Resposta da Lista de exercícios de Álgebra Linear 2019

7 de dezembro de 2019

1. Escreva a matriz $A = (a_{ij})_{3\times 2}$, tal que $a_{ij} = 3i - 2j + 4$.
R: $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 8 & 6 \\ 11 & 9 \end{pmatrix}$

2. Escreva a matriz $M = (a_{ij})_{2\times 4}$, tal que $a_{ij} = |i - j|$.
R: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

3. Quais são os números que formam a diagonal principal da matriz $\begin{pmatrix} 1 & 10 & 1 \\ 3 & -5 & 6 \\ 8 & -1 & 4 \end{pmatrix}$
R: $1, -5, 4$

4. Escreva a matriz quadrada de ordem 2, cujo elemento genérico é $a_{ij} = 4i - 2j + 3$.
R: $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 9 & 7 \end{pmatrix}$

5. Escreva a matriz diagonal de ordem 4, em que $a_{ij} = i$ para $i = j$.
R: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

6. Escreva a matriz triangular de ordem 4, em que

$$\begin{cases} a_{ij} = 0, & \text{para} \quad i > j \\ a_{ij} = (i+j)^2, & \text{para} \quad i = j \\ a_{ij} = -2, & \text{para} \quad i < j \end{cases}$$

R: $\begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 16 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 36 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 64 \end{pmatrix}$

7. Determine x e y para que se tenha

$$\begin{pmatrix} 3x & 3 \\ x - 2y & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 3 \\ -6 & 10 \end{pmatrix}.$$

R: $x = 4, y = 5$

8. Determine x, y, z e t, sabendo

   (a) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$
   R: $x = 7, y = -3, z = 0$

   (b) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y \\ z \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 15 \\ 9 \end{pmatrix}$
   R: $x = 10, y = 10, z = 5$

   (c) $\begin{pmatrix} x & y \\ 3 & 2z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & 3 \\ t & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -1 \\ 4 & 18 \end{pmatrix}$
   R: $x = 5, y = -4, z = 6, t = 1$

   (d) $\begin{pmatrix} x & y \\ 3x & t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y & z \\ -y & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 14 & 0 \end{pmatrix}$

   R: $x = 5, y = 1, z = 6, t = -2$

9. Sabendo $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 5 & 0 & 6 \end{pmatrix}$, determine
   (a) $5A$ (b) $-2B$ (c) $2A + 3B$ (d) $3A - \frac{1}{2}B$.
   R: (a) $\begin{pmatrix} 10 & 0 & -5 \\ -20 & 5 & 15 \end{pmatrix}$; (b) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -10 & 0 & -12 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 4 & -3 & 4 \\ 7 & 2 & 24 \end{pmatrix}$
   (d) $\begin{pmatrix} 6 & -\frac{1}{2} & -4 \\ -\frac{29}{2} & 3 & 6 \end{pmatrix}$

10. Determine a matriz$X$ tal que $X - A + B = 0_{3\times1}$, sendo $A = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$

    e $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

    R: $X = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

11. Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz quadrada de ordem 2 tal que $a_{ij} = 2i - j + 3$.
    Se $X + A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}$, determine a matriz X.

R: $X = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$

12. Seja X uma matriz quadrada de ordem2 tal que $5X - 2A = 2X$. Se $A = \begin{pmatrix} 18 & 9 \\ 9 & 18 \end{pmatrix}$, calcule a matriz X.
R: $5X - 2X = 2A, 3X = 2A, X = \dfrac{2}{3}A = \dfrac{2}{3}\begin{pmatrix} 18 & 9 \\ 9 & 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}$

13. Sendo $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, Determine a matriz X que verifica a igualdade $3(X - A) = 2(B + X) + 6C$.
R: $3X - 3A = 2B + 2X + 6C, 3X - 2X = 3A + 2B + 6C, X = 3A + 2B + 6C = 3\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 6\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 & 1 \\ 23 & 3 \end{pmatrix}$

14. Determine as matrizes X e Y que são as soluções do sistema $\begin{cases} X + Y = A + 3B \\ X - Y = 3A - 2B \end{cases}$,
sendo que $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.
R: Soma duas equações: $2X = 4A + B, X = \dfrac{1}{2}(4A + B) = 2A + \dfrac{1}{2}B = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$. De primeira equação, $Y = A + 3B - X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$

15. Sabe-se que $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calcule as matrizes X e Y que verificam as condições $\begin{cases} 2X + Y = 3A + B \\ X - Y = 2A - 3B \end{cases}$.
R: Soma duas equações: $3X = 5A - 2B, X = \dfrac{1}{3}(5A - 2B) = \dfrac{1}{3}(5\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}) = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -\frac{2}{3} & -1 \end{pmatrix}$. De primeira equação, $Y = 3A + B - 2X = 3\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -\frac{2}{3} & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ \frac{7}{3} & 6 \end{pmatrix}$

16. Determine os produtos:

(a) $\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

R: $\begin{pmatrix} 17 & 39 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

R: $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 6 & 15 & 0 \\ 12 & 30 & 0 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 5 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

R: $\begin{pmatrix} 29 & 24 \\ 23 & 22 \\ 26 & 4 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 5 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 4 & -3 \end{pmatrix}$

R: $\begin{pmatrix} 2 & 24 & 9 & 27 \\ 4 & 13 & 9 & 12 \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

R: $\begin{pmatrix} -3 & 17 \\ -7 & -8 \\ 9 & 26 \end{pmatrix}$

(f) $\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$

R: $\begin{pmatrix} 59 & -3 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$

17. Sejam as matrizes $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$. Determine:

(a) A^2 (b) B^2 (c) AB (d) $2AB$

(e) $(A+B)^2$ (f) $A^2 + 2AB + B^2$

R: (a) $\begin{pmatrix} 7 & 18 \\ 6 & 19 \end{pmatrix}$; (b) $\begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 12 & 23 \end{pmatrix}$; (d) $\begin{pmatrix} 8 & 13 \\ 9 & 19 \end{pmatrix}$; (d) $\begin{pmatrix} 16 & 26 \\ 18 & 38 \end{pmatrix}$;

(e) $\begin{pmatrix} 15 & 24 \\ 36 & 87 \end{pmatrix}$; (f) $\begin{pmatrix} 22 & 38 \\ 36 & 80 \end{pmatrix}$

18. Observando os resultados obtidos no exercício anterior, responda: para essas matrizes A e B vale a igualdade
$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$?
R: Não vale.

19. Calcule a matriz X sabendo que:

(a) $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 24 \\ 6 \end{pmatrix}$ e $AX = B$.

(b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $AX = B$.

(c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$ e $AX = 3B$.

R: (a) (Obs: A questão é equivalente a resolve um sistema linear: $\begin{cases} 4x + y = 24 \\ 2x - y = 6 \end{cases}$, onde $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.)
Usamos escalonamento: $\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 1 & 24 \\ 2 & -1 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 6 \\ 4 & 1 & 24 \end{array}\right)$
$\xrightarrow{L_2 = L_2 - 2L_1} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 6 \\ 0 & 3 & 12 \end{array}\right) \xrightarrow{L_2 = \frac{L_2}{3}} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$
$\xrightarrow{L_1 = L_1 + L_2} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{L_1 = \frac{L_1}{2}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$.
Portanto $X = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$
(b) $X = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; (c) $X = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$.

20. Sendo $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$, determine:
(a) $A^t + B^t$ (b) $(A+B)^t$ (c) $(3A)^t$ (d) $3A^t$ (e) A^tB
(f) AB^t (g) AA^t (h) $(AB)^t$ (i) A^tB^t (j) B^tA^t.
R: (a) $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$; (b) $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$; (c) $\begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$; (d) $\begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$
(e) $\begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$; (f) $\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 13 & 2 \end{pmatrix}$; (g) $\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 8 & 13 \end{pmatrix}$
(h) $\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 8 & 11 \end{pmatrix}$; (i) $\begin{pmatrix} 17 & -2 \\ 11 & -2 \end{pmatrix}$; (j) $\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 8 & 11 \end{pmatrix}$

21. Determine, se existir, a inversa de cada uma das seguintes matrizes:

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ (b) $A = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

(c) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ (d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

R: (a) $\det A = 2 \neq 0$, portanto A é inversível.

Usamos escalonamento para achar a invera:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & | & 1 & 0 \\ 0 & 2 & | & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 = L_1 - \frac{3}{2}L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 2 & | & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 = \frac{L_2}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 2 & | & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Portanto $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

(b) A não é inversível. Pois $\det A = 5.4 - 2.10 = 0$.

(c) $\det A = 2.5 - 4.3 = -2 \neq 0$. A é inversível. $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

(d) $\det A = 1.3 - 1.2 = 1 \neq 0$. A é inversível. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

22. Resolver os sistemas pelo escalonamento:

(a) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + 2z = 2 \\ x + 6y + 3z = 3 \end{cases}$

R: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 1 & -1 & 2 & | & 2 \\ 1 & 6 & 3 & | & 3 \end{pmatrix} \underset{L_3 = L_3 - L_1}{\xrightarrow{L_2 = L_2 - L_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & -2 & 1 & | & 1 \\ 0 & 5 & 2 & | & 2 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow{L_3 = L_3 - 2L_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & -2 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & -2 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 = L_3 + 2L_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 3 \end{pmatrix}$

O sistema linear é equivalente a $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ y = 1 \\ z = 3 \end{cases}$

Logo $z = 3, y = 1$ e $x = 1 - y - z = 1 - 1 - 3 = -3$..

A solução é $x = -3, y = 1, z = 3$.

(b) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + z = -2 \\ 2y = 3 \end{cases}$

R: O sistema é impossível sem solução).

23. Resolver os sistemas homogênios abaixo:

(a) $\begin{cases} x - y + 2z - t = 0 \\ 3x + y + 3z + t = 0 \\ x - y - z - 5t = 0 \end{cases}$

R: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -5 \end{pmatrix} \underset{L_3=L_3-L_1}{\xrightarrow{L_2=L_2-3L_1}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & -4 \end{pmatrix}$

O sistema é equivalente a $\begin{cases} x - y + 2z - t = 0 \\ 4y - 3z + 4t = 0 \\ -3z - 4t = 0 \end{cases}$

Portanto, de $-3z - 4t = 0$, temos que $z = -\dfrac{4t}{3}$

De $4y - 3z + 4t = 0$,temos que $4y = 3z - 4t = 3.(-\dfrac{4t}{3}) - 4t = -8t, y = -2t.$

De $x-y+2z-t = 0$, temos que $x = y-2z+t = -2t-2(-\dfrac{4t}{3})+t = \dfrac{5t}{3}$.

O conjunto solução do sistema é $\{(\dfrac{5t}{3}, -2t, -\dfrac{3t}{2}, t), t \in \mathbb{R}\}$.

(b) $\begin{cases} x + y + z + w - t = 0 \\ x - y - z + 2w - t = 0 \end{cases}$

R: O conjunto solução do sistema é $\{(3y-3z+t, y, z, 2y+2z, t), y, z, t \in \mathbb{R}\}$.

(c) $\begin{cases} 4x + 3y - z + t = 0 \\ x - y + 2z - t = 0 \end{cases}$

R: O conjunto solução do sistema é $\{(\dfrac{5z}{7} + \dfrac{2t}{7}, \dfrac{9t}{7} - \dfrac{5t}{7}, z, t), z, t \in \mathbb{R}\}$.

(d) $\begin{cases} 3x + 2y - 12z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ 2x - 3y + 5z = 0 \end{cases}$

R: O conjunto solução do sistema é $\{(2z, 3z, z), z \in \mathbb{R}\}$.

24. Mostrar que a matriz real

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix}$$

é inversível para quaisquer $a, b, c \in R$ e que:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 \\ ac-b & -c & 1 \end{pmatrix}$$

R: $\det A = 1 \neq o$, portanto A é inversível. Para justificar formula de A^{-1}, basta calcular AA^{-1} que é matriz de identidade de ordem 3.

25. Verificar quais das seguintes matrizes são inversível e determinar as inversas respectivas:

    (a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$
    R: $\det A = 1.2 - 2.2 = -2 \neq 0$, portanto A é inversível. $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

    (b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
    R: $\det B = 3 \neq 0$, portanto B é inversível. Para achar B^{-1}, usamos escalonamento:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 = L_2 - L_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3 = L_3 - 2L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & | & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3 = \frac{L_3}{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2 = L_2 + L_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_1 = L_1 - L_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & | & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

(c) $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

R: $\det C = 2$, C é inversível.
$C^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{7}{2} & -1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

26. Verifiquei o conjunto com as operações de adição e multiplicação por escalar é ou não é um espaço vetorial. Cite o aximo que não se verifique no caso negativo.

    (a) $\mathbb{R}^3, (x,y,z)+(x',y',z') = (x+x', y+y', z+z'); k(x,y,z) = (0,0,0)$.
    R: $1.v = v$ não vale. Por exemplo, $1.(1,1,1) = (0,0,0) \neq (1,1,1)$

    (b) $\mathbb{R}^2, (x,y) + (x',y') = (x,y); k(x,y) = (kx, ky)$.
    R: $u + v = v + u$ não vale. Por exemplo, $(1,1) + (0,0) = (1,1)$ e $(0,0) + (1,1) = (0,0) \neq (1,1)$.

    (c) $\mathbb{R}^2, (x,y) + (x',y') = (x+x', y+y'); k(x,y) = (k^2x, k^2y)$.
    R: $(\alpha + \beta).v = \alpha.v + \beta.v$ não vale. Por exemplo, $(1+1).(1,1) = 2.(1,1) = (4,4); 1.(1,1) + 1.(1,1) = (1,1) + (1,1) = (2,2) \neq (4,4)$.

27. Quais dos seguintes conjuntos W abaixo são subespaço do $\mathbb{R}^3$?

    (a) $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x = 0\}$.
    (b) $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x - 3z = 0\}$.
    (c) $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x = 1\}$.
    (d) $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | xy = 0\}$.

    R: (a), (b) são. (c), (d) não são.

28. Dê um sistema de geradores para cada um dos seguintes subespaço do $\mathbb{R}^3$:

    (a) $U = \{(x,y,z) | x - 2y = 0\}$
    (b) $V = \{(x,y,z) | x + z = 0 \quad \text{e} \quad x - 2y = 0\}$
    (c) $W = \{(x,y,z) | x + 2y - 3z = 0\}$
    (d) $U \cap V$

(e) $U \cup V$

R: (a) $\{(2,1,0),(0,0,1)\}$; (b) $\{(2,1,-2)\}$.
(c) $\{(-2,1,0),(3,0,1)\}$; (d) $\{2,1,-2)\}$.
(e) $\{(2,1,0),(0,0,1)\}$

29. Mostre que os dois conjuntos $\{(1,-1,2),(3,0,1)\}$ e $\{(-1,-2,3),(3,3,-4)\}$ geram o mesmo subespaço vetorial do $\mathbb{R}^3$.
R: Faça escalonamento a partir de dois conjuntos geradores.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 = L_2 - 3L_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 3 & 3 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 = L_2 + 3L_1} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 0 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{L_1 = -L_1, L_2 = -L_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & -5 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{L_1 = L_1 - L_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 \end{pmatrix}$$

Pelos escalonamentos, os dois subespaços gerados têm um conjunto gerador comun, eles são iguais.

30. Quais os subconjuntos abaixo do $\mathbb{R}^3$ são linearmente independentes:

    (a) $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(2,3,5)\}$
    (b) $\{(1,1,1),(1,0,1),(1,0,-2)\}$
    (c) $\{(0,0,0),(1,2,3),(4,1,-2)\}$
    (d) $\{(1,1,1),(1,2,1),(3,2,-1)\}$

    R: (b) e (d) são linearmente independentes.

31. Dê uma base e a dimensão do subespaço W de $\mathbb{R}^4$ onde $W = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 | x - y = 0 \quad \text{e} \quad x - 3y + t = 0\}$.
R: Uma base $\{(1,1,0,2),(0,0,1,0)\}$. $\dim W = 2$.

32. Determine uma base e a dimensão do espaço solução de cada um dos seguintes sistemas lineares homogêneos:

    (a) $\begin{cases} x - y = 0 \\ 2x - 3y = 0 \\ 3x + \frac{1}{2}y = 0 \end{cases}$
    R: A dim é 0. Base vazia.

(b) $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x - y - 2z = 0 \\ x + 4y + 5z = 0 \end{cases}$
R: A dim é 0. Base vazia.

(c) $\begin{cases} 2x - 2y + z = 0 \\ 3x - y + 3z = 0 \\ 3y + 4z = 0 \end{cases}$
R: A dim é 0. Base vazia.

(d) $\begin{cases} x - y - z - t = 0 \\ 3x - y + 2z - 4t = 0 \\ 2y + 5z + t = 0 \end{cases}$
R: A dim é 1. Base: $\{(-\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}, 1, 0)\}$.

33. Determine as coordenadas do vetor $u = (4, -5, 3) \in \mathbb{R}^3$ em relação às seguintes bases:

(a) $\{(1,1,1),(1,2,0),(3,1,0)\}$
R: $(3,-5,2)$

(b) $\{(1,2,1),(0,3,2),(1,1,4)\}$
R: $(\frac{21}{11}, -\frac{40}{11}, \frac{23}{11})$

34. Quais das seguintes aplicações de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^3$ são operadores lineares?

(a) $T(x,y,z) = (x - y, x + y, 0)$

(b) $T(x,y,z) = (2x - y + z, 0, 0)$

(c) $T(x,y,z) = (x,x,x)$

(d) $T(x,y,z) = (2x^2 + 3y, x, z)$

R: (d) não é.

35. Para cada uma das transformações lineares abaixo determine uma base e a dimensão do núcleo e da imagem:

(a) $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $T(x,y,z) = x + y - z$
R: $\dim N(T) = 2$, base $\{(-1,0,1),(1,0,1)\}$; $\dim Im(T) = 1$, base $\{1\}$.

(b) $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $T(x,y) = (2x, x + y)$
R: $\dim N(T) = 0$, base vazia; $\dim Im(T) = 2$, base $\{(1,0),(0,1)\}$.

(c) $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ dada por $T(x, y, z) = (x-y-z, x+y+z, 2x-y, -y)$
R: $\dim N(T) = 0$, base vazia;
$\dim Im(T) = 3$, base $\{(1, 1, 2, 0), (-1, 1, -1, -1), (-1, 1, 0, 0)\}$.

36. Seja $T \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ definida por $T(x, y, z) = (x+z, y-2z)$, Determine a matriz de T em relação às bases $B = \{(1, 2, 1), (0, 1, 1), (0, 3, -1)\}$ e $C = \{(1, 5), (2, 1)\}$
R: $[T]_C^B = \left\{ \begin{array}{ccc} -\frac{2}{9} & -\frac{1}{3} & \frac{11}{9} \\ \frac{10}{9} & \frac{2}{3} & -\frac{10}{9} \end{array} \right)$.

37. Determine as matrizes das seguintes transformações lineares em relação às bases canônicas dos respectivos espaços:

(a) $T \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ definida por $T(x, y, z) = (x + y, z)$
(b) $T \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ definida por $T(x, y) = (x + y, x, x - y)$
(c) $T \in L(\mathbb{R}^4, \mathbb{R})$ definida por $T(x, y, z, t) = 2x + y - z + 3t)$
(d) $T \in L(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$ definida por $T(x) = (x, 2x, 3x)$

R: (a) $[T] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; (b) $[T] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$
(c) $[T] = (2, 1, -1, 3)$; (d) $[T] = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.