



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

HEITOR BALDO

ÁLGEBRAS DE CLIFFORD E DE CAYLEY-DICKSON

CAMPINAS  
2016



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS**  
**INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA**  
**E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA**

**HEITOR BALDO**

**ÁLGEBRAS DE CLIFFORD E DE CAYLEY-DICKSON**

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada e Computacional.

**Orientador: Jayme Vaz Junior**

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO  
FINAL DA DISSERTAÇÃO DEFENDIDA PELO  
ALUNO HEITOR BALDO E ORIENTADA PELO  
PROF. DR. JAYME VAZ JUNIOR.

**Assinatura do Orientador**

A handwritten signature in blue ink, appearing to read "Jayme Vaz Junior".

**CAMPINAS**  
**2016**

**Agência(s) de fomento e nº(s) de processo(s):** Não se aplica.

Ficha catalográfica  
Universidade Estadual de Campinas  
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica  
Maria Fabiana Bezerra Muller - CRB 8/6162

Baldo, Heitor, 1989-  
B193a Álgebras de Clifford e de Cayley-Dickson / Heitor Baldo. – Campinas, SP : [s.n.], 2016.

Orientador: Jayme Vaz Junior.

Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Números complexos. 2. Quaternios. 3. Álgebra. 4. Cayley, Álgebra de. 5. Clifford, Álgebra de. I. Vaz Junior, Jayme. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

**Título em outro idioma:** Clifford and Cayley-Dickson algebras

**Palavras-chave em inglês:**

Complex numbers

Quaternions

Algebra

Cayley algebras

Clifford algebras

**Área de concentração:** Matemática Aplicada e Computacional

**Titulação:** Mestre em Matemática Aplicada e Computacional

**Banca examinadora:**

Jayme Vaz Junior [Orientador]

Rafael de Freitas Leão

Rubens de Figueiredo Camargo

**Data de defesa:** 31-03-2016

**Programa de Pós-Graduação:** Matemática Aplicada e Computacional

**Dissertação de Mestrado Profissional defendida em 31 de março de 2016 e  
aprovada pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.**

**Prof(a). Dr(a). JAYME VAZ JUNIOR**

**Prof(a). Dr(a). RAFAEL DE FREITAS LEÃO**

**Prof(a). Dr(a). RUBENS DE FIGUEIREDO CAMARGO**

A Ata da defesa com as respectivas assinaturas dos membros  
encontra-se no processo de vida acadêmica do aluno.

*Dedicado à minha mãe Maria Aparecida Marchi Baldo  
(in memoriam)*

## **Agradecimentos**

Agradeço, em primeiro lugar, a minha querida e amada mãe, Maria Aparecida Marchi Baldo, que já não pertence mais a este plano material, mas vive num plano extracorpóreo muito mais amplo e sublime, que me proporcionou chegar até aqui e cujo apoio e carinho nunca poderei retribuir. Agradeço a minha família pelo apoio, ao meu orientador, o professor Dr. Jayme Vaz Jr., por ter aceitado supervisionar meus estudos, pela paciência e pelas dicas que ajudaram a melhorar minha dissertação, ao professor Dr. Cristiano Torezzan por ter-me esclarecido várias questões que brotaram ao longo deste mestrado e também a todos os professores e funcionários do IMECC pela atenção e estima.

## Resumo

Neste trabalho, estudamos de maneira geral os números hipercomplexos, com especial atenção para os complexos, os quaternions e os octonions. Estudamos as álgebras de Cayley-Dickson, expondo suas principais propriedades, e, de forma muito breve, algumas outras álgebras hipercomplexas, *e.g.*, os split-complexos, os split-quaternions e os split-octonions. Seguimos introduzindo as álgebras de Clifford associadas a  $\mathbb{K}$ -espaços quadráticos  $(V, \Phi)$  ( $\text{char}(\mathbb{K}) \neq 2$ ), enfatizando as álgebras de Clifford dos espaços quadráticos reais  $(\mathbb{R}^{p,q}, \Phi_{p,q})$ ,  $Cl_{p,q}$ , dando a completa classificação dessas álgebras utilizando resultados como o teorema de periodicidade de Cartan-Bott. Também discorremos brevemente sobre representações de álgebras de Clifford e introduzimos os grupos de Clifford-Lipschitz, Pin e Spin. No último capítulo, após termos dissertado acerca da teoria clássica e dos aspectos fundamentais das álgebras de Clifford reais e das de Cayley-Dickson, mostramos que, deveras, essas duas álgebras emergem duma mesma estrutura algébrica mais fundamental, que chamamos de *álgebra quaterniônica generalizada e ampliada*, e a denotamos por  $\mathfrak{U}_{n-1}(\gamma_n)$ .

**Palavras-chave:** Números Hipercomplexos, Álgebras de Cayley-Dickson, Álgebras de Clifford.

## Abstract

In this work, we study, in a general way, the hypercomplex numbers, with special attention to the complex numbers, quaternions and octonions. We study the Cayley-Dickson algebras, exposing their main properties, and, very briefly, some others hypercomplex algebras, *e.g.*, the split-complex, the split-quaternions and the split-octonions. After that we introduce the Clifford algebras associated with the  $\mathbb{K}$ -quadratic spaces  $(V, \Phi)$  ( $\text{char}(\mathbb{K}) \neq 2$ ), emphasizing the algebras of real spaces  $(\mathbb{R}^{p,q}, \Phi_{p,q})$ ,  $Cl_{p,q}$ , giving a complete classification of these algebras using results like the Cartan-Bott periodicity theorem. Also, we briefly talk about the representations of Clifford algebras and introduce the Clifford-Lipschitz group and the Pin and Spin groups. In the last chapter, after having studied the classical theory and fundamental aspects of the Cayley-Dickson and real Clifford algebras, we show that, indeed, these two algebras emerges from a more fundamental algebraic structure, which we called *generalized and enlarged quaternionic algebra*, and denoted by  $\mathfrak{U}_n(\gamma_{n+1})$ .

**Keywords:** Hypercomplex Numbers, Cayley-Dickson Algebras, Clifford Algebras.

# Conteúdo

<b>0</b>	<b>Introdução</b>	<b>11</b>
<b>1</b>	<b>Preliminares</b>	<b>13</b>
1.1	Grupos, Anéis e Corpos . . . . .	13
1.2	Espaços Vetoriais . . . . .	16
1.3	Formas Bilineares e Quadráticas . . . . .	20
1.4	Grupos Clássicos . . . . .	21
1.5	Álgebras . . . . .	23
<b>2</b>	<b>Números Hipercomplexos</b>	<b>35</b>
2.1	Notas Históricas . . . . .	35
2.2	Os Complexos . . . . .	36
2.3	Os Quaternions . . . . .	41
2.4	Os Octonions . . . . .	47
2.5	Os Números Hipercomplexos . . . . .	51
<b>3</b>	<b>Álgebras de Cayley-Dickson</b>	<b>54</b>
3.1	Notas Históricas . . . . .	54
3.2	A álgebra dos Complexos . . . . .	55
3.3	A álgebra dos Quaternions . . . . .	57
3.4	A álgebra dos Octonions . . . . .	61
3.5	O processo de duplicação de Cayley-Dickson . . . . .	65
3.6	A álgebra dos Sedenions . . . . .	68
3.7	Propriedades das álgebras de Cayley-Dickson . . . . .	69
3.8	Os teoremas de Hurwitz, de Frobenius e outros teoremas . . . . .	71
<b>4</b>	<b>Outras Álgebras Hipercomplexas</b>	<b>76</b>
4.1	Os Split-Complexos e os Duais . . . . .	76
4.2	Os Split-Quaternions e os Semiquaternions . . . . .	79
4.3	Os Biquaternions . . . . .	82
4.4	Os Split-Octonions . . . . .	83
<b>5</b>	<b>Álgebras de Clifford</b>	<b>86</b>
5.1	Notas Históricas . . . . .	86
5.2	Aspectos gerais das álgebras de Clifford . . . . .	87
5.3	Álgebras de Clifford dos espaços $(\mathbb{R}^{p,q}, \Phi_{p,q})$ . . . . .	91
5.4	Classificação das álgebras de Clifford . . . . .	98
5.5	Representações de álgebras de Clifford . . . . .	102
5.6	Os grupos $\Gamma$ , Pin e Spin . . . . .	105

<b>6 Relação entre as Álgebras de Clifford e as de Cayley-Dickson</b>	<b>108</b>
6.1 A álgebra quaterniônica generalizada . . . . .	108
6.2 As álgebras $\mathfrak{U}_{n-1}(\gamma_n)$ . . . . .	110
<b>7 Considerações Finais</b>	<b>113</b>
<b>A Tabelas de multiplicação, o diagrama de multiplicação dos sedenions e o relógio de Clifford</b>	<b>114</b>
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>125</b>

# Capítulo 0

## Introdução

Os sistemas de números hipercomplexos, como os reais, os complexos e os quaternions podem ser generalizados como  $\mathbb{R}$ -álgebras em maiores dimensões através de dois caminhos distintos, a saber, através das *álgebras de Clifford* (reais) e das *álgebras de Cayley-Dickson*.

O intuito primordial desta dissertação é apresentar um estudo geral acerca dos sistemas de números hipercomplexos e das estruturas algébricas que os generalizam. Historicamente, a busca por análogos em maiores dimensões de sistemas numéricos já conhecidos tem sido uma tarefa recorrente no campo da Matemática. Desde a descoberta dos complexos e da sua extensão 4-dimensional – os quaternions – descoberta por W. Hamilton em 1843, muitas outras álgebras análogas foram descobertas, na mesma e em maiores dimensões, como a álgebra dos octonions, descoberta independentemente por J. Graves e A. Cayley, e as álgebras de Clifford, descobertas por W. Clifford. Assim, a ideia de se obter construções que generalizasse ainda mais tais álgebras hipercomplexas surgiu naturalmente dentro da comunidade acadêmica, como, por exemplo, o processo de duplicação de Cayley-Dickson. Mais recentemente, especificamente em 1984, o matemático estadunidense Gregory Wene, então professor da Universidade do Texas, San Antonio, publicou um artigo [74] no qual introduziu uma construção que generaliza ainda mais essas álgebras; essa construção dá origem a uma classe de  $\mathbb{R}$ -álgebras bem mais ampla, da qual as álgebras de Cayley-Dickson e as álgebras de Clifford reais surgem como casos particulares. A busca por generalizações de álgebras em maiores dimensões tem se mostrado frutífera, principalmente no âmbito da Física Teórica, em virtude da crescente pesquisa em modelos para descrição de nosso universo através de dimensões espaço-temporais superiores a 4.

As álgebras de Clifford são uma classe de álgebras associativas que generalizam esses sistemas numéricos hipercomplexos. São amplamente utilizadas como ferramenta matemática para descrição de fenômenos físicos e, além da sua importância na área da Física-Matemática, possui aplicações em outras áreas das ciências aplicadas, como Engenharias e Computação. As álgebras de Cayley-Dickson, todavia, não satisfazem a propriedade associativa em qualquer dimensão, nem meramente a propriedade alternativa, bastando considerar a álgebras dos sedenions, porém são todas potência-associativas e flexivas. As quatro primeiras álgebras de Cayley-Dickson, a saber, os reais, os complexos, os quaternions e os octonions possuem extensas aplicações em inúmeras áreas da Matemática, da Física e da Computação; nestas duas últimas áreas, citamos, como exemplos, a mecânica quântica, a relatividade especial, eletrodinâmica e cromodiâmica quântica, supercordas, supersimetria, simulações dinâmicas, computação gráfica, visão computacional e robótica.

A fim de efetivar a proposta desta dissertação, e na tentativa de apresentar um texto,

até a medida do possível, autosuficiente, dividimos este trabalho em seis capítulos, sendo os dois primeiros capítulos de caráter mais introdutórios; os três capítulos subsequentes dão interpretações mais amplas desses sistemas, e o sexto capítulo provê uma generalização última para os sistemas hipercomplexos desenvolvidos nos capítulos anteriores. Uma descrição mais detalhada de cada capítulo é dada a seguir.

No capítulo 1, introduzimos os conceitos básicos necessários para a leitura dos capítulos ulteriores, como os conceitos de grupos, anéis, corpos, espaços vetoriais, produto interno, norma, formas bilineares e formas quadráticas, e, com especial atenção, as álgebras sobre um corpo, suas propriedades gerais, álgebras de composição, álgebras tensoriais e exteriores.

No capítulo 2, introduzimos os sistemas de números hipercomplexos, com ênfase nos sistemas mais utilizados, que são os números complexos, os quaternions e os octonions. Desenvolvemos vários conceitos e propriedades importantes, como o conceito de conjugado, a propriedade de composição da norma, a não-comutatividade dos quaternions e a não-associatividade e a alternatividade dos octonions, e mostramos que esses sistemas são sistemas de divisão. Ainda, estudamos sucintamente os aspectos geométricos dos complexos e dos quaternions.

No capítulo 3, discorremos sobre as álgebras de Cayley-Dickson propriamente ditas, começando com as três álgebras clássicas: complexos, quaternions e octonions. Provamos que essas álgebras são isomórfas à certas álgebras de matrizes, em especial, o isomorfismo entre os octonions e a álgebra das matrizes-vetores de Zorn. Apresentamos o processo de duplicação de Cayley-Dickson e discorremos brevemente acerca da álgebra dos sedenions, mostrando sua não-alternatividade e que ela possui divisores de zero. Mostramos ainda que todas as álgebras de Cayley-Dickson são potência-associativas e flexivas. Finalizamos o capítulo apresentando o problema da soma de quadrados e expondo importantes teoremas, como, por exemplo, o Teorema de Hurwitz, o de Frobenius, o de Pfister, o de Hopf e o teorema de Gelfand-Mazur.

No capítulo 4, estudamos algumas álgebras hipercomplexas interessantes, como a dos split-complexos, dos números duais, dos split-quaternions, dos semiquaternions dos biquaternions e a dos split-octonions. Apresentamos sucintamente essas álgebras e suas propriedades, mostramos que nenhuma delas é de divisão e mostramos que elas são isomórfas à certas álgebras de matrizes.

No capítulo 5, introduzimos as álgebras de Clifford de forma universal, expondo suas propriedades gerais e provando o teorema de existência e unicidade. Estudamos as álgebras de Clifford dos  $\mathbb{K}$ -espaços quadráticos  $(V, \Phi)$ ,  $\text{char}(\mathbb{K}) \neq 0$ , com especial atenção para as álgebras de Clifford dos espaços quadráticos  $(\mathbb{R}^{p,q}, \Phi_{p,q})$ . Nesse contexto, estudamos particularmente algumas dessas álgebras, como, por exemplo, a álgebra de Pauli,  $Cl_3$ , e a álgebra do espaço-tempo,  $Cl_{1,3}$ . Seguimos provando o teorema de 8-periodicidade de Cartan-Bott e classificando todas as álgebras de Clifford reais e complexas de dimensão finita. Terminamos o capítulo com um breve estudo sobre representações de álgebras de Clifford e sobre os grupos de Clifford-Lipschitz, Pin e Spin.

Finalmente, no capítulo 6, mostramos que tanto as álgebras de Clifford reais generalizadas quanto as de Cayley-Dickson generalizadas surgem naturalmente como casos particulares de uma classe de álgebras mais geral, que chamamos de *álgebras quaterniônicas generalizadas e ampliadas*, e as denotamos por  $\mathfrak{U}_{n-1}(\gamma_n)$ .

# Capítulo 1

## Preliminares

Neste primeiro capítulo, apresentamos os conceitos básicos que serão utilizados ao longo deste trabalho. Omitiremos as demonstrações da maioria das proposições aqui apresentadas, porém deixaremos as referências para tais provas.

### 1.1 Grupos, Anéis e Corpos

Para uma leitura mais completa e avançada dos objetos apresentados nesta seção, o leitor interessado pode consultar os livros [62] e [64].

#### 1.1.1 Grupos

**Definição 1.1.** Seja  $G$  um conjunto,  $G \neq \emptyset$ , e seja  $\cdot : G \times G \longrightarrow G$  uma *operação binária* (i.e., se  $a, b \in G \Rightarrow a \cdot b \in G$ ). Então o par  $(G, \cdot)$  é um *grupo* se as três condições abaixo são satisfeitas:

- (i)  $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ , para todo  $a, b, c \in G$  (*associatividade*),
- (ii) Existe um elemento  $e \in G$  tal que  $a \cdot e = e \cdot a = a$ , para todo  $a \in G$  (*elemento identidade*),
- (iii) Para todo  $a \in G$  existe um elemento  $b \in G$  tal que  $a \cdot b = b \cdot a = e$ . Nesse caso, denotamos  $b = a^{-1}$  (*elemento inverso*).

Se  $G$  é um grupo tal que vale a propriedade:

- (iv)  $a \cdot b = b \cdot a, \forall a, b \in G$  (*comutatividade*),

então  $G$  é dito ser um *grupo abeliano* ou *grupo comutativo*.

Importante dizer também que  $G$  é um *grupo finito* se a cardinalidade do conjunto  $G$  é finita, i.e., se  $|G| < \infty$ .

**Definição 1.2.** Seja  $(G, \cdot)$  um grupo e  $S \subset G$  um subconjunto.  $S$  é dito ser *subgrupo* de  $G$  se  $(S, \cdot)$  é um grupo. Se  $S$  é subgrupo de  $G$ , denotamos  $S < G$ .

**Definição 1.3.** Se  $(G, \cdot)$  e  $(H, *)$  são grupos, então a aplicação  $f : G \longrightarrow H$  é um *homomorfismo de grupos* se, para todos  $x, y \in G$ , satisfaz:

$$f(x \cdot y) = f(x) * f(y).$$

Se existe um homomorfismo  $g : H \rightarrow G$  tal que  $f \circ g = id_H$  e  $g \circ f = id_G$ , onde  $id_G$  é a aplicação identidade de  $G$  e  $id_H$  é a aplicação identidade de  $H$ , então  $f$  é dita ser um *isomorfismo*. Ainda,  $f$  é um *automorfismo* se  $f$  é um isomorfismo de  $G$  em  $G$ .

A função  $g$  é única, pois se existe  $h : H \rightarrow G$  tal que  $f \circ h = id_H$  e  $h \circ f = id_G$ , então  $h = id_G \circ h = (g \circ f) \circ h = g \circ id_H = g$  (desde que a composição seja associativa). Logo, pela unicidade de  $g$ , escrevemos  $g = f^{-1}$ . As definições de isomorfismos para outras estruturas algébricas que iremos estudar nas próximas seções são análogas a definição acima, e a unicidade é verificada da mesma maneira.

Se  $G$  e  $H$  são grupos isomorfos, denotamos  $G \cong H$ . Em geral, a relação de isomorfismo será indicada pelo símbolo “ $\cong$ ”.

**Observação 1.4.** Se  $G$  é um grupo, o conjunto de todos os automorfismos de  $G$   $\text{Aut}(G) := \{f : G \rightarrow G \mid f \text{ é automorfismo}\}$  é também um grupo em relação a operação de composição de funções.

**Exemplo 1.5.** O conjunto  $G = \{0, 1\}$  é um grupo abeliano sobre a operação de adição, definida por:  $0 + 0 = 0, 1 + 0 = 1, 0 + 1 = 1, 1 + 1 = 0$ . Além disso,  $G \cong \mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ , onde  $\mathbb{Z}_2$  é o grupo dos inteiros módulo 2.

**Definição 1.6.** Seja  $Q \neq \emptyset$  um conjunto com uma operação binária  $\cdot : Q \times Q \rightarrow Q$ . Então  $Q$  é dito ser um *quasigrupo* se, para todos  $a, b \in Q$ , existem únicos  $x, y \in Q$  tais que  $a \cdot x = b$  e  $b \cdot y = a$ .

Observe que um quasigrupo é uma estrutura algébrica não necessariamente associativa.

**Definição 1.7.** Um *loop* é um quasigrupo com um elemento identidade.

**Definição 1.8.** Um *loop de Moufang*<sup>1</sup> é um loop que satisfaz qualquer uma das três identidades equivalentes:

$$(xy)(zx) = x((yz)x), \quad x(y(xz)) = (x(yx))z, \quad y(x(zx)) = ((yx)z)x.$$

Essas identidades são conhecidas como *identidades de Moufang*.

**Exemplo 1.9.** Os octonions não-nulos (que serão introduzidos no capítulo 2) formam um loop de Moufang não-associativo sobre a multiplicação octoniônica.

### 1.1.2 Anéis

**Definição 1.10.** Seja  $R$  um conjunto,  $R \neq \emptyset$ , e sejam  $+ : R \times R \rightarrow R$  e  $\cdot : R \times R \rightarrow R$  duas operações binárias, chamadas *adição* e *multiplicação*, respectivamente. Então a tripla  $(R, +, \cdot)$  é um *anel* se as seguintes condições são satisfeitas:

- (i)  $(R, +)$  é um grupo,
- (ii)  $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c, \forall a, b, c \in A$  (*distributividade à direita*),
- (iii)  $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c, \forall a, b, c \in A$  (*distributividade à esquerda*).

---

<sup>1</sup>Ruth Moufang (1905 - 1977) foi uma matemática alemã.

**Definição 1.11.** Um anel  $R$  é dito ser:

- (i) *Comutativo* se vale:  $a \cdot b = b \cdot a, \forall a, b \in R$ .
- (ii) *Associativo* se vale:  $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c), \forall a, b, c \in R$ .
- (iii) *Com identidade (multiplicativa)* se existe um  $1 \in R$  tal que  $1 \cdot a = a \cdot 1 = a, \forall a \in R$ .

**Exemplo 1.12.** Seja  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  o conjunto das matrizes reais  $n \times n$ ,  $n \geq 2$ . Então,  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  com a adição e multiplicação usuais de matrizes é um anel associativo (mas não-comutativo) com identidade.

**Definição 1.13.** Um anel  $R$  é um *anel de divisão* (ou *quase-corpo*) se todos os seus elementos não-nulos formam um grupo multiplicativo.

Ainda, se um anel de divisão é comutativo, então ele é um corpo.

**Exemplo 1.14.** Os quaternions com a adição e multiplicação quarteniônica forma um anel de divisão, como será visto no próximo capítulo.

**Definição 1.15.** Seja  $(R, +, \cdot)$  um anel e  $S \subset R$  um subconjunto.  $S$  é dito ser *subanel* de  $R$  se  $(S, +, \cdot)$  é um anel.

**Definição 1.16.** Um *ideal à esquerda* de um anel  $R$  é um subconjunto  $I$  de  $R$  tal que  $I$  é um grupo sob a adição de  $R$  e  $\forall r \in R$  e  $\forall a \in I$  tem-se que  $ra \in I$ . Analogamente,  $I$  é dito *ideal à direita* se  $ar \in I$ ,  $\forall r \in R$  e  $\forall a \in I$ . Ainda, se  $I$  é um ideal à direita e à esquerda,  $I$  é dito *ideal bilateral* ou simplesmente um *ideal* de  $R$ .

**Definição 1.17.** Seja  $R$  um anel com identidade 1. A *característica* de  $R$  é o menor inteiro positivo  $n = \text{char}(R)$  tal que  $\sum^n 1 = 0$ , sendo 0 o elemento neutro da adição.

**Definição 1.18.** Sejam  $(A, +, \cdot)$  e  $(A', +', \cdot')$  anéis. A aplicação  $f : A \rightarrow A'$  é dita ser um *homomorfismo de anéis* se:

- (i)  $f(x + y) = f(x) +' f(y)$ ,
- (ii)  $f(x \cdot y) = f(x) \cdot' f(y)$ .

Se  $A$  e  $A'$  são anéis com identidades multiplicativas  $1_A$  e  $1_{A'}$ , respectivamente, tem-se a condição adicional:  $f(1_A) = f(1_{A'})$ . Se existe um homomorfismo de anéis  $f^{-1} : A' \rightarrow A$  tal que  $f \circ f^{-1} = id_{A'}$  e  $f^{-1} \circ f = id_A$ , onde  $id_A$  é a aplicação identidade de  $A$  e  $id_{A'}$  é a aplicação identidade de  $A'$ , então  $f$  é dita ser um *isomorfismo*. Ainda,  $f$  é um *automorfismo* se  $f$  é um isomorfismo de  $A$  em  $A$ .

### 1.1.3 Corpos

**Definição 1.19.** Seja  $K$  um conjunto,  $K \neq \emptyset$ , dizemos que  $K$  é um *corpo* se satisfaz:

- (i)  $(K, +)$  é grupo abeliano,
- (ii)  $(K \setminus \{0\}, \cdot)$  é grupo abeliano,
- (iii)  $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$  e  $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ , para todos  $a, b, c \in K$ .

A partir de agora vamos escrever  $\mathbb{K}$  para denotar um corpo qualquer.

**Exemplo 1.20.** O conjunto dos números reais  $\mathbb{R}$  e o conjunto dos números complexos  $\mathbb{C}$ , com as operações de adição e multiplicação usuais de reais e complexos, são ambos corpos.

**Observação 1.21.** Um corpo  $\mathbb{K}$  é um *corpo finito* se a cardinalidade do conjunto  $\mathbb{K}$  é finita, i.e., se  $|\mathbb{K}| < \infty$ , e dizemos que  $|\mathbb{K}|$  é a *ordem* do corpo.

**Definição 1.22.** Seja  $\mathbb{K}$  um corpo. Um subconjunto  $S \subset \mathbb{K}$  é um *subcorpo* de  $\mathbb{K}$  se  $S$  forma um corpo com respeito às operações de corpo de  $\mathbb{K}$ .

**Definição 1.23.** Seja  $\mathbb{K}$  subcorpo de  $\mathbb{F}$ , então dizemos que  $\mathbb{F}$  é uma *extensão de corpo* de  $\mathbb{K}$ , e denotamos  $\mathbb{F}/\mathbb{K}$ . O *grau* da extensão é a dimensão de  $\mathbb{F}$  como  $\mathbb{K}$ -espaço vetorial, e denotamos  $[\mathbb{F} : \mathbb{K}] = \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{F}$ .

**Definição 1.24.** Seja  $\mathbb{K}$  um corpo com identidade multiplicativa  $1 \in \mathbb{K}$ . A *característica* de  $\mathbb{K}$  é o menor inteiro positivo  $n = \text{char}(\mathbb{K})$  tal que  $\sum^n 1 = 0$ .

**Exemplo 1.25.** Os corpos  $\mathbb{R}$  e  $\mathbb{C}$  têm característica zero, i.e.,  $\text{char}(\mathbb{R}) = \text{char}(\mathbb{C}) = 0$ .

**Exemplo 1.26.** O chamado *corpo de Galois*<sup>2</sup> de ordem 2,  $\mathbb{F}_2 = GF(2) = \{0, 1\}$ , é um corpo finito<sup>3</sup> de característica 2.

## 1.2 Espaços Vetoriais

Um estudo mais completo e avançado sobre os conceitos apresentados nesta seção e na seção 1.3, pode ser realizado através dos livros [50] e [61].

**Definição 1.27.** Um *espaço vetorial* (ou *espaço linear*) sobre um corpo  $\mathbb{K}$  é um conjunto não-vazio  $V$  equipado com uma operação binária de adição (de vetores)  $+$  e uma operação binária externa  $\mathbb{K} \times V \rightarrow V$  chamada *multiplicação por escalar*, tal que as condições a seguir são satisfeitas  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$  e  $\forall v, w \in V$ :

- (i)  $(V, +)$  é grupo abeliano,
- (ii)  $1v = v1 = v$ , com  $1 \in \mathbb{K}$ ,
- (iii)  $(\alpha\beta)v = \alpha(\beta v)$ ,
- (iv)  $\alpha(v + w) = \alpha v + \alpha w$ .

Os elementos de  $V$  são chamados *vetores* e os de  $\mathbb{K}$  *escalares*. Um espaço vetorial sobre um corpo  $\mathbb{K}$  é chamado também de  $\mathbb{K}$ -espaço vetorial. Nesta seção,  $V$  e  $W$  irão denotar  $\mathbb{K}$ -espaços vetoriais, a menos que se diga o contrário.

**Definição 1.28.** Um subconjunto não-vazio  $S \subset V$  é dito *subespaço* de  $V$  se  $\forall v, w \in S$  e  $\forall \lambda \in \mathbb{K} \Rightarrow \lambda v + w \in S$ . Se  $S \subset V$  é subespaço, denotamos  $S < V$ .

**Definição 1.29.** Um subconjunto  $\beta \subset V$  é uma *base* de  $V$  se  $\beta$  é linearmente independente e  $V$  é gerado por  $\beta$ .

---

<sup>2</sup>Évariste Galois (1811 - 1832) foi um matemático francês.

<sup>3</sup>Em geral, um corpo finito de ordem  $n$  é chamado de corpo de Galois de ordem  $n$ .

**Definição 1.30.** A *dimensão* de  $V$  é igual a cardinalidade de uma base  $\beta$  de  $V$ , i.e.,  $\dim_{\mathbb{K}} V = |\beta|$ , e dizemos que  $V$  é um espaço de dimensão finita se  $|\beta| < \infty$ .

**Observação 1.31.** A dimensão de  $V$  independe da base, i.e., se  $\alpha, \beta \subset V$  são bases de  $V$ , então necessariamente  $|\alpha| = |\beta|$ . Se um espaço vetorial finito  $V$  tem base  $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ , denotamos  $V = \text{span}\{v_1, \dots, v_n\} = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$ .

**Exemplo 1.32.** Considere o espaço vetorial  $V = \mathbb{R}^n$ . Considere os vetores  $e_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, \dots, 0, 1)$  de  $\mathbb{R}^n$ . Então  $S = \{e_1, \dots, e_n\}$  é uma base de  $V = \mathbb{R}^n$ . De fato, pois se  $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $v_i \in \mathbb{R}$ , é claro que  $v = v_1e_1 + \dots + v_ne_n$ , de modo que  $S$  gera  $V$ . Também, sendo  $\sum_{i=1}^n a_i e_i = (a_1, \dots, a_n)$ , se  $\sum_{i=1}^n a_i e_i = (0, \dots, 0) \Rightarrow a_i = 0, \forall i = 1, \dots, n$ . Logo  $S$  é linearmente independente e portanto  $S$  é base de  $V$ .

**Definição 1.33.** Seja  $\{V_i\}_{i \in I}$  uma família de  $\mathbb{K}$ -espaços vetoriais. O *produto direto* desses espaços é o espaço definido por:

$$\prod_{i \in I} V_i := \{f : I \longrightarrow \bigcup_{i \in I} V_i \mid f(i) \in V_i\},$$

que pode ser visto como um subespaço vetorial de todas as funções de  $I$  em  $\bigcup V_i$ .

**Definição 1.34.** Seja  $\{V_i\}_{i \in I}$  uma família de  $\mathbb{K}$ -espaços vetoriais. O *suporte* de uma função  $f : I \longrightarrow \bigcup_{i \in I} V_i$  é o conjunto:

$$\text{supp}(f) := \{i \in I \mid f(i) \neq 0\}.$$

Dizemos que a função  $f$  tem *suporte finito*, e denotamos  $\text{supp}(f) < \infty$ , se  $f(i) \neq 0$  apenas para um número finito de  $i \in I$ .

**Definição 1.35.** Seja  $\{V_i\}_{i \in I}$  uma família de  $\mathbb{K}$ -espaços vetoriais. A *soma externa* desses espaços é o espaço definido por:

$$\bigoplus_{i \in I}^{ext} V_i := \{f : I \longrightarrow \bigcup_{i \in I} V_i \mid f(i) \in V_i, \text{supp}(f) < \infty\}.$$

**Definição 1.36.** Um espaço vetorial  $V$  é a *soma direta interna* de uma família de subespaços  $\{V_i\}_{i \in I}$ , se as seguintes condições são satisfeitas:

- (i)  $V = \sum_{i \in I} V_i := \{\sum_{i \in I} v_i \mid v_i \in V_i\}$ ,
- (ii)  $V_i \cap (\sum_{j \neq i} V_j) = \{0\}$ .

Se essas condições são satisfeitas, denotamos  $V = \bigoplus_{i \in I} V_i$ . Se  $\{V_i\}_{i=1}^n$  é uma família finita, então escrevemos:

$$V = \bigoplus_{i=1}^n V_i = V_1 \oplus \dots \oplus V_n.$$

**Exemplo 1.37.** Sejam  $V_1$  e  $V_2$   $\mathbb{K}$ -espaços vetoriais tais que  $V_1 \cap V_2 = \{0\}$ . Então a soma direta desses espaços é  $V_1 \oplus V_2 = \{v_1 + v_2 \mid v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\}$ .

**Definição 1.38.** Uma aplicação  $f : V \longrightarrow V$  é dita *linear* (ou  $\mathbb{K}$ -*linear*) se,  $\forall \lambda \in \mathbb{K}$  e  $\forall v, w \in V$ , tem-se que  $f(v + w) = f(v) + f(w)$  e  $f(\lambda v) = \lambda f(v)$ .

**Definição 1.39.** Seja  $f : V \rightarrow W$  uma aplicação linear. O *núcleo* ou *kernel* dessa aplicação é o conjunto  $\ker(f) := \{v \in V \mid f(v) = 0\}$ .

**Observação 1.40.** O núcleo de toda aplicação linear  $f : V \rightarrow W$  é um subespaço de  $V$ , pois  $0 \in \ker(f)$  e se  $v, w \in \ker(f)$ , então  $f(\lambda v + w) = \lambda f(v) + f(w) = 0$ , implicando que  $\lambda v + w \in \ker(f)$ .

**Observação 1.41.** Uma aplicação linear  $f : V \rightarrow W$  é dita *isomorfismo* se existe uma linear  $f^{-1} : W \rightarrow V$  tal que  $f \circ f^{-1} = id_W$  e  $f^{-1} \circ f = id_V$ , onde  $id_V$  é a aplicação identidade de  $V$  e  $id_W$  é a aplicação identidade de  $W$ , e uma linear  $f : V \rightarrow V$  (de  $V$  em  $V$ ) é dita *endomorfismo*. O conjunto de todos os endomorfismos de  $V$  junto com a adição de aplicações e o produto escalar forma um espaço vetorial, e o denotaremos por  $\text{End}(V)$ .

**Definição 1.42.** Dois  $\mathbb{K}$ -espaços vetoriais,  $V$  e  $W$ , são ditos *isomorfos*, e denotamos  $V \cong W$ , se existe um isomorfismo entre eles.

**Observação 1.43.** A relação de isomorfismo é, em geral (para todas estruturas algébricas), uma relação de equivalência, i.e., ela é *reflexiva* ( $V \cong V$ ), *simétrica* ( $V \cong W \Rightarrow W \cong V$ ) e *transitiva* ( $V \cong W, W \cong Z \Rightarrow V \cong Z$ ).

**Teorema 1.44.** Sejam  $V$  e  $W$   $\mathbb{K}$ -espaços vetoriais de dimensão finita e seja  $T : V \rightarrow W$  uma aplicação linear. Se  $\{e_i\}_{i=1}^n$  é uma base de  $V$ , então a aplicação  $T$  é um isomorfismo se, e somente se,  $\{T(e_i)\}_{i=1}^n$  é uma base de  $W$ .

*Demonstração.* A demonstração pode ser encontrada em [64], p. 177.  $\square$

**Teorema 1.45.** Dados dois  $\mathbb{K}$ -espaços vetoriais,  $V$  e  $W$ , temos que  $V \cong W \Leftrightarrow \dim V = \dim W$ .

*Demonstração.* A demonstração pode ser encontrada em [64], p. 178.  $\square$

**Definição 1.46.** Seja  $V$  um  $\mathbb{K}$ -espaço e seja  $W < V$  subespaço. Se  $v, w \in W$ , denotamos  $v \equiv w \pmod{W}$  se  $v - w \in W$ . Se  $v \in V$ , então denotamos por  $\bar{v} = v + W = \{v + w \mid w \in W\}$  a classe de equivalência de  $v$ . O espaço  $V/W = \{\bar{v} \mid v \in V\}$  é chamado *espaço quociente* de  $V$  e  $W$ . A projeção canônica  $\pi : V \rightarrow V/W$  é dada por  $\pi(v) = \bar{v}$ .

**Teorema 1.47.** Sejam  $V$  e  $W$   $\mathbb{K}$ -espaços vetoriais, e seja  $f : V \rightarrow W$  uma aplicação linear. Seja  $S < V$  um subespaço tal que  $S \subseteq \ker(f)$ . Se  $\pi : V \rightarrow V/S$  é a projeção canônica, então existe uma única linear  $h : V/S \rightarrow W$  tal que  $f = h \circ \pi$ .

*Demonstração.* A demonstração pode ser encontrada em [61], p. 91.  $\square$

**Definição 1.48.** Um *produto interno* em um  $\mathbb{K}$ -espaço vetorial  $V$  é uma aplicação  $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$  que satisfaz as seguintes propriedades, para todos  $u, v, w \in V$  e para todos  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ :

- (i)  $\langle \lambda v + \mu u, w \rangle = \lambda \langle v, w \rangle + \mu \langle u, w \rangle$ ,
- (ii)  $\langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle}$ ,
- (iii)  $\langle v, v \rangle \geq 0$ ,
- (iv)  $\langle v, v \rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0$ .

As condições (iii) e (iv) dizem que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  é *positiva-definida*. Um espaço  $V$  provido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , denotado por  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ , é dito ser um *espaço vetorial com produto interno*.

**Definição 1.49.** Seja  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  um espaço com produto interno. Dois vetores  $v, w \in V$  são ditos *ortogonais* se  $\langle v, w \rangle = 0$ , e denotamos  $v \perp w$ . Esses vetores são ditos *ortonormais* se são ortogonais e  $\langle v, v \rangle = \langle w, w \rangle = 1$ .

**Definição 1.50.** Sejam  $V$  um  $\mathbb{K}$ -espaço vetorial e  $d : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  uma aplicação. Então  $d$  é uma *métrica* em  $V$  se,  $\forall v, w, z \in V$ , são satisfeitas as condições:

- (i)  $d(v, w) \geq 0$  e  $d(v, w) = 0 \Leftrightarrow v = w$ ,
- (ii)  $d(v, w) = d(w, v)$  (*Simetria*),
- (iii)  $d(v, w) \leq d(v, z) + d(z, w)$  (*Desigualdade Triangular*).

Um espaço  $V$  provido de uma métrica  $d$ , denotado por  $(V, d)$ , é dito ser um *espaço métrico*.

**Definição 1.51.** Sejam  $V$  um  $\mathbb{K}$ -espaço vetorial e  $\|\cdot\| : V \rightarrow V$  uma aplicação. Então  $\|\cdot\|$  é dita ser uma *norma* se,  $\forall v, w \in V$  e  $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ , são satisfeitas as condições:

- (i)  $\|v\| \geq 0$ ,
- (ii)  $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$ ,
- (iii)  $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$ ,
- (iv)  $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$  (*Desigualdade Triangular*).

O produto interno de um espaço com produto interno  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  define uma norma em  $V$ , dada por  $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$ . Dizemos que  $\|\cdot\|$  é uma *seminorma* se as condições (i) e (ii) não são necessariamente satisfeitas. A seminorma é uma generalização do conceito de norma.

**Exemplo 1.52.** Considere o produto interno usual do espaço euclidiano  $\mathbb{R}^n$  definido por  $\langle v, w \rangle = v_1 w_1 + \dots + v_n w_n$ , se  $v = \{v_i\}_{i=1}^n$  e  $w = \{w_i\}_{i=1}^n$  em  $\mathbb{R}^n$ . Então a função  $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle} = \sqrt{v_1^2 + \dots + v_n^2}$  define uma norma em  $\mathbb{R}^n$ , comumente chamada *norma euclidiana* de  $\mathbb{R}^n$ . Esse produto interno é chamado também de *produto escalar usual*, e denotado por  $\langle v, w \rangle = v \cdot w$ .

**Teorema 1.53.** Seja  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  um espaço com produto interno, com uma norma dada por  $\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}$ . O produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  induz uma métrica em  $V$ , dada por  $d(v, w) = \|v - w\|$ . Assim, qualquer espaço com produto interno é também um espaço métrico.

**Observação 1.54.** Todo  $\mathbb{K}$ -espaço com produto interno  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  possui uma norma definida por  $\|\cdot\| := \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$ . Um vetor  $v$  nesse espaço é dito *unitário* se  $\|v\| = 1$ .

**Definição 1.55.** Um espaço vetorial  $V$  provido de uma norma  $\|\cdot\|$  é chamado de *espaço vetorial normado*, ou apenas *espaço normado*.

### 1.3 Formas Bilineares e Quadráticas

Vamos definir formas bilineares e quadráticas em espaços vetoriais sobre corpos. Para uma definição mais geral dessas formas em módulos sobre anéis consulte [45].

**Definição 1.56.** Seja  $V$  um  $\mathbb{K}$ -espaço vetorial. Uma aplicação  $B : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$  é dita ser uma *forma bilinear* em  $V$  se  $B$  é linear em cada uma das entradas, i.e., se,  $\forall v, w, z \in V$  e  $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$ , as seguintes propriedades são satisfeitas:

- (i)  $B(\lambda v + \mu w, z) = \lambda B(v, z) + \mu B(w, z)$ ,
- (ii)  $B(v, \lambda w + \mu z) = \lambda B(v, w) + \mu B(v, z)$ .

Uma forma bilinear  $B$  é dita *não-degenerada* se  $B(x, y) = 0, \forall y \in V$ , então  $x = 0$ .

**Definição 1.57.** Seja  $V$  um  $\mathbb{K}$ -espaço vetorial, e seja  $B : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$  uma forma bilinear. Então:

- (i)  $B$  é dita *simétrica* se  $B(x, y) = B(y, x), \forall x, y \in V$ .
- (ii)  $B$  é dita *antissimétrica* se  $B(x, y) = -B(y, x), \forall x, y \in V$ .
- (iii)  $B$  é dita *alternada* se  $B(x, y) = 0, \forall x, y \in V$ .
- (iv)  $B$  é dita *hermitiana* se  $B(x, y) = \overline{B(y, x)}, \forall x, y \in V$ .
- (v)  $B$  é dita *positiva-definida* se  $B(x, x) \geq 0, \forall x \in V$ .

**Exemplo 1.58.** O produto interno usual de  $\mathbb{R}^n$  é uma forma bilinear simétrica positiva-definida.

**Definição 1.59.** Seja  $V$  um espaço vetorial sobre um corpo  $\mathbb{K}$ , com  $\text{char}(\mathbb{K}) \neq 2$ . Uma *forma quadrática* sobre  $V$  é uma aplicação  $Q : V \rightarrow \mathbb{K}$  que satisfaz as seguintes propriedades,  $\forall v \in V$  e  $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ :

- (i)  $Q(\lambda v) = \lambda^2 Q(v)$ ,
- (ii) A aplicação  $B_Q(v, w) = \frac{1}{2}[Q(v+w) - Q(v) - Q(w)]$  é uma forma bilinear simétrica.

Uma forma quadrática  $Q$  é dita *não-degenerada* se  $Q(x+y) = Q(y), \forall y \in V \Rightarrow x = 0$ .

A forma  $B_Q$  é dita ser a *forma bilinear associada à forma quadrática*  $Q$ , observe ainda que temos a relação  $B_Q(v, v) = Q(v)$ . Pela definição acima, vemos que toda forma quadrática  $Q$  em um espaço vetorial  $V$  define forma bilinear simétrica  $B_Q$ . Ainda, uma forma bilinear simétrica  $B$  é unicamente determinada pela forma quadrática associada  $Q_B(v) = B(v, v)$ , através da *identidade de polarização*:

$$B(v, w) = \frac{1}{2}(Q_B(v+w) - Q_B(v) - Q_B(w)). \quad (1.1)$$

**Definição 1.60.** Um espaço vetorial  $V$  junto com uma forma quadrática não-degenerada  $Q$  é um *espaço vetorial quadrático* ou *espaço quadrático*, e o denotamos por  $(V, Q)$ .

**Teorema 1.61.** (Lagrange<sup>4</sup>) Se  $V$  é um  $\mathbb{K}$ -espaço com  $\dim(V) = n < \infty$  e  $B : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$  é uma forma bilinear, então existe uma base  $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$  de  $V$  tal que a matriz de  $B$  é diagonal, a saber,  $[B(v_i, v_j)]_\beta = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_r, 0, \dots, 0)$ , onde  $r$  é o posto dessa matriz.

---

<sup>4</sup>Joseph-Louis Lagrange (1736 - 1813) foi um matemático italiano.

Se  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , então temos o seguinte:

**Teorema 1.62.** (Sylvester<sup>5</sup>) *Para toda forma quadrática  $Q : V \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $V$  de dimensão finita, existe uma base  $\beta \subset V$  com respeito a qual a forma quadrática tem a seguinte matriz diagonal:*

$$[Q]_{\beta} = \text{diag}[\underbrace{1, \dots, 1}_p, \underbrace{-1, \dots, -1}_q, 0, \dots, 0],$$

com  $p$  e  $q$  independendo da base.

*Demonstração.* A demonstração pode ser encontrada em [50], p. 361.  $\square$

O par  $(p, q)$  é chamado *assinatura* da forma quadrática. Uma forma quadrática pode definir uma métrica num espaço, e, nesse caso, o par  $(p, q)$  é a assinatura da métrica.

## 1.4 Grupos Clássicos

Os Grupos Clássicos são muito utilizados tanto na Matemática quanto na Física. Nesta seção, apresentamos esses grupos muito sucintamente; para um estudo mais completo, o leitor pode consultar o clássico livro de H. Weyl<sup>6</sup> [75].

Seja  $\mathcal{M}(n, \mathbb{K}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  o conjunto das matrizes  $n \times n$  sobre um corpo  $\mathbb{K} = (\mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ , e seja  $I_n \in \mathcal{M}(n, \mathbb{K})$  a matriz identidade  $n \times n$ . Os conjuntos abaixo são grupos sobre a multiplicação usual de matrizes:

(i) **Grupo Linear Geral.** É o grupo das matrizes inversíveis:

$$GL(n, \mathbb{K}) = \{A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{K}) : A \text{ é inversível}\}.$$

(ii) **Grupo Linear Especial.** É o grupo das matrizes inversíveis com determinante igual a 1:

$$SL(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{K}) : \det(A) = 1\}.$$

Podemos escrever  $SL(n, \mathbb{K}) = SL(n)$ , para simplificar a notação, quando o corpo  $\mathbb{K}$  for declarado.

(iii) **Grupo Ortogonal.** É o grupo das matrizes inversíveis cuja inversa é igual à transposta:

$$O(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{K}) : A^{-1} = A^t\}.$$

Se  $A \in O(n)$ ,  $A$  é dita *matriz ortogonal* e  $AA^t = A^tA = I_n$ .

(iv) **Grupo Ortogonal Especial.** É o grupo das matrizes ortogonais que possuem determinante igual a 1.

$$SO(n) = \{A \in O(n, \mathbb{K}) : \det(A) = 1\}.$$

---

<sup>5</sup>James Joseph Sylvester (1814 - 1897) foi um matemático inglês. Esse teorema é conhecido também como *Lei de Inércia de Sylvester*.

<sup>6</sup>Hermann Klaus Hugo Weyl (1885 - 1955) foi um matemático alemão.

(v) **Grupo Unitário.** É o grupo das matrizes inversíveis cuja inversa é igual à transposta conjugada ( $\bar{A}^t = A^* = A^\dagger$ ):

$$U(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{K}) : A^\dagger = A^{-1}\}.$$

Se  $A \in U(n)$ ,  $A$  é dita *matriz unitária* e  $AA^\dagger = A^\dagger A = I_n$ .

(vi) **Grupo Especial Unitário.** É o grupo das matrizes unitárias com determinante 1:

$$SU(n) = \{A \in U(n, \mathbb{K}) : \det(A) = 1\}.$$

(vii) **Grupo Simplético.** Considere a matriz  $J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$ , então o *grupo simplético* de ordem  $n$  é:

$$Sp(n) = \{A \in \mathcal{M}(2n, \mathbb{R}) : A^t JA = J\}.$$

O grupo  $Sp(n)$  é um subgrupo de  $GL(2n, \mathbb{R})$ .

**Exemplo 1.63.** O grupo  $SO(2) = SO(2, \mathbb{R})$ , é o grupo das rotações em torno da origem no plano  $\mathbb{R}^2$ , pois se  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SO(2) \Rightarrow A^t = A^{-1}$ , mas  $A^{-1} = (\det(A))^{-1} \text{adj}(A) = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \Rightarrow c = -b$  e  $a = d$ . Assim toda matriz que pertence a  $SO(2)$  é da forma  $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ , com  $a^2 + b^2 = 1$ . Portanto podemos escrever:

$$SO(2) = \left\{ R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} : \theta \in (-\pi, \pi] \right\}.$$

A matriz  $R_\theta \in SO(2)$  roda um vetor no plano de um ângulo  $\theta$  em sentido anti-horário. Note que o grupo  $SO(2)$  é abeliano.

**Observação 1.64.** As *matrizes spin de Pauli*<sup>7</sup>, ou apenas *matrizes de Pauli*, são três matrizes complexas  $2 \times 2$ , denotadas por  $\sigma_1, \sigma_2$  e  $\sigma_3$  e definidas por:

$$\sigma_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 := \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \text{ e } \sigma_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

**Exemplo 1.65.** Vamos obter uma forma explícita para os elementos do grupo  $SU(2) = SU(2, \mathbb{C})$ . Seja  $A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \in SU(2) \Rightarrow A^\dagger = A^{-1}$ , ou seja,  $\begin{pmatrix} w & -y \\ -z & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x} & \bar{z} \\ \bar{y} & \bar{w} \end{pmatrix} \Rightarrow z = -\bar{y}$  e  $w = \bar{x}$ . Assim as matrizes de  $SU(2)$  são da forma  $\begin{pmatrix} x & y \\ -\bar{y} & \bar{x} \end{pmatrix}$ , com  $|x|^2 + |y|^2 = 1$ . Sendo  $x = x_1 + x_2i, y = y_1 + y_2i \in \mathbb{C}$ , podemos escrever:

$$A = \begin{pmatrix} x_1 + x_2i & y_1 + y_2i \\ -y_1 + y_2i & x_1 - x_2i \end{pmatrix} = x_1 I_2 + i(y_2 \sigma_1 + y_1 \sigma_2 + x_2 \sigma_3),$$

---

<sup>7</sup>Wolfgang Ernst Pauli (1900 - 1958) foi um físico austríaco.

com  $x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2 = 1$  e  $\sigma_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , as matrizes de Pauli. Fazendo  $\vec{\eta} = (1/\sin \theta)(y_2, y_1, x_2) = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ ,  $\theta \in [-\pi, \pi]$  e  $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ , podemos escrever:

$$SU(2) = \{\cos \theta I_2 + i \sin \theta (\vec{\eta} \cdot \vec{\sigma}) \mid \theta \in [-\pi, \pi], \vec{\eta} \in \mathbb{R}^3; \|\vec{\eta}\| = 1\}.$$

**Exemplo 1.66.**  $SO(3) = SO(3, \mathbb{R})$  é o grupo de todas as rotações em torno de algum eixo que passa pela origem no espaço euclidiano  $\mathbb{R}^3$ . Diferentemente de  $SO(2)$ , o grupo  $SO(3)$  não é abeliano.

## 1.5 Álgebras

Nesta seção, apresentamos um dos conceitos mais importantes desse trabalho: o conceito de *álgebra*. Os conceitos e propriedades aqui apresentados podem ser encontrados e melhor estudados nos livros [3], [32], [33], [37], [51], [68] e [71].

### 1.5.1 Definições e propriedades

**Definição 1.67.** Seja  $\mathcal{A}$  um espaço vetorial sobre um corpo  $\mathbb{K}$  e seja  $\cdot : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$  uma operação, que será chamada de *multiplicação*. O par  $(\mathcal{A}, \cdot)$  é uma *álgebra sobre um corpo  $\mathbb{K}$* , ou uma  $\mathbb{K}$ -álgebra, se são satisfeitas as condições:

- (i)  $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ ,
- (ii)  $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$ ,
- (iii)  $(\lambda x) \cdot y = x \cdot (\lambda y) = \lambda(x \cdot y)$ ,

para todos  $x, y, z \in \mathcal{A}$  e para todos  $\lambda \in \mathbb{K}$ .

Doravante, neste que não haja ambiguidades, omitiremos a operação “ $\cdot$ ”, e denotaremos por justaposição,  $ab := a \cdot b$ , a multiplicação dos elementos da álgebra  $\mathcal{A} \equiv (\mathcal{A}, \cdot)$ .

Observe que as condições (i) e (ii) implicam que toda álgebra  $\mathcal{A}$  é um anel com a mesma multiplicação da álgebra.

Seja  $\mathcal{A}$  uma  $\mathbb{K}$ -álgebra. Se a dimensão do espaço vetorial  $\mathcal{A}$  sobre  $\mathbb{K}$  é  $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{A} = n < \infty$ , então a  $\mathbb{K}$ -álgebra  $\mathcal{A}$  é dita *álgebra de dimensão finita* ou *álgebra finita*. Além disso, a dimensão da álgebra  $\mathcal{A}$  é igual a  $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{A} = n$ , e também denotamos  $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{A} = [\mathcal{A} : \mathbb{K}]$ . Uma base do espaço vetorial  $\mathcal{A}$  é dita ser uma base da álgebra  $\mathcal{A}$ .

**Definição 1.68.** Seja  $\mathcal{A}$  uma  $\mathbb{K}$ -álgebra (com multiplicação denotada por justaposição).  $\mathcal{A}$  é dita ser uma *álgebra com identidade* (ou *álgebra com unidade*) se existir um elemento  $e \in \mathcal{A}$  tal que  $ex = xe = x$ ,  $\forall x \in \mathcal{A}$ . Nesse caso, o elemento  $e$  é dito *identidade* ou *unidade* da álgebra  $\mathcal{A}$ , e é denotado por  $e = 1_{\mathcal{A}}$ .

**Definição 1.69.** Seja  $\mathcal{A}$  uma  $\mathbb{K}$ -álgebra e seja  $\mathcal{B} < \mathcal{A}$  um subespaço.  $\mathcal{B}$  é uma *subálgebra* de  $\mathcal{A}$  se  $ab \in \mathcal{B}$ ,  $\forall a, b \in \mathcal{B}$ .

**Definição 1.70.** Sejam  $\mathcal{A}_1$  e  $\mathcal{A}_2$   $\mathbb{K}$ -álgebras. A *soma direta* de  $\mathcal{A}_1$  e  $\mathcal{A}_2$ , denotada por  $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2$  é a  $\mathbb{K}$ -álgebra definida como segue:

- (i) Como um  $\mathbb{K}$ -espaço vetorial,  $\mathcal{A}$  é a soma direta dos espaços  $\mathcal{A}_1$  e  $\mathcal{A}_2$ .  
(ii) O produto de álgebra  $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$  é definido por:

$$(x_1 + x_2)(y_1 + y_2) = x_1y_1 + x_2y_2, \quad (1.2)$$

com  $x_1, y_1 \in \mathcal{A}_1$  e  $x_2, y_2 \in \mathcal{A}_2$ .

**Observação 1.71.** Os elementos da álgebra  $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2$  podem também ser representados como pares ordenados  $x_1 + x_2 := (x_1, x_2) = (x_1, 0) + (0, x_2)$ , e o produto (1.2) escrito como  $(x_1, x_2)(y_1, y_2) = (x_1y_1, x_2y_2)$ ,  $x_1, y_1 \in \mathcal{A}_1$  e  $x_2, y_2 \in \mathcal{A}_2$ .

**Definição 1.72.** O *centro* de uma álgebra  $\mathcal{A}$ , denotado por  $\text{cen}(\mathcal{A})$ , consiste em todos os elementos  $x \in \mathcal{A}$  tais que  $ax = xa$ , para todo  $a \in \mathcal{A}$ , i.e.,  $\text{cen}(\mathcal{A}) := \{x \in \mathcal{A} \mid ax = xa, \forall a \in \mathcal{A}\}$ .

**Definição 1.73.** Seja  $\mathcal{A}$  uma  $\mathbb{K}$ -álgebra. Um *ideal à esquerda* de  $\mathcal{A}$  é uma subálgebra  $\mathcal{I}_e \subseteq \mathcal{A}$  tal que  $ax \in \mathcal{I}_e$ ,  $\forall a \in \mathcal{A}$  e  $\forall x \in \mathcal{I}_e$ . Um *ideal à direta* de  $\mathcal{A}$  é uma subálgebra  $\mathcal{I}_d \subseteq \mathcal{A}$  tal que  $xa \in \mathcal{I}_d$ ,  $\forall a \in \mathcal{A}$  e  $\forall x \in \mathcal{I}_d$ . Um *ideal bilateral*, ou simplesmente *ideal*, de  $\mathcal{A}$  é uma subálgebra que é ao mesmo tempo um ideal à esquerda e à direta de  $\mathcal{A}$ .

**Definição 1.74.** Seja  $\mathcal{A}$  uma  $\mathbb{K}$ -álgebra e  $\mathcal{I}$  um ideal bilateral. Então o espaço quociente  $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ , com a multiplicação natural  $\bar{x}\bar{y} = \overline{xy}$  define a *álgebra quociente* de  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{I}$ .

**Observação 1.75.** Uma  $\mathbb{K}$ -álgebra  $\mathcal{A}$  é ela própria um ideal de  $\mathcal{A}$ . A subálgebra  $\{0\}$  composta apenas do elemento nulo de  $\mathcal{A}$  é um ideal. Esses dois ideais são chamados *ideais triviais*, todos os outros ideais de  $\mathcal{A}$  são chamados *não-triviais*.

**Definição 1.76.** Uma  $\mathbb{K}$ -álgebra  $\mathcal{A}$  é dita *central* se o seu centro é igual a  $\mathbb{K}$ , i.e., se  $\text{cen}(\mathcal{A}) = \mathbb{K}$ .

**Definição 1.77.** Uma  $\mathbb{K}$ -álgebra  $\mathcal{A}$  é dita ser *comutativa* se, para todos  $x, y \in \mathcal{A}$ , tem-se que  $xy = yx$ .

**Definição 1.78.** Dada uma  $\mathbb{K}$ -álgebra  $\mathcal{A}$ , definimos o *associador* como sendo uma aplicação trilinear  $(\cdot, \cdot, \cdot) : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ , tal que, para  $x, y, z \in \mathcal{A}$ :

$$(x, y, z) := (xy)z - x(yz). \quad (1.3)$$

**Definição 1.79.** Uma  $\mathbb{K}$ -álgebra  $\mathcal{A}$  é dita ser *associativa* se, para todos  $x, y, z \in \mathcal{A}$ , tem-se que:

$$(xy)z = x(yz) \text{ ou } (x, y, z) = 0. \quad (1.4)$$

Uma álgebra *não-associativa* é uma álgebra na qual não vale (1.4).

**Definição 1.80.** Uma  $\mathbb{K}$ -álgebra  $\mathcal{A}$  é dita ser *alternativa* se, para todos  $x, y \in \mathcal{A}$ , tem-se que:

$$(y, y, x) = 0 \quad \text{e} \quad (y, x, y) = 0, \quad (1.5)$$

ou

$$(yy)x = y(yx) \quad \text{e} \quad (yx)y = y(xy). \quad (1.6)$$

Conclui-se facilmente que qualquer álgebra associativa é alternativa. A alternatividade é, deveras, uma generalização da associatividade.

**Definição 1.81.** Uma  $\mathbb{K}$ -álgebra  $\mathcal{A}$  é dita ser *flexível* (ou *flexiva*) se, para todos  $x, y \in \mathcal{A}$ , tem-se que:

$$(x, y, x) = 0 \quad \text{ou} \quad (xy)x = x(yx). \quad (1.7)$$

Facilmente infere-se que toda álgebra comutativa ou associativa é flexível. Assim, associatividade implica alternatividade que implica flexibilidade.

**Exemplo 1.82.** Os sedenions formam uma álgebra não-comutativa, não-associativa e não-alternativa, porém flexível, como veremos no capítulo 3.

**Definição 1.83.** Uma  $\mathbb{K}$ -álgebra  $\mathcal{A}$  é dita ser *potência-associativa* se, para todo elemento  $x \in \mathcal{A}$ , vale a lei potência-associativa:

$$x^n x^m = x^{n+m}, \quad (1.8)$$

para quaisquer inteiros positivos  $n$  e  $m$ .

Como toda álgebra forma um anel com respeito à multiplicação da álgebra, temos o seguinte:

**Proposição 1.84.** *Seja  $\mathcal{A}$  uma  $\mathbb{K}$ -álgebra com identidade, tal que o anel  $\mathcal{A}$  tem característica zero, então  $\mathcal{A}$  é potência-associativa se, e somente se, todo elemento  $x \in \mathcal{A}$  satisfaz:*

$$x^2 x = x x^2 \quad \text{e} \quad x^2 x^2 = (x^2 x)x. \quad (1.9)$$

*Demonstração.* A demonstração pode ser encontrada em [1] (Lema 3), p. 554.  $\square$

**Teorema 1.85.** *Toda álgebra alternativa é potência-associativa.*

*Demonstração.* A demonstração pode ser encontrada em [25], p. 226.  $\square$

**Teorema 1.86.** (Artin<sup>8</sup>) *A subálgebra gerada por dois elementos,  $x$  e  $y$ , de uma álgebra alternativa é associativa.*

*Demonstração.* A demonstração pode ser encontrada em [68], p. 18.  $\square$

**Definição 1.87.** Um elemento  $x$  de uma álgebra  $\mathcal{A}$  é dito ser um *divisor de zero* se existe um elemento  $y \neq 0$  em  $\mathcal{A}$  tal que  $xy = 0$  ou  $yx = 0$ .

**Definição 1.88.** Seja  $\mathcal{A}$  uma  $\mathbb{K}$ -álgebra.  $\mathcal{A}$  é dita ser uma *álgebra de divisão* se, para todo elemento  $b \in \mathcal{A}$ , e para todo elemento não-nulo  $a \in \mathcal{A}$ , existem únicos  $x, y \in \mathcal{A}$  tais que  $ax = b$  e  $ya = b$ . Grosso modo, uma álgebra de divisão é uma álgebra que admite divisão.

**Proposição 1.89.** *Toda álgebra alternativa e de divisão possui um elemento identidade.*

*Demonstração.* A demonstração pode ser encontrada em [25], p. 226.  $\square$

---

<sup>8</sup>Emil Artin (1898 - 1962) foi um matemático austríaco.

**Proposição 1.90.** Seja  $\mathcal{A}$  uma  $\mathbb{K}$ -álgebra de divisão associativa. Então o conjunto  $\mathcal{A}^\times = \mathcal{A} \setminus \{0\}$  forma um grupo multiplicativo em relação à multiplicação da álgebra  $\mathcal{A}$ .

*Demonstração.* Para todos  $a, b \in \mathcal{A}^\times$ , existem únicos  $x, y \in \mathcal{A}^\times$  tais que  $ax = b$  e  $ya = b$ , e como  $\mathcal{A}^\times$  é associativa e possui elemento identidade, é um grupo.  $\square$

Importante dizer que toda álgebra de divisão não possui divisores de zero não-nulos. Ainda:

**Proposição 1.91.** Uma  $\mathbb{K}$ -álgebra  $\mathcal{A}$  finita é de divisão se, e somente se, não possui divisores de zero não-nulos.

*Demonstração.* A demonstração pode ser encontrada em [25], p. 186.  $\square$

**Definição 1.92.** Uma  $\mathbb{K}$ -álgebra  $\mathcal{A}$  é dita ser uma *álgebra normada* se  $\mathcal{A}$  possui uma norma  $\|\cdot\| : \mathcal{A} \longrightarrow [0, +\infty)$  tal que  $\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$ ,  $\forall x, y \in \mathcal{A}$ .

**Definição 1.93.** Sejam  $(\mathcal{A}, \cdot)$  e  $(\mathcal{B}, *)$  duas  $\mathbb{K}$ -álgebras. Uma aplicação  $\psi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$  é dita ser um *homomorfismo de álgebras* (ou  $\mathbb{K}$ -*homomorfismo de álgebras*) se, para todos  $x, y \in \mathcal{A}$ , satisfaz:

$$\psi(x \cdot y) = \psi(x) * \psi(y),$$

e se essas álgebras possuem identidades  $1_{\mathcal{A}}$  e  $1_{\mathcal{B}}$ , tem-se a condição adicional:  $\psi(1_{\mathcal{A}}) = 1_{\mathcal{B}}$ . Ainda,  $\psi$  é um *isomorfismo* se existe uma homomorfismo de álgebras  $\psi^{-1} : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$  tal que  $\psi^{-1} \circ \psi = id_{\mathcal{A}}$  e  $\psi \circ \psi^{-1} = id_{\mathcal{B}}$ , e é um *automorfismo* se é um isomorfismo com  $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ .

**Definição 1.94.** Seja  $\mathcal{A}$  uma álgebra. Um *antiautomorfismo* é um isomorfismo  $\psi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$  tal que  $\psi(xy) = \psi(y)\psi(x)$ , para todos  $x, y \in \mathcal{A}$ .

**Definição 1.95.** Seja  $\mathcal{A}$  uma álgebra. Uma aplicação linear invertível  $\alpha : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$  é uma *involução* se, para todos  $x, y \in \mathcal{A}$ , satisfaz as condições:

$$\alpha(\alpha(x)) = x \quad \text{e} \quad \alpha(xy) = \alpha(y)\alpha(x).$$

Uma álgebra com involução é dita ser uma *álgebra involucional*.

**Definição 1.97.** Seja  $\mathcal{A}$  uma álgebra. Uma aplicação invertível  $\alpha : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$  é uma *anti-involução* se  $\alpha(\alpha(x)) = x$  e  $\alpha(xy) = \alpha(x)\alpha(y)$ , para todos  $x, y \in \mathcal{A}$ .

**Teorema 1.98.** Uma involução  $\iota : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ , de uma álgebra  $\mathcal{A}$ , é um automorfismo se, e somente se,  $\mathcal{A}$  é comutativa.

*Demonstração.* Tem-se que  $\alpha(xy) = \alpha(x)\alpha(y) = \alpha(y)\alpha(x)$ ,  $\forall x, y \in \mathcal{A}$  se, e somente se,  $xy = yx$ ,  $\forall x, y \in \mathcal{A}$ , i.e., a involução  $\alpha$  é um automorfismo se, e somente se,  $\mathcal{A}$  é comutativa.  $\square$

**Teorema 1.99.** Sejam  $\alpha, \gamma : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ , duas involuções de uma álgebra  $\mathcal{A}$ , então a composta  $s = \alpha \circ \gamma$  é um automorfismo.

*Demonstração.*  $s(xy) = (\alpha \circ \gamma)(xy) = \alpha(\gamma(y)\gamma(x)) = \alpha(\gamma(x))\alpha(\gamma(y)) = s(x)s(y)$ .  $\square$

Vamos ver agora que uma álgebra pode ser completamente determinada por sua tabela de multiplicação.

**Observação 1.100.** Seja  $\mathcal{A}$  uma  $\mathbb{K}$ -álgebra finita de dimensão  $n \geq 1$ , com uma base  $\{e_1, \dots, e_n\}$ . Multiplicando os elementos da base, temos:

$$e_i e_j = \sum_{k=1}^n C_{ij}^k e_k, \quad (1.10)$$

então a multiplicação em  $\mathcal{A}$  está completamente determinada pelas  $n^3$  constantes  $C_{ij}^k$ , chamadas *constantes de estrutura* da álgebra, e as  $n^2$  equações (1.10) definem a *tabela de multiplicação* da álgebra:

.	$e_1$	$e_2$	...	$e_n$
$e_1$	$\sum_{k=1}^n C_{11}^k e_k$	$\sum_{k=1}^n C_{12}^k e_k$	...	$\sum_{k=1}^n C_{1n}^k e_k$
$e_2$	$\sum_{k=1}^n C_{21}^k e_k$	$\sum_{k=1}^n C_{22}^k e_k$	...	$\sum_{k=1}^n C_{2n}^k e_k$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$e_n$	$\sum_{k=1}^n C_{n1}^k e_k$	$\sum_{k=1}^n C_{n2}^k e_k$	...	$\sum_{k=1}^n C_{nn}^k e_k$

**Definição 1.101.** Dadas duas  $\mathbb{K}$ -álgебras finitas  $\mathcal{A}$  e  $\overline{\mathcal{A}}$  de mesma dimensão  $n$ , as tabelas de multiplicação dessas duas álgebras são ditas *semelhantes* se as suas constantes de estruturas são idênticas, i.e., se  $C_{ij}^k = \overline{C}_{ij}^k$ ,  $\forall i, j, k = 1, \dots, n$ .

**Teorema 1.102.** Duas  $\mathbb{K}$ -álgебras finitas  $\mathcal{A}$  e  $\overline{\mathcal{A}}$  são isomórfas,  $\mathcal{A} \cong \overline{\mathcal{A}}$ , se, e somente se, elas possuem tabelas de multiplicação semelhantes.

*Demonstração.* Se  $\mathcal{A} \cong \overline{\mathcal{A}}$ , pelo teorema 1.45, tem-se que  $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{A} = \dim_{\mathbb{K}} \overline{\mathcal{A}} = n$ , daí dada uma base  $\{e_i\}_{i=1}^n$  de  $\mathcal{A}$ , pelo teorema 1.44, se  $T : \mathcal{A} \rightarrow \overline{\mathcal{A}}$  é um  $\mathbb{K}$ -isomorfismo de álgebras, então  $\{T(e_i)\}_{i=1}^n$  é uma base de  $\overline{\mathcal{A}}$ . Assim temos:

$$T(e_i e_j) = T\left(\sum_{k=1}^n C_{ij}^k e_k\right) = \sum_{k=1}^n C_{ij}^k T(e_k) = T(e_i)T(e_j),$$

mas  $T(e_i)T(e_j) = \sum_{k=1}^n \overline{C}_{ij}^k T(e_k)$ , onde  $\overline{C}_{ij}^k$  são as constantes de estrutura de  $\overline{\mathcal{A}}$ , logo  $C_{ij}^k = \overline{C}_{ij}^k$ ,  $\forall i, j, k = 1, \dots, n$ .

Por outro lado, se  $\mathcal{A}$  e  $\overline{\mathcal{A}}$  possuem tabelas de multiplicação semelhantes, por definição  $C_{ij}^k = \overline{C}_{ij}^k$ ,  $\forall i, j, k = 1, \dots, n$ . Assim concluímos que  $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{A} = \dim_{\mathbb{K}} \overline{\mathcal{A}} = n$ , portanto existe uma aplicação que leva base em base, e como as constantes de estruturas são iguais, essa aplicação define um  $\mathbb{K}$ -isomorfismo de álgebras, logo  $\mathcal{A} \cong \overline{\mathcal{A}}$ .  $\square$

### 1.5.2 Álgebras $G$ -graduadas

**Definição 1.103.** Seja  $V$  um  $\mathbb{K}$ -espaço vetorial e  $G$  um grupo. Se  $V$  possui uma decomposição em soma direta de subespaços  $V = \bigoplus_{\alpha \in I} V_\alpha$ , e para todo subespaço  $V_\alpha$  um elemento  $k(\alpha) \in G$  é tomado tal que a aplicação  $\alpha \mapsto k(\alpha)$  é injetiva, então  $V$  é chamado

*espaço G-graduado.* Os vetores de cada subespaço  $V_\alpha$  são chamados *homogêneos de grau*  $k(\alpha)$ , e escrevemos  $\deg(v) = k(\alpha)$ ,  $\forall v \in V_\alpha$ .

**Definição 1.104.** Seja  $\mathcal{A}$  uma  $\mathbb{K}$ -álgebra e suponha que uma *G-graduação*  $\mathcal{A} = \bigoplus_{\alpha \in G} V_\alpha$  é definida para o espaço vetorial  $\mathcal{A}$ . Dizemos que  $\mathcal{A}$  é uma *álgebra G-graduada* se para todo par de elementos homogêneos  $x$  e  $y$ , o produto  $xy$  é também homogêneo com  $\deg(xy) = \deg(x) + \deg(y)$ , i.e., se  $x \in \mathcal{A}_\alpha$  e  $y \in \mathcal{A}_\beta$ , então  $xy \in \mathcal{A}_{\alpha+\beta}$ .

**Exemplo 1.105.** Considere o grupo  $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ . Uma álgebra  $\mathcal{A}$  é dita  *$\mathbb{Z}_2$ -graduada*, ou *superálgebra*<sup>9</sup>, se ela pode ser escrita como uma decomposição em soma direta de dois subespaços,  $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_1$ , de modo que  $a_0a_1 \in \mathcal{A}_1$ ,  $\forall a_0 \in \mathcal{A}_0$  e  $\forall a_1 \in \mathcal{A}_1$ ,  $a_0b_0 \in \mathcal{A}_0$ ,  $\forall a_0, b_0 \in \mathcal{A}_0$  e  $a_1b_1 \in \mathcal{A}_0$ ,  $\forall a_1, b_1 \in \mathcal{A}_1$ .

### 1.5.3 Álgebras de Composição

**Definição 1.106.** Uma  $\mathbb{K}$ -álgebra  $\mathcal{A}$  (não necessariamente associativa) com identidade  $1_{\mathcal{A}} \in \mathcal{A}$  é dita ser uma *álgebra de composição* se existe uma forma quadrática não-degenerada  $N : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{K}$  que permite composição, ou seja, que satisfaz,  $\forall x, y \in \mathcal{A}$ , a relação:

$$N(xy) = N(x)N(y). \quad (1.11)$$

Vamos denotar por  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  a forma bilinear associada a forma quadrática  $N(\cdot)$ , e vamos chamar  $N(\cdot)$  de *norma*.

**Exemplo 1.107.** A álgebra dos complexos  $\mathbb{C}$  com a norma usual dada por  $\|a + bi\|^2 = (a^2 + b^2)$ , é uma álgebra de composição.

**Observação 1.108.** Uma álgebra de composição finita é chamada de *álgebra de Hurwitz*. Vamos ver no capítulo 3 que uma álgebra Hurwitz tem dimensão 1, 2, 4 ou 8.

**Proposição 1.109.** *Seja  $\mathcal{A}$  uma álgebra de composição. Então para todo  $x \in \mathcal{A}$  a seguinte identidade é satisfeita:*

$$x^2 - \langle x, 1_{\mathcal{A}} \rangle x + N(x)1_{\mathcal{A}} = 0. \quad (1.12)$$

*Demonstração.* A demonstração pode ser encontrada em [71], p. 6. □

**Proposição 1.110.** *Toda álgebra de composição é potência-associativa.*

*Demonstração.* A demonstração pode ser encontrada em [71], p. 6-7. □

---

<sup>9</sup>O termo *superálgebra* deriva da física teórica, especificamente da teoria supersimétrica da física de partículas.

**Definição 1.111.** Uma  $\mathbb{K}$ -álgebra  $\mathcal{A}$  com identidade  $1_{\mathcal{A}}$  é dita ser uma *álgebra quadrática* se todo elemento  $x$  de  $\mathcal{A}$  satisfaz a equação quadrática:

$$x^2 = \beta x + \alpha 1_{\mathcal{A}}, \quad (1.13)$$

com  $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ .

**Exemplo 1.112.** Pela Proposição 1.109 acima, vemos que toda álgebra de composição é uma álgebra quadrática.

**Proposição 1.113.** *Toda  $\mathbb{R}$ -álgebra normada (de composição) é uma álgebra de divisão.*

*Demonstração.* A demonstração pode ser encontrada em [4], p. 109.  $\square$

**Proposição 1.114.** *Seja  $\mathcal{A}$  uma  $\mathbb{R}$ -álgebra quadrática e alternativa munida de uma forma bilinear positiva-definida  $g : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ . Então  $\mathcal{A}$  não possui divisores de zero.*

*Demonstração.* Uma demonstração pode ser encontrada em [25], p. 252.  $\square$

**Proposição 1.115.** *Em qualquer álgebra de composição  $\mathcal{A}$ , as seguintes identidades (identidades de Moufang) são satisfeitas:*

$$(xy)(zx) = x((yz)x), \quad x(y(xz)) = (x(yx))z, \quad y(x(zx)) = ((yx)z)x,$$

para todos  $x, y, z \in \mathcal{A}$ .

*Demonstração.* A demonstração pode ser encontrada em [71], p. 9.  $\square$

#### 1.5.4 Álgebras de Lie e de Malcev

Nesta seção, iremos continuar denotando a multiplicação das álgebras por justaposição.

**Definição 1.116.** Seja  $\mathcal{A}$  uma  $\mathbb{K}$ -álgebra.  $\mathcal{A}$  é dita ser uma *álgebra de Lie*<sup>10</sup> se, para todos  $x, y, z \in V$ , as seguintes condições são satisfeitas:

- (i)  $xy = -yx$  (*anticomutatividade*).
- (ii)  $(xy)z + (yz)x + (zx)y = 0$  (*Identidade de Jacobi*<sup>11</sup>).

**Exemplo 1.117.** Uma álgebra associativa  $\mathcal{A}$ , com uma multiplicação denotada por justaposição,  $xy$ , equipada com o *comutador*:

$$[x, y] = xy - yx, \quad (1.14)$$

é uma álgebra de Lie.

**Exemplo 1.118.** O grupo linear geral  $GL(n, \mathbb{K})$  descrito na seção precedente, munido de uma multiplicação por escalar é um espaço vetorial, que denotaremos por  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ . Mais

---

<sup>10</sup>Marius Sophus Lie (1842 - 1899) foi um matemático norueguês.

<sup>11</sup>Carl Gustav Jakob Jacobi (1804 - 1851) foi um matemático alemão.

ainda, esse espaço junto com o comutador  $[\cdot, \cdot]$ , definido por (1.14), é uma álgebra de Lie, que também é denotada por  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ .

Para mais detalhes sobre álgebras de Lie, consulte [41].

**Definição 1.119.** Seja  $\mathcal{A}$  uma  $\mathbb{K}$ -álgebra.  $\mathcal{A}$  é dita ser uma *álgebra de Malcev*<sup>12</sup> se, para todos  $x, y, z \in \mathcal{A}$ , a multiplicação satisfaz as seguintes condições:

- (i)  $xy = -yx$  (*anticomutatividade*).
- (ii)  $((xy)z)x + ((yz)x)x + ((zx)x)y - (xy)(xz) = 0$  (*Identidade de Malcev*).

**Exemplo 1.120.** Toda álgebra de Lie é uma álgebra de Malcev. Com efeito, substituindo o termo  $z$  pelo termo  $xz$  na identidade de Jacobi, obtemos:

$$\begin{aligned} & (xy)(xz) + (y(xz))x + ((xz)x)y = (xy)(xz) - ((xz)y)x - ((zx)x)y = \\ & = (xy)(xz) - [(xy)z + (yz)x]x - ((zx)x)y = (xy)(xz) - ((xy)z)x - ((yz)x)x - ((zx)x)y. \end{aligned}$$

As álgebras de Malcev são, na realidade, uma generalização das álgebras de Lie. Para mais detalhes sobre álgebras de Malcev, consulte [67].

### 1.5.5 Álgebra Tensorial

**Definição 1.121.** Sejam  $V$  e  $W$   $\mathbb{K}$ -espaços vetoriais arbitrários. Uma aplicação  $f : \underbrace{V \times \dots \times V}_k \longrightarrow W$  é dita *k-linear* se é linear em cada uma das  $k$  entradas.

**Definição 1.122.** Sejam  $V$ ,  $W$  e  $U$   $\mathbb{K}$ -espaços vetoriais, e seja  $\theta : V \times W \longrightarrow U$  uma aplicação bilinear. O par  $(U, \otimes)$  é chamado *produto tensorial* de  $V$  e  $W$ , se a seguinte propriedade é satisfeita:

(i) (*Propriedade universal*) Dado um  $\mathbb{K}$ -espaço vetorial arbitrário  $H$ , e se  $\gamma : V \times W \longrightarrow H$  é uma bilinear, então existe uma *única* linear  $f : U \longrightarrow H$  tal que  $\gamma = f \circ \otimes$ , i.e.,  $\exists$  única linear,  $f : U \longrightarrow H$ , que torna o diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} V \times W & \xrightarrow{\gamma} & H \\ \otimes \downarrow & \nearrow f & \\ U = V \otimes W & & \end{array}$$

Se  $(U, \otimes)$  é um produto tensorial de  $V$  e  $W$ , denotamos  $U = V \otimes W$ . Além disso, se  $v \in V$  e  $w \in W$ , denotamos  $\otimes(v, w) = v \otimes w$ . Utiliza-se também a notação  $\otimes_{\mathbb{K}}$  para enfatizar o corpo sobre o qual os  $\mathbb{K}$ -espaços são considerados.

A Definição 1.122 pode ser estendida para  $k$  espaços vetoriais,  $V_1, \dots, V_k$ , para obter-se o *k-ésimo produto tensorial* (ou *k-ésima potência tensorial*),  $V_1 \otimes \dots \otimes V_k$ , entre os espaços  $V_1, \dots, V_k$ . Em particular, quando  $V_i = V$ , para todo  $i = 1, \dots, n$ , denotamos o *k-ésimo*

<sup>12</sup>Anatoly Ivanovich Malcev (1909 - 1967) foi um matemático russo.

produto tensorial de  $V$  por  $T^k(V) = V^{\otimes k} = \otimes^k V = V \otimes \dots \otimes V$ ,  $k$  vezes. Note que  $V^{\otimes 0} = \mathbb{K}$  e  $V^{\otimes 1} = V$ . Os elementos da forma  $v_1 \otimes \dots \otimes v_k \in V^{\otimes k}$  são chamados *decomponíveis*.

**Teorema 1.124.** (Existência e unicidade do produto tensorial)<sup>13</sup> *Dados espaços vetoriais  $V_1, \dots, V_k$ ,  $k \geq 1$  inteiro positivo, o produto tensorial  $V_1 \otimes \dots \otimes V_k$  existe e é único, a menos de isomorfismos.*

*Demonstração.* A demonstração pode ser encontrada em [44], p. 259.  $\square$

**Proposição 1.125.** *Sejam  $V$  e  $W$  espaços vetoriais com dimensões  $\dim(V) < \infty$  e  $\dim(W) < \infty$ , respectivamente, então  $\dim(V \otimes W) = \dim(V) \cdot \dim(W)$ .*

*Demonstração.* A demonstração pode ser encontrada em [32], p. 17-18.  $\square$

**Proposição 1.126.** *Sejam  $V, W$  e  $U$   $\mathbb{K}$ -espaços vetoriais, então valem:*

- (i)  $\mathbb{K} \otimes V \cong V$ .
- (ii)  $V \otimes W \cong W \otimes V$ .
- (iii)  $(V \otimes W) \otimes U \cong V \otimes (W \otimes U)$ .

*Demonstração.* A demonstração pode ser encontrada em [32], p. 17.  $\square$

**Definição 1.127.** Seja  $V$  um  $\mathbb{K}$ -espaço vetorial. A *álgebra tensorial* de  $V$  é uma  $\mathbb{K}$ -álgebra  $T(V)$  junto com uma aplicação  $\mathbb{K}$ -linear  $\psi : V \rightarrow T(V)$  que satisfaz a seguinte propriedade:

(i) (*Propriedade universal*) Dada uma  $\mathbb{K}$ -álgebra  $\mathcal{A}$  e uma linear  $\phi : V \rightarrow \mathcal{A}$ , existe um único  $\mathbb{K}$ -homomorfismo de álgebras,  $f : T(V) \rightarrow \mathcal{A}$ , tal que  $\phi = f \circ \psi$ , ou seja, que torna o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\phi} & \mathcal{A} \\ \psi \downarrow & \nearrow f & \\ T(V) & & \end{array}$$

**Teorema 1.128.** *A álgebra tensorial de um  $\mathbb{K}$ -espaço vetorial  $V$  existe e é única, a menos de isomorfismos.*

*Demonstração.* (*Existência*) Seja  $V$  um  $\mathbb{K}$ -espaço vetorial. Considere o seguinte  $\mathbb{K}$ -espaço vetorial:

$$T(V) = \bigoplus_{i \geq 0} V^{\otimes i},$$

onde  $V^{\otimes i}$  é a  $i$ -ésima potência tensorial de  $V$ , com  $V^{\otimes 0} = \mathbb{K}$  e  $V^{\otimes 1} = V$ . Para cada par de inteiros não-negativos  $(p, q)$ , existe uma única aplicação bilinear  $V^{\otimes p} \times V^{\otimes q} \rightarrow V^{\otimes p+q}$  tal que:

$$((v_1 \otimes \dots \otimes v_p), (v_{p+1} \otimes \dots \otimes v_{p+q})) \mapsto v_1 \otimes \dots \otimes v_{p+q},$$

---

<sup>13</sup>Na realidade, a existência e unicidade do produto tensorial é um aspecto da propriedade da aplicação universal na teoria das categorias. Estruturas desse tipo podem ser estudadas de uma forma muito mais geral dentro da teoria das categorias; o leitor pode consultar [8] para um estudo mais detalhado.

e desde que  $V^{\otimes p} \otimes V^{\otimes q} \subseteq V^{\otimes p+q}$ , as potências tensoriais definem uma estrutura de álgebra  $\mathbb{Z}$ -graduada não-negativa sobre  $T(V)$ .

Seja  $\psi : V \rightarrow T(V)$  uma aplicação linear. Seja  $\mathcal{A}$  uma  $\mathbb{K}$ -álgebra arbitrária e seja  $\phi : V \rightarrow \mathcal{A}$  uma aplicação linear. Considere uma aplicação  $k$ -linear  $V \times \dots \times V \rightarrow \mathcal{A}$  tal que:

$$(v_1, \dots, v_k) \mapsto \phi(v_1) \dots \phi(v_k).$$

Pela propriedade da fatoração única (ou propriedade universal) do produto tensorial, existe uma aplicação linear  $f_k : V^{\otimes k} \rightarrow \mathcal{A}$  tal que:

$$(v_1 \otimes \dots \otimes v_k) \mapsto \phi(v_1) \dots \phi(v_k).$$

Escrevendo  $u_k = v_1 \otimes \dots \otimes v_k \in V^{\otimes k}$  e  $u = \sum_k u_k \in T(V)$ , definimos a aplicação  $f : T(V) \rightarrow \mathcal{A}$  da seguinte forma:

$$u \mapsto \sum_k f_k(u_k).$$

Então, dados elementos decomponíveis  $u = v_1 \otimes \dots \otimes v_k$  e  $v = w_1 \otimes \dots \otimes w_k$  de  $T(V)$ , temos que:

$$f(uv) = f(v_1 \otimes \dots \otimes v_k \otimes w_1 \otimes \dots \otimes w_k) = \phi(v_1) \dots \phi(v_k) \phi(w_1) \dots \phi(w_k) = f(u)f(v),$$

ou seja,  $f$  preserva produto, logo é um  $\mathbb{K}$ -homomorfismo de álgebras com  $\phi = f \circ \psi$ .

(*Unicidade*) Suponha que  $(T(V), \psi)$  e  $(T'(V), \psi')$  sejam álgebras tensoriais de  $V$ . Então, pela propriedade universal, existe um único  $\mathbb{K}$ -homomorfismo de álgebras  $h : T(V) \rightarrow T'(V)$  tal que  $\psi' = h \circ \psi$ . Por outro lado, existe um único  $\mathbb{K}$ -homomorfismo de álgebras  $g : T'(V) \rightarrow T(V)$  tal que  $\psi = g \circ \psi'$ . Mas então temos que  $\psi' = (h \circ g) \circ \psi'$  e  $\psi = (g \circ h) \circ \psi$ , ou seja,  $g \circ h = id_{T'(V)}$  e  $h \circ g = id_{T(V)}$ , onde  $id_{T'(V)}$  e  $id_{T(V)}$  são as aplicações identidades de  $T'(V)$  e  $T(V)$ , respectivamente. Portanto  $h$  é um  $\mathbb{K}$ -isomorfismo de álgebras.  $\square$

A álgebra tensorial  $T(V)$  também é denotada por  $\otimes V$ . Se  $\dim(V) \neq 1$ , a multiplicação em  $T(V)$  é associativa, mas é *não-comutativa*.

Vamos introduzir agora o produto tensorial de álgebras.

**Proposição 1.129.** *Se  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$  são  $\mathbb{K}$ -álgebras, então o produto tensorial  $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$  junto com uma multiplicação definida por:*

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \times \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} &\rightarrow \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \\ (x \otimes y, x' \otimes y') &\mapsto xx' \otimes yy' \end{aligned}$$

para todos  $x, y \in \mathcal{A}$  e todos  $x', y' \in \mathcal{B}$ , é uma  $\mathbb{K}$ -álgebra.

*Demonstração.* A demonstração pode ser encontrada em [33], p. 527.  $\square$

Como mostrado também em [33], p. 527, essa multiplicação é associativa.

**Definição 1.130.** Sejam  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$  duas  $\mathbb{K}$ -álgebras. A  $\mathbb{K}$ -álgebra  $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$  da proposição anterior é o *produto tensorial das álgebras  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$* .

**Observação 1.131.** Se  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$  são duas  $\mathbb{K}$ -álgebras finitas com bases  $\{a_1, \dots, a_n\}$  e  $\{b_1, \dots, b_m\}$ , respectivamente, então  $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$  será uma álgebra  $nm$ -dimensional com base  $\{a_i \otimes b_j \mid i = 1, \dots, n \text{ e } j = 1, \dots, m\}$ . Se  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$  são comutativas então  $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$  será comutativa, e teremos  $a_i \otimes b_j = b_j \otimes a_i$  para os elementos da base.

### 1.5.6 Álgebra Exterior e de Grassmann

Seja  $V$  um espaço vetorial, vamos denotar o produto cartesiano de  $k$  desses espaços por  $V^k = V \times \dots \times V$ ,  $k$  vezes. Para algum espaço  $W$ , seja  $\psi : V^k \rightarrow W$  uma aplicação  $k$ -linear,  $(x_1, \dots, x_k) \mapsto \psi(x_1, \dots, x_k)$ , e seja  $S_k$  o grupo das permutações do conjunto  $\{1, 2, \dots, k\}$ . Então toda permutação  $\sigma \in S_k$  define uma outra aplicação  $k$ -linear,  $\sigma\psi$ , dada por:

$$\sigma\psi(x_1, \dots, x_k) = \psi(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(k)}).$$

**Definição 1.132.** Sejam  $V$  e  $W$  espaços vetoriais arbitrários. Uma aplicação  $k$ -linear  $\psi : V \times \dots \times V \rightarrow W$  é dita *antissimétrica* se  $\sigma\psi = sgn(\sigma)\psi$ , em que  $sgn(\sigma) = 1$  se a permutação  $\sigma$  é par e  $sgn(\sigma) = -1$  se a permutação  $\sigma$  é ímpar.

**Definição 1.133.** Seja  $V$  um espaço vetorial arbitrário. Considere  $V^k = V \times \dots \times V$ ,  $k$  vezes. O espaço vetorial  $\bigwedge^k V$  junto com uma aplicação  $k$ -linear,  $k \geq 2$ , anti-simétrica,  $\psi : V^k \rightarrow \bigwedge^k V$ , é dito ser uma  *$k$ -ésima potência exterior de  $V$*  se a seguinte propriedade universal é satisfeita:

(i) Se  $W$  é um espaço vetorial arbitrário e  $\phi : V^k \rightarrow W$  é uma aplicação  $k$ -linear anti-simétrica, então existe uma *única* aplicação linear  $g : \bigwedge^k V \rightarrow W$  tal que  $\phi = g \circ \psi$ , i.e.,  $\exists$  única linear  $g : \bigwedge^k V \rightarrow W$  que torna o diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} V \times \dots \times V & \xrightarrow{\phi} & W \\ \psi \downarrow & \nearrow g & \\ \bigwedge^k V & & \end{array}$$

Os elementos de  $\bigwedge^k V$  são chamados  *$k$ -vetores* e denotamos  $\psi(x_1, \dots, x_k) := x_1 \wedge \dots \wedge x_k$ . Ainda, os elementos de  $\bigwedge^k V$  da forma  $x_1 \wedge \dots \wedge x_k$  são chamados *decomponíveis*. Como  $\psi$  é antissimétrica, temos a identidade:

$$x_1 \wedge \dots \wedge x_k = sgn(\sigma)x_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge x_{\sigma(k)}. \quad (1.15)$$

**Proposição 1.134.** Seja  $V$  um  $\mathbb{K}$ -espaço vetorial com  $\dim(V) = n$ . Seja  $\{e_1, \dots, e_n\}$  uma base de  $V$ , então o conjunto:

$$\{e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_n} : 1 \leq i_1 < \dots < i_n \leq n\}. \quad (1.16)$$

é uma base da  *$k$ -ésima potência exterior*  $\bigwedge^k V$ .

*Demonstração.* A demonstração pode ser encontrada em [28], p. 46. □

**Corolário 1.135.** Seja  $V$  um  $\mathbb{K}$ -espaço de  $\dim(V) = n < \infty$ . Então a dimensão da  $k$ -ésima potência exterior  $\bigwedge^k V$  de  $V$  é:

$$\dim \bigwedge^k V = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \quad (1.17)$$

**Definição 1.136.** Seja  $V$  um  $\mathbb{K}$ -espaço vetorial, e seja  $T(V)$  sua álgebra tensorial. Seja  $\mathcal{I}$  o ideal bilateral de  $T(V)$  gerado por  $\{v \otimes w + w \otimes v \mid v, w \in V\}$ . A álgebra quociente  $\bigwedge V = T(V)/\mathcal{I}$  é a *álgebra exterior* de  $V$ .

Os elementos de  $\bigwedge V$  são chamados *multivetores*.

**Teorema 1.137.** A álgebra exterior de um  $\mathbb{K}$ -espaço vetorial existe e é única, a menos de isomorfismos.

*Demonstração.* Uma demonstração pode ser encontrada em [32], p. 100-103.  $\square$

**Observação 1.138.** De forma equivalente, a álgebra exterior de  $V$  pode ser definida como a soma direta das potências exteriores:

$$\bigwedge V = \bigoplus_{p \geq 0} \bigwedge^p V,$$

com  $\bigwedge^0 V = \mathbb{K}$  e  $\bigwedge^1 V = V$ , junto com uma multiplicação  $\wedge : \bigwedge^p V \times \bigwedge^q V \rightarrow \bigwedge^{p+q} V$  definida por:

$$((v_1 \wedge \dots \wedge v_p), (v_{p+1} \wedge \dots \wedge v_{p+q})) \mapsto v_1 \wedge \dots \wedge v_{p+q},$$

que a torna uma álgebra associativa  $\mathbb{Z}$ -graduada não-negativa.

Se  $V$  é um  $\mathbb{K}$ -espaço  $n$ -dimensional com base  $\{e_1, \dots, e_n\}$ , já vimos que as dimensões das  $k$ -potências exteriores de  $V$  são  $\binom{n}{k}$ . Estendendo a multiplicação  $\wedge$  ao espaço  $A = \bigoplus_{k=0}^n \bigwedge^k V$ , obtemos uma álgebra unitária e associativa, idêntica à álgebra exterior de  $V$ , i.e.,  $A = \bigwedge V$ . Portanto a dimensão da álgebra exterior de  $V$  será:

$$\dim \bigwedge V = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n. \quad (1.18)$$

A multiplicação da álgebra exterior não é comutativa, porém ela possui a seguinte propriedade:

$$v \wedge w = (-1)^{pq} w \wedge v, \quad v \in \bigwedge^p V, \quad w \in \bigwedge^q V.$$

Seja  $\bigwedge V$  a álgebra exterior de um  $\mathbb{R}$ -espaço  $V$ . Seja  $g : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  uma métrica de assinatura  $(p, q)$  em  $V$ . Construímos um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle : \bigwedge V \times \bigwedge V \rightarrow \mathbb{R}$  definindo:

- (i) Se  $u \in \bigwedge^p V$  e  $v \in \bigwedge^q V$ , então  $\langle u, v \rangle = 0$ , se  $p \neq q$ .
- (ii) Sejam  $u, v \in \bigwedge^p V$ , com  $u = u_1 \wedge \dots \wedge u_p$  e  $v = v_1 \wedge \dots \wedge v_p$ . Se  $A = (a_{ij})$  é a matriz  $p \times p$  com entradas  $a_{ij} = \langle u_i, v_j \rangle$ , então  $\langle u, v \rangle = \det(A)$ .

Podemos estender esse produto interno para todos os elementos de  $\bigwedge V$  por linearidade. Então a álgebra exterior  $\bigwedge V$  junto com o produto interno definido acima é chamada *álgebra de Grassmann*.

# Capítulo 2

## Números Hipercomplexos

Neste capítulo, iremos introduzir os números hipercomplexos, em especial, os números complexos, os quaternions e, brevemente, os octonions — não discorreremos sobre os números reais, pressupondo-se que o leitor esteja amplamente familiarizado com esse sistema numérico. Muitos dos conceitos desenvolvidos nesta parte podem ser encontrados em [25] e [42]. As notas históricas que seguem foram baseadas principalmente nas notas históricas contidas nos livros [25] e [73].

### 2.1 Notas Históricas

Em 1539, Girolamo Cardano (1501–1576), às vezes grafado Gerolamo Cardano, um famoso matemático italiano, foi um dos primeiros matemáticos a lidar com números complexos, atribuindo, em seu livro *Artis magnae sive de regulis algebraicis liber unus*, popularmente conhecido como *Ars magna*, as soluções  $5 - \sqrt{-15}$  e  $5 + \sqrt{-15}$  para a equação  $x(10 - x) = 40$ .

Rafael Bombelli (15266–1572), em seu trabalho intitulado *L'algebra*, provavelmente confeccionado entre 1557 e 1560, publicado em 1572, executou (corretamente) vários cálculos envolvendo complexos, e.g., aplicou a identidade  $\sqrt[3]{2 \pm \sqrt{-121}} = 2 \pm \sqrt{-1}$  na equação  $x^3 = 15x + 4$ , achando suas soluções reais e complexas. Bombelli foi o primeiro a manipular corretamente cálculos formais envolvendo números complexos.

Isaac Newton (1642–1727) considerava que a aparição de raízes imaginárias (entidades contendo raízes quadradas de números negativos) era um indicativo da insolubilidade de um problema, tendo em vista que na época de Newton os números complexos ainda não haviam aparecido em nenhuma área da Física e, por conseguinte, careciam de significado físico.

John Wallis (1616–1703), em seu *De algebra tractatus*, publicado em 1685, foi o primeiro matemático a esboçar uma correspondência entre números complexos e pontos num plano. Anos mais tarde, Caspar Wessel (1745–1818) introduziu o *plano complexo*, colocando um eixo imaginário perpendicular ao eixo dos números reais e interpretou os números complexos como vetores nesse plano. Ele definiu as operações usuais para vetores e, consequentemente, as operações entre complexos, de uma maneira geométrica. Outro matemático que tratou sobre a representação geométrica dos complexos foi Jean-Robert Argand (1768–1822), em seu livro *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques*. Embora o trabalho de Argand, assim como o de Wessel, não tenha chamado muita atenção, o plano complexo ficou conhecido

como *plano de Argand*.

Leonhard Euler (1707–1783) fez inúmeras contribuições importantes no campo dos números complexos: introduziu a notação  $i = \sqrt{-1}$ , introduziu a forma polar de um número complexo,  $x + yi = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ , definiu a função exponencial  $e^x$  para um complexo  $z = x + iy$  e provou que  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ . Esses foram apenas alguns dentre os muitos feitos de Euler.

Johann Carl Friedrich Gauss (1777–1855) cunhou a expressão *número complexo* e ajudou a disseminar, a partir do seu trabalho *Theoria Residuorum Biquadraticorum*, a ideia do plano complexo. Também utilizou os números complexos na demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra.

Em um trabalho intitulado *Theory of Conjugate Functions, or Algebraic Couples, with a Preliminary and Elementary Essay on Algebra as the Science of Pure Time*, o matemático inglês William Rowan Hamilton (1805–1865) definiu, pela primeira vez, formalmente os números complexos como pares ordenados de números reais, definindo as regras de adição e multiplicação desses pares da maneira como nós as conhecemos hoje. Hamilton, ainda, buscava por uma “Teoria dos Triplets”, i.e., um sistema de números da forma  $a + bi + cj$  (chamados por ele de triplets), que seria o correspondente tri-dimensional dos números complexos. Após trinta anos pesquisando sobre triplets, Hamilton, finalmente, descobriu, em 1843, os *quaternions*, que não se tratava de um sistema 3-dimensional, mas 4-dimensional, publicando sua descoberta no ano seguinte na *Philosophical Magazine* [34].

Pouco tempo depois de Hamilton ter descoberto seus quaternions, o matemático John Thomas Graves (1806–1870), no mesmo ano de 1843, descobriu um sistema numérico 8-dimensional, o qual chamou de *octaves*, que, mais tarde, ficaria conhecido como *octonions*, porém sua descoberta foi publicada apenas em 1848. Arthur Cayley (1821–1895) redescobriu os octonions em 1845, e desde então os octonions também têm sido chamados de *números de Cayley*.

Em 1870, o matemático americano Benjamin Peirce (1809–1880) publicou o livro *Linear Associative Algebras*, contendo um dos primeiros estudos sistemáticos de sistemas de números hipercomplexos, e ainda calculou a tabela de multiplicação de 162 álgebras!

## 2.2 Os Complexos

Introduziremos, primeiramente, os números complexos como pares ordenados de números reais.

Considere o conjunto  $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{z = (x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ , tal que se  $(x_0, y_0), (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ , então  $(x_0, y_0) = (x_1, y_1)$  se, e somente se,  $x_0 = x_1$  e  $y_0 = y_1$ . Sejam  $z_0 = (x_0, y_0), z_1 = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ , vamos definir as operações de adição e multiplicação em  $\mathbb{R}^2$  da seguinte maneira:

$$z_0 + z_1 = (x_0, y_0) + (x_1, y_1) = (x_0 + x_1, y_0 + y_1), \quad (2.1)$$

$$z_0 z_1 = (x_0, y_0)(x_1, y_1) = (x_0 x_1 - y_0 y_1, x_0 y_1 + x_1 y_0). \quad (2.2)$$

Pelas propriedades usuais de adição e multiplicação de números reais, fica claro que  $z_0 + z_1, z_0 z_1 \in \mathbb{R}^2$ .

**Definição 2.1.** O conjunto  $\mathbb{R}^2$  provido das operações de adição (2.1) e multiplicação (2.2) forma um corpo, chamado *corpo dos números complexos*, e o denotaremos por  $\mathbb{C}$ . Os elementos  $z = (x, y) \in \mathbb{C}$  são chamados *números complexos*.

Dados complexos  $z_0 = (x_0, y_0), z_1 = (x_1, y_1), z_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{C}$ , vamos verificar que ambas operações, de adição (2.1) e de multiplicação (2.2), são *comutativas, associativas* e possuem *inversos* e *identidades*.

## I. Propriedades da adição

- (i) *Comutatividade:*  $z_0 + z_1 = z_1 + z_0, \forall z_0, z_1 \in \mathbb{C}$ .
- (ii) *Associatividade:*  $z_0 + (z_1 + z_2) = (z_0 + z_1) + z_2, \forall z_0, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ .
- (iii) *Identidade aditiva:* O elemento  $0 = (0, 0) \in \mathbb{C}$  é o único número complexo tal que  $z + 0 = 0 + z = z, \forall z \in \mathbb{C}$ .
- (iv) *Inverso aditivo:* Para todo complexo  $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ , existe único elemento  $-z = (-x, -y) \in \mathbb{C}$  tal que  $z + (-z) = (-z) + z = 0$ .

As propriedades acima são facilmente provadas a partir das definições (2.1) e (2.2) e das propriedades usuais dos números reais.

## II. Propriedades da multiplicação

- (i) *Comutatividade:*  $z_0 z_1 = z_1 z_0, \forall z_0, z_1 \in \mathbb{C}$ .
- (ii) *Associatividade:*  $z_0(z_1 z_2) = (z_0 z_1) z_2, \forall z_0, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ .
- (iii) *Identidade multiplicativa:* Existe único complexo  $1 = (1, 0) \in \mathbb{C}$  tal que  $z \cdot 1 = 1 \cdot z = z, \forall z \in \mathbb{C}$ .

Através da regra (2.2), verifica-se:

$$z \cdot 1 = (x, y)(1, 0) = (x \cdot 1 - y \cdot 0, x \cdot 0 + 1 \cdot y) = (x, y) = z,$$

$$1 \cdot z = (1, 0)(x, y) = (1 \cdot x - 0 \cdot y, 1 \cdot y + x \cdot 0) = (x, y) = z.$$

- (iv) *Inverso multiplicativo:* Para todo complexo  $z = (x, y) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , existe único elemento  $z^{-1} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  tal que  $z z^{-1} = z^{-1} z = 1$ .

Sendo  $(x, y) \neq (0, 0) \Rightarrow x^2 + y^2 \neq 0$ , então  $z z^{-1} = 1$  é equivalente a  $(x, y)(x', y') = (1, 0)$ , ou seja, temos o sistema linear:  $xx' - yy' = 1$  e  $yx' + xy' = 0$ . Resolvendo-o obtemos:

$$z^{-1} = (x, y)^{-1} = \left( \frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right). \quad (2.3)$$

A multiplicação é distributiva sobre a adição:

- (v) *Distributividade:* Para todos  $z_0, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ , tem-se:

$$\begin{aligned} z_0(z_1 + z_2) &= z_0 z_1 + z_0 z_2, \\ (z_0 + z_1)z_2 &= z_0 z_2 + z_1 z_2. \end{aligned} \quad (2.4)$$

**Observação 2.2.** Dados reais  $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$  e complexos  $z, w \in \mathbb{O}$  arbitrários, segue diretamente da regra de adição (2.1) as identidades:

$$\lambda(\beta z) = (\lambda\beta)z, \quad (\lambda + \beta)z = \lambda z + \beta w, \quad \lambda(z + w) = \lambda z + \lambda w.$$

## Representação algébrica de um número complexo

Primeiramente vamos observar que dados complexos  $(x, 0), (y, 0) \in \mathbb{C}$ , tem-se que:  $(x, 0) + (y, 0) = (x + y, 0)$  e  $(x, 0)(y, 0) = (xy, 0)$ . Ou seja, a operação com pares da forma  $(x, 0)$  é semelhante a operação de números reais  $x \in \mathbb{R}$ . Podemos, dessa forma, identificar  $(x, 0) = x$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Observe agora que  $(y, 0)(0, 1) = (0, y)$ , e que  $(x, y) = (x, 0) + (0, y)$ . Logo podemos escrever:

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (y, 0)(0, 1). \quad (2.5)$$

Denotando  $i = (0, 1)$ , a expressão (2.5) pode ser resumida na expressão:

$$z = x + yi. \quad (2.6)$$

A expressão (2.6) é chamada *representação álgebra do complexo*  $z = (x, y)$ . Mais ainda, todo complexo  $z = (x, y)$  pode ser unicamente representado por (2.6). O complexo  $i = (0, 1)$  é conhecido como *unidade imaginária* e  $ii = i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1$ .

O conjunto dos números complexos pode ser escrito, por conseguinte, como  $\mathbb{C} = \{x + yi \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ . Dado um complexo  $z = x + yi \in \mathbb{C}$ , dizemos que  $x$  é a *parte real* e  $y$  é a *parte imaginária* de  $z$ , e escrevemos  $x = \operatorname{Re}(z)$  e  $y = \operatorname{Im}(z)$ . O complexo  $z$  é dito *puramente imaginário* se é da forma  $z = bi$ , ou seja, se  $\operatorname{Re}(z) = 0$ . Note que  $z \in \mathbb{R}$  se, e somente se,  $\operatorname{Im}(z) = 0$ .

Dados complexos  $z_0 = x_0 + y_0i, z_1 = x_1 + y_1i \in \mathbb{C}$ , podemos reescrever as regras de adição (2.1) e multiplicação (2.2) da forma:

$$z_0 + z_1 = (x_0 + y_0i) + (x_1 + y_1i) = (x_0 + x_1) + (y_0 + y_1)i, \quad (2.7)$$

$$z_0 z_1 = (x_0 + y_0i)(x_1 + y_1i) = (x_0 x_1 - y_0 y_1) + (x_0 y_1 + x_1 y_0)i. \quad (2.8)$$

### 2.2.1 Conjugação, valor absoluto e divisão de números complexos

**Definição 2.3.** O *conjugado* de um complexo  $z = x + yi \in \mathbb{C}$  é o elemento  $\bar{z} = x - yi \in \mathbb{C}$ . Na forma  $z = (x, y)$ , tem-se que  $\overline{(x, y)} = (x, -y)$ .

**Observação 2.4.** O significado geométrico do conjugado de um número complexo é exposto na Figura 2.1(b);  $\bar{z}$  é a reflexão de  $z$  em torno do eixo  $x$  (ou eixo real).

**Proposição 2.5.** *Dado dois complexos arbitrários,  $z, w \in \mathbb{C}$ , temos que:*

$$\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}, \quad (2.9)$$

$$\overline{zw} = \bar{z} \bar{w}, \quad (2.10)$$

$$\bar{\bar{z}} = z, \quad (2.11)$$

ou seja, o conjugado da soma é a soma dos conjugados, o conjugado do produto é o produto dos conjugados e o conjugado do conjugado é a identidade.

*Demonstração.* Sendo  $z = a + bi$  e  $w = c + di \Rightarrow \overline{z + w} = (a + c) - (b + d)i = \bar{z} + \bar{w}$ , e  $\overline{zw} = (ac - db) - (ad + cb)i = (ac - db) + (-ad - cb)i = \bar{z} \bar{w}$ , e  $\bar{\bar{z}} = \overline{a - bi} = a + bi = z$ .  $\square$

**Observação 2.6.** Dado um complexo  $z = a + bi \in \mathbb{C}$ , segue as identidades:

$$\begin{aligned} z + \bar{z} &= (a + bi) + (a - bi) = 2a, \\ z\bar{z} &= (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2, \\ \operatorname{Re}(z) &= \frac{z + \bar{z}}{2} \quad \text{e} \quad \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}. \end{aligned}$$

**Definição 2.7.** O *valor absoluto* (ou *norma*) de um número complexo  $z = a + bi \in \mathbb{C}$  é o número real não-negativo  $\|z\| = \sqrt{a^2 + b^2}$ . Note que esta é a norma euclidiana do espaço  $\mathbb{R}^2$ .

**Observação 2.8.** Para todo  $z \in \mathbb{C}$ , tem-se que  $-\|z\| \leq \operatorname{Re}(z) \leq \|z\|$  e  $-\|z\| \leq \operatorname{Im}(z) \leq \|z\|$ . Ainda, podemos escrever  $\|z\|^2 = z\bar{z}$ , pois  $\|z\|^2 = a^2 + b^2$  e  $z\bar{z} = a^2 + b^2$ .

**Proposição 2.9.** *Dados dois complexos  $z, w \in \mathbb{C}$ , temos:*

$$\|zw\| = \|z\|\|w\|, \tag{2.12}$$

*ou seja, a norma de um produto é igual ao produto das normas.*

*Demonstração.*  $\|zw\|^2 = (zw)(\bar{z}\bar{w}) = (zw)(\bar{z}\bar{w}) = z\bar{z}w\bar{w} = \|z\|^2\|w\|^2 \Rightarrow \|zw\| = \|z\|\|w\|$ .  $\square$

**Proposição 2.10.** *Considere dois complexos  $z, w \in \mathbb{C}$ ,  $w \neq 0$ . O quociente de  $z$  por  $w$ ,  $z/w$ , é igual a quantidade  $\bar{w}z/\|w\|^2$ .*

*Demonstração.* Por definição, o quociente  $z/w$  é igual a solução da equação  $wx = z$ . Multipliando ambos os lados dessa equação por  $\bar{w}$ , obtemos:

$$\bar{w}wx = \bar{w}z \Rightarrow \|w\|^2x = \bar{w}z,$$

multiplicando, agora, ambos os lados pelo inverso do quadrado do valor absoluto de  $w$ ,  $1/\|w\|^2$ , obtemos:

$$x = \frac{\bar{w}z}{\|w\|^2} \Rightarrow \frac{z}{w} = \frac{\bar{w}z}{\|w\|^2}.$$

$\square$

Dado um complexo  $z = (x + yi) \neq 0$ , pela proposição anterior, concluímos que o inverso de  $z$  é o complexo não-nulo:

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{\|z\|^2} = z^{-1} = \left( \frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right),$$

como havíamos concluído em (2.3).

**Observação 2.11.**  $\|z^{-1}\| = \|z\|^{-1}$ , pois pela proposição acima temos que  $\|z^{-1}\| = \|z\|/(x^2 + y^2) = \|z\|/\|z\|^2$ .

## 2.2.2 Representação geométrica e forma polar

O *plano complexo*, também conhecido por *plano de Argand* ou *plano de Argand-Gauss*, é o plano cujo eixo  $x$  é o eixo das partes reais e o eixo  $y$  é o eixo das partes imaginárias,

chamados eixo real ( $\text{Re}$ ) e eixo imaginário ( $\text{Im}$ ), respectivamente. Um número complexo  $z = a + bi \in \mathbb{C}$  pode ser visualizado como um ponto  $(a, b)$  nesse plano, como mostrado na Figura 2.1(a). A partir dessa figura, podemos escrever  $a = \|z\| \cos \theta$  e  $b = \|z\| \sin \theta$ , com  $\theta = \arctan(\frac{b}{a})$  (argumento),  $\theta \in [0, 2\pi]$ , e escrever o complexo  $z$  na *forma trigonométrica* ou *forma polar*:

$$z = \|z\|(\cos \theta + i \sin \theta). \quad (2.13)$$

Através da expansão em séries de potências da função expoencial:  $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $z \in \mathbb{C}$ , e tendo em mente que  $i^n = -(i)^{-n}$ , para  $z = i\theta$ , obtemos:

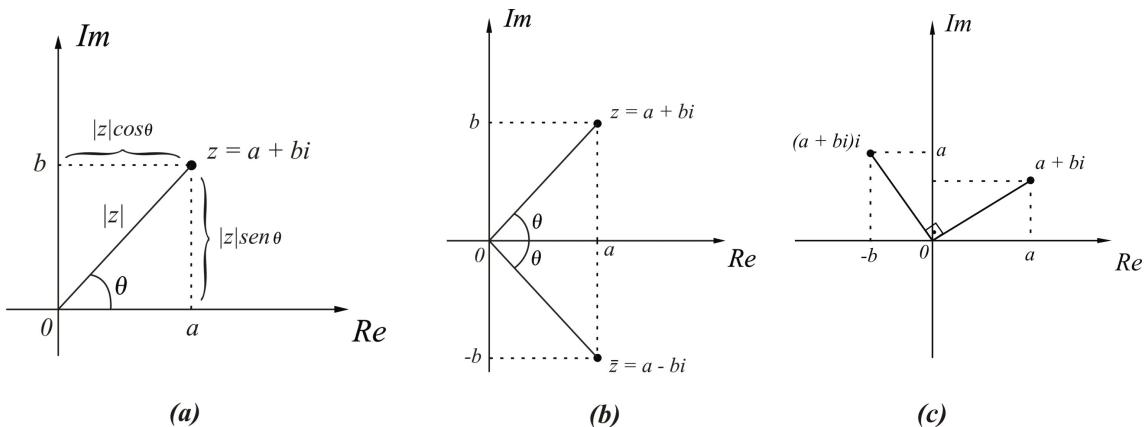
$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \dots + \frac{(i\theta)^n}{n!} + \dots = \\ &= (1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \dots) + i(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \dots) = \cos \theta + i \sin \theta. \end{aligned} \quad (2.14)$$

A identidade (2.14) é conhecida como *fórmula de Euler*<sup>1</sup>. A partir da fórmula de Euler e pelo fato do cosseno ser uma função par ( $\cos \theta = \cos(-\theta)$ ), e o seno uma função ímpar ( $\sin(-\theta) = -\sin \theta$ ), obtemos as identidades:

$$\cos \theta = \frac{e^{\theta i} + e^{-\theta i}}{2} \quad \text{e} \quad \sin \theta = \frac{e^{\theta i} - e^{-\theta i}}{2i}.$$

A partir das equações (2.13) e (2.14), podemos escrever qualquer complexo  $z \in \mathbb{C}$  simplesmente por  $z = \|z\|e^{i\theta}$ .

**Observação 2.12.** O produto de um complexo  $a + bi$  pela unidade imaginária  $i$  produz uma rotação de um ângulo de  $\pi/2$  desse complexo em torno da origem, como ilustrado na Figura 2.1.(c) abaixo. Assim, a multiplicação de um complexo por  $i^2 = -1$  produz uma rotação de 180 em torno da origem, levando um complexo no seu oposto. Por isso  $i$  é interpretado como um *gerador de rotação* no plano.



**Figura 2.1.** (a) Representação geométrica de um número complexo no Plano de Argand-Gauss. (b) Representação geométrica do conjugado de um número complexo. (c) O produto de um complexo  $(a, b)$  por  $i$  produz  $(-b, a)$ .

**Proposição 2.13.** Sejam  $z_1 = \|z_1\|(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$  e  $z_2 = \|z_2\|(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$  em  $\mathbb{C}$  e  $n \in \mathbb{N}$ , então:

$$z_1 z_2 = \|z_1 z_2\|(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)). \quad (2.15)$$

<sup>1</sup>Tomando  $\theta = \pi$  na fórmula de Euler, obtemos a equação  $e^{i\pi} + 1 = 0$ , também conhecida como *identidade de Euler*.

*Demonstração.*  $z_1 z_2 = ||z_1|| ||z_2|| (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) = [(\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) + i(\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_2 \cos \theta_1)] = ||z_1 z_2|| (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)).$   $\square$

**Proposição 2.14.** (De Moivre<sup>2</sup>) *Seja  $z = ||z||(\cos \theta + i \sin \theta) \in \mathbb{C}$  e  $n \in \mathbb{N}$ , então*

$$z^n = ||z||^n (\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)). \quad (2.16)$$

*Demonstração.* Sendo  $z = ||z||e^{i\theta}$ , temos que  $z^n = ||z||^n e^{i\theta n} = ||z||^n (\cos(n\theta) + i \sin(n\theta))$ .  $\square$

## 2.3 Os Quaternions

A despeito de muitos autores da língua portuguesa escreverem *quatérnios* ou *quaterniões*, utilizei (e continuarei utilizando) o termo *quaternions*, pois esse é o termo original empregado por Hamilton [34] – oriundo do latim *quattuor*, que significa quatro; consulte também as notas de rodapé da p. 194 de [25].

Tendo em vista que os quaternions são uma generalização dos números complexos, analogamente ao que foi visto na seção precedente, introduziremos, primeiramente, os quaternions como quádruplas ordenadas de números reais.

Considere o conjunto  $\mathbb{R}^4 = \{(x_0, x_1, x_2, x_3) \mid x_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, 2, 3\}$ , de modo que dados  $q_1 = (x_0, x_1, x_2, x_3), q_2 = (y_0, y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^4$ , tem-se que  $q_1 = q_2$  se, e somente se,  $x_i = y_i$ , para  $i = 0, 1, 2, 3$ . Sejam  $q_1 = (x_0, x_1, x_2, x_3), q_2 = (y_0, y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^4$ , vamos definir as operações de adição e multiplicação em  $\mathbb{R}^4$  da seguinte maneira:

$$q_1 + q_2 = (x_0 + y_0, x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3), \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} q_1 q_2 &= (x_0 y_0 - x_1 y_1 - x_2 y_2 - x_3 y_3, x_0 y_1 + x_1 y_0 + x_2 y_3 - x_3 y_2, \\ &\quad x_0 y_2 + x_2 y_0 + x_3 y_1 - x_1 y_3, x_0 y_3 + x_3 y_0 + x_1 y_2 - x_2 y_1). \end{aligned} \quad (2.18)$$

**Definição 2.15.** O conjunto  $\mathbb{R}^4$  provido das operações de adição (2.17) e multiplicação (2.18) forma um anel de divisão, chamado *anel dos quaternions*, e o denotaremos por  $\mathbb{H}$ . Os elementos de  $\mathbb{H}$  são chamados *quaternions*.

Colocando  $1 := (1, 0, 0, 0)$ ,  $i := (0, 1, 0, 0)$ ,  $j := (0, 0, 1, 0)$ ,  $k := (0, 0, 0, 1)$ , pela regra (2.18), obtemos as relações:

$$\begin{aligned} i^2 &= j^2 = k^2 = -1 \quad \text{e} \quad ijk = -1, \\ ij &= -ji = k \quad \text{e} \quad jk = -kj = i \quad \text{e} \quad ki = -ik = j. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Chamaremos os quaternions  $i, j, k$  de *unidades imaginárias*. As relações (2.19) estão resumidas na Tabela A.1 (localizada no Apêndice A), onde usamos a notação  $e_0 = 1, e_1 = i, e_2 = j, e_3 = k$ . Doravante iremos utilizar essas notações indistintamente. Assim podemos escrever todo quaternion unicamente da forma algébrica:

$$q = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k, \quad (2.20)$$

---

<sup>2</sup>Abraham de Moivre (1667 - 1754) foi um matemático francês.

e escrevemos o conjunto dos quaternions como  $\mathbb{H} = \{x_0 + x_1i + x_2j + x_3k \mid x_0, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$  e  $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1\}$ . Também a regra de multiplicação (2.18) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} q_1q_2 &= (x_0y_0 - x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3) + (x_0y_1 + x_1y_0 + x_2y_3 - x_3y_2)i + \\ &\quad + (x_0y_2 + x_2y_0 + x_3y_1 - x_1y_3)j + (x_0y_3 + x_3y_0 + x_1y_2 - x_2y_1)k. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Eventualmente iremos nos referir à equação (2.21) (equivalentemente (2.18)) como *multiplicação quaterniônica*. Doravante, descartaremos a notação de quadruplas e adotaremos a forma algébrica dos quaternions.

Dados quaternions  $q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{H}$ , vamos verificar que ambas operações, de adição (2.17) e de multiplicação (2.18), são *associativas* e possuem *inversos* e *identidades*. A adição é comutativa, porém a multiplicação *não é comutativa*:

## I. Propriedades da adição

- (i) *Comutatividade*:  $q_1 + q_2 = q_2 + q_1, \forall q_1, q_2 \in \mathbb{H}$ .
- (ii) *Associatividade*:  $q_1 + (q_2 + q_3) = (q_1 + q_2) + q_3, \forall q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{H}$ .
- (iii) *Identidade aditiva*: O elemento  $0 = (0, 0, 0, 0) \in \mathbb{H}$  é o único quaternion tal que  $q + 0 = 0 + q = q, \forall q \in \mathbb{H}$ .
- (iv) *Inverso aditivo*: Para todo quaternion  $q = x_0 + x_1i + x_2j + x_3k \in \mathbb{H}$ , existe único elemento  $-q = -x_0 - x_1i - x_2j - x_3k \in \mathbb{H}$  tal que  $q + (-q) = (-q) + q = 0$ .

As propriedades acima são facilmente provadas a partir das definições (2.17) e (2.18) e das propriedades usuais dos números reais.

## II. Propriedades da multiplicação

- (i) *Não-comutatividade*: A multiplicação quaterniônica não é comutativa, pois considerando os quaternions  $q_1 = i$  e  $q_2 = j$ , obtemos:

$$q_1q_2 = ij = k \neq ji = -k = q_2q_1.$$

- (ii) *Associatividade*:  $q_1(q_2q_3) = (q_1q_2)q_3, \forall q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{H}$ .

Para mostrar a associatividade dos quaternions, basta mostrar a associatividade dos quatro quaternions  $1, i, j$  e  $k$ . Isso pode ser verificado através da Tabela A.1. Também para  $i, j$  e  $k$ , verifica-se a associatividade facilmente pelas relações (2.19).

- (iii) *Identidade multiplicativa*: Existe único quaternion  $1 = (1, 0, 0, 0) \in \mathbb{H}$  tal que  $q \cdot 1 = 1 \cdot q = q, \forall q \in \mathbb{H}$ .

Verificamos facilmente esse fato aplicando a regra (2.18).

- (iv) *Inverso multiplicativo*: Para todo quaternion  $q \in \mathbb{H} \setminus \{0\}$ , existe um único elemento  $q^{-1} \in \mathbb{H} \setminus \{0\}$  tal que  $qq^{-1} = q^{-1}q = 1$ .

Dado  $q = x_0 + x_1i + x_2j + x_3k \in \mathbb{H} \setminus \{0\}$ , mostraremos na próxima seção que o elemento  $q^{-1}$  é da forma:

$$q^{-1} = \frac{x_0 - x_1i - x_2j - x_3k}{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}. \quad (2.22)$$

A multiplicação é distributiva sobre a adição:

(v) *Distributividade*: Para todos  $q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{H}$ , tem-se:

$$\begin{aligned} q_1(q_2 + q_3) &= q_1q_2 + q_1q_3, \\ (q_1 + q_2)q_3 &= q_1q_3 + q_2q_3. \end{aligned} \tag{2.23}$$

**Observação 2.16.** Dados reais  $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$  e quaternions  $p, q \in \mathbb{O}$  arbitrários, segue diretamente da regra de adição (2.17) as identidades:

$$\lambda(\beta q) = (\lambda\beta)q, \quad (\lambda + \beta)q = \lambda q + \beta q, \quad \lambda(p + q) = \lambda p + \lambda q.$$

**Observação 2.17.** Sejam  $z_1 = x_0 + x_1i$  e  $z_2 = x_2 + x_3i$  complexos. Como  $ij = k$ , temos que:

$$z_2j = (x_2 + x_3i)j = (x_2j + x_3k).$$

Logo todo quaternion pode ser escrito como  $q = z_1 + z_2j$ , com  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  como mostrado acima.

### 2.3.1 Conjugação, valor absoluto e divisão de quaternions

**Definição 2.18.** O *conjugado* de um quaternion  $q = x_0 + x_1i + x_2j + x_3k$  é o elemento  $\bar{q} = x_0 - x_1i - x_2j - x_3k \in \mathbb{H}$ .

**Definição 2.19.** Dado um quaternion  $q = x_0 + x_1i + x_2j + x_3k \in \mathbb{H}$ , seu *valor absoluto* (ou *norma*) é o número real  $\|q\| = \sqrt{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ . Note que esta é a norma euclidiana em  $\mathbb{R}^4$ .

**Observação 2.20.** Se  $q = x_0 + x_1i + x_2j + x_3k \in \mathbb{H}$ , através da multiplicação quaterniônica (2.21) obtemos:  $q\bar{q} = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ . Logo podemos escrever:  $\|q\|^2 = q\bar{q}$ .

**Proposição 2.21.** *Dados dois quaternions  $q_1 = x_0 + x_1i + x_2j + x_3k, q_2 = y_0 + y_1i + y_2j + y_3k \in \mathbb{H}$ , temos as identidades:*

$$\overline{q_1 + q_2} = \overline{q_1} + \overline{q_2}, \tag{2.24}$$

$$\overline{q_1 q_2} = \overline{q_2} \overline{q_1}. \tag{2.25}$$

$$\overline{\overline{q_1}} = q_1. \tag{2.26}$$

*Demonstração.* A primeira e a segunda identidades saem diretamente da regra de adição (2.17) e de multiplicação (2.18), respectivamente, junto com a definição do conjugado, e a terceira identidade diretamente da definição de conjugado.  $\square$

**Proposição 2.22.** *Dados dois quaternions  $q_1, q_2 \in \mathbb{H}$ , temos a identidade:*

$$\|q_1 q_2\| = \|q_1\| \|q_2\|, \tag{2.27}$$

*ou seja, o valor absoluto de um produto é igual ao produto dos valores absolutos.*

*Demonstração.* Utilizando a propriedade (2.25) e a associatividade dos quaternions, temos:  $\|q_1 q_2\|^2 = (q_1 q_2) \overline{(q_1 q_2)} = (q_1 q_2) \overline{q_2} \overline{q_1} = q_1 (q_2 \overline{q_2}) \overline{q_1} = q_1 \overline{q_1} \|q_2\|^2 = \|q_1\|^2 \|q_2\|^2 \Rightarrow \|q_1 q_2\| = \|q_1\| \|q_2\|$ .  $\square$

Como vimos anteriormente, nos complexos,  $z_1$  dividido por  $z_2$  é a solução da equação  $z_2 x = z_1$ . Como nos quaternions a multiplicação *não é comutativa*, temos que considerar duas equações:

$$q_2 x = q_1, \quad (2.28)$$

$$x q_2 = q_1. \quad (2.29)$$

A solução de (2.28) é o quociente pela esquerda de  $q_1$  por  $q_2 \neq 0$ , denotado por  $x_e$ . A solução de (2.29) é o quociente pela direita de  $q_1$  por  $q_2$ , denotado por  $x_d$ . Multiplicando ambos os lados das equações por  $\overline{q_2}$ , obtemos:

$$x_e = \frac{\overline{q_2} q_1}{\|q_2\|^2}, \quad x_d = \frac{q_1 \overline{q_2}}{\|q_2\|^2}. \quad (2.30)$$

**Proposição 2.23.** *Dado um quaternion  $q \in \mathbb{H} \setminus \{0\}$ , o seu inverso é da forma:*

$$q^{-1} = \frac{\bar{q}}{\|q\|^2} = \frac{x_0 - x_1 i - x_2 j - x_3 k}{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}.$$

*Demonstração.* Seja  $q \in \mathbb{H}$ . Colocando  $q_2 = q$  e  $q_1 = 1$  em (2.28) e (2.29), por (2.30) obtemos que:

$$x_e = x_d = \frac{\bar{q}}{\|q\|^2}.$$

Colocando  $x_e = x_d = x$ , temos que  $xq = qx = 1$ , ou seja  $x = q^{-1}$ .  $\square$

### 2.3.2 Quaternions puros, forma polar e interpretação geométrica

Dado um quaternion  $q = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k \in \mathbb{H}$ , dizemos que  $x_0$  é a parte *real* (ou parte *escalar*) de  $q$ , e que  $x_1 i + x_2 j + x_3 k$  é a parte *imaginária* (ou *vetorial*) de  $q$ , e denotamos  $x_0 = \text{Re}(q)$  e  $x_1 i + x_2 j + x_3 k = \text{Im}(q)$ . Costuma-se também utilizar as notações  $\text{Re}(q) = S(q)$  e  $\text{Im}(q) = V(q) = \vec{q}$ . Iremos utilizar essas notações de forma indistinta. Um quaternion  $q$  é dito *quaternion puro* (ou *puramente imaginário*) se  $x_0 = 0$ , ou seja, se a sua parte real é igual a zero, e daí escrevemos  $q = \vec{q}$ .

**Observação 2.24.** Os quaternions puros podem ser identificados como vetores no espaço euclidiano  $\mathbb{R}^3$ . De fato, se  $\text{Im}(\mathbb{H})$  é o conjunto dos quaternions puros, então há uma injeção linear  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \text{Im}(\mathbb{H})$ ;  $(x_1, x_2, x_3) \mapsto x_1 i + x_2 j + x_3 k$ .

**Observação 2.25.** Se  $q = S(q) + \vec{q}$  é um quaternion, então:

$$S(q) = \frac{q + \bar{q}}{2} \quad \text{e} \quad \vec{q} = q - S(q) = \frac{q - \bar{q}}{2}.$$

Considere agora  $\vec{q}_1 = x_1 i + x_2 j + x_3 k$  e  $\vec{q}_2 = y_1 i + y_2 j + y_3 k$  quaternions puros. Então:

$$\vec{q}_1 \vec{q}_2 = -(x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3) + (x_2 y_3 - x_3 y_2)i + (x_3 y_1 - x_1 y_3)j + (x_1 y_2 - x_2 y_1)k, \quad (2.31)$$

assim a parte real do produto  $\vec{q}_1 \vec{q}_2$  é  $S(\vec{q}_1 \vec{q}_2) = -(x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3)$ . Podemos definir um *produto escalar* entre quaternions puros análogo ao produto escalar euclidiano no espaço  $\mathbb{R}^3$  da seguinte forma:

$$\vec{q}_1 \cdot \vec{q}_2 = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 = -S(\vec{q}_1 \vec{q}_2). \quad (2.32)$$

Se  $\vec{q}_1$  e  $\vec{q}_2$  são quaternions puros ortogonais, então  $\vec{q}_1 \cdot \vec{q}_2 = -S(\vec{q}_1 \vec{q}_2) = 0$ , ou seja, a parte real do produto é nula.<sup>3</sup>

Até agora temos tratado apenas dos aspécitos algébricos dos quaternions, sem nos preocupar com sua acepção geométrica. Para maiores detalhes acerca da geometria dos quaternions, consulte [6] e [21].

Dado um quaternion não-nulo  $q = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k = x_0 + \vec{q}$ , considere o quaternion vetorial unitário:

$$\vec{u} = \pm \frac{x_1 i + x_2 j + x_3 k}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} = \pm \frac{\vec{q}}{\|\vec{q}\|}. \quad (2.33)$$

Sendo  $r = \|q\| = (x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2}$ , como  $-1 \leq x_0/r \leq 1$  e  $0 \leq \|\vec{q}\|/r \leq 1$ , existe um ângulo  $\theta \in [0, 2\pi]$  tal que  $\cos \theta = x_0/r$  e  $\sin \theta = \pm \|\vec{q}\|/r$ . Assim podemos escrever o quaternion  $q$ , de forma única, na sua *forma polar*:

$$q = r(\cos \theta + \vec{u} \sin \theta) = r e^{\vec{u} \theta}. \quad (2.34)$$

O inverso de  $q$  é expresso na forma polar como:

$$q^{-1} = r(\cos \theta - \vec{u} \sin \theta), \quad (2.35)$$

pois  $qq^{-1} = r^2(\cos \theta + \vec{u} \sin \theta)(\cos \theta - \vec{u} \sin \theta) = \cos^2 \theta - \vec{u}^2 \sin^2 \theta = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ .

Ainda, todo quaternion pode ser escrito simplesmente como  $q = z_1 e^{z_2 j}$ , para adequados complexos  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ , como afirma a proposição que segue.

**Proposição 2.26.** *Todo quaternion  $q \in \mathbb{H}$  pode ser expresso na forma:*

$$q = z_1 e^{z_2 j}, \quad (2.36)$$

onde  $z_1, z_2$  são números complexos.

*Demonstração.* A demonstração pode ser encontrada em [65]. □

Seja  $q = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k$  um quaternion unitário, i.e., tal que  $\|q\| = 1$ . Pela equação (2.34) existe um único ângulo  $\theta \in [0, \pi]$  tal que  $q = \cos \theta + \vec{u} \sin \theta$ , onde  $\vec{u}$  é um vetor unitário dado por (2.33).

Considere  $\vec{v}$  um quaternion vetorial (ou vetor) ortogonal a  $\vec{u}$ . Então  $S(\vec{v} \vec{u}) = 0$ , e daí

$$q\vec{v} = \vec{v} \cos \theta + \vec{u} \vec{v} \sin \theta.$$

O vetor  $q\vec{v}$  é uma rotação de um ângulo  $\theta$  de  $\vec{v}$  em torno de  $\vec{u}$ , como mostrado na Figura 2.2(a). Vamos denotar  $\tilde{v} = \vec{u} \vec{v}$ , esse vetor é perpendicular a  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ , podemos dizer

---

<sup>3</sup>Veremos no próximo capítulo que se  $\vec{q}_1$  e  $\vec{q}_2$  são quaternions puros ortogonais, então o produto quaternônico desses quaternions será igual ao produto vetorial, ou seja,  $\vec{q}_1 \vec{q}_2 = \vec{q}_1 \times \vec{q}_2$ , que corresponde, interpretando  $\vec{q}_1$  e  $\vec{q}_2$  como vetores no espaço  $\mathbb{R}^3$ , ao vetor ortogonal a  $\vec{q}_1$  e a  $\vec{q}_2$ .

ainda que  $\tilde{v}$  é o resultado da rotação de  $\vec{v}$  por  $\vec{u}$  de um ângulo de  $\pi/2$ , como podemos ver na Figura 2.2(a).

**Proposição 2.27.** *Seja  $q \in \mathbb{H}$  um quaternion dado por (2.34) com inverso  $q^{-1}$ , dado por (2.35). Seja  $v \in \mathbb{R}^3$  um vetor ortogonal à  $\vec{u}$ . A aplicação  $\phi_q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3; q \mapsto qvq^{-1}$ , produz uma rotação de um ângulo de  $2\theta$  de  $v$  em torno de  $\vec{u}$ , como mostrado na Figura 2.2(b).*

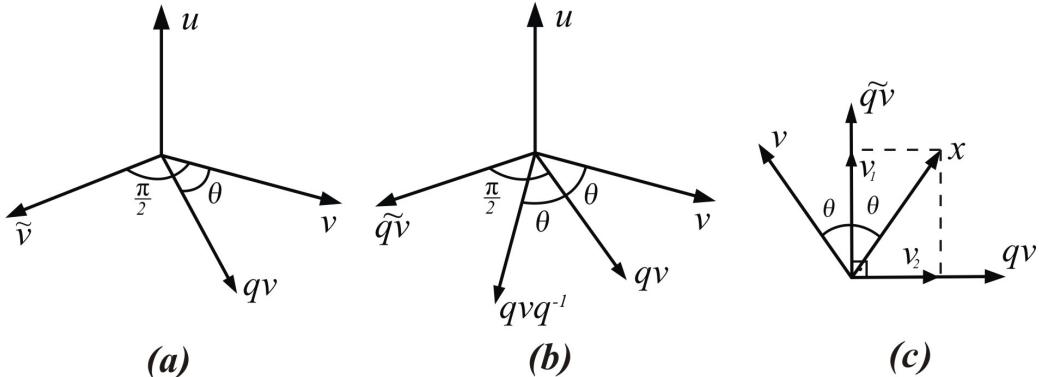
*Demonstração.* Sendo

$$\phi_q(v) = qvq^{-1} = qv(\cos \theta - \vec{u} \sin \theta) = (qv) \cos \theta - (qv)\vec{u} \sin \theta,$$

como  $(qv) \perp \vec{u} \Rightarrow (qv)\vec{u} = -\vec{u}(qv)$ . Sendo  $\vec{u}(qv) = \tilde{q}\vec{v}$  o vetor obtido através da rotação de  $qv$  por um ângulo de  $\pi/2$  sobre  $\vec{u}$ , como na Figura 2.2(b), reescrevemos:

$$qvq^{-1} = qv \cos \theta + \tilde{q}\vec{v} \sin \theta,$$

mas a soma dos vetores  $v_1 = qv \cos \theta$  e  $v_2 = \tilde{q}\vec{v} \sin \theta$  produz o vetor  $x$ , como mostra a Figura 2.2(c), que é exatamente  $qvq^{-1}$ , que é o vetor produzido por uma rotação de  $2\theta$  de  $v$  por  $\vec{u}$ , como na Figura 2.2(b).  $\square$

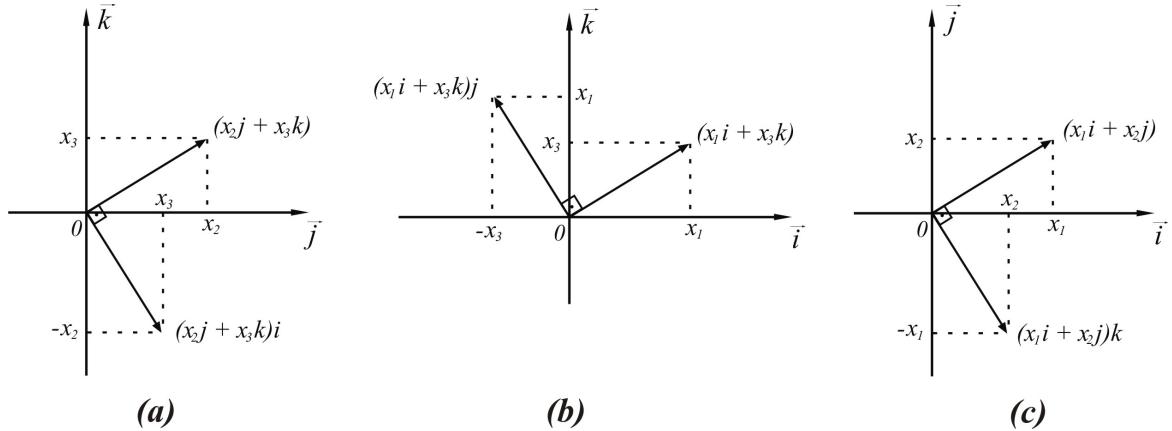


**Figura 2.2.** (a) Um vetor  $v$  multiplicado por um quaternion  $q$ . (b) A aplicação  $\phi_q$  roda o vetor  $v$  em um ângulo de  $2\theta$  em torno do versor  $u$ . (c) A soma dos vetores  $v_1$  e  $v_2$  produz  $x = qvq^{-1}$ .

**Observação 2.28.** De forma análoga à observação 2.12, as unidades imaginárias quaterniônicas  $i, j, k$  também podem ser interpretadas como geradores de rotações. Considerando os vetores  $\vec{i} = (1, 0, 0)$ ,  $\vec{j} = (0, 1, 0)$  e  $\vec{k} = (0, 0, 1)$  no espaço, a unidade  $i$  gera rotações de 90 no plano  $\vec{j}O\vec{k}$ ; a unidade  $j$  gera rotações de 90 no plano  $\vec{i}O\vec{k}$ , e a unidade  $k$  gera rotações de 90 no plano  $\vec{i}O\vec{j}$ . A Figura 2.3 abaixo ilustra tais rotações.<sup>4</sup> Observe ainda que  $i^2 = j^2 = k^2 = -1$  geram rotações de 180 nos respectivos planos.

A interpretação das unidades  $i, j, k$  como geradores de rotação deve prevalecer sobre a interpretação destas como vetores. Para maiores detalhes, o leitor pode consultar o artigo [5].

<sup>4</sup>Observe que podemos obter tais resultados simplesmente utilizando as regras de multiplicação (2.19), e.g., sendo  $q = x_1i + x_3k \in \vec{i}O\vec{k}$ , então  $qj = -x_3i + x_1k$ .



**Figura 2.3.** (a)  $i$  gera rotações de 90 no plano  $\vec{j}O\vec{k}$ . (b)  $j$  gera rotações de 90 no plano  $\vec{i}O\vec{k}$ . (c)  $k$  gera rotações de 90 no plano  $\vec{i}O\vec{j}$ .

## 2.4 Os Octonions

Os octonions, também chamados *números de Cayley*, são uma extensão não-associativa dos quaternions. O termo *octonion* deriva do latim *octo*, que significa oito.

Considere o conjunto das 8-uplas de números reais  $\mathbb{R}^8 = \{(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) \mid x_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, \dots, 7\}$ , tal que dados  $o_1 = (x_0, \dots, x_7), o_2 = (y_0, \dots, y_7) \in \mathbb{R}^8$ , tem-se que  $o_1 = o_2$  se, e somente se,  $x_i = y_i$ , para  $i = 0, 1, \dots, 7$ . Vamos definir uma operação de adição e uma operação de multiplicação em  $\mathbb{R}^8$  das seguintes maneiras:

$$\begin{aligned} o_1 + o_2 &= (x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) + (y_0, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7) = \\ &= (x_0 + y_0, x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, x_4 + y_4, x_5 + y_5, x_6 + y_6, x_7 + y_7) \end{aligned} \quad (2.37)$$

$$\begin{aligned} o_1 o_2 &= (x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7)(y_0, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7) = \\ &= (x_0 y_1 - x_1 y_1 - x_2 y_2 - x_3 y_3 - x_4 y_4 - x_5 y_5 - x_6 y_6 - x_7 y_7, \\ &\quad x_0 y_2 + x_1 y_0 + x_2 y_3 - x_3 y_2 - x_4 y_5 + x_5 y_4 - x_6 y_7 + x_7 y_6, \\ &\quad x_0 y_3 - x_1 y_3 + x_2 y_0 + x_3 y_1 - x_4 y_6 + x_5 y_7 + x_6 y_4 - x_7 y_5, \\ &\quad x_0 y_4 + x_1 y_2 - x_2 y_1 + x_3 y_0 - x_4 y_7 - x_5 y_6 + x_6 y_5 + x_7 y_4, \\ &\quad x_0 y_5 + x_1 y_5 + x_2 y_6 + x_3 y_7 + x_4 y_0 - x_5 y_1 - x_6 y_2 - x_7 y_3, \\ &\quad x_0 y_6 - x_1 y_4 - x_2 y_7 + x_3 y_6 + x_4 y_1 + x_5 y_0 - x_6 y_3 + x_7 y_2, \\ &\quad x_0 y_7 + x_1 y_7 - x_2 y_4 - x_3 y_5 + x_4 y_2 + x_5 y_3 + x_6 y_0 - x_7 y_1, \\ &\quad x_0 y_0 - x_1 y_6 + x_2 y_5 - x_3 y_4 + x_4 y_3 - x_5 y_2 + x_6 y_1 + x_7 y_0). \end{aligned} \quad (2.38)$$

**Definição 2.29.** O conjunto  $\mathbb{R}^8$  munido das operações de adição (2.37) e multiplicação (2.38) forma um anel, chamado *anel dos octonions*, e o denotamos por  $\mathbb{O}$ . Os elementos desse sistema são chamados *octonions*.

Vamos colocar:

$$1 := (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0) \quad e_4 := (0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0)$$

$$e_1 := (0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0) \quad e_5 := (0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0)$$

$$e_2 := (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0) \quad e_6 := (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0)$$

$$e_3 := (0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0) \quad e_7 := (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)$$

Através da regra (2.38), obtemos as relações de multiplicação desses elementos de acordo com a Tabela A.7 (Apêndice A), onde renomeamos  $1 = e_0$ . Chamanos os octonions  $e_1, \dots, e_7$  de *unidades imaginárias*. Logo podemos escrever todo octonion unicamente na forma algébrica:

$$o = x_0 + x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + x_4e_4 + x_5e_5 + x_6e_6 + x_7e_7, \quad (2.39)$$

e escrevemos o conjunto dos octonions como  $\mathbb{O} = \{x_0 + x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + x_4e_4 + x_5e_5 + x_6e_6 + x_7e_7 \mid x_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, \dots, 7\}$ .

Eventualmente iremos nos referir à equação (2.38) como *multiplicação octoniônica*. Dados octonions  $o_1, o_2, o_3 \in \mathbb{O}$ , vamos verificar que ambas operações, de adição (2.37) e de multiplicação (2.38), possuem *inversos* e *identidades*. A adição é comutativa e associativa, porém a multiplicação é *não-comutativa* e *não-associativa*:

## I. Propriedades da adição

- (i) *Comutatividade*:  $o_1 + o_2 = o_2 + o_1, \forall o_1, o_2 \in \mathbb{O}$ .
- (ii) *Associatividade*:  $o_1 + (o_2 + o_3) = (o_1 + o_2) + o_3, \forall o_1, o_2, o_3 \in \mathbb{O}$ .
- (iii) *Identidade aditiva*: O elemento  $0 = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0) \in \mathbb{O}$  é o único octonion tal que  $o + 0 = 0 + o = o, \forall o \in \mathbb{O}$ .
- (iv) *Inverso aditivo*: Para todo octonion  $o = x_0 + x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + x_4e_4 + x_5e_5 + x_6e_6 + x_7e_7 \in \mathbb{O}$ , existe um único elemento  $-o = -x_0 - x_1e_1 - x_2e_2 - x_3e_3 - x_4e_4 - x_5e_5 - x_6e_6 - x_7e_7 \in \mathbb{O}$  tal que  $o + (-o) = (-o) + o = 0$ .

As propriedades acima são facilmente provadas a partir da Definição (2.37) e das propriedades usuais dos números reais.

## II. Propriedades da multiplicação

- (i) *Não-comutatividade*: A multiplicação octoniônica não é comutativa, pois considerando os octonions  $o_1 = e_6$  e  $o_2 = e_3$ , pela Tabela A.7, obtemos:

$$o_1o_2 = e_6e_3 = -e_5 \neq e_3e_6 = e_5 = o_2o_1.$$

- (ii) *Não-associatividade*: A multiplicação octoniônica não é associativa, pois considerando os octonions  $o_1 = e_5, o_2 = e_6$  e  $o_3 = e_4$ , pela Tabela A.7, obtemos:

$$(o_1o_2)o_3 = (e_5e_6)e_4 = -e_3e_4 = -e_7 \neq e_7 = e_5(-e_2) = e_5(e_6e_4) = o_1(o_2o_3).$$

- (iii) *Identidade multiplicativa*: Existe único octonion  $1 = (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0) \in \mathbb{O}$  tal que  $o \cdot 1 = 1 \cdot o = o, \forall o \in \mathbb{O}$ .

Verificamos esse fato aplicando a regra (2.38).

(iv) *Inverso multiplicativo:* Para todo octonion  $o \in \mathbb{O} \setminus \{0\}$ , existe um único elemento  $o^{-1} \in \mathbb{O} \setminus \{0\}$  tal que  $oo^{-1} = o^{-1}o = 1$ .

Dado  $o = x_0 + x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + x_4e_4 + x_5e_5 + x_6e_6 + x_7e_7 \in \mathbb{O} \setminus \{0\}$ , mostraremos na próxima seção que o elemento  $o^{-1}$  é da forma:

$$o^{-1} = \frac{x_0 - x_1e_1 - x_2e_2 - x_3e_3 - x_4e_4 - x_5e_5 - x_6e_6 - x_7e_7}{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 + x_7^2}. \quad (2.40)$$

A multiplicação é distributiva sobre a adição:

(v) *Distributividade:* Para todos  $o_1, o_2, o_3 \in \mathbb{O}$ , tem-se:

$$\begin{aligned} o_1(o_2 + o_3) &= o_1o_2 + o_1o_3, \\ (o_1 + o_2)o_3 &= o_1o_3 + o_2o_3. \end{aligned} \quad (2.41)$$

**Observação 2.30.** Dados reais  $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$  e octonions  $o, o' \in \mathbb{O}$  arbitrários, segue diretamente da regra de adição (2.37) as identidades:

$$\lambda(\beta o) = (\lambda\beta)o, \quad (\lambda + \beta)o = \lambda o + \beta o, \quad \lambda(o + o') = \lambda o + \lambda o'.$$

**Observação 2.31.** Sejam  $q_1 = x_0 + x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$  e  $q_2 = x_4 + x_5e_1 + x_6e_2 + x_7e_3$  quaternions. Pela tabela de multiplicação dos octonions A.7, vemos que:

$$e_1e_4 = e_5, \quad e_2e_4 = e_6 \quad \text{e} \quad e_3e_4 = e_7,$$

assim obtemos:

$$q_2e_4 = (x_4 + x_5e_1 + x_6e_2 + x_7e_3)e_4 = (x_4e_4 + x_5e_5 + x_6e_6 + x_7e_7).$$

Logo podemos escrever todo octonion como  $o = q_1 + q_2e_4$ , com  $q_1, q_2 \in \mathbb{H}$  como mostrado acima.

Como vimos anteriormente, a multiplicação octoniônica é *não-associativa*, porém ela é *alternativa*, que é uma forma mais fraca de associatividade, como afirma a proposição a seguir.

**Proposição 2.32.** *A multiplicação octoniônica é alternativa, i.e., para quaisquer octonions  $o_1, o_2 \in \mathbb{O}$ , as seguintes identidades são satisfeitas:*

$$(o_1o_2)o_2 = o_1(o_2o_2) \quad \text{e} \quad o_2(o_2o_1) = (o_2o_2)o_1. \quad (2.42)$$

*Demonstração.* Observamos, primeiramente, que provar (2.42) é equivalente a provar as seguintes identidades:

$$(o_1o_2)\overline{o_2} = o_1(o_2\overline{o_2}) \quad \text{e} \quad \overline{o_2}(o_2o_1) = (\overline{o_2}o_2)o_1, \quad (2.43)$$

pois sendo  $o_2 = x_0 + x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + x_4e_4 + x_5e_5 + x_6e_6 + x_7e_7$ , temos que  $\overline{o_2} = -o_2 + 2x_0$ , e substituindo  $\overline{o_2}$  em (2.43) obtemos exatamente as identidades (2.42). Assim, escrevendo  $o_1 = q_1 + q_2e_4$  e  $o_2 = p_1 + p_2e_4$ ,  $q_1, q_2, p_1, p_2 \in \mathbb{H}$ , como na observação, obtemos:

$$\begin{aligned} (o_1o_2)\overline{o_2} &= (q_1 + q_2e_4)(p_1 + p_2e_4)(\overline{p_1} - p_2e_4) = [(q_1p_1 - \overline{p_2}q_2) + (p_2q_1 + q_2\overline{p_1})e_4](\overline{p_1} - p_2e_4) = \\ &= (q_1p_1 - \overline{p_2}q_2)\overline{p_1} + \overline{p_2}(p_2q_1 + q_2\overline{p_1}) + [(-p_2)(q_1p_1 - \overline{p_2}q_2) + (p_2q_1 + q_2\overline{p_1})p_1]e_4 = \\ &= (||p_1||^2 + ||p_2||^2)q_1 + (||p_1||^2 + ||p_2||^2)q_2e_4 = \\ &= (||p_1||^2 + ||p_2||^2)(q_1 + q_2e_4) = ||o_2||^2o_1 = o_1||o_2||^2 = o_1(o_2\overline{o_2}). \end{aligned}$$

A demonstração da outra identidade é análoga.  $\square$

Essa demonstração segue as linhas de [42], p. 50.

### 2.4.1 Conjugação, valor absoluto e divisão de octonions

**Definição 2.33.** O *conjugado* de um octonion  $o = x_0 + x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + x_4e_4 + x_5e_5 + x_6e_6 + x_7e_7$  é o elemento:

$$\bar{o} = x_0 - x_1e_1 - x_2e_2 - x_3e_3 - x_4e_4 - x_5e_5 - x_6e_6 - x_7e_7.$$

**Definição 2.34.** O *valor absoluto* (ou *norma*) de um octonion  $o = x_0 + x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + x_4e_4 + x_5e_5 + x_6e_6 + x_7e_7$  é o número real:

$$\|o\| = \sqrt{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 + x_7^2}.$$

Note que esta é a norma euclidiana em  $\mathbb{R}^8$ .

**Observação 2.35.** Se  $o = x_0 + x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + x_4e_4 + x_5e_5 + x_6e_6 + x_7e_7 \in \mathbb{O}$ , através da multiplicação octoniônica (2.38) obtemos:  $o\bar{o} = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 + x_7^2$ . Logo podemos escrever:  $\|o\|^2 = o\bar{o}$ .

**Proposição 2.36.** Para quaisquer octonions  $o_1, o_2 \in \mathbb{O}$ , as seguintes propriedades são satisfeitas:

$$\overline{o_1 + o_2} = \overline{o_1} + \overline{o_2}, \quad (2.44)$$

$$\overline{o_1 o_2} = \overline{o_2} \overline{o_1}, \quad (2.45)$$

$$\overline{\overline{o_1}} = o_1, \quad (2.46)$$

$$\|o_1 o_2\| = \|o_1\| \|o_2\|. \quad (2.47)$$

*Demonstração.* As três primeiras identidades seguem diretamente das regras de adição (2.37), de multiplicação (2.38) e da Definição 2.34. Para a última identidade, precisamos da propriedade (2.44) e da regra de alternatividade (2.43), e daí a demonstração segue analogamente a prova da Proposição 2.22.  $\square$

Da mesma forma que a multiplicação quaterniônica, a multiplicação octoniônica é *não-comutativa*, assim consideremos as equações:

$$o_2 x = o_1 \quad \text{e} \quad x o_2 = o_1.$$

A solução da primeira equação é o quociente pela esquerda de  $o_1$  por  $o_2 \neq 0$ , denotado por  $x_e$ . A solução da segunda equação é o quociente pela direita de  $o_1$  por  $o_2$ , denotado por  $x_d$ . Multiplicando ambos os lados das equações por  $\overline{o_2}$ , obtemos:

$$\overline{o_2}(o_2 x) = \overline{o_2} o_1 \quad \text{e} \quad (x o_2) \overline{o_2} = o_1 \overline{o_2},$$

utilizando as regras de alternatividade (2.43), obtemos:

$$x_e = \frac{\overline{o_2} o_1}{\|o_2\|^2}, \quad x_d = \frac{o_1 \overline{o_2}}{\|o_2\|^2}.$$

**Proposição 2.37.** Dado um octonion  $o \in \mathbb{O} \setminus \{0\}$ , o seu inverso é da forma:

$$o^{-1} = \frac{\bar{o}}{\|o\|^2}.$$

*Demonstração.* Análoga à demonstração da Proposição 2.23.  $\square$

**Definição 2.38.** Dado um octonion  $o = x_0 + x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + x_4e_4 + x_5e_5 + x_6e_6 + x_7e_7 \in \mathbb{O}$ , dizemos que  $x_0$  é a parte *escalar* e  $x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + x_4e_4 + x_5e_5 + x_6e_6 + x_7e_7$  é a parte *imaginária* (ou *vetorial*) de  $o$ , e as denotamos por  $\text{Re}(o) = S(o)$  e  $\text{Im}(o) = V(o) = \vec{o}$ , respectivamente. Se  $S(o) = 0$ , i.e., se  $o = \vec{o}$ , dizemos que  $o$  é um *octonion puro*.

No capítulo 3 iremos estudar mais a fundo o espaço dos octonions puros.

## 2.5 Os Números Hipercomplexos

Os sistemas numéricos que vimos até agora, como os complexos, quaternions e octonions, são instâncias particulares de uma construção mais geral: os *sistemas numéricos hipercomplexos*.

Seja  $n$  um inteiro positivo finito fixo e sejam  $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ , números reais. Sejam  $e_1, \dots, e_n$  certos símbolos, que chamamos de *unidades imaginárias*. Considere expressões da forma:

$$a_0 + a_1e_1 + \dots + a_ne_n, \quad (2.48)$$

tais que  $a_0 + a_1e_1 + \dots + a_ne_n = b_0 + b_1e_1 + \dots + b_ne_n$  se, e somente se  $a_i = b_i$ , para todo  $i = 0, 1, \dots, n$ .

Definamos a operação de adição desses elementos da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} (a_0 + a_1e_1 + \dots + a_ne_n) + (b_0 + b_1e_1 + \dots + b_ne_n) &= \\ (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)e_1 + \dots + (a_n + b_n)e_n. \end{aligned} \quad (2.49)$$

Vamos definir a operação de multiplicação para esses elementos da seguinte forma: considere a multiplicação das  $n$  unidades imaginárias dada por:

$$e_\alpha e_\beta = C_{\alpha\beta}^0 + C_{\alpha\beta}^1 e_1 + \dots + C_{\alpha\beta}^n e_n, \quad (2.50)$$

$\alpha, \beta = 1, \dots, n$ , em que  $C_{\alpha\beta}^\gamma$ ,  $\gamma = 0, 1, \dots, n$ , são números reais que determinam a *tabela de multiplicação*, de tamanho  $n \times n$ , das unidades imaginárias  $e_\alpha$  como segue:

Tabela 2.1: Tabela de multiplicação hipercomplexa.

$\cdot$	$e_1$	$e_2$	$\dots$	$e_n$
$e_1$	$C_{11}^0 + \sum_{k=1}^n C_{11}^k e_k$	$C_{12}^0 + \sum_{k=1}^n C_{12}^k e_k$	$\dots$	$C_{1n}^0 + \sum_{k=1}^n C_{1n}^k e_k$
$e_2$	$C_{21}^0 + \sum_{k=1}^n C_{21}^k e_k$	$C_{22}^0 + \sum_{k=1}^n C_{22}^k e_k$	$\dots$	$C_{2n}^0 + \sum_{k=1}^n C_{2n}^k e_k$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$e_n$	$C_{n1}^0 + \sum_{k=1}^n C_{n1}^k e_k$	$C_{n2}^0 + \sum_{k=1}^n C_{n2}^k e_k$	$\dots$	$C_{nn}^0 + \sum_{k=1}^n C_{nn}^k e_k$

Observe que temos um total de  $n^2(n+1)$  coeficientes  $C_{\alpha\beta}^\gamma$ . Dada, então, a tabela de multiplicação das unidades  $e_\alpha$ , nós definimos a multiplicação dos elementos da forma (2.48) usando a lei distributiva:

$$\begin{aligned}
& (a_0 + a_1 e_1 + \dots + a_n e_n)(b_0 + b_1 e_1 + \dots + b_n e_n) = \\
& (a_0 b_0 + a_1 b_0 e_1 + \dots + a_n b_0 e_n) + (a_0 b_1 e_1 + a_1 b_1 e_1 e_1 + \dots + a_n b_1 e_n e_1) + \quad (2.51) \\
& + \dots + (a_0 b_n e_n + a_1 b_n e_1 e_n + a_2 b_n e_2 e_n + \dots + a_n b_n e_n e_n).
\end{aligned}$$

Ou seja, cada termo é multiplicado da forma  $(a_\alpha e_\alpha)(b_\beta e_\beta) = a_\alpha b_\beta e_\alpha e_\beta$ , e os elementos  $e_\alpha e_\beta$  são dados de acordo com a fórmula (2.50). Iremos nos referir à regra de multiplicação (2.51) como *multiplicação hipercomplexa*.

**Definição 2.39.** O conjunto  $\mathcal{N} = \{x_0 + x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \mid x_\alpha \in \mathbb{R}, \alpha = 0, 1, \dots, n\}$  munido com as operações de adição e multiplicação definidas por (2.49) e (2.51), respectivamente, é um *sistema de números hipercomplexos de dimensão n + 1*. Os elementos desse sistema são chamados *números hipercomplexos*.

Fica claro que todo sistema de número hipercomplexo está completamente determinado por sua tabela de multiplicação.

### 2.5.1 Propriedades da multiplicação hipercomplexa

A seguir, vamos descrever propriedades da multiplicação hipercomplexa que são válidas em todos sistemas hipercomplexos.

Sejam  $u, v$  e  $w$  números hipercomplexos arbitrários. Se  $a \in \mathbb{R}$ , temos as identidades:

$$\begin{aligned}
(a + 0e_1 + \dots + 0e_n)(a_0 + a_1 e_1 + \dots + a_n e_n) &= aa_0 + aa_1 e_1 + \dots + aa_n e_n, \\
(a_0 + a_1 e_1 + \dots + a_n e_n)(a + 0e_1 + \dots + 0e_n) &= aa_0 + aa_1 e_1 + \dots + aa_n e_n.
\end{aligned}$$

Em geral, temos, para todos reais  $a, b \in \mathbb{R}$ , que:

$$(au)(bv) = (ab)(uv). \quad (2.52)$$

Em particular, para  $1 \in \mathbb{R}$ , tem-se que  $u \cdot 1 = 1 \cdot u = u$ . Ainda, a multiplicação hipercomplexa é distributiva, à esquerda e à direita, sobre a adição:

$$\begin{aligned}
(v + u)w &= vw + uw, \\
v(u + w) &= vu + vw.
\end{aligned} \quad (2.53)$$

**Definição 2.40.** Um sistema de números hipercomplexos é dito ser um *comutativo* se  $uv = vu$ , para todos os hipercomplexos  $u$  e  $v$ .

Se um sistema é comutativo, então  $e_\alpha e_\beta = e_\beta e_\alpha$ , mas por (2.50) concluímos que  $C_{\alpha\beta}^\gamma = C_{\beta\alpha}^\gamma$ , para todos  $\alpha, \beta = 0, 1, \dots, n$ . Por outro lado, se essas propriedades são satisfeitas, então o sistema é comutativo. Ou seja, um sistema é comutativo se, e somente se,  $C_{\alpha\beta}^\gamma = C_{\beta\alpha}^\gamma$ , para todos  $\alpha, \beta = 0, 1, \dots, n$ .

**Definição 2.41.** Um sistema de números hipercomplexos é dito ser um *associativo* se  $(uv)w = u(vw)$ , para todos hipercomplexos  $u, v$  e  $w$ .

Se um sistema é associativo, então  $(e_\alpha e_\beta)e_\gamma = e_\alpha(e_\beta e_\gamma)$ , para todos  $\alpha, \beta, \gamma = 0, 1, \dots, n$ .

**Definição 2.42.** Um sistema de números hipercomplexos é dito ser um *sistema de divisão* (ou que *admite divisão*) se para todos hipercomplexos  $u$  e  $v \neq 0$ , existem únicos hipercomplexos  $x \neq 0$  e  $y \neq 0$  tais que  $xv = u$  e  $vy = u$ .

**Exemplo 2.43.** Vimos precedentemente que todo complexo, quaternion e octonion não-nulos possuem inversos multiplicativos, ou seja, todos esses sistemas são sistemas de divisão.

Importante notar que todo sistema hipercomplexo forma uma  $\mathbb{R}$ -álgebra  $(n+1)$ -dimensional com base  $\{1, e_1, \dots, e_n\}$ , com uma tabela de multiplicação dada pela Tabela 2.1 acrescida com as multiplicações das unidades  $e_\alpha$  com a identidade 1:  $e_\alpha \cdot 1 = 1 \cdot e_\alpha = e_\alpha$ ,  $\alpha = 1, \dots, n$ .

No capítulo 4 iremos apresentar sistemas hipercomplexos (álgebras hipercomplexas) que não são de divisão, por exemplo, os split-complexos, os duais e os split-quaternions. Um fato interessante é que todo sistema hipercomplexo de divisão possui dimensão 1, 2, 4 ou 8, ou seja, as únicas, a menos de isomorfismos,  $\mathbb{R}$ -álgebras de divisão são os reais, os complexos, os quaternions e os octonions, como veremos no capítulo 3.

# Capítulo 3

## Álgebras de Cayley-Dickson

Nesta parte, apresentaremos e discutiremos as propriedades gerais das álgebras de Cayley-Dickson. Estudaremos a álgebra dos complexos, dos quaternions, dos octonions e, muito rapidamente, a álgebra dos sedenions. Discutiremos o problema da soma de quadrados e apresentaremos vários teoremas importantes, como o Teorema de Hurwitz, o de Frobenius, o de Hopf e o de Gelfand-Mazur. Muitos dos conceitos apresentados nesse capítulo podem ser encontrados em [6], [9], [25] e [56]. As notas históricas abaixo seguem de [9] e [25].

### 3.1 Notas Históricas

Como mencionado nas notas do capítulo 2, em 1835 o matemático Sir William Rowan Hamilton descobriu como tratar formalmente números complexos como pares ordenados de números reais, e depois buscou, durante anos, uma álgebra análoga a dos complexos para o espaço (euclidiano) 3-dimensional, ou seja, como fazer operações com triplas de números reais (em síntese, buscava por álgebra normada de divisão 3-dimensional). Pouco antes de sua morte, em 1865, ele escreveu para seu filho o famoso texto: “Toda manhã, quando eu descia para o café da manhã, você costumava me perguntar: ‘Papai, você consegue multiplicar triplas?’ Mas eu sempre era obrigado a responder: ‘Não, eu apenas posso somá-las e subtraí-las.’” O problema era que não existia uma álgebra normada de divisão 3-dimensional, mas sim uma 4-dimensional.

Em 1843, durante um passeio pelo Canal Real em Dublin, Irlanda, Hamilton descobriu as relações fundamentais entre os imaginários  $i, j, k$ , cravando-as numa pedra da Ponte Brougham: “ $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$ ”. Logo após sua descoberta, Hamilton escreveu a seu amigo John Thomas Graves, comunicando-lhe os resultados. Alguns meses depois, Graves extendeu a ideia de Hamilton e descobriu uma álgebra normada de divisão 8-dimensional, a álgebra dos octonions, a qual chamou de “octaves”. Porém Graves não publicou sua descoberta até o ano de 1848; nesse ínterim, o matemático britânico Arthur Cayley descobriu, independentemente, os octonions, publicando seus resultados em 1845 [16]. Como resultado, os octonions passaram a ser chamados de “números de Cayley”.

No ano de 1898, o matemático alemão Adolf Hurwitz (1859–1919) estabeleceu [40] que as álgebras dos reais, dos complexos, dos quaternions e a dos octonions, são as únicas álgebras de divisão normadas. Esse resultado ficou conhecido como *Teorema de Hurwitz*.

Num artigo de 1919 [24], o matemático americano Leonard Eugene Dickson (1874 – 1954) generalizou a construção de álgebras como a dos quaternions e a dos octonions para dimensões maiores do que oito, através de um processo que ficou conhecido como *processo de duplicação de Cayley-Dickson*.

## 3.2 A álgebra dos Complexos

As operações de adição (2.1) e multiplicação (2.2) em  $\mathbb{C}$ , que satisfazem as propriedades I e II, respectivamente, da seção 2.2 do capítulo anterior, fazem de  $\mathbb{C}$  um corpo. O corpo  $\mathbb{C}$  é uma extensão algébrica comutativa do corpo dos reais  $\mathbb{R}$  de grau  $[\mathbb{C} : \mathbb{R}] = 2$ .

As operações de adição (2.1) e multiplicação por escalar  $\mathbb{R} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}; (\lambda, z) \mapsto \lambda z$ , como na observação 2.2, em  $\mathbb{C}$ , faz de  $\mathbb{C}$  um  $\mathbb{R}$ -espaço vetorial 2-dimensional com base  $\{1, i\}$ . O  $\mathbb{R}$ -espaço vetorial  $\mathbb{C}$  junto com a multiplicação complexa (2.2), que satisfaz as propriedades II, forma uma  $\mathbb{R}$ -álgebra unitária comutativa 2-dimensional com base  $\{1, i\}$ , tal que  $1.1 = 1$ ,  $1.i = i.1 = i$  e  $i^2 = -1$ .

Podemos definir um produto interno em  $\mathbb{C}$  como  $\langle z_1, z_2 \rangle = x_1x_2 + y_1y_2$ ,  $z_1 = x_1 + y_1i$ ,  $z_2 = x_2 + y_2i$ , com uma norma associada dada pela Definição 2.7, i.e.,  $\|z_1\|^2 = \langle z_1, z_1 \rangle$  (note que  $\|\cdot\|^2$  é uma forma quadrática). Essa norma faz de  $\mathbb{C}$  uma álgebra normada, e como ela permite composição (Proposição 2.9),  $\mathbb{C}$  é uma álgebra de composição. Além disso, o produto interno que define essa norma é positivo-definido, logo, pela Proposição 1.114,  $\mathbb{C}$  é uma álgebra de divisão.

**Proposição 3.1.** *Toda extensão de corpo  $\mathbb{K}/\mathbb{R}$  2-dimensional que tenha identidade e não possui divisores de zero é isomorfa à  $\mathbb{C}$ .*

*Demonstração.* Considere a extensão de corpo  $\mathbb{K}/\mathbb{R}$  com  $[\mathbb{K} : \mathbb{R}] = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{K} = 2$ . Então existe um  $x \in \mathbb{K} \setminus \mathbb{R}$ . Sendo  $1 \in \mathbb{R} \subset \mathbb{K}$  base de  $\mathbb{R}$ , o conjunto  $\alpha = \{1, x\}$  forma uma base para o  $\mathbb{R}$ -espaço vetorial  $\mathbb{K}$ . Podemos agora escrever um elemento  $u \in \mathbb{K}$  em relação à base  $\alpha$  como  $u = a.1 + b.x$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ , em particular  $x^2 = c + 2dx$ , para algum par  $c, d \in \mathbb{R}$ . Definindo  $v = x - d \in \mathbb{K} \setminus \mathbb{R}$ , temos que  $v^2 = c + d^2 \in \mathbb{R}$ , com  $(c + d^2) < 0$ , pois, caso contrário,  $\pm(c + d^2)^{1/2} \in \mathbb{R}$ , e daí  $v \in \mathbb{R}$ . Dessa maneira podemos achar um  $r \in \mathbb{R}$  tal que  $r^2 = -(c + d^2)^{-1}$ . Definindo  $\epsilon = rv$ , temos que:

$$\epsilon^2 = r^2v^2 = -(c + d^2)^{-1}(c + d^2) = -1.$$

Portanto a aplicação:

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{K}; \quad x + yi \mapsto x + y\epsilon,$$

é um isomorfismo de corpos. □

**Teorema 3.2.** *A álgebra dos complexos é uma álgebra quadrática.*

*Demonstração.* Seja um complexo  $z = x + yi \in \mathbb{C}$ . Sendo  $\|z\| = (\langle z, z \rangle)^{1/2} = (x^2 + y^2)^{1/2}$  sua norma, temos:

$$z^2 - 2\langle z, 1 \rangle z + \|z\|^2 = (x^2 - y^2 + 2xyi) - 2x^2 - 2xyi + (x^2 + y^2) = 0.$$

□

**Observação 3.3.** A partir de agora vamos começar a denotar a aplicação conjugação por  $*$ , i.e.,  $z^* = \bar{z}$ . É claro que a conjugação é bijetiva, e como  $(z+w)^* = z^*+w^*$ ,  $(zw)^* = z^*w^*$ ,  $z^{**} = z$  e  $1^* = 1$  (Proposição 2.5), a conjugação complexa é um *automorfismo* e uma *involução*.

**Proposição 3.4.** *Os únicos automorfismos da  $\mathbb{R}$ -álgebra  $\mathbb{C}$  são a identidade e a conjugação.*

*Demonstração.* Primeiramente observamos que o único automorfismo de  $\mathbb{R}$  é a identidade (uma prova pode ser encontrada em [56], p. 44). Seja  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  um automorfismo tal que  $f(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$ . Então  $f(x) = x$ , para todos  $x \in \mathbb{R}$ . Isso implica que, para todos  $z = x + iy \in \mathbb{C}$ , tem-se:

$$f(z) = f(x + yi) = f(x) + f(y)f(i) = x + yf(i),$$

sendo  $i^2 = -1$ , temos que  $f(i)^2 = f(i^2) = f(-1) = -1$ , assim  $f(i) = \pm i$ . No caso em que  $f(i) = i$ , tem-se a identidade,  $f \equiv id_{\mathbb{C}}$ , no caso em que  $f(i) = -i$ , tem-se a conjugação,  $f \equiv *$ .  $\square$

**Corolário 3.5.** A aplicação conjugação é o único automorfismo de  $\mathbb{C}$  que fixa  $\mathbb{R}$  e que é diferente da identidade.<sup>1</sup>

*Demonstração.* Pela proposição anterior, os únicos automorfismos de  $\mathbb{C}$  são a identidade e a conjugação, i.e.,  $\text{Aut}(\mathbb{C}) = \{id_{\mathbb{C}}, *\}$ . Mas se  $x \in \mathbb{R}$ , então  $x^* = x$ , i.e.,  $*|_{\mathbb{R}} = id_{\mathbb{R}}$ .  $\square$

Vamos ver agora que os complexos podem ser representados como certas matrizes reais  $2 \times 2$ . O conjunto das matrizes reais de ordem 2,  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ , junto com a adição e multiplicação usuais de matrizes é uma  $\mathbb{R}$ -álgebra não-comutativa, porém associativa, com identidade  $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Considere o subconjunto  $\mathcal{C} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ , definido por:

$$\mathcal{C} := \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \right\}.$$

Esse conjunto forma uma  $\mathbb{R}$ -subálgebra comutativa de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ , com identidade  $I_2$ .

**Proposição 3.6.** A álgebra  $\mathbb{C}$  é isomorfa à álgebra  $\mathcal{C}$ .

*Demonstração.* Facilmente notamos que o conjunto:

$$\{I_2, E\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\},$$

é uma base da álgebra  $\mathcal{C}$ . Multiplicando os elementos dessa base, temos:

$$I_2E = EI_2 = E, \quad I_2I_2 = I_2 \quad \text{e} \quad E^2 = -I_2.$$

Logo a tabela de multiplicação dos elementos da base de  $\mathcal{C}$  é semelhante a tabela de multiplicação dos elementos da base  $\{1, i\}$  de  $\mathbb{C}$ . Pelo teorema 1.102, segue que  $\mathbb{C} \cong \mathcal{C}$ .  $\square$

Também poderíamos considerar a aplicação:

$$F : \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{C}; \quad a + bi \mapsto \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix},$$

e mostrar que  $F$  é um  $\mathbb{R}$ -isomorfismo de álgebras.

**Observação 3.7.** O conjunto  $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid \|z\| = 1\}$  de todos os complexos unitários é um subgrupo multiplicativo de  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Esse grupo é chamado *grupo circular* por representar uma circunferência unitária no plano.

**Proposição 3.8.** O grupo circular  $S^1$  é isomorfo à  $SO(2)$ .

---

<sup>1</sup>Isso significa que o *grupo de Galois* da extensão  $\mathbb{C}/\mathbb{R}$  é  $\text{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R}) = \{f \in \text{Aut}(\mathbb{C}) \mid f|_{\mathbb{R}} = id_{\mathbb{R}}\} = \text{Aut}(\mathbb{C})$ .

*Demonstração.* Pelo exemplo 1.63, temos que:

$$SO(2) = \{A \in \mathcal{C} \mid \det(A) = a^2 + b^2 = 1\}.$$

Pela proposição anterior,  $\mathbb{C} \cong \mathcal{C}$ , e como para todos  $z = a+bi \in S^1$ , tem-se que  $a^2+b^2 = 1$ , a aplicação:

$$F : S^1 \longrightarrow SO(2); \quad a+bi \mapsto \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix},$$

é um isomorfismo de grupos.  $\square$

Mais teoremas envolvendo a álgebra dos complexos são considerados na seção 3.8.2.

### 3.3 A álgebra dos Quaternions

As operações de adição (2.17) e multiplicação (2.18) em  $\mathbb{H}$ , que satisfazem as propriedades I e II, respectivamente, da seção 2.3 do capítulo 2, fazem de  $\mathbb{H}$  um anel de divisão não-comutativo.

As operações de adição (2.17) e multiplicação por escalar  $\mathbb{R} \times \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}; (\lambda, q) \mapsto \lambda q$ , como na observação 2.16, em  $\mathbb{H}$ , faz de  $\mathbb{H}$  um  $\mathbb{R}$ -espaço vetorial 4-dimensional com base  $\beta = \{1, i, j, k\}$ . Esse espaço junto com a multiplicação quaterniônica (2.18), que satisfaz as propriedades II, forma uma  $\mathbb{R}$ -álgebra unitária não-comutativa 4-dimensional com base  $\beta$ , com a tabela de multiplicação A.1.

Podemos definir um produto interno em  $\mathbb{H}$  como  $\langle q_1, q_2 \rangle = \sum_{k=0}^3 x_k y_k$ ,  $q_1 = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k$ ,  $q_2 = y_0 + y_1 i + y_2 j + y_3 k$ , com uma norma associada dada pela Definição 2.20, i.e.,  $\|q_1\|^2 = \langle q_1, q_1 \rangle$ . Essa norma faz de  $\mathbb{H}$  uma álgebra normada, e como ela permite composição (Proposição 2.22),  $\mathbb{H}$  é uma álgebra de composição. Além disso, o produto interno que define essa norma é positivo-definido, logo, pela Proposição 1.114,  $\mathbb{H}$  é uma álgebra de divisão.

**Observação 3.9.** Através da tabela de multiplicação A.1 obtemos a seguinte relação para as unidades imaginárias  $e_1 = i$ ,  $e_2 = j$  e  $e_3 = k$ :

$$e_i e_j = -\delta_{ij} e_0 + \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} e_k, \tag{3.1}$$

onde  $\delta_{ij}$  é o *delta de Kronecker*<sup>2</sup> e  $\varepsilon_{ijk}$  é o *símbolo de Levi-Civita*<sup>3</sup>, definidos por:

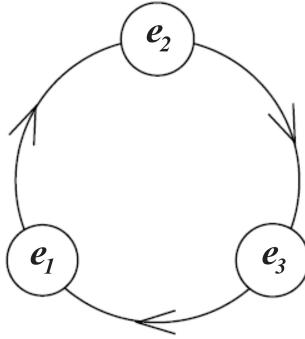
$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j; \\ 0, & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1, & \text{se } (i, j, k) = (1, 2, 3), (2, 3, 1) \text{ ou } (3, 1, 2); \\ -1, & \text{se } (i, j, k) = (3, 2, 1), (1, 3, 2) \text{ ou } (2, 1, 3); \\ 0, & \text{se } i = j \text{ ou } i = k \text{ ou } j = k. \end{cases}$$

<sup>2</sup>Leopold Kronecker (1823 - 1891) foi um matemático alemão.

<sup>3</sup>Tullio Levi-Civita (1873 - 1941) foi um matemático italiano.

Uma regra mnemônica para a multiplicação dos quaternions é mostrada no seguinte diagrama:



**Figura 3.1.** Diagrama de multiplicação dos quaternions. O sinal da multiplicação é positivo no sentido da seta (sentido horário) e negativo no sentido contrário, e.g.,

$$e_1e_2 = e_3 \text{ e } e_2e_1 = -e_3.$$

**Teorema 3.10.** A álgebra dos quaternions é uma álgebra quadrática.

*Demonstração.* Análoga a demonstração do teorema 3.2.  $\square$

**Proposição 3.11.** A álgebra dos quaternions é uma  $\mathbb{R}$ -álgebra central.

*Demonstração.* A inclusão  $\mathbb{R} \subset \text{cen}(\mathbb{H})$  é clara. Considere um quaternion  $q = x_0 + x_1i + x_2j + x_3k \in \text{cen}(\mathbb{H})$  tal que  $q$  comuta com  $i$  e  $j$ , ou seja:

$$\begin{aligned} x_0i - x_1 + x_2k - x_3j &= iq = q i = x_0i - x_1 - x_2k + x_3j \quad \text{e} \\ x_0j - x_1k - x_2 + x_3i &= jq = q j = x_0j + x_1k - x_2 - x_3i. \end{aligned}$$

Isso implica que  $2(x_2k - x_3j) = 0$ , implicando que  $x_2 = x_3 = 0$ . Com isso, pela segunda igualdade temos que  $x_1 = 0$ . Ou seja, se  $q \in \text{cen}(\mathbb{H})$  então  $q = x_0 \in \mathbb{R}$ . Logo  $\text{cen}(\mathbb{H}) \subseteq \mathbb{R} \Rightarrow \text{cen}(\mathbb{H}) = \mathbb{R}$ .  $\square$

**Proposição 3.12.** Todos automorfismos de álgebra  $\phi : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$  são da forma:  $\phi_q(x) = qxq^{-1}$ , com  $x, q \in \mathbb{H}$ ,  $q$  um quaternion inversível com  $\|q\| = 1$ .

*Demonstração.* A demonstração pode ser encontrada em [63], p. 45.  $\square$

Vamos ver agora que os quaternions podem ser representados como certas matrizes complexas  $2 \times 2$ . O conjunto das matrizes complexas de ordem 2,  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ , junto com a adição e multiplicação usuais de matrizes é uma  $\mathbb{R}$ -álgebra não-comutativa, porém associativa, com identidade  $I_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Considere o subconjunto  $\mathcal{H} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ , definido por:

$$\mathcal{H} := \left\{ \begin{pmatrix} w & z \\ -z^* & w^* \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \right\}.$$

Esse conjunto forma uma  $\mathbb{R}$ -subálgebra não-comutativa, porém associativa, de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ , com identidade  $I_0$ .  $\mathcal{H}$  é uma álgebra de divisão.

**Teorema 3.13.** A álgebra  $\mathbb{H}$  é isomorfa à álgebra  $\mathcal{H}$ .

*Demonstração.* Considere os elementos:

$$I_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad I_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } I_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix},$$

então o conjunto  $\{I_0, I_1, I_2, I_3\}$  forma uma base para  $\mathcal{H}$ . Multiplicando os elementos dessa base, obtemos:

$$I_1^2 = I_2^2 = I_3^2 = -I_0, \quad I_1 I_2 = I_3, \quad I_2 I_1 = -I_3,$$

$$I_1 I_3 = -I_2, \quad I_2 I_3 = I_1, \quad I_3 I_2 = -I_1, \quad I_3 I_1 = I_2,$$

ou seja, a tabela de multiplicação de  $\mathcal{H}$  é semelhante a de  $\mathbb{H}$ , pelo teorema 1.102,  $\mathbb{H} \cong \mathcal{H}$ .  $\square$

**Observação 3.14.** Poderíamos também considerar a aplicação  $\phi : \mathbb{H} \rightarrow \mathcal{H}$  definida por:

$$q = x_0 + x_1i + x_2j + x_3k \mapsto \begin{pmatrix} x_0 + x_1i & -x_2 - x_3i \\ x_2 - x_3i & x_0 - x_1i \end{pmatrix}$$

e mostrar que  $F$  é um  $\mathbb{R}$ -isomorfismo de álgebras, com  $F(1) = I_0, F(i) = I_1, F(j) = I_2$  e  $F(k) = I_3$ .

**Teorema 3.15.** A álgebra  $\mathbb{H} \otimes \mathbb{H}$  é isomorfa à álgebra  $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ .

*Demonstração.* Pela observação 1.131, podemos escrever a base de  $\mathbb{H} \otimes \mathbb{H}$  como:

$$\{1, i, j, k, I, J, K, iI, iJ, iK, jI, jJ, jK, kI, kJ, kK\},$$

onde  $I, J, K$  são, axiomaticamente, diferentes das unidades  $i, j, k$ , porém possuem a mesma tabela de multiplicação, e satisfazem as relações  $iI = Ii, jJ = Jj$  e  $kK = Kk$ . Ainda, como tanto  $\mathbb{H} \otimes \mathbb{H}$  quanto  $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$  são  $\mathbb{R}$ -álgebras 16-dimensionais, pelo teorema 1.102, basta mostrar que essas álgebras possuem tabela de multiplicação semelhantes. Considerando as matrizes  $H_1, J_1, K_1$  e  $H_2, J_2, K_2$  do artigo [27], sendo  $I_4 = \text{diag}(1, 1, 1, 1)$ , uma base para  $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$  é:

$$\{I_4, H_1, J_1, K_1, H_2, J_2, K_2, H_1H_2, H_1J_2, H_1K_2, J_1H_2, J_1J_2, J_1K_2, K_1H_2, K_1J_2, K_1K_2\},$$

que possui tabela de multiplicação semelhante a de  $\mathbb{H} \otimes \mathbb{H}$ .  $\square$

**Observação 3.16.** O conjunto dos quaternions unitários  $S^3 = \{q \in \mathbb{H} \mid \|q\| = 1\}$  forma um subgrupo multiplicativo (não-abeliano, pois  $i, j, k \in S^3$ ) de  $\mathbb{H} \setminus \{0\}$ . Esse grupo é a superfície da hiperesfera unitária 3-dimensional em  $\mathbb{R}^4$ .

**Proposição 3.17.** O grupo  $S^3$  é isomorfo à  $SU(2)$ .

*Demonstração.* Pelo exemplo 1.65, podemos inferir que  $SU(2)$  é um subgrupo de  $\mathcal{H}$ , ou seja:

$$SU(2) = \{M \in \mathcal{H} \mid \det(M) = 1\} \subset \mathcal{H}.$$

Pelo teorema 3.13,  $\mathbb{H} \cong \mathcal{H}$ , e considerando a aplicação  $F$  da observação 3.14, e desde que  $\|q\|^2 = \det(F(q))$ ,  $F : S^3 \rightarrow SU(2)$  determina um isomorfismo de grupos.  $\square$

### 3.3.1 O produto vetorial 3-dimensional

**Definição 3.18.** Seja  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  um  $\mathbb{K}$ -espaço com produto interno. Uma aplicação bilinear antissimétrica  $\times : V \times V \rightarrow V$ ;  $(u, v) \mapsto u \times v$ , é dita ser um *produto vetorial* se, para todos  $u, v \in V$ , satisfaz:

- (i)  $\langle u \times v, u \rangle = \langle u \times v, v \rangle = 0$ ,
- (ii)  $\|u \times v\|^2 = \|u\|^2 \|v\|^2 - \langle u, v \rangle^2$ .

**Observação 3.19.** O conjunto dos quaternions puros forma um  $\mathbb{R}$ -espaço vetorial 3-dimensional, chamado *espaço imaginário dos quaternions* e é denotado por  $\text{Im}(\mathbb{H})$ . Sendo  $i, j, k$  as unidades imaginárias, podemos escrever o espaço  $\text{Im}(\mathbb{H}) = \{x_1i + x_2j + x_3k \mid x_i \in \mathbb{R}\}$  da seguinte forma:

$$\text{Im}(\mathbb{H}) = \mathbb{R}i + \mathbb{R}j + \mathbb{R}k.$$

Podemos, assim, escrever os quaternions como uma soma direta:  $\mathbb{H} = \mathbb{R} \oplus \text{Im}(\mathbb{H})$ .

**Proposição 3.20.**  $\text{Im}(\mathbb{H})$  não é uma  $\mathbb{R}$ -subálgebra de  $\mathbb{H}$ .

*Demonstração.* A multiplicação quaterniônica não é fechada em  $\text{Im}(\mathbb{H})$ , pois basta tomar quaterninos puros  $\vec{q}_1 = x_0i + x_1j + x_2k$  e  $\vec{q}_2 = y_0i + y_1j + y_2k$  tais que  $(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3) \neq 0$ , e daí, por (2.31), temos que  $\vec{q}_1\vec{q}_2 \notin \text{Im}(\mathbb{H})$ .  $\square$

**Proposição 3.21.** Considere os vetores  $v_1 = (v_1, v_2, v_3)$  e  $w_1 = (w_1, w_2, w_3)$  no espaço com produto interno usual  $(\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ , com norma  $\|\cdot\| := (\langle \cdot, \cdot \rangle)^{1/2}$ . O produto:

$$v \times w := (v_2w_3 - v_3w_2, v_3w_1 - v_1w_3, v_1w_2 - v_2w_1), \quad (3.2)$$

define um produto vetorial em  $\mathbb{R}^3$ , chamado produto vetorial 3-dimensional.

*Demonstração.* Por (3.2) vemos diretamente que esse produto é bilinear e antissimétrico (ou anticomutativo), i.e.,  $v \times w = -w \times v$ , para todos  $v, w \in \mathbb{R}^3$ . O resto da demonstração sai diretamente da aplicação do produto (3.2) e das definições da norma  $\|v\| = (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)^{1/2}$ , e do produto interno  $\langle v, w \rangle = v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3$  de  $\mathbb{R}^3$  nas identidades (i) e (ii) da Definição 3.18.  $\square$

Como vimos na observação 2.23, os quaternions puros podem ser identificados como vetores no espaço  $\mathbb{R}^3$  (na realidade  $\text{Im}(\mathbb{H}) \cong \mathbb{R}^3$ , como espaços vetoriais), e sendo a multiplicação de dois quaternions puros como na equação (2.31), podemos escrever:

$$\vec{q}_1\vec{q}_2 = -\langle \vec{q}_1, \vec{q}_2 \rangle + \vec{q}_1 \times \vec{q}_2, \quad (3.3)$$

pois:

$$\vec{q}_1 \times \vec{q}_2 = (x_2y_3 - x_3y_2)i + (x_3y_1 - x_1y_3)j + (x_1y_2 - x_2y_1)k.$$

Mais ainda, pela multiplicação quaterniônica (2.18), o produto de dois quaternions  $q = q_0 + \vec{q}$  e  $p = p_0 + \vec{p}$  pode ser expresso como:

$$pq = (p_0 + \vec{p})(q_0 + \vec{q}) = p_0q_0 + q_0\vec{p} + \vec{q}p_0 - \langle \vec{p}, \vec{q} \rangle + \vec{p} \times \vec{q}. \quad (3.4)$$

A identidade (3.3) é obtida quando  $q_0 = p_0 = 0$ . Note ainda que obtemos a expressão (3.4) distributivamente.

Na realidade, todo quaternion pode ser escrito como o produto de um par de quaternions puros. Note também que  $\vec{q}_1 \times \vec{q}_2 = \text{Im}(\vec{q}_1 \vec{q}_2)$ . Pela equação (3.3) e pela anticomutatividade do produto vetorial, para todos  $v, w \in \mathbb{R}^3 \cong \text{Im}(\mathbb{H})$ , obtemos as seguintes identidades:

$$v \times w = \frac{vw - wv}{2} \quad \text{e} \quad \langle v, w \rangle = \frac{-(vw + wv)}{2}. \quad (3.5)$$

**Observação 3.22.** O produto vetorial (3.2) *não é associativo*, pois, a partir das identidades (3.5), temos que:

$$v \times (w \times u) = \frac{vwu - wuv}{2}. \quad (3.6)$$

**Proposição 3.23.** *O produto vetorial 3-dimensional satisfaz as propriedades:*

- (i)  $u \times (v \times w) = \langle u, w \rangle v - \langle u, v \rangle w$  (*identidade de Grassmann*).
- (ii)  $u \times (v \times w) + v \times (w \times u) + w \times (u \times v) = 0$  (*identidade de Jacobi*).

*Demonstração.* Pelas identidades (3.5) e (3.6), temos que:

$$u \times (v \times w) = \frac{uvw - vwu}{2} = \frac{(uv + vu)w}{2} - \frac{v(uw + wu)}{2} = -\langle u, v \rangle w + \langle u, w \rangle v.$$

Pela identidade (3.6), temos:

$$u \times (v \times w) + v \times (w \times u) + w \times (u \times v) = \frac{uvw - vwu}{2} + \frac{vwu - wuv}{2} + \frac{wuv - uvw}{2} = 0.$$

□

Como o produto vetorial 3-dimensional (3.2) é antissimétrico e satisfaz a identidade de Jacobi, o espaço  $\text{Im}(\mathbb{H})$  munido com esse produto vetorial forma uma álgebra de Lie.

Mais teoremas envolvendo a álgebra dos quaternions são considerados na seção 3.8.2.

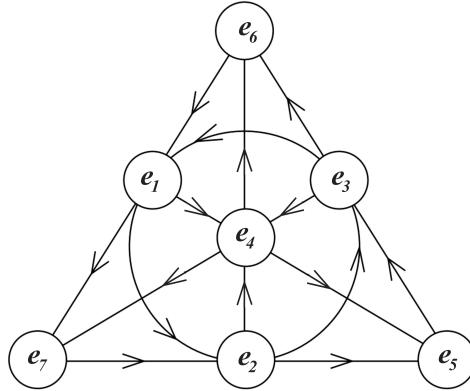
## 3.4 A álgebra dos Octonions

As operações de adição (2.37) e multiplicação (2.38) em  $\mathbb{O}$ , que satisfazem as propriedades I e II, respectivamente, da seção 2.4 do capítulo 2, fazem de  $\mathbb{O}$  um anel de divisão não-comutativo e não-associativo. É interessante notar que o conjunto  $\mathbb{O}$  junto com a multiplicação (2.37) não forma um grupo, por não satisfazer a propriedade associativa, porém forma um *loop de Moufang*. Cada subloop da tabela de multiplicação dos octonions é associativo. Para mais estudos sobre loops e subloops dos octonions, consulte [43].

As operações de adição (2.37) e multiplicação por escalar  $\mathbb{R} \times \mathbb{O} \longrightarrow \mathbb{O}$ , observação 2.30, em  $\mathbb{O}$ , faz de  $\mathbb{O}$  um  $\mathbb{R}$ -espaço vetorial 8-dimensional com base  $\gamma = \{1, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$ . Esse espaço junto com a multiplicação octoniônica (2.38), que satisfaz as propriedades II, forma uma  $\mathbb{R}$ -álgebra unitária não-comutativa e não-associativa, porém alternativa (Proposição 2.32) 8-dimensional com base  $\gamma$ , com tabela de multiplicação A.7.

Podemos definir um produto interno em  $\mathbb{O}$  como  $\langle o_1, o_2 \rangle = \sum_{k=0}^7 x_k y_k$ ,  $o_1 = x_0 + x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 + x_4 e_4 + x_5 e_5 + x_6 e_6 + x_7 e_7$ ,  $o_2 = y_0 + y_1 e_1 + y_2 e_2 + y_3 e_3 + y_4 e_4 + y_5 e_5 + y_6 e_6 + y_7 e_7$ , com uma norma associada dada pela Definição 2.34, i.e.,  $\|o_1\|^2 = \langle o_1, o_1 \rangle$ . Essa norma faz de  $\mathbb{O}$  uma álgebra normada, e como ela permite composição (Proposição 2.36),  $\mathbb{O}$  é uma álgebra de composição. Além disso, o produto interno que define essa norma é positivo-definido, logo, pela Proposição 1.114,  $\mathbb{O}$  é uma álgebra de divisão.

**Observação 3.24.** A tabela de multiplicação A.7 (Apêndice A) dos octonions pode ser sumarizada no seguinte diagrama (o qual não inclui a multiplicação pela identidade  $e_0 = 1$ ):



**Figura 3.2.** Diagrama de multiplicação dos octonions. O sinal da multiplicação é positivo no sentido das setas, e negativo no sentido contrário. Cada linha contém três pontos, e a multiplicação de dois desses pontos produz o terceiro ponto colinear. Ainda, a multiplicação de cada tripla de pontos está ciclicamente ordenada no sentido das setas, e.g.,  $e_3e_4 = e_7$  e  $e_7e_3 = e_4$ , fechando, assim, um ciclo.

Esse diagrama é conhecido como *Plano de Fano*, em homenagem ao matemático italiano Gino Fano (1871–1952). O plano de Fano é mais do que apenas uma regra mnemônica para a multiplicação dos octonions, ele é, deveras, um plano projetivo finito de ordem 2 ( $PG(2, 2)$ ) sobre o corpo de Galois  $\mathbb{F}_2$ . Para mais detalhes consulte [9].

**Teorema 3.25.** *A álgebra dos octonions é uma álgebra quadrática.*

*Demonstração.* Análoga a demonstração do teorema 3.2. □

**Proposição 3.26.** *O grupo dos automorfismos de anel dos octonions é um subgrupo 14-dimensional do grupo  $SO(7)$ .*

*Demonstração.* A demonstração pode ser encontrada em [63], p. 57. □

Desde que todo automorfismo de álgebra  $f : \mathbb{O} \rightarrow \mathbb{O}$  satisfaça  $f(1) = 1$  e  $\langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$  (preserva produto interno), então o grupo dos automorfismos dos octonions é equivalente ao grupo de Lie excepcional<sup>4</sup>  $G_2$ :

$$G_2 = \text{Aut}(\mathbb{O}) = \{f \in \text{Iso}(\mathbb{O}) \mid f(xy) = f(x)f(y), \forall x, y \in \mathbb{O}\} \subset O(7).$$

O primeiro a notar essa equivalência foi o matemático francês Élie Cartan (1869 – 1951) num artigo de 1914 [14].

---

<sup>4</sup>Os outros 4 grupos de Lie excepcionais são:  $F_4$ ,  $E_6$ ,  $E_7$  e  $E_8$ . Para mais detalhes sobre grupos de Lie, consulte [63].

### 3.4.1 A álgebra das matrizes-vetores de Zorn

Nesta parte vamos ver que os octonions podem ser representados como um tipo especial de matrizes, as chamadas *matrizes-vetores de Zorn*<sup>5</sup>.

Sejam  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  escalares e  $v = (v_1, v_2, v_3), w = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3$  vetores. As matrizes da forma:

$$\begin{pmatrix} \alpha & v \\ w & \beta \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

são chamadas *matrizes-vetores de Zorn reais*, ou simplesmente *matrizes-vetores*. Definimos as operações de soma e de multiplicação dessas matrizes, respectivamente, como:

$$\begin{pmatrix} \alpha & v \\ w & \beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha' & v' \\ w' & \beta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + \alpha' & v + v' \\ w + w' & \beta + \beta' \end{pmatrix}, \quad (3.8)$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & v \\ w & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha' & v' \\ w' & \beta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\alpha' - \langle v, w' \rangle & \alpha'w + \beta w' + v \times v' \\ \alpha v' + \beta' v + w \times w' & \beta\beta' - \langle w, v' \rangle \end{pmatrix}. \quad (3.9)$$

onde  $\alpha, \beta, \alpha', \beta' \in \mathbb{R}$  e  $w, w', v, v' \in \mathbb{R}^3$ .

**Definição 3.27.** O conjunto das matrizes-vetores reais da forma (3.7) junto com as operações de soma (3.8) e de multiplicação (3.9) forma uma álgebra, chamada *álgebra das matrizes-vetores reais* (de Zorn), e a denotaremos por  $\mathcal{M}_{vet}(\mathbb{R})$ .

Considere agora as matrizes da forma (3.7) com entradas complexas,  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  e  $v = (z_1, z_2, z_3), w = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{C}^3$  (números complexos e vetores complexos). Essas matrizes são chamadas *matrizes-vetores de Zorn complexas*. Temos agora a seguinte definição:

**Definição 3.28.** O conjunto das matrizes-vetores complexas junto com as operações de soma (3.8) e de multiplicação (3.9) forma uma álgebra, chamada *álgebra das matrizes-vetores complexas* (de Zorn), e a denotaremos por  $\mathcal{M}_{vet}(\mathbb{C})$ .

**Observação 3.29.** Tanto  $\mathcal{M}_{vet}(\mathbb{C})$  quanto  $\mathcal{M}_{vet}(\mathbb{R})$  são álgebras não-comutativas unitárias, com elemento identidade  $I_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

Considere a subálgebra de  $\mathcal{M}_{vet}(\mathbb{C})$  definida por:

$$\mathcal{V}(\mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & v \\ -v^* & \alpha^* \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{vet}(\mathbb{C}) \right\}.$$

**Teorema 3.30.** A álgebra dos octonions é isomorfa à álgebra  $\mathcal{V}(\mathbb{C})$ .

*Demonstração.* Considere os vetores  $e_1 = (1, 0, 0)$ ,  $e_2 = (0, 1, 0)$  e  $e_3 = (0, 0, 1)$ . Os elementos:

$$I_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_1 = \begin{pmatrix} 0 & e_1 \\ -e_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad I_2 = \begin{pmatrix} 0 & e_2 \\ -e_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad I_3 = \begin{pmatrix} 0 & e_3 \\ -e_3 & 0 \end{pmatrix},$$

---

<sup>5</sup>Max August Zorn (1906 - 1993) foi um matemático alemão.

$$I_4 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad I_5 = \begin{pmatrix} 0 & ie_1 \\ ie_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad I_6 = \begin{pmatrix} 0 & ie_2 \\ ie_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad I_7 = \begin{pmatrix} 0 & ie_3 \\ ie_3 & 0 \end{pmatrix},$$

formam uma base para  $\mathcal{V}(\mathbb{C})$ , e, pela regra (3.9), a tabela de multiplicação dessa base é semelhante a tabela de multiplicação A.7 de  $\mathbb{O}$ , logo, pelo teorema 1.102,  $\mathbb{O} \cong \mathcal{V}(\mathbb{C})$ .  $\square$

Uma outra demonstração para o teorema anterior pode ser encontrada em [25], p. 263.

### 3.4.2 O produto vetorial 7-dimensional

Produtos vetoriais existem apenas em espaços com dimensões 0, 1, 3 e 7. O leitor pode consultar [25], p. 275, e [47], p. 304, para mais detalhes sobre o produto vetorial 7-dimensional.

**Proposição 3.31.** *Considere os vetores  $x = (x_1, x_2, \dots, x_7)$  e  $y = (y_1, y_2, \dots, y_7)$  no espaço com produto interno usual  $(\mathbb{R}^7, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ , com norma  $\|\cdot\| := (\langle \cdot, \cdot \rangle)^{1/2}$ . O produto:*

$$\begin{aligned} x \times y = & (x_2y_4 - x_4y_2 + x_3y_7 - x_7y_3 + x_5y_6 - x_6y_5, \\ & x_3y_5 - x_5y_3 + x_4y_1 - x_1y_4 + x_6y_7 - x_7y_6, \\ & x_4y_6 - x_6y_4 + x_5y_2 - x_2y_5 + x_7y_1 - x_1y_7, \\ & x_5y_7 - x_7y_5 + x_6y_3 - x_3y_6 + x_1y_2 - x_2y_1, \\ & x_6y_1 - x_1y_6 + x_7y_4 - x_4y_7 + x_2y_3 - x_3y_2, \\ & x_7y_2 - x_2y_7 + x_1y_5 - x_5y_1 + x_3y_4 - x_4y_3, \\ & x_1y_3 - x_3y_1 + x_2y_6 - x_6y_2 + x_4y_5 - x_5y_4), \end{aligned} \tag{3.10}$$

define um produto vetorial em  $\mathbb{R}^7$ , chamado produto vetorial 7-dimensional.

*Demonstração.* Pela fórmula (3.10), vemos diretamente que esse produto é bilinear e antissimétrico, i.e.,  $x \times y = -y \times x$ , para todos  $x, y \in \mathbb{R}^7$ . O resto da demonstração sai diretamente da aplicação do produto (3.10) e das definições da norma e do produto interno usuais de  $\mathbb{R}^7$  nas identidades (i) e (ii) da Definição 3.18.  $\square$

**Observação 3.32.** O conjunto dos octonions puros forma um  $\mathbb{R}$ -espaço vetorial 7-dimensional, chamado *espaço imaginário dos octonions* e é denotado por  $\text{Im}(\mathbb{O})$ . Analogamente ao espaço  $\text{Im}(\mathbb{H})$ , podemos escrever o espaço  $\text{Im}(\mathbb{O})$  da seguinte forma:

$$\text{Im}(\mathbb{O}) = \mathbb{R}e_1 + \mathbb{R}e_2 + \mathbb{R}e_3 + \mathbb{R}e_4 + \mathbb{R}e_5 + \mathbb{R}e_6 + \mathbb{R}e_7.$$

Podemos, assim, escrever os octonions como a soma direta  $\mathbb{O} = \mathbb{R} \oplus \text{Im}(\mathbb{O})$ <sup>6</sup>. Também, como vimos nos quaternions, os elementos de  $\text{Im}(\mathbb{O})$  podem ser identificados como vetores no espaço  $\mathbb{R}^7$ . Com efeito, temos uma injeção  $\text{Im}(\mathbb{O}) \rightarrow \mathbb{R}^7$ :

$$x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + x_4e_4 + x_5e_5 + x_6e_6 + x_7e_7 \mapsto (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7),$$

mais ainda,  $\text{Im}(\mathbb{O}) \cong \mathbb{R}^7$ , como espaços vetoriais.

---

<sup>6</sup>Em geral, toda  $\mathbb{R}$ -álgebra quadrática  $\mathcal{A}$  pode ser escrita como  $\mathcal{A} = \mathbb{R} \oplus \text{Im}(\mathcal{A})$ , onde  $\text{Im}(\mathcal{A})$  é um subespaço vetorial de  $\mathcal{A}$ , veja [25], p. 227.

O produto de dois octonions  $o = o_0 + \vec{o}$  e  $u = u_0 + \vec{u}$ , pode ser expresso como:

$$ou = (o_0 + \vec{o})(u_0 + \vec{u}) = o_0u_0 + o_0\vec{u} + \vec{o}u_0 - \langle \vec{o}, \vec{u} \rangle + \vec{o} \times \vec{u}. \quad (3.11)$$

A partir da equação (3.11), o produto de dois octonions puros se resume em  $\vec{o}\vec{u} = -\langle \vec{o}, \vec{u} \rangle + \vec{o} \times \vec{u}$ , pois teremos que  $o_0 = u_0 = 0$ , como vimos para os quaternions.

**Observação 3.33.** Podemos definir também o produto vetorial 7-dimensional (3.10), para todos  $x, y \in \mathbb{O}$ , como:

$$x \times y := \frac{yx - xy}{2}. \quad (3.12)$$

**Observação 3.34.** O subgrupo  $G_2 \subset SO(7)$ , que é o grupo dos automorfismos dos octonions, é exatamente o grupo que preserva o produto vetorial 7-dimensional (uma prova disso pode ser encontrada em [7], p. 12). Diferentemente do que vimos para o espaço 3-dimensional  $\text{Im}(\mathbb{H})$  dos quaternions puros, o produto vetorial 7-dimensional não satisfaz a identidade de Jacobi:

$$e_5 \times (e_1 \times e_2) + e_1 \times (e_2 \times e_5) + e_2 \times (e_5 \times e_1) = -e_7 - e_7 - e_7 = -3e_7 \neq 0,$$

assim  $(\text{Im}(\mathbb{O}), \times)$  não forma uma álgebra de Lie.

**Proposição 3.35.** *O produto vetorial 7-dimensional satisfaz a identidade de Malcev:*

$$((x \times y) \times z) \times x + ((y \times z) \times x) \times x + ((z \times x) \times x) \times y - (x \times y) \times (x \times z) = 0.$$

*Demonstração.* A demonstração pode ser encontrada em [25], p. 280.  $\square$

Assim, o espaço  $\text{Im}(\mathbb{O})$  munido com o produto vetorial (3.10) forma uma álgebra de Malcev.

Mais teoremas envolvendo a álgebra dos octonions são considerados na seção 3.8.2.

## 3.5 O processo de duplicação de Cayley-Dickson

O *processo de duplicação de Cayley-Dickson*, também conhecido como *construção de Cayley-Dickson*, é um processo iterativo que produz uma sequência de  $\mathbb{R}$ -álgebras  $2^n$ -dimensionais,  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ , que iremos denotar por  $CD_{2^n}$ , cada uma tendo o dobro da dimensão da álgebra anterior. O processo inicia-se colocando  $CD_1 = \mathbb{R}$  e definindo um conjugado  $*$  em  $\mathbb{R}$  como  $a^* = a$ , para todo  $a \in \mathbb{R}$ . Então definimos:

$$CD_{2^n} := \{(a, b) \mid a, b \in CD_{2^{n-1}}\}. \quad (3.13)$$

Em seguida definimos as operações de adição e multiplicação, e um conjugado em  $CD_{2^n}$  como:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d), \quad (3.14)$$

$$(a, b)^* = (a^*, -b). \quad (3.15)$$

$$(a, b)(c, d) = (ac - db^*, a^*d + cb), \quad (3.16)$$

**Definição 3.36.** O conjunto  $CD_{2^n}$  definido por (3.13) munido com as operações de adição (3.14), a conjugação (3.15) e a multiplicação (3.16), forma uma  $\mathbb{R}$ -álgebra involucional  $2^n$ -dimensional chamada *álgebra de Cayley-Dickson*.

**Observação 3.37.** Cada elemento  $x \in CD_{2^n}$  é da forma  $x = (x_1, \dots, x_{2^n})$ , com  $x_i \in \mathbb{R}$ . Além disso, o conjugado de  $x$  é  $x^* = (x_1, -x_2, \dots, -x_{2^n})$  e o elemento identidade de  $CD_{2^n}$  é  $1_{2^n} = (1, 0, \dots, 0)$ .

Por construção,  $CD_{2^{n-1}}$  pode ser visto como uma  $\mathbb{R}$ -subálgebra de  $CD_{2^n}$ . As quatro primeiras álgebras de Cayley-Dickson são  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$ ,  $\mathbb{H}$  e  $\mathbb{O}$ , e são conhecidas como as álgebras clássicas de Cayley-Dickson. Doravante, utilizaremos as notações equivalentes  $CD_1 \equiv \mathbb{R}$ ,  $CD_2 \equiv \mathbb{C}$ ,  $CD_4 \equiv \mathbb{H}$ ,  $CD_8 \equiv \mathbb{O}$ , etc., de forma indistinta.

Podemos extender o conceito de “parte real” e “parte imaginária” dos elementos de  $CD_{2^n}$  indutivamente, como segue abaixo.

**Definição 3.38.** Se  $x \in CD_1$ , então a parte real de  $x$  é  $Re(x) = x$ . Se  $x = (a, b) \in CD_{2^n}$ , então a parte real de  $x$  é  $Re(a, b) = Re(a)$ , e a parte imaginária de  $x \in CD_{2^n}$  é  $Im(x) = x - Re(x)$ .

**Observação 3.39.** Podemos verificar rapidamente que  $2 Re(x) = x + x^*$ ,  $2 Im(x) = x - x^*$  e que  $x = -x^*$  se  $x$  é imaginário puro (i.e.,  $x = Im(x)$ ). Em vista disso,  $Re(\cdot)$  e  $Im(\cdot)$  são aplicações lineares.

**Observação 3.40.** Como observado em [69], podemos obter uma base normalizada para  $CD_{2^n}$  da mesma maneira que temos nos casos  $CD_2$ ,  $CD_4$  e  $CD_8$ . Começando com a base  $\{1, e_1\}$  ( $e_1 = i$ ) de  $CD_2$ , por indução, obtemos uma base  $\{1, e_1, e_2, \dots, e_{2^n}\}$  de  $CD_{2^n}$ , tal que:

$$e_i^2 = -1 \quad \text{e} \quad e_i e_j = -e_j e_i = \gamma_{ij} e_k,$$

com  $k$  e  $\gamma_{ij} = \pm 1$ , dependendo de  $i, j$ , e  $e_k \neq 1, e_i, e_j$ , para  $i, j, k = 1, 2, \dots, 2^n$ .

A partir das observações 2.17 e 2.31, podemos escrever:

$$\mathbb{C} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}e_1, \quad \mathbb{H} = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}e_2, \quad \mathbb{O} = \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}e_4.$$

Pelo software *The Cayley-Dickson Calculator* [77], podemos inferir (pelo menos para grandes valores de  $n$ ) que:

$$e_i e_{2^n} = \beta e_{i+2^n}, \tag{3.17}$$

para  $i = 1, 2, \dots, 2^n - 1$ , onde  $\beta = \pm 1$ , dependendo de  $i$ . Assim, podemos expandir as observações 2.17 e 2.31 para maiores dimensões e obter que, em geral:

$$CD_{2^n} = CD_{2^{n-1}} \oplus CD_{2^{n-1}}(\beta e_{2^n}). \tag{3.18}$$

### 3.5.1 \*-álgebras

**Definição 3.41.** Uma álgebra  $\mathcal{A}$  é dita *\*-álgebra*<sup>7</sup> (lê-se *álgebra estrela*) se ela é provida de um anti-homomorfismo, que também é uma involução,  $* : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ ,  $x \mapsto x^*$ , i.e., que satisfaz, para todos  $a, b \in \mathcal{A}$ :

---

<sup>7</sup>Não confundir com  $C^*$ -álgebra, que é uma  $\mathbb{C}$ -álgebra de Banach que também é uma \*-álgebra tal que a norma satisfaz  $\|x^*x\| = \|x\|^2$ .

- (i)  $(a + b)^* = a^* + b^*$ ,
- (ii)  $(ab)^* = b^*a^*$ ,
- (iii)  $a^{**} = a$ .

**Observação 3.42.** Uma  $*$ -álgebra  $\mathcal{A}$  é real se  $a^* = a$ ,  $\forall a \in \mathcal{A}$ .

**Definição 3.43** Uma  $*$ -álgebra  $\mathcal{A}$  é dita *satisfatoriamente normada* se, para todos  $a \in \mathcal{A} \setminus \{0\}$ , tem-se que  $a + a^* \in \mathbb{R}$  e  $a^*a > 0$ .

Se  $\mathcal{A}$  é uma  $*$ -álgebra satisfatoriamente normada, podemos definir uma norma em  $\mathcal{A}$  fazendo:

$$\|a\|^2 = a^*a, \quad (3.19)$$

e todo elemento não-nulo  $a \in \mathcal{A}$  possui um inverso multiplicativo dado por:

$$a^{-1} = a^*/\|a\|^2. \quad (3.20)$$

Notamos facilmente que todas as álgebras de Cayley-Dickson são  $*$ -álgebras satisfatoriamente normadas. Toda álgebra derivada do processo de Cayley-Dickson possui uma norma da forma (3.19), como veremos a seguir.

**Proposição 3.44.** *Todo elemento  $x \in CD_{2^n}$  satisfaz a relação:*

$$x^*x = \|x\|^2 1_{2^n}. \quad (3.21)$$

*Demonstração.* Vamos provar por indução. O caso  $n = 0$  é trivial, assuma então (3.21) válido para  $n - 1$ . Escrevendo  $x = (a, b) \in CD_{2^n}$ , com  $a, b \in CD_{2^{n-1}}$ , temos:

$$\begin{aligned} x^*x &= (a, b)^*(a, b) = (a^*, -b)(a, b) = (a^*a + b^*b, ba^* - ba^*) = \\ &= (a^*a + b^*b, 0) = (\|a\|^2 + \|b\|^2)(1_{2^{n-1}}, 0) = \|x\|^2 1_{2^n}. \end{aligned}$$

□

Concluímos diretamente da equação (3.19) que todo elemento não-nulo de uma álgebras de Cayley-Dickson  $CD_{2^n}$  possui um inverso da forma (3.20).

### 3.5.2 Generalização das álgebras de Cayley-Dickson

Uma generalização das álgebras de Cayley-Dickson foi dada por A. A. Albert<sup>8</sup> [2], a partir do processo de duplicação exposto precedentemente. A generalização consiste em substituir a multiplicação (3.16) pela multiplicação:

$$(a, b)(c, d) = (ac + \gamma db^*, a^*d + cb), \quad (3.22)$$

para algum  $\gamma \in \mathbb{R}$ . Esse é o *processo de Cayley-Dickson generalizado*.

Denotaremos por  $CD_{2^n}(\gamma)$  as álgebras geradas pelo processo generalizado de Cayley-Dickson. Quando  $\gamma = -1$ , denotaremos  $CD_{2^n}(-1) = CD_{2^n}$ , as álgebras de Cayley-Dickson produzidas pelo processo de duplicação padrão.

O leitor interessado pode consultar [12] e [69] para mais detalhes sobre essa generalização.

---

<sup>8</sup>Abraham Adrian Albert (1905 - 1972) foi um matemático americano.

### 3.6 A álgebra dos Sedenions

A  $\mathbb{R}$ -álgebra 16-dimensional derivada do processo de Cayley-Dickson,  $CD_{16}$ , é conhecida como *álgebra dos Sedenions*<sup>9</sup>. Essa álgebra é comumente denotada por  $\mathbb{S} = CD_{16}$ . Os elementos de  $\mathbb{S}$  podem ser escritos da forma:

$$x_0 + x_1e_1 + x_2e_2 + \dots + x_{15}e_{15},$$

com  $x_i \in \mathbb{R}$ , e as unidades imaginárias  $e_i$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots, 15$ , formam uma base de  $\mathbb{S}$ , com uma tabela de multiplicação A.9.

Através tabela de multiplicação A.9 dos sedenions, observamos que  $e_i e_8 = e_{i+8}$ ,  $i = 1, \dots, 7$ , assim podemos escrever:

$$\mathbb{S} = \mathbb{O} \oplus \mathbb{O}e_8.$$

A Figura A.1 (localizada no Apêndice A) apresenta um diagrama de multiplicação para os sedenions, semelhante ao diagrama dos octonions (plano de Fano), a partir do qual pode-se obter sua tabela de multiplicação. Todavia, ao contrário do plano de Fano, que representa o espaço projetivo  $PG(2, 2)$ , o diagrama construído na Figura A.1 possui unicamente acepção mnemônica (observe que, a despeito de conter 15 pontos e 35 curvas, esse diagrama não corresponde a extensão 3-dimensional do Plano de Fano, i.e., o espaço projetivo  $PG(3, 2)$ ).

Como a tabela de multiplicação dos octonions está contida na tabela de multiplicação dos sedenions, concluímos que  $\mathbb{S}$  é não-comutativa e não-associativa. Mais ainda,  $\mathbb{S}$  é *não-alternativa* e possui *divisores de zero*, como veremos a seguir.

**Proposição 3.45.** *A álgebra dos sedenions não é alternativa e nem é uma álgebra de divisão.*

*Demonstração.* Considere os sedenions  $s_1 = (e_4 + e_8)$ ,  $s_2 = (e_{11} - e_7) \in \mathbb{S}$ . Através da Tabela A.9 de multiplicação dos sedenions, obtemos:

$$s_1(s_1 s_2) = (e_4 + e_8)[(e_4 + e_8)(e_{11} - e_7)] = (e_4 + e_8)[e_{15} - e_3 + e_3 - e_{15}] = (e_4 + e_8)0 = 0,$$

$$(s_1 s_1)s_2 = 2(-e_0 + e_{12})(e_{11} - e_7) = 2(e_7 + e_7) = 4e_7 \neq 0.$$

Acabamos de mostrar que existem  $s_1, s_2 \in \mathbb{S}$  tais que  $s_1(s_1 s_2) \neq (s_1 s_1)s_2$ , ou seja a álgebra dos sedenions é não-alternativa. Ainda, como  $s_1 s_2 = 0$ , com  $s_1 \neq 0$  e  $s_2 \neq 0$ ,  $\mathbb{S}$  possui divisores de zero não-nulos, logo a álgebra  $\mathbb{S}$  não pode ser de divisão.  $\square$

Os automorfismos de  $\mathbb{S}$  podem ser obtidos a partir dos automorfismos dos octonions como segue:

**Proposição 3.46.** *O conjunto dos automorfismos dos sedenions, representados como pares ordenados de octonions  $(a, b)$ , são gerados pelas aplicações  $(a, b) \mapsto (f(a), f(b))$  e  $(a, b) \mapsto (a, -b)$ , onde  $f$  é um automorfismo dos octonions, i.e.,  $f \in G_2$ .*

*Demonstração.* A demonstração pode ser encontrada em [70], p. 57.  $\square$

<sup>9</sup>O termo *sedenion* deriva do latim *sedecim*, que significa dezesseis.

Como vimos precedentemente, a álgebra dos quaternions é não-comutativa, a álgebra dos octonions é não-associativa e a dos sedenions é não-alternativa. Ou seja, cada vez que dobrarmos a dimensão de uma álgebra de Cayley-Dickson, pelo menos até a de dimensão 16, a multiplicação dessa álgebra perde uma propriedade da multiplicação da álgebra anterior, como ilustrado na Figura 3.3 abaixo. Todavia, como iremos provar na próxima seção, *toda álgebra de Cayley-Dickson é potência-associativa e flexiva*.

$$CD_2 \xrightarrow{\text{comutatividade}} CD_4 \xrightarrow{\text{associatividade}} CD_8 \xrightarrow{\text{alternatividade}} CD_{16}$$

**Figura 3.3.** Cada vez que dobrarmos a dimensão da álgebra  $CD_{2^n}$ ,  $n = 1, 2, 3, 4$ , a multiplicação perde a propriedade mencionada acima da seta.

**Observação 3.47.** A próxima álgebra de Cayley-Dickson a partir dos sedenions é a álgebra dos 32-nions,  $CD_{32}$ , às vezes chamada *Trigintaduonions*<sup>10</sup>, seguida da álgebra dos 64-nions,  $CD_{64}$ , às vezes chamada *Sexagintaquatruonions*<sup>11</sup>. Os elementos dessas álgebras são análogos aos das outras álgebras de C-D descritas até aqui, e elas possuem bases  $\{1, e_1, \dots, e_{31}\}$  e  $\{1, e_1, \dots, e_{63}\}$ , com tabelas de multiplicação A.10 e A.11 (Apêndice A), respectivamente. Através dessas tabelas, temos que  $e_i e_{16} = e_{i+16}$ ,  $i = 1, \dots, 15$  e  $e_i e_{32} = e_{i+32}$ ,  $i = 1, \dots, 31$ , por conseguinte, podemos escrever:

$$CD_{32} = \mathbb{S} \oplus \mathbb{S}e_{16} \quad \text{e} \quad CD_{64} = CD_{32} \oplus CD_{32}e_{32}.$$

Para saber mais acerca dessas estruturas álgebricas consulte [15] e [57].

## 3.7 Propriedades das álgebras de Cayley-Dickson

Vimos anteriormente que os complexos, os quaternions e os octonions são álgebras quadráticas. Vamos ver agora que, na realidade, toda álgebra de Cayley-Dickson é uma álgebra quadrática.

**Lema 3.48.** *Cada elemento  $x = (x_1, \dots, x_{2^n}) \in CD_{2^n}$ , com  $\|x\|^2 = x^*x$ , satisfaz a equação quadrática:*

$$x^2 - 2x_1x + \|x\|^2 = 0. \quad (3.23)$$

*Demonstração.* Pela Proposição 3.44, para todo  $x \in CD_{2^n}$  temos que  $x^*x = \|x\|^2 1_{2^n}$ . Logo:

$$x + x^* = (x_1, x_2, \dots, x_{2^n}) + (x_1, -x_2, \dots, -x_{2^n}) = (2x_1, 0, \dots, 0) = 2x_1 1_{2^n}. \quad (3.24)$$

De (3.23) e (3.24) segue que:

$$x^2 - 2x_1x + \|x\|^2 = x^2 - (x + x^*)x + x^*x = 0.$$

□

<sup>10</sup>Do latim *triginta duo*, que significa 32.

<sup>11</sup>Do latim *sexaginta quattuor*, que significa 64.

**Lema 3.49.** Para todos  $x, y \in CD_{2^n}$ , tem-se que  $\operatorname{Re}(xy - yx) = 0$ .

*Demonstração.* Se  $x$  ou  $y$  é real, fica claro que  $\operatorname{Re}(xy - yx) = 0$ . Por linearidade, podemos assumir que  $x$  e  $y$  são ambos imaginários, assim  $x^* = -x$  e  $y^* = -y$ , que implica:

$$xy - yx = xy - y^*x^* = xy - (xy)^* = 2\operatorname{Im}(xy).$$

Ou seja,  $xy - yx$  é imaginário, implicando que  $\operatorname{Re}(xy - yx) = 0$ .  $\square$

**Lema 3.50.** Para todos  $x, y, z \in CD_{2^n}$ , tem-se que  $\operatorname{Re}((x, y, z)) = 0$ , onde  $(x, y, z)$  é o associador (definição 1.78).

*Demonstração.* Por linearidade é suficiente assumir que  $x, y$  e  $z$  são da forma  $(\alpha, 0)$  ou  $(0, \alpha)$ ,  $\alpha \in CD_{2^{n-1}}$ . Assim teremos que checar oito casos, quatro desses casos são triviais, a saber, quando  $x = (0, a)$ ,  $y = (0, b)$ ,  $z = (0, c)$ ,  $x = (a, 0)$ ,  $y = (b, 0)$ ,  $z = (0, c)$ ,  $x = (0, a)$ ,  $y = (b, 0)$ ,  $z = (0, c)$  e  $x = (a, 0)$ ,  $y = (b, 0)$ ,  $z = (0, c)$ , pois daí teremos que  $(x, y, z) = (0, w)$ , implicando que  $\operatorname{Re}((x, y, z)) = 0$ . Os outros quatro casos temos que checar caso a caso, por exemplo, para  $x = (a, 0)$ ,  $y = (0, b)$ ,  $z = (0, c)$ , temos:

$$(x, y, z) = (a(c^*b) - c^*(ba), 0),$$

e  $\operatorname{Re}(a(c^*b) - c^*(ba)) = \operatorname{Re}((c^*b)a - c^*(ba)) = 0$ , pelo lema 3.49. Os outros três casos são verificados de forma similar.  $\square$

A demonstração do teorema a seguir segue de [31], p. 3.

**Teorema 3.51.** Todas as álgebras de Cayley-Dickson são potência-associativas.

*Demonstração.* Pela Proposição 1.84,  $CD_{2^n}$  é potência-associativa se, e somente se, ocorre:

$$x^2x = xx^2 \text{ e } x^2x^2 = (x^2x)x,$$

para todos  $x \in CD_{2^n}$ . Pelo lema anterior,  $CD_{2^n}$  é uma álgebra quadrática, i.e., cada  $x \in CD_{2^n}$  satisfaz a equação quadrática:

$$x^2 = \alpha x + \beta 1_{2^n}, \tag{3.25}$$

para algum par  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Multiplicando (3.25) por  $x$ :

$$x^2x = \alpha x^2 + \beta x = x(\alpha x + \beta 1_{2^n}) = xx^2. \tag{3.26}$$

De (3.25) e (3.26), segue que:

$$\begin{aligned} x^2x^2 &= (\alpha x + \beta 1_{2^n})x^2 = \alpha xx^2 + \beta x^2 = \alpha x^2x + \beta x^2 = \\ &= (\alpha x^2 + \beta x)x = [(\alpha x + \beta 1_{2^n})x]x = (x^2x)x. \end{aligned}$$

Logo  $CD_{2^n}$  é potência-associativa para todo inteiro  $n \geq 0$ .  $\square$

A demonstração do teorema a seguir segue de [10].

**Teorema 3.52.** Todas as álgebras de Cayley-Dickson são flexivas.

*Demonstração.* Temos que mostrar que  $(x, y, x) = (xy)x - x(yx) = 0$ , para todos  $x, y \in CD_{2^n}$ . Pelo lema 3.50, temos que  $\text{Re}((x, y, x)) = 0$ , ou seja,  $(x, y, x)$  é imaginário, porém, temos que:

$$(x, y, x)^* = [(xy)x - x(yx)]^* = x^*(xy)^* - (yx)^*x^* = -x(yx) + (xy)x = (x, y, x),$$

ou seja,  $(x, y, x)$  é o seu próprio conjugado, implicando que  $\text{Im}((x, y, x)) = 0$ . Portanto  $(x, y, x) = 0$ .  $\square$

**Teorema 3.53.** As álgebras  $CD_1, CD_2, CD_4$  e  $CD_8$  são as únicas álgebras de Cayley-Dickson que não possuem divisores de zero.

*Demonstração.* Já vimos anteriormente que os reais, os complexos, os quaternions e os octonions são  $\mathbb{R}$ -álgebras de divisão, i.e., não possuem divisores de zero. Todavia, mostramos na Proposição 3.45 que a álgebra  $CD_{16}$  possui divisores de zero, ou seja, existem elementos não-nulos  $x, y \in CD_{16}$  tais que  $xy = 0$ . Pelo processo de duplicação de Cayley-Dickson,  $CD_{32} = \{(a, b) \mid a, b \in CD_{16}\}$ , em particular  $(x, 0), (y, 0) \in CD_{32}$ , e por (3.16) temos que:

$$(x, 0)(y, 0) = (xy - 0, x^*0 + y0) = (xy, 0) = (0, 0).$$

Analogamente, colocando  $A = (x, 0)$  e  $B = (y, 0)$ , teremos que  $(A, 0)(B, 0) = (0, 0)$  em  $CD_{64}$ . Podemos repetir esse processo indefinidamente, isso significa que toda álgebra de Cayley-Dickson  $CD_{2^n}$ , com  $n > 3$ , possui divisores de zero.  $\square$

**Observação 3.54.** Seja  $CD_{2^n}$  a álgebra de Cayley-Dickson obtida a partir da álgebra  $CD_{2^{n-1}}$ . Então, a partir das propriedades das primeiras 4 álgebras de C-D,  $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$  e  $\mathbb{O}$ , podemos deduzir o seguinte:

- (i)  $CD_{2^n}$  nunca é real.
- (ii)  $CD_{2^{n-1}}$  é comutativa se, e somente se,  $CD_{2^n}$  é comutativa.
- (iii)  $CD_{2^n}$  é associativa se, e somente se,  $CD_{2^{n-1}}$  é comutativa e associativa.
- (iv)  $CD_{2^n}$  é alternativa, se, e somente se,  $CD_{2^{n-1}}$  é associativa.

## 3.8 Os teoremas de Hurwitz, de Frobenius e outros teoremas

### 3.8.1 O problema da soma de quadrados

O problema conhecido como *problema da soma de quadrados* pode ser expresso da seguinte forma:

Para que valores de  $n \geq 1$ , um inteiro positivo, podemos encontrar formas bilineares  $\phi_i = \phi_i((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n))$  tais que:

$$(x_1^2 + \dots + x_n^2)(y_1^2 + \dots + y_n^2) = \phi_1^2 + \dots + \phi_n^2. \quad (3.27)$$

Para  $n = 1$  é trivial. Para  $n = 2$ , a partir da Proposição 2.9, dados dois complexos  $z_1 = x_1 + x_2i$  e  $z_2 = y_1 + y_2i$ , tem-se que:

$$(x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2) = (x_1y_1 - x_2y_2)^2 + (x_1y_2 + x_2y_1)^2. \quad (3.28)$$

Vemos assim que a identidade (3.28) surge naturalmente do fato de  $\mathbb{C}$  ser uma álgebra de composição.

Para  $n = 4$ , a partir da Proposição 2.22, dados dois quaternions  $q_1 = x_1 + x_2i + x_3j + x_4k$  e  $q_2 = y_1 + y_2i + y_3j + y_4k$ , temos que:

$$\begin{aligned} & (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2) = \\ &= (x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3 - x_4y_4)^2 + \\ &+ (x_1y_2 + x_2y_1 + x_3y_4 - x_4y_3)^2 + \\ &+ (x_1y_3 + x_3y_1 - x_2y_4 + x_4y_2)^2 + \\ &+ (x_1y_4 + x_4y_1 + x_2y_3 - x_3y_2)^2. \end{aligned} \quad (3.29)$$

A identidade (3.29) já era conhecida por Euler em 1770. Porém, com a descoberta dos quaternions essa identidade surge naturalmente pelo simples fato de que a norma de  $\mathbb{H}$  permite composição.

Para  $n = 8$ , a partir da Proposição 2.36, dados dois octonions  $o_1 = x_1 + x_2e_1 + x_3e_2 + x_4e_3 + x_5e_4 + x_6e_5 + x_7e_6 + x_8e_7$  e  $o_2 = y_1 + y_2e_1 + y_3e_2 + y_4e_3 + y_5e_4 + y_6e_5 + y_7e_6 + y_8e_7$ , temos que:

$$\begin{aligned} & (x_1^2 + \dots + x_8^2)(y_1^2 + \dots + y_8^2) = \\ &= (x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3 - x_4y_4 - x_5y_5 - x_6y_6 - x_7y_7 - x_8y_8)^2 + \\ &+ (x_1y_2 + x_2y_1 + x_3y_4 - x_4y_3 + x_5y_6 - x_6y_5 - x_7y_8 + x_8y_7)^2 + \\ &+ (x_1y_3 + x_3y_1 - x_2y_4 + x_4y_2 + x_5y_7 - x_7y_5 + x_6y_8 - x_8y_6)^2 + \\ &+ (x_1y_4 + x_4y_1 + x_2y_3 - x_3y_2 + x_5y_8 - x_8y_5 - x_6y_7 + x_7y_6)^2 + \\ &+ (x_1y_5 + x_5y_1 - x_2y_6 + x_6y_2 - x_3y_7 + x_7y_3 - x_4y_8 + x_8y_4)^2 + \\ &+ (x_1y_6 + x_6y_1 + x_2y_5 - x_5y_2 - x_3y_8 + x_8y_3 + x_4y_7 - x_7y_4)^2 + \\ &+ (x_1y_7 + x_7y_1 + x_2y_8 - x_8y_2 + x_3y_5 - x_5y_3 - x_4y_6 + x_6y_4)^2 + \\ &+ (x_1y_8 + x_8y_1 - x_2y_7 + x_7y_2 + x_3y_6 - x_6y_3 + x_4y_5 - x_5y_4)^2. \end{aligned} \quad (3.30)$$

A identidade (3.30) já era conhecida por C. F. Degen<sup>12</sup> (ver [24], p. 164) em 1822 (com algumas diferenças), mais de vinte anos antes da descoberta dos octonions, independentemente por Graves e Cayley. Essa identidade surge naturalmente do fato de  $\mathbb{O}$  ser uma álgebra de composição.

Na década de 1960, uma identidade de dezesseis quadrados foi descoberta pelos matemáticos H. Zassenhaus<sup>13</sup> e W. Eichhorn [76], com a condição de que as formas  $\phi_i$  de (3.27) não sejam necessariamente bilineares nas entradas  $x_i$  e  $y_i$ . Uma generalização disso foi dada também na década de 1960 por Pfister<sup>14</sup>, como veremos a seguir.

Para mais detalhes sobre o problema da soma de quadrados, consulte [59].

<sup>12</sup>Carl Ferdinand Degen (1766-1825) foi um matemático dinamarquês.

<sup>13</sup>Hans Julius Zassenhaus (1912-1991) foi um matemático alemão.

<sup>14</sup>Albrecht Pfister (1934-presente) é um matemático alemão.

### 3.8.2 Os teoremas de Hurwitz, de Frobenius, de Pfister, de Hopf e de Gelfand-Mazur

Nesta parte *álgebra normada* será sinônimo de *álgebra de composição*. As demonstrações dos teoremas que serão apresentados são longas e exigem o desenvolvimento de mais conceitos matemáticos, portanto iremos apenas indicar onde tais demonstrações podem ser encontradas.

No artigo [40] de 1898, Hurwitz mostrou que identidades do tipo (3.27) existem apenas para  $n = 1, 2, 4, 8$ ; resultado que ficou conhecido como *Teorema de Hurwitz*.

**Teorema 3.55.** (Hurwitz-1898) *Seja  $\mathbb{K}$  um corpo com  $\text{char}(\mathbb{K}) \neq 2$ . Os únicos valores de  $n \geq 1$ , inteiro positivo, para os quais existe uma identidade do tipo:*

$$(x_1^2 + \dots + x_n^2)(y_1^2 + \dots + y_n^2) = \phi_1^2 + \dots + \phi_n^2,$$

onde  $\phi_i = \phi_i((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n))$  são formas bilineares, com  $x_i, y_i \in \mathbb{K}$ , são  $n = 1, 2, 4, 8$ .

*Demonstração.* Uma demonstração pode ser encontrada em [24]. □

Na realidade, Hurwitz provou esse teorema apenas para  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , mas sua prova pode ser generalizada para todo  $\mathbb{K}$  com  $\text{char}(\mathbb{K}) \neq 2$ . O teorema anterior pode ser reescrito em termos de álgebras normadas como segue.

**Teorema 3.56.** (Hurwitz) *Toda  $\mathbb{R}$ -álgebra unitária normada é isomorfa à uma das quatro álgebras:  $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$  ou  $\mathbb{O}$ .*

*Demonstração.* A demonstração pode ser encontrada em [4], p. 122. Uma outra demonstração pode ser encontrada em [42], p. 121. □

Lembre que toda  $\mathbb{R}$ -álgebra normada é de divisão (Proposição 1.113). Note, porém, que essas quatro álgebras não são as únicas álgebras de divisão (veja [23], cap. 5), porém são as únicas normadas. Em 1878 o matemático alemão Ferdinand Georg Frobenius (1849–1917) estabeleceu a seguinte afirmação acerca das álgebras de divisão:

**Teorema 3.57.** (Frobenius) *Toda  $\mathbb{R}$ -álgebra de divisão associativa é isomorfa à uma das três álgebras:  $\mathbb{R}, \mathbb{C}$  ou  $\mathbb{H}$ .*

*Demonstração.* A demonstração pode ser encontrada em [42], p. 140. Uma outra demonstração pode ser encontrada em [25], p. 229. □

Posteriormente um resultado mais geral foi estabelecido:

**Teorema 3.58.** (Frobenius Generalizado) *Toda álgebra de divisão alternativa é isomorfa à uma das quatro álgebras:  $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$  ou  $\mathbb{O}$*

*Demonstração.* Uma demonstração baseada no teorema de Hurwitz pode ser encontrada em [42], p. 147. □

Como toda álgebra associativa é alternativa, facilmente vemos que o teorema de Frobenius é um corolário do teorema de Frobenius Generalizado. Temos agora os seguintes corolários dos teoremas de Hurwitz e do teorema de Frobenius Generalizado, respectivamente:

**Corolário 3.59.** *Se  $\mathcal{A}$  é uma  $\mathbb{R}$ -álgebra de divisão finita, então  $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{A} = 2^n$ , para  $n = 0, 1, 2, 3$ .*

**Corolário 3.60.** *Toda  $\mathbb{R}$ -álgebra alternativa, quadrática, não-associativa e sem divisores de zero é isomorfa à  $\mathbb{O}$ .*

A despeito de o teorema de Hurwitz provar que não existe identidade do tipo (3.27) para  $n \neq 1, 2, 4, 8$ , Pfister mostrou em 1965 ([53], [54]) que tais identidades são possíveis se a restrição de que  $\phi_i$  sejam formas bilineares for removida. O resultado que segue é conhecido como *Teorema de Pfister*.

**Teorema 3.61.** (Pfister) *Seja  $\mathbb{K}$  um corpo e seja  $n = 2^m$ ,  $m \geq 0$  inteiro. Então existe identidades do tipo:*

$$(x_1^2 + \dots + x_n^2)(y_1^2 + \dots + y_n^2) = \psi_1^2 + \dots + \psi_n^2, \quad (3.31)$$

onde  $\psi_i$  são funções lineares de  $y_i$  com coeficientes em  $\mathbb{K}(x_1, \dots, x_n)$ , onde  $\mathbb{K}(x_1, \dots, x_n)$  é o corpo das funções racionais em  $x_1, \dots, x_n$ , com coeficientes em  $\mathbb{K}$ :

$$\psi_k = \sum_{j=1}^n c_{kj} y_j, \quad \text{com } c_{kj} \in \mathbb{K}(x_1, \dots, x_n).$$

Reciprocamente, se  $n$  não é uma potência de 2, então existe um corpo  $\mathbb{K}$  tal que não existe nenhuma identidade do tipo (3.31) com  $\psi_i \in \mathbb{K}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ .

*Demonstração.* A demonstração pode ser encontrada em [53]. □

No início da década de 1940, o matemático alemão Heinz Hopf (1894-1971) estava interessado em classificar todas as álgebras reais comutativas de dimensão finita, quando em 1940, no artigo [39], provou o seguinte:

**Teorema 3.62.** (Hopf-1940) *Toda  $\mathbb{R}$ -álgebra de divisão comutativa e de dimensão finita tem, no máximo, dimensão igual a 2.*

*Demonstração.* Uma demonstração pode ser encontrada em [25], p. 230. □

A partir do teorema de Hopf, segue o corolário:

**Corolário 3.63.** *Toda  $\mathbb{R}$ -álgebra unitária de divisão, comutativa e de dimensão finita é isomorfa à  $\mathbb{R}$  ou à  $\mathbb{C}$ .*

Num artigo de 1918 [52], Ostrowski<sup>15</sup> provou o seguinte resultado:

**Teorema 3.65.** (Ostrowski-1918) *Se  $\mathcal{A}$  é uma álgebra associativa, comutativa e com identidade, então  $\mathcal{A}$  é isomorfa a  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .*

<sup>15</sup>Alexander Markovich Ostrowski (1893 - 1986) foi um matemático ucraniano.

*Demonstração.* A demonstração pode ser encontrada em [25], p. 243.  $\square$

Posteriormente, em 1938 [48] Mazur<sup>16</sup> generalizou esse teorema e em 1941 [30] Gelfand<sup>17</sup> provou o teorema de Mazur.

**Teorema 3.66.** (Mazur-1938) *Se  $\mathcal{A}$  é uma  $\mathbb{R}$ -álgebra de divisão, normada e associativa, então  $\mathcal{A}$  é isomorfa à uma das três álgebras:  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$  ou  $\mathbb{H}$ .*

*Demonstração.* A demonstração pode ser encontrada em [25], p. 243.  $\square$

**Teorema 3.64.** (Gelfand-Mazur) *Se  $\mathcal{A}$  é uma álgebra normada, de divisão, completa<sup>18</sup> e comutativa, então  $\mathcal{A}$  é isomorfa à  $\mathbb{R}$  ou à  $\mathbb{C}$ .*

*Demonstração.* A demonstração pode ser encontrada em [25], p. 242.  $\square$

Uma das consequências diretas desse teorema é que se  $\mathcal{A}$  é uma  $\mathbb{C}$ -álgebra de divisão, normada e associativa, então  $\mathcal{A}$  é isomorfa à  $\mathbb{C}$ .

Há um refinamento do Teorema de Gelfand-Mazur conhecido como *Teorema de Gelfand-Mazur-Kaplansky*, cuja prova simples pode ser encontrada em [13].

---

<sup>16</sup>Stanisław Mazur (1905 - 1981) foi um matemático polonês.

<sup>17</sup>Israel Moiseevich Gelfand (1913 - 2009) foi um matemático soviético.

<sup>18</sup>Uma álgebra normada,  $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$ , é dita ser *completa* se toda sequência de Cauchy em  $\mathcal{A}$  converge para um limite em  $\mathcal{A}$  em relação à norma  $\|\cdot\|$ . Uma álgebra normada e completa é dita *álgebra de Banach*.

# Capítulo 4

## Outras Álgebras Hipercomplexas

Neste capítulo, estudaremos sucintamente outras álgebras hipercomplexas, e.g., a álgebra dos split-complexos, dos split-quaternions, dos biquaternions, split-octonions, etc. Importante notar que existe uma infinidade de álgebras hipercomplexas, porém aqui estudaremos apenas algumas mais interessantes. Os conceitos desenvolvidos nesta parte podem ser encontrados no livro [63], muito consultado durante a confecção deste capítulo.

### 4.1 Os Split-Complexos e os Duais

#### 4.1.1 Os Split-Complexos

Num artigo intitulado *A Preliminary Sketch of Biquaternions* [19] de 1873, William Clifford introduziu duas modificações dos números complexos, agora conhecidos como *números split-complexos* e *números duais*. Os split-complexos são conhecidos também como *complexos hiperbólicos*, *paracomplexos*, *números duplos* ou *números de Study*<sup>1</sup>.

**Definição 4.1.** Seja  $\mathcal{A}$  uma  $\mathbb{R}$ -álgebra de composição com norma  $N$ . A álgebra  $\mathcal{A}$  é dita *split-álgebra de composição* se  $N(x) = 0$ , para algum  $x \neq 0$  em  $\mathcal{A}$ .

**Definição 4.2.** Os *split-complexos* são números hipercomplexos da forma  $a + bj$ , tais que  $a, b \in \mathbb{R}$ , e a unidade imaginária  $j$  satisfaça  $j^2 = 1$ .

O conjunto dos números split-complexos forma um  $\mathbb{R}$ -espaço vetorial com base  $\{1, j\}$ . Esse espaço junto com a multiplicação:

$$(a + bj)(c + dj) = (ac + db) + (ad + cb)j, \quad (4.1)$$

forma uma  $\mathbb{R}$ -álgebra 2-dimensional, que será denotada por  $\mathbb{C}'$ .

Dado um split-complexo  $x = a + bj \in \mathbb{C}'$ , definimos o seu *conjugado* por  $x^* = a - bj$ . A *norma* de  $x$  é definida por  $\|x\|^2 = x^*x = a^2 - b^2$  (na realidade,  $\|\cdot\|$  é uma *seminorma*, porém ao longo deste capítulo iremos denominar norma). Assim a norma de um split-complexo pode ser real ou imaginário puro, e também podemos ter  $\|x\| = 0$  para um

---

<sup>1</sup>Eduard Study (1862 - 1930) foi um matemático alemão. Study estudou outros sistemas de números hipercomplexos, como os *quaternions duais* e definiu a álgebra dos *semiquaternions*.

$x = a + bj \neq 0$ , bastando tomar  $a = b \neq 0$ . Além disso, o conjugado e a norma satisfazem as propriedades:

$$(xy)^* = y^*x^* \quad \text{e} \quad \|xy\| = \|x\|\|y\|. \quad (4.2)$$

Assim, como existe  $x \neq 0$  tal que  $\|x\| = 0$ ,  $\mathbb{C}'$  é uma split-álgebra de composição. Um elemento  $x \in \mathbb{C}' \setminus \{0\}$  possui um *inverso multiplicativo* se  $\|x\| \neq 0$ , e esse inverso é o elemento  $x^{-1} = x^*/\|x\|^2$ .

**Observação 4.3.** Tomando  $\gamma = 1$  na fórmula (3.22) do processo de C-D generalizado, e sendo o conjugado de um split-complexo da forma (3.15), concluímos que álgebra  $\mathbb{C}'$  é a álgebra de Cayley-Dickson generalizada  $CD_2(1)$ .

**Proposição 4.4.** A álgebra dos split-complexos  $\mathbb{C}'$  possui divisores de zero.

*Demonstração.* Considere os elementos não-nulos:

$$x_+ = \frac{1+j}{2} \quad \text{e} \quad x_- = \frac{1-j}{2},$$

então, multiplicando-os, obtemos:

$$x_+x_- = \frac{1+j}{2} \cdot \frac{1-j}{2} = \frac{1-j+j-1}{4} = 0.$$

□

Na realidade, todo elemento  $x \neq 0$  com  $\|x\| = x^*x = 0$  é um divisor de zero. Portanto  $\mathbb{C}'$  não é um corpo, nem um anel de divisão e nem uma álgebra de divisão.

**Teorema 4.5.** A álgebra  $\mathbb{C}'$  é isomorfa à álgebra  $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ .

*Demonstração.* Pela observação 1.71, podemos inferir que  $\{(1, 0), (0, 1)\}$  é uma base de  $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ , e sendo a multiplicação de álgebra de  $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$  definida por (1.2), a multiplicação dos elementos dessa base é:

$$(1, 0)(1, 0) = (1, 0), \quad (1, 0)(0, 1) = (0, 1)(1, 0) = (0, 0) \quad \text{e} \quad (0, 1)(0, 1) = (0, 1).$$

Considere agora os elementos  $x_+$  e  $x_-$  da proposição anterior. Esses elementos formam uma base de  $\mathbb{C}'$ . Por definição temos que  $x_+^2 = x_+$ ,  $x_-^2 = x_-$  (são idempotentes) e  $x_+x_- = x_-x_+ = 0$ . Ou seja,  $\mathbb{C}'$  possui uma tabela de multiplicação semelhante a de  $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ , e pelo teorema 1.102, segue que  $\mathbb{C}' \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ . □

### 4.1.2 Os Duais

**Definição 4.6.** Os *números duais* são números hipercomplexos da forma  $a + b\epsilon$ , tais que  $a, b \in \mathbb{R}$ , e a unidade imaginária  $\epsilon$  satisfaz  $\epsilon^2 = 0$ .

O conjunto dos números duais forma um  $\mathbb{R}$ -espaço vetorial com base  $\{1, \epsilon\}$ . Esse espaço junto com a multiplicação:

$$(a + b\epsilon)(c + d\epsilon) = ac + (ad + cb)\epsilon, \quad (4.3)$$

forma uma  $\mathbb{R}$ -álgebra 2-dimensional, que será denotada por  $\mathbb{C}^0$ .

Dado um dual  $y = a + b\epsilon \in \mathbb{C}^0$ , definimos o seu *conjugado* por  $y^* = a - b\epsilon$ . A *norma* de  $y$  é definida por  $\|y\|^2 = y^*y = a^2$ . Assim a norma de um dual é sempre real, e pode ser igual a zero para um  $y \neq 0$ , bastando tomar  $y = b\epsilon$ ,  $b \neq 0$ . Além disso, o conjugado satisfaz a propriedade (4.2).

Todo elemento  $y \in \mathbb{C}^0 \setminus \{0\}$  possui um *inverso multiplicativo* dado por  $y^{-1} = y^*/\|y\|^2$ .

**Observação 4.7.** Tomando  $\gamma = 0$  na fórmula (3.22) do processo de C-D generalizado, e sendo o conjugado de um dual da forma (3.15), concluímos que álgebra  $\mathbb{C}^0$  é a álgebra de Cayley-Dickson generalizada  $CD_2(0)$ .

Analogamente aos split-complexos, todo elemento  $y \neq 0$  com  $\|y\| = y^*y = 0$  é um divisor de zero em  $\mathbb{C}^0$ . Portanto,  $\mathbb{C}^0$  não é um corpo, nem um anel de divisão e nem uma álgebra de divisão.

Considere a seguinte  $\mathbb{R}$ -subálgebra da álgebra das matrizes reais  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ :

$$\mathcal{C}^0 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \right\}.$$

Observamos facilmente que os elementos de  $\mathcal{C}^0$  são combinações lineares das seguintes matrizes:

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Teorema 4.8.** A álgebra  $\mathbb{C}^0$  é isomorfa à álgebra  $\mathcal{C}^0$ .

*Demonstração.* Sendo  $\{I_2, E\}$  uma base de  $\mathcal{C}^0$ , a multiplicação desses elementos é:

$$I_2^2 = I_2, \quad I_2E = EI_2 = E \text{ e } E^2 = 0,$$

ou seja, a tabela de multiplicação de  $\mathcal{C}^0$  é semelhante a de  $\mathbb{C}^0$ , portanto são isomórfas.  $\square$

**Teorema 4.9.** Uma  $\mathbb{R}$ -álgebra unitária 2-dimensional é isomorfa à uma das álgebras:  $\mathbb{C}'$ ,  $\mathbb{C}^0$  ou  $\mathbb{C}$ .

*Demonstração.* Seja  $\mathcal{A}$  uma  $\mathbb{R}$ -álgebra 2-dimensional unitária. Podemos escolher uma base para  $\mathcal{A}$  da forma  $\{1, \alpha\}$ , sendo 1 a identidade. Assim podemos escrever todo elemento dessa álgebra como  $a + b\alpha$ , com  $a, b \in \mathbb{R}$ . Logo temos que  $\alpha^2 = c + d\alpha$ , para algum par  $c, d \in \mathbb{R}$ , disso segue que  $\alpha$  satisfaz a equação quadrática  $\alpha^2 - d\alpha - c = 0$ , ou seja:

$$\alpha = \frac{d \pm \sqrt{d^2 + 4c}}{2}.$$

Para o discriminante  $\Delta = d^2 + 4c$  podemos ter  $\Delta < 0$ ,  $\Delta > 0$  e  $\Delta = 0$ . Sendo  $(d - 2\alpha)^2 = \Delta$ , temos que os elementos:

$$i = \frac{(d - 2\alpha)}{\sqrt{\Delta}}, \quad j = \frac{(d - 2\alpha)}{\sqrt{\Delta}}, \quad \text{e} \quad \epsilon = d - 2\alpha,$$

satisfazem  $i^2 = -1$ ,  $j^2 = 1$  e  $\epsilon^2 = 0$ , para  $\Delta < 0$ ,  $\Delta > 0$  e  $\Delta = 0$ , respectivamente.  $\square$

**Teorema 4.10.** Considerando as álgebras dos complexos  $\mathbb{C}$ , dos split-complexos  $\mathbb{C}'$  e dos duais  $\mathbb{C}^0$ , então temos os seguintes isomorfismos:

- (i)  $\mathbb{C} \otimes \mathbb{C}' \cong \mathbb{C} \otimes \mathbb{C} \cong \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ .
- (ii)  $\mathbb{C}' \otimes \mathbb{C}^0 \cong \mathbb{C}^0 \otimes \mathbb{C}^0$ .

*Demonstração.* Pela observação 1.131,  $\{1, i, j, ij\}$  é uma base de  $\mathbb{C} \otimes \mathbb{C}'$ , com  $ij = ji \Rightarrow (ij)^2 = -1$ . Assim  $\mathbb{C} \otimes \mathbb{C}'$  possui tabela de multiplicação semelhante a de  $\mathbb{C} \otimes \mathbb{C}$ , que possui base  $\{1, i, I, iI\}$ , com  $I^2 = 1$ ,  $iI = Ii$  e  $(iI)^2 = -1$ , implicando que  $\mathbb{C} \otimes \mathbb{C}' \cong \mathbb{C} \otimes \mathbb{C}$ , pelo teorema 1.102.

Pela observação 1.71, podemos inferir que o conjunto  $\{(1, 1), (1, i), (i, i), (i, -1)\}$  é uma base da álgebra  $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ , com:

$$(1, 1)^2 = (1, 1), (1, i)^2 = -(1, 1), (i, i)^2 = (1, 1), (i, -1)^2 = -(1, 1)$$

$$(1, i)(i, i) = (i, i)(1, i) = (i, -1),$$

assim podemos ver que a tabela de multiplicação de  $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$  é semelhante a de  $\mathbb{C} \otimes \mathbb{C}$ , implicando que  $\mathbb{C} \otimes \mathbb{C} \cong \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ .

Como anteriormente,  $\{1, j, \epsilon, j\epsilon\}$  é uma base de  $\mathbb{C}' \otimes \mathbb{C}^0$ , com  $\epsilon j = j\epsilon \Rightarrow (j\epsilon)^2 = 0$ . Logo a tabela de multiplicação de  $\mathbb{C}' \otimes \mathbb{C}^0$  é semelhante a de  $\mathbb{C}^0 \otimes \mathbb{C}^0$ , implicando que  $\mathbb{C}' \otimes \mathbb{C}^0 \cong \mathbb{C}^0 \otimes \mathbb{C}^0$ .  $\square$

**Observação 4.11.** James Cockle<sup>2</sup>, em uma série de artigos publicados na Philosophical Magazine entre 1848 e 1850, introduziu um sistema de números hipercomplexos que chamou de *tessarines*, que são números hipercomplexos da forma  $x_0 + x_1i + x_2j + x_3k$ , com  $x_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$ , tais que as unidades imaginárias  $i, j, k$  satisfazem  $i^2 = -1$ ,  $j^2 = 1$  e  $ij = ji = k$ ,  $k^2 = -1$ . Os tessarines formam uma álgebra 4-dimensional de base  $\{1, i, j, k\}$ , com tabela de multiplicação A.2. Por essa tabela, vemos claramente que a álgebra dos tessarines é isomorfa à  $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ .

Em 1892, Corrado Segre<sup>3</sup> introduziu os *bicomplexos*, que são números da mesma forma que os tessarines, apenas com uma alteração na multiplicação das unidades imaginárias  $i, j, k$  da seguinte maneira:  $i^2 = j^2 = -1$  e  $ji = ij = k$ ,  $k^2 = 1$ . Ou seja, a álgebra dos bicomplexos forma uma álgebra isomorfa à dos tessarines, e portanto ambas as álgebras são isomórficas à  $\mathbb{C} \otimes \mathbb{C} \cong \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ . Dizemos que os bicomplexos ( $\mathbb{C} \otimes \mathbb{C}$ ) são a *complexificação* dos complexos.

Para mais detalhes sobre os bicomplexos, consulte [58].

## 4.2 Os Split-Quaternions e os Semiquaternions

### 4.2.1 Os Split-Quaternions

**Definição 4.12.** Os *split-quaternions* (ou *coquaternions*, ou *pseudoquaternions*) são números hipercomplexos da forma  $x_0 + x_1i + x_2j + x_3f$ , tais que  $x_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$ , e as unidades imaginárias  $i, j, f$ , satisfazem  $i^2 = -1$  e  $j^2 = f^2 = 1$ .

<sup>2</sup>James Cockle (1819-1895) foi um matemático inglês.

<sup>3</sup>Corrado Segre (1863-1924) foi um matemático italiano.

O conjunto dos split-quaternions forma um  $\mathbb{R}$ -espaço vetorial com base  $\{1, i, j, f\}$ . Esse espaço junto com a tabela multiplicação A.3 forma uma  $\mathbb{R}$ -álgebra 4-dimensional, que será denotada por  $\mathbb{H}'$ .

Dado um split-quaternion  $q = x_0 + x_1i + x_2j + x_3f \in \mathbb{H}'$ , definimos o seu *conjugado* por  $q^* = x_0 - x_1i - x_2j - x_3f$ . A *norma* de  $q$  é definida por  $\|q\|^2 = q^*q = x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$ . Assim a norma de um split-quaternion pode ser real ou imaginário puro, e podemos ter  $\|q\| = 0$  para um  $q \in \mathbb{H}' \setminus \{0\}$ . Além disso, o conjugado e a norma satisfazem as propriedades (4.2), e, portanto, a álgebra  $\mathbb{H}'$  é uma split-álgebra de composição. Todo elemento  $q \in \mathbb{H}' \setminus \{0\}$  possui um inverso multiplicativo dado por  $q^{-1} = q^*/\|q\|^2$ .

Todos os elementos  $q \in \mathbb{H}' \setminus \{0\}$  com  $\|q\|^2 = q^*q = 0$  são divisores de zero.

**Teorema 4.13.** *A álgebra  $\mathbb{H}'$  é isomorfa à álgebra  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .*

*Demonstração.* Considere a seguinte base para  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ :

$$I_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, I_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

a tabela de multiplicação dos elementos  $I_0, I_1, I_2, I_3$  da base de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  é semelhante a tabela de multiplicação dos elementos  $1, i, j, f$  da base de  $\mathbb{H}'$ , por conseguinte, pelo teorema 1.110,  $\mathbb{H}' \cong \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .  $\square$

**Proposição 4.14.** *O grupo multiplicativo dos split-quaternions unitários,  $S' := \{q \in \mathbb{H}' \setminus \{0\} \mid \|q\| = 1\}$ , é isomorfo ao grupo*

$$SU(1, 1, \mathbb{C}) = \left\{ M = \begin{pmatrix} z & w \\ w^* & z^* \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \mid \det M = 1 \right\}.$$

*Demonstração.* Considere a aplicação  $S' \rightarrow SU(1, 1, \mathbb{C})$  definida por:

$$x_0 + x_1i + x_2j + x_3f \mapsto \begin{pmatrix} x_0 + ix_1 & x_2 - ix_3 \\ x_2 + ix_3 & x_0 - ix_1 \end{pmatrix}.$$

Essa aplicação define um isomorfismo de grupos.  $\square$

**Observação 4.15.** Como  $SU(1, 1, \mathbb{C}) \cong SL(2, \mathbb{R})$ , então  $S' \cong SL(2, \mathbb{R})$ .

**Teorema 4.16.** *A menos de isomorfismos, as únicas  $\mathbb{R}$ -álgabras associativas com identidades e com involução  $x \mapsto x^*$ , tal que se  $x = x^*$  então  $x \in \mathbb{R}$ , e tal que o produto  $x^*x$  define uma norma que admite composição são  $\mathbb{C}, \mathbb{C}', \mathbb{H}$  e  $\mathbb{H}'$ .*

*Demonstração.* A demonstração pode ser encontrada em [2].  $\square$

**Observação 4.17.** Alexander Macfarlane<sup>4</sup> introduziu na década de 1890 uma variação dos quaternions, os chamados *quaternions hiperbólicos*, que são números hipercomplexos da forma  $x_0 + x_1i + x_2j + x_3k$ , tais que  $x_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$ , e as unidades imaginárias  $i, j, k$ , satisfazem  $i^2 = j^2 = k^2 = 1$  e as relações da tabela de multiplicação A.5. O conjunto

<sup>4</sup>Alexander Macfarlane (1851-1913) foi um matemático escocês.

dos quaternions hiperbólicos com essa tabela de multiplicação forma uma  $\mathbb{R}$ -álgebra 4-dimensional *não-associativa*. Com efeito, pela tabela A.5, temos que  $(ij)j = kj = -i$ , mas  $i(jj) = i$ , implicando que  $(ij)j \neq i(jj)$ . Ainda, a multiplicação dos quaternions hiperbólicos é *anticomutativa* (i.e.,  $e_i e_j = -e_j e_i$ ,  $i \neq j$ , como na tabela A.5). O conjugado é dado por  $q^* = x_0 - x_1 i - x_2 j - x_3 k$ , e a norma por  $\|q\|^2 = q^* q = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$ , que é a mesma forma quadrática do espaço-tempo de Minkowski,  $\mathbb{R}^{1,3}$ , como veremos no próximo capítulo.

### 4.2.2 Os Semiquaternions

**Definição 4.18.** Os *semiquaternions* são números hipercomplexos da forma  $x_0 + x_1 i + x_2 \epsilon + x_3 h$ , com  $x_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$ , tais que as unidades imaginárias  $i, \epsilon, h$  satisfazem  $i^2 = -1$ ,  $\epsilon^2 = h^2 = 0$  e  $\epsilon h = h \epsilon = 0$ .

O conjunto dos semiquaternions forma um  $\mathbb{R}$ -espaço vetorial com base  $\{1, i, \epsilon, h\}$ . Esse espaço junto com a tabela de multiplicação A.4 forma uma  $\mathbb{R}$ -álgebra 4-dimensional. Denotaremos a álgebra dos semiquaternions por  $\mathbb{H}^0$ .

Dado um semiquaternion  $q = x_0 + x_1 i + x_2 \epsilon + x_3 h \in \mathbb{H}^0$ , definimos o seu *conjugado* por  $q^* = x_0 - x_1 i - x_2 \epsilon - x_3 h$ . A *norma* de  $q$  é definida por  $\|q\|^2 = q^* q = x_0^2 + x_1^2$ . Assim a norma de um semiquaternion é sempre real, e podemos ter  $\|q\| = 0$  para um  $q \in \mathbb{H}^0 \setminus \{0\}$ , basta tomar  $q = x_2 \epsilon + x_3 h$ ,  $x_2$  ou  $x_3 \neq 0$ . Além disso, o conjugado satisfaz a propriedade (4.2). Todo elemento  $q \in \mathbb{H}^0 \setminus \{0\}$  possui um inverso multiplicativo dado por  $q^{-1} = q^*/\|q\|^2$  e todos elementos  $q \in \mathbb{H}^0 \setminus \{0\}$  com  $\|q\|^2 = q^* q = 0$  são divisores de zero.

Considere a seguinte subálgebra da álgebra  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ :

$$\mathcal{H}^0 = \left\{ \begin{pmatrix} z & w \\ 0 & z^* \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \right\}.$$

**Proposição 4.19.** A álgebra  $\mathbb{H}^0$  é isomorfa a subálgebra  $\mathcal{H}^0$ .

*Demonstração.* Os seguintes elementos formam uma base de  $\mathbb{H}^0$ :

$$I_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad I_3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

A tabela de multiplicação desses elementos é semelhante a tabela de multiplicação A.4 dos semiquaternions.  $\square$

**Observação 4.20.** Os números da forma  $x_0 + x_1 j + x_2 \epsilon + x_3 h$ , com  $x_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$ , com as unidades imaginárias  $j, \epsilon, h$  satisfazendo  $j^2 = 1$ ,  $\epsilon^2 = h^2 = 0$  e  $\epsilon h = h \epsilon = 0$ ,  $j \epsilon = -\epsilon j = h$ ,  $h j = -j h = -\epsilon$ , são chamados *split-semiquaternions*.

### 4.3 Os Biquaternions

Os *biquaternions* foram introduzidos por W. Hamilton, em seu *Lectures on Quaternions* [35] em 1853.

**Definição 4.21.** Os *biquaternions* são números da forma  $z_0 + z_1e_1 + z_2e_2 + z_3e_3$ , onde  $z_i \in \mathbb{C}$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$ , e as unidades imaginárias  $e_1, e_2, e_3$  satisfazem as mesmas relações que as expostas na tabela de multiplicação A.1 dos quaternions.

Os biquaternions formam uma  $\mathbb{C}$ -álgebra 4-dimensional, que será denotada por  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}$ . A base dessa álgebra é  $\{1, e_1, e_2, e_3\}$ , porém podemos escrever, para  $z_{\alpha} = x_{\alpha} + x_{\beta}i$ , com  $x_{\alpha}, x_{\beta} \in \mathbb{R}$ , um biquaternion  $q$  da seguinte forma<sup>5</sup>:

$$q = x_0 + x_1i + x_2e_1 + x_3e_2 + x_4e_3 + x_5(ie_1) + x_6(ie_2) + x_7(ie_3). \quad (4.4)$$

Axiomaticamente,  $i$  difere de  $e_1$ , mas  $i^2 = e_1 = -1$  e comuta com as unidades imaginárias  $e_i$ :  $ie_1 = e_1i$ ,  $ie_2 = e_2i$  e  $ie_3 = e_3i$ . Podemos também colocar  $i = I$  e separar a “parte real”,  $q_r \in \mathbb{H}$ , da “parte imaginária”,  $q_i \in \mathbb{H}$ , de  $q$  da seguinte maneira:

$$q = (x_0 + x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) + (x_4 + x_5e_1 + x_6e_2 + x_7e_3)I = q_r + q_iI. \quad (4.5)$$

Em vista da expressão (4.4), os biquaternions formam uma  $\mathbb{R}$ -álgebra 8-dimensional com base:

$$\{1, i, e_1, e_2, e_3, ie_1, ie_2, ie_3\}, \quad (4.6)$$

com uma tabela de multiplicação A.6 (Apêndice A).

Os biquaterions têm duas conjugações: a *conjugação quaterniônica*  $q^* = z_0 - z_1e_1 - z_2e_2 - z_3e_3$  e a *conjugação complexa*  $q^* = z_0^* + z_1^*e_1 + z_2^*e_2 + z_3^*e_3$ , e elas satisfazem:

$$(pq)^* = q^*p^*, \quad (pq)^* = p^*q^* \quad \text{e} \quad (q^*)^* = (q^*)^*. \quad (4.7)$$

É possível definir mais de uma norma para os biquaternions, porém iremos considerar a generalização da norma quaterniônica:

$$\|q\|^2 = qq^* = z_0^2 + z_1^2 + z_2^2 + z_3^2, \quad (4.8)$$

que também pode ser escrita como:

$$\|q\|^2 = qq^* = (q_r + q_iI)(q_r + q_iI)^* = (q_r + q_iI)(q_r^* + q_i^*I). \quad (4.9)$$

A norma (4.8) nos diz que podemos ter  $\|q\| = qq^* = 0$  para um biquaternion  $q \neq 0$ , e, portanto, tais biquaternions são divisores de zero.

**Teorema 4.22.** A álgebra  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}$  é isomorfa à álgebra  $\mathbb{C} \otimes \mathbb{H}$ .

*Demonstração.* Seguindo a observação 1.131, uma base de  $\mathbb{C} \otimes \mathbb{H}$  é  $\{1, i, e_1, e_2, e_3, ie_1, ie_2, ie_3\}$ , que é exatamente a base (4.6) de  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}$ , com a mesma tabela de multiplicação, portanto  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}} \cong \mathbb{C} \otimes \mathbb{H}$ .  $\square$

<sup>5</sup>A expressão (4.4) é às vezes chamada *forma expandida* do biquaternion.

Assim os biquaternions são a complexificação dos quaternions.

**Proposição 4.23.** *A  $\mathbb{C}$ -álgebra dos biquaternions é isomorfa à  $\mathbb{C}$ -álgebra das matrizes complexas  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ .*

*Demonstração.* Considere a seguinte base de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ :

$$I_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad I_3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Como observamos anteriormente,  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}$  visto como  $\mathbb{C}$ -álgebra possui base  $\{1, e_1, e_2, e_3\}$ , com a mesma tabela de multiplicação A.1 dos quaternions. Podemos verificar rapidamente que a tabela de multiplicação dos elementos base acima de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  é semelhante a tabela de multiplicação A.1.  $\square$

**Observação 4.24.** Chamamos os números da Definição 4.21 de *split-biquaternions* quando os  $z'_i$ s são números split-complexos e os chamamos de *quaternions duais* quando os  $z'_i$ s são números duais.

Para mais detalhes sobre os biquaternions, consulte [66].

## 4.4 Os Split-Octonions

**Definição 4.25.** Os *split-octonions* (ou *pseudoctonions*) são números hipercomplexos da forma  $x_0 + x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + x_4e_4 + x_5e_5 + x_6e_6 + x_7e_7$ , tais que  $x_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 0, 1, \dots, 7$ , e as unidades imaginárias satisfazem as relações expostas na tabela de multiplicação A.8.

O conjunto dos split-octonions forma um  $\mathbb{R}$ -espaço vetorial com base  $\{1, e_1, e_2, \dots, e_7\}$ . Esse espaço junto com a tabela de multiplicação A.8 forma uma  $\mathbb{R}$ -álgebra 8-dimensional, que denotaremos por  $\mathbb{O}'$ . Através da Tabela A.8, podemos observar que a subálgebra gerada por  $\{1, e_1, e_2, e_3\}$  é isomorfa à  $\mathbb{H}$ , e que as subálgebras geradas por:

$$\begin{aligned} &\{1, e_1, e_4, e_5\}, \quad \{1, e_1, e_6, e_7\}, \quad \{1, e_2, e_5, e_7\}, \quad \{1, e_2, e_6, e_4\}, \\ &\{1, e_3, e_4, e_7\}, \quad \{1, e_3, e_5, e_6\}, \end{aligned}$$

são isomórfas à  $\mathbb{H}'$ .

Dado um split-octonion  $o = x_0 + x_1e_1 + \dots + x_7e_7 \in \mathbb{O}'$ , definimos o seu *conjugado* por  $o^* = x_0 - x_1e_1 - \dots - x_7e_7$ , e sua *norma* por:

$$\|o\|^2 = o^*o = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 - x_5^2 - x_6^2 - x_7^2.$$

Assim a norma de um split-octonion pode ser real ou imaginário puro, e podemos ter  $\|o\| = 0$  para um  $o \in \mathbb{O}' \setminus \{0\}$ . Além disso, o conjugado e a norma satisfazem as propriedades (4.2), e, portanto, a álgebra  $\mathbb{O}'$  é uma split-álgebra de composição. Todo elemento  $o \in \mathbb{O}' \setminus \{0\}$  possui um inverso multiplicativo dado por  $o^{-1} = o^*/\|o\|^2$ .

A álgebra  $\mathbb{O}'$  é *não-associativa*, pois, pela tabela A.8, temos que:

$$(e_4e_7)e_5 = e_3e_5 = -e_6 \neq e_6 = e_4(e_2) = e_4(e_7e_5),$$

porém ela é alternativa, ou seja, quaisquer dois elementos de  $\mathbb{O}'$  geram uma subálgebra associativa (teorema 1.86).

**Teorema 4.26.** A álgebra  $\mathbb{O}'$  é isomorfa à álgebra das matrizes-vetores reais,  $\mathcal{M}_{vet}(\mathbb{R})$ .

*Demonação.* Considere os elementos:

$$I_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_1 = \begin{pmatrix} 0 & e_1 \\ e_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad I_2 = \begin{pmatrix} 0 & e_2 \\ e_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad I_3 = \begin{pmatrix} 0 & e_3 \\ e_3 & 0 \end{pmatrix},$$

$$I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad I_5 = \begin{pmatrix} 0 & -e_1 \\ e_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad I_6 = \begin{pmatrix} 0 & e_2 \\ -e_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad I_7 = \begin{pmatrix} 0 & -e_3 \\ e_3 & 0 \end{pmatrix},$$

onde  $e_1, e_2$  e  $e_3$  são as unidades imaginárias que satisfazem a tabela de multiplicação dos quaternions A.1. Pela Definição 3.27, podemos inferir que  $\{I_0, I_1, I_2, \dots, I_7\}$  é uma base da álgebra  $\mathcal{M}_{vet}(\mathbb{R})$ . A tabela de multiplicação dos elementos dessa base é semelhante a tabela de multiplicação dos split-octonions A.8.  $\square$

**Observação 4.27.** Existe um resultado que diz que em cada uma das dimensões 2, 4 e 8, existe apenas uma, a menos de isomorfismos, split-álgebra de composição, a saber,  $\mathbb{C}'$ ,  $\mathbb{H}'$  e  $\mathbb{O}'$ , respectivamente. (consulte [71], p. 18).

**Observação 4.28.** Da mesma maneira que temos os bicomplexos  $\mathbb{C} \otimes \mathbb{C}$ , que são a complexificação dos complexos, e os biquaternions  $\mathbb{C} \otimes \mathbb{H}$ , que são a complexificação dos quaternions, temos os *bioctonions*,  $\mathbb{C} \otimes \mathbb{H}$ , que são a complexificação dos octonions.

Os bioctonions são números da forma  $z_0 + z_1e_1 + z_2e_2 + z_3e_3 + z_4e_4 + z_5e_5 + z_6e_6 + z_7e_7$ , tais que  $z_i \in \mathbb{C}$ ,  $i = 0, 1, \dots, 7$ , e as unidades imaginárias satisfazem as mesmas relações apresentadas na tabela de multiplicação A.7 dos octonions. Esses números formam uma  $\mathbb{C}$ -álgebra 8-dimensional com base  $\{1, e_1, e_2, \dots, e_7\}$ . Analogamente aos biquaternions, os bioctonions formam uma  $\mathbb{R}$ -álgebra 16-dimensional com base  $\{1, i, e_1, e_2, \dots, e_7, ie_1, \dots, ie_7\}$ . Essa álgebra possuí os octonions  $\mathbb{O}$  e os split-octonions  $\mathbb{O}'$  como subálgebras (uma prova disso pode ser encontrada em [60], p. 7).

Incluímos na página seguinte um glossário da maioria dos sistemas hipercomplexos que temos mencionado até agora. Na tabela que segue, denotamos os coeficientes reais por  $x_i \in \mathbb{R}$ , e os coeficientes complexos por  $z_i \in \mathbb{C}$ .

Sistema	Dimensão	Elementos	Unidades imaginárias
Bicomplexos	4	$x_0 + x_1i + x_2j + x_3k$	$i^2 = j^2 = -1, k^2 = 1$
Bioctonions	16	$z_0 + z_1e_1 + \dots + z_7e_7$	$e_i^2 = -1, i = 1, 2, 3, \dots, 7$
Biquaternions	8	$z_0 + z_1i + z_2j + z_3k$	$i^2 = j^2 = k^2 = -1$
Complexos	2	$x_0 + x_1i$	$i^2 = -1$
Duais	2	$x_0 + x_1\epsilon$	$\epsilon^2 = 0$
Octonions	8	$x_0 + x_1e_1 + \dots + x_7e_7$	$e_i^2 = -1, i = 1, 2, 3, \dots, 7$
Quaternions	4	$x_0 + x_1i + x_2j + x_3k$	$i^2 = j^2 = k^2 = -1$
Quaternions Hiperbólicos	4	$x_0 + x_1i + x_2j + x_3k$	$i^2 = j^2 = k^2 = 1$
Sedenions	16	$x_0 + x_1e_1 + x_2e_2 + \dots + x_{15}e_{15}$	$e_i^2 = -1, i = 1, 2, 3, \dots, 15$
Semiquaternions	4	$x_0 + x_1i + x_2\epsilon + x_3h$	$i^2 = -1, \epsilon^2 = h^2 = 0$
Split-Complexos	2	$x_0 + x_1j$	$j^2 = 1$
Split-Octonions	8	$x_0 + x_1e_1 + \dots + x_7e_7$	$e_i^2 = -1, i = 1, 2, 3, e_j^2 = 1, j = 4, 5, 6, 7$
Split-Quaternions	4	$x_0 + x_1i + x_2j + x_3f$	$i^2 = -1, j^2 = f^2 = 1$
Split-Semiquaternions	4	$x_0 + x_1j + x_2\epsilon + x_3h$	$j^2 = 1, \epsilon^2 = h^2 = 0$

# Capítulo 5

## Álgebras de Clifford

Neste capítulo, introduziremos as álgebras de Clifford e daremos a classificação completa das álgebras de Clifford reais e complexas. Na literatura, há diversas definições de álgebras de Clifford, cada qual adequada para um propósito; estas definições, bem como a maioria dos conceitos apresentados neste capítulo, podem ser encontradas nos livros [11], [26], [28], [47], [49], [55] e [72]. Estudaremos brevemente representações de álgebras de Clifford e os grupos Pin e Spin. As notas históricas a seguir foram baseadas no livro [22].

### 5.1 Notas Históricas

Hamilton não foi o único a desenvolver um sistema vetorial (quaternions) na década de 1840. Em 1844 o matemático alemão Hermann Günther Grassmann (1809–1877) publicou um livro intitulado *Die Lineale Ausdehnungslehre*<sup>1</sup> (ou Teoria de Extensão Linear), onde discorria sobre um amplo sistema de análise do espaço através de vetores, e introduziu conceitos importantes, como o conceito de bivetor, de produto interno e de produto externo para espaços de vetores. Apesar dos importantes conceitos contidos no livro, ele não recebeu quase nenhuma atenção na época.

William Kingdom Clifford (1845–1879) foi um matemático inglês, professor da *University College London*, e um dos poucos matemáticos do seu tempo que conhecia ambos os sistemas, Hamiltoniano e Grassmanniano. Em 1877 publicou o livro *Elements of Dynamic*, onde introduziu o “produto vetorial”, que é o produto vetorial usual da análise vetorial moderna, e um outro produto, chamado “produto escalar”. No ano seguinte, em 1878, publicou um artigo intitulado *Applications of Grassmann's Extensive Algebra* [17], no qual introduziu uma nova multiplicação na álgebra exterior de Grassmann, produzindo uma nova álgebra, chamada por ele de *álgebra geométrica*. Clifford deixou inacabado um segundo artigo intitulado *On the Classification of Geometric Algebras* [18], que fora publicado (mesmo inacabado) postumamente em 1882. Essas álgebras (posteriormente chamadas de álgebras de Clifford) foram redescobertas pelo matemático alemão Rudolf Otto Sigismund Lipschitz (1832–1903) entre 1880 e 1886, que reconheceu a descoberta anterior de Clifford em seu livro *Untersuchungen über die Summen von Quadraten*, publicado em 1886. Lipschitz foi o primeiro a apresentar aplicações da álgebra de Clifford na Geometria.

---

<sup>1</sup>Título completo: *Die Lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik dargestellt und durch Anwendungen auf die übrigen Zweige der Mathematik, wie auch auf der Statik, Mechanik, die Lehre vom Magnetismus und die Krystallonomie erlautert.*

## 5.2 Aspectos gerais das álgebras de Clifford

Primeiramente vamos observar que, enquanto as álgebras de Cayley–Dickson com dimensões superiores a quatro são não-associativas, as álgebras de Clifford mantém a associatividade em qualquer dimensão. A definição que segue abaixo é a *definição das álgebras de Clifford universais* (veja [72], Cap. 3).

**Definição 5.1.** Seja  $(V, \Phi)$  um  $\mathbb{K}$ -espaço quadrático ( $\text{char}(\mathbb{K}) \neq 2$ ). Uma *álgebra de Clifford* associada a  $V$  e a  $\Phi$  é uma  $\mathbb{K}$ -álgebra  $Cl(V, \Phi)$  associativa com identidade,  $\mathbf{1}$ , junto com uma aplicação linear  $\phi : V \rightarrow Cl(V, \Phi)$  tal que as seguintes propriedades são satisfeitas:

$$(i) (\phi(v))^2 = \Phi(v).\mathbf{1}, \forall v \in V.$$

(ii) (*Propriedade Universal*) Para toda  $\mathbb{K}$ -álgebra associativa  $\mathcal{A}$  e toda linear  $f : V \rightarrow \mathcal{A}$  satisfazendo  $(f(v))^2 = \Phi(v).\mathbf{1}, \forall v \in V$ , existe um único  $\mathbb{K}$ -homomorfismo de álgebras  $\psi : Cl(V, \Phi) \rightarrow \mathcal{A}$  satisfazendo  $f = \psi \circ \phi$ , ou seja, que faz o seguinte diagrama comutar:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\phi} & Cl(V, \Phi) \\ f \downarrow & \swarrow \psi & \\ \mathcal{A} & & \end{array}$$

Importante destacar que podemos dar uma definição mais ampla de álgebras de Clifford se retirarmos a propriedade universal da definição anterior, englobando, assim, as álgebras de Clifford *não-universais* (veja o teorema da pág. 88 de [72]). Neste capítulo todas as álgebras de Clifford consideradas serão todas universais.

**Observação 5.2.** A aplicação linear  $\phi$  exposta na definição anterior é comumente conhecida como *aplicação de Clifford*. Às vezes denota-se a álgebra de Clifford por  $(Cl(V, \Phi), \phi)$ , explicitando a aplicação de Clifford associada. Ainda, os elementos da álgebra  $Cl(V, \Phi)$  são chamados *números de Clifford*.

**Observação 5.3.** Em [20] Chevalley<sup>2</sup> mostrou em que se  $(V, \Phi)$  é um  $\mathbb{K}$ -espaço quadrático e  $T(V)$  a álgebra tensorial de  $V$ , e  $\mathcal{I}_\Phi$  é o ideal bilateral de  $T(V)$  gerado por  $\{v \otimes v - \Phi(v).\mathbf{1} \mid v \in V \text{ e } 1 \in \mathbb{K}\}$ , então a álgebra quociente  $Cl(V, \Phi) = T(V)/\mathcal{I}_\Phi$  é igual a álgebra da Clifford associada ao espaço  $(V, \Phi)$ .

Vamos ver agora que as álgebras de Clifford como definidas por Chevalley são universais, e, ademais, elas são únicas, a menos de isomorfismos.

**Teorema 5.4.** (Existência e unicidade) *Para todo  $\mathbb{K}$ -espaço quadrático  $(V, \Phi)$ , existe uma única, a menos de isomorfismos, álgebra de Clifford  $Cl(V, \Phi)$  associada a esse espaço.*

*Demonstração.* (Existência) Seja  $T(V)$  a álgebra tensorial de  $V$  e seja  $\mathcal{I}_\Phi$  o ideal bilateral de  $T(V)$  gerado por  $\{v \otimes v - \phi(v).\mathbf{1} \mid v \in V, 1 \in \mathbb{K}\}$ . Coloque  $Cl(V, \Phi) := T(V)/\mathcal{I}_\Phi$  e considere a projeção canônica  $\pi : T(V) \rightarrow Cl(V, \Phi)$ . Seja  $j : V \rightarrow T(V)$  a aplicação

<sup>2</sup>Claude Chevalley (1909 - 1984) foi um matemático francês.

inclusão canônica, então  $\phi : V \longrightarrow Cl(V, \Phi)$ , com  $\phi = \pi \circ j$ , é uma aplicação linear tal que, por construção:

$$\phi(v)^2 = (\pi \circ j)(v)^2 = \pi(j(v))^2 = \pi(v \otimes v) = \Phi(v).1, \quad (5.1)$$

para todo  $v \in V$ , e como  $T(V)$  é gerada por  $V$  e  $\pi$  é sobrejetiva, a aplicação  $\phi$  satisfaz a condição (i) da Definição 5.1.

Seja  $\mathcal{A}$  uma  $\mathbb{K}$ -álgebra com identidade  $1_{\mathcal{A}}$ . Considere uma aplicação linear  $\psi : V \longrightarrow \mathcal{A}$  tal que  $(\psi(v))^2 = \Phi(v).1$ . Pela propriedade universal da álgebra tensorial (definição 1.127), existe um  $\mathbb{K}$ -homomorfismo de álgebras  $f : T(V) \longrightarrow \mathcal{A}$  tal que:

$$f(v \otimes v - \Phi(v).1) = \psi(v)^2 - \Phi(v).1_{\mathcal{A}} = 0,$$

ou seja,  $\mathcal{I}_{\Phi} \subset \ker(f)$ . Assim, pelo teorema 1.47, existe uma linear  $h : Cl(V, \Phi) \longrightarrow \mathcal{A}$ , tal que:

$$(h \circ \phi)(x) = (h \circ \pi \circ j)(x) = (h \circ \phi)(x) = f(x) = \psi(x),$$

para todos  $x \in V$ , implicando que  $h \circ \phi = \psi$ . Logo a condição (ii) da Definição 5.1 é satisfeita.

(Unicidade) Sejam  $(Cl(V, \Phi), \phi)$  e  $(Cl'(V, \Phi), \phi')$  duas álgebras de Clifford associadas a  $(V, \Phi)$ . Pela Definição 5.1, colocando  $\mathcal{A} = Cl'(V, \Phi)$  e considerando a linear  $\phi' : V \longrightarrow Cl'(V, \Phi)$ , existe um único  $\mathbb{K}$ -homomorfismo de álgebras  $f : Cl(V, \Phi) \longrightarrow Cl'(V, \Phi)$  tal que  $\phi' = f \circ \phi$ . Analogamente, colocando  $\mathcal{A} = Cl(V, \Phi)$  e considerando a linear  $\phi : V \longrightarrow Cl(V, \Phi)$ , existe um único  $\mathbb{K}$ -homomorfismo de álgebras  $g : Cl'(V, \Phi) \longrightarrow Cl(V, \Phi)$  tal que  $\phi = g \circ \phi'$ .

Assim concluímos que  $f \circ g = Id_{Cl'(V, \Phi)}$  e  $g \circ f = Id_{Cl(V, \Phi)}$ , ou seja,  $f$  é um  $\mathbb{R}$ -isomorfismo, com inversa  $f^{-1} = g$ .  $\square$

Acabamos de provar que para cada espaço quadrático  $(V, \Phi)$  existe uma única, a menos de isomorfismos, álgebra de Clifford associada, portanto podemos nos referir à  $Cl(V, \Phi)$  como a álgebra de Clifford associada ao espaço  $(V, \Phi)$ . A partir de agora, iremos considerar apenas álgebras de Clifford universais.

**Corolário 5.5.** *A aplicação de Clifford  $\phi : V \longrightarrow Cl(V, \Phi)$  é injetiva.*

*Demonstração.* A demonstração pode ser encontrada em [45], p. 367.  $\square$

**Observação 5.6.** Como a aplicação  $\phi$  é injetiva, é comum omitir a  $\phi$  da condição (i) da Definição 5.1, sendo reescrita como  $v^2 = \Phi(v).1$ .

**Exemplo 5.7.** Seja  $V$  um  $\mathbb{K}$ -espaço vetorial munido com a forma quadrática identicamente nula  $\Phi \equiv 0$ . A álgebra de Clifford  $Cl(V, \Phi)$  de  $(V, \Phi) = (V, 0)$  é igual a álgebra exterior  $\bigwedge V$ , pois  $Cl(V, \Phi) = T(V)/\langle v \otimes v - \Phi(v).1 \rangle = T(V)/\langle v \otimes v \rangle = \bigwedge V$ .

**Observação 5.8.** Na realidade, se  $V$  é um  $\mathbb{K}$ -espaço com  $\dim V = n < \infty$ , a álgebra  $Cl(V, \Phi)$  é isomorfa, como espaço vetorial, ao espaço  $\bigwedge V = \bigoplus_{k=0}^n \bigwedge^k V$  (veja [72], p. 81).

**Observação 5.9.** Seja  $\mathbf{1} \in Cl(V, \Phi)$  e  $B_\Phi$  a forma bilinear associada com a forma quadrática  $\Phi$ , i.e.,  $\Phi(v) = B_\Phi(v, v)$ . Então  $\Phi(v + u) - \Phi(v) - \Phi(u) = 2B_\Phi(v, u)$ , e pela condição (i) da Definição 5.1, temos que:

$$\{\phi(v), \phi(u)\} = \phi(v)\phi(u) + \phi(u)\phi(v) = 2B_\Phi(v, u).\mathbf{1}. \quad (5.2)$$

O símbolo  $\{\cdot, \cdot\}$  é chamado *anticomutador*<sup>3</sup>. Assim, se  $\dim(V) = n$ , com base ortogonal  $\{e_i\}_{i=1}^n$ , por (5.2) obtemos:

$$\phi(e_i)\phi(e_j) + \phi(e_j)\phi(e_i) = 0, \quad \forall i \neq j. \quad (5.3)$$

**Observação 5.10.** Se  $(Cl(V, \Phi), \phi)$  é a álgebra de Clifford associada ao  $\mathbb{K}$ -espaço quadrático  $(V, \Phi)$ , então existe um único  $\mathbb{K}$ -automorfismo de álgebras  $\alpha : Cl(V, \Phi) \rightarrow Cl(V, \Phi)$ , tal que  $\alpha^2 = Id$  e  $(\alpha \circ \phi)(v) = -\phi(v)$ ,  $\forall v \in V$ . Esse automorfismo é comumente denominado *automorfismo canônico*. Ainda, à essa álgebra está associado um antiautomorfismo  $t : Cl(V, \Phi) \rightarrow Cl(V, \Phi)$ , i.e.,  $t(xy) = t(y)t(x)$ , tal que  $t^2 = Id$  e  $t(v) = v$ , para todos  $v \in V$  e  $x, y \in Cl(V, \Phi)$ , chamado *antiautomorfismo canônico*, e  $t$  comuta com  $\alpha$ , i.e.,  $t \circ \alpha = \alpha \circ t$  (veja [11], p. 55).

**Observação 5.11.** A aplicação composta  $\sigma = t \circ \alpha : Cl(V, \Phi) \rightarrow Cl(V, \Phi)$  é também um antiautomorfismo que será chamado de *conjugação* em  $Cl(V, \Phi)$ . Com isso, podemos definir uma *norma*  $N : Cl(V, \Phi) \rightarrow Cl(V, \Phi)$ , dada por  $N(x) = x\sigma(x)$ .

**Observação 5.12.** A álgebra  $Cl(V, \Phi)$  é  $\mathbb{Z}_2$ -graduada. De fato, considere os espaços:

$$Cl^0(V, \Phi) = \{x \in Cl(V, \Phi) | \alpha(x) = x\} \quad \text{e} \quad Cl^1(V, \Phi) = \{x \in Cl(V, \Phi) | \alpha(x) = -x\},$$

onde  $\alpha$  é o automorfismo canônico. Então o espaço  $Cl(V, \Phi)$  pode ser escrito como a soma direta:

$$Cl(V, \Phi) = Cl^0(V, \Phi) \oplus Cl^1(V, \Phi). \quad (5.4)$$

Agora, se  $x, y \in Cl^0(V, \Phi)$ , então  $\alpha(xy) = xy \Rightarrow xy \in Cl^0(V, \Phi)$ , se  $x \in Cl^0(V, \Phi)$  e  $y \in Cl^1(V, \Phi)$ , então  $\alpha(xy) = -xy \Rightarrow xy \in Cl^1(V, \Phi)$ , se  $x \in Cl^1(V, \Phi)$  e  $y \in Cl^0(V, \Phi)$ , então  $\alpha(xy) = xy \Rightarrow xy \in Cl^0(V, \Phi)$  e se  $x \in Cl^1(V, \Phi)$  e  $y \in Cl^1(V, \Phi)$ , então  $\alpha(xy) = -xy \Rightarrow xy \in Cl^1(V, \Phi)$ , concluímos, assim, que a decomposição (5.4) define uma  $\mathbb{Z}_2$ -graduação em  $Cl(V, \Phi)$ .

**Definição 5.13.** Sejam  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$  álgebras  $\mathbb{Z}_2$ -graduadas com  $\mathcal{A} = \mathcal{A}^0 \oplus \mathcal{A}^1$  e  $\mathcal{B} = \mathcal{B}^0 \oplus \mathcal{B}^1$ . O *super-produto tensorial* de  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$ , denotado por  $\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B}$  é também uma álgebra  $\mathbb{Z}_2$ -graduada com:

$$\begin{aligned} (\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B})^0 &= \mathcal{A}^0 \otimes \mathcal{B}^0 + \mathcal{A}^1 \otimes \mathcal{B}^1, \\ (\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B})^1 &= \mathcal{A}^1 \otimes \mathcal{B}^0 + \mathcal{A}^0 \otimes \mathcal{B}^1, \end{aligned}$$

e com uma multiplicação definida por:

$$(a \otimes b)(a' \otimes b') = (-1)^{gr(b)gr(a')} (aa') \otimes (bb'),$$

onde  $a, a' \in \mathcal{A}$  e  $b, b' \in \mathcal{B}$  são elementos homogêneos.

---

<sup>3</sup>Essa notação é mais comum na física.

**Proposição 5.14.** Sejam  $(V, \Phi_1)$  e  $(W, \Phi_2)$   $\mathbb{K}$ -espaços quadráticos. Então a soma direta desses espaços é um espaço quadrático  $(V \otimes W, \Phi_1 \otimes \Phi_2)$ , com uma forma quadrática dada por:  $(\Phi_1 \otimes \Phi_2)(v, w) = \Phi_1(v) + \Phi_2(w)$ ,  $v \in V$ ,  $w \in W$ . Temos então o seguinte isomorfismo:

$$Cl(V \otimes W, \Phi_1 \oplus \Phi_2) \cong Cl(V, \Phi_1) \hat{\otimes} Cl(W, \Phi_2).$$

*Demonstração.* Considere a aplicação linear  $f : V \otimes W \longrightarrow Cl(V, \Phi_1) \hat{\otimes} Cl(W, \Phi_2)$ , definida por:

$$f(v + w)^2 = \phi_1(v) \otimes 1_W + 1_V \otimes \phi_2(w),$$

onde  $\phi_1 : V \longrightarrow Cl(V, \Phi_1)$  e  $\phi_2 : W \longrightarrow Cl(W, \Phi_2)$  são as aplicações de Clifford e  $1_V \in Cl(V, \Phi_1)$  e  $1_W \in Cl(W, \Phi_2)$  são as identidades. Então:

$$\begin{aligned} f(v + w)^2 &= (\phi_1(v) \otimes 1_W)^2 + (1_V \otimes \phi_2(w))^2 + (\phi_1(v) \otimes \phi_2(w)) - (\phi_1(v) \otimes \phi_2(w)) = \\ &= (\phi_1 \otimes \phi_2)(v + w)(1_V \otimes 1_W). \end{aligned}$$

Pela propriedade universal das álgebras de Clifford,  $f$  é estendida unicamente para um  $\mathbb{K}$ -homomorfismo de álgebras  $\tilde{f} : Cl(V \otimes W, \Phi_1 \oplus \Phi_2) \longrightarrow Cl(V, \Phi_1) \hat{\otimes} Cl(W, \Phi_2)$ .

Agora, considere  $g : Cl(V, \Phi_1) \longrightarrow Cl(V \otimes W, \Phi_1 \oplus \Phi_2)$  e  $h : Cl(W, \Phi_2) \longrightarrow Cl(V \otimes W, \Phi_1 \oplus \Phi_2)$  as aplicações induzidas pelas inclusões  $i_V : V \longrightarrow V \otimes W$  e  $i_W : W \longrightarrow V \otimes W$ , tais que:

$$g \circ \phi_1 = (\phi_3 \circ i_V) \quad \text{e} \quad h \circ \phi_2 = (\phi_3 \circ i_W),$$

onde  $\phi_3$  é a aplicação de Clifford de  $Cl(V \otimes W, \Phi_1 \oplus \Phi_2)$ . Assim temos que:

$$g(v) = (v, 0) \quad \text{e} \quad h(w) = (0, w), \quad \forall v \in V, w \in W.$$

Ou seja, obtemos um  $\mathbb{K}$ -homomorfismo inverso  $\tilde{f}^{-1} : Cl(V, \Phi_1) \hat{\otimes} Cl(W, \Phi_2) \longrightarrow Cl(V \otimes W, \Phi_1 \oplus \Phi_2)$ , dado por:

$$\tilde{f}^{-1}(v \otimes w) = g(v)h(w),$$

e portanto  $f$  é um isomorfismo.  $\square$

**Teorema 5.15.** Seja  $(V, \Phi)$  um  $\mathbb{K}$ -espaço quadrático com  $\dim_{\mathbb{K}} V = n$ , então  $\dim_{\mathbb{K}} Cl(V, \Phi) = 2^n$ .

*Demonstração.* Pelo teorema 1.61, inferimos que forma quadrática  $\Phi$  pode ser escrita como uma soma de  $n$  formas quadráticas unidimensionais  $\Phi_i : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ :

$$\Phi = \Phi_1 \oplus \dots \oplus \Phi_n,$$

mas a álgebra de Clifford de uma forma unidimensional é facilmente calculada: sendo  $Cl^0(\Phi_i) = \mathbb{K}$  e  $Cl^1(\Phi_i) = \mathbb{K}.1$ , com  $\Phi_i(1) = 1^2$ , temos que  $Cl(\Phi_i) = \mathbb{K} \oplus \mathbb{K}.1$ . Portanto  $\dim_{\mathbb{K}} Cl(\Phi_i) = 2$ . Mas isso vale para toda forma unidimensional  $\Phi_i$ , então, pela proposição anterior, temos que:

$$Cl(V, \Phi) = Cl(V, \Phi_1 \oplus \dots \oplus \Phi_n) \cong Cl(\Phi_1) \hat{\otimes} \dots \hat{\otimes} Cl(\Phi_n),$$

implicando que  $\dim Cl(V, \Phi) = 2^n$ .  $\square$

Essa demonstração segue de [26], porém uma outra demonstração utilizando as propriedades de multiplicação dos elementos da base pode ser encontrada em [45], p. 367.

**Corolário 5.16.** *Se  $\{e_1, \dots, e_n\}$  é uma base de  $V$ , o conjunto  $\{\mathbf{1}\} \cup \{e_{j_1} \dots e_{j_k} \mid j_1 \leq j_2 < \dots < j_k \leq n\}$  forma uma base de  $Cl(V, \Phi)$ , onde  $\mathbf{1} \in Cl(V, \Phi)$  é o elemento identidade.*

O conjunto  $\{e_1, \dots, e_n\}$  é comumente chamado *conjunto gerador* da álgebra  $Cl(V, \Phi)$ .

**Observação 5.17.** Considere  $(V, \Phi)$  com  $\dim(V) = n < \infty$ , e com uma base  $\{e_1, \dots, e_n\}$ . Então a conjugação  $\sigma = t \circ \alpha$  fica definida por:

$$\sigma(e_i) = -e_i \quad \text{e} \quad \sigma(e_{j_1} \dots e_{j_k}) = (-1)^k (e_{j_k} \dots e_{j_1}).$$

### 5.3 Álgebras de Clifford dos espaços $(\mathbb{R}^{p,q}, \Phi_{p,q})$

Nesta seção iremos estudar as álgebras de Clifford associadas aos espaços quadráticos reais  $(\mathbb{R}^{p,q}, \Phi_{p,q})$ , munidos com a forma quadrática:

$$\Phi_{p,q}(x) = x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_{p+q}^2, \quad (5.5)$$

com  $p + q = n$ ,  $\forall x = (x_1, \dots, x_p, x_{p+1}, \dots, x_{p+q}) \in \mathbb{R}^{p,q}$ . O par  $(p, q)$  é a *assinatura* de  $\mathbb{R}^{p,q}$ . O Teorema de Sylvester (teorema 1.62) garante que os números  $p$  e  $q$  são independentes da escolha da base de  $\mathbb{R}^{p,q}$ . O espaço  $\mathbb{R}^{p,0}$  é o *espaço euclidiano*  $p$ -dimensional, i.e.,  $\mathbb{R}^{p,0}$  é o espaço  $\mathbb{R}^p$  provido da forma quadrática  $\Phi_{p,0}(x) = x_1^2 + \dots + x_p^2$ , e o espaço  $\mathbb{R}^{0,q}$  é o *espaço antieuclidiano*  $q$ -dimensional, i.e.,  $\mathbb{R}^{0,q}$  pode ser visto como o espaço  $\mathbb{R}^q$  provido da forma quadrática  $\Phi_{0,q}(x) = -x_1^2 - \dots - x_q^2$ .

Na literatura, é comum encontrar várias notações para as álgebras de Clifford de  $(\mathbb{R}^{p,q}, \Phi_{p,q})$ :  $Cl_{p,q} = Cl_{\mathbb{R}}(p, q) = \mathbb{R}_{p,q}$  e  $Cl_{p,0} = Cl_p$ . Neste trabalho iremos adotar a notação  $Cl(\mathbb{R}^{p,q}, \Phi_{p,q}) = Cl_{p,q}$ , e, desde que não haja ambiguidades, iremos nos referir às álgebras  $Cl_{p,q}$  como *álgebra de Clifford reais*.

**Exemplo 5.18.** Considere o espaço euclidiano 1-dimensional  $V = \mathbb{R}$  provido da forma quadrática  $\Phi(x) = x^2$ . Vamos mostrar que  $Cl_{1,0} \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ . Considerando a multiplicação em  $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$  da maneira definida na observação 1.71, concluímos que  $(1, 1)$  é a identidade. Seja  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$  tal que  $\phi(1) = (1, -1)$ , então:

$$\phi(x)^2 = (x \cdot \phi(1))^2 = x^2 \cdot (1, 1) = \Phi(x) \cdot (1, 1).$$

Seja  $\mathcal{A}$  uma  $\mathbb{R}$ -álgebra com identidade  $1_{\mathcal{A}}$  e seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{A}$  linear tal que  $f(x)^2 = \Phi(x) \cdot 1_{\mathcal{A}}$ . Então:

$$f(x) = x \cdot f(1) \Rightarrow f(1)^2 = \Phi(1) \cdot 1_{\mathcal{A}} = 1_{\mathcal{A}}.$$

Considere agora a aplicação  $\tilde{f} : \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{A}$  definida por  $\tilde{f}(x, y) = (x+y) \cdot 1_{\mathcal{A}} - y \cdot f(1)$ , com  $x, y \in \mathbb{R}$ . Então obtemos:

$$\tilde{f}(\phi(x)) = x \cdot \tilde{f}(\phi(1)) = x \cdot \tilde{f}(1, -1) = x \cdot f(1) = f(x),$$

ou seja,  $\tilde{f} \circ \phi = f$ , e como  $Cl_{1,0}$  é única a menos de isomorfismos, concluímos que  $Cl_{1,0} \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ .

**Exemplo 5.19.** Considere o espaço antieuclidiano 1-dimensional  $V = \mathbb{R}^{0,1}$ , i.e., o espaço  $\mathbb{R}$  munido com a forma quadrática  $\Phi(x) = -x^2$ . Então vamos mostrar que  $Cl_{0,1} \cong \mathbb{C}$ . Considere a aplicação  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  dada por  $\phi(x) = ix$ , então  $\phi(x)^2 = x^2 i^2 = -x^2 = \Phi(x) \cdot 1_{\mathbb{C}}$ . Considere uma  $\mathbb{R}$ -álgebra  $\mathcal{A}$  e seja  $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{A}$  uma linear tal que  $\psi^2(x) = \Phi(x) \cdot 1_{\mathcal{A}}$ . Considere agora um  $\mathbb{R}$ -homomorfismo de álgebras  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$  dado por  $f(a + bi) = a + b\psi(1)$ . Temos então que:

$$(f \circ \phi)(x) = f(xi) = x\psi(1) = \psi(x).$$

Por outro lado, sendo  $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{A}$  um  $\mathbb{R}$ -homomorfismo de álgebras tal que  $g \circ \phi = \psi$ , obtemos:

$$g(a + bi) = ag(1) + bg(i) = ag(1) + bg(\phi(1)) = a \cdot 1 + b\psi(1) = f(a + bi).$$

Portanto  $Cl_{0,1} \cong \mathbb{C}$ .

**Exemplo 5.20.** Considere o espaço antieuclidiano 2-dimensional  $V = \mathbb{R}^{0,2}$ , i.e., o espaço  $\mathbb{R}^2$  provido com a forma quadrática  $\Phi(x, y) = -x^2 - y^2$ . Então vamos mostrar que  $Cl_{0,2} \cong \mathbb{H}$ . Considere a aplicação  $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{H}$  tal que  $\phi(x, y) = xi + yj$ . Então:

$$\phi(x, y)^2 = (xi + yj)^2 = -x^2 - y^2 = \Phi(x, y) \cdot 1.$$

Seja  $\mathcal{A}$  uma  $\mathbb{R}$ -álgebra com identidade  $1_{\mathcal{A}}$  e seja  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{A}$  uma linear tal que  $f(x)^2 = \Phi(x) \cdot 1_{\mathcal{A}}$ . Então:

$$f(x, y) = x \cdot f(1, 0) + y \cdot f(0, 1) \Rightarrow f(1, 0)^2 = \Phi(1, 0) \cdot 1_{\mathcal{A}} = -1_{\mathcal{A}} \text{ e}$$

$$f(0, 1)^2 = \Phi(0, 1) \cdot 1_{\mathcal{A}} = -1_{\mathcal{A}}.$$

Considere agora a aplicação  $\tilde{f} : \mathbb{H} \rightarrow \mathcal{A}$  definida por:

$$\tilde{f}(x_0 + x_1i + x_2j + x_3k) = x_0 \cdot 1_{\mathcal{A}} + x_1f(1, 0) + x_2f(0, 1) + x_3f(1, 0)f(0, 1),$$

com  $x_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$ . Então obtemos:

$$\tilde{f}(\phi(x, y)) = x \cdot \tilde{f}(-xi + yj) = x \cdot f(1, 0) + y \cdot f(0, 1) = f(x, y),$$

ou seja,  $\tilde{f} \circ \phi = f$ , e como  $Cl_{0,2}$  é única a menos de isomorfismos, concluímos que  $Cl_{0,2} \cong \mathbb{H}$ .

**Observação 5.21.** Seja  $\{e_1, \dots, e_{p+q}\}$  uma base ortonormal de  $\mathbb{R}^{p,q}$ . Então temos:

$$e_i e_j + e_j e_i = \begin{cases} -2\delta_{ij}, & \text{se } i \leq p; \\ +2\delta_{ij}, & \text{se } i > p. \end{cases}$$

O elemento volume de  $Cl_{p,q}$  associado a qualquer base ortonormal positiva (com respeito à  $\Phi_{p,q}$ )  $\{e_1, \dots, e_{p+q}\}$  de  $\mathbb{R}^{p,q}$  é o elemento definido por  $\omega = e_1 \dots e_{p+q}$ .

**Observação 5.22.** Sejam  $Cl_{p,q}^0$  e  $Cl_{p,q}^1$  os espaços da observação 5.12. Pela  $\mathbb{Z}_2$ -graduação das álgebras de Clifford, escrevemos:

$$Cl_{p,q} = Cl_{p,q}^0 \oplus Cl_{p,q}^1.$$

$Cl_{p,q}^0$  e  $Cl_{p,q}^1$  são chamadas *parte par* e *parte ímpar*, respectivamente, de  $Cl_{p,q}$ , e, a partir de agora, utilizaremos as notações  $Cl_{p,q}^0 = Cl_{p,q}^+$  e  $Cl_{p,q}^1 = Cl_{p,q}^-$  de forma indistinta, uma vez que ambas notações são amplamente utilizadas na literatura.

### 5.3.1 As álgebras de Clifford $Cl_2$ e $Cl_3$

#### I. A álgebra $Cl_2$

Considere  $\{e_1, e_2\}$  uma base ortonormal de  $\mathbb{R}^2$ . Então o conjunto  $\{1, e_1, e_2, e_1e_2\}$ ,  $1 \in \mathbb{R}$ , satisfazendo as regras de multiplicação:

$$e_1^2 = 1, \quad e_2^2 = 1, \quad e_1e_2 = -e_2e_1 \quad \text{e} \quad (e_1e_2)^2 = -1, \quad (5.6)$$

forma uma base para a  $\mathbb{R}$ -álgebra 4-dimensional  $Cl_2$ . Os elementos  $e_1$  e  $e_2$  são vetores em  $\mathbb{R}^2$ , enquanto  $e_1e_2$  é um *bivetor*<sup>4</sup> (veja [47], p. 8), que será denotado por  $e_{12}$ . Assim os elementos  $u \in Cl_2$  podem ser unicamente escritos da forma:

$$u = u_0 + u_1e_1 + u_2e_2 + u_3e_{12}, \quad (5.7)$$

com  $u_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$ .

**Proposição 5.23.** A álgebra  $Cl_2$  é isomorfa à álgebra  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

*Demonstração.* Considere as seguintes matrizes de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ :

$$I_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

O conjunto  $\{I_0, I_1, I_2, I_3\}$  forma uma base para  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ . Sendo  $\{1, e_1, e_2, e_{12}\}$  a base de  $Cl_2$ , fazendo as identificações:

$$1 \simeq I_0, \quad e_1 \simeq I_1, \quad e_2 \simeq I_2, \quad e_{12} \simeq I_3,$$

observamos que essas matrizes multiplicam-se entre si de acordo com a regra de multiplicação (5.6) dos elementos da base de  $Cl_2$ .  $\square$

Temos ainda o isomorfismo  $Cl_2 \cong Cl_{1,1}$  (veja [72], p. 118). Pela observação 5.8, *como espaço vetorial*,  $Cl_2$  pode ser escrito como a soma direta:

$$Cl_2 = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^2 \oplus \bigwedge^2 \mathbb{R}^2. \quad (5.8)$$

---

<sup>4</sup>Também denotado por  $e_1 \wedge e_2$ .

Sendo  $Cl_2$  uma álgebra  $\mathbb{Z}_2$ -graduada,  $Cl_2 = Cl_2^+ \oplus Cl_2^-$ , podemos identificar a parte par e a parte ímpar, como subespaços, com a decomposição (5.8) da forma:  $Cl_2^+ = \mathbb{R} \oplus \bigwedge^2 \mathbb{R}^2$  e  $Cl_2^- = \mathbb{R}^2$ .

A decomposição (5.8) é única, por isso os elementos  $u \in Cl_2$  podem ser escritos unicamente como:

$$u = \langle u \rangle_0 + \langle u \rangle_1 + \langle u \rangle_2, \quad \langle u \rangle_k \in \bigwedge^k \mathbb{R}^2, \quad k = 0, 1, 2. \quad (5.9)$$

Comparando as identidades (5.7) e (5.9), concluímos que  $u_0 = \langle u \rangle_0 \in \mathbb{R}$ ,  $(u_0 e_1 + u_2 e_2) = \langle u \rangle_1 \in \mathbb{R}^2$  e  $u_3 e_{12} = \langle u \rangle_2 \in \bigwedge^2 \mathbb{R}^2$ .

**Observação 5.24.** A álgebra de Clifford  $Cl_2$  possui três involuções, a saber:

- (i) *Involução Graduada*:  $\hat{u} = \langle u \rangle_0 - \langle u \rangle_1 + \langle u \rangle_2$ ,
- (ii) *Reversão*:  $\tilde{u} = \langle u \rangle_0 + \langle u \rangle_1 - \langle u \rangle_2$ ,
- (iii) *Conjugação de Clifford*:  $\bar{u} = \langle u_0 \rangle - \langle u \rangle_1 - \langle u \rangle_2$ .

A involução graduada é um automorfismo, pois  $\hat{u}\hat{v} = \hat{u}\hat{v}$ , enquanto a reversão e a conjugação de Clifford são antiautomorfismos, pois  $\tilde{u}\tilde{v} = \tilde{v}\tilde{u}$  e  $\bar{u}\bar{v} = \bar{v}\bar{u}$ .

## II. A álgebra $Cl_3$

Considere  $\{e_1, e_2, e_3\}$  uma base ortonormal do espaço euclidiano  $\mathbb{R}^3$ . Então o conjunto  $\{1, e_1, e_2, e_3, e_{12}, e_{13}, e_{23}, e_{123}\}$ ,  $1 \in \mathbb{R}$ ,  $e_{123} = e_1 e_2 e_3$ , cujos elementos são tais que:

$$\begin{aligned} e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = 1, \quad e_{12}^2 = e_{13}^2 = e_{23}^2 = e_{123}^2 = -1, \quad e_{ij} = -e_{ji}, \\ e_{123} e_i = e_i e_{123}, \end{aligned} \quad (5.10)$$

para todos  $i \neq j$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ , forma uma base para a  $\mathbb{R}$ -álgebra 8-dimensional  $Cl_3$ . Os elementos  $e_1, e_2$  e  $e_3$  são vetores em  $\mathbb{R}^3$ , enquanto  $e_{12}, e_{13}$  e  $e_{23}$  são bivetores e  $e_{123}$  é um *trivector*<sup>5</sup> (ou elemento volume). Assim os elementos  $u \in Cl_3$  podem ser unicamente escritos da forma:

$$u = u_0 + u_1 e_1 + u_2 e_2 + u_3 e_3 + u_4 e_{12} + u_5 e_{13} + u_6 e_{23} + u_7 e_{123}, \quad (5.11)$$

com  $u_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, 7$ . A tabela de multiplicação de  $Cl_3$  foi calculada e colocada na Tabela A.12 (Apêndice A). Observe que para calcular essa tabela, basta sabermos as regras (5.10), lembrar da definição  $e_{ij} = e_i e_j$ ,  $i \neq j$ , e utilizar o fato de  $Cl_3$  ser associativa. Por exemplo,  $e_{12} e_{13} = e_1 e_2 e_1 e_3 = -e_2 e_1^2 e_3 = -e_2 e_3$ .

A álgebra de Clifford  $Cl_3$  é também conhecida como *álgebra de Pauli*<sup>6</sup>, devido ela ser isomorfa à álgebra das matrizes complexas  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ , a qual possui uma base formada pelas matrizes de Pauli,  $\sigma_1, \sigma_2$  e  $\sigma_3$  (observação 1.64). Vamos ver agora que, de fato, temos um isomorfismo de álgebras  $Cl_3 \cong \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ .

Seja  $I_0$  a matriz identidade  $2 \times 2$ , então as matrizes de Pauli satisfazem as regras:

<sup>5</sup>Ou 3-vetor, e também é denotado por  $e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$ .

<sup>6</sup>Às vezes chamada de *álgebra do espaço físico*.

$$\begin{aligned}
\sigma_j \sigma_k + \sigma_k \sigma_j &= 2\delta_{jk} I_0, \\
\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 &= I_0, \\
\sigma_1 \sigma_2 &= i\sigma_3 = -\sigma_2 \sigma_1, \\
\sigma_3 \sigma_1 &= i\sigma_2 = -\sigma_1 \sigma_3, \\
\sigma_2 \sigma_3 &= i\sigma_1 = -\sigma_3 \sigma_2.
\end{aligned} \tag{5.12}$$

para  $j, k = 1, 2, 3$ . Considere agora o conjunto:

$$\{I_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_1 \sigma_2, \sigma_1 \sigma_3, \sigma_2 \sigma_3, \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3\}. \tag{5.13}$$

Esse conjunto forma uma base para  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ . Obtemos, então, um isomorfismo de álgebras  $Cl_3 \cong \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  fazendo as correspondências:

$$\begin{aligned}
1 \simeq I_0, \quad e_1 \simeq \sigma_1, \quad e_2 \simeq \sigma_2, \quad e_3 \simeq \sigma_3, \quad e_{12} \simeq \sigma_1 \sigma_2, \\
e_{13} \simeq \sigma_1 \sigma_3, \quad e_{23} \simeq \sigma_2 \sigma_3, \quad e_{123} \simeq \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3,
\end{aligned} \tag{5.14}$$

Podemos também verificar que a tabela de multiplicação de (5.13) é semelhante a tabela de multiplicação A.12.

**Observação 5.25.** Analogamente ao que vimos anteriormente para  $Cl_2$ , como espaço vetorial,  $Cl_3$  pode ser escrita como uma soma direta:

$$Cl_3 = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^3 \oplus \bigwedge^2 \mathbb{R}^3 \oplus \bigwedge^3 \mathbb{R}^3. \tag{5.15}$$

A partir da  $\mathbb{Z}_2$ -graduação  $Cl_3 = Cl_3^+ \oplus Cl_3^-$ , identificamos a parte par e a parte ímpar, como subespaços, com a decomposição (5.15) como segue:  $Cl_3^+ = \mathbb{R} \oplus \bigwedge^2 \mathbb{R}^3$  e  $Cl_3^- = \mathbb{R}^3 \oplus \bigwedge^3 \mathbb{R}^3$ .

Da mesma maneira que vimos para  $Cl_2$ , os elementos  $u \in Cl_3$  podem ser escritos unicamente como:

$$u = \langle u \rangle_0 + \langle u \rangle_1 + \langle u \rangle_2 + \langle u \rangle_3, \quad \langle u \rangle_k \in \bigwedge^k \mathbb{R}^3, \quad k = 0, 1, 2, 3, \tag{5.16}$$

sendo, portanto,  $\langle u \rangle_0$  um escalar,  $\langle u \rangle_1$  um vetor,  $\langle u \rangle_2$  um bivetor e  $\langle u \rangle_3$  um elemento volume.

**Observação 5.26.** Da mesma forma que a álgebra  $Cl_2$ , a álgebra  $Cl_3$  possui três involuções, a saber, a involução graduada, a reversão e a conjugação de Clifford, dadas, respectivamente, por:  $\hat{u} = \langle u \rangle_0 - \langle u \rangle_1 + \langle u \rangle_2 - \langle u \rangle_3$ ,  $\tilde{u} = \langle u \rangle_0 + \langle u \rangle_1 - \langle u \rangle_2 - \langle u \rangle_3$  e  $\bar{u} = \langle u_0 \rangle - \langle u \rangle_1 - \langle u \rangle_2 + \langle u \rangle_3$ , com  $\langle u \rangle_k \in \bigwedge^k \mathbb{R}^3$ .

**Observação 5.27.** As álgebras  $Cl_{p,q}$  possuem a mesma decomposição em soma direta, como espaços vetoriais, que  $Cl_n$ , ou seja:

$$Cl_{p,q} = \bigoplus_{k=0}^{p+q} \bigwedge^k \mathbb{R}^{p+q},$$

assim, em geral, podemos escrever a *involução* graduada em  $Cl_{p,q}$  por  $\hat{u} = \sum_{k=0}^{p+q} (-1)^k \langle u \rangle_k$ , com  $\langle u \rangle_k \in \bigwedge^k \mathbb{R}^{p+q}$ .

Abaixo, listamos alguns dos isomorfismos das álgebras de Clifford que temos visto até agora com algumas álgebras hipercomplexas vistas nos capítulos precedentes:

$$\begin{aligned} Cl_{0,1} &\cong \mathbb{C} \text{ (álgebra dos complexos)} \\ Cl_{1,0} &\cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \cong \mathbb{C}' \text{ (álgebra dos split-complexos)} \\ Cl_{2,0} &\cong Cl_{1,1} \cong \mathbb{H}' \text{ (álgebra dos split-quaternions)} \\ Cl_{0,2} &\cong \mathbb{H} \text{ (álgebra dos quaternions)} \\ Cl_{3,0} &\cong \mathbb{C} \otimes \mathbb{H} \cong \mathbb{H}_{\mathbb{C}} \text{ (álgebra dos biquaternions)} \end{aligned}$$

### 5.3.2 A álgebra do espaço-tempo de Minkowski

**Definição 5.28.** Seja  $V$  um  $\mathbb{R}$ -espaço vetorial 4-dimensional, e seja  $\eta : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  uma métrica de assinatura  $(1, 3)$ . O par  $(V, \eta)$  é chamado *espaço vetorial de Minkowski*<sup>7</sup>, e é denotado por  $\mathbb{R}^{1,3}$ .

**Observação 5.29.** Existe uma base ortonormal  $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$  de  $\mathbb{R}^{1,3}$  tal que:

$$\eta(e_\mu, e_\nu) = \eta(e_\nu, e_\mu) = \eta_{\mu\nu} = \begin{cases} 1, & \text{se } \mu = \nu = 0; \\ -1, & \text{se } \mu = \nu = 1, 2, 3; \\ 0, & \text{se } \mu \neq \nu. \end{cases}$$

Também podemos escrever  $\eta_{\mu\nu}$  como uma matriz diagonal:  $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$  (explicitando, assim, a assinatura).

**Definição 5.30.** Seja  $v \in \mathbb{R}^{1,3}$ , então dizemos que  $v$  é *tipo-espaço* se  $v^2 < 0$  ou  $v = 0$  e  $v$  é *tipo-tempo* se  $v^2 > 0$ . Ainda,  $v$  é dito *tipo-luz* se  $v^2 = 0$ , com  $v \neq 0$ .

A álgebra de Clifford  $Cl_{1,3}$  do espaço vetorial de Minkowski  $\mathbb{R}^{1,3}$  é conhecida como *álgebra do espaço-tempo* (AET).  $Cl_{1,3}$  é uma  $\mathbb{R}$ -álgebra 16-dimensional e se  $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$  é uma base ortogonal de  $\mathbb{R}^{1,3}$ , então o conjunto  $\{1, e_1, e_2, e_3, e_4, e_{12}, e_{13}, e_{14}, e_{23}, e_{24}, e_{34}, e_{123}, e_{124}, e_{134}, e_{234}, e_{1234}\}$  cujos elementos satisfazem:

$$\begin{aligned} e_1^2 &= +1, \quad e_2^2 = e_3^2 = e_4^2 = -1, \\ e_i e_j + e_j e_i &= 0, \quad (i \neq j), \\ e_{1234}^2 &= -1, \quad \text{e} \quad e_{1234} e_i = -e_i e_{1234}, \end{aligned} \tag{5.17}$$

para todos  $i, j = 1, 2, 3, 4$ , forma uma base para  $Cl_{1,3}$ . Essa base é constituída por um escalar  $\{1\}$ , quatro vetores  $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ , seis bivetores  $\{e_{12}, e_{13}, e_{14}, e_{23}, e_{24}, e_{34}\}$ , quatro trivetores  $\{e_{123}, e_{134}, e_{124}, e_{234}\}$  e um elemento volume  $\{e_{1234}\}$ .

<sup>7</sup>Hermann Minkowski (1864 - 1909) foi uma matemático alemão.

Como a álgebra  $Cl_{1,3}$  é isomorfa à álgebra das matrizes  $\mathcal{M}_2(\mathbb{H})$ , podemos achar uma base de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{H})$  correspondente à base de  $Cl_{1,3}$  descrita acima. Tal base é gerada por um conjunto de quatro matrizes quaterniônicas  $2 \times 2$ ,  $\{\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$ , dadas por:

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & j \\ j & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & k \\ k & 0 \end{pmatrix},$$

onde  $i, j, k$  são as unidades imaginárias dos quaternions. Vamos denotar a multiplicação dessas matrizes da seguinte maneira:  $\gamma_i \gamma_j = \gamma_{ij}$ ,  $\gamma_i \gamma_j \gamma_k = \gamma_{ijk}$  e  $\gamma_i \gamma_j \gamma_k \gamma_l = \gamma_{ijkl}$ . O conjunto

$$\{I_0, \gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_{01}, \gamma_{02}, \gamma_{03}, \gamma_{12}, \gamma_{13}, \gamma_{23}, \gamma_{012}, \gamma_{023}, \gamma_{013}, \gamma_{123}, \gamma_{0123}\}, \quad (5.18)$$

onde  $I_0$  é a matriz identidade  $2 \times 2$ , forma uma base para  $\mathcal{M}_2(\mathbb{H})$ . O elemento  $\gamma_{0123}$  é o *elemento volume*. Essas matrizes satisfazem as relações:

$$\begin{aligned} \gamma_0^2 &= +1, \quad \gamma_1^2 = \gamma_2^2 = \gamma_3^2 = -1, \quad \gamma_i \gamma_j = -\gamma_j \gamma_i, \quad (i \neq j), \\ \{\gamma_i, \gamma_j\} &= \gamma_i \gamma_j + \gamma_j \gamma_i = 2\eta_{ij}, \\ \gamma_{0123}^2 &= -1 \quad \text{e} \quad \gamma_{0123} \gamma_i = -\gamma_i \gamma_{0123}, \end{aligned} \quad (5.19)$$

para todos  $i, j = 0, 1, 2, 3$ . Obtemos o isomorfismo  $Cl_{1,3} \cong \mathcal{M}_2(\mathbb{H})$  fazendo as correspondências:

$$\begin{aligned} e_1 &\simeq \gamma_0, \quad e_2 \simeq \gamma_1, \quad e_3 \simeq \gamma_2, \quad e_4 \simeq \gamma_3, \quad e_{12} \simeq \gamma_{01}, \quad e_{13} \simeq \gamma_{02}, \quad e_{14} \simeq \gamma_{03}, \quad e_{23} \simeq \gamma_{12}, \\ e_{24} &\simeq \gamma_{13}, \quad e_{34} \simeq \gamma_{23}, \quad e_{123} \simeq \gamma_{012}, \quad e_{124} \simeq \gamma_{013}, \quad e_{134} \simeq \gamma_{023}, \quad e_{234} \simeq \gamma_{123}, \quad e_{1234} \simeq \gamma_{0123}. \end{aligned}$$

Assim podemos estudar a AET através das propriedades das matrizes  $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$  e  $\gamma_3$ .

**Observação 5.31.** A complexificação da álgebra do espaço-tempo é isomorfa à *álgebra de Dirac*<sup>8</sup>,  $Cl_{4,1}$ , ou seja:

$$Cl_{4,1} \cong \mathbb{C} \otimes Cl_{1,3} \cong \mathcal{M}_4(\mathbb{C}).$$

Mencionamos também que a álgebra  $Cl_{3,1}$  é conhecida como *álgebra de Majorana*<sup>9</sup>, e que  $Cl_{3,1} \cong \mathcal{M}_4(\mathbb{R}) \cong \mathbb{H} \otimes \mathbb{H}$ .

Para mais detalhes sobre essa álgebra e suas aplicações na Física o leitor pode consultar também [38].

### 5.3.3 Processo de duplicação para álgebras de Clifford reais

Vamos ver agora que as álgebras de Clifford do espaço  $\mathbb{R}^{p,q}$  podem ser obtidas por um processo de duplicação semelhante ao processo de Cayley-Dickson descrito no capítulo anterior. Considere a álgebra  $Cl_{p,q}$  e considere pares da forma  $(u, v)$  com  $u, v \in Cl_{p,q}$ . Defina a multiplicação de tais pares da seguinte forma:

<sup>8</sup>Paul Adrien Maurice Dirac (1902 - 1984) foi um físico teórico inglês.

<sup>9</sup>Ettore Majorana (1906 - desconhecido) foi um físico teórico italiano.

$$(u_1, u_2)(u_3, u_4) = (u_1 u_3 + \gamma u_2 \hat{u}_4, u_1 u_4 + u_2 \hat{u}_3), \quad (5.20)$$

onde  $\gamma = \pm 1$  e  $\hat{u}$  denota a involução graduada de  $Cl_{p,q}$ . O conjunto dos pares  $(u, v)$  munido com a multiplicação (5.20) define uma álgebra que é isomorfa à álgebra  $Cl_{p+1,q}$  se  $\gamma = 1$ , e é isomorfa à álgebra  $Cl_{p,q+1}$  se  $\gamma = -1$ .

Esse processo pode ser repetido fazendo  $(u, v)\hat{\cdot} = (\hat{u}, -\hat{v})$ . A partir de agora vamos chamar as álgebras obtidas por esse processo de *álgebras de Clifford reais generalizadas*, e as denotaremos por  $Cl_{\alpha,\beta}(\gamma)$ , com  $\alpha = p + 1$  e  $\beta = q$ , se  $\gamma = 1$  e  $\alpha = p$  e  $\beta = q + 1$ , se  $\gamma = -1$ , com  $\alpha + \beta = n$ .

## 5.4 Classificação das álgebras de Clifford

Nesta parte iremos fornecer a completa classificação das álgebras de Clifford reais e complexas.

### 5.4.1 Álgebras de Clifford reais

**Proposição 5.32.** *Para todos inteiros positivos  $m$  e  $n$ , e para  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  ou  $\mathbb{H}$ , temos os seguintes isomorfismos:*

$$\mathcal{M}_{nm}(\mathbb{R}) \cong \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{M}_m(\mathbb{R}), \quad (5.21)$$

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{K} \cong \mathcal{M}_n(\mathbb{K}). \quad (5.22)$$

*Demonstração.* A demonstração pode ser encontrada em [46] p. 27.  $\square$

**Proposição 5.33.** *Os seguintes  $\mathbb{R}$ -isomorfismos de álgebras existem para todos inteiros  $n, p, q \geq 0$ :*

$$Cl_{n,0} \otimes Cl_{0,2} \cong Cl_{0,n+2}, \quad (5.23)$$

$$Cl_{0,n} \otimes Cl_{2,0} \cong Cl_{n+2,0}, \quad (5.24)$$

$$Cl_{p,q} \otimes Cl_{1,1} \cong Cl_{p+1,q+1}. \quad (5.25)$$

*Demonstração.* Vamos provar o isomorfismo (5.23), o segundo isomorfismo (5.24) segue de forma análoga (consulte também [46], p. 25). Seja  $\Phi_{0,n+2}(x) = -||x||^2$ , onde  $||\cdot||$  é a norma euclidiana de  $\mathbb{R}^{n+2}$ , e seja  $\{e_1, \dots, e_{n+2}\}$  uma base ortonormal de  $\mathbb{R}^{n+2}$  com respeito ao produto interno usual. Seja  $\{e'_1, \dots, e'_n\}$  o conjunto gerador da álgebra  $Cl_{n,0}$  e seja  $\{e''_1, e''_2\}$  o conjunto gerador da álgebra  $Cl_{0,2}$ . Podemos definir uma linear  $f : \mathbb{R}^{n+2} \rightarrow Cl_{n,0} \otimes Cl_{0,2}$  através da sua ação na base  $\{e_1, \dots, e_{n+2}\}$  da seguinte forma:

$$f(e_i) = \begin{cases} e'_i \otimes e''_1 e''_2, & \text{para } 1 \leq i \leq n, \\ 1 \otimes e_{i-n}, & \text{para } n+1 \leq i \leq n+2. \end{cases}$$

Observe que para  $1 \leq i, j \leq n$ , temos:

$$f(e_i)f(e_j) + f(e_j)f(e_i) = (e'_j e'_j - e'_j e'_i) \otimes (e''_j e''_2)^2 = -2\delta_{ij}(1 \otimes 1),$$

desde que  $e'_1 e'_2 = -e'_2 e'_1$ ,  $e''_1 e''_2 = -e''_2 e''_1$  e  $(e''_1)^2 = (e''_2)^2 = -1$ , para todos  $i \neq j$  e  $(e'_i)^2 = -1$ , para todo  $1 \leq i \leq n$ . Além disso, para  $n+1 \leq i \leq n+2$ , temos:

$$f(e_i)f(e_j) + f(e_j)f(e_i) = 1 \otimes (e'_j e'_j - e'_j e'_i) = -2\delta_{ij}(1 \otimes 1),$$

e

$$f(e_i)f(e_k) + f(e_k)f(e_i) = 2e'_i \otimes (e''_1 e''_2 e''_{n-k} - e''_{n-k} e''_1 e''_2) = 0,$$

para  $1 \leq i, j \leq n$  e  $n+1 \leq k \leq n+2$  (desde que  $e''_{n-k} = e''_1$  ou  $e''_{n-k} = e''_2$ ). Assim temos que  $f(x)^2 = -\|x\|^2 \cdot (1 \otimes 1)$ , para todos  $x \in \mathbb{R}^2$ , e pela propriedade universal da álgebra  $Cl_{0,n+2}$ , existe uma linear  $\tilde{f} : Cl_{0,n+2} \rightarrow Cl_{n,0} \otimes Cl_{0,2}$ , e, desde que  $\tilde{f}$  mapeie um conjunto de geradores, ela é sobrejetiva. Mais ainda, pelo teorema 5.15, obtemos:

$$\dim Cl_{0,n+2} = 2^{n+2} = 2^n \cdot 2^2 = \dim Cl_{n,0} \cdot \dim Cl_{0,2} = \dim(Cl_{n,0} \otimes Cl_{0,2}),$$

e, por conseguinte, concluímos que  $\tilde{f}$  é, deveras, um isomorfismo.

Vamos provar agora o terceiro isomorfismo (5.25). Considere  $\{e_1, \dots, e_{p+1}, \epsilon_1, \dots, \epsilon_{q+1}\}$  uma base ortogonal de  $\mathbb{R}^{p+1,q+1}$  tal que  $\Phi_{p+1,q+1}(e_i) = +1$  e  $\Phi_{p+1,q+1}(\epsilon_j) = -1$ , para todos  $i = 1, \dots, p+1$  e  $j = 1, \dots, q+1$ . Seja  $\{e'_1, \dots, e'_p, \epsilon'_1, \dots, \epsilon'_q\}$  o conjunto gerador de  $Cl_{p,q}$  e seja  $\{e''_1, \epsilon''_1\}$  o conjunto gerador de  $Cl_{1,1}$ . Vamos definir uma aplicação  $f : \mathbb{R}^{p+1,q+1} \rightarrow Cl_{p,q} \otimes Cl_{1,1}$  através da sua ação na base  $\{e_1, \dots, e_{p+1}, \epsilon_1, \dots, \epsilon_{q+1}\}$  da seguinte forma:

$$f(e_i) = \begin{cases} e'_i \otimes e''_1 \epsilon''_1, & \text{para } 1 \leq i \leq p, \\ 1 \otimes e''_1, & \text{para } i = p+1, \end{cases}$$

e

$$f(\epsilon_j) = \begin{cases} \epsilon'_j \otimes e''_1 \epsilon''_1, & \text{para } 1 \leq j \leq q, \\ 1 \otimes \epsilon''_1, & \text{para } j = q+1. \end{cases}$$

Assim podemos ver que  $f(x)^2 = \Phi_{p+1,q+1}(x) \cdot (1 \otimes 1)$ , para todos  $x \in \mathbb{R}^{p+1,q+1}$ , e concluímos a prova da mesma forma que fizemos para o isomorfismo anterior.  $\square$

Essa demonstração seguiu as linhas de [29], p. 34. Temos ainda um resultado mais geral cuja demonstração será omitida:

**Teorema 5.34.** *Os seguintes  $\mathbb{R}$ -isomorfismos de álgebras existem para todos inteiros  $p, q > 0$ :*

$$Cl_{2,0} \otimes Cl_{p,q} \cong Cl_{q+2,q}, \quad (5.26)$$

$$Cl_{0,2} \otimes Cl_{p,q} \cong Cl_{q,p+2}. \quad (5.27)$$

*Demonstração.* A demonstração pode ser encontrada em [72], p. 111.  $\square$

**Exemplo 5.35.** Utilizando os isomorfismos  $\mathbb{H} \cong Cl_{0,2}$ ,  $Cl_{2,0} \cong \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ,  $Cl_{4,0} \cong \mathcal{M}_2(\mathbb{H})$  (ver [47], p. 86), a Proposição 5.32 e a Proposição 5.33, obtemos que:

$$Cl_{0,4} \cong \mathbb{H} \otimes \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \cong \mathcal{M}_2(\mathbb{H}) \cong Cl_{4,0}.$$

Disso, concluímos que:

$$\begin{aligned} Cl_{0,8} &\cong \mathcal{M}_2(\mathbb{H}) \otimes \mathcal{M}_2(\mathbb{H}) \cong \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{H} \otimes \mathbb{H} \otimes \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \cong \\ &\cong \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{M}_4(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \cong \mathcal{M}_{16}(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Resumimos na tabela a seguir alguns importantes isomorfismos, alguns dos quais temos visto:

$Cl_{1,0} \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$	$Cl_{0,1} \cong \mathbb{C}$
$Cl_{2,0} \cong \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$	$Cl_{0,2} \cong \mathbb{H}$
$Cl_{3,0} \cong \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$	$Cl_{0,3} \cong \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$
$Cl_{4,0} \cong \mathcal{M}_2(\mathbb{H})$	$Cl_{0,4} \cong \mathcal{M}_2(\mathbb{H})$
$Cl_{5,0} \cong \mathcal{M}_2(\mathbb{H}) \oplus \mathcal{M}_2(\mathbb{H})$	$Cl_{0,5} \cong \mathcal{M}_4(\mathbb{C})$
$Cl_{6,0} \cong \mathcal{M}_4(\mathbb{H})$	$Cl_{0,6} \cong \mathcal{M}_8(\mathbb{R})$
$Cl_{7,0} \cong \mathcal{M}_8(\mathbb{C})$	$Cl_{0,7} \cong \mathcal{M}_8(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{M}_8(\mathbb{R})$
$Cl_{8,0} \cong \mathcal{M}_{16}(\mathbb{R})$	$Cl_{0,8} \cong \mathcal{M}_{16}(\mathbb{R})$

**Proposição 5.36.** Para inteiros  $p, q \geq 0$ , temos o seguinte  $\mathbb{R}$ -isomorfismo de álgebras:

$$Cl_{p+8,q} \cong Cl_{p,q} \otimes \mathcal{M}_{16}(\mathbb{R}). \quad (5.28)$$

*Demonstração.* Pela Proposição 5.33 temos que  $Cl_{0,4} \cong Cl_{0,2} \otimes Cl_{2,0}$ . Pelo teorema 5.34, obtemos o seguinte isomorfismo:

$$\begin{aligned} Cl_{0,4} \otimes Cl_{p,q} &\cong (Cl_{0,2} \otimes Cl_{2,0}) \otimes Cl_{p,q} \cong \\ &\cong Cl_{0,2} \otimes (Cl_{2,0} \otimes Cl_{p,q}) \cong Cl_{0,2} \otimes Cl_{q+2,p} \cong Cl_{p,q+4}. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Com esse resultado, e agindo de maneira análoga para  $Cl_{0,8}$ , obtemos o seguinte isomorfismo:

$$Cl_{0,8} \otimes Cl_{p,q} \cong Cl_{p,q+8}. \quad (5.30)$$

Logo, substituindo  $Cl_{0,8} \cong \mathcal{M}_{16}(\mathbb{R})$  em (5.30), concluímos que  $Cl_{p+8,q} \cong Cl_{p,q} \otimes \mathcal{M}_{16}(\mathbb{R})$ .  $\square$

Temos ainda o seguinte teorema, também chamado *teorema da 8-periodicidade de Cartan-Bott*<sup>10</sup>.

**Teorema 5.37.** (Cartan-Bott) Seja um inteiro  $n \geq 0$ , então temos os seguintes  $\mathbb{R}$ -isomorfismos de álgebras:

$$Cl_{n+8,0} \cong Cl_{n,0} \otimes Cl_{8,0}, \quad (5.31)$$

$$Cl_{0,n+8} \cong Cl_{0,n} \otimes Cl_{0,8}. \quad (5.32)$$

<sup>10</sup>Raoul Bott (1923 - 2005) foi um matemático húngaro-americano.

*Demonstração.* Pela Proposição 5.33, temos que:

$$\begin{aligned} Cl_{n+8,0} &\cong Cl_{0,n+6} \otimes Cl_{2,0} \cong Cl_{n,0} \otimes Cl_{0,2} \otimes Cl_{2,0} \otimes Cl_{0,2} \otimes Cl_{2,0} \\ &\cong Cl_{n,0} \otimes Cl_{4,0} \otimes Cl_{0,2} \otimes Cl_{2,0} \cong Cl_{n,0} \otimes Cl_{8,0}. \end{aligned}$$

O processo é análogo para  $Cl_{0,n+8}$ .  $\square$

Através dos isomorfismos e dos teoremas que temos visto, podemos construir a seguinte tabela:

$p - q \equiv x \pmod{8}$	$Cl_{p,q}$ ( $n = p + q$ )
0	$\mathcal{M}(2^{\lceil \frac{n}{2} \rceil}, \mathbb{R})$
1	$\mathcal{M}(2^{\lceil \frac{n}{2} \rceil}, \mathbb{R}) \oplus \mathcal{M}(2^{\lceil \frac{n}{2} \rceil}, \mathbb{R})$
2	$\mathcal{M}(2^{\lceil \frac{n}{2} \rceil}, \mathbb{R})$
3	$\mathcal{M}(2^{\lceil \frac{n}{2} \rceil}, \mathbb{C})$
4	$\mathcal{M}(2^{\lceil \frac{n}{2} \rceil-1}, \mathbb{H})$
5	$\mathcal{M}(2^{\lceil \frac{n}{2} \rceil-1}, \mathbb{H}) \oplus \mathcal{M}(2^{\lceil \frac{n}{2} \rceil-1}, \mathbb{H})$
6	$\mathcal{M}(2^{\lceil \frac{n}{2} \rceil-1}, \mathbb{H})$
7	$\mathcal{M}(2^{\lceil \frac{n}{2} \rceil}, \mathbb{C})$

A notação  $\lceil \frac{n}{2} \rceil$  representa a parte inteira de  $\frac{n}{2}$ . Um diagrama mnemônico da classificação das álgebras de Clifford reais é apresentado na Figura A.2 (Apêndice A). Esse diagrama é conhecido como *relógio de Clifford* (ou *relógio spinorial*).

### 5.4.2 Álgebras de Clifford complexas

Até agora temos classificado apenas as álgebras de Clifford reais. Vamos a partir de agora considerar as *álgebras de Clifford complexas*, i.e., as álgebras de Clifford associadas a  $\mathbb{C}$ -espaços quadráticos n-dimensionais munidos com uma forma quadrática dada por:

$$\Phi_n^{\mathbb{C}}(z) = z_1^2 + \dots + z_n^2. \quad (5.33)$$

Podemos escrever a forma quadrática dessa forma devido a existência de uma base ortonormal para esses espaços. Notamos também que para todo inteiro  $n = p + q \geq 0$ , a complexificação da álgebra  $Cl_n$  é isomorfa à álgebra  $Cl(\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^n, \Phi_n^{\mathbb{C}})$ , ou seja, temos o seguinte isomorfismo de álgebras:

$$Cl(\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^n, \Phi_n^{\mathbb{C}}) \cong \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} Cl_n. \quad (5.34)$$

Uma prova disso pode ser encontrada em [36], p. 191. A partir de agora vamos denotar  $Cl(\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^n, \Phi_n^{\mathbb{C}}) = Cl(n, \mathbb{C})$ .

**Teorema 5.38.** *Para  $n \geq 0$ , temos o seguinte  $\mathbb{C}$ -isomorfismo de álgebras:*

$$Cl(n+2, \mathbb{C}) \cong Cl(n, \mathbb{C}) \otimes_{\mathbb{C}} Cl(2, \mathbb{C}). \quad (5.35)$$

*Demonstração.* Como  $Cl(n, \mathbb{C}) \cong \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} Cl_{n,0} \cong \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} Cl_{0,n}$ , pela Proposição 5.33 temos que:

$$\begin{aligned} Cl(n+2, \mathbb{C}) &\cong \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} Cl_{0,n+2} \cong \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} (Cl_{n,0} \otimes_{\mathbb{R}} Cl_{0,2}) \cong \\ &\cong (\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} Cl_{n,0}) \otimes_{\mathbb{C}} (\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} Cl_{0,2}) = Cl(n, \mathbb{C}) \otimes_{\mathbb{C}} Cl(2, \mathbb{C}). \end{aligned}$$

□

Ainda, vimos anteriormente que  $Cl_{0,2} \cong \mathbb{H}$  e  $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} \cong \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ , portanto concluímos que  $Cl(2, \mathbb{C}) \cong \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ .

**Corolário 5.39.** *Para  $k \geq 0$ , temos os seguintes isomorfismos:*

$$Cl(2k, \mathbb{C}) \cong \mathcal{M}_{2^k}(\mathbb{C}) \quad \text{e} \quad Cl(2k+1, \mathbb{C}) \cong \mathcal{M}_{2^k}(\mathbb{C}) \oplus \mathcal{M}_{2^k}(\mathbb{C}). \quad (5.36)$$

*Demonstração.* Vamos provar o segundo isomorfismo por indução em  $k$ . Para  $k=1$  temos que:

$$\begin{aligned} Cl(3, \mathbb{C}) &\cong Cl(1+2, \mathbb{C}) \cong Cl(1, \mathbb{C}) \otimes_{\mathbb{C}} Cl(2, \mathbb{C}) \cong \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} Cl_{0,1} \otimes \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \cong \\ &\cong (\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \oplus \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \cong \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \oplus \mathcal{M}_2(\mathbb{C}). \end{aligned}$$

Suponha agora que isso vale para  $k$ , então para  $k+1$ :

$$\begin{aligned} Cl(2k+1, \mathbb{C}) &\cong Cl(2k+3, \mathbb{C}) \cong Cl((2k+1)+2, \mathbb{C}) \cong Cl(2k+1, \mathbb{C}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \cong \\ &\cong (\mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \oplus \mathcal{M}_2(\mathbb{C})) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \cong \mathcal{M}_{2^{k+1}}(\mathbb{C}) \oplus \mathcal{M}_{2^{k+1}}(\mathbb{C}). \end{aligned}$$

O primeiro isomorfismo é demonstrado de maneira análoga. □

Podemos resumir o corolário anterior na seguinte tabela:

$n$ par	$Cl(n, \mathbb{C}) \cong \mathcal{M}_{2^{\frac{n}{2}}}(\mathbb{C})$
$n$ ímpar	$Cl(n, \mathbb{C}) \cong \mathcal{M}_{2^{\frac{n-1}{2}}}(\mathbb{C}) \oplus \mathcal{M}_{2^{\frac{n-1}{2}}}(\mathbb{C})$

## 5.5 Representações de álgebras de Clifford

Nesta seção, estudaremos muito brevemente representações de álgebras, com destaque para representações de álgebras de Clifford.

### 5.5.1 Representações de álgebras

**Definição 5.40.** Seja  $\mathcal{A}$  uma  $\mathbb{K}$ -álgebra. Uma *representação* de  $\mathcal{A}$  em um  $\mathbb{K}$ -espaço vetorial  $V$  é um  $\mathbb{K}$ -homomorfismo de álgebras  $\rho : \mathcal{A} \longrightarrow \text{End}(V)$ .

O grau de uma representação é a dimensão de  $V$ , i.e.,  $gr(\rho) = \dim_{\mathbb{K}} V$ .

**Exemplo 5.41.** Se  $V = \{0\}$  então  $\rho : \mathcal{A} \longrightarrow \text{End}(\{0\})$  é uma representação com  $\rho(x) \equiv 0$  (operador identicamente nulo),  $\forall x \in \mathcal{A}$ .

**Exemplo 5.42.** Seja  $V = \mathcal{A}$  e  $\rho : \mathcal{A} \longrightarrow \text{End}(\mathcal{A})$  tal que  $\rho(x)y = xy$ ,  $\forall x, y \in \mathcal{A}$ ,  $\rho$  é uma representação chamada *representação regular*.

**Definição 5.43.** Seja  $\rho : \mathcal{A} \longrightarrow \text{End}(V)$  uma representação. Um subespaço  $W \subset V$  é dito *estável* sobre  $\rho$  se  $\rho(x)y \in W$ ,  $\forall y \in W$  e  $\forall x \in V$ . A representação  $\rho$  é dita *irredutível* se os únicos subespaços estáveis de  $V$  sobre  $\rho$  são  $\{0\}$  e  $V$ .

**Definição 5.44.** Seja  $\mathcal{A}$  uma  $\mathbb{K}$ -álgebra e sejam  $\rho_1 : V_1 \longrightarrow \mathcal{A}$  e  $\rho_2 : V_2 \longrightarrow \mathcal{A}$  duas representações. Então  $\rho_1$  e  $\rho_2$  são ditas *equivalentes* se existe um isomorfismo  $f : V_1 \longrightarrow V_2$  tal que  $f \circ \rho_1(x) = \rho_2(x) \circ f$ , para todos  $x \in \mathcal{A}$ , e escrevemos  $\rho_1 \sim \rho_2$ .

**Definição 5.45.** Sejam  $\rho_1 : V_1 \longrightarrow \mathcal{A}$  e  $\rho_2 : V_2 \longrightarrow \mathcal{A}$  duas representações de  $\mathcal{A}$ . Então a representação de  $\mathcal{A}$  em  $V_1 \oplus V_2$  é denotada por  $\rho_1 \oplus \rho_2$  e definida por:

$$(\rho_1 \oplus \rho_2)(x) := \rho_1(x) \oplus \rho_2(x),$$

para todos  $x \in \mathcal{A}$ . Analogamente, a representação de  $\mathcal{A}$  em  $V_1 \otimes V_2$  é denotada por  $\rho_1 \otimes \rho_2$  e definida por:

$$(\rho_1 \otimes \rho_2)(x) := \rho_1(x) \otimes \rho_2(x),$$

para todos  $x \in \mathcal{A}$ .

### 5.5.2 Representações de álgebras de Clifford

**Definição 5.46.** Seja  $Cl(V, \Phi)$  a álgebra de Clifford de  $(V, \Phi)$ . Seja  $(W, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  um espaço com produto interno. Uma representação  $\rho : Cl(V, \Phi) \longrightarrow \text{End}(W)$  é dita *ortogonal* se:

$$\langle \rho(x)v, \rho(x)u \rangle = \epsilon g(x, x). \langle v, u \rangle,$$

onde  $g$  é a forma bilinear associada a  $\Phi$ ,  $\epsilon = \pm 1$ ,  $v, u \in W$  e  $x \in Cl(V, \Phi)$ . Se  $\epsilon = 1$ , dizemos que  $\rho$  é *ortogonal positiva* e se  $\epsilon = -1$ , dizemos que  $\rho$  é *ortogonal negativa*.

**Proposição 5.47.** Se  $\rho$  é ortogonal positiva, os operadores  $\rho(x)$  são autoadjuntos, i.e., se  $\rho^*(x)$  é a transposta de  $\rho(x)$ , então  $\rho(x) = \rho^*$ , para todos  $x \in Cl(V, \Phi)$ .

*Demonstração.* Pela propriedade da adjunta, temos:

$$\langle u, (\rho^*(x) \circ \rho(x))v \rangle = \langle \rho(x)v, \rho(x)u \rangle = g(x, x)\langle u, v \rangle,$$

implicando que  $\rho^*(x) \circ \rho(x) = g(x, x)Id_V$ . Ainda, se  $v \in W$  e  $x \in Cl(V, \Phi)$ , temos que:

$$(\rho(x) \circ \rho(x))v = (\rho(x))^2(v) = \rho(x^2)v = g(x, x)Id_V.$$

Logo  $\rho(x) = \rho^*$ , para todos  $x \in Cl(V, \Phi)$ . □

Da mesma forma, se  $\rho$  é *ortogonal negativa*, concluímos que  $\rho(x) = -\rho^*$ .

**Observação 5.48.** Se  $(V, \Phi)$  é um espaço quadrático com forma bilinear associada positiva-definida, então toda representação de  $Cl(V, \Phi)$  em um espaço euclidiano é equivalente a uma representação ortogonal positiva.

Doravante, iremos denotar o grupo multiplicativo dos elementos inversíveis de  $Cl(V, \Phi)$  por  $Cl(V, \Phi)^\times$ , ou seja:

$$C(V, \Phi)^\times = \{x \in Cl(V, \Phi) \mid \exists x^{-1} \in Cl(V, \Phi) \text{ com } xx^{-1} = x^{-1}x = 1\} \quad (5.37)$$

**Definição 5.49.** Seja  $Cl(V, \Phi)$  a álgebra de Clifford do  $\mathbb{K}$ -espaço quadrático  $(V, \Phi)$ . A aplicação definida por:

$$\rho_{ad} : Cl^\times(V, \Phi) \longrightarrow \text{Aut}(Cl(V, \Phi)) \subset \text{End}(Cl(V, \Phi)) ; \quad x \mapsto axa^{-1}, \quad (5.38)$$

com  $a \in Cl^\times(V, \Phi)$  e  $x \in Cl(V, \Phi)$ , é chamada *representação adjunta* de  $Cl^\times(V, \Phi)$ .

**Proposição 5.50.** Para todos  $v, w \in V \subset Cl(V, \Phi)$ ,  $\Phi(v) \neq 0$ , a aplicação  $\rho(v)$  pode ser considerada uma reflexão de  $w$  em torno de  $v$ , i.e.,

$$\rho_{ad}(v)w = -w + 2 \frac{g(v, w)}{\Phi(v)}v,$$

onde  $g$  é a forma bilinear associada a  $\Phi$ .

*Demonastração.*

$$\begin{aligned} \rho_{ad}(v)w &= vvv^{-1} = -\frac{vwv}{\Phi(v)} = -\frac{v(-vw - 2g(v, w))}{\Phi(v)} = \\ &= \frac{v^2w + 2g(v, w)v}{\Phi(v)} = \frac{-\Phi(v)w + 2g(v, w)v}{\Phi(v)} = -w + 2 \frac{g(v, w)}{\Phi(v)}v. \end{aligned}$$

□

**Definição 5.51.** Seja  $Cl(V, \Phi)$  a álgebra de Clifford do  $\mathbb{K}$ -espaço quadrático  $(V, \Phi)$ . A aplicação definida por:

$$\rho_{adt} : Cl^\times(V, \Phi) \longrightarrow \text{End}(Cl(V, \Phi)) ; \quad x \mapsto \alpha(a)xa^{-1}, \quad (5.39)$$

com  $a \in Cl^\times(V, \Phi)$  e  $x \in Cl(V, \Phi)$ , é chamada *representação adjunta torcida* de  $Cl^\times(V, \Phi)$ , onde  $\alpha$  é o automorfismo canônico (observação 5.10).

**Observação 5.52.** Sendo  $\rho_{adt} = \alpha(a)xa^{-1}$ , temos que:

$$\rho_{adt}(\alpha(a))x = \alpha(\alpha(a))x\alpha(a)^{-1} = \alpha(\alpha(a)\alpha^{-1}(x)a^{-1}) = \alpha \circ \rho_{adt} \circ \alpha^{-1}(x),$$

ou seja,  $\rho_{adt}(\alpha(a)) = \alpha \circ \rho_{adt}(a) \circ \alpha^{-1}$ .

## 5.6 Os grupos $\Gamma$ , Pin e Spin

Nesta seção, estudaremos, também muito brevemente, os grupos Pin e Spin, muito utilizados no contexto da Física-Matemática. Seja  $Cl(V, \Phi)$  a álgebra de Clifford do  $\mathbb{K}$ -espaço quadrático  $(V, \Phi)$ .

**Definição 5.53.** O *grupo de Clifford-Lipschitz* associado ao espaço  $(V, \Phi)$ , denotado por  $\Gamma(V, \Phi)$ , é o subgrupo de  $Cl(V, \Phi)^\times$  definido por:

$$\Gamma(V, \Phi) := \{a \in Cl(V, \Phi)^\times \mid \alpha(a)va^{-1} \in V, \text{ para todo } v \in V\}, \quad (5.40)$$

onde  $\alpha$  é o automorfismo canônico.

A partir desse grupo definimos o *grupo de Clifford-Lipschitz especial*:

$$\Gamma(V, \Phi)^+ := \Gamma(V, \Phi) \cap Cl^0(V, \Phi) \quad (5.41)$$

Ainda, o grupo de Clifford-Lipschitz consiste de todos os elementos de  $Cl^\times(V, \Phi)$  para os quais o espaço  $V$  é estável sobre  $\rho_{adt}$ .

**Proposição 5.54.** As funções  $\alpha$  e  $t$  induzem um automorfismo e um anti-automorfismo, respectivamente, para o grupo  $\Gamma(V, \Phi)$ .

*Demonstração.* A demonstração pode ser encontrada em [11], p. 58.  $\square$

**Proposição 5.55.** O grupo de Clifford-Lipschitz é estável sobre o automorfismo canônico  $\alpha$ , e sobre o anti-automorfismo canônico  $t$ .

*Demonstração.* Pela observação 5.52, temos que  $\rho_{adt}(\alpha(a)) = \alpha \circ \rho_{adt}(a) \circ \alpha^{-1}$ . Logo, se  $a \in \Gamma(V, \Phi)$  e  $v \in V$ , temos:

$$\rho_{adt}(\alpha(a))v = \alpha \circ \rho_{adt}(a) \circ \alpha^{-1}(v) = -\alpha \circ \rho_{adt}(a)v = \rho_{adt}(a)v \in V.$$

Logo  $\alpha(a) \in \Gamma(V, \Phi)$ . Considere agora  $a \in \Gamma(V, \Phi)$ , então facilmente concluímos que  $a^{-1} \in \Gamma(V, \Phi)$ . Portanto, se  $v \in V$ , temos que  $\alpha(a^{-1})va \in V$ . Aplicando  $t$ , e pelo fato de que  $t$  comuta com  $\alpha$ , obtemos:

$$t(a)vt(\alpha(a^{-1})) \in V \Rightarrow \alpha(t(a))vt(\alpha(a))^{-1} \in V.$$

Portanto  $t(a) \in \Gamma(V, \Phi)$ .  $\square$

**Definição 5.56.** O subgrupo  $P(V, \Phi) \subset C(V, \Phi)^\times$  é o grupo multiplicativo definido por:

$$P(V, \Phi) := \{v \in V \mid \Phi(v) \neq 0\}. \quad (5.42)$$

**Definição 5.57.** O subgrupo  $\text{Pin}(V, \Phi) \subset C(V, \Phi)^\times$  é o grupo multiplicativo definido por:

$$\text{Pin}(V, \Phi) := \{v \in V \mid \Phi(v) = \pm 1\}, \quad (5.43)$$

e o grupo *Spin* é o grupo definido por:

$$\text{Spin}(V, \Phi) := \text{Pin}(V, \Phi) \cap Cl^0(V, \Phi). \quad (5.44)$$

Vamos agora considerar o espaço quadrático  $(V, \Phi) = (\mathbb{R}^{p,q}, \Phi_{p,q})$ ,  $p+q = n$ . Para esse espaço, o grupo de Clifford-Lipschitz é escrito como:

$$\Gamma(p, q) := \{a \in Cl_{p,q}^\times \mid \alpha(a)va^{-1} \in \mathbb{R}^n, \text{ para todo } v \in \mathbb{R}^n\}. \quad (5.45)$$

Utiliza-se também a notaçāo  $\Gamma(p, q) = \Gamma_{p,q}$ .

**Definição 5.58.** O subgrupo  $\text{Pin}(p, q) \subseteq C_{p,q}^\times$  é o grupo multiplicativo definido por:

$$\text{Pin}(p, q) := \{x \in \Gamma_{p,q} \mid N(x) = \pm 1\}. \quad (5.46)$$

e o grupo  $\text{Spin}(p, q)$  é o grupo definido por:

$$\text{Spin}(p, q) := \{x \in \Gamma_{p,q}^+ \mid N(x) = \pm 1\} = \text{Pin}(p, q) \cap Cl_{p,q}^0. \quad (5.47)$$

Esses grupos são também denotados por  $\text{Pin}(p, q) = \text{Pin}_{p,q}$  e  $\text{Spin}(p, q) = \text{Spin}_{p,q}$ . Para  $q = 0$  costuma-se denotar  $\text{Pin}_{n,0} = \text{Pin}_n$  e  $\text{Spin}(n, 0) = \text{Spin}_n$ .

Através das definições (5.46) e (5.47) podemos escrever também:

$$\text{Pin}(n) = \{x \in Cl_n^\times \mid \alpha(x)vx^{-1} \in \mathbb{R}^n, \text{ com } N(x) = 1, \text{ para todo } v \in \mathbb{R}^n\},$$

$$\text{Spin}(n) = \{x \in Cl_n^0 \mid xv x^{-1} \in \mathbb{R}^n, \text{ com } N(x) = 1, \text{ para todo } v \in \mathbb{R}^n\}.$$

**Exemplo 5.59.** Como vimos no exemplo 5.19,  $Cl_{0,1} = \mathbb{C}$ . Como a aplicāo de Clifford  $\phi$  é injetiva, podemos identificar  $\mathbb{R}$  com  $\mathbb{R}i$ , e daí  $\phi(yi) = -yi$ . Assim:

$$\begin{aligned} \Gamma_{0,1} &= \{x + yi \in \mathbb{C} \mid (x - yi)v \frac{x - yi}{x^2 + y^2} \in \mathbb{R}i, v \in \mathbb{R}i, x, y \in \mathbb{R}\} = \\ &= \{x + yi \in \mathbb{C}^\times \mid x = 0 \text{ ou } y = 0, x, y \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Portanto, concluimos que:

$$\text{Pin}(0, 1) = \{x + yi \in \Gamma(0, 1) \mid x^2 + y^2 = 1\} = \{1, -1, i, -i\} \cong \mathbb{Z}_4,$$

$$\text{Spin}(0, 1) = \{x + yi \in \text{Pin}(0, 1) \mid \alpha(x + yi) = x + yi\} \cong \{1, -1\} \cong \mathbb{Z}_2.$$

**Exemplo 5.60.** Como anteriormene, depois de alguns cálculos não muitos difíceis, podemos concluir que:

$$\text{Pin}(1, 0) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2,$$

$$\text{Pin}(0, 2) = \{x + yi + zj + wk \in \mathbb{H}^\times \mid x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1\},$$

$$\text{Spin}(0, 2) = \{x + wk \in \mathbb{H}^\times \mid x^2 + w^2 = 1\},$$

$$\text{Spin}(1, 1) = \{x + ye_{12} \mid x^2 - y^2 = \pm 1, x, y \in \mathbb{R}\}.$$

**Exemplo 5.61.** Considere os grupos  $\text{Spin}(n)$ . Para dimensões pequenas, a saber  $1 \geq n \leq 6$ , encontramos os seguintes isomorfismos de grupos:

$$\text{Spin}(1) \cong O(1), \quad \text{Spin}(2) \cong SO(2) \cong U(1), \quad \text{Spin}(3) \cong SU(2),$$

$$\text{Spin}(4) \cong SU(2) \times SU(2) \cong \text{Spin}(3) \times \text{Spin}(3),$$

$$\text{Spin}(5) \cong Sp(2, \mathbb{H}), \quad \text{Spin}(6) \cong SU(4).$$

Para maiores detalhes sobre os grupos *Pin* e *Spin* em pequenas dimensões, consulte [47] e [55].

# Capítulo 6

## Relação entre as Álgebras de Clifford e as de Cayley-Dickson

Nos capítulos precedentes observamos que os números complexos podem ser generalizados por dois caminhos distintos: pelas álgebras de Cayley-Dickson ou pelas álgebras de Clifford. O objetivo deste capítulo é mostrar que tanto as álgebras de Clifford reais generalizadas quanto as álgebras de Cayley-Dickson generalizadas emergem naturalmente numa mesma estrutura algébrica, *i.e.*, estão contidas numa mesma classe de álgebras. A construção exposta neste capítulo foi apresentada por Gregory Wene<sup>1</sup> em um artigo de 1984 [74].

### 6.1 A álgebra quaterniônica generalizada

**Definição 6.1.** Seja  $\mathcal{A}$  uma  $\mathbb{R}$ -álgebra 4-dimensional com identidade, 1, de base  $\{1, i, j, k\}$  com uma tabela de multiplicação definida por:

$$i^2 = \gamma_1 \cdot 1, \quad j^2 = \gamma_2 \cdot 1 \quad e \quad ij = k = -ji, \quad (6.1)$$

onde  $\gamma_1 = \pm 1$  e  $\gamma_2 = \pm 1$ . Essa álgebra é chamada *álgebra quaterniônica generalizada*, e a denotaremos por  $\mathfrak{U}_2 = \mathfrak{U}(\gamma_1, \gamma_2)$ .

Em geral, toda álgebra 4-dimensional obtida pelo processo generalizado de Cayley-Dickson é uma álgebra quaterniônica generalizada.

**Exemplo 6.2.** Considerando  $\gamma_1 = \gamma_2 = -1$ , temos que  $\mathfrak{U}(-1, -1) = \mathbb{H}$ , *i.e.*, a álgebra  $\mathfrak{U}_2$  é igual a álgebra dos quaternions. Para  $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$ , temos que  $\mathfrak{U}(1, 1) = Cl_{2,0}$ , *i.e.*, a álgebra  $\mathfrak{U}_2$  é igual a álgebra de Clifford do espaço  $\mathbb{R}^2$ .

**Proposição 6.3.** *Seja  $\star : \mathfrak{U}_2 \longrightarrow \mathfrak{U}_2$  uma aplicação linear tal que:*

$$1^\star = 1, \quad i^\star = -i, \quad j^\star = -j, \quad e \quad k^\star = k. \quad (6.2)$$

*Então  $\star$  é um  $\mathbb{R}$ -automorfismo de álgebras tal que  $\star \circ \star = Id$ .*

---

<sup>1</sup>Gregory Peter Wene é um matemático americano. Atualmente é professor na *University of Texas at San Antonio*.

*Demonstração.* Podemos escrever todos os elementos  $x \in \mathfrak{U}_2$  como  $x = x_01 + x_1i + x_2j + x_3k$ . Sendo  $\star$  linear, temos que:

$$x^\star = x_0.1 - x_1i - x_2j + x_3k.$$

Claramente  $\star$  é bijetiva. Considere agora  $x = x_01 + x_1i + x_2j + x_3k$  e  $y = y_01 + y_1i + y_2j + y_3k$  em  $\mathfrak{U}_2$ . Pelas identidades (6.1) e (6.2), obtemos:

$$\begin{aligned} (xy)^\star &= (x_0y_0 + \gamma_1x_1y_1 + \gamma_2x_2y_2 - \gamma_1\gamma_2x_3y_3)1 - (x_0y_1 + x_1y_0 + \gamma_2x_3y_2 - \gamma_2x_2y_3)i - \\ &\quad - (x_0y_2 + x_2y_0 - \gamma_1x_3y_1 + \gamma_1x_1y_3)j + (x_3y_0 + x_0y_3 - x_2y_1 + x_1y_2)k, \end{aligned} \tag{6.3}$$

$$\begin{aligned} x^\star y^\star &= (x_0y_0 + \gamma_1x_1y_1 + \gamma_2x_2y_2 - \gamma_1\gamma_2x_3y_3)1 + (-x_0y_1 - x_1y_0 - \gamma_2x_3y_2 + \gamma_2x_2y_3)i + \\ &\quad + (-x_0y_2 - x_2y_0 + \gamma_1x_3y_1 - \gamma_1x_1y_3)j + (x_3y_0 + x_0y_3 - x_2y_1 + x_1y_2)k, \end{aligned} \tag{6.4}$$

ou seja, por (6.3) e (6.4), conluímos que  $(xy)^\star = x^\star y^\star$ ,  $\forall x, y \in \mathfrak{U}_2$ . Portanto  $\star$  é um  $\mathbb{R}$ -automorfismo de álgebras. Ainda, temos que:

$$x^\star = x_0.1 - x_1i - x_2j + x_3k \Rightarrow x^{\star\star} = x_0.1 + x_1i + x_2j + x_3k = x, \tag{6.5}$$

$\forall x \in \mathfrak{U}_2$ , ou seja,  $\star \circ \star = Id$ . □

**Proposição 6.4.** *Seja  $* : \mathfrak{U}_2 \longrightarrow \mathfrak{U}_2$  uma aplicação linear tal que:*

$$1^* = 1, \quad i^* = -i, \quad j^* = -j, \quad e \quad k^* = -k. \tag{6.6}$$

*Então  $*$  é uma involução em  $\mathfrak{U}_2$ .*

*Demonstração.* A prova é análoga à prova da proposição anterior, bastando trocar os sinais de forma adequada nas equações (6.3) e (6.4) para obtermos que  $(xy)^* = y^*x^*$ , para todos  $x, y \in \mathfrak{U}_2$ . Para mostrar que  $* \circ * = Id$ , basta trocar o sinal do termo  $x_3k$  em (6.5). Assim  $*$  é uma involução em  $\mathfrak{U}_2$ . □

**Observação 6.5.** As aplicações  $*$  e  $\star$  comutam, i.e.,  $x^{**} = x^{\star\star}$ , para todos  $x \in \mathfrak{U}_2$ .

## 6.2 As álgebras $\mathfrak{U}_{n-1}(\gamma_n)$

Vamos agora generalizar a definição 6.1 para maiores dimensões. Considere o conjunto  $\mathfrak{U}(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = \mathfrak{U}_2(\gamma_3) = \{(q_1, q_2) : q_i \in \mathfrak{U}_2, i = 1, 2, \text{ e } \gamma_3 = \pm 1\}$ , munido com uma operação de adição e uma operação de multiplicação definidas por:

$$(q_1, q_2) + (q_3, q_4) = (q_1 + q_3, q_2 + q_4), \quad (6.7)$$

$$\begin{aligned} (q_1, q_2)(q_3, q_4) &= (q_1 q_3 + \gamma_3[\lambda q_4^* q_2 + (1 - \lambda)q_2 q_4^*], \\ &\quad \lambda(q_2 q_3^* + q_4 q_1) + (1 - \lambda)(q_1 q_4 + q_2 q_3^*)), \end{aligned} \quad (6.8)$$

para todos  $q_i \in \mathfrak{U}_2$  e para algum  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Então  $\mathfrak{U}_2(\gamma_3)$ , junto com essas operações, define uma  $\mathbb{R}$ -álgebra unitária 8-dimensional, com elemento identidade igual a  $(1, 0)$ .

**Exemplo 6.6.** Para  $\lambda = 0$  e  $\gamma_3 = 1$ , temos que  $\mathfrak{U}_2(\gamma_3) = \mathbb{O}$ .

**Proposição 6.7.** Considerando as aplicações lineares  $\tilde{*} : \mathfrak{U}_2(\gamma_3) \longrightarrow \mathfrak{U}_2(\gamma_3)$  e  $\tilde{\star} : \mathfrak{U}_2(\gamma_3) \longrightarrow \mathfrak{U}_2(\gamma_3)$  definidas, respectivamente, por:

$$(q_1, q_2)^{\tilde{*}} = (q_1^*, -q_2), \quad (6.9)$$

$$(q_1, q_2)^{\tilde{\star}} = (q_1^*, -q_2^*). \quad (6.10)$$

Então  $\tilde{\star}$  é um automorfismo,  $\tilde{*}$  comuta com  $\tilde{\star}$  e  $\tilde{*} \circ \tilde{\star} = Id$ .

*Demonstração.* Como as aplicações  $*$  e  $\star$  são bijetivas,  $\tilde{*}$  e  $\tilde{\star}$  também são bijetivas. Utilizando a regra (6.8), obtemos:

$$\begin{aligned} [(q_1, q_2)(q_3, q_4)]^{\tilde{\star}} &= ((q_1 q_3 + \gamma_3[\lambda q_4^* q_2 + (1 - \lambda)q_2 q_4^*])^*, \\ &\quad -(\lambda(q_2 q_3^* + q_4 q_1) + (1 - \lambda)(q_1 q_4 + q_2 q_3^*))), \end{aligned} \quad (6.11)$$

$$\begin{aligned} (q_1, q_2)^{\tilde{\star}}(q_3, q_4)^{\tilde{\star}} &= (q_1^* q_3^* + \gamma_3[\lambda q_4^{**} q_2^* + (1 - \lambda)q_2^* q_4^{**}], \\ &\quad \lambda(-q_2^* q_3^{**} - q_4^* q_1^*) - (1 - \lambda)(q_1^* q_4^* + q_2^* q_3^{**})), \end{aligned} \quad (6.12)$$

Como  $\star$  é um automorfismo (Proposição 6.3), por (6.11) e (6.12), segue que  $\tilde{\star}$  também é um automorfismo. Além disso,  $\tilde{*}$  e  $\tilde{\star}$  comutam:

$$\begin{aligned} [(q_1, q_2)^{\tilde{*}}]^{\tilde{\star}} &= (q_1^*, -q_2)^{\tilde{\star}} = (q_1^{**}, q_2^*), \\ [(q_1, q_2)^{\tilde{\star}}]^{\tilde{*}} &= (q_1^*, -q_2^*)^{\tilde{*}} = (q_1^{**}, q_2^*). \end{aligned}$$

Agora, lembrando que  $* \circ * = Id$  (Proposição 6.4), temos que  $\tilde{*} \circ \tilde{\star} = Id$ :

$$(q_1, q_2)^{\tilde{*}\tilde{\star}} = (q_1^*, -q_2)^{\tilde{\star}} = (q_1^{**}, q_2) = (q_1, q_2).$$

□

**Proposição 6.8.** A aplicação  $\tilde{*}$  é uma involução em  $\mathfrak{U}_2(\gamma_3)$  se, e somente se,  $\lambda = 1$ .

*Demonstração.* Pela regra (6.8), a primeira componente do elemento  $[(q_1, q_2)(q_3, q_4)]^{\tilde{*}}$  é

$$q_3^* q_1^* + \gamma_3 [\lambda q_2^* q_4 + (1 - \lambda) q_4^{**} q_2^*],$$

e a primeira componente do elemento  $(q_3, q_4)^{\tilde{*}}(q_1, q_2)^{\tilde{*}}$  é

$$q_3^* q_1^* + \gamma_3 [\lambda q_2^* q_4 + (1 - \lambda) q_4 q_2^*].$$

Se  $\tilde{*}$  é uma involução, então devemos ter  $(1 - \lambda) q_4^{**} q_2^* = (1 - \lambda) q_4 q_2^*$ , para todos  $q_2, q_4 \in \mathfrak{U}_2(\gamma_3)$ . Considerando  $\lambda \neq 1$ , temos que  $q_4^{**} q_2^* = q_4 q_2^*$ . Agora, tomando  $q_2 = 1$  e  $q_4 = k$ , obtemos:

$$q_4^{**} q_2^* = q_4 q_2^* = k^{**} = (k)^* = -k = k,$$

que não pode ser. Assim  $\tilde{*}$  é uma involução se, e somente se,  $\lambda = 1$ .  $\square$

Podemos continuar esse processo definindo o conjunto:

$$\mathfrak{U}(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n) := \{(q_1, q_2) : q_1, q_2 \in \mathfrak{U}(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{n-1}), n \geq 3, \text{ e } \gamma_k = \pm 1, \forall k \geq 1\}, \quad (6.13)$$

e definindo uma operação de multiplicação para esse conjunto da seguinte maneira:

$$(q_1, q_2)(q_3, q_4) = (q_1 q_3 + \gamma_n [\lambda q_4^* q_2 + (1 - \lambda) q_2 q_4^*], \\ \lambda(q_2 q_3^* + q_4 q_1) + (1 - \lambda)(q_1 q_4 + q_2 q_3^*)). \quad (6.14)$$

Por simplicidade, vamos utilizar a seguinte notação:  $\mathfrak{U}_{n-1}(\gamma_n) = \mathfrak{U}(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$ ,  $n \geq 3$ . Veja que para  $n = 3$ , voltamos para a equação (6.8), i.e.,  $\tilde{*} = *$  e  $\tilde{*} = *$ .

**Definição 6.9.** O conjunto  $\mathfrak{U}_{n-1}(\gamma_n)$ , junto com as operações de adição (6.7) e multiplicação (6.14), define uma  $\mathbb{R}$ -álgebra  $2^n$ -dimensional, que será chamada de *álgebra quaterniônica generalizada e ampliada*.

**Observação 6.10.** Encrevendo a identidade  $1_2 = (1, 0)$  em  $\mathfrak{U}_2(\gamma_3)$ , pela regra (6.14) podemos verificar que  $1_3 = (1_2, 0)$  é a identidade em  $\mathfrak{U}_3(\gamma_4)$ , e assim por diante. Dessa forma, a álgebra  $\mathfrak{U}_{n-1}(\gamma_n)$  é unitária, com identidade  $1_{n-1} = (1_{n-2}, 0)$ , convencionando-se  $1_0 = 1$ .

No resto deste capítulo, álgebras de Clifford serão utilizadas como sinônimos de álgebras de Clifford reais e finitas. Podemos agora provar o seguinte teorema:

**Teorema 6.11.** Se  $\lambda = 1$  em (6.14), então  $\mathfrak{U}_{n-1}(\gamma_n) = CD_{2^n}(\gamma_n)$ , e se  $\lambda = 0$ , então  $\mathfrak{U}_{n-1}(\gamma_n) = Cl_{\alpha, \beta}(\gamma_n)$ .

*Demonstração.* Considere  $\lambda = 1$ . A Proposição 6.8 nos garante que a aplicação  $\tilde{*}$  é uma involução, e substituindo  $\lambda = 1$  na regra (6.14), obtemos a regra de multiplicação (3.22) do processo de duplicação generalizado de Cayley-Dickson, com  $\tilde{*}$  atuando exatamente como a conjugação (3.15). Portanto  $\mathfrak{U}_{n-1}(\gamma_n) = CD_{2^n}(\gamma_n)$ .

A Proposição 6.7 garante que a aplicação  $\tilde{*}$  é um automorfismo. Substituindo  $\lambda = 0$  na regra (6.14), obtemos a regra de multiplicação (5.20) do processo de duplicação para álgebras de Clifford reais, com  $\tilde{*}$  atuando exatamente como a involução graduada de  $Cl_{p,q}$ , que também é um automorfismo. Portanto  $\mathfrak{U}_{n-1}(\gamma_n) = Cl_{\alpha, \beta}(\gamma_n)$ .  $\square$

Pictorialmente, podemos sumarizar o teorema anterior como segue:

$$\begin{array}{ccc} & \mathfrak{U}_{n-1}(\gamma_n) & \\ \lambda = 1 & \diagup \quad \diagdown & \\ CD_{2^n}(\gamma_n) & & Cl_{\alpha,\beta}(\gamma_n) \end{array}$$

**Figura 6.1.** As álgebras  $\mathfrak{U}_{n-1}(\gamma_n)$  são iguais às álgebras de Cayley-Dickson generalizadas para  $\lambda = 1$  e são iguais às álgebras de Clifford reais generalizadas para  $\lambda = 0$ , onde  $\alpha = p + 1$  e  $\beta = q$ , se  $\gamma_n = 1$  e  $\alpha = p$  e  $\beta = q + 1$ , se  $\gamma_n = -1$ , com  $\alpha + \beta = n$ .

**Exemplo 6.12.** Se  $\lambda = 1$  e  $\gamma_n = -1$  para todo  $n \geq 3$ , teremos  $\mathfrak{U}_{n-1}(\gamma_n) = CD_{2^n}$ , ou seja, as generalizações das álgebras quaterniônicas quaneralizadas serão iguais às álgebras de Cayley-Dickson padrão.

**Teorema 6.13.** Considere  $\mathfrak{U}_{n-1}(\gamma_n)$  a álgebra construída anteriormente, e seja  $n \geq 3$ . Então  $\mathfrak{U}_{n-1}(\gamma_n)$  é potência-associativa se, e somente se, ela é uma álgebra de Cayley-Dickson ou uma álgebra de Clifford.

*Demonstração.* Pela Proposição 1.84, uma álgebra é potência-associativa se, e somente se, todos os seus elementos  $x$  satisfazem:  $x^2x = xx^2$  e  $x^2x^2 = (x^2x)x$ . Queremos mostrar que se uma dessas condições é satisfeita, então  $\lambda = 0$  ou  $\lambda = 1$ . Com efeito, podemos mostrar isso para a álgebra  $\mathfrak{U}_2(\gamma_3)$ , pois  $\lambda$  é fixo no processo de duplicação que produz as álgebras  $\mathfrak{U}_{n-1}(\gamma_n)$ . Então, considerando o elemento  $(k, 1) \in \mathfrak{U}_2(\gamma_3)$ , e calculando as primeiras componentes dos produtos  $(k, 1)^2(k, 1)$  e  $(k, 1)(k, 1)^2$ , obtemos, respectivamente:

$$(k^2 + \gamma_3)k + 2\gamma_3(1 - \lambda)k, \quad (6.15)$$

$$(k^2 + \gamma_3)k + 2\gamma_3(1 - \lambda)(1 - 2\lambda)k. \quad (6.16)$$

Igualando as expressões (6.15) e (6.16), obtemos:  $(1 - \lambda)k = (1 - \lambda)(1 - 2\lambda)k$ . Temos agora duas possibilidades: ou  $(1 - \lambda) \neq 0$  ou  $(1 - \lambda) = 0$ . Se  $(1 - \lambda) \neq 0$ , concluímos que  $\lambda = 0$  e se  $(1 - \lambda) = 0$  concluímos que  $\lambda = 1$ .  $\square$

**Corolário 6.14.** A álgebra  $\mathfrak{U}_{n-1}(\gamma_n)$ ,  $n \geq 3$ , é de Clifford se, e somente se, é associativa.

*Demonstração.* Se  $\mathfrak{U}_{n-1}(\gamma_n)$  é de Clifford, é claro que é associativa. Agora, se  $\mathfrak{U}_{n-1}(\gamma_n)$  é associativa, então é também potência-associativa, mas pelo teorema anterior,  $\mathfrak{U}_{n-1}(\gamma_n)$  é ou uma álgebra de Cayley-Dickson ou uma álgebra de Clifford. Como  $\dim(\mathfrak{U}_{n-1}(\gamma_n)) = 2^n$  para  $n \geq 3$ , concluímos que  $\dim(\mathfrak{U}_{n-1}(\gamma_n)) \geq 8$ , e, portanto, ela não pode ser de Cayley-Dickson, sendo assim de Clifford.  $\square$

# Capítulo 7

## Considerações Finais

Neste trabalho vimos que podemos construir uma família de  $\mathbb{R}$ -álgebras hipercomplexas através do processo de duplicação de Cayley-Dickson generalizado, as quais denotamos  $CD_{2^n}(\gamma)$ . Para  $\gamma = -1$ , temos as álgebras de C-D padrão,  $CD_{2^n}(-1)$ , cujas quatro primeiras álgebras são  $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$  e  $\mathbb{O}$ , que também são as únicas  $\mathbb{R}$ -álgebras normadas de divisão, como garantido pelo teorema de Hurwitz. Vimos também que  $\mathbb{O}$  é não-associativa, porém é alternativa, e que todas as outras álgebras de C-D a partir dos sedenions (para o qual construímos um diagrama de multiplicação aos moldes do Plano de Fano) são não-alternativas, porém são potência-associativas e flexivas.

Apresentamos as álgebras de Clifford universais associadas à  $\mathbb{K}$ -espaços quadráticos  $(V, \Phi)$ ,  $\text{char}(\mathbb{K}) \neq 2$ , provamos o teorema de existência e unicidade e vimos que as álgebras de Clifford podem ser vistas como uma generalização das álgebras exteriores, sendo estas casos particulares associados a espaços quadráticos com forma quadrática identicamente nula, i.e.,  $\bigwedge V = Cl(V, 0)$ . Estudamos as álgebras de Clifford  $Cl_{p,q}$ , e introduzimos um método de duplicação para essas álgebras semelhante ao de Cayley-Dickson, produzindo assim as álgebras de Clifford reais generalizadas,  $Cl_{\alpha,\beta}(\gamma)$ . Provamos o teorema de 8-periodicidade de Cartan-Bott para as álgebras  $Cl_{p,q}$ , vendo assim a notável periodicidade dessas álgebras, amalgamando os distintos isomorfismos periódicos dessas álgebras com as álgebras de matrizes sobre  $\mathbb{R}, \mathbb{C}$  e  $\mathbb{H}$  em uma tabela. Notamos também que a álgebra de Clifford complexa  $Cl(n, \mathbb{C})$  é isomorfa à álgebra  $M_{2^{\frac{n}{2}}}(\mathbb{C})$  se  $n$  é par, e à  $M_{2^{\frac{n-1}{2}}}(\mathbb{C}) \oplus M_{2^{\frac{n-1}{2}}}(\mathbb{C})$  se  $n$  é ímpar.

Finalmente mostramos que tanto as álgebras de Clifford reais generalizadas,  $Cl_{\alpha,\beta}(\gamma)$ , quanto as álgebras de Cayley-Dickson generalizadas,  $CD_{2^n}(\gamma)$ , são, deveras, casos particulares de uma classe de  $\mathbb{R}$ -álgebras bem mais geral: a classe das *álgebras quaternionicas generalizadas e ampliadas*,  $\mathfrak{U}_{n-1}(\gamma_n)$ .

Devido ao caráter limitado dessa dissertação, deixamos como leitura adicional alguns textos interessantes que estendem os conceitos desenvolvidos aqui e exibem suas utilidades nos campos da Física e da Física-Matemática: [78], [79], [80], [81], [82], [83], [84], [85], [86] e [87].

# Apêndice A

## Tabelas de multiplicação, o diagrama de multiplicação dos sedenions e o relógio de Clifford

As tabelas de multiplicação dos octonions, dos sedenions e dos 32-nions aqui apresentadas foram obtidas dos artigos [15] e [57]. A tabela de multiplicação dos 64-nions foi obtida em <http://jjj.de/tmp-zero-divisors/mult-table-64-ions.txt> (link obtido a partir de [57]). Essas tabelas podem também ser obtidas a partir do software [77], com algumas alterações de sinais. Para simplificar a notação, nas tabelas que seguem denotamos as unidades imaginárias  $e_j$  simplesmente por  $j$  ( $= e_j$ ).

Tabela A.1: Tabela de multiplicação dos quaternions, onde  $1 = e_0, i = e_1, j = e_2, k = e_3$ .

.	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	-0	3	-2
2	2	-3	-0	1
3	3	2	-1	-0

Tabela A.2: Tabela de multiplicação dos tessarines, onde  $1 = e_0, i = e_1, j = e_2, k = e_3$ .

.	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	-0	3	-2
2	2	3	0	1
3	3	-2	1	-0

Tabela A.3: Tabela de multiplicação dos split-quaternions, onde  $1 = e_0, i = e_1, j = e_2, f = e_3$ .

.	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	-0	3	-2
2	2	-3	0	-1
3	3	2	1	0

Tabela A.4: Tabela de multiplicação dos semiquaternions, onde colocamos  $1 = e_1, i = e_2, \epsilon = e_3, h = e_4$ .

.	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	-1	4	-3
3	3	-4	0	0
4	4	3	0	0

Tabela A.5: Tabela de multiplicação dos quaternions hiperbólicos, onde  $1 = e_0, i = e_1, j = e_2, k = e_3$ .

.	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	0	3	-2
2	2	-3	0	1
3	3	2	-1	0

Tabela A.6: Tabela de multiplicação dos biquaternions.

.	0	$i$	1	2	3	$i1$	$i2$	$i3$
0	0	$i$	1	2	3	$i1$	$i2$	$i3$
$i$	$i$	-0	$i1$	$i2$	$i3$	-1	-2	-3
1	1	$i1$	-0	3	-2	- $i$	$i3$	- $i2$
2	2	$i2$	-3	-0	1	- $i3$	- $i$	$i1$
3	3	$i3$	2	-1	-0	$i2$	- $i1$	- $i$
$i1$	$i1$	-1	- $i$	$i3$	- $i2$	0	-3	2
$i2$	$i2$	-2	- $i3$	- $i$	$i1$	3	0	-1
$i3$	$i3$	-3	$i2$	- $i1$	- $i$	-2	1	0

Tabela A.7: Tabela de multiplicação dos octonions.

.	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	-0	3	-2	5	-4	-7	6
2	2	-3	-0	1	6	7	-4	-5
3	3	2	-1	-0	7	-6	5	-4
4	4	-5	-6	-7	-0	1	2	3
5	5	4	-7	6	-1	-0	-3	2
6	6	7	4	-5	-2	3	-0	-1
7	7	-6	5	4	-3	-2	1	-0

Tabela A.8: Tabela de multiplicação dos split-octonions.

.	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	-0	3	-2	-5	4	-7	6
2	2	-3	-0	1	-6	7	4	-5
3	3	2	-1	-0	-7	-6	5	4
4	4	5	6	7	0	1	2	3
5	5	-4	-7	-6	-1	0	3	-2
6	6	7	-4	-5	-2	-3	0	1
7	7	-6	5	-4	-3	2	-1	0

Tabela A.9: Tabela de multiplicação dos sedenions.

.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	1	-0	3	-2	5	-4	-7	6	9	-8	-11	10	-13	12	15	-14
2	2	-3	-0	1	6	7	-4	-5	10	11	-8	-9	-14	-15	12	13
3	3	2	-1	-0	7	-6	5	-4	11	-10	9	-8	15	14	-13	12
4	4	-5	-6	-7	-0	1	2	3	12	13	14	15	-8	-9	-10	-11
5	5	4	-7	6	-1	-0	-3	2	13	-12	15	-14	9	-8	11	-10
6	6	7	4	-5	-2	3	-0	-1	14	-15	-12	13	10	-11	-8	9
7	7	-6	5	4	-3	-2	1	-0	15	14	-13	-12	11	10	-9	-8
8	8	-9	-10	-11	-12	-13	-14	-15	-0	1	2	3	4	5	6	7
9	9	8	-11	10	-13	12	15	-14	-1	-0	-3	2	-5	4	7	-6
10	10	11	8	-9	-14	-15	12	13	-2	3	-0	-1	-6	-7	4	5
11	11	-10	9	8	-15	14	-13	12	-3	-2	1	-0	-7	6	-5	4
12	12	13	14	15	8	-9	-10	-11	-4	5	6	7	-0	-1	-2	-3
13	13	-12	15	-14	9	8	11	-10	-5	-4	7	-6	1	-0	3	-2
14	14	-15	-12	13	10	-11	8	9	-6	-7	-4	5	2	-3	-0	1
15	15	14	-13	-12	11	10	-9	8	-7	6	-5	-4	3	2	-1	-0

Tabela A.10: Tabela de multiplicação dos 32-nions (dividida em duas partes, para melhor legibilidade).

.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	1	-0	3	-2	5	-4	-7	6	9	-8	-11	10	-13	12	15	-14
2	2	-3	-0	1	6	7	-4	-5	10	11	-8	-9	-14	-15	12	13
3	3	2	-1	-0	7	-6	5	-4	11	-10	9	-8	-15	14	-13	12
4	4	-5	-6	-7	-0	1	2	3	12	13	14	15	-8	-9	-10	-11
5	5	4	-7	6	-1	-0	-3	2	13	-12	15	-14	9	-8	11	-10
6	6	7	4	-5	-2	3	-0	-1	14	-15	-12	13	10	-11	-8	9
7	7	-6	5	4	-3	-2	1	-0	15	14	-13	-12	11	10	-9	-8
8	8	-9	-10	-11	-12	-13	-14	-15	-0	1	2	3	4	5	6	7
9	9	8	-11	10	-13	12	15	-14	-1	-0	-3	2	-5	4	7	-6
10	10	11	8	-9	-14	-15	12	13	-2	3	-0	-1	-6	-7	4	5
11	11	-10	9	8	-15	14	-13	12	-3	-2	1	-0	-7	6	-5	4
12	12	13	14	15	8	-9	-10	-11	-4	5	6	7	-0	-1	-2	-3
13	13	-12	15	-14	9	8	11	-10	-5	-4	7	-6	1	-0	3	-2
14	14	-15	-12	13	10	-11	8	9	-6	-7	-4	5	2	-3	-0	1
15	15	14	-13	-12	11	10	-9	8	-7	6	-5	-4	3	2	-1	-0
16	16	-17	-18	-19	-20	-21	-22	-23	-24	-25	-26	-27	-28	-29	-30	-31
17	17	16	-19	18	-21	20	23	-22	-25	24	27	-26	29	-28	-31	30
18	18	19	16	-17	-22	-23	20	21	-26	-27	24	25	30	31	-28	-29
19	19	-18	17	16	-23	22	-21	20	-27	26	-25	24	31	-30	29	-28
20	20	21	22	23	16	-17	-18	-19	-28	-29	-30	-31	24	25	26	27
21	21	-20	23	-22	17	16	19	-18	-29	28	-31	30	-25	24	-27	26
22	22	-23	-20	21	18	-19	16	17	-30	31	28	-29	-26	27	24	-25
23	23	22	-21	-20	19	18	-17	16	-31	-30	29	28	-27	-26	25	24
24	24	25	26	27	28	29	30	31	16	-17	-18	-19	-20	-21	-22	-23
25	25	-24	27	-26	29	-28	-31	30	17	16	19	-18	21	-20	-23	22
26	26	-27	-24	25	30	31	-28	-29	18	-19	16	17	22	23	-20	-21
27	27	26	-25	-24	31	-30	29	-28	19	18	-17	16	23	-22	21	-20
28	28	-29	-30	-31	-24	25	26	27	20	-21	-22	-23	16	17	18	19
29	29	28	-31	30	-25	-24	-27	26	21	20	-23	22	-17	16	-19	18
30	30	31	28	-29	-26	27	-24	-25	22	23	20	-21	-18	19	16	-17
31	31	-30	29	28	-27	-26	25	-24	23	-22	21	20	-19	-18	17	16

.	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
0	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
1	17	-16	-19	18	-21	20	23	-22	-25	24	27	-26	29	-28	-31	30
2	18	19	-16	-17	-22	-23	20	21	-26	-27	24	25	30	31	-28	-29
3	19	-18	17	-16	-23	22	-21	20	-27	26	-25	24	31	-30	29	-28
4	20	21	22	23	-16	-17	-18	-19	-28	-29	-30	-31	24	25	26	27
5	21	-20	23	-22	17	-16	19	-18	-29	28	-31	30	-25	24	-27	26
6	22	-23	-20	21	18	-19	-16	17	-30	31	28	-29	-26	27	24	-25
7	23	22	-21	-20	19	18	-17	-16	-31	-30	29	28	-27	-26	25	24
8	24	25	26	27	28	29	30	31	-16	-17	-18	-19	-20	-21	-22	-23
9	25	-24	27	-26	29	-28	-31	30	17	-16	19	-18	21	-20	-23	22
10	26	-27	-24	25	30	31	-28	-29	18	-19	-16	17	22	23	-20	-21
11	27	26	-25	-24	31	-30	29	-28	19	18	-17	-16	23	-22	21	-20
12	28	-29	-30	-31	-24	25	26	27	20	-21	-22	-23	-16	17	18	19
13	29	28	-31	30	-25	-24	-27	26	21	20	-23	22	-17	-16	-19	18
14	30	31	28	-29	-26	27	-24	-25	22	23	20	-21	-18	19	-16	-17
15	31	-30	29	28	-27	-26	25	-24	23	-22	21	20	-19	-18	17	-16
16	-0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
17	-1	-0	-3	2	-5	4	7	-6	-9	8	11	-10	13	-12	-15	14
18	-2	3	-0	-1	-6	-7	4	5	-10	-11	8	9	14	15	-12	-13
19	-3	-2	1	-0	-7	6	-5	4	-11	10	-9	8	15	-14	13	-12
20	-4	5	6	7	-0	-1	-2	-3	-12	-13	-14	-15	8	9	10	11
21	-5	-4	7	-6	1	-0	3	-2	-13	12	-15	14	-9	8	-11	10
22	-6	-7	-4	5	2	-3	-0	1	-14	15	12	-13	-10	11	8	-9
23	-7	6	-5	-4	3	2	-1	-0	-15	-14	13	12	-11	-10	9	8
24	-8	9	10	11	12	13	14	15	-0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7
25	-9	-8	11	-10	13	-12	-15	14	1	-0	3	-2	5	-4	-7	6
26	-10	-11	-8	9	14	15	-12	-13	2	-3	-0	1	6	7	-4	-5
27	-11	10	-9	-8	15	-14	13	-12	3	2	-1	-0	7	-6	5	-4
28	-12	-13	-14	-15	-8	9	10	11	4	-5	-6	-7	-0	1	2	3
29	-13	12	-15	14	-9	-8	-11	10	5	4	-7	6	-1	-0	-3	2
30	-14	15	12	-13	-10	11	-8	-9	6	7	4	-5	-2	3	-0	-1
31	-15	-14	13	12	-11	-10	9	-8	7	-6	5	4	-3	-2	1	-0

Tabela A.11: Tabela de multiplicação dos 64-nions (dividida em quatro partes, para melhor legibilidade).

.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	1	-0	3	-2	5	-4	-7	6	9	-8	-11	10	-13	12	15	-14
2	2	-3	-0	1	6	7	-4	-5	10	11	-8	-9	-14	-15	12	13
3	3	2	-1	-0	7	-6	5	-4	11	-10	9	-8	-15	14	-13	12
4	4	-5	-6	-7	-0	1	2	3	12	13	14	15	-8	-9	-10	-11
5	5	4	-7	6	-1	-0	-3	2	13	-12	15	-14	9	-8	11	-10
6	6	7	4	-5	-2	3	-0	-1	14	-15	-12	13	10	-11	-8	9
7	7	-6	5	4	-3	-2	1	-0	15	14	-13	-12	11	10	-9	-8
8	8	-9	-10	-11	-12	-13	-14	-15	-0	1	2	3	4	5	6	7
9	9	8	-11	10	-13	12	15	-14	-1	-0	-3	2	-5	4	7	-6
10	10	11	8	-9	-14	-15	12	13	-2	3	-0	-1	-6	-7	4	5
11	11	-10	9	8	-15	14	-13	12	-3	-2	1	-0	-7	6	-5	4
12	12	13	14	15	8	-9	-10	-11	-4	5	6	7	-0	-1	-2	-3
13	13	-12	15	-14	9	8	11	-10	-5	-4	7	-6	1	-0	3	-2
14	14	-15	-12	13	10	-11	8	9	-6	-7	-4	5	2	-3	-0	1
15	15	14	-13	-12	11	10	-9	8	-7	6	-5	-4	3	2	-1	-0
16	16	-17	-18	-19	-20	-21	-22	-23	-24	-25	-26	-27	-28	-29	-30	-31
17	17	16	-19	18	-21	20	23	-22	-25	24	27	-26	29	-28	-31	30
18	18	19	16	-17	-22	-23	20	21	-26	-27	24	25	30	31	-28	-29
19	19	-18	17	16	-23	22	-21	20	-27	26	-25	24	31	-30	29	-28
20	20	21	22	23	16	-17	-18	-19	-28	-29	-30	-31	24	25	26	27
21	21	-20	23	-22	17	16	19	-18	-29	28	-31	30	-25	24	-27	26
22	22	-23	-20	21	18	-19	16	17	-30	31	28	-29	-26	27	24	-25
23	23	22	-21	-20	19	18	-17	16	-31	-30	29	28	-27	-26	25	24
24	24	25	26	27	28	29	30	31	16	-17	-18	-19	-20	-21	-22	-23
25	25	-24	27	-26	29	-28	-31	30	17	16	19	-18	21	-20	-23	22
26	26	-27	-24	25	30	31	-28	-29	18	-19	16	17	22	23	-20	-21
27	27	26	-25	-24	31	-30	29	-28	19	18	-17	16	23	-22	21	-20
28	28	-29	-30	-31	-24	25	26	27	20	-21	-22	-23	16	17	18	19
29	29	28	-31	30	-25	-24	-27	26	21	20	-23	22	-17	16	-19	18
30	30	31	28	-29	-26	27	-24	-25	22	23	20	-21	-18	19	16	-17
31	31	-30	29	28	-27	-26	25	-24	23	-22	21	20	-19	-18	17	16
32	-32	-33	-34	-35	-36	-37	-38	-39	-40	-41	-42	-43	-44	-45	-46	-47
33	-33	32	-35	34	-37	36	39	-38	-41	40	43	-42	45	-44	-47	46
34	-34	35	32	-33	-38	-39	36	37	-42	-43	40	41	46	47	-44	-45
35	-35	-34	33	32	-39	38	-37	36	-43	42	-41	40	47	-46	45	-44
36	-36	37	38	39	32	-33	-34	-35	-44	-45	-46	-47	40	41	42	43
37	-37	-36	39	-38	33	32	35	-34	-45	44	-47	46	-41	40	-43	42
38	-38	-39	-36	37	34	-35	32	33	-46	47	44	-45	-42	43	40	-41
39	-39	38	-37	-36	35	34	-33	32	-47	-46	45	44	-43	-42	41	40
40	-40	41	42	43	44	45	46	47	32	-33	-34	-35	-36	-37	-38	-39
41	-41	-40	43	-42	45	-44	-47	46	33	32	35	-34	37	-36	-39	38
42	-42	-43	-40	41	46	47	-44	-45	34	-35	32	33	38	39	-36	-37
43	-43	42	-41	-40	47	-46	45	-44	35	34	-33	32	39	-38	37	-36
44	-44	-45	-46	-47	-40	41	42	43	36	-37	-38	-39	32	33	34	35
45	-45	44	-47	46	-41	-40	-43	42	37	36	-39	38	-33	32	-35	34
46	-46	47	44	-45	-42	43	-40	-41	38	39	36	-37	-34	35	32	-33
47	-47	-46	45	44	-43	-42	41	-40	39	-38	37	36	-35	-34	33	32
48	-48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63
49	-49	-48	51	-50	53	-52	-55	54	57	-56	-59	58	-61	60	63	-62
50	-50	-51	-48	49	54	55	-52	-53	58	59	-56	-57	-62	-63	60	61
51	-51	50	-49	-48	55	-54	53	-52	59	-58	57	-56	-63	62	-61	60
52	-52	-53	-54	-55	-48	49	50	51	60	61	62	63	-56	-57	-58	-59
53	-53	52	-55	54	-49	-48	-51	50	61	-60	63	-62	57	-56	59	-58
54	-54	55	52	-53	-50	51	-48	-49	62	-63	-60	61	58	-59	-56	57
55	-55	-54	53	52	-51	-50	49	-48	63	62	-61	-60	59	58	-57	-56
56	-56	-57	-58	-59	-60	-61	-62	-63	-48	49	50	51	52	53	54	55
57	-57	56	-59	58	-61	60	63	-62	-49	-48	-51	50	-53	52	55	-54
58	-58	59	56	-57	-62	-63	60	61	-50	51	-48	-49	-54	-55	52	53
59	-59	-58	57	56	-63	62	-61	60	-51	-50	49	-48	-55	54	-53	52
60	-60	61	62	63	56	-57	-58	-59	-52	53	54	55	-48	-49	-50	-51
61	-61	-60	63	-62	57	56	59	-58	-53	-52	55	-54	49	-48	51	-50
62	-62	-63	-60	61	58	-59	56	57	-54	-55	-52	53	50	-51	-48	49
63	-63	62	-61	-60	59	58	-57	56	-55	54	-53	-52	51	50	-49	-48

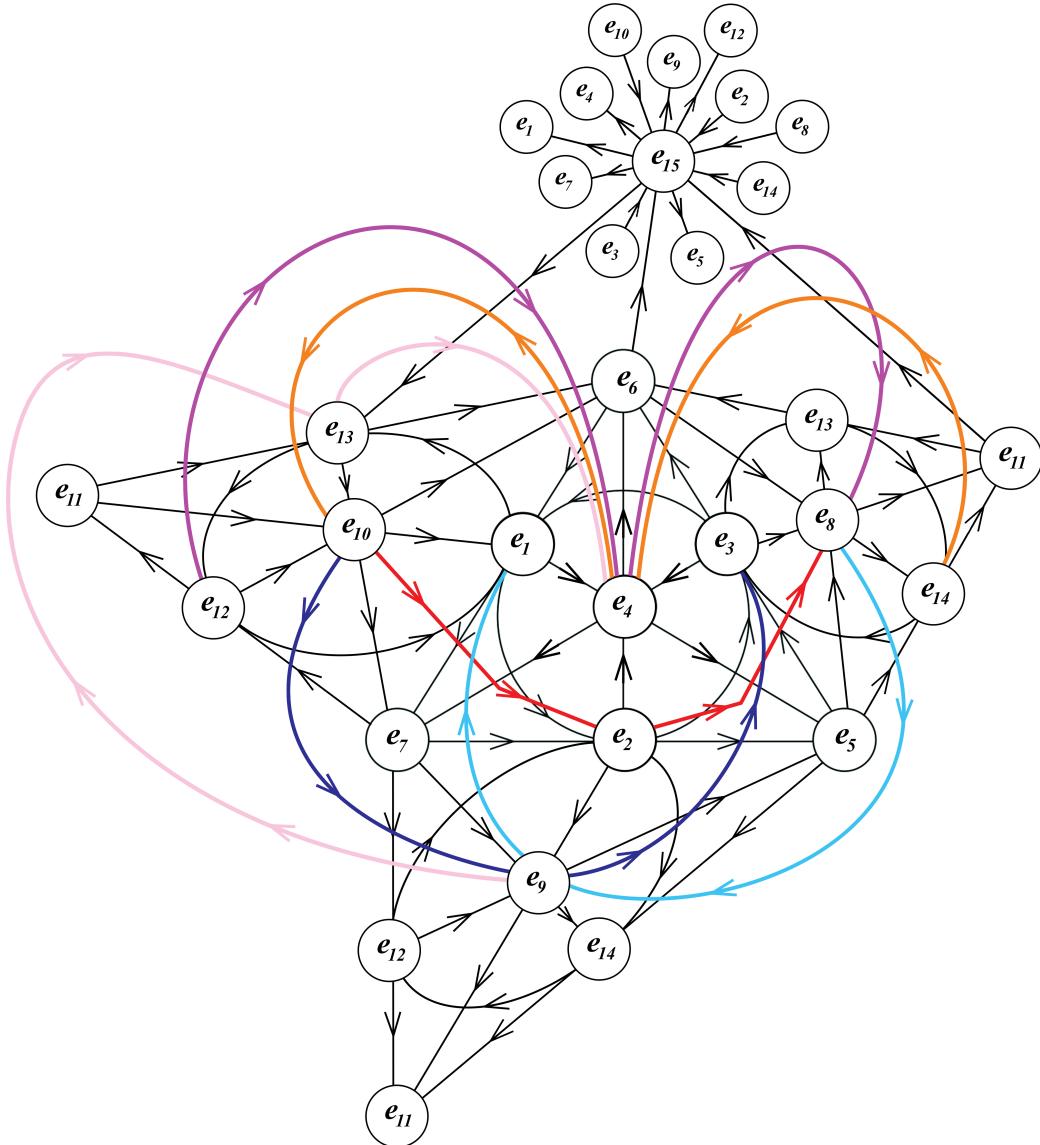
.	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
0	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
1	17	-16	-19	18	-21	20	23	-22	-25	24	27	-26	29	-28	-31	30
2	18	19	-16	-17	-22	-23	20	21	-26	-27	24	25	30	31	-28	-29
3	19	-18	17	-16	-23	22	-21	20	-27	26	-25	24	31	-30	29	-28
4	20	21	22	23	-16	-17	-18	-19	-28	-29	-30	-31	24	25	26	27
5	21	-20	23	-22	17	-16	19	-18	-29	28	-31	30	-25	24	-27	26
6	22	-23	-20	21	18	-19	-16	17	-30	31	28	-29	-26	27	24	-25
7	23	22	-21	-20	19	18	-17	-16	-31	-30	29	28	-27	-26	25	24
8	24	25	26	27	28	29	30	31	-16	-17	-18	-19	-20	-21	-22	-23
9	25	-24	27	-26	29	-28	-31	30	17	-16	19	-18	21	-20	-23	22
10	26	-27	-24	25	30	31	-28	-29	18	-19	-16	17	22	23	-20	-21
11	27	26	-25	-24	31	-30	29	-28	19	18	-17	-16	23	-22	21	-20
12	28	-29	-30	-31	-24	25	26	27	20	-21	-22	-23	-16	17	18	19
13	29	28	-31	30	-25	-24	-27	26	21	20	-23	22	-17	-16	-19	18
14	30	31	28	-29	-26	27	-24	-25	22	23	20	-21	-18	19	-16	-17
15	31	-30	29	28	-27	-26	25	-24	23	-22	21	20	-19	-18	17	-16
16	-0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
17	-1	-0	-3	2	-5	4	7	-6	-9	8	11	-10	13	-12	-15	14
18	-2	3	-0	-1	-6	-7	4	5	-10	-11	8	9	14	15	-12	-13
19	-3	-2	1	-0	-7	6	-5	4	-11	10	-9	8	15	-14	13	-12
20	-4	5	6	7	-0	-1	-2	-3	-12	-13	-14	-15	8	9	10	11
21	-5	-4	7	-6	1	-0	3	-2	-13	12	-15	14	-9	8	-11	10
22	-6	-7	-4	5	2	-3	-0	1	-14	15	12	-13	-10	11	8	-9
23	-7	6	-5	-4	3	2	-1	-0	-15	-14	13	12	-11	-10	9	8
24	-8	9	10	11	12	13	14	15	-0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7
25	-9	-8	11	-10	13	-12	-15	14	1	-0	3	-2	5	-4	-7	6
26	-10	-11	-8	9	14	15	-12	-13	2	-3	-0	1	6	7	-4	-5
27	-11	10	-9	-8	15	-14	13	-12	3	2	-1	-0	7	-6	5	-4
28	-12	-13	-14	-15	-8	9	10	11	4	-5	-6	-7	-0	1	2	3
29	-13	12	-15	14	-9	-8	-11	10	5	4	-7	6	-1	-0	-3	2
30	-14	15	12	-13	-10	11	-8	-9	6	7	4	-5	-2	3	-0	-1
31	-15	-14	13	12	-11	-10	9	-8	7	-6	5	4	-3	-2	1	-0
32	-48	-49	-50	-51	-52	-53	-54	-55	-56	-57	-58	-59	-60	-61	-62	-63
33	-49	48	51	-50	53	-52	-55	54	57	-56	-59	58	-61	60	63	-62
34	-50	-51	48	49	54	55	-52	-53	58	59	-56	-57	-62	-63	60	61
35	-51	50	-49	48	55	-54	53	-52	59	-58	57	-56	-63	62	-61	60
36	-52	-53	-54	-55	48	49	50	51	60	61	62	63	-56	-57	-58	-59
37	-53	52	-55	54	-49	48	-51	50	61	-60	63	-62	57	-56	59	-58
38	-54	55	52	-53	-50	51	48	-49	62	-63	-60	61	58	-59	-56	57
39	-55	-54	53	52	-51	-50	49	48	63	62	-61	-60	59	58	-57	-56
40	-56	-57	-58	-59	-60	-61	-62	-63	48	49	50	51	52	53	54	55
41	-57	56	-59	58	-61	60	63	-62	-49	48	-51	50	-53	52	55	-54
42	-58	59	56	-57	-62	-63	60	61	-50	51	48	-49	-54	-55	52	53
43	-58	59	56	-57	-62	-63	60	61	-50	51	48	-49	-54	-55	52	53
44	-60	61	62	63	56	-57	-58	-59	-52	53	54	55	48	-49	-50	-51
45	-61	-60	63	-62	57	56	59	-58	-53	-52	55	-54	49	48	51	-50
46	-62	-63	-60	61	58	-59	56	57	-54	-55	-52	53	50	-51	48	49
47	-63	62	-61	-60	59	58	-57	56	-55	54	-53	-52	51	50	-49	48
48	32	-33	-34	-35	-36	-37	-38	-39	-40	-41	-42	-43	-44	-45	-46	-47
49	33	32	35	-34	37	-36	-39	38	41	-40	-43	42	-45	44	47	-46
50	34	-35	32	33	38	39	-36	-37	42	43	-40	-41	-46	-47	44	45
51	35	34	-33	32	39	-38	37	-36	43	-42	41	-40	-47	46	-45	44
52	36	-37	-38	-39	32	33	34	35	44	45	46	47	-40	-41	-42	-43
53	37	36	-39	38	-33	32	-35	34	45	-44	47	-46	41	-40	43	-42
54	38	39	36	-37	-34	35	32	-33	46	-47	-44	45	42	-43	-40	41
55	39	-38	37	36	-35	-34	33	32	47	46	-45	-44	43	42	-41	-40
56	40	-41	-42	-43	-44	-45	-46	-47	32	33	34	35	36	37	38	39
57	41	40	-43	42	-45	44	47	-46	-33	3	2	-35	34	-37	36	39
58	42	43	40	-41	-46	-47	44	45	-34	35	32	-33	-38	-39	36	37
59	43	-42	41	40	-47	46	-45	44	-35	-34	33	32	-39	38	-37	36
60	44	45	46	47	40	-41	-42	-43	-36	37	38	39	-38	33	32	-35
61	45	-44	47	-46	41	40	43	-42	-37	-36	39	-38	33	32	35	-34
62	46	-47	-44	45	42	-43	40	41	-38	-39	-36	37	34	-35	32	33
63	47	46	-45	-44	43	42	-41	40	-39	38	-37	-36	35	34	-33	32

.	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47
0	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47
1	33	-32	-35	34	-37	36	39	-38	-41	40	43	-42	45	-44	-47	46
2	34	35	-32	-33	-38	-39	36	37	-42	-43	40	41	46	47	-44	-45
3	35	-34	33	-32	-39	38	-37	36	-43	42	-41	40	47	-46	45	-44
4	36	37	38	39	-32	-33	-34	-35	-44	-45	-46	-47	40	41	42	43
5	37	-36	39	-38	33	-32	35	-34	45	44	-47	46	-41	40	-43	42
6	38	-39	-36	37	34	-35	-32	33	-46	47	44	-45	-42	43	40	-41
7	39	38	-37	-36	35	34	-33	-32	-47	-46	45	44	-43	-42	41	40
8	40	41	42	43	44	45	46	47	-32	-33	-34	-35	-36	-37	-38	-39
9	41	-40	43	-42	45	-44	-47	46	33	-32	35	-34	37	-36	-39	38
10	42	-43	-40	41	46	47	-44	-45	34	-35	-32	33	38	39	-36	-37
11	42	-43	-40	41	46	47	-44	-45	34	-35	-32	33	38	39	-36	-37
12	44	-45	-46	-47	-40	41	42	43	36	-37	-38	-39	-32	33	34	35
13	45	44	-47	46	-41	-40	-43	42	37	36	-39	38	-33	-32	-35	34
14	46	47	44	-45	-42	43	-40	-41	38	39	36	-37	-34	35	-32	-33
15	47	-46	45	44	-43	-42	41	-40	39	-38	37	36	-35	-34	33	-32
16	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63
17	49	-48	51	-50	53	-52	-55	54	57	-56	-59	58	-61	60	63	-62
18	50	-51	-48	49	54	55	-52	-53	58	59	-56	-57	-62	-63	60	61
19	51	50	-49	-48	55	-54	53	-52	59	-58	57	-56	-63	62	-61	60
20	52	-53	-54	-55	-48	49	50	51	60	61	62	63	-56	-57	-58	59
21	53	52	-55	54	-49	-48	-51	50	61	-60	63	-62	57	-56	59	-58
22	54	55	52	-53	-50	51	-48	-49	62	-63	-60	61	58	-59	-56	57
23	55	-54	53	52	-51	-50	49	-48	63	62	-61	-60	59	58	-57	-56
24	56	-57	-58	-59	-60	-61	-62	-63	-48	49	50	51	52	53	54	55
25	57	56	-59	58	-61	60	63	-62	-49	-48	-51	50	-53	52	55	-54
26	58	59	56	-57	-62	-63	60	61	-50	51	-48	-49	-54	-55	52	53
27	59	-58	57	56	-63	62	-61	60	-51	-50	49	-48	-55	54	-53	52
28	60	61	62	63	56	-57	-58	-59	-52	53	54	55	-48	-49	-50	-51
29	61	-60	63	-62	57	56	59	-58	-53	-52	55	-54	49	-48	51	-50
30	62	-63	60	61	58	-59	56	57	-54	-55	-52	53	50	-51	-48	49
31	63	62	-61	-60	59	58	-57	56	-55	54	-53	-52	51	50	-49	-48
32	-0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
33	-1	-0	-3	2	-5	4	7	-6	-9	8	11	-10	13	-12	-15	14
34	-2	3	-0	-1	-6	-7	4	5	-10	-11	8	9	14	15	-12	-13
35	-3	-2	1	-0	-7	6	-5	4	-11	10	-9	8	15	-14	13	-12
36	-4	5	6	7	-0	-1	-2	-3	-12	-13	-14	-15	8	9	10	11
37	-5	-4	7	-6	1	-0	3	-2	-13	12	-15	14	-9	8	-11	10
38	-6	-7	-4	5	2	-3	-0	1	-14	15	12	-13	-10	11	8	-9
39	-7	6	-5	-4	3	2	-1	-0	-15	-14	13	12	-11	-10	9	8
40	-8	9	10	11	12	13	14	15	-0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7
41	-9	-8	11	-10	13	-12	-15	14	1	-0	3	-2	5	-4	-7	6
42	-10	-11	-8	9	14	15	-12	-13	2	-3	-0	1	6	7	-4	-5
43	-11	10	-9	-8	15	-14	13	-12	3	2	-1	-0	7	-6	5	-4
44	-12	-13	-14	-15	-8	9	10	11	4	-5	-6	-7	-0	1	2	3
45	-13	12	-15	14	-9	-8	-11	10	5	4	-7	6	-1	-0	-3	2
46	-14	15	12	-13	-10	11	-8	-9	6	7	4	-5	-2	3	-0	-1
47	-15	-14	13	12	-11	-10	9	-8	7	-6	5	4	-3	-2	1	-0
48	-16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
49	-17	-16	19	-18	21	-20	-23	22	25	-24	-27	26	-29	28	31	-30
50	-18	-19	-16	17	22	23	-20	-21	26	27	-24	-25	-30	-31	28	29
51	-19	18	-17	-16	23	-22	21	-20	27	-26	25	-24	-31	30	-29	28
52	-20	-21	-22	-23	-16	17	18	19	28	29	30	31	-24	-25	-26	-27
53	-21	20	-23	22	-17	-16	-19	18	29	-28	31	-30	25	-24	27	-26
54	-22	23	20	-21	-18	19	-16	-17	30	-31	-28	29	26	-27	-24	25
55	-23	-22	21	20	-19	-18	17	-16	31	30	-29	-28	27	26	-25	-24
56	-24	-25	-26	-27	-28	-29	-30	-31	-16	17	18	19	20	21	22	23
57	-25	24	-27	26	-29	28	31	-30	-17	-16	-19	18	-21	20	23	-22
58	-26	27	24	-25	-30	-31	28	29	-18	19	-16	-17	-22	-23	20	21
59	-27	-26	25	24	-31	30	-29	28	-19	-18	17	-16	-23	22	-21	20
60	-28	29	30	31	24	-25	-26	-27	-20	21	22	23	-16	-17	-18	-19
61	-29	-28	31	-30	25	24	-27	-26	-21	-20	23	-22	17	-16	19	-18
62	-30	-31	-28	29	26	-27	24	25	-22	-23	-20	21	18	-19	-16	17
63	-31	30	-29	-28	27	26	-25	24	-23	22	-21	-20	19	18	-17	-16

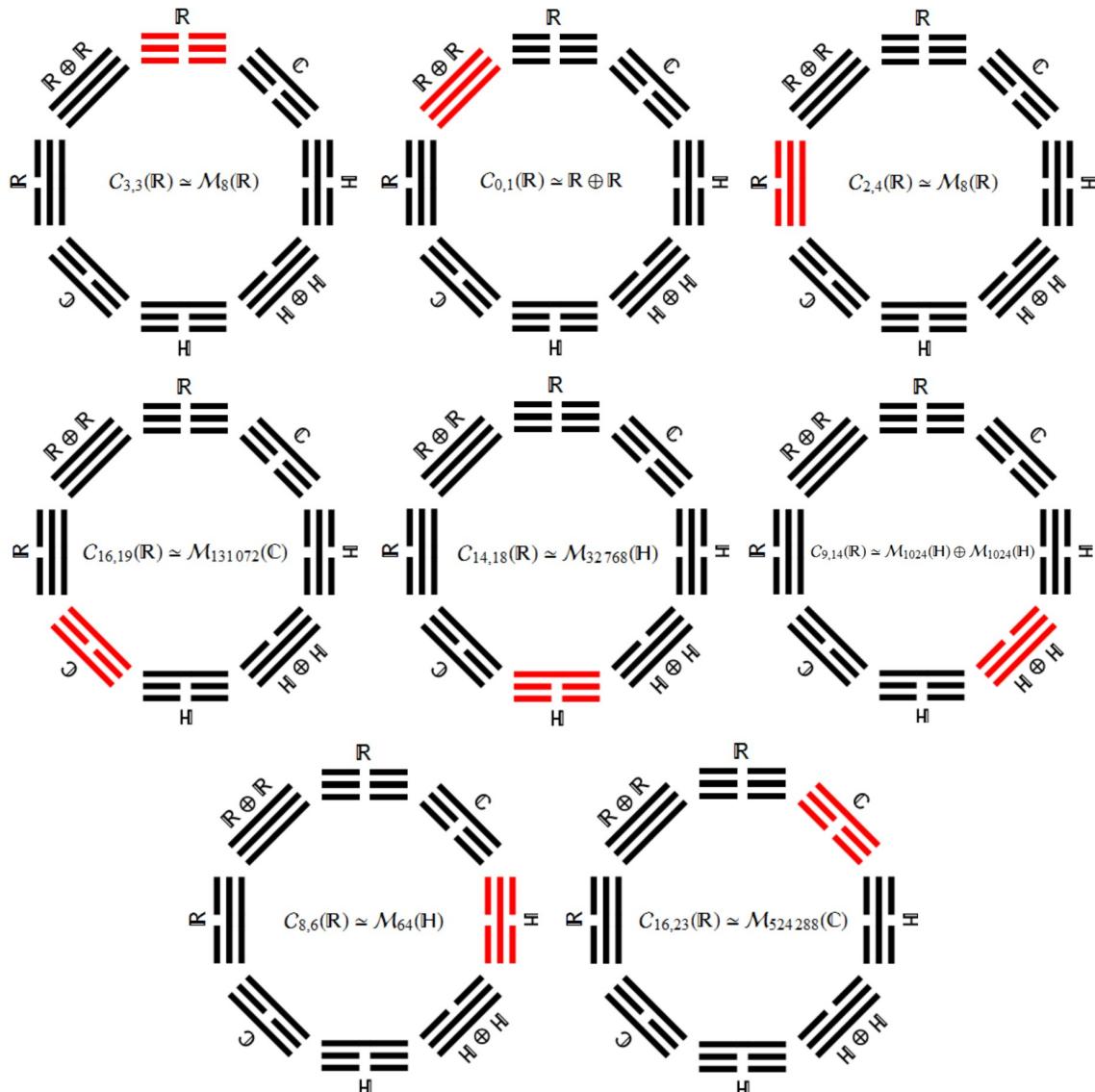
.	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63
0	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63
1	-49	48	51	-50	53	-52	-55	54	57	-56	-59	58	-61	60	63	-62
2	-50	-51	48	49	54	55	-52	-53	58	59	-56	-57	-62	-63	60	61
3	-51	50	-49	48	55	-54	53	-52	59	-58	57	-56	-63	62	-61	60
4	-52	-53	-54	-55	48	49	50	51	60	61	62	63	-56	-57	-58	-59
5	-53	52	-55	54	-49	48	-51	50	61	-60	63	-62	57	56	59	-58
6	-54	55	52	-53	-50	51	48	-49	62	-63	-60	61	58	-59	-56	57
7	-55	-54	53	52	-51	-50	49	48	63	62	-61	-60	59	58	-57	-56
8	-56	-57	-58	-59	-60	-61	-62	-63	48	49	50	51	52	53	54	55
9	-57	56	-59	58	-61	60	63	-62	-49	48	-51	50	-53	52	55	-54
10	-58	59	56	-57	-62	-63	60	61	-50	51	48	-49	-54	-55	52	53
11	-59	-58	57	56	-63	62	-61	60	-51	-50	49	48	-55	54	-53	52
12	-60	61	62	63	56	-57	-58	-59	-52	53	54	55	48	-49	-50	-51
13	-61	-60	63	-62	57	56	59	-58	-53	-52	55	-54	49	48	51	-50
14	-62	-63	-60	61	58	-59	56	57	-54	-55	-52	53	50	-51	48	49
15	-63	62	-61	-60	59	58	-57	56	-55	54	-53	-52	51	50	-49	48
16	-32	-33	-34	-35	-36	-37	-38	-39	-40	-41	-42	-43	-44	-45	-46	-47
17	33	-32	35	-34	37	-36	-39	38	41	-40	-43	42	-45	44	47	-46
18	34	-35	-32	33	38	39	-36	-37	42	43	-40	-41	-46	-47	44	45
19	35	34	-33	-32	39	-38	37	-36	43	-42	41	-40	-47	46	-45	44
20	36	-37	-38	-39	-32	33	34	35	44	45	46	47	-40	-41	-42	-43
21	37	36	-39	38	-33	-32	-35	34	45	-44	47	-46	41	-40	43	-42
22	38	39	36	-37	-34	35	-32	-33	46	-47	-44	45	42	-43	-40	41
23	39	-38	37	36	-35	-34	33	-32	47	46	-45	-44	43	42	-41	-40
24	40	-41	-42	-43	-44	-45	-46	-47	-32	33	34	35	36	37	38	39
25	41	40	-43	42	-45	44	47	-46	-33	-32	-35	34	-37	36	39	-38
26	42	43	40	-41	-46	-47	44	45	-34	35	-32	-33	-38	-39	36	37
27	43	-42	41	40	-47	46	-45	44	-35	-34	33	-32	-39	38	-37	36
28	44	45	46	47	40	-41	-42	-43	-36	37	38	39	-32	-33	-34	-35
29	45	-44	47	-46	41	40	43	-42	-37	-36	39	-38	33	-32	35	-34
30	46	-47	-44	45	42	-43	40	41	-38	-39	-36	37	34	-35	-32	33
31	47	46	-45	-44	43	42	-41	40	-39	38	-37	-36	35	34	-33	-32
32	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
33	-17	16	19	-18	21	-20	-23	22	25	-24	-27	26	-29	28	31	-30
34	-18	-19	16	17	22	23	-20	-21	26	27	-24	-25	-30	-31	28	29
35	-19	18	-17	16	23	-22	21	-20	27	-26	25	-24	-31	30	-29	28
36	-20	-21	-22	-23	16	17	18	19	28	29	30	31	-24	-25	-26	-27
37	-21	20	-23	22	-17	16	-19	18	29	-28	31	-30	25	-24	27	-26
38	-22	23	20	-21	-18	19	16	-17	30	-31	-28	29	26	-27	-24	25
39	-23	-22	21	20	-19	-18	17	16	31	30	-29	-28	27	26	-25	-24
40	-24	-25	-26	-27	-28	-29	-30	-31	16	17	18	19	20	21	22	23
41	-25	24	-27	26	-29	28	31	-30	-17	16	-19	18	-21	20	23	-22
42	-26	27	24	-25	-30	-31	28	29	-18	19	16	-17	-22	-23	20	21
43	-27	-26	25	24	-31	30	-29	28	-19	-18	17	16	-23	22	-21	20
44	-28	29	30	31	24	-25	-26	-27	-20	21	22	23	16	-17	-18	-19
45	-29	-28	31	-30	25	24	27	-26	-21	-20	23	-22	17	16	19	-18
46	-30	-31	-28	29	26	-27	24	25	-22	-23	-20	21	18	-19	16	17
47	-31	30	-29	-28	27	26	-25	24	-23	22	-21	-20	19	18	-17	16
48	-0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8	-9	-10	-11	-12	-13	-14	-15
49	1	-0	3	-2	5	-4	-7	6	9	-8	-11	10	-13	12	15	-14
50	2	-3	-0	1	6	7	-4	-5	10	11	-8	-9	-14	-15	12	13
51	3	2	-1	-0	7	-6	5	-4	11	10	9	-8	-15	14	-13	12
52	4	-5	-6	-7	-0	1	2	3	12	13	14	15	-8	-9	-10	-11
53	5	4	-7	6	-1	-0	-3	2	13	-12	15	-14	9	-8	11	-10
54	6	7	4	-5	-2	3	-0	-1	14	-15	-12	13	10	-11	-8	9
55	7	-6	5	4	-3	-2	1	-0	15	14	-13	-12	11	10	-9	-8
56	8	-9	-10	-11	-12	-13	-14	-15	-0	1	2	3	4	5	6	7
57	9	8	-11	10	-13	12	15	-14	-1	-0	-3	2	-5	4	7	-6
58	10	11	8	-9	-14	-15	12	13	-2	3	-0	-1	-6	-7	4	5
59	11	-10	9	8	-15	14	-13	12	-3	-2	1	-0	-7	6	-5	4
60	12	13	14	15	8	-9	-10	-11	-4	5	6	7	-0	-1	-2	-3
61	13	-12	15	-14	9	8	11	-10	-5	-4	7	-6	1	-0	3	-2
62	14	-15	-12	13	10	-11	8	9	-6	-7	-4	5	2	-3	-0	1
63	15	14	-13	-12	11	10	-9	8	-7	6	-5	-4	3	2	-1	-0

Tabela A.12: Tabela de multiplicação da álgebra de Pauli  $Cl_3$ .

.	0	1	2	3	12	13	23	123
0	0	1	2	3	12	13	23	123
1	1	0	12	13	2	3	123	23
2	2	-12	0	23	1	-123	3	-13
3	3	-13	-23	0	123	-1	-2	12
12	12	-2	1	123	-0	-23	13	-3
13	13	-3	-123	1	23	-0	-12	2
23	23	123	-3	2	-13	12	-0	-1
123	123	23	-13	12	-3	2	-1	-0



**Figura A.1.** Diagrama de multiplicação dos sedenions. Cada reta desse diagrama possui apenas três pontos; multiplicando-se dois pontos de uma reta obtém-se o terceiro ponto dessa mesma reta, i.e., a multiplicação de dois pontos colineares produz o terceiro ponto colinear. Outrossim, cada curva possui apenas três pontos e a multiplicação de dois pontos de uma curva produz o terceiro ponto da mesma. A multiplicação de dois pontos no sentido da seta produz o terceiro ponto com sinal positivo (+), e a multiplicação no sentido contrário produz o terceiro ponto com sinal negativo (-), e.g.,  $e_7e_9 = e_{14}$  e  $e_7e_{14} = -e_9$ . Importante notar que a multiplicação é cíclica, cada tripla de pontos está ciclicamente ordenada no sentido da seta, e.g.,  $e_{12}e_4 = e_8$ ,  $e_4e_8 = e_{12}$  e  $e_8e_{12} = e_4$ , fechando, assim, um ciclo. A partir desse diagrama, juntamente com as propriedades do elemento identidade  $e_0$ :  $e_0e_0 = e_0$ ,  $e_ke_k = -e_0$  e  $e_ke_0 = e_0e_k = e_k$ ,  $\forall k = 1, \dots, 15$ , é possível obter completamente a tabela A.9 de multiplicação dos sedenions.



**Figura A.2.** O Relógio de Clifford. Os diagramas foram gerados através da demonstração iterativa disponibilizada no formato CDF (Computational Document Format) pelo *Wolfram Demonstration Project* <http://demonstrations.wolfram.com/TrigramsAndRealCliffordAlgebras>. Os símbolos correspondem aos trigramas do *I ching*, que, numericamente, simbolizam 0, 1, 2, .., 7, no sentido horário. Nesta figura apresentamos 8 configurações diferentes do relógio de Clifford, para diferentes valores de  $p$  e  $q$ , ilustrando a 8-periodicidade das álgebras de Clifford reais. Para mais detalhes consulte <http://math.ucr.edu/home/baez/week211.html>.

# Referências Bibliográficas

- [1] A. A. ALBERT, *Power-Associative Rings*. Trans. of the Amer. Math. Soc. **64** (1948), no. 3 , 552-593.
- [2] A. A. ALBERT, *Quadratic forms permitting composition*. Annals of Mathematics, Second Series **43** (1942), no. 1, 161-177.
- [3] A. A. ALBERT, *Structure of Algebras*. American Mathematical Society, Colloquium publications **24**, 2003.
- [4] A. A. ALBERT, *Studies in Modern Algebra*. MAA, Studies in Mathematics, Vol. 2, 1963.
- [5] S. L. ALTMAN, *Hamilton, Rodrigues and the Quaternion Scandal*. Mathematics Magazine, **62** (1989), no. 5, 291-308.
- [6] S. L. ALTMAN, *Rotations, Quaternions and Double Groups*. Oxford University Press, 1986.
- [7] R. ARENAS, *Constructing a Matrix Representation of the Lie Group  $G_2$* . Harvey Mudd College, Senior Thesis, 2005. [<https://www.math.hmc.edu/seniorthesis/archives/2005/rarenas/rarenas-2005-thesis.pdf>]
- [8] S. AWODEY, *Category Theory*. Oxford University Press, 2006.
- [9] J. BAEZ, *The Octonions*. Bulletin of the American Mathematical Society **39** (2002), no. 2, 145-205. [[arXiv:math/0105155 \[math.RA\]](https://arxiv.org/abs/math/0105155)]
- [10] D. K. BISS ET AL., *Large annihilators in Cayley-Dickson algebras*. Communications in Algebra **36** (2008), 632-664. [[arXiv:math/0511691 \[math.RA\]](https://arxiv.org/abs/math/0511691)]
- [11] T. BRÖCKER AND T TOM DIECK, *Representations of Compact Lie Groups*. GTM, Vol. 98, Springer-Verlag, 1985.
- [12] R. B. BROWN, *On Generalized Cayley-Dickson Algebras*. Pacific Journal of Mathematics **20** (1967), no. 3, 415-422.
- [13] M. C. GARCÍA AND A. R. PALACIOS , *A new simple proof on the Gelfand-Mazur-Kaplansky Theorem*. Proceedings of the American Mathematical Society **123** (1995), no. 9, 2663–2666.
- [14] E. CARTAN, *Les groupes réels simples finis et continus*. Proceedings of the American Mathematical Society Ann. Sci. École Norm. Sup. **31** (1914), 262-255.

- [15] R. E. CAWAGAS ET AL., *The basic subalgebra structure of the Cayley-Dickson algebra of dimension 32 (Trigintaduonions)*. arXiv:0907.2047 [math.RA], 2009.
- [16] A. CAYLEY, *On Jacobi's elliptic functions, in reply to the Rev. . Bronwin; and on quaternion (appendix only)*. The Collected Mathematical Papers, Johnson Reprint Co., NY, 1995.
- [17] W. K. CLIFFORD, *Applications of Grassmann's extensive algebra*. Amer. Jour. Math. **1** (1878), 350-358.
- [18] W. K. CLIFFORD, *On the Classification of Geometric Algebras*. Paper XLIII, Mathematical Papers, Macmillan, London, 1882.
- [19] W. K. CLIFFORD, *A Preliminary Sketch of Bi-quaternions*. Mathematical Papers, NY: Chelsen (1968), 38-55.
- [20] C. CHEVALLEY, *The algebraic theory of Spinors and Clifford algebras*. Springer-Verlag, NY, 1967.
- [21] J. H. CONWAY AND D. A. SMITH, *On Quaternions and Octonions: Their Geometry, Arithmetic and Symmetry*. Natick, Mass., A K Peters, 2003.
- [22] M. J. CROWE, *A History of Vector Analysis: the evolution of the idea of a vectorial system*. Dover Publications, NY, 1985.
- [23] L. E. DICKSON, *Algebras and Their Arithmetics*. University of Chicago Press, 1923.
- [24] L. E. DICKSON, *On Quaternions and Their Generalization and the History of the Eight Square Theorem*. Annals of Mathematics, Second Series **20** (1919), no. 3, 155–171.
- [25] H. D. EBBINGHAUS ET AL., *Numbers*. Graduate Texts in Mathematics, Springer, 1991.
- [26] T. FRIEDRICH, *Dirac Operators in Riemannian Geometry*. Graduate Studies in Mathematics, AMS, **25**, 2000.
- [27] R. W. FAREBROTHER ET AL., *Matrix representation of quaternions*. Linear Algebra and its Applications **362** (2003), 251–255.
- [28] D. J. H. GARLING, *Clifford Algebras: An Introduction*. London Mathematical Society, Cambridge University Press, 2011.
- [29] J. GALLIER, *Clifford Algebras, Clifford Groups, and a Generalization of the Quaternions: The Pin and Spin Groups*. arXiv:0805.0311 [math.GM], 2014.
- [30] I. M. GELFAND, *Normierte Ringe*. Math. Sborn **9** (1941), 3-23.
- [31] M. GOLDBERG AND T. J. LAFFEY, *On the Radius in Cayley-Dickson Algebras*. arXiv:1505.01670 [math.RA], 2015.
- [32] W. H. GREUB, *Multilinear Algebra*. Springer-Verlag, NY, 1967.
- [33] P. A. GRILLET, *Abstract Algebra*. Springer-Science, NY, 2007.

- [34] W. R. HAMILTON, *On quaternions, or on a new system of imaginaries in algebra.* Philosophical Magazine **25** (1844), no. 3, 489–495.
- [35] W. R. HAMILTON, *Lectures on quaternions.* Dublin: Hodges and Smith, 1853.
- [36] F. R. HARVEY, *Spinors and Calibrations.* Academic Press, 1990.
- [37] M. HAZEWINKEL ET AL., *Algebras, Rings and Modules.* Kluwer Academic Publishers, 2004.
- [38] D. HESTENES, *Spacetime Algebra.* Gordon and Breach, NY, 1966.
- [39] H. HOPF, *Systeme symmetrischer Bilinearformen und euklidische Modelle der projektiven Räume.* Vjschr. d. Naturforsch. Gesell. Zürich **85** (1940). 165-177.
- [40] A. HURWITZ, *Ueber die Composition der quadratischen Formen von beliebig vielen Variablen.* Nachr. Ges. Wiss Gottingen (1898), 309-316.
- [41] N. JACOBSON, *Lie Algebras.* Interscience, 1962.
- [42] I. L. KANTOR AND A. S. SOLODOVNIKOV, *Hypercomplex Numbers: an elementary introduction to algebras.* Springer-Verlag, NY, 1989.
- [43] B. M. KIVUNGE AND J. D. H. SMITH, *Sedenions extension loops and frames of hypercomplex  $2^n$ -ons.* Iowa State University, Ph.D. Thesis, 2004.
- [44] A. I. KOSTRIKIN AND Y. I. MANIN, *Linear Algebra and Geometry.* Amsterdam: OPA, 1989.
- [45] S. LANG, *Algebra.* Reading, MA: Addison-Wesley, 1965.
- [46] H. B. LAWSON JR. AND M.-L. MICHELSON, *Spin Geometry.* Princeton Mathematical Series, Princeton University Press, 1989.
- [47] P. LOUNESTO, *Clifford Algebras and Spinors.* London Mathematical Society Lecture Note Series. 239, Cambridge University Press, 1997.
- [48] S. MAZUR, *Sur les anneaux linéaires.* C. R. Acad. Sci. Paris **207** (1938), 1025-1027.
- [49] E. MEINRENKEN, *Clifford Algebras and Lie Theory.* Springer-Verlag, 2013.
- [50] C. W. NORMAN, *Undergraduate Algebra.* Oxford University Press, 1986.
- [51] S. OKUBO, *Introduction to Octonions and other Non-Associative Algebras in Physics.* Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [52] A. OSTROWSKI, *Über einige Lösungen der Funktionalgleichung  $\phi(x)\phi(y) = \phi(xy)$ .* Acta Math. **41** (1918), 271-284.
- [53] A. PFISTER, *Multiplikative quadratische Formen.* Arch. Math. **16** (1965), 363-370.
- [54] A. PFISTER, *Zur Darstellung von  $-1$  als Summe von Quadraten in einem Körper.* J. London Math. Soc. **40** (1965), 159-165.
- [55] I. PORTEOUS, *Clifford Algebras and the Classical Groups.* Cambridge University Press, 1986.

- [56] I. PORTEOUS, *Topological Geometry*. Cambridge University Press, 1981.
- [57] M. SANIGA, F. HOLWECK AND P. PRACNA, *Cayley-Dickson Algebras and Finite Geometry*. arXiv:1405.6888 [math.CO], 2014.
- [58] G. B. PRICE, *An Introduction to Multicomplex Spaces and Functions*. Monographs and textbooks in Pure and Applied Mathematics, Marcel Dekker, 1991.
- [59] A. R. RAJWADE, *Squares*. Cambridge University Press, 1993.
- [60] M. RIOS, *Jordan C\*-Algebras and Supergravity*. arXiv:1005.3514 [hep-th], 2010.
- [61] S. ROMAN, *Advanced Linear Algebra*. Graduate Texts in Mathematics, Springer, 2008.
- [62] A. B. ROMANOWSKA AND J. D. H. SMITH, *Post-Modern Algebra*. Wiley, 1999.
- [63] B. A. ROSENFIELD, *Geometry of Lie Groups*. Kluwer Academic Publishers, 1997.
- [64] J. ROTMAN, *Advanced Modern Algebra*. Graduate Studies in Mathematics, AMS, 2010.
- [65] S. J. SANGWINE AND N. L. BIHAN, *Quaternion polar representation with a complex modulus and complex argument inspired by the Cayley-Dickson form*. arXiv:0802.0852 [math.RA], 2008.
- [66] S. J. SANGWINE ET AL., *Fundamental representations and algebraic properties of biquaternions or complexified quaternions*. arXiv:1001.0240 [math.RA], 2010.
- [67] A. A. SAGLE, *Malcev Algebras*. Trans. Am. Math. Soc. **101** (1961), 426-458.
- [68] R. D. SCHAFER, *An introduction to non-associative algebras*. New York, NY, Springer, 1992.
- [69] R. D. SCHAFER, *On the Algebras Formed by the Cayley-Dickson Process*. Amer. Jour. of Math. **76** (1954), no. , 435–446.
- [70] W. D. SMITH, *Quaternions, octonions, and now, 16-ons and  $2^n$ -ons; New kinds of numbers*. <http://www.rangevoting.org/WarrenSmithPages/homepage/nce2.pdf>, 2004. (disponível apenas online)
- [71] T. A. SPRINGER AND F. D. VELDKAMP, *Octonions, Jordan Algebras and Exceptional Groups*. Springer Monographs in Mathematics, Springer, 2000.
- [72] J. VAZ JR. E R. ROCHA JR., *Álgebras de Clifford e Espinoras*. Livraria da Física, 2012.
- [73] B. L. VAN DER WAERDEN, *A History of Algebra*. Springer-Verlag, Berlin, 1985.
- [74] G. P. WENE, *A construction relating Clifford algebras and Cayley-Dickson algebras*. J. Math. Phys. **25** (1984), no. 8, 2351–2353.
- [75] H. WEYL, *The Classical Groups: Their Invariants and Representations*. Princeton University Press, 1966.

- [76] H. ZASSENHAUS AND W. EICHHORN, *Herleitung von Acht-und Sechzehn-Quadrat-Identitäten mit Hilfe von Eigenschaften der verallgemeinerten Quaternionen und der Cayley–Dicksonchen Zahlen.* Arch. Math. **17** (1966), 492–496.

## Softwares

- [77] Software *The Cayley-Dickson Calculator*: <http://jwbales.us>. 2009 © John Wayland Bales, GNU General Public License.

## Leitura adicional

- [78] A. ANASTASIOU ET AL., *Super Yang-Mills, division algebras and triality.* arXiv:1309.0546 [hep-th], 2014.
- [79] I. BENN AND R. TUCKER, *An Introduction to Spinors and Geometry with applications in Physics.* Adam Hilger, 1987.
- [80] M. CARMELI AND S. MALIN, *Theory of Spinors: An Introduction.* World Scientific, 2000.
- [81] E. CARTAN, *The Theory of Spinors.* The M.I.T. Press, Cambridge, MA, 1967.
- [82] A. CHARLIER ET AL., *Tensors and the Clifford Algebra: Applications to the Physics of Bosons and Fermions.* Marcel Dekker, New York, 1992.
- [83] B. C. CHANYAL ET AL., *Octonion Quantum Chromodynamics.* Int. J. Theor. Phys., **51**, (11), pp. 3410-3422, 2012.
- [84] T. KUGO AND P. TOWNSEND, *Supersymmetry and the division algebras.* Nucl. Phys., **B221**, pp. 357-380, 1983.
- [85] R. PENROSE AND W. RINDLER, *Spinors and Space-Time: Two-spinor calculus and relativistic fields.* Vol I, Cambridge University Press, 1984.
- [86] R. PENROSE AND W. RINDLER, *Spinors and Space-Time: Spinor and twistor methods in space-time geometry.* Vol II, Cambridge University Press, 1986.
- [87] M. R. TRAUBENBERG, *Clifford Algebras in Physics.* arXiv:hep-th/0506011 [hep-th], 2005.