Exercícios selecionados:

2, 3, 5, 7, 9, 11, 14, 21, 23, 27, 28, 31, 34, 35

14.5 Exercícios

1–6 Use a Regra da Cadeia para achar dz/dt ou dw/dt.

1. $z = x^2 + y^2 + xy, \quad x = \operatorname{sen} t, \quad y = e^t$

2. $z = \cos(x + 4y), \quad x = 5t^4, \quad y = 1/t$

3. $z = \sqrt{1 + x^2 + y^2}, \quad x = \ln t, \quad y = \cos t$

4. $z = \operatorname{tg}^{-1}(y/x), \quad x = e^t, \quad y = 1 - e^{-t}$

5. $w = xe^{y/z}, \quad x = t^2, \quad y = 1 - t, \quad z = 1 + 2t$

6. $w = \ln\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad x = \operatorname{sen} t, \quad y = \cos t, \quad z = \operatorname{tg} t$

7–12 Use a Regra da Cadeia para achar $\partial z/\partial s$ e $\partial z/\partial t$.

7. $z = x^2y^3, \quad x = s\cos t, \quad y = s \operatorname{sen} t$

8. $z = \operatorname{arcsen}(x - y), \quad x = s^2 + t^2, \quad y = 1 - 2st$

9. $z = \operatorname{sen}\theta\cos\phi, \quad \theta = st^2, \quad \phi = s^2t$

10. $z = e^{x+2y}, \quad x = s/t, \quad y = t/s$

11. $z = e^r\cos\theta, \quad r = st, \quad \theta = \sqrt{s^2 + t^2}$

12. $z = \operatorname{tg}(u/v), \quad u = 2s + 3t, \quad v = 3s - 2t$

13. Se $z = f(x, y)$, onde f é diferenciável, e

$x = g(t)$	$y = h(t)$
$g(3) = 2$	$h(3) = 7$
$g'(3) = 5$	$h'(3) = -4,$
$f_x(2, 7) = 6$	$f_y(2, 7) = -8$

determine dz/dt quando $t = 3$.

14. Seja $W(s, t) = F(u(s, t), v(s, t))$, onde F, u e v são diferenciáveis, e

$u(1, 0) = 2$	$v(1, 0) = 3$
$u_s(1, 0) = -2$	$v_s(1, 0) = 5$
$u_t(1, 0) = 6$	$v_t(1, 0) = 4$
$F_u(2, 3) = -1$	$F_v(2, 3) = 10$

Encontre $W_s(1, 0)$ e $W_t(1, 0)$.

1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

15. Suponha que f seja uma função diferenciável de x e y, e $g(u, v) = f(e^u + \text{sen } v, e^u + \cos v)$. Use a tabela de valores para calcular $g_u(0, 0)$ e $g_v(0, 0)$.

	f	g	f_x	f_y
(0, 0)	3	6	4	8
(1, 2)	6	3	2	5

16. Suponha que f seja uma função diferenciável de x e y, e $g(r, s) = f(2r - s, s^2 - 4r)$. Use a tabela de valores do Exercício 15 para calcular $g_r(1, 2)$ e $g_s(1, 2)$.

17–20 Utilize um diagrama em árvore para escrever a Regra da Cadeia para o caso dado. Suponha que todas as funções sejam diferenciáveis.

17. $u = f(x, y)$, onde $x = x(r, s, t)$, $y = y(r, s, t)$

18. $R = f(x, y, z, t)$, onde $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$, $z = z(u, v, w)$, $t = t(u, v, w)$

19. $w = f(r, s, t)$, onde $r = r(x, y)$, $s = s(x, y)$, $t = t(x, y)$

20. $t = f(u, v, w)$, onde $u = u(p, q, r, s)$, $v = v(p, q, r, s)$, $w = w(p, q, r, s)$

21–26 Utilize a Regra da Cadeia para determinar as derivadas parciais indicadas.

21. $z = x^2 + xy^3$, $x = uv^2 + w^3$, $y = u + ve^w$;
$\dfrac{\partial z}{\partial u}, \dfrac{\partial z}{\partial v}, \dfrac{\partial z}{\partial w}$ quando $u = 2$, $v = 1$, $w = 0$

22. $u = \sqrt{r^2 + s^2}$, $r = y + x \cos t$, $s = x + y \text{ sen } t$;
$\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial u}{\partial t}$ quando $x = 1$, $y = 2$, $t = 0$

23. $w = xy + yz + zx$, $x = r \cos \theta$, $y = r \text{ sen } \theta$, $z = r\theta$;
$\dfrac{\partial w}{\partial r}, \dfrac{\partial w}{\partial \theta}$ quando $r = 2$, $\theta = \pi/2$

24. $P = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$, $u = xe^y$, $v = ye^x$, $w = e^{xy}$;
$\dfrac{\partial P}{\partial x}, \dfrac{\partial P}{\partial y}$ quando $x = 0$, $y = 2$

25. $N = \dfrac{p + q}{p + r}$, $p = u + vw$, $q = v + uw$, $r = w + uv$;
$\dfrac{\partial N}{\partial u}, \dfrac{\partial N}{\partial v}, \dfrac{\partial N}{\partial w}$ quando $u = 2$, $v = 3$, $w = 4$

26. $u = xe^{ty}$, $x = \alpha^2\beta$, $y = \beta^2\gamma$, $t = \gamma^2\alpha$;
$\dfrac{\partial u}{\partial \alpha}, \dfrac{\partial u}{\partial \beta}, \dfrac{\partial u}{\partial \gamma}$ quando $\alpha = -1$, $\beta = 2$, $\gamma = 1$

27–30 Utilize a Equação 6 para determinar dy/dx.

27. $y \cos x = x^2 + y^2$

28. $\cos(xy) = 1 + \text{sen } y$

29. $\text{tg}^{-1}(x^2y) = x + xy^2$

30. $e^y \text{ sen } x = x + xy$

31–34 Utilize as Equações 7 para determinar $\partial z/\partial x$ e $\partial z/\partial y$.

31. $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$

32. $x^2 - y^2 + z^2 - 2z = 4$

33. $e^z = xyz$

34. $yz + x \ln y = z^2$

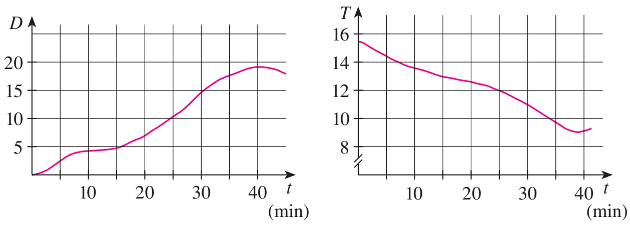
35. A temperatura em um ponto (x, y) é $T(x, y)$, medida em graus Celsius. Um inseto rasteja, de modo que sua posição após t segundos é dada por $x = \sqrt{1 + t}$, $y = 2 + \frac{1}{3}t$, onde x e y são medidos em centímetros. A função da temperatura satisfaz $T_x(2, 3) = 4$ e $T_y(2, 3) = 3$. Quão rápido a temperatura aumenta no caminho do inseto depois de três segundos?

36. A produção de trigo W em um determinado ano depende da temperatura média T e do volume anual das chuvas R. Cientistas estimam que a temperatura média anual está crescendo à taxa de 0,15 °C/ano e a quantidade anual de chuva está decrescendo à taxa de 0,1 cm/ano. Eles também estimam que, no atual nível de produção, $\partial W/\partial T = -2$ e $\partial W/\partial R = 8$.
(a) Qual é o significado do sinal dessas derivadas parciais?
(b) Estime a taxa de variação corrente da produção de trigo dW/dt.

37. A velocidade da propagação do som através do oceano com salinidade de 35 partes por milhar foi modelada pela equação

$$C = 1449{,}2 + 4{,}6T - 0{,}055T^2 + 0{,}00029T^3 + 0{,}016D$$

onde C é a velocidade do som (em metros por segundo), T é a temperatura (em graus Celsius) e D é a profundidade abaixo do nível do mar (em metros). Um mergulhador começa um mergulho tranquilo nas águas oceânicas, e a profundidade do mergulho e a temperatura da água ao redor são registradas nos gráficos a seguir. Estime a taxa de variação (em relação ao tempo) da velocidade do som através do oceano experimentada pelo mergulhador 20 minutos depois do início do mergulho. Quais são as unidades?



38. O raio de um cone circular reto está aumentando em uma taxa de 4,6 cm/s enquanto sua altura está decrescendo em uma taxa de 6,5 cm/s. Em qual taxa o volume do cone está variando quando o raio é 300 cm e a altura é 350 cm?

39. O comprimento ℓ, a largura w e a altura h de uma caixa variam com o tempo. Em um determinado momento, as dimensões são $\ell = 1$ m e $w = h = 2$ m, ℓ e w estão aumentando em uma taxa de 2 m/s enquanto h está decrescendo em uma taxa de 3 m/s. Nesse instante, encontre as taxas em que as seguintes quantidades estão variando.
(a) O volume
(b) A área da superfície
(c) O comprimento da diagonal

40. A voltagem V em um circuito elétrico simples decresce lentamente à medida que a pilha se descarrega. A resistência R aumenta lentamente com o aumento de calor do resistor. Use a Lei de Ohm, $V = IR$, para achar como a corrente I está variando no momento em que $R = 400\ \Omega$, $I = 0{,}08$ A, $dV/dt = -0{,}01$ V/s e $dR/dt = 0{,}03\ \Omega$/s.

41. A pressão de 1 mol de um gás ideal está aumentando em uma taxa de 0,05 kPa/s e a temperatura está aumentando em uma taxa de 0,15 K/s. Use a equação no Exemplo 2 para determinar a taxa de variação do volume quando a pressão for 20 kPa e a temperatura for 320 K.

EXERCÍCIOS 14.5

1. $(2x + y)\cos t + (2y + x)e^t$

3. $[(x/t) - y \operatorname{sen} t]/\sqrt{1 + x^2 + y^2}$

5. $e^{y/z}[2t - (x/z) - (2xy/z^2)]$

7. $\partial z/\partial s = 2xy^3 \cos t + 3x^2y^2 \operatorname{sen} t$,
$\partial z/\partial t = -2sxy^3 \operatorname{sen} t + 3sx^2y^2 \cos t$

9. $\partial z/\partial s = t^2 \cos\theta \cos\phi - 2st \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi$,
$\partial z/\partial t = 2st \cos\theta \cos\phi - s^2 \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi$

11. $\dfrac{\partial z}{\partial s} = e^r\left(t\cos\theta - \dfrac{s}{\sqrt{s^2 + t^2}}\operatorname{sen}\theta\right)$

$\dfrac{\partial z}{\partial t} = e^r\left(s\cos\theta - \dfrac{t}{\sqrt{s^2 + t^2}}\operatorname{sen}\theta\right)$

13. 62 **15.** 7, 2

17. $\dfrac{\partial u}{\partial r} = \dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial r} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial r}, \dfrac{\partial u}{\partial s} = \dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial s} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial s},$
$\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial t} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial t}$

19. $\dfrac{\partial w}{\partial x} = \dfrac{\partial w}{\partial r}\dfrac{\partial r}{\partial x} + \dfrac{\partial w}{\partial s}\dfrac{\partial s}{\partial x} + \dfrac{\partial w}{\partial t}\dfrac{\partial t}{\partial x},$
$\dfrac{\partial w}{\partial y} = \dfrac{\partial w}{\partial r}\dfrac{\partial r}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial s}\dfrac{\partial s}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial t}\dfrac{\partial t}{\partial y}$

21. 85, 178, 54 **23.** $2\pi, -2\pi$

25. $\frac{5}{144}, -\frac{5}{96}, \frac{5}{144}$ **27.** $\dfrac{2x + y \operatorname{sen} x}{\cos x - 2y}$

29. $\dfrac{1 + x^4y^2 + y^2 + x^4y^4 - 2xy}{x^2 - 2xy - 2x^5y^3}$

31. $-\dfrac{x}{3z}, -\dfrac{2y}{3z}$ **33.** $\dfrac{yz}{e^z - xy}, \dfrac{xz}{e^z - xy}$

35. 2°C/s **37.** $\approx -0{,}33$ m/s por minuto

39. (a) 6 m^3/s (b) 10 m^2/s (c) 0 m/s

41. $\approx 0{,}27$ L/s **43.** $-1/(12\sqrt{3})$ rad/s

45. (a) $\partial z/\partial r = (\partial z/\partial x)\cos\theta + (\partial z/\partial y)\operatorname{sen}\theta$,
$\partial z/\partial \theta = -(\partial z/\partial x)r\operatorname{sen}\theta + (\partial z/\partial y)r\cos\theta$

51. $4rs\,\partial^2 z/\partial x^2 + (4r^2 + 4s^2)\partial^2 z/\partial x\,\partial y + 4rs\,\partial^2 z/\partial y^2 + 2\,\partial z/\partial y$