Exercícios selecionados:

1, 5, 7, 8, 11, 13, 14, 29, 30, 32, 34, 41, 48, 51

14.7 Exercícios

1. Suponha que (1, 1) seja um ponto crítico de uma função f com derivadas de segunda ordem contínuas. Em cada caso, o que se pode dizer sobre f?

(a) $f_{xx}(1, 1) = 4, \quad f_{xy}(1, 1) = 1, \quad f_{yy}(1, 1) = 2$

(b) $f_{xx}(1, 1) = 4, \quad f_{xy}(1, 1) = 3, \quad f_{yy}(1, 1) = 2$

2. Suponha que (0, 2) seja um ponto crítico de uma função g com derivadas de segunda ordem contínuas. Em cada caso, o que se pode dizer sobre g?

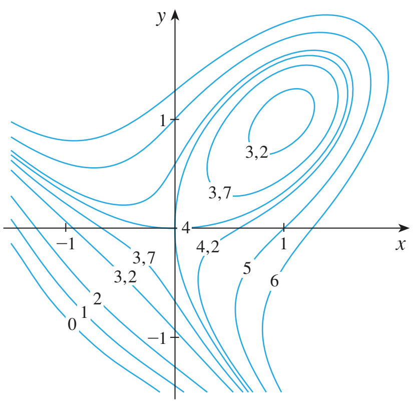
(a) $g_{xx}(0, 2) = -1, \quad g_{xy}(0, 2) = 6, \quad g_{yy}(0, 2) = 1$

(b) $g_{xx}(0, 2) = -1, \quad g_{xy}(0, 2) = 2, \quad g_{yy}(0, 2) = -8$

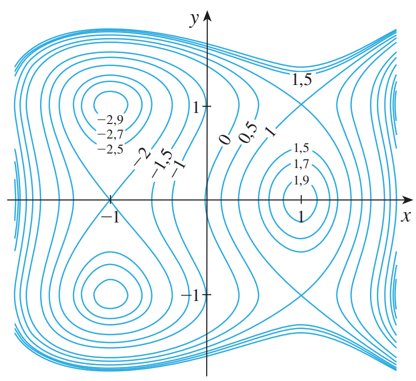
(c) $g_{xx}(0, 2) = 4, \quad g_{xy}(0, 2) = 6, \quad g_{yy}(0, 2) = 9$

3–4 Utilize as curvas de nível da figura para predizer a localização dos pontos críticos de f e se f tem um ponto de sela ou um máximo ou mínimo local em cada um desses pontos. Explique seu raciocínio. Em seguida, empregue o Teste da Segunda Derivada para confirmar suas predições.

3. $f(x, y) = 4 + x^3 + y^3 - 3xy$



4. $f(x, y) = 3x - x^3 - 2y^2 + y^4$



5–18 Determine os valores máximos e mínimos locais e pontos de sela da função. Se você tiver um programa de computador para desenhar em três dimensões, trace o gráfico da função usando um ponto de vista e domínio convenientes para mostrar os aspectos importantes da função.

5. $f(x, y) = 9 - 2x + 4y - x^2 - 4y^2$

6. $f(x, y) = x^3y + 12x^2 - 8y$

7. $f(x, y) = (x - y)(1 - xy)$

8. $f(x, y) = xe^{-2x^2-2y^2}$

9. $f(x, y) = y^3 + 3x^2y - 6x^2 - 6y^2 + 2$

10. $f(x, y) = xy(1 - x - y)$

11. $f(x, y) = x^3 - 12xy + 8y^3$

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador

1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

12. $f(x, y) = xy + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$

13. $f(x, y) = e^x \cos y$

14. $f(x, y) = y \cos x$

15. $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{y^2 - x^2}$

16. $f(x, y) = e^y(y^2 - x^2)$

17. $f(x, y) = y^2 - 2y \cos x, \quad -1 \leqslant x \leqslant 7$

18. $f(x, y) = \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y, \quad -\pi < x < \pi, \quad -\pi < y < \pi$

19. Mostre que $f(x, y) = x^2 + 4y^2 - 4xy + 2$ em um número infinito de pontos críticos e que $D = 0$ em cada um. A seguir, mostre que f tem um mínimo local (e absoluto) em cada ponto crítico.

20. Mostre que $f(x, y) = x^2ye^{-x^2-y^2}$ tem valores máximos em $(\pm 1, 1/\sqrt{2})$ e valores máximos em $(\pm 1, -1/\sqrt{2})$. Mostre também que f tem infinitos outros pontos críticos e que $D = 0$ em cada um deles. Quais deles dão origem a valores máximos? E a valores mínimos? E a pontos de sela?

21–24 Utilize um gráfico e/ou curvas de nível para estimar os valores máximos e mínimos locais e pontos de sela da função. Em seguida, use o cálculo para determinar esses valores de modo preciso.

21. $f(x, y) = x^2 + y^2 + x^{-2}y^{-2}$

22. $f(x, y) = xye^{-x^2-y^2}$

23. $f(x, y) = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y + \operatorname{sen}(x + y)$,
$0 \leqslant x \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant y \leqslant 2\pi$

24. $f(x, y) = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y + \cos(x + y)$,
$0 \leqslant x \leqslant \pi/4,\ 0 \leqslant y \leqslant \pi/4$

25–28 Utilize uma ferramenta gráfica como no Exemplo 4 (ou o Método de Newton ou um determinador de raízes) para encontrar os pontos críticos de f com precisão de três casas decimais. Em seguida, classifique o ponto crítico e determine o valor mais alto e o mais baixo do gráfico, se houver.

25. $f(x, y) = x^4 + y^4 + 4x^2y + 2y$

26. $f(x, y) = y^6 - 2y^4 + x^2 - y^2 + y$

27. $f(x, y) = x^4 + y^3 - 3x^2 + y^2 + x - 2y + 1$

28. $f(x, y) = 20e^{-x^2-y^2} \operatorname{sen} 3x \cos 3y, \quad |x| \leqslant 1,\ |y| \leqslant 1$

29–36 Determine os valores máximo e mínimo absolutos de f no conjunto D.

29. $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x$, D é a região triangular fechada com vértices $(2, 0)$, $(0, 2)$ e $(0, -2)$

30. $f(x, y) = x + y - xy$, D é a região triangular fechada com vértices $(0, 0)$, $(0, 2)$ e $(4, 0)$

31. $f(x, y) = x^2 + y^2 + x^2y + 4$,
$D = \{(x, y) \mid |x| \leqslant 1,\ |y| \leqslant 1\}$

32. $f(x, y) = 4x + 6y - x^2 - y^2$,
$D = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 4,\ 0 \leqslant y \leqslant 5\}$

33. $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 2$,
$D = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 3,\ 0 \leqslant y \leqslant 2\}$

34. $f(x, y) = xy^2$, $D = \{(x, y) \mid x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ x^2 + y^2 \leqslant 3\}$

35. $f(x, y) = 2x^3 + y^4$, $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$

36. $f(x, y) = x^3 - 3x - y^3 + 12y$, D é o quadrilátero cujos vértices são $(-2, 3)$, $(2, 3)$, $(2, 2)$ e $(-2, -2)$.

37. Para as funções de uma variável, é impossível uma função contínua ter dois pontos de máximo local e nenhum de mínimo local. Para as funções de duas variáveis, esse caso existe. Mostre que a função

$$f(x, y) = -(x^2 - 1)^2 - (x^2y - x - 1)^2$$

só tem dois pontos críticos, ambos de máximo local. Em seguida, utilize um computador com uma escolha conveniente de domínio e ponto de vista para ver como isso é possível.

38. Se uma função de uma variável é contínua em um intervalo e tem um único ponto crítico, então um máximo local tem de ser um máximo absoluto. Mas isso não é verdadeiro para as funções de duas variáveis. Mostre que a função

$$f(x, y) = 3xe^y - x^3 - e^{3y}$$

tem exatamente um ponto crítico, onde f tem um máximo local, porém este não é um máximo absoluto. Em seguida, utilize um computador com uma escolha conveniente de domínio e ponto de vista para ver como isso é possível.

39. Determine a menor distância entre o ponto $(2, 0, -3)$ e o plano $x + y + z = 1$.

40. Determine o ponto do plano $x - 2y + 3z = 6$ que está mais próximo do ponto $(0, 1, 1)$.

41. Determine os pontos do cone $z^2 = x^2 + y^2$ que estão mais próximos do ponto $(4, 2, 0)$.

42. Determine os pontos da superfície $y^2 = 9 + xz$ que estão mais próximos da origem.

43. Determine três números positivos cuja soma é 100 e cujo produto é máximo.

44. Encontre três números positivos cuja soma é 12 e cuja soma dos quadrados é a menor possível.

45. Encontre o volume máximo de uma caixa retangular que está inscrita em uma esfera de raio r.

46. Encontre as dimensões de uma caixa com volume de 1.000 cm³ que tenha a área de sua superfície mínima.

47. Determine o volume da maior caixa retangular no primeiro octante com três faces nos planos coordenados e com um vértice no plano $x + 2y + 3z = 6$.

48. Determine as dimensões da caixa retangular de maior volume se a área total de sua superfície é dada por 64 cm².

49. Determine as dimensões de uma caixa retangular de volume máximo tal que a soma dos comprimentos de suas 12 arestas seja uma constante c.

50. A base de um aquário com volume V é feita de ardósia e os lados são de vidro. Se o preço da ardósia (por unidade de área) equivale a cinco vezes o preço do vidro, determine as dimensões do aquário para minimizar o custo do material.

51. Uma caixa de papelão sem tampa deve ter um volume de 32.000 cm^3. Determine as dimensões que minimizem a quantidade de papelão utilizado.

52. Um prédio retangular está sendo projetado para minimizar a perda de calor. As paredes leste e oeste perdem calor a uma taxa de 10 unidades/m^2 por dia; as paredes norte e sul, a uma taxa de 8 unidades/m^2 por dia; o piso, a uma taxa de 1 unidade/m^2 por dia e o teto, a uma taxa de 5 unidades/m^2 por dia. Cada parede deve ter pelo menos 30 m de comprimento, a altura deve ser no mínimo 4 m, e o volume, exatamente 4 000 m^3.

(a) Determine e esboce o domínio da perda de calor como uma função dos comprimentos dos lados.

(b) Encontre as dimensões que minimizam a perda de calor. (Analise tanto os pontos críticos como os pontos sobre a fronteira do domínio.)

(c) Você poderia projetar um prédio com precisamente menos perda de calor ainda se as restrições sobre os comprimentos das paredes fossem removidas?

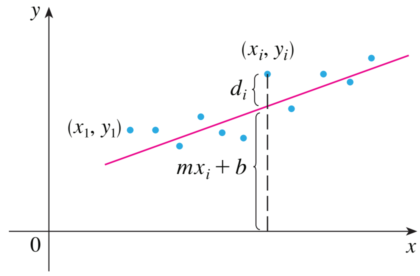
53. Se o comprimento da diagonal de uma caixa retangular deve ser L, qual é o maior volume possível?

54. Três alelos (versões alternativas de um gene) A, B e O determinam os quatro tipos de sangue: A (AA ou AO), B (BB ou BO), O (OO) e AB. A Lei de Hardy-Weinberg afirma que a proporção de indivíduos em uma população que carregam dois alelos diferentes é

$$P = 2pq + 2pr + 2rq$$

onde p, q e r são as proporções de A, B e O na população. Use o fato de que $p + q + r = 1$ para mostrar que P é no máximo $\frac{2}{3}$.

55. Suponha que um cientista tenha razões para acreditar que duas quantidades x e y estejam relacionadas linearmente, ou seja, $y = mx + b$, pelo menos aproximadamente, para algum valor de m e de b. O cientista realiza uma experiência e coleta os dados na forma de pontos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$, e então coloca-os em um gráfico. Os pontos não estão todos alinhados, de modo que o cientista quer determinar as constantes m e b para que a reta $y = mx + b$ "ajuste" os pontos tanto quanto possível (veja a figura).



Seja $d_i = y_i - (mx_i + b)$ o desvio vertical do ponto (x_i, y_i) da reta. O **método dos mínimos quadrados** determina m e b de modo a minimizar $\sum_{i=1}^{n} d_i^2$, a soma dos quadrados dos desvios. Mostre que, de acordo com esse método, a reta de melhor ajuste é obtida quando

$$m \sum_{i=1}^{n} x_i + bn = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$m \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Dessa forma, a reta é determinada ao resolver essas duas equações nas incógnitas m e b. (Veja a Seção 1.2, no Volume I, para mais discussões e aplicações do método dos quadrados mínimos.)

56. Determine uma equação do plano que passa pelo ponto (1, 2, 3) e que corta o menor volume do primeiro octante.

EXERCÍCIOS 14.7

1. (a) f tem um mínimo local em (1, 1).
(b) f tem um ponto de sela em (1, 1).

3. Mínimo local em (1, 1), ponto de sela em (0, 0)

5. Máximo $f(-1, \frac{1}{2}) = 11$

7. Pontos de sela em (1, 1), $(-1, -1)$

9. Máximo $f(0, 0) = 2$, mínimo $f(0, 4) = -30$, pontos de sela em (2, 2), $(-2, 2)$

11. Mínimo $f(2, 1) = -8$, ponto de sela em (0, 0)

13. Nenhum **15.** Mínimo $f(0, 0) = 0$, pontos de sela em $(\pm 1, 0)$

17. Mínimos $f(0, 1) = f(\pi, -1) = f(2\pi, 1) = -1$, pontos de sela em $(\pi/2, 0)$, $(3\pi/2, 0)$

21. Mínimos $f(1, \pm 1) = 3$, $f(-1, \pm 1) = 3$

23. Máximo $f(\pi/3, \pi/3) = 3\sqrt{3}/2$,
mínimo $f(5\pi/3, 5\pi/3) = -3\sqrt{3}/2$, ponto de sela em (π, π)

25. Mínimos $f(0, -0{,}794) \approx -1{,}191$,
$f(\pm 1{,}592, 1{,}267) \approx -1{,}310$, pontos de sela $(\pm 0{,}720, 0{,}259)$,
pontos mais baixos $(\pm 1{,}592, 1{,}267, -1{,}310)$

27. Máximo $f(0{,}170, -1{,}215) \approx 3{,}197$,
mínimos $f(-1{,}301, -0{,}549) \approx -3{,}145$,
$f(1{,}131, 0{,}549) \approx -0{,}701$,
pontos de sela $(-1{,}301, -1{,}215)$, $(0{,}170, 0{,}549)$ $(1{,}131, -1{,}215)$,
sem ponto mais alto ou mais baixo

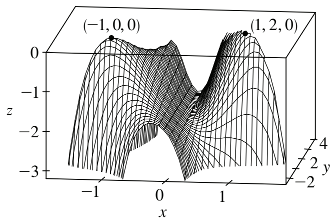
29. Máximo $f(0, \pm 2) = 4$, mínimo $f(1, 0) = -1$

31. Máximo $f(\pm 1, 1) = 7$, mínimo $f(0, 0) = 4$

33. Máximo $f(3, 0) = 83$, mínimo $f(1, 1) = 0$

35. Máximo $f(1, 0) = 2$, mínimo $f(-1, 0) = -2$

37.



39. $2/\sqrt{3}$ **41.** $(2, 1, \sqrt{5})$, $(2, 1, -\sqrt{5})$ **43.** $\frac{100}{3}, \frac{100}{3}, \frac{100}{3}$

45. $8r^3/(3\sqrt{3})$ **47.** $\frac{4}{3}$ **49.** Cubo, comprimento da borda $c/12$

51. Base do quadrado de lado 40 cm, altura 20 cm **53.** $L^3/(3\sqrt{3})$