$

$$f_\beta(\alpha,\beta) = H_\beta(x^*(\alpha,\beta)) - c_\beta(\beta), \tag{12}$$

причём *выигрыш* первого центра $H_\alpha(\cdot)$ — возрастающая функция (он заинтересован в максимизации числа возбуждённых агентов), а выигрыш второго центра $H_\beta(\cdot)$ — убывающая функция (он заинтересован в минимизации числа возбуждённых агентов), а обе функции *затрат* $c_\alpha(\cdot)$ и $c_\beta(\cdot)$ — строго возрастающие и $c_\alpha(0) = c_\beta(0) = 0$.

Коль скоро описана игра в нормальной форме, возникает набор типовых для теории игр вопросов [53, 245]: каково *равновесие Нэша* (α^*, β^*) игры центров, в каких ситуациях оно доминирует с точки зрения центров ситуацию *статус-кво* — РКП в отсутствие управления (т. е. когда выполнено $f_\alpha(\alpha^*, \beta^*) \geqslant f_\alpha(0,0)$, $f_\beta(\alpha^*, \beta^*) \geqslant f_\beta(0,0)$), каково множество Парето-эффективных ситуаций, когда существует *равновесие в доминантных стратегиях* (РДС) и т. п.

Обозначим через

$$f(\alpha, \beta) = f_\alpha(\alpha, \beta) + f_\beta(\alpha, \beta)$$

утилитарную функцию коллективной полезности (ФКП) [91]. Пару стратегий центров

$$(\widehat{\alpha}; \widehat{\beta}) = \arg \max_{(\alpha,\beta)\in[0;1]^2} f(\alpha, \beta)$$

назовём *утилитарным решением*.

Роль полученных в работе [21] результатов и результата утверждения 3.8 для теоретико-игрового анализа заключается в следующем. Целевые функции центров (11) и (12) зависят как от их стратегий (α и β или δ и γ), так и от РКП, зависящего, в свою очередь, от этих стратегий. Свойства монотонной зависимости РКП от стратегий центров (непрерывность этой зависимости, если требуется, может быть проверена в каждом конкретном случае), а также реализуемость всего единичного отрезка в качестве РКП при выборе центрами соответствующих стратегий, дают возможность «транслировать» свойства функций выигрыша и затрат на зависимость этих параметров непосредственно от стратегий центров. Так, например, если $H_\delta(x^*(\delta, \gamma))$ — возрастающая функция x^*, то в рамках условий утверждения 3.8 выигрыш первого центра является возрастающей функцией его стратегии, и т. д.

Простейшим является случай *игры с противоположными интересами*, в которой первый центр заинтересован в возбуждении максимального числа агентов, а второй — наоборот. Без учёта затрат на управление (считая $c_\alpha(\cdot) \equiv 0$, $c_\beta(\cdot) \equiv 0$) из выражений (11) и (12) получим

$$\widehat{f}_\alpha(\alpha, \beta) = x^*(\alpha, \beta), \quad \widehat{f}_\beta(\alpha, \beta) = 1 - x^*(\alpha, \beta). \tag{13}$$

При этом, очевидно, $f(\alpha, \beta) \equiv 1$. Из неубывания $x^*(\alpha, \beta)$ по α и невозрастания по β следует справедливость следующего утверждения 3.9, которое (как и его «аналоги» для модели II — см. утверждения 3.11 и 3.12 далее), с одной стороны, в определённому смысле, тривиально, так как является следствием монотонности целевых функций агентов по их действиям, а, с другой стороны, позволяет в соответствующих вырожденных случаях обосновывать существование РДС и находить его.

Утверждение 3.9. *В модели I в. игре с противоположными интересами без учёта затрат центров на управление существует РДС их игры*: $\alpha^{\text{РДС}} = 1$, $\beta^{\text{РДС}} = 1$.

Интересно отметить, что в этом равновесии функция распределения порогов агентов совпадает с исходной функцией распределения, т. е. $F_{1,1}(x) \equiv F(x)$, следовательно, не изменяется и РКП, т. е. РДС «совпадает» с ситуацией статус-кво.

Пример 3.9. Пусть $F(x) = x$, тогда

$$x^{\mathrm{I}^*}(\alpha, \beta) = \frac{\alpha(1-\beta)}{\alpha+\beta-2\alpha\beta}. \tag{14}$$

Вычислим

$$\frac{\partial x^{\mathrm{I}^*}(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} = \frac{\beta(1-\beta)}{(\alpha+\beta-2\alpha\beta)^2}, \quad \frac{\partial x^{\mathrm{I}^*}(\alpha, \beta)}{\partial \beta} = -\frac{\alpha(1-\alpha)}{(\alpha+\beta-2\alpha\beta)^2},$$

откуда следует, что $x^{\mathrm{I}^*}(\alpha, \beta)$ возрастает по первому аргументу и убывает по второму при любых допустимых значениях соответствующего другого аргумента. Поэтому без учёта затрат центров на управление РДС игры центров с целевыми функциями (13) будет выбор ими единичных стратегий: $\alpha^{\text{РДС}} = 1$, $\beta^{\text{РДС}} = 1$. Естественно, эта точка будет и равновесием Нэша (РН) игры центров. В настоящем примере $W = [0; 1]$. Отметим, что в РДС реализуется то же состояние толпы, что и в отсутствие управления. •

Рассмотрим теперь случай, когда затраты центров отличны от нуля.

Утверждение 3.10. *Если в модели I $x^*(\alpha, \beta)$ — непрерывная функция, выполнено условие* (8), $W = [0; 1]$, *функции выигрыша центров — ограниченные, линейные или вогнутые по их стратегиям, а функции затрат — выпуклые, то существует равновесие Нэша игры центров.*

Справедливость тривиального утверждения 3.10 (и его «аналога» для модели II — утверждения 3.13) непосредственно следует из достаточных условий [53, 245] существования равновесия Нэша в непрерывных играх.

В следующем примере существует единственное РН.

Пример 3.10. Пусть

$$F(x) = x, \quad H_\alpha(x) = x, \quad H_\beta(x) = 1 - x,$$
$$c_\alpha(\alpha) = -\ln(1-\alpha), \quad c_\beta(\beta) = -\lambda \ln(1-\beta).$$

Из условий первого порядка получаем $\beta = (1/\lambda)\alpha$. При $\lambda = 1$ находим: $\alpha^* = 1/4$, $\beta^* = 1/4$. При этом

$$x^{\mathrm{I}^*}(\alpha^*, \beta^*) = \frac{1}{2}, \quad f_\alpha(\alpha^*, \beta^*) = f_\beta(\alpha^*, \beta^*) \approx -0{,}2.$$

Отметим, что в равновесии оба центра имеют меньшие значения целевых функций, чем в *точке «статус-кво»* (0; 0) (так как $f_\alpha(0, 0) = 1$,

$f_\beta(0,0)=0$). Утилитарным решением в этом случае является также вектор нулевых стратегий. •

Модель II. Пусть целевые функции первого и второго центров имеют соответственно вид (11) и (12) с точностью до замены α на δ и β на γ.

Утверждение 3.11. *В модели II в. игре с противоположными интересами без учёта затрат центров на управление не существует конечного РДС или РН их игры.*

Справедливость утверждения 3.11 следует из неограниченности множеств допустимых стратегий центров, а также монотонности $x^*(\delta,\gamma)$ по обеим переменным (см. утверждение 3.8). Из этих же свойств следует справедливость следующего утверждения.

Утверждение 3.12. *Если в модели II множества допустимых стратегий центров ограничены:* $\delta \leqslant \delta_{\max}$, $\gamma \leqslant \gamma_{\max}$, *то в игре с противоположными интересами без учёта затрат центров на управление существует РДС их игры:* $\delta^{РДС}=\delta_{\max}$, $\gamma^{РДС}=\gamma_{\max}$.

Рассмотрим случай, когда затраты центров отличны от нуля.

Утверждение 3.13. *Если в модели II* $x^*(\delta,\gamma)$ *— непрерывная функция, выполнены условия утверждения* 3.8, *функции выигрыша центров ограниченные, линейные или вогнутые по их стратегиям, а функции затрат — выпуклые, имеющие в нуле нулевые производные и стремящиеся к бесконечности при стремлении аргумента к бесконечности, то существует конечное равновесие Нэша игры центров.*

Справедливость утверждения 3.13 следует из того, что в рамках его условий целевые функции центров вогнуты по их стратегиям и принимают неотрицательные значения на ограниченном множестве значений аргументов, т. е. можно воспользоваться достаточными условиями (см., например, [53]) существования равновесия Нэша в непрерывных играх.

Пример 3.11. Пусть

$$F(x)=x,\quad H_\delta(x)=x,\quad H_\gamma(x)=1-x,$$
$$c_\delta(\delta)=\delta^2,\quad c_\gamma(\gamma)=\lambda^2\gamma^2.$$

В примере 3.8 найдено РКП $x^*(\delta,\gamma)=\delta/(\delta+\gamma)$. Получаем следующие выражения для целевых функций центров:

$$f_\delta(\delta,\gamma)=\frac{\delta}{\delta+\gamma}-\delta^2, \tag{15}$$

$$f_\gamma(\delta,\gamma)=1-\frac{\delta}{\delta+\gamma}-\lambda^2\gamma^2. \tag{16}$$

Убедившись в вогнутости целевых функций (15) и (16) соответственно по δ и γ, дифференцируем их, приравниваем производные нулю и находим РН:

$$\delta^* = \sqrt{\frac{\lambda}{2}}\frac{1}{1+\lambda}, \quad \gamma^* = \frac{1}{\sqrt{2\lambda}}\frac{1}{1+\lambda}.$$

При этом РКП

$$x^*(\delta^*, \gamma^*) = \frac{\lambda}{1+\lambda},$$

а значения целевых функций в РН:

$$f_\delta(\delta^*, \gamma^*) = \frac{\lambda(1+2\lambda)}{2(1+\lambda)^2}, \quad f_\gamma(\delta^*, \gamma^*) = \frac{\lambda+2}{2(1+\lambda)^2}.$$

Утилитарная ФКП

$$f(\delta, \gamma) = f_\delta(\delta, \gamma) + f_\gamma(\delta, \gamma)$$

достигает максимума (принимает единичное значение) на векторе нулевых стратегий. Значение утилитарной ФКП в РН

$$f(\delta^*, \gamma^*) = 1 - \frac{\lambda}{(1+\lambda)^2},$$

т. е. величина $\lambda/(1+\lambda)^2$ характеризует, насколько РН «хуже» в смысле утилитарной ФКП, чем оптимум последней. •

Пороговые функции выигрыша центров

Для содержательных интерпретаций важен случай, когда *функции выигрыша* центров *пороговые*, т. е. имеют вид:

$$H_{\alpha(\beta)}(x) = \begin{cases} H^+_{\alpha(\beta)}, & \text{если } x \geqslant (\leqslant)\ \theta_\alpha(\theta_\beta), \\ H^-_{\alpha(\beta)} & \text{иначе,} \end{cases} \tag{17}$$

где $H^+_{\alpha(\beta)} > H^-_{\alpha(\beta)}$, т. е. первый центр получает больший выигрыш тогда, когда доля действующих агентов не меньше порога $\theta_\alpha \in [0; 1]$, а второй центр — при условии, что доля действующих агентов не превышает порога $\theta_\beta \in [0; 1]$. Обозначим через $\widehat{x}$ РКП в отсутствие воздействий центров, т. е. $\widehat{x} = x^*(0, 0)$. Введём следующие предположения.

Предположение А.1. Множество достижимости W — единичный отрезок, $x^*(\alpha, \beta)$ — строго монотонная непрерывная функция своих переменных (соответствующие достаточные условия приведены выше и/или могут быть проверены в каждом конкретном случае), а функции затрат центров строго монотонны.

Предположение А.2. Первый центр при нулевой стратегии второго может реализовать самостоятельно любое РКП из $[\widehat{x}; 1]$; а второй центр при нулевой стратегии первого может реализовать самостоятельно любое РКП из $[0; \widehat{x}]$.

Из структуры целевых функций центров и предположений А.1 и А.2 следует, что для первого (второго) центра реализовывать РКП, превышающие порог θ_α (строго меньшие порога θ_β), не выгодно.

Модель I. Запишем определение равновесия Нэша (α^*, β^*):

$$\begin{cases} \forall\, \alpha \in [0;1] \quad H_\alpha(x^*(\alpha^*, \beta^*)) - c_\alpha(\alpha^*) \geqslant H_\alpha(x^*(\alpha, \beta^*)) - c_\alpha(\alpha), \\ \forall\, \beta \in [0;1] \quad H_\beta(x^*(\alpha^*, \beta^*)) - c_\beta(\beta^*) \geqslant H_\beta(x^*(\alpha^*, \beta)) - c_\beta(\beta). \end{cases}$$

Начнём анализ с частного случая $\theta_\beta = \theta_\alpha = \theta$.

Обозначим через

$$\alpha(\theta) = \min\{\alpha \in [0;1] \mid x^*(\alpha, 0) = \theta\},$$
$$\beta(\theta) = \min\{\beta \in [0;1] \mid x^*(0, \beta) = \theta\}.$$

Определим множество

$$\Omega_{\alpha,\beta}(\theta) = \big\{(\alpha, \beta) \in [0;\ 1]^2 \mid x^*(\alpha, \beta) = \theta,$$
$$c_\alpha(\alpha) \leqslant H_\alpha^+ - H_\alpha^-,\ c_\beta(\beta) \leqslant H_\beta^+ - H_\beta^-\big\}, \quad (18)$$

т. е. множество пар стратегий центров, приводящих к таким РКП θ, что каждый из центров при этом имеет значение целевой функции не меньшее, чем при выборе стратегии, изменяющей его выигрыш (17). Множество (18) по аналогии с работами [108, 250], назовём *множеством компромисса*.

Из определений РН и множества компромисса следует, что, если последнее не пусто, то реализация РКП θ в смысле утилитарной ФКП не менее выгодна для агентов, чем сохранение статус-кво $\widehat{x}$. Более того, легко видеть, что центрам не выгодно реализовывать никакие РКП, кроме, возможно, $\widehat{x}$ или θ.

Утверждение 3.14. *Если $\theta_\beta = \theta_\alpha = \theta$ и выполнено предположение А.1, то РН может быть только двух типов*:

1) $(0; 0)$ *является РН, если*

$$\widehat{x} \leqslant \theta \quad \text{и} \quad c_\alpha(\alpha(\theta)) \geqslant H_\alpha^+ - H_\alpha^- \quad (19)$$

или

$$\widehat{x} \geqslant \theta \quad \text{и} \quad c_\beta(\beta(\theta)) \geqslant H_\beta^+ - H_\beta^-; \quad (20)$$

2) *множество РН включает в себя множество $\Omega_{\alpha,\beta}(\theta)$, если оно не пусто.*

Если дополнительно выполнено предположение А.2, то

— $(\alpha(\theta); 0)$ *является РН, если*

$$\widehat{x} \leqslant \theta \quad \text{и} \quad c_\alpha(\alpha(\theta)) \leqslant H_\alpha^+ - H_\alpha^-; \quad (21)$$

— $(0;\beta(\theta))$ *является РН, если*

$$\widehat{x} \geqslant \theta \quad \text{и} \quad c_\beta(\beta(\theta)) \leqslant H_\beta^+ - H_\beta^-. \tag{22}$$

Исследуем теперь связь множества компромисса с утилитарным решением. Обозначим через

$$C(\theta) = \min_{(\alpha,\beta)\in\Omega_{\alpha,\beta}(\theta)} [c_\alpha(\alpha) + c_\beta(\beta)] \tag{23}$$

минимальные суммарные затраты центров по реализации РКП θ. Утилитарное решение в рассматриваемом случае удовлетворяет условиям:

— если $\widehat{x} \leqslant \theta$, то $f(\widehat{\alpha};\widehat{\beta}) = \max\{H_\alpha^- + H_\beta^+; H_\alpha^+ + H_\beta^+ - C(\theta)\}$;

— если $\widehat{x} \geqslant \theta$, то $f(\widehat{\alpha};\widehat{\beta}) = \max\{H_\alpha^+ + H_\beta^-; H_\alpha^+ + H_\beta^+ - C(\theta)\}$.

Соответственно, если при $\widehat{x} \leqslant \theta$ выполняется неравенство $C(\theta) \leqslant \leqslant H_\alpha^+ - H_\alpha^-$, а при $\widehat{x} \geqslant \theta$ выполняется неравенство $C(\theta) \leqslant H_\beta^+ - H_\beta^-$, то множество компромисса включает в себя утилитарное решение.

Как показывает пример 3.12, предположение А.2 существенно для структуры РН.

П р и м е р 3.12. Пусть

$$F(x) = x, \quad \theta = \frac{1}{2}, \quad H_\alpha^- = H_\beta^- = 0, \quad H_\alpha^+ = H_\beta^+ = 1,$$
$$c_\alpha(\alpha) = -\ln(1-\alpha), \quad c_\beta(\beta) = -\ln(1-\beta).$$

Легко убедиться (см. также пример 3.10), что вектор нулевых стратегий не является РН. Из результатов примера 3.9 и выражений (18)–(23) получаем:

$$\Omega_{\alpha,\beta}\left(\frac{1}{2}\right) = \Big\{(\alpha,\beta) \in [0;1]^2 \;\Big|\; \frac{\alpha(1-\beta)}{\alpha+\beta-2\alpha\beta} = \frac{1}{2},$$
$$\ln(1-\alpha) \geqslant -1,\ \ln(1-\beta) \geqslant -1\Big\},$$

т. е.

$$\Omega_{\alpha,\beta}\left(\frac{1}{2}\right) = \Big\{(\alpha,\beta) \in [0;1]^2 \mid \alpha = \beta,\ 0 < \alpha,\ \beta \leqslant 1 - \frac{1}{e}\Big\}.$$

В рассматриваемом примере ε-оптимальным утилитарным решением будет вектор стратегий центров $(\varepsilon,\varepsilon)$, где $\varepsilon \in (0; 1-1/e]$. •

Перейдём теперь к общему случаю, когда пороги центров, фигурирующие в их функциях выигрыша (17), различны. Рассмотрим наиболее интересное для практических приложений (ситуация информационного противоборства) соотношение порогов центров:

$$\theta_\beta < \widehat{x} < \theta_\alpha. \tag{24}$$

Определим следующие функции (если множество, по которому вычисляется минимум, пусто, то будем считать, что значение функции равно $+\infty$):

$$C_\alpha(x,\beta) = \min_{\{\alpha\in[0;1]\,|\,x^*(\alpha,\beta)=x\}} c_\alpha(\alpha),$$
$$C_\beta(x,\alpha) = \min_{\{\beta\in[0;1]\,|\,x^*(\alpha,\beta)=x\}} c_\beta(\beta).$$

Из неубывания функций затрат и структуры функций выигрыша (17) следует, что реализация РКП из интервала $(\theta_\beta;\theta_\alpha)$ центрам не выгодна по сравнению с сохранением статус-кво $\widehat{x}$. Введём предположение, являющееся ослаблением предположения А.2.

Предположение А.3. Первый центр при нулевой стратегии второго может реализовать самостоятельно РКП θ_α; а второй центр при нулевой стратегии первого может реализовать самостоятельно РКП θ_β.

Из определения равновесия Нэша и свойств целевых функций центров следует

Утверждение 3.15. *Если выполнено условие* (24) *и предположения* А.1 *и* А.3, *то РН игры центров характеризуются следующим образом*:

— $(0;0)$ *является РН, если*

$$\begin{cases} H_\alpha^+ - c_\alpha(\alpha(\theta_\alpha)) \leqslant H_\alpha^-, \\ H_\beta^+ - c_\beta(\beta(\theta_\beta)) \leqslant H_\beta^-; \end{cases} \tag{25}$$

— $(\alpha(\theta_\alpha);0)$ *является РН, если*

$$\begin{cases} H_\alpha^+ - c_\alpha(\alpha(\theta_\alpha)) \geqslant H_\alpha^-, \\ H_\beta^- \geqslant H_\beta^+ - C_\beta(\theta_\beta,\alpha(\theta_\alpha)); \end{cases} \tag{26}$$

— $(0;\beta(\theta_\beta))$ *является РН, если*

$$\begin{cases} H_\beta^+ - c_\beta(\beta(\theta_\beta)) \geqslant H_\beta^-, \\ H_\alpha^- \geqslant H_\alpha^+ - C_\alpha(\theta_\alpha,\beta(\theta_\beta)). \end{cases} \tag{27}$$

Модель II для случая пороговых функций выигрыша центров строится полностью аналогично модели I с точностью до замены α на δ, и β — на γ. Проиллюстрируем утверждение 3.15 примером для модели II.

Пример 3.13. Пусть

$$F(x) = \frac{1}{3} + \frac{2x^2}{3}, \quad \theta_\gamma = 0{,}4, \quad \theta_\delta = 0{,}6,$$
$$H_\delta^- = H_\gamma^- = 0, \quad H_\delta^+ = H_\gamma^+ = 1, \quad c_\delta(\delta) = \delta^2, \quad c_\gamma(\gamma) = \lambda^2\gamma^2.$$

Найдём: $\widehat{x} = 1/2$, $\gamma(\theta_\gamma) \approx 0{,}1$, $\delta(\theta_\delta) \approx 0{,}07$.

Пусть $\lambda = 2$. Тогда ни одно из условий (25)–(27) не выполнено, следовательно, РН не существует.

Пусть $\lambda = 20$. Условия (25) и (27) не выполнены, выполнено условие (26). Следовательно, $(0{,}07; 0)$ — РН. •

П р и м е р 3.14. Пусть в условиях примера 3.13 $\theta_\gamma = \theta_\delta = \theta = 0{,}4$, $\lambda = 20$. Найдём

$$\Omega_{\delta,\gamma}(0{,}4) = \left\{\delta \in [0; 1],\ \gamma \in [0; 0{,}05] \mid \gamma = 0{,}1 + 1{,}5\delta\right\} = \varnothing.$$

Условие (20) выполнено, т. е. $(0; 0)$ — РН. •

В случае отсутствия РН перспективным представляется поиск и анализ равновесий в безопасных стратегиях (РБС). Первоначально РБС было предложено в работе [65] и затем сформулировано в новой, более простой, форме в работах [66, 215]. Эта концепция равновесия основана на понятии угрозы. Для игрока существует *угроза*, если некоторый другой игрок может односторонним отклонением увеличить свой выигрыш и при этом одновременно уменьшить выигрыш первого игрока. *Равновесие в безопасных стратегиях* определяется как игровой профиль, удовлетворяющий условиям:

— ни для одного из игроков не существует угроз;
— ни один игрок не может односторонним отклонением увеличить свой выигрыш, не создав при этом для себя угрозы потерять больше, чем он выигрывает.

Пусть выполнены предположения А.1 и А.2. Определим функции (если множество, по которому вычисляется минимум, пусто, то будем считать, что значение функции равно $+\infty$):

$$C_\delta(x, \gamma) = \min_{\{\delta \geqslant 0 \,|\, x^*(\delta,\gamma)=x\}} c_\delta(\delta),$$

$$C_\gamma(x, \delta) = \min_{\{\gamma \geqslant 0 \,|\, x^*(\delta,\gamma)=x\}} c_\gamma(\gamma).$$

Из определения РБС (см. выше и работ [65, 66]) и свойств целевых функций центров следует

У т в е р ж д е н и е 3.16. *Пусть выполнены предположения А.1 и А.2. Тогда в модели II*:

1) *точка равновесия* $(\delta_{\text{РБС}}; 0)$ *является РБС, если существует минимальное неотрицательное значение* $\delta_{\text{РБС}}$, *для которого*

$$\begin{cases} x^*(\delta_{\text{РБС}}; 0) \geqslant \theta_\delta, \\ H_\delta^+ - c_\delta(\delta_{\text{РБС}}) \geqslant H_\delta^-, \\ H_\gamma^+ - C_\gamma(\theta_\gamma, \delta_{\text{РБС}}) \leqslant H_\gamma^-; \end{cases}$$

2) *точка равновесия* $(0; \gamma_{\text{РБС}})$ *является РБС, если существует минимальное неотрицательное значение* $\gamma_{\text{РБС}}$, *для которого*

$$\begin{cases} x^*(0; \gamma_{\text{РБС}}) \leqslant \theta_\gamma, \\ H_\gamma^+ - c_\gamma(\gamma_{\text{РБС}}) \geqslant H_\gamma^-, \\ H_\delta^+ - C_\delta(\theta_\delta, \gamma_{\text{РБС}}) \leqslant H_\delta^-. \end{cases}$$

Пример 3.15. Пусть в условиях примера 3.13 $\lambda = 2$, т. е. РН при таких значениях параметров не существует. Из первой системы неравенств утверждения 3.16 находим: $\delta_{\text{РБС}} \approx 0{,}816$ реализует единичное РКП. Вторая система неравенств утверждения 3.16 не имеет решения, т. е. найденное РБС единственно. •

В заключение параграфа о пороговых функциях выигрыша центров отметим, что выбор таких параметров, как пороги в функциях выигрыша центров и сами размеры выигрышей, может рассматриваться в качестве *метауправления*. Действительно, зная зависимость равновесия игры центров от этих параметров, можно рассматривать трёхуровневые модели (метауровень — центры — агенты) — ставить и решать задачи выбора таких допустимых значений параметров игры центров, которые приводят в ней к равновесию, реализующему требуемое РКП агентов. Приведём пример.

Пример 3.16. Рассмотрим в условиях примера 3.13 при $\lambda = 20$ задачу выбора таких значений H_δ^+ и H_γ^+, при которых вектор нулевых стратегий центров является РН их игры. В соответствии с условием (25) для этого достаточно уменьшить значение H_δ^+ до $4{,}9 \cdot 10^{-4}$.

Рассмотрим теперь в условиях примера 3.13 при $\lambda = 20$ задачу выбора таких значений H_δ^+ и H_γ^+, при которых в равновесии реализуется РКП $\theta_\gamma = 0{,}4$. Для этого в соответствии с выражением (27) достаточно выбрать $H_\delta^+ \leqslant 0{,}029$ и $H_\gamma^+ \geqslant 4$. •

Завершив рассмотрение игр в нормальной форме, перейдём к их «расширениям» — иерархическим и рефлексивным играм двух центров. Следует признать, что далее рассмотрена лишь иллюстрация возможности описания и изучения соответствующих классов теоретико-игровых моделей информационного противоборства. Их подробное и систематическое исследование является перспективной задачей будущих исследований.

Иерархическая игра центров

В задачах управления толпой возможны ситуации, когда игроки (центры) принимают решения последовательно. При этом существенна информированность каждого из игроков на момент принятия им решения, а также множества их допустимых стратегий (см. классификацию и результаты исследования *иерархических игр* в хрестоматийной монографии [53]). Над каждой игрой в нормальной форме может быть «надстроена» та или иная иерархическая игра [99, 249, 250]. Более того, следует различать два варианта.

1. Один из центров выбирает свою стратегию, затем другой центр, зная выбор оппонента, выбирает свою стратегию, после чего осуществляется информационное воздействие на агентов. В результате функция распределения порогов принимает вид (6) (или (9)). Именно этот случай иллюстрируется ниже;
2. Один из центров выбирает свою стратегию и осуществляет своё информационное воздействие на агентов, затем другой центр, зная выбор оппонента, выбирает свою стратегию и осуществляет своё информационное воздействие на агентов.

В модели I оба варианта эквивалентны (приводят к одной и той же функции распределения порогов (6)), а в модели II различаются.

В играх типа Γ_1 [195] (в том числе в *играх Штакельберга* — см. [53, 245]) множества допустимых стратегий центров такие же, что и в исходной игре в нормальной форме, а центр, делающий ход вторым, знает выбор центра, сделавшего первый ход. Соответствующие ситуации могут интерпретироваться как управление и *контруправление* (например, при заданном значении α выбрать β, или наоборот). Если исходная игра в нормальной форме допускает простой анализ и исследование зависимости равновесий от параметров модели, то и с изучением соответствующей игры типа Γ_1 проблем, как правило, не возникает.

Рассмотрим ряд примеров иерархических игр для первого варианта модели I для случая пороговых функций выигрыша центров.

Пример 3.17. Пусть в условиях примера 3.12 $\theta = 1/3$, сначала первым центром выбирается параметр α, а затем вторым центром (при известном выборе первого) — параметр β (так называемая игра $\Gamma_1(\alpha, \beta)$). Из выражений (14) и (20) получаем

$$\Omega_{\alpha,\beta}(\theta) = \left\{(\alpha, \beta) \in [0; 1]^2 \mid \beta = \frac{\alpha(1-\theta)}{\alpha+\theta-2\alpha\theta},\ 0 < \alpha, \beta \leqslant 1 - \frac{1}{e}\right\}.$$

Если первый центр выбирает стратегию α^S, то наилучший ответ второго центра

$$\begin{aligned}\beta^S(\alpha^S) &= \arg\max_{\beta\in[0;1]} \left[H_\beta\left(x^*(\alpha^{S*}(\alpha, \beta))\right) - c_\beta(\beta)\right] = \\ &= \arg\max_{\beta\in[0;1]} \left[\begin{cases}1, & \text{если } x^*(\alpha^S, \beta) \leqslant \theta,\\ 0 & \text{иначе}\end{cases} + \ln(1-\beta)\right] = \frac{2\alpha}{\alpha+1},\end{aligned}$$

т. е. второму центру выгодно выбрать минимальное β, которое при данном α^S приводит к РКП θ. Получаем, что целевая функция первого центра может быть записана в виде

$$H_\alpha\big(x^*(\alpha^S, \beta^S(\alpha^S))\big) - c_\alpha(\alpha^S) = 1 - c_\alpha(\alpha^S),$$

где $0 < \alpha \leqslant 1 - 1/e$. Таким образом, ε-оптимальным (где ε — сколь угодно малая строго положительная величина) решением $(\alpha^{S*}, \beta^{S*})$ игры $\Gamma_1(\alpha, \beta)$ будет пара стратегий $(\varepsilon, 2\varepsilon/(\varepsilon+1))$, приводящих к выигрышам центров $1+\ln(1-\varepsilon)$ и $1+\ln(1-2\varepsilon/(\varepsilon+1))$ соответственно. Отметим, что, во-первых, это решение близко к утилитарному (так как оба центра выбирают близкие к нулю стратегии). Во-вторых, центр, делающий второй ход, несёт бо́льшие затраты. •

Пример 3.18. Пусть в условиях примера 3.17 сначала вторым центром выбирается параметр β, а затем первым центром (при известном выборе второго) — параметр α (игра $\Gamma_1(\beta, \alpha)$). Из выражений (14) и (20) получаем

$$\Omega_{\alpha,\beta}(\theta) = \left\{(\alpha, \beta) \in [0; 1]^2 \mid \alpha = \frac{\theta\beta}{1-\beta-\theta+2\beta\theta},\ 0 < \alpha, \beta \leqslant 1 - \frac{1}{e}\right\}.$$

При этом ε-оптимальным (где ε — сколь угодно малая строго положительная величина) решением рассматриваемой игры $\Gamma_1(\beta, \alpha)$ будет пара стратегий $(\varepsilon/(2-\varepsilon), \varepsilon)$, приводящих к выигрышам центров $1+\ln(1-\varepsilon/(2-\varepsilon))$ и $1+\ln(1-\varepsilon)$ соответственно. Отметим, что это решение также близко к утилитарному. Опять же, центр, делающий второй ход, несёт бо́льшие затраты. •

Примеры 3.17 и 3.18 позволяют выдвинуть (известную в теории иерархических игр и её приложениях) гипотезу: решения игр $\Gamma_1(\alpha, \beta)$ и $\Gamma_1(\beta, \alpha)$ принадлежат множеству компромисса (если оно не пусто), причём имеет место борьба за первый ход (как правило, центр, делающий первый ход, вынуждает оппонента «согласиться» с невыгодным для последнего равновесием). Это свойство встречается во многих моделях управления организационными системами (см., например, [250]).

Рассмотрим теперь игры типа Γ_2, в которых центр, делающий ход первым, имеет более богатое множество возможных стратегий [195], а именно, он может выбирать и сообщать центру, делающему второй ход, зависимость своих действий от действий последнего. В рамках идеологии теоремы Гермейера [195] можно предположить, что, если множество компромисса не пусто, то оптимальная стратегия первого центра (первым выбирающего α, т. е. в игре $\Gamma_2(\alpha(\cdot), \beta)$) имеет вид

$$\alpha^{G*}(\beta) = \begin{cases} \alpha^{S*}, & \text{если } \beta = \beta^{S*}, \\ 1 & \text{иначе.} \end{cases} \tag{28}$$

Содержательно, стратегия (28) заключается в том, что первый центр предлагает второму реализовать решение $(\alpha^{S*}, \beta^{S*})$ игры $\Gamma_1(\alpha, \beta)$. Если второй центр отказывается, то первый угрожает использовать свою наихудшую для оппонента стратегию. В рамках стратегии (28) игра $\Gamma_2(\alpha(\cdot), \beta)$ даёт в равновесии центрам те же выигрыши, что и игра $\Gamma_1(\alpha, \beta)$.

Игра $\Gamma_2(\beta(\cdot), \alpha))$, а также иерархические игры для модели II описываются полностью аналогично.

Рефлексивная игра центров

Над игрой в нормальной форме можно «надстраивать» *рефлексивные игры* [252], в которых игроки обладают нетривиальной взаимной информированностью о существенных параметрах. Предположим, что функция распределения $F(r, x)$ задана параметрически, и неопределённость отражается параметром $r \in Y$. Следуя работе [252], представления первого центра о неопределённом параметре r будем обозначать r_1, второго — r_2, представления первого центра о представлениях второго — r_{12} и т. д.

Пример 3.19. Пусть в модели II

$$F(r, x) = r + (1 - r)x, \quad r \in Y = [0; 1],$$
$$H_\delta(x) = x, \quad H_\gamma(x) = 1 - x,$$
$$c_\delta(\delta) = \delta, \quad c_\gamma(\gamma) = \lambda\gamma.$$

Найдя РКП

$$x^*(\delta, \gamma) = \frac{\delta + r}{\delta + \gamma + r},$$

получаем выражения для целевых функций центров:

$$f_\delta(\delta, \gamma) = \frac{\delta + r}{\delta + \gamma + r} - \delta, \tag{29}$$

$$f_\gamma(\delta, \gamma) = 1 - \frac{\delta + r}{\delta + \gamma + r} - \lambda^2\gamma. \tag{30}$$

Если значение параметра $r \in [0; 1]$ является *общим знанием* [252] среди центров, то из выражений (29) и (30) находим параметрическое РН игры центров

$$\delta^* = \left(\frac{\lambda}{1 + \lambda^2}\right)^2 - r, \tag{31}$$

$$\gamma^* = \frac{1}{(1 + \lambda^2)^2} \tag{32}$$

и реализуемое этими стратегиями РКП

$$x^*(\delta^*, \gamma^*) = \frac{\lambda^2}{1+\lambda^2}. \tag{33}$$

Отметим, что равновесная стратегия второго центра (32), а также соответствующее РКП (33) в условиях общего знания не зависят от значения параметра $r \in [0; 1]$. Ситуация меняется, если общее знание относительно этого параметра отсутствует.

Пусть $r_1 = r_{12} = r_{121} = r_{1212} = \ldots$, т. е. первый центр обладает некоторой (в общем случае неправильной) информацией r_1 о неопределённом параметре r и считает, что его представления истинны и составляют общее знание. Пусть $r_2 = r_{21} = r_{212} = r_{2121} = \ldots = r$, т. е. второй центр знает истинное значение параметра r и считает его общим знанием (т. е. второй центр не знает о том, что представления первого центра могут отличаться от истины).

Из выражений (31) и (32) находим *информационное равновесие* [250] игры центров

$$\delta_* = \left(\frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right)^2 - r_1, \quad \gamma_* = \frac{1}{(1+\lambda^2)^2}$$

и реализуемое в этом равновесии РКП

$$x^*(\delta_*, \gamma_*) = \frac{\lambda^2 + (r - r_1)(1+\lambda^2)^2}{1+\lambda^2 + (r-r_1)(1+\lambda^2)^2}. \tag{34}$$

Видно, что в общем случае РКП зависит от информированности центров, и в случае общего знания (чему соответствует $r_1 = r$) выражение (34) переходит в выражение (33). Осуществляя, как метауправление, *информационное управление* [250, 252] — например, изменяя представления первого центра о значении неопределённого параметра, можно соответственно менять и РКП. •

Пример 3.20. Пусть в условиях примера 3.19 второй центр адекватно информирован о представлениях первого центра (т. е. второй центр знает о том, что представления первого центра могут отличаться от истины): $r_{21} = r_{212} = r_{2121} = \ldots = r_1$. Тогда первый центр будет в информационном равновесии по-прежнему выбирать стратегию

$$\delta_* = \left(\frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right)^2 - r_1,$$

а второй центр выберет

$$\gamma_*(r_1, r) = \frac{1}{\lambda}\sqrt{\left(\frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right)^2 - r_1 + r} + r_1 - r - \frac{\lambda^2}{(1+\lambda^2)^2},$$

что приведёт к реализации РКП

$$x^*(\delta_*, \gamma_*(r_1, r)) = \lambda \frac{\lambda^2 + (r - r_1)(1 + \lambda^2)^2}{(1 + \lambda^2)^2 \sqrt{\left(\frac{\lambda}{1 + \lambda^2}\right)^2 - r_1 + r}}.$$

Легко убедиться, что в случае общего знания, т. е. при $r_1 = r$ справедливо

$$x^*(\delta_*, \gamma_*(r_1, r)) = x^*(\delta^*, \gamma^*).$$

Таким образом, настоящий пример иллюстрирует, что в рефлексивных играх на равновесие существенно влияет не только информированность агентов (она не изменилась по сравнению с примером 11), но и их *взаимная информированность*, т. е. представления об информированности оппонентов, представления о представлениях и т. д. [252]. •

Отметим, что нетривиальная взаимная информированность центров может иметь место не только относительно параметров функции распределения порогов агентов, но и относительно параметров функций выигрыша и/или функций затрат центров и др.

Пример 3.21. Пусть в условиях примера 3.19 первый центр неадекватно информирован о параметре λ функции затрат второго центра, который знает истинное значение этого параметра и считает, что первый центр адекватно информирован.

Пусть $\lambda_1 = \lambda_{12} = \lambda_{121} = \lambda_{1212} = \ldots$, т. е. первый центр обладает некоторой (в общем случае неправильной) информацией λ_1 о неопределённом параметре λ и считает, что его представления истинны и составляют общее знание. Пусть $\lambda_2 = \lambda_{21} = \lambda_{212} = \lambda_{2121} = \ldots = \lambda$, т. е. второй центр знает истинное значение параметра λ и считает его общим знанием. Из выражений (31) и (32) получаем реализуемое в информационном равновесии РКП:

$$x^* = \frac{\lambda_1^2}{\lambda_1^2 + \left(\frac{1 + \lambda_1^2}{1 + \lambda^2}\right)^2},$$

которое в случае общего знания (чему соответствует $\lambda_1 = \lambda$) переходит в РКП (36). •

Сформулируем основной результат раздела 3.3. Показано, как, располагая предложенной в работе [21] стохастической моделью управления толпой, «надстраивать» над ней различные теоретико-игровые модели взаимодействия управляющих субъектов, оказывающих информационные воздействия на толпу в собственных интересах. Относительная «простота» модели объекта управления (толпы) позволяет применить разнообразный инструментарий теории игр — исследовать не только игры в нормальной форме, но и иерархические, рефлексивные и другие игры.

Перспективным направлением дальнейших исследований представляется идентификация и выделение типовых функций распределения порогов агентов (по аналогии, например, с тем, как это делалось в работе [12]), что позволит синтезировать соответствующие шаблоны управлений и решений задач информационного управления, а также моделей информационного противоборства.

Литература

1. *Авдеева З. К., Коврига С. В., Макаренко Д. И., Максимов В. И.* Когнитивный подход в управлении // Проблемы управления. 2007. № 3. С. 2–8.
2. *Агаев Р. П., Чеботарев П. Ю.* Согласование характеристик в многоагентных системах и спектры лапласовских матриц орграфов // Автоматика и телемеханика. 2009. № 3. С. 136–151.
3. *Агаев Р. П., Чеботарев П. Ю.* Сходимость и устойчивость в задачах согласования характеристик (обзор базовых результатов) // Управление большими системами. 2010. № 30–1 С. 470–505.
4. *Алескеров Ф. Т., Благовещенский Н. Ю., Сатаров Г. А. и др.* Влияние и структурная устойчивость в Российском парламенте (1905–1917 и 1993–2005 гг.). М.: Физматлит, 2007.
5. *Андреева Г. М.* Социальная психология. М.: Аспект Пресс, 2008.
6. *Барабанов И. Н., Коргин Н. А., Новиков Д. А., Чхартишвили А. Г.* Динамические модели информационного управления в социальных сетях // Автоматика и телемеханика. 2010. № 11. С. 172–182.
7. *Барабанов И. Н., Новиков Д. А.* Динамические модели управления возбуждением толпы в дискретном времени // Автоматика и телемеханика. 2016. № 10. С. 123–139.
8. *Барабанов И. Н., Новиков Д. А.* Динамические модели управления возбуждением толпы в непрерывном времени // Управление большими системами. 2016. № 63. С. 71–86.
9. *Барабаши А. Л.* Сети без масштабов // В мире науки. Scientific American. 2003. № 8. С. 55–63.
10. *Бард А., Зондерквист Я.* Nетократия. Новая правящая элита и жизнь после капитализма. СПб.: Стокгольмская школа экономики в Санкт-Петербурге, 2004.
11. *Баркалов С. А., Калинина Н. Ю., Новиков Д. А.* Механизмы компромисса в моделях функционирования команд управления проектами // Вестник ВГТУ. 2008. Т. 4, № 7. С. 47–50.
12. *Батов А. В., Бреер В. В., Новиков Д. А., Рогаткин А. Д.* Микро- и макромодели социальных сетей: идентификация и имитационные эксперименты // Проблемы управления. 2014. № 6. С. 45–51.
13. *Бреер В. В.* Стохастические модели социальных сетей // Управление большими системами. 2009. № 27. С. 169–204.
14. *Бреер В. В.* Теоретико-игровая модель неанонимного порогового конформного поведения // Управление большими системами. 2010. № 31. С. 162–176.

15. *Бреер В. В.* Теоретико-игровые модели конформного коллективного поведения // Автоматика и телемеханика. 2012. № 10. С. 111–126.
16. *Бреер В. В.* Модели конформного поведения. Ч. 1. От философии к математическим моделям // Проблемы управления. 2014. № 1. С. 2–13.
17. *Бреер В. В.* Модели конформного поведения. Ч. 2. Математические модели // Проблемы управления. 2014. № 2. С. 2–17.
18. *Бреер В. В.* Модели толерантного порогового поведения (от Т. Шеллинга — к М. Грановеттеру) // Проблемы управления. 2016. № 1. С. 11–20.
19. *Бреер В. В., Новиков Д. А.* Модели управления толпой // Проблемы управления. 2012. № 2. С. 38–44.
20. *Бреер В. В., Новиков Д. А., Рогаткин А. Д.* Микро- и макромодели социальных сетей: основы теории // Проблемы управления. 2014. № 5. С. 28–33.
21. *Бреер В. В., Новиков Д. А., Рогаткин А. Д.* Стохастические модели управления толпой // Управление большими системами. 2014. № 52. С. 85–117.
22. *Бреер В. В., Рогаткин А. Д.* Вероятностная модель порогового поведения в мультиагентных системах // Автоматика и телемеханика. 2015. № 8. С. 56–77.
23. *Бреер В. В., Новиков Д. А., Рогаткин А. Д.* Управление толпой: математические модели порогового коллективного поведения. М.: Ленанд, 2016.
24. *Буре В. М., Парилина Е. М., Седаков А. А.* Консенсус в социальной сети с двумя центрами влияния // Проблемы управления. 2016. Вып. 1. С. 21–28.
25. *Бурков В. Н., Заложнев А. Ю., Новиков Д. А.* Теория графов в управлении организационными системами. М.: Синтег, 2001.
26. *Бурков В. Н., Новиков Д. А., Щепкин А. В.* Механизмы управления эколого-экономическими системами. М.: Физматлит, 2008.
27. *Бухарин С. Н., Цыганов В. В.* Методы и технологии информационных войн. М.: Академический проект, 2007.
28. *Вагнер Г.* Основы исследования операций. М.: Мир, 1972. Т. 1–3.
29. *Васин А. А., Краснощеков П. С., Морозов В. В.* Исследование операций. М.: Изд. центр «Академия», 2008.
30. *Васин А. А.* Модели динамики коллективного поведения. М.: МГУ, 1989.
31. *Васин А. А.* Некооперативные игры в природе и обществе. М.: МАКС Пресс, 2005.
32. *Васильев Ф. П.* Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1981.
33. *Воробьев Н. Н.* Теория игр для экономистов-кибернетиков. М.: Наука, 1985.
34. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. 4-е изд. М.: Наука, 1988.
35. *Горелик В. А., Горелов М. А., Кононенко А. Ф.* Анализ конфликтных ситуаций в системах управления. М.: Радио и связь, 1991.
36. *Градосельская Г. В.* Анализ социальных сетей. Автореф. дис. … канд. соц. наук. Москва, 2001.

37. *Градосельская Г. В.* Сетевые измерения в социологии. М.: Издательский дом «Новый учебник», 2004.
38. *Градосельская Г. В.* Бизнес-сети в России. М.: Изд. дом Высшей школы экономики, 2014.
39. *Грачев Г., Мельник И.* Манипулирование личностью: организация, способы и технологии информационно-психологического воздействия. М.: Институт философии РАН, 1999.
40. *Губанов Д. А., Калашников А. О., Новиков Д. А.* Теоретико-игровые модели информационного противоборства в социальных сетях // Управление большими системами. 2010. № 31. С. 192–204.
41. *Губанов Д. А., Новиков Д. А.* Модели унифицированного информационного управления в однородных социальных сетях // Управление большими системами. 2010. № 30.1. С. 722–742.
42. *Губанов Д. А., Новиков Д. А., Чхартишвили А. Г.* Модели влияния в социальных сетях // Управление большими системами. 2009. № 27. С. 205–281.
43. *Губанов Д. А., Новиков Д. А., Чхартишвили А. Г.* Модели информационного влияния и информационного управления в социальных сетях // Проблемы управления. 2009. № 5. С. 28–35.
44. *Губанов Д. А., Новиков Д. А., Чхартишвили А. Г.* Модели репутации и информационного управления в социальных сетях // Математическая теория игр и её приложения. 2009. Т. 1, вып. 2. С. 14–37.
45. *Губанов Д. А., Новиков Д. А.* Модели распределённого контроля в социальных сетях // Системы управления и информационные технологии. 2009. № 3.1(37). С. 124–129.
46. *Губанов Д. А., Новиков Д. А., Чхартишвили А. Г.* Социальные сети: модели информационного влияния, управления и противоборства. М.: Физматлит, 2010.
47. *Губанов Д. А., Чхартишвили А. Г.* Концептуальный подход к анализу онлайновых социальных сетей // Управление большими системами. 2013. Вып. 45. С. 222–236.
48. *Губанов Д. А., Чхартишвили А. Г.* Акциональная модель влиятельности пользователей социальной сети // Проблемы управления. 2014. № 4. С. 20–25.
49. *Губанов Д. А., Чхартишвили А. Г.* Связи дружбы и комментирования пользователей социальной сети Facebook // Управление большими системами. Вып. 52. 2014. С. 69–84.
50. *Губанов Д. А., Чхартишвили А. Г.* Влиятельность пользователей и метапользователей социальной сети // Проблемы управления. 2016. № 6. С. 12–17.
51. *Губко М. В.* Задачи управления организационными системами с сетевым взаимодействием участников // Автоматика и телемеханика. 2004. № 8. С. 102–129.

52. *Губко М. В.* Математические модели оптимизации иерархических структур. М.: Ленанд, 2006.
53. *Губко М. В., Новиков Д. А.* Теория игр в управлении организационными системами. М.: Синтег, 2002.
54. *Губко М. В., Караваев А. П.* Согласование интересов в матричных структурах управления // Автоматика и телемеханика. 2001. № 10. С. 132–146.
55. *Губко М. В., Новиков Д. А., Чхартишвили А. Г.* Сетевые игры и игры на сетях // Труды Международной конференции «Сетевые игры и менеджмент». Петрозаводск: ИПМИ РАН, 2009. С. 13–17.
56. *Давыденко В. А., Ромашкина Г. Ф.* Моделирование социальных сетей // Вестник Тюменского государственного университета. 2005. № 1. С. 68–79.
57. *Данич В. М.* Моделирование быстрых социально-экономических процессов. Луганск: Изд-во Восточно-украинского национального университета, 2004.
58. *Доценко Е. Л.* Психология манипуляции: феномены, механизмы и защита. М.: ЧеРо, 1997.
59. *Ермаков Н. С., Иващенко А. А., Новиков Д. А.* Модели репутации и норм деятельности. М.: ИПУ РАН, 2005.
60. *Жилякова Л. Ю.* Сетевая модель распространения нескольких видов активности в среде сложных агентов и её приложения // Онтология проектирования. 2015. Т. 5, № 3(17). С. 278–296.
61. *Жуковский В. И., Салуквадзе М. Е.* Некоторые игровые задачи управления и их приложения. Тбилиси: Мецниереба, 1998.
62. *Зимбардо Ф., Ляйппе М.* Социальное влияние. СПб.: Питер, 2000.
63. *Иващенко А. А., Новиков Д. А.* Модели и методы организационного управления инновационным развитием фирмы. М.: Ленанд, 2006.
64. *Ильин В. И.* Поведение потребителей. СПб.: Питер, 2000.
65. *Искаков М. Б.* Равновесие в безопасных стратегиях // Автоматика и телемеханика. 2005. № 3. С. 139–153.
66. *Искаков М. Б., Искаков А. Б.* Равновесие, сдерживаемое контругрозами, и сложное равновесие в безопасных стратегиях // Управление большими системами. 2014. № 51. С. 130–157.
67. *Караваев А. П.* Модели и методы управления составом активных систем. М.: ИПУ РАН, 2003.
68. *Кемени Дж., Снелл Дж.* Конечные цепи Маркова. М.: Наука, 1970.
69. *Кононенко А. Ф., Халезов А. Д., Чумаков В. В.* Принятие решений в условиях неопределённости. М.: ВЦ АН СССР, 1991.
70. *Корепанов В. О.* О стратегической рефлексии в играх двух лиц // Труды 11-й Всероссийской школы-конференции молодых учёных «Управление большими системами» (УБС’2014, Арзамас). М.: ИПУ РАН, 2014. С. 602–608.
71. *Корепанов В. О.* Гарантирующие и равновесные по Нэшу стратегии в игре рангов стратегической рефлексии // Труды 12-й Всероссийской школы-

конференции молодых учёных «Управление большими системами» (УБС’2015, Волгоград). М.: ИПУ РАН, 2015. С. 266–274.

72. *Кричевский Р., Дубовская Е.* Психология малой группы: теоретический и прикладной аспекты. М.: Изд-во МГУ, 1991.
73. *Кузнецов Н. А., Кульба В. В., Микрин Е. А. и др.* Информационная безопасность систем организационного управления. М.: Наука, 2006. Т. 1–2.
74. *Кузнецов О. П., Кулинич А. А., Марковский А. В.* Анализ влияний при управлении слабоструктурированными ситуациями на основе когнитивных карт // Человеческий фактор в управлении. М.: КомКнига, 2006. С. 311–344.
75. *Кузнецов О. П.* Сложные сети и распространение активности // Автоматика и телемеханика. 2015. № 12. С. 3–22.
76. *Куливец С. Г.* Моделирование конфликтных ситуаций с несогласованными представлениями у агентов на основе игр на линейных когнитивных картах // Проблемы управления. 2010. № 4. С. 42–48.
77. *Кулинич А. А.* Модель поддержки принятия решений для создания коалиции в условиях неопределённости // Труды IV Международной конференции по проблемам управления. М.: ИПУ РАН, 2009. С. 1243–1251.
78. *Кулинич А. А.* Систематизация когнитивных карт и методов их анализа // Когнитивный анализ и управление развитием ситуаций. Материалы 7-й Международной конференции. М.: ИПУ РАН, 2007. С. 50–56.
79. *Кульба В. В., Кононов Д. А., Косяченко С. А., Шубин А. Н.* Методы формирования сценариев развития социально-экономических систем. М.: Синтег, 2004.
80. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Курс теоретической физики. М.: Физматлит, 1968.
81. *Лефевр В. А.* Алгебра совести. М.: Когито-Центр, 2002.
82. *Майерс Д.* Социальная психология. СПб.: Питер, 2002.
83. *Макаров В. Л.* Искусственные общества и будущее общественных наук. СПб.: Изд-во СПбГУП, 2009.
84. *Макконнел Б., Хуба Д.* Эпидемия контента. Маркетинг в социальных сетях и блогосфере. М.: Вершина, 2008.
85. *Малинецкий Г. Г.* Хаос. Структуры. Вычислительный эксперимент: Введение в нелинейную динамику. М.: Наука, 1997.
86. *Малишевский А. В.* Качественные модели в теории сложных систем. М.: Наука, 1998.
87. *Михайлов А. П., Петров А. П., Прончева О. Г., Маревцева Н. А.* Модель информационного противоборства в социуме при периодическом дестабилизирующем воздействии // Математическое моделирование. 2017. Т. 29, № 2. С. 23–32.
88. *Мишин С. П.* Оптимальные иерархии управления в экономических системах. М.: ПМСОФТ, 2004.
89. *Менар К.* Экономика организаций. М.: Инфра-М, 1996.

90. *Молодцов Д. А.* Устойчивость принципов оптимальности. М.: Наука, 1987.
91. *Мулен Э.* Кооперативное принятие решений: аксиомы и модели. М.: Мир, 1991.
92. *Нижегородцев Р. М., Грибова Е. Н.* Сценарный подход в задачах экономического прогнозирования // Теоретические основы и модели долгосрочного макроэкономического прогнозирования. М.: МФК, 2004. С. 205–295.
93. *Новиков Д. А.* Закономерности итеративного научения. М.: ИПУ РАН, 1998.
94. *Новиков Д. А.* Институциональное управление организационными системами. М.: ИПУ РАН, 2003.
95. *Новиков Д. А.* «Когнитивные игры»: линейная импульсная модель // Проблемы управления. 2008. № 3. С. 14–22.
96. *Новиков Д. А.* Математические модели формирования и функционирования команд. М.: Физматлит, 2008.
97. *Новиков Д. А.* Механизмы функционирования многоуровневых организационных систем. М.: Фонд «Проблемы управления», 1999.
98. *Новиков Д. А.* Сетевые структуры и организационные системы. М.: ИПУ РАН, 2003.
99. *Новиков Д. А.* Игры и сети // Математическая теория игр и её приложения. 2010. № 2. С. 107–124.
100. *Новиков Д. А.* Иерархические модели военных действий // Управление большими системами. 2012. № 37. С. 25–62.
101. *Новиков Д. А.* Большие данные: от Браге к Ньютону // Проблемы управления. 2013. № 6. С. 15–23.
102. *Новиков Д. А.* Модели управления возбуждением сети // Труды XII Всероссийского совещания по проблемам управления. М.: ИПУ РАН, 2014. С. 6314–6325.
103. *Новиков Д. А.* Модели информационного противоборства в управлении толпой // Проблемы управления. 2015. № 3. С. 29–39.
104. *Новиков Д. А.* Кибернетика: Навигатор. История кибернетики, современное состояние, перспективы развития. М.: Ленанд, 2016.
105. *Новиков Д. А., Смирнов И. М., Шохина Т. Е.* Механизмы управления динамическими активными системами. М.: ИПУ РАН, 2002.
106. *Новиков Д. А.* Теория управления организационными системами. 2-е издание. М.: Физматлит, 2007.
107. *Новиков Д. А.* Управление системами междисциплинарной природы: результаты и перспективы // Труды IV Международной конференции по проблемам управления. М.: ИПУ РАН, 2009. С. 997–1003.
108. *Новиков Д. А., Цветков А. В.* Механизмы функционирования организационных систем с распределённым контролем. М.: ИПУ РАН, 2001.
109. *Новиков Д. А., Чхартишвили А. Г.* Прикладные модели информационного управления. М.: ИПУ РАН, 2004.

110. *Новиков Д. А., Чхартишвили А. Г.* Рефлексивные игры. М.: Синтег, 2003.

111. *Новиков Д. А., Чхартишвили А. Г.* Рефлексия и управление: математические модели. М.: Физматлит, 2013.

112. *Ольшанский Д. В.* Психология масс. СПб.: Питер, 2001.

113. *Опойцев В. И.* Равновесие и устойчивость в моделях коллективного поведения. М.: Наука, 1977.

114. *Орловский С. А.* Проблемы принятия решений в условиях нечёткой исходной информации. М.: Наука, 1981.

115. *Остапенко А. Г., Радько Н. М., Калашников А. О. и др.* Эпидемии в телекоммуникационных сетях / Под ред. чл.-корр. РАН Д. А. Новикова. М: Горячая линия — Телеком, 2017.

116. *Остапенко А. Г., Паринов А. В., Калашников А. О. и др.* Социальные сети и деструктивный контент / Под ред. чл.-корр. РАН Д. А. Новикова. М: Горячая линия — Телеком, 2017.

117. *Петров А. П., Маслов А. И., Цаплин Н. А.* Моделирование выбора позиций индивидами при информационном противоборстве в социуме // Математическое моделирование. 2015. Т. 27, № 12. С. 137–148.

118. *Петросян Л. А., Гарнаев А. Ю.* Игры поиска. СПб.: Изд-во СПбГУ, 1992.

119. *Петросян Л. А., Зенкевич Н. А., Семина Е. А.* Теория игр. М.: Высшая школа, 1998.

120. *Петросян Л. А., Томский Г. В.* Динамические игры и их приложения. Л.: Изд-во ЛГУ, 1982.

121. *Плотинский Ю. М.* Теоретические и эмпирические модели социальных процессов. М.: Логос, 1998.

122. *Почепцов Г. Г.* Информационно-психологическая война. М.: Синтег, 2000.

123. *Почепцов Г. Г.* Коммуникативные технологии двадцатого века. М.: Рефлбук; К.: Ваклер, 2000.

124. *Робертс Ф. С.* Дискретные математические модели с приложениями к социальным, биологическим и экологическим задачам. М.: Наука, 1986.

125. *Рогаткин А. Д.* Модель Грановеттера с непрерывным временем // Управление большими системами. 2016. № 60. С. 139–160.

126. *Рогаткин А. Д.* Большие уклонения в социальных системах с пороговым конформным поведением // Автоматика и телемеханика. 2016. № 12. С. 127–135.

127. *Рогаткин А. Д.* Оценка вероятности редких событий в поведении толпы // Управление большими системами. 2016. № 63. С. 106–128.

128. *Румер Ю. Б., Рывкин М. Ш.* Термодинамика, статистическая физика и кинетика. М.: Наука, 1972.

129. *Саймон Г.* Науки об искусственном. М.: Мир, 1972.

130. Словарь иностранных слов. М.: Русский язык, 1982.

131. *Словохотов Ю. Л.* Физика и социофизика. Ч. 1–3 // Проблемы управления. 2012. № 1. С. 2–20; № 2. С. 2–31; № 3. С. 2–34.

132. Справочник по теории автоматического управления / Под ред. А. А. Красовского. М.: Наука, 1987.

133. *Стратонович Р. Л.* Теория информации. М.: Сов. Радио, 1975.

134. *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986.

135. *Федянин Д. Н., Чхартишвили А. Г.* Об одной модели информационного управления в социальных сетях // Управление большими системами. 2010. Вып. 31. С. 265–275.

136. *Федянин Д. Н., Чхартишвили А. Г.* Модель информационного управления в активных сетевых структурах при неполной информированности центра // Проблемы управления. 2012. № 6. С. 13–18.

137. *Федянин Д. Н., Чхартишвили А. Г.* Консенсус в социальной сети со сложными узлами // Управление большими системами. 2016. № 64. С. 137–150.

138. *Харари Ф.* Теория графов. М.: КомКнига, 2006.

139. *Харшаньи Д., Зельтен Р.* Общая теория выбора равновесия в играх. СПб.: Экономическая школа, 2001.

140. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. М.: Мир, 1989.

141. *Чалдини Р.* Психология влияния. СПб.: Питер, 2001.

142. *Чхартишвили А. Г.* Теоретико-игровые модели информационного управления. М.: ПМСОФТ, 2005.

143. *Шейнов В. П.* Скрытое управление человеком (психология манипулирования). М.: АСТ, 2002.

144. *Шибутани Т.* Социальная психология. Ростов н/Д: Феникс, 1998.

145. *Ширяев А. Н.* Вероятность. Учеб. пособ. для вузов. М: Наука, 1989.

146. *Юдицкий С. А., Мурадян И. А., Желтова Л. В.* Моделирование динамики развития конфигураций организационных систем на основе сетей Петри и графов приращений // Проблемы управления. 2007. № 6. С. 26–34.

147. *Abelson R. P.* Mathematical models of the distribution of attitudes under controversy // Contributions to Mathematical Psychology. 1964. P. 141–160.

148. *Agaev R. P., Chebotarev P. Y.* The projection method for reaching consensus and the regularized power limit of a stochastic matrix // Automation and Remote Control. 2011. Vol. 72, iss. 12. P. 2458–2476.

149. *Akritidis L., Katsaros D., Bozanis P.* Identifying Influential Bloggers: Time Does Matter // Proceedings of the 2009 IEEE/WIC/ACM International Joint Conference on Web Intelligence and Intelligent Agent Technology. 2009. P. 76–83.

150. *Aleskerov F., Meshcheryakova N., Shvydun S.* Power in Network Structures // Models, Algorithms, and Technologies for Network Analysis. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics. 2016. P. 79–85

151. *Altafini C.* Consensus Problems on Networks with Antagonistic Interactions // IEEE Transactions on Automatic Control. 2013. Vol. 58, № 4. P. 935–946.

152. *Alon N. et al.* A note on competitive diffusion through social networks // Information Processing Letters. 2010. Vol. 110, № 6. P. 221–225.

153. *Axelrod R.* The Structure of Decision: Cognitive Maps of Political Elite. Princeton: Princeton University Press, 1976.

154. *Bailey N.* The Mathematical Theory of Infectious Diseases and Its Applications. New York: Hafner Press, 1975.

155. *Barnes J. A.* Class and Committees in a Norwegian Island Parish // Human Relations. 1954. № 7. P. 39–58.

156. *Bernheim B., Whinston M.* Common agency // Econometrica. 1986. Vol. 54. P. 923–942.

157. *Berger R. L.* A Necessary and Sufficient Conditions for Reaching a Consensus using DeGroot's method // Journal of American Statistical Association. 1981. Vol. 76. P. 415–419.

158. *Bimber B., Flanagin A., Stohl C.* Reconceptualizing Collective Action in the Contemporary Media Environment // Communication Theory. 2005. Vol. 15, № 4. P. 365–388.

159. *Bineham J.* A Historical Account of the Hypodermic Model in Mass Communication // Communication Monographs. 1988. Vol. 55, № 3. P. 230–246.

160. *Borodin A., Filmus Y., Oren J.* Threshold models for competitive influence in social networks // International Workshop on Internet and Network Economics. 2010. P. 539–550.

161. *Bramoulle Y., Kranton R.* Public Goods in Networks // Journal of Economic Theory. 2007. Vol. 135, № 1. P. 478–494.

162. *Breer V.* Game-theoretic Model of Non-anonymous Threshold Conformity Behavior // Automation and Remote Control. 2012. Vol. 73, № 7. P. 1256–1264.

163. *Breer V., Novikov D.* Models of Mob Control // Automation and Remote Control. 2013. Vol. 74, № 12. P. 2143–2154.

164. *Briscoe B., Odlyzko A., Tilly B.* Metcalfe's Law is Wrong. 2006. URL: `http://spectrum.ieee.org/computing/networks/metcalfes-law-is-wrong` (дата обращения: 25.03.2018).

165. *Budak C., Agrawal D., El Abbadi A.* Limiting the spread of misinformation in social networks // Proceedings of the 20th international conference on World wide web. ACM, 2011. P. 665–674.

166. *Burke D.* Towards a Game Theory Model of Information Warfare. NY: BiblioScholar, 2012.

167. *Burt R. S.* Brokerage and Closure. Oxford: Oxford University Press, 2005.

168. *Buttle F. A.* Word-of-Mouth: Understanding and Managing Referral Marketing // Journal of Strategic Marketing. 1998. Vol. 6. P. 241–254.

169. *Cao Y., Yu W., Ren W., Chen G.* An Overview of Recent Progress in the Study of Distributed Multi-Agent Coordination // IEEE Transactions on Industrial Informatics. Vol. 9, iss. 1. 2013. P. 427–438.

170. *Carnes T., Nagarajan C., Wild S. M., Zuylen A.* Maximizing Influence in a Competitive Social Network: A Follower's Perspective // Proceedings of the Ninth International Conference on Electronic Commerce. 2007. P. 351–360.
171. *Centola D., Macy M.* Complex Contagion and the weakness of long ties // American Journal of Sociology. 2007. Vol. 113, iss. 3. P. 702–734.
172. *Chatterjee S., Seneta E.* Toward Consensus: Some Convergence Theorems on Repeated Averaging // Journal of Applied Probability. 1977. Vol. 14. P. 159–164.
173. *Chen W., Lu W., Zhang N.* Time-critical influence maximization in social networks with time-delayed diffusion process // Proceedings of the Twenty-Sixth AAAI Conference on Artificial Intelligence. 2012. P. 592–598.
174. *Chen W., Yuan Y., Zhang L.* Scalable influence maximization in social networks under the linear threshold model // IEEE 10th International Conference on Data Mining (ICDM). IEEE, 2010. P. 88–97.
175. *Chwe M. S.* Communication and Coordination in Social Networks // Review of Economic Studies. 2000. Vol. 67. P. 1–16.
176. *Clifford P., Sudbury A.* A model for spatial conflict // Biometrika. 1973. Vol. 60, № 3. P. 581–588.
177. *DeGroot M. H.* Reaching a Consensus // Journal of American Statistical Association. 1974. № 69. P. 118–121.
178. *Deffuant G., Neau D., Amblard F., Weisbuch G.* Mixing beliefs among interacting agents // Advances in Complex Systems. 2000. Vol. 03. P. 87–98.
179. *Del Vicario M., Scala A., Caldarelli G., Stanley H. E., Quattrociocchi W.* Modeling confirmation bias and polarization // Scientific Reports. 2017. Vol. 7. Art. № 40391.
180. *Deutsch M., Gerard H. B.* A Study of Normative and Informational Social Influences upon Individual Judgment // Journal of Abnormal and Social Psychology. 1955. № 51. P. 629–636.
181. *Dodds P., Watts D. A.* Generalized Model of Social and Biological Contagion // Journal of Theoretical Biology. 2005. № 232. P. 587–604.
182. *Dodson J., Muller E.* Models of New Product Diffusion through Advertising and Word-of-Mouth // Management Science. 1978. № 24. P. 1568–1578.
183. *Domingos P., Richardson M.* Mining the Network Value of Customers // Proceedings of the Seventh International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining. 2002. P. 57–66.
184. *Eguíluz V., Klemm K.* Epidemic Threshold in Structured Scale-free Networks // Physical Review Letters. 2002. Vol. 89. Art. № 108701.
185. *Katz E., Lazarsfeld P.* Personal Influence: the Part Played by People in the Flow of Mass Communications. Transaction Publishers, 1966.
186. *Ellis R.* Entropy, Large Deviations and Stochastical Mechanics. New York: Springer, 1985.
187. *Even-Dar E., Shapira A.* A Note on Maximizing the Spread of Influence in Social Networks // International Workshop on Web and Internet Economics. 2007. P. 281–286.

188. *Everton S. F.* Disrupting Dark Networks (Structural Analysis in the Social Sciences). Cambridge: Cambridge University Press, 2012.

189. *Felsenthal D., Machover M.* The Measurement of Voting Power: Theory and Practice, Problems and Paradoxes. London: Edward Elgar, 1998.

190. *Florian M., Hearn D.* Network equilibrium models and algorithms // Handbooks in Operations Research and Management Science. 1995. Vol. 8. P. 485–550.

191. *Freeman L. C.* A set of measure of centrality based on betweenness // Sociometry. 1977. Vol. 40. P. 35–41.

192. *French J. R.* A formal theory of social power // The Psychological Review. 1956. № 63. P. 181–194.

193. *Friedkin N. E., Johnsen E. C.* Social Influence Network Theory: A Sociological Examination of Small Group Dynamics. Cambridge: Cambridge University Press. 2011.

194. *Fujishige S.* Submodular Functions and Optimization. NY: North-Holland Press, 1991.

195. *Germeier Yu.* Non-antagonistic Games. Dordrecht, Boston: D. Reidel Pub. Co., 1986.

196. *Gladwell M.* The Tipping Point: How Little Things Can Make a Big Difference. Little Brown & Company, 2000.

197. *Godes D., Mayzlin D.* Using Online Conversations to Study Word of Mouth Communication // Marketing Science. 2004. № 23. P. 545–560.

198. *Goldenberg J., Libai B., Muller E.* Talk of the Network: A Complex Systems Look at the Underlying Process of Word-of-Mouth // Marketing Letters. 2001. № 2. P. 11–34.

199. *Golub B., Jackson M.* Naive Learning in Social Networks and the Wisdom of Crowds // American Economic Journal: Microeconomics. 2010. Vol. 2, № 1. P. 112–149.

200. *Goyal A., Lu W., Lakshmanan L. V. S.* Celf++: optimizing the greedy algorithm for influence maximization in social networks // Proceedings of the 20th international conference companion on World wide web. ACM, 2011. P. 47–48.

201. *Goyal A., Lu W., Lakshmanan L. V. S.* Simpath: An efficient algorithm for influence maximization under the linear threshold model // IEEE 11th International Conference on Data Mining (ICDM). IEEE, 2011. P. 211–220.

202. *Goyal A. et al.* On minimizing budget and time in influence propagation over social networks // Social network analysis and mining. 2013. Vol. 3, № 2. P. 179–192.

203. *Grabisch M., Rusinowska A.* A Model of Influence in a Social Network. URL: http://halshs.archives-ouvertes.fr/docs/00/34/44/57/PDF/B08066.pdf (дата обращения: 25.03.2018).

204. *Granovetter M.* The Strength of Weak Ties // The American Journal of Sociology. 1973. Vol. 78, № 6. P. 1360–1380.

205. *Granovetter M.* Threshold Models of Collective Behavior // The American Journal of Sociology. 1978. Vol. 83, № 6. P. 1420–1443.

206. *Harary F.* A Criterion for Unanimity in French's Theory of Social Power // Studies in Social Power. Michigan: Institute of Sociological Research, 1959. P. 168–182.

207. *He X. et al.* Influence blocking maximization in social networks under the competitive linear threshold model // Proceedings of the 2012 SIAM International Conference on Data Mining. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2012. P. 463–474.

208. *Hegselman R., Krause U.* Opinion Dynamics and Bounded Confidence Models, Analysis and Simulation // Journal of Artificial Societies and Social Simulation. 2002. Vol. 5, N 3.

209. *Hegselmann R., Krause U.* Opinion dynamics under the influence of radical groups, charismatic leaders, and other constant signals: A simple unifying model // Networks and Heterogeneous Media. 2015. Vol. 10, № 3. P. 477–509.

210. *Hethcote H. W.* The Mathematics of Infectious Diseases // SIAM Review. 2000. Vol. 42, № 4. P. 599–653.

211. *Hoede C., Bakker R.* A Theory of Decisional Power // Journal of Mathematical Sociology. 1982. № 8. P. 309–322.

212. *Howard A., Jebara T.* Dynamical Systems Trees // Uncertainty in Artificial Intelligence. 2003. P. 260–267.

213. *Howard N.* Theory of Meta-games // General systems. 1966. № 11. P. 187–200.

214. Glossary on Control Theory and its Applications. URL: `http://glossary.ru` (дата обращения: 25.03.2018).

215. *Iskakov M., Iskakov A.* Equilibrium in secure strategies // CORE Discussion Paper 2012/61. Louvain-la-Neuve: CORE, 2012.

216. *Jackson M.* Social and Economic Networks. Princeton: Princeton University Press, 2008.

217. *Jackson M.* The Stability and Efficiency of Economic and Social Networks // Advances in Economic Design, 2003.

218. *Jager W., Amblard F.* Uniformity, bipolarization and pluriformity captured as generic stylized behavior with an agent-based simulation model of attitude change // Computational & Mathematical Organization Theory. 2005. Vol. 10, № 4. P. 295–303.

219. *Janky B., Takács K.* Social Control, Participation in Collective Action and Network Stability. HUNNET Working Paper, 2002.
URL: `http://www.socialnetwork.hu/cikkek/jankytakacs.pdf`
(дата обращения: 25.03.2018).

220. *Jiang Q. et al.* Simulated Annealing Based Influence Maximization in Social Networks // AAAI. 2011. Vol. 11. P. 127–132.

221. *Jung K., Heo W., Chen W.* Irie: Scalable and robust influence maximization in social networks // IEEE 12th International Conference on Data Mining (ICDM). IEEE, 2012. P. 918–923.

222. *Kadushin C.* Understanding social networks: Theories, concepts, and findings. Oxford: Oxford University Press, 2012.

223. *Kearns M.*, *Siddharth S.*, *Montfort N.* An Experimental Study of the Coloring Problem on Human Subject Networks // Science. 2006. № 313. P. 824–827.

224. *Kempe D.*, *Kleinberg J.*, *Tardos E.* Maximizing the Spread of Influence through a Social Network // Proceedings of the 9-th ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining. 2003. P. 137–146.

225. *Kempe D.*, *Kleinberg J.*, *Tardos E.* Maximizing the Spread of Influence through a Social Network // Theory of Computing. 2015. Vol. 11, № 4. P. 105–147.

226. *Krause U.* A Discrete Nonlinear and Non-autonomous Model of Consensus Formation // Communications in Difference Equations. 2000. P. 227–236.

227. *Langville A.*, *Meyer C.* A survey of eigenvector methods for Web information retrieval // SIAM Rev. 2005. № 47. P. 135–161.

228. *Langville A.*, *Meyer C.* Google's PageRank and Beyond: The Science of Search Engine Rankings. Princeton: Princeton University Press, 2006.

229. *Lansing J.* Artificial Societies and Social Science. Santa Fe, 2005.

230. *Latané B.*, *l'Herrou T.* Spatial Clustering in the Conformity Game: Dynamic Social Impact in Electronic Groups // Journal of Personality and Social Psychology. 1996. № 70. P. 1218–1230.

231. *Leskovec J.*, *Adamic L.*, *Huberman B.* The Dynamics of Viral Marketing, 2005. URL: `http://arxiv.org/abs/physics/0509039` (дата обращения: 25.03.2018)

232. *Leskovec J.*, *Krause A.*, *Guestrin C.*, *Faloutsos C.*, *Vanbriesen J.*, *Glance N.* Cost-effective Outbreak Detection in Networks // Proceedings of the 13-th ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining. 2007. P. 420–429.

233. *Lewis D.* Convention: a Philosophical Study. Cambridge: Harvard University Press, 1969.

234. *Li Y. et al.* Influence diffusion dynamics and influence maximization in social networks with friend and foe relationships // Proceedings of the sixth ACM international conference on Web search and data mining. ACM, 2013. P. 657–666.

235. *Liggett T. M.* Interacting particle systems. Springer, 1985.

236. *Lin Y.*, *Shi X.*, *Wei Y.* On computing PageRank via lumping the Google matrix // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2009. Vol. 224, № 2. P. 702–708.

237. *Liu B. et al.* Time constrained influence maximization in social networks // IEEE 12th International Conference on Data Mining (ICDM). IEEE, 2012. P. 439–448.

238. *Lu W. et al.* The bang for the buck: fair competitive viral marketing from the host perspective // Proceedings of the 19th ACM SIGKDD international conference on Knowledge discovery and data mining. ACM, 2013. P. 928–936.

239. *Mahdian M., Anagnostopoulos A., Kumar R.* Influence and Correlation in Social Network // Proceeding of the 14-th ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining, 2008. P. 7–15.

240. *Mas-Collel A., Whinston M. D., Green J. R.* Microeconomic Theory. NY: Oxford Univ. Press, 1995.

241. *Miller D.* Introduction to Collective Behavior and Collective Action. Long Grove, Ill.: Waveland Press, 2013.

242. *Morris S.* Contagion // The Review of Economic Studies. 2000. Vol. 67, № 1. P. 57–78.

243. *Moscovici S., Zavalloni M.* The group as a polarizer of attitudes // Journal of Personality and Social Psychology. 1969. Vol. 12, № 2. P. 125.

244. *Mossel E., Roch S.* Submodularity of influence in social networks: From local to global // SIAM Journal on Computing. 2010. Vol. 39, № 6. P. 2176–2188.

245. *Myerson R. B.* Game Theory: Analysis of Conflict. London: Harvard Univ. Press, 1991.

246. *Nemhauser G., Wolsey L., Fisher M.* An Analysis of the Approximations for Maximizing Submodular Set Functions // Mathematical Programming. 1978. № 14. P. 265–294.

247. *Newman M.* Networks: an introduction. Oxford university press, 2010.

248. *Newman M.* The Structure and Function of Complex Networks // SIAM Review. 2003. P. 167–256.

249. *Novikov D.* Cognitive Games: a Linear Impulse Model // Automation and Remote Control. 2010. Vol. 71, № 10. P. 718–730.

250. *Novikov D.* Theory of Control in Organizations. NY: Nova Science Publishers, 2013.

251. *Novikov D.* Models of Network Excitation Control // Procedia Computer Science. 2014. Vol. 31. P. 184–192.

252. *Novikov D., Chkhartishvili A.* Reflexion and Control: Mathematical Models. Leiden: CRC Press, 2014.

253. *Oliver N., Rosario B., Pentland A.* Graphical Models for Recognizing Human Interactions // Proceedings of International Conference on Neural Information and Processing Systems (NIPS), 1998. P. 924–930.

254. *Olson M.* The Logic of Collective Action: Public Goods and the Theory of Groups. Harvard: Harvard University Press, 1971.

255. *O'Reilly T.* What Is Web 2.0. URL: `http://www.oreilly.com/pub/a/web2/archive/what-is-web-20.html` (дата обращения: 25.03.2018).

256. Oxford English Dictionary. URL: `https://en.oxforddictionaries.com` (дата обращения: 25.03.2018).

257. *Parsegov S. E., Proskurnikov A. V., Tempo R., Friedkin N. E.* Novel Multidimensional Models of Opinion Dynamics in Social Networks // IEEE Transactions on Automatic Control. 2017. Vol. 62, № 5. P. 2270–2285.

258. *Pathak N.*, *Banerjee A.*, *Srivastava J.* A generalized linear threshold model for multiple cascades // IEEE 10th International Conference on Data Mining (ICDM). IEEE, 2010. P. 965–970.

259. *Rao A.*, *Spasojevic N.*, *Li Z.*, *Dsouza T.* Klout score: Measuring influence across multiple social networks // 2015 IEEE International Conference on Big Data, Big Data 2015, Santa Clara, CA, USA, October 29 – November 1, 2015. P. 2282–2289.

260. *Reed D. P.* That Sneaky Exponential — Beyond Metcalfe's Law to the Power of Community Building. 1999. URL: `https://www.immagic.com/eLibrary/ARCHIVES/GENERAL/GENREF/C030200R.pdf` (дата обращения: 25.03.2018)

261. *Romualdo P.*, *Alessandro V.* Epidemic Spreading in Scale-Free Networks // Physical Review Letters. 2001. Vol. 86, № 14. P. 3200–3203.

262. *Rogers E. M.* Diffusion of Innovations. New York, London: Free Press, 1983.

263. *Roughgarden T.* Selfish Routing and the Price of Anarchy. MIT Press, 2005.

264. *Rusinowska A.*, *Swart H.* Generalizing and Modifying the Hoede — Bakker Index. Theory and Applications of Relational Structures as Knowledge Instruments. № 2. Springer's Lecture Notes in Artificial Intelligence 4342. Springer, 2007. P. 60–88.

265. *Saul L. K.*, *Jordan M. I.* Mixed Memory Markov Models: Decomposing Complex Stochastic Processes as Mixtures of Simpler Ones // Machine Learning. 1999. Vol. 37, № 1. P. 75–87.

266. *Schiff J. L.* Cellular Automata: A Discrete View of the World. NY: Wiley, 2007.

267. *Shapley L.*, *Shubik M.* A method for Evaluating the Distribution of Power in a Committee System // American Political Science Review. 1954. Vol. 48, № 3. P. 787–792.

268. *Shoham Y.*, *Leyton-Brown K.* Multiagent systems: Algorithmic, Game-Theoretical and Logical Foundations. Cambridge: Cambridge University Press, 2009.

269. *Shrager J.*, *Hogg T.*, *Huberman B.* Observation of Phase-Transitions in Spreading Activation Networks // Science. 1987. Vol. 236, № 4805. P. 1092–1094.

270. *Shubik M.* Game Theory in the Social Sciences: Concepts and Solutions. Cambridge, MA: MIT Press, 1982.

271. *Simeonov S.* Metcalfe's Law: more misunderstood than wrong? 2006. URL: `http://blog.simeonov.com/2006/07/26/metcalfes-law-more-misunderstood-than-wrong/` (дата обращения: 25.03.2018).

272. *Sun J.*, *Tang J.* A survey of models and algorithms for social influence analysis // Social network data analytics. Boston, MA: Springer, 2011. P. 177–214.

273. *Tarnow E.* Like Water and Vapor — Conformity and Independence in the Large Group. URL: `http://cogprints.org/4274/1/LargeGroupOrderTarnow.pdf` (дата обращения: 25.03.2018).

274. *Topkis D. M.* Supermodularity and Complementarity. Princeton: Princeton Univ. Press, 2001.

275. *Tuomela R.* Shared Belief. URL: `https://pdfs.semanticscholar.org/ab46/6f6f01a4c709fc348732b26fa26d53c21e0e.pdf` (дата обращения: 25.03.2018).

276. *Tzoumas V., Amanatidis C., Markakis E.* A game-theoretic analysis of a competitive diffusion process over social networks // International Workshop on Internet and Network Economics. Berlin, Heidelberg: Springer, 2012. P. 1–14.
277. *Urbig D., Lorenz J., Herzberg H.* Opinion dynamics: The effect of the number of peers met at once // Journal of Artificial Societies and Social Simulation. 2008. Vol. 11, № 2. P. 4.
278. *Valente T.* Network Models of the Diffusion of Innovations. Cresskill, NJ: Hampton Press, 1995.
279. *Wang C., Chen W., Wang Y.* Scalable influence maximization for independent cascade model in large-scale social networks // Data Mining and Knowledge Discovery. 2012. Vol. 25, № 3. P. 545–576.
280. *Wardrop J.* Some theoretical aspects of road traffic research // Proc. Institute of Civil Engineers. 1952. Part II. Vol. 1. P. 325–378.
281. *Wasserman S., Faust K.* Social network analysis: Methods and applications. Cambridge university press, 1994.
282. *Watts D.* The “New” Science of Networks // Annual Review of Sociology. 2004. Vol. 30. P. 243–270.
283. *Watts D., Dodds P.* Influentials, Networks, and Public Opinion Formation // Journal of Consumer Research. 2007. № 34. P. 441–458.
284. *Wei R.* Consensus Seeking, Formation Keeping and Trajectory Tracking in Multiple Vehicle Cooperative Control. PhD Dissertation. Brigham Young University, 2004.
285. *Wu F., Huberman B., Adamic L., Tyler J.* Information flow in social groups // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. 2004. Vol. 337, № 1–2. P. 327–335.
286. *Young P.* The Spread of Innovations by Social Learning. 2006. URL: `http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.506.3276&rep=rep1&type=pdf` (дата обращения: 25.03.2018).
287. *Zhang D., Gatica-Perez D., Bengio S., Roy D.* Learning Influence among Interacting Markov Chains // Neural Information Processing Systems (NIPS). 2005. P. 132–141.
288. *Zhu M., Kuskova V., Wasserman S., Contractor N.* Correspondence analysis of multirelational multilevel networks // Multilevel Network Analysis for the Social Sciences. Cham: Springer, 2016. P. 145–172.

Научное издание

Дмитрий Алексеевич Губанов
Дмитрий Александрович Новиков
Александр Гедеванович Чхартишвили

СОЦИАЛЬНЫЕ СЕТИ:
модели информационного влияния,
управления и противоборства

Подписано в печать 27.09.2018 г. Формат 60×90 1/16. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Печ. л. 14. Тираж 1000 экз. Заказ №

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. (499) 241–08–04.

Отпечатано в ООО «Типография „Миттель-Пресс“».
г. Москва, ул. Руставели, д. 14, стр. 6.
Тел./факс +7 (495) 619–08–30, 647–01–89.
E-mail: mittelpress@mail.ru