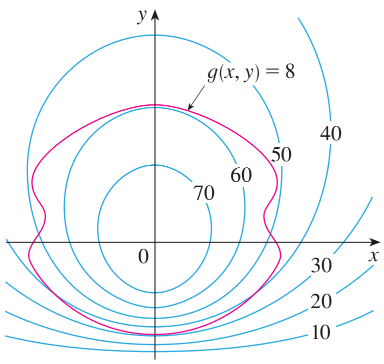
Exercícios selecionados:

4, 5, 7, 9, 11, 20, 38, 43

14.8 Exercícios

1. Na figura estão um mapa de contorno de f e a curva de equação $g(x, y) = 8$. Estime os valores máximo e mínimo de f sujeita à restrição $g(x, y) = 8$. Explique suas razões.



2. (a) Use uma calculadora gráfica ou um computador para traçar o círculo $x^2 + y^2 = 1$. Na mesma tela, trace diversas curvas da forma $x^2 + y = c$ até que você encontre duas que apenas toquem o círculo. Qual o significado dos valores de c dessas duas curvas?
(b) Utilize os multiplicadores de Lagrange para determinar os valores extremos de $f(x, y) = x^2 + y$ sujeita à restrição $x^2 + y^2 = 1$. Compare sua resposta com a da parte (a).

3–14 Utilize os multiplicadores de Lagrange para determinar os valores máximo e mínimo da função sujeita à(s) restrição(ões) dada(s).

3. $f(x, y) = x^2 + y^2$; $xy = 1$
4. $f(x, y) = 3x + y$; $x^2 + y^2 = 10$
5. $f(x, y) = y^2 - x^2$; $\frac{1}{4}x^2 + y^2 = 1$
6. $f(x, y) = e^{xy}$; $x^3 + y^3 = 16$
7. $f(x, y, z) = 2x + 2y + z$; $x^2 + y^2 + z^2 = 9$
8. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$; $x + y + z = 12$
9. $f(x, y, z) = xyz$; $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$
10. $f(x, y, z) = x^2y^2z^2$; $x^2 + y^2 + z^2 = 1$
11. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$; $x^4 + y^4 + z^4 = 1$
12. $f(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4$; $x^2 + y^2 + z^2 = 1$
13. $f(x, y, z, t) = x + y + z + t$; $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1$
14. $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$; $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1$

15–18 Determine os valores extremos de f sujeita a ambas as restrições.

15. $f(x, y, z) = x + 2y$; $x + y + z = 1$, $y^2 + z^2 = 4$
16. $f(x, y, z) = 3x - y - 3z$; $x + y - z = 0$, $x^2 + 2z^2 = 1$
17. $f(x, y, z) = yz + xy$; $xy = 1$, $y^2 + z^2 = 1$
18. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$; $x - y = 1$, $y^2 - z^2 = 1$

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador

SCA É necessário usar um sistema de computação algébrica

1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

19–21 Determine os valores extremos de f na região descrita pela desigualdade.

19. $f(x, y) = x^2 + y^2 + 4x - 4y, \quad x^2 + y^2 \leqslant 9$

20. $f(x, y) = 2x^2 + 3y^2 - 4x - 5, \quad x^2 + y^2 \leqslant 16$

21. $f(x, y) = e^{-xy}, \quad x^2 + 4y^2 \leqslant 1$

22. Considere o problema de maximizar a função $f(x, y) = 2x + 3y$ sujeita à restrição $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 5$.
(a) Tente usar multiplicadores de Lagrange para resolver este problema.
(b) $f(25,0)$ dá um valor maior que o obtido na parte (a)?
(c) Resolva o problema traçando a equação da restrição e diversas curvas de nível de f.
(d) Explique por que o método dos multiplicadores de Lagrange falha em resolver o problema.
(e) Qual é o significado de $f(9, 4)$?

23. Considere o problema de minimizar a função $f(x, y) = x$ na curva $y^2 + x^4 - x^3 = 0$ (uma piriforme).
(a) Tente usar multiplicadores de Lagrange para resolver este problema.
(b) Mostre que o valor mínimo é $f(0, 0) = 0$ mas que a condição $\nabla f(0, 0) = \lambda \nabla g(0, 0)$ não é satisfeita para nenhum valor de λ.
(c) Explique por que os multiplicadores de Lagrange falham em encontrar o mínimo neste caso.

SCA **24.** (a) Se seu sistema de computação algébrica traça o gráfico de curvas definidas implicitamente, use-o para estimar os valores mínimo e máximo de $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy$ sujeita à restrição $(x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 9$ por métodos gráficos.
(b) Resolva o problema da parte (a) com o auxílio dos multiplicadores de Lagrange. Use um SCA para resolver as equações numericamente. Compare sua resposta com a da parte (a).

25. A produção total P de certo produto depende da quantidade L de trabalho empregado e da quantidade K de capital investido. Nas Seções 14.1 e 14.3 discutimos como o modelo Cobb-Douglas $P = bL^{\alpha}K^{1-\alpha}$ segue a partir de determinadas suposições econômicas, onde b e α são constantes positivas e $\alpha < 1$. Se o custo por unidade de trabalho for m e o custo por unidade de capital for n, e uma companhia puder gastar somente uma quantidade p de dinheiro como despesa total, então a maximização da produção P estará sujeita à restrição $mL + nK = p$. Mostre que a produção máxima ocorre quando

$$L = \frac{\alpha p}{m} \quad \text{e} \quad K = \frac{(1 - \alpha)p}{n}$$

26. Em relação ao Problema 25, suponha agora que a produção seja fixada em $bL^{\alpha}K^{1-\alpha} = Q$, onde Q é uma constante. Quais valores de L e K minimizam a função custo $C(L, K) = mL + nK$?

27. Utilize os multiplicadores de Lagrange para demonstrar que o retângulo com área máxima, e que tem um perímetro constante p, é um quadrado.

28. Use multiplicadores de Lagrange para demonstrar que o triângulo com área máxima, e que tem um perímetro constante p, é equilátero.
Dica: Utilize a fórmula de Heron para a área:

$$A = \sqrt{s(s - x)(s - y)(s - z)}$$

onde $s = p/2$ e x, y, z são os comprimentos dos lados.

29–41 Utilize os multiplicadores de Lagrange para dar uma solução alternativa aos exercícios da Seção 14.7 indicados.

29. Exercício 39	**30.** Exercício 40
31. Exercício 41	**32.** Exercício 42
33. Exercício 43	**34.** Exercício 44
35. Exercício 45	**36.** Exercício 46
37. Exercício 47	**38.** Exercício 48
39. Exercício 49	**40.** Exercício 50
41. Exercício 53	

42. Determine os volumes máximo e mínimo da caixa retangular cuja superfície tem 1 500 cm² e cuja soma dos comprimentos das arestas é 200 cm.

43. O plano $x + y + 2z = 2$ intercepta o paraboloide $z = x^2 + y^2$ em uma elipse. Determine os pontos dessa elipse que estão mais próximo e mais longe da origem.

44. O plano $4x - 3y + 8z = 5$ intercepta o cone $z^2 = x^2 + y^2$ em uma elipse.
(a) Faça os gráficos do cone, do plano e da elipse.
(b) Use os multiplicadores de Lagrange para achar os pontos mais alto e mais baixo da elipse.

SCA **45–46** Ache os valores de máximo e mínimo da função f sujeita às restrições dadas. Utilize um sistema de computação algébrica para resolver o sistema de equações proveniente do uso dos multiplicadores de Lagrange. (Se seu SCA achar somente uma solução, você pode precisar do uso de comandos adicionais.)

45. $f(x, y, z) = ye^{x-z}; \quad 9x^2 + 4y^2 + 36z^2 = 36, \quad xy + yz = 1$

46. $f(x, y, z) = x + y + z; \quad x^2 - y^2 = z, \quad x^2 + z^2 = 4$

47. (a) Determine o valor máximo de

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$$

sendo que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são números positivos e $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = c$, onde c é uma constante.
(b) Deduza do item (a) que se $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são números positivos, então

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leqslant \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

Essa desigualdade diz que a média geométrica de n números não pode ser maior que a média aritmética deles. Sob que circunstâncias as duas médias são iguais?

48. (a) Maximize $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ sujeita às restrições $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$ e $\sum_{i=1}^{n} y_i^2 = 1$.
(b) Tome

$$x_i = \frac{a_i}{\sqrt{\sum a_j^2}} \quad \text{e} \quad y_i = \frac{b_i}{\sqrt{\sum b_j^2}}$$

para mostrar que

$$\sum a_i b_i \leqslant \sqrt{\sum a_j^2}\, \sqrt{\sum b_j^2}$$

para todos os números $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$. Essa desigualdade é conhecida como a Desigualdade de Cauchy-Schwarz.

EXERCÍCIOS 14.8

1. $\approx 59, 30$
3. Sem máximo, mínimo $f(1, 1) = f(-1, -1) = 2$
5. Máximo $f(0, \pm 1) = 1$, mínimo $f(\pm 2, 0) = -4$
7. Máximo $f(2, 2, 1) = 9$, mínimo $f(-2, -2, -1) = -9$
9. Máximo $2/\sqrt{3}$, mínimo $-2/\sqrt{3}$
11. Máximo $\sqrt{3}$, mínimo 1
13. Máximo $f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 2$,
mínimo $f\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = -2$
15. Máximo $f(1, \sqrt{2}, -\sqrt{2}) = 1 + 2\sqrt{2}$,
mínimo $f(1, -\sqrt{2}, \sqrt{2}) = 1 - 2\sqrt{2}$
17. Máximo $\frac{3}{2}$, mínimo $\frac{1}{2}$
19. Máximo $f(3/\sqrt{2}, -3/\sqrt{2}) = 9 + 12\sqrt{2}$,
mínimo $f(-2, 2) = -8$
21. Máximo $f(\pm 1/\sqrt{2}, \mp 1/(2\sqrt{2})) = e^{-1/4}$,
mínimo $f(\pm 1/\sqrt{2}, \pm 1/(2\sqrt{2})) = e^{-1/4}$
29–41. Veja os Exercícios 39–53 na Seção 14.7.
43. Mais próximo $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, mais longe $(-1, -1, 2)$
45. Máximo $\approx 9{,}7938$, mínimo $\approx -5{,}3506$
47. (a) c/n (b) Quando $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$