

Einführung in die Modellierung

In diesem Semester

R als Werkzeug in der Modellierung

Ökologische Modelle

Hydrologische Modelle

(Ökohydrologische Modelle)

Einführung in die Modellierung

Heute

Rekapitulation

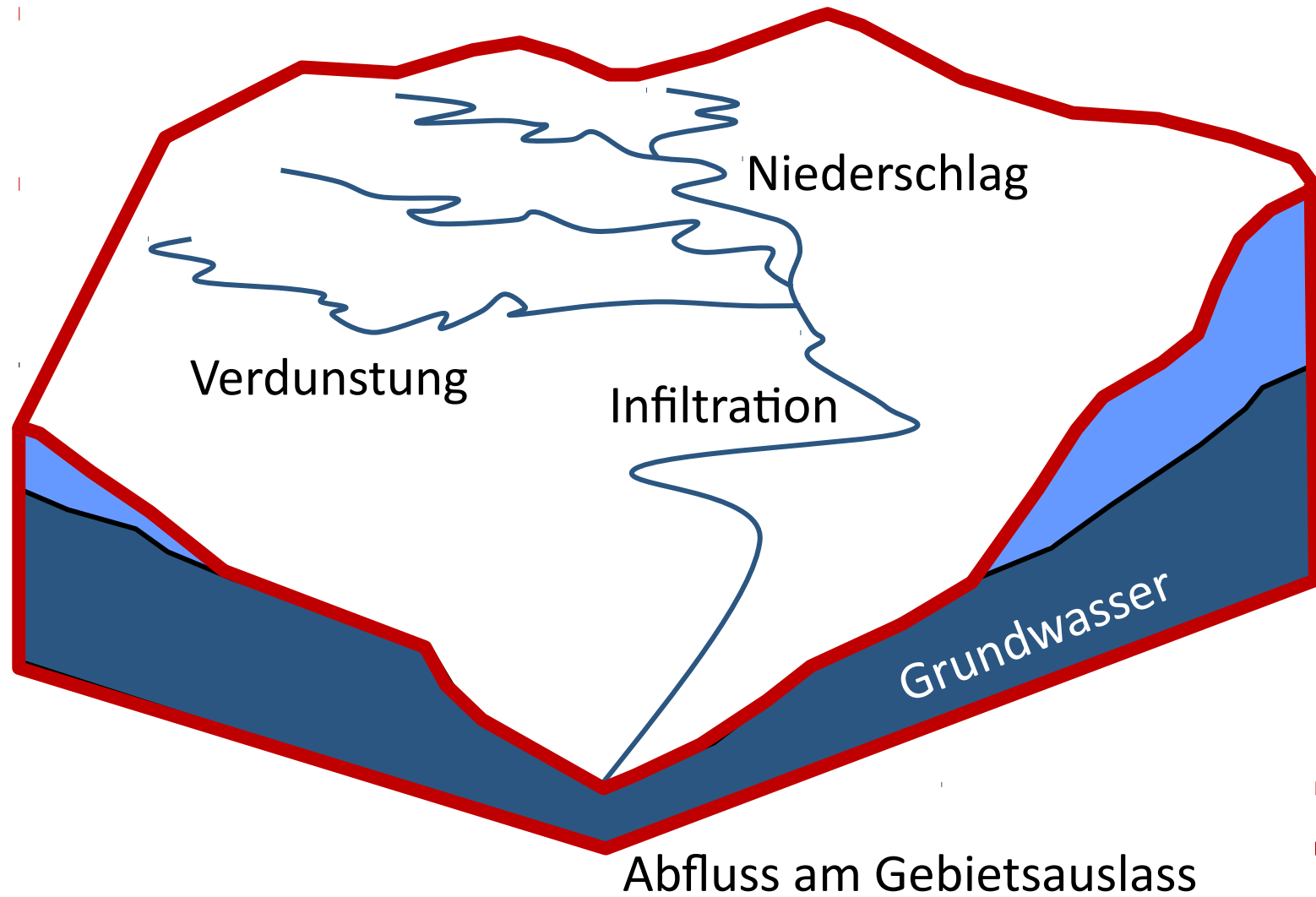
abc & d

Moodletest

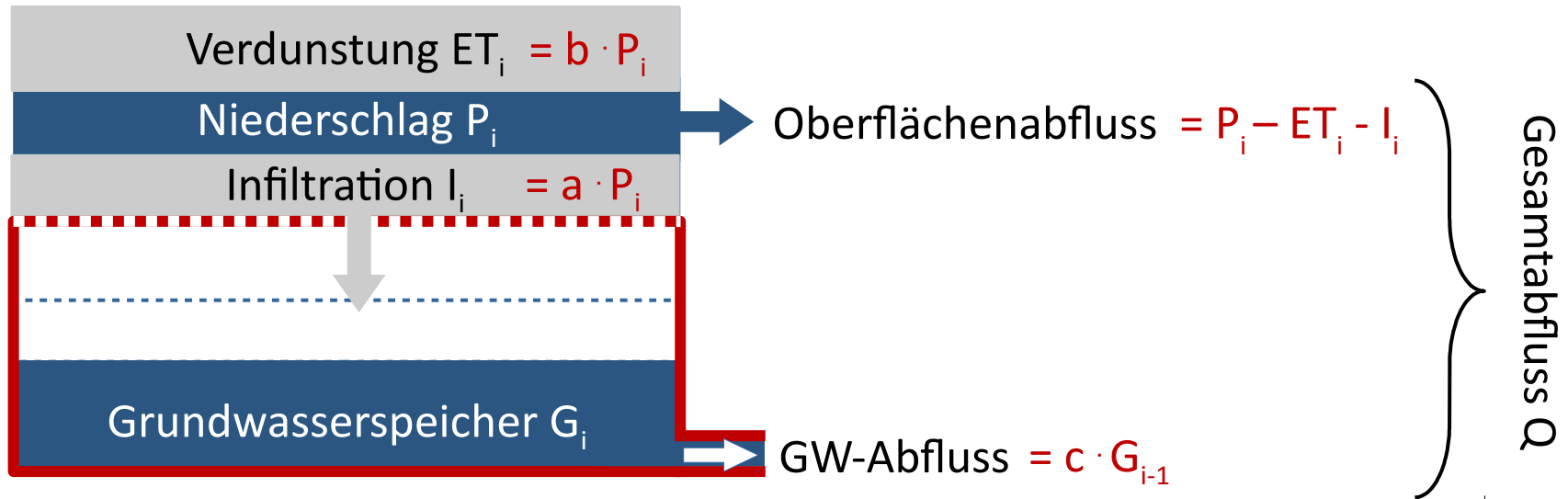
Abfluss als Komponente des Wasserhaushalts

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = P - ET - Q$$

Wasserhaushaltsmodelle (Wiederholung)



Kontinuierlicher Wasserhaushalt mit dem *abc*-Modell



Gleichung für Gesamtabfluss Q_i am Gebietsauslass

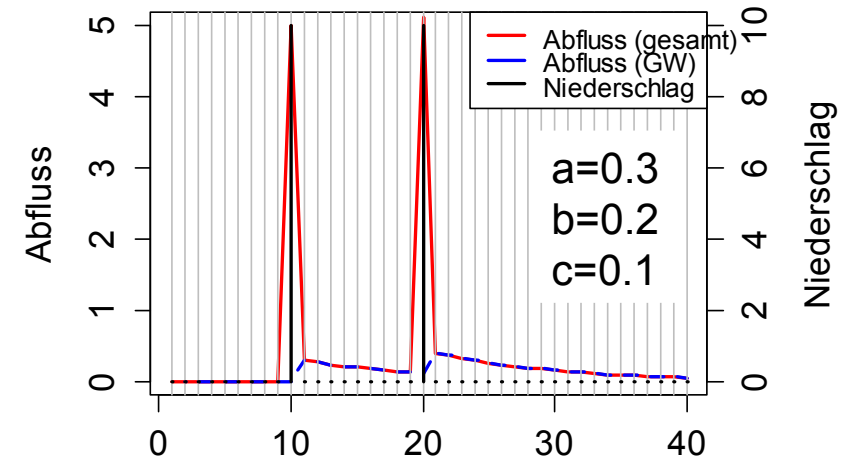
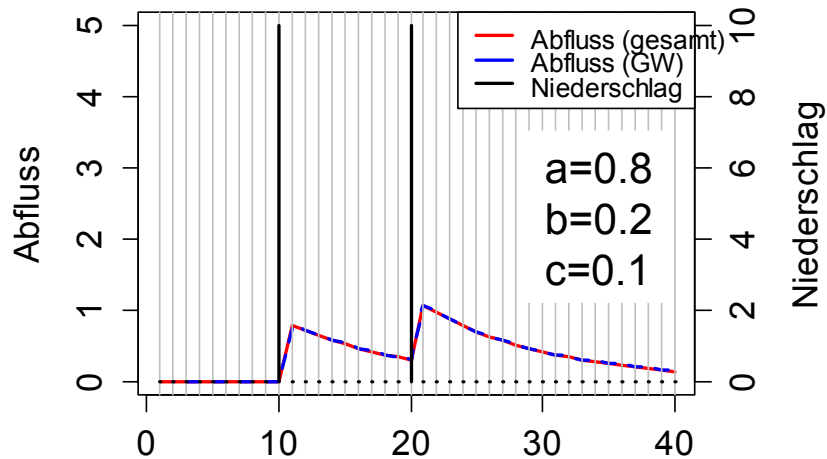
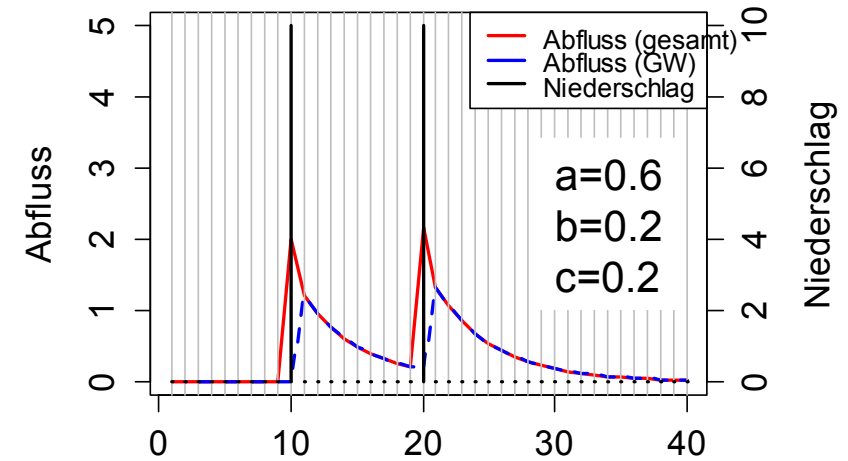
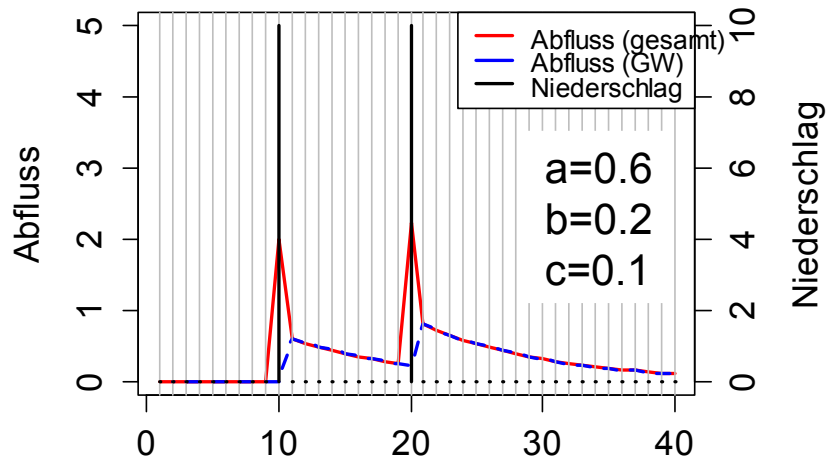
$$Q_i = AO_i + AG_i = (1-a-b)P_i + cG_{i-1}$$



Neuberechnung des Grundwasserspeichers G_i im Zeitschritt i

$$G_i = (1-c)G_{i-1} + aP_i$$

Kontinuierlicher Wasserhaushalt mit dem *abc*-Modell



Zeitindex

Zeitindex

Abfluss als Komponente des Wasserhaushalts

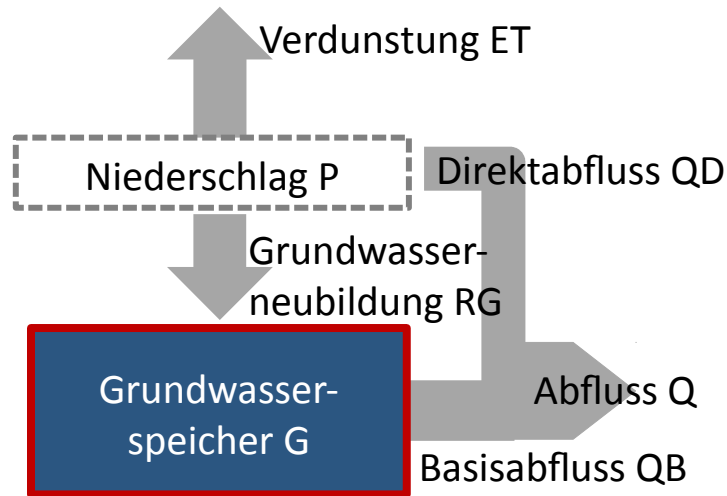
$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = P - ET - Q$$

Das abc-Modell

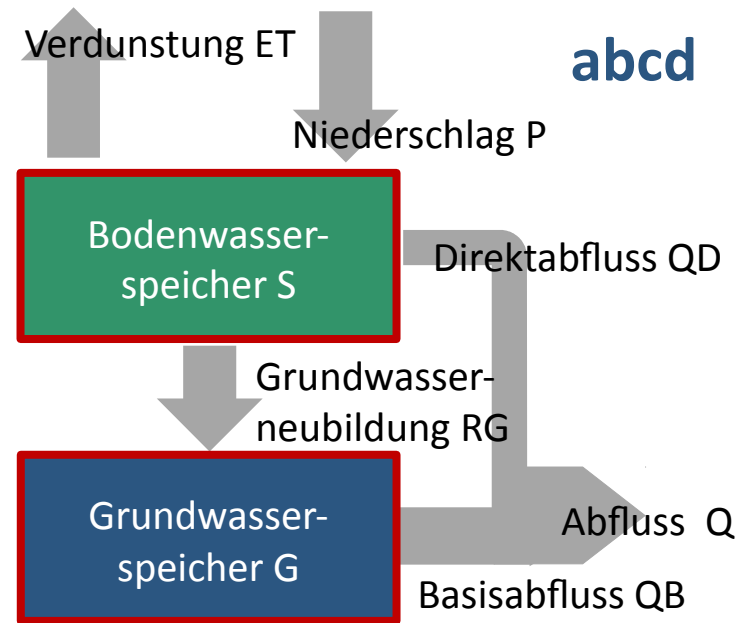
- ☒ Massenerhaltung als Grundprinzip
- ☐ Einfluss der Gebietsfeuchte auf Abflussbildung
- ☐ Abbildung physikalischer Prozesse (Verdunstung, Schnee)

Nach *abc* kommt *abcd*...

abc



abcd



Ansatz des abcd-Modells

Aufteilung des monatlichen Niederschlags P in

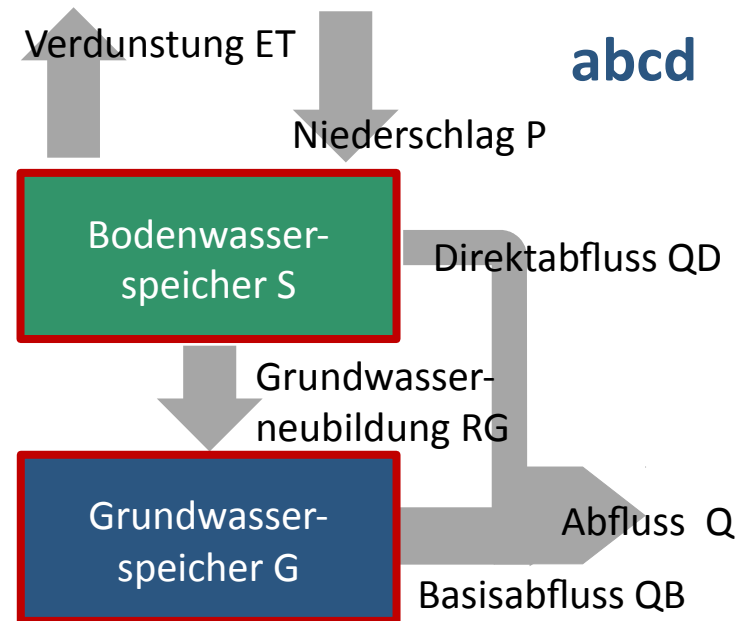
- Änderung der Bodenfeuchte S
- Evapotranspiration ET ,
- Direktabfluss QD ,
- Grundwasserneubildung RG

Diese Aufteilung hängt ab von

- der Menge des Niederschlags P
- der Potenziellen Evapotranspiration PET
- der Anfangsbodenfeuchte S_{i-1}

Basisabfluss

- Der GW-Speicher verhält sich analog zum abc-Modell
- Basisabfluss QB ist proportional zum GW-Speicher G



Idee #1

Verdunstung und Bodenspeicher sind beschränkt!

Im Monat i ist $W_i = P_i + S_{i-1}$ verfügbar für

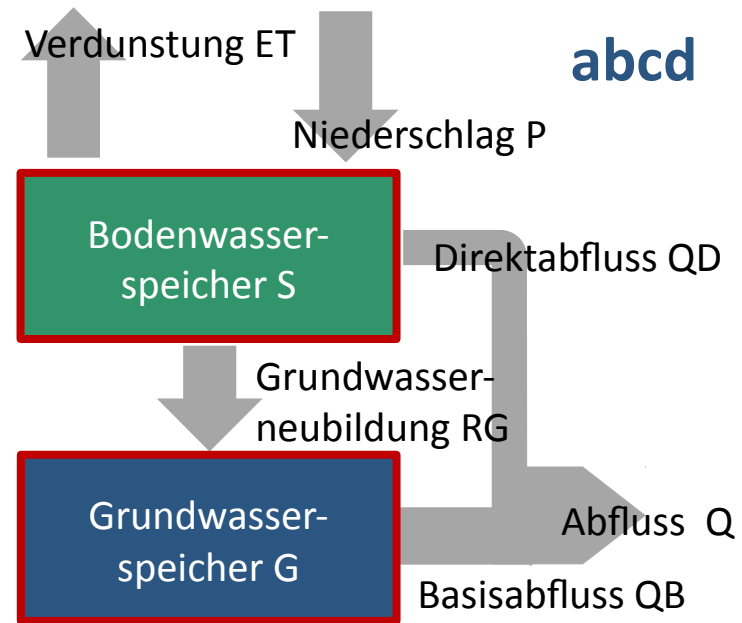
- die Auffüllung des Bodens auf S_i
- für Verdunstung ET_i

Die Summe aus beiden heiße $Y_i = S_i + ET_i$

Zunächst berechnen wir Y_i ...

...und dann erst die Aufteilung in S_i und ET_i

- Y_i sei eine Funktion von W_i



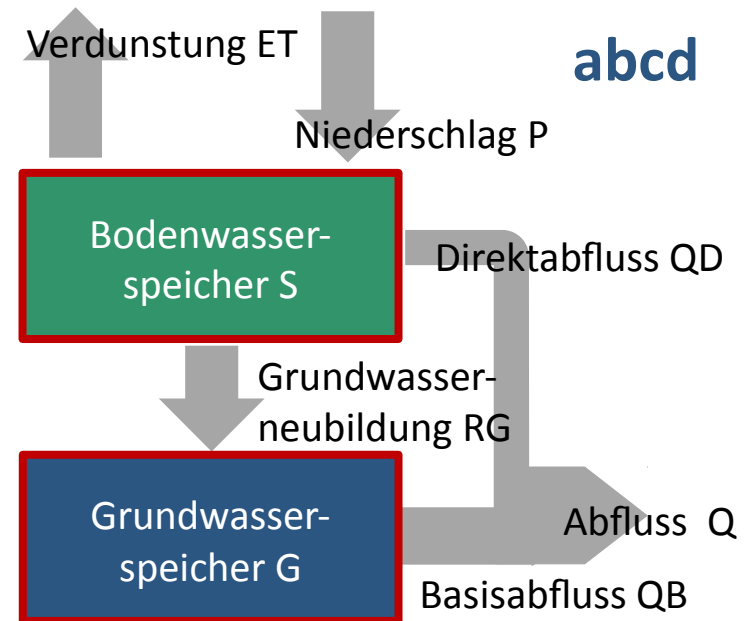
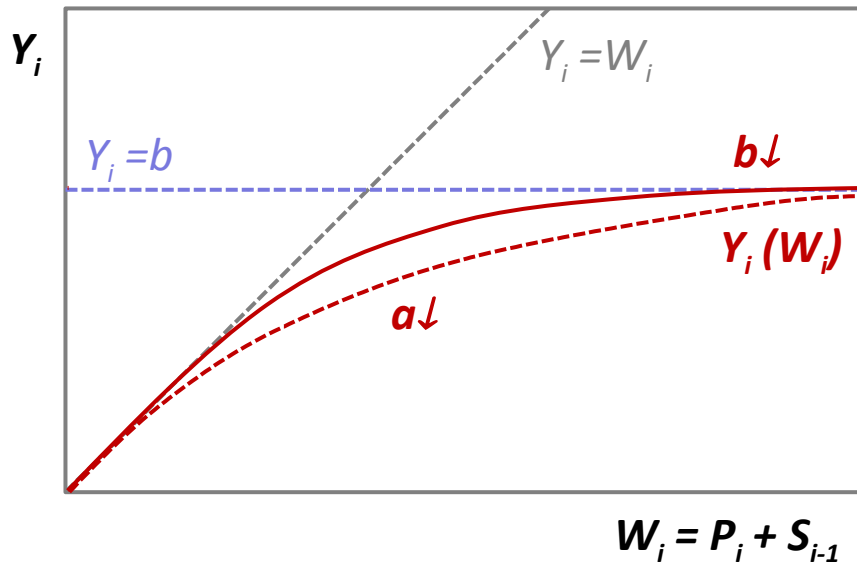
Idee #1

Verdunstung und Bodenspeicher sind beschränkt!

Im Monat i ist $W_i = P_i + S_{i-1}$ verfügbar für

- die Auffüllung des Bodens auf S_i
- für Verdunstung ET_i

Die Summe aus beiden heiße $Y_i = S_i + ET_i$



Idee #1

Verdunstung und Bodenspeicher sind beschränkt!

Im Monat i ist $W_i = P_i + S_{i-1}$ verfügbar für

- die Auffüllung des Bodens auf S_i
- für Verdunstung ET_i

Die Summe aus beiden heiße $Y_i = S_i + ET_i$

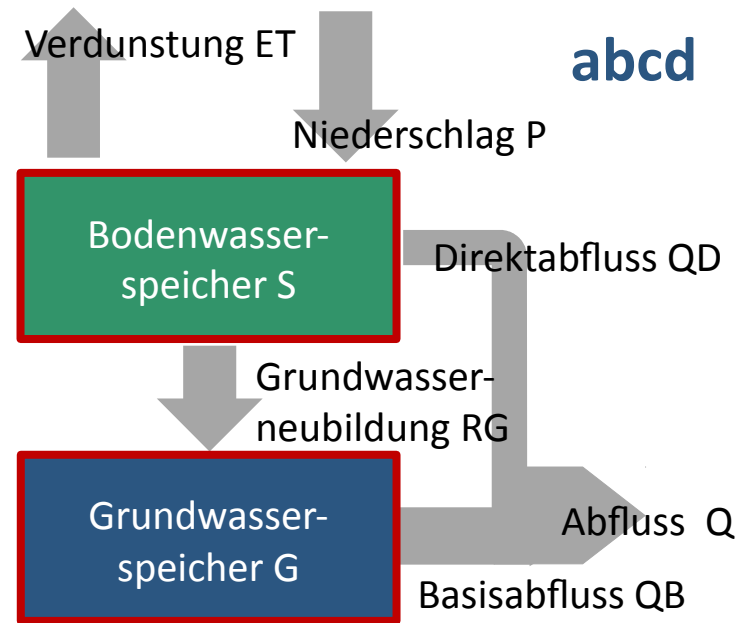
Zunächst berechnen wir Y_i ...

...und dann erst die Aufteilung in S_i und ET_i

- Y_i sei eine Funktion von W_i
- W_i klein $\Rightarrow Y_i = W_i$
- W_i groß $\Rightarrow Y_i$ nähert sich asymptotisch dem Wert b
- a kontrolliert die Geschwindigkeit der Annäherung an b



Was passiert mit dem Überschuss $W_i - Y_i$?



Idee #1

Verdunstung und Bodenspeicher sind beschränkt!

Im Monat i ist $W_i = P_i + S_{i-1}$ verfügbar für

- die Auffüllung des Bodens auf S_i
- für Verdunstung ET_i

Die Summe aus beiden heiße $Y_i = S_i + ET_i$

Zunächst berechnen wir Y_i ...

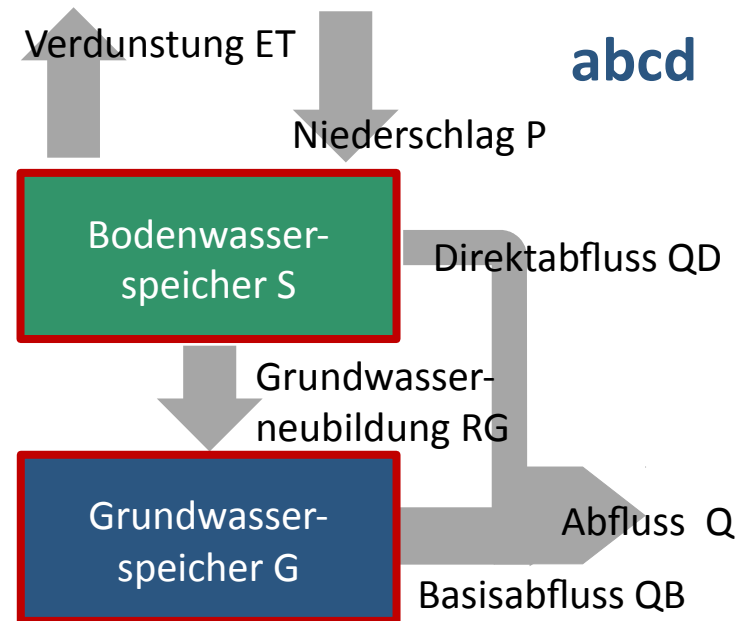
...und dann erst die Aufteilung in S_i und ET_i

- Y_i sei eine Funktion von W_i
- W_i klein $\Rightarrow Y_i = W_i$
- W_i groß $\Rightarrow Y_i$ nähert sich asymptotisch dem Wert b
- a kontrolliert die Geschwindigkeit der Annäherung an b



Implementiere die Funktion $Y_i(W_i)$ in R (abcd.R).

Zeige, dass die Funktion die gewünschten Eigenschaften hat.



$$Y_i(W_i) = \frac{W_i + b}{2a} - \sqrt{\left(\frac{W_i + b}{2a}\right)^2 - \frac{bW_i}{a}}$$

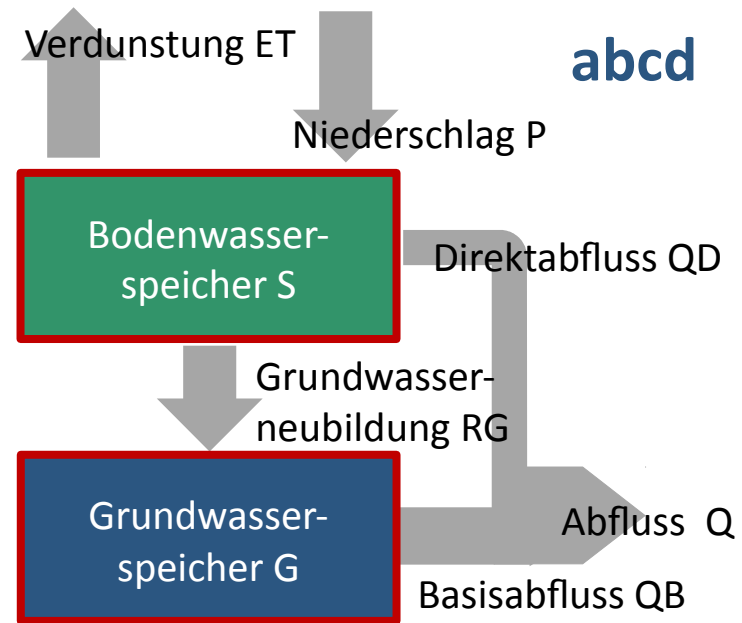
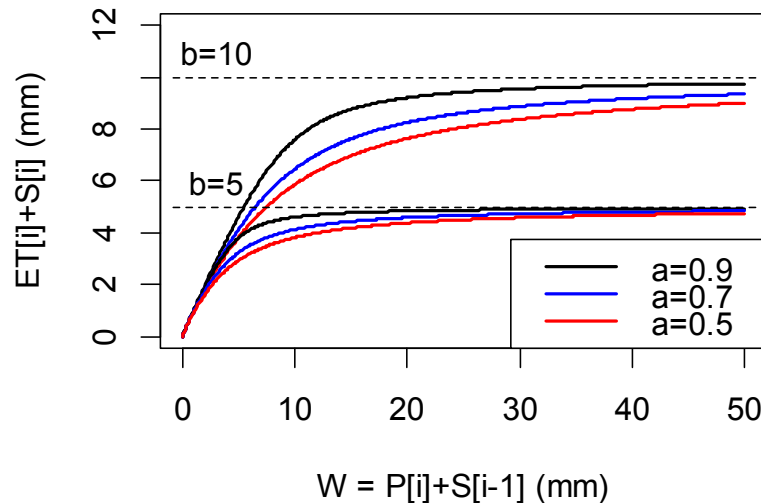
Idee #1

Verdunstung und Bodenspeicher sind beschränkt!

Im Monat i ist $W_i = P_i + S_{i-1}$ verfügbar für

- die Auffüllung des Bodens auf S_i
- für Verdunstung ET_i

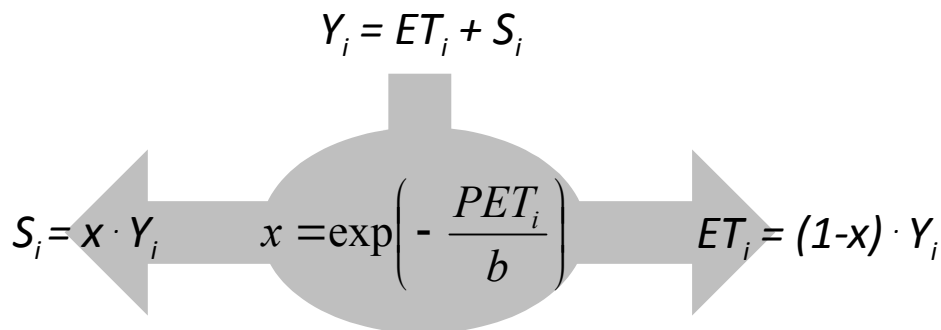
Die Summe aus beiden heiße $Y_i = S_i + ET_i$



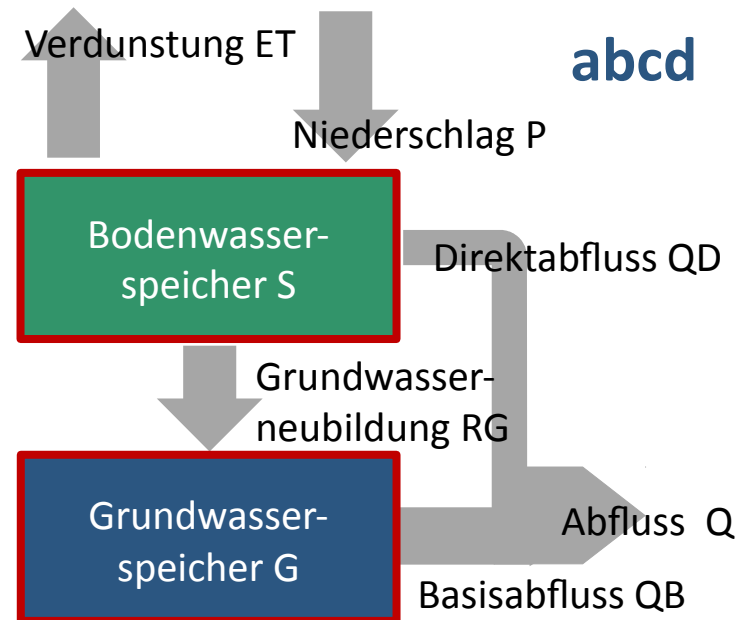
Idee #2

Aufteilung von Y_i zwischen Verdunstung ET_i und Boden S_i hängt ab von

- der Potenziellen Verdunstung PET und
- der Speicherkapazität des Bodens (b)



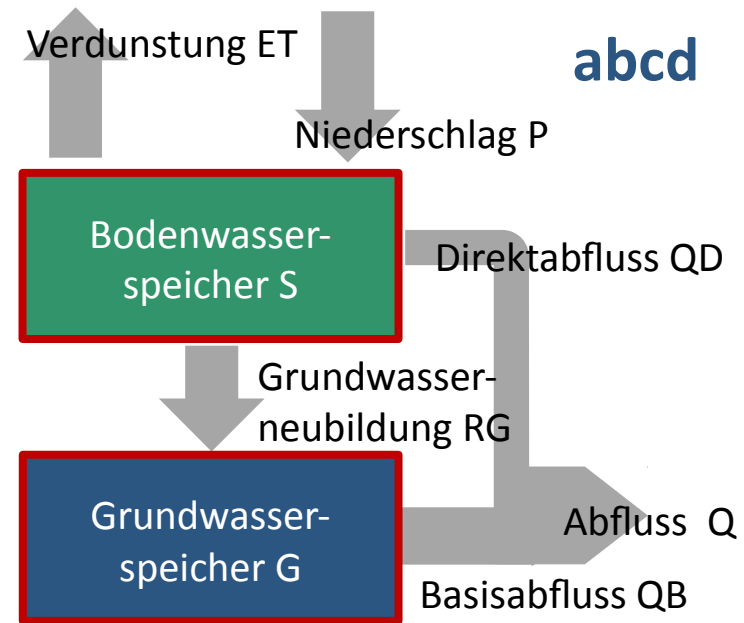
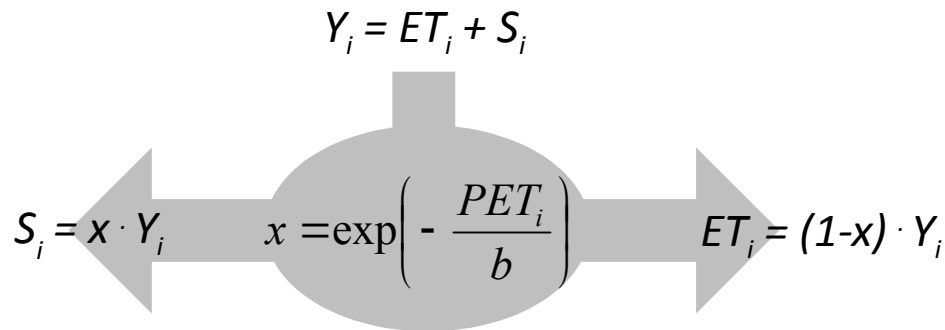
Vergegenwärtige Dir das Verhalten der Aufteilung auf ET_i und S_i durch Betrachtung der Grenzfälle $PET \rightarrow 0$, $PET \rightarrow \infty$, $b \rightarrow 0$, $b \rightarrow \infty$.



Idee #2

Aufteilung von Y_i zwischen Verdunstung ET_i und Boden S_i hängt ab von

- der Potenziellen Verdunstung PET und
- der Speicherkapazität des Bodens (b)



Herleitung von x aus folgender Proportionalität und der Lösung der entsprechenden DGL

$$\frac{dS}{dt} = -PET_i \frac{S}{b} \Rightarrow \int_i^S \frac{dS}{S} = \int_1^i -PET_i \frac{1}{b} dt \quad (\text{s. Thomas (1981), S. 25})$$

Ideen #3 und #4

Aufteilung des Überschusses $W_i - Y_i$

Der Überschuss $W_i - Y_i$ wird in Direktabfluss RD_i und GW-Neubildung RG_i mittels c aufgeteilt:

$$RD_i = (1 - c) \cdot (W_i - Y_i)$$

$$RG_i = c \cdot (W_i - Y_i)$$

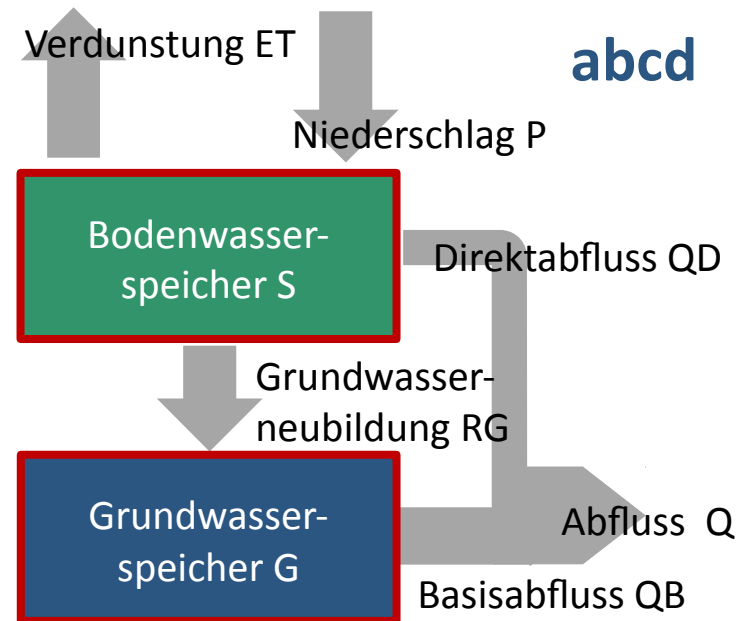
Basisabfluss und Grundwasserspeicher

Der Basisabfluss RB_i ist proportional zum Grundwasserspeicher G_i .

$$RB_i = d \cdot G_i$$

Der neue Grundwasserspeicher G_i ergibt sich aus der Bilanzierung von G_{i-1} , RG_i und RB_i .

$$G_i = G_{i-1} + RG_i - RB_i = G_{i-1} + RG_i - d \cdot G_i \rightarrow G_i = \frac{G_{i-1} + RG_i}{1 + d}$$



Überblick über die Wasserbilanz eines Monats

0. Argumente: P_i , PET_i , a , b , c , d

1a. Berechne W_i gemäß $W_i = S_{i-1} + P_i$

1b. Berechne $Y_i(W_i)$

$$Y_i(W_i) = \frac{W_i + b}{2a} - \sqrt{\left(\frac{W_i + b}{2a}\right)^2 - \frac{bW_i}{a}}$$

2. Berechne Bodenfeuchte S_i und Verdunstung ET_i

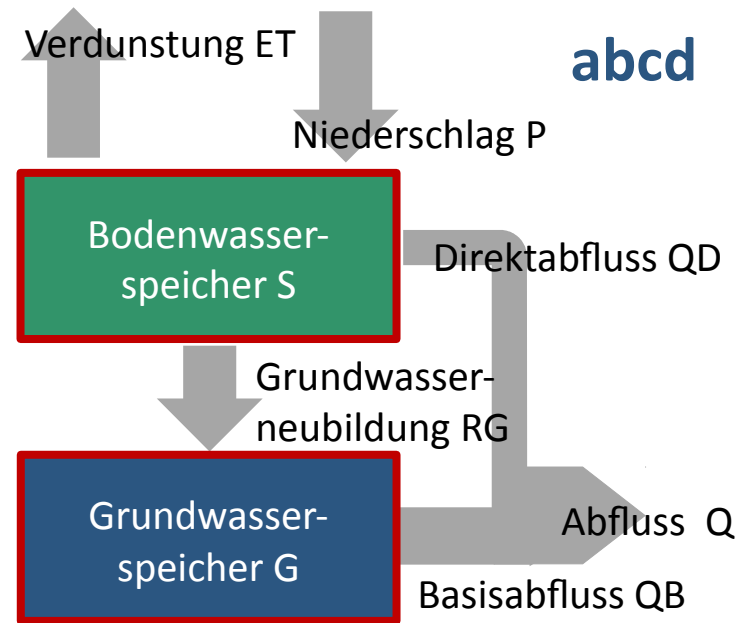
$$S_i = Y_i \cdot \exp\left(-\frac{PET_i}{b}\right), \quad E_i = Y_i \cdot \left(1 - \exp\left(-\frac{PET_i}{b}\right)\right)$$

3. Berechne Direktabfluss RD_i und GW-Neubildung RG_i

$$RD_i = (1 - c) \cdot (W_i - Y_i) \quad RG_i = c \cdot (W_i - Y_i)$$

4. Berechne Gesamtabfluss Q_i und Grundwasserspeicher G_i

$$Q_i = RD_i + RB_i = RD_i + dG_i \quad G_i = G_{i-1} + RG_i - d \cdot G_i \Rightarrow G_i = \frac{G_{i-1} + RG_i}{1 + d}$$



Wie lassen sich die Parameter a , b , c und d physikalisch interpretieren?

Überblick über die Wasserbilanz eines Monats

0. Argumente: P_i , PET_i , a , b , c , d

1a. Berechne W_i gemäß $W_i = S_{i-1} + P_i$

1b. Berechne $Y_i(W_i)$

$$Y_i(W_i) = \frac{W_i + b}{2a} - \sqrt{\left(\frac{W_i + b}{2a}\right)^2 - \frac{bW_i}{a}}$$

2. Berechne Bodenfeuchte S_i und Verdunstung ET_i

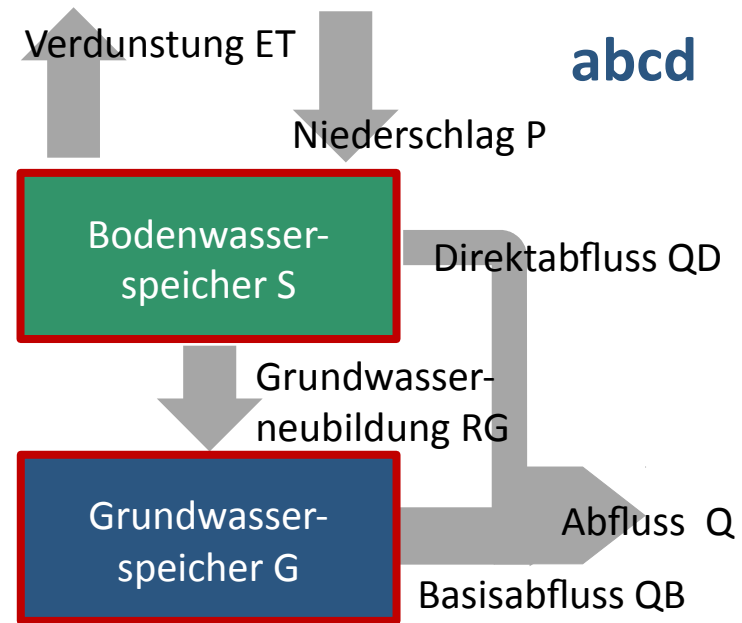
$$S_i = Y_i \cdot \exp\left(-\frac{PET_i}{b}\right), \quad E_i = Y_i \cdot \left(1 - \exp\left(-\frac{PET_i}{b}\right)\right)$$

3. Berechne Direktabfluss RD_i und GW-Neubildung RG_i

$$RD_i = (1 - c) \cdot (W_i - Y_i) \quad RG_i = c \cdot (W_i - Y_i)$$

4. Berechne Gesamtabfluss Q_i und Grundwasserspeicher G_i

$$Q_i = RD_i + RB_i = RD_i + dG_i \quad G_i = G_{i-1} + RG_i - d \cdot G_i \Rightarrow G_i = \frac{G_{i-1} + RG_i}{1 + d}$$



Bearbeite die Aufgaben zum *abcd*-Modell in R (Datei *abcd.R*).