

ESTATÍSTICA

Professora: Patrícia Ferreira Paranaíba

Conceitos fundamentais em probabilidade

Encontramos, no dia a dia, muitas situações que envolvem incertezas. Por exemplo, as condições climáticas do próximo domingo, o resultado do lançamento de uma moeda, uma pesquisa de intenção de voto. Estas situações são exemplos de experimento aleatório.

Experimento aleatório: aquele experimento que quando repetido inúmeras vezes em iguais condições, podem fornecer resultados diferentes.

Espaço amostral: é o conjunto formado por todos os resultados possíveis de um experimento aleatório. Notação: Ω .

A análise de um experimento começa pela identificação de todos os possíveis resultados, por exemplo, o espaço amostral do experimento lançamento de um dado é definido pelo seguinte conjunto:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Eventos: é um conjunto de resultados (um subconjunto do espaço amostral) ao qual é associado um valor de probabilidade. Notação: letras maiúsculas (A,B,C,...)

Exemplo: No lançamento de um dado, a ocorrência de faces ímpares, ou seja, $A = \{1, 3, 5\}$

Dois eventos especiais são: \emptyset e Ω , o primeiro é o conjunto vazio e o segundo é o próprio espaço amostral.

Apresentaremos alguns conceitos de teoria dos conjuntos:

- 1) A união de dois conjuntos ($A \cup B$) é o conjunto dos elementos x tais que x pertence a pelo menos um dos dois conjuntos.
- 2) A interseção de dois conjuntos quaisquer A e B , denotada por $A \cap B$, é o conjunto dos elementos x tais que x pertence a ambos os conjuntos.
- 3) Dois conjuntos A e B são disjuntos ou mutuamente exclusivos quando não possuem elementos em comum, isto é, $A \cap B = \emptyset$.
- 4) Dizemos que dois conjuntos são complementares se a união é o espaço amostral e a interseção é vazia. O Complementar de A é representado por A^c e temos $A \cup A^c = \Omega$ e $A \cap A^c = \emptyset$.

Probabilidade

Há várias definições para probabilidade. As três mais utilizadas são: Clássica, Frequentista e Axiomática.

Definição 1 (Clássica): Seja A um evento e Ω o espaço amostral finito, então se todos os resultados elementares de Ω são equiprováveis, a medida da probabilidade de ocorrência do evento A :

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}$$

em que $\#A$ é a cardinalidade de A e $\#\Omega$ é a cardinalidade de Ω .

Definição 2 (Frequentista): Seja A um evento, então:

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_A}{n}$$

em que n_A é o número de ocorrências do evento A em n realizações.

Definição 3 (Axiomática-Axiomas de Kolmogorov): Uma função \mathcal{P} , definida na σ -álgebra \mathcal{F} de subconjuntos de Ω com valores em $[0, 1]$ é uma probabilidade ou medida de probabilidade se satisfaz os axiomas seguintes:

Ax_1 $P(\Omega) = 1;$

Ax_2 Para todo subconjunto $A \in \mathcal{F}$, $P(A) \geq 0;$

Ax_3 Para toda sequência $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$, mutuamente exclusivos, temos:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

A trinca $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ é denominada **espaço de probabilidade**.

Propriedades da probabilidade

Dado um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ e considerando os eventos abaixo nesse espaço, tem-se as propriedades de probabilidade:

$$P_1 \quad P(A) = 1 - P(A^c)$$

$$P_2 \quad \text{Se } A \subset B \text{ então } P(A) \leq P(B)$$

P_3 Sendo A e B dois eventos quaisquer:

$$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap A^c)$$

P_4 Regra da Adição de Probabilidades:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

P_5 Para eventos quaisquer A_1, A_2, \dots

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Exemplo

1) Um aluno leva dois livros para ler durante as férias. A probabilidade dele gostar do primeiro livro é de 0,5, de gostar do segundo livro é de 0,4 e de gostar de ambos os livros é de 0,3. Qual é a probabilidade de que ele não goste de nenhum dos livros?

Solução

1) Seja o evento L_i "Gostar do livro i ". Então temos os seguintes eventos:

- gostar somente do livro 1 L_1
- gostar somente do livro 2 L_2
- gostar de ambos os livros é $L_1 \cap L_2$.
- gostar de pelo menos um livro $L_1 \cup L_2$.
- não gostar de nenhum livro $L_1^c \cap L_2^c$.

Assim,

$$\begin{aligned}P(L_1^c \cap L_2^c) &= P((L_1 \cup L_2)^c) = 1 - P((L_1 \cup L_2)) \\P((L_1 \cup L_2)) &= P(L_1) + P(L_2) - P((L_1 \cap L_2)) \\&= 0,5 + 0,4 - 0,3 \\&= 0,6 \\P(L_1^c \cap L_2^c) &= 1 - 0,6 = 0,4\end{aligned}$$

Probabilidade Condicional

Definição: Seja (Ω, \mathcal{F}, P) um espaço de probabilidade. Se A e $B \in \mathcal{F}$ e $P(B) > 0$, então a probabilidade condicional de A dado B é definida por:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Observações:

- Se A e B forem mutuamente exclusivos, então $A \cap B = \emptyset$, desse modo $P(A|B) = 0$
- Se $B \subset A$ então $P(A|B) = 1$

Com o conceito de probabilidade condicionada é possível apresentar uma maneira de se calcular a probabilidade da interseção de dois eventos A e B em função destes eventos. Esta expressão é denominada **regra do produto de probabilidade**:

$$P(A \cap B) = P(B)P(A|B) = P(A)P(B|A)$$

Exemplos

1) Em uma cidade onde se publicam três jornais A , B e C , constatou-se que entre 1000 famílias, os assinantes se dispõem da seguinte forma

Jornais	A	B	C	$A \text{ e } B$	$A \text{ e } C$	$B \text{ e } C$	$A \text{ e } B \text{ e } C$
Número de famílias	140	230	370	80	90	130	50

Qual a probabilidade de:

- a) Uma família assinar o jornal A , dado que assinou o jornal B ?

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{80/1000}{230/1000} = \frac{80}{230} = 0,3478$$

- b) Uma família assinar o jornal A, dado que assina pelo menos um dos outros 2 jornais ?

$$P(A|B \cup C) = \frac{P(A \cap (B \cup C))}{P(B \cup C)}$$

$$\begin{aligned} P(A \cap (B \cup C)) &= P((A \cap B) \cup (A \cap C)) \\ &= P(A \cap B) + P(A \cap C) - P(A \cap B \cap C) \\ &= \frac{80 + 90 - 50}{1000} = \frac{120}{1000} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(B \cup C) &= P(B) + P(C) - P(B \cap C) \\ &= \frac{230 + 370 - 130}{1000} = \frac{470}{1000} \end{aligned}$$

$$P(A|B \cup C) = \frac{120}{470} = 0,2553$$

2) Suponha que A , B e C sejam eventos tais que $P(A) = P(B) = P(C) = 1/4$, $P(A \cap B) = P(C \cap B) = 0$ e $P(A \cap C) = 1/8$. Calcule as seguintes probabilidades:

a) $P(A|B)$

$$P(A|B) = 0 \text{ pois } P(A \cap B) = 0$$

b) $P(A|C)$

$$P(A|C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{1/8}{1/4} = \frac{1}{2}$$

c) $P(A \cap (B \cup C))$ Temos que

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) = \emptyset \cup (A \cap C) = (A \cap C)$$

Assim

$$P(A \cap (B \cup C)) = P(A \cap C) = \frac{1}{8}$$

Teorema de Bayes

Considere os eventos A e B de um mesmo espaço amostral. Então:

$$\begin{aligned} P(B_j|A) &= \frac{P(A|B_j)P(B_j)}{P(A)} \\ &= \frac{P(A|B_j)P(B_j)}{\sum_{i=1}^n P(A|B_i)P(B_i)}, \quad j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Foi obtido pelo *Reverendo Thomas Bayes* e publicado em 1763, sendo um dos teoremas mais importantes da teoria estatística.

Exemplos

1) Temos duas urnas, cada uma com seis bolas. Na urna 1 (U_1) temos 4 bolas brancas e 2 bolas vermelhas. Na urna 2 (U_2) temos 3 bolas brancas e 3 bolas vermelhas. Uma bola é sorteada ao acaso. Qual a probabilidade da urna escolhida ser a urna 1, sabendo-se que a bola sorteada é vermelha? Sejam os eventos:

- V a bola é vermelha
- U_1 a bola ser da urna 1
- U_2 a bola ser da urna 2

$$\begin{aligned}P(U_1|V) &= \frac{P(V|U_1)P(U_1)}{P(V|U_1)P(U_1) + P(V|U_2)P(U_2)} \\&= \frac{2/6 \times 1/2}{2/6 \times 1/2 + 3/6 \times 1/2} \\&= \frac{2}{5} = 0,4.\end{aligned}$$

2) Apenas uma em cada dez pessoas de uma população tem tuberculose. Das pessoas que tem tuberculose 80% reagem positivamente ao teste Y, enquanto apenas 30% dos que não tem tuberculose reagem positivamente. Uma pessoa da população é seleccionada ao acaso e o teste Y é aplicado. Qual a probabilidade de que essa pessoa tenha tuberculose, se reagiu positivamente ao teste? Sejam os eventos:

- A o teste Y reagiu positivamente
- T a pessoa tem tuberculose
- NT a pessoa não tem tuberculose

$$P(T) = \frac{1}{10} = 0,1$$

$$P(NT) = \frac{9}{10} = 0,9$$

$$\begin{aligned} P(T|A) &= \frac{P(A|T)P(T)}{P(A|T)P(T) + P(A|NT)P(NT)} \\ &= \frac{0,80 \times 0,10}{0,80 \times 0,10 + 0,30 \times 0,90} \\ &= \frac{0,08}{0,35} = 0,2286. \end{aligned}$$