Baseado no Material da:

Professora Doutora Rita Maria Da Silva Julia

<u>CURSO</u>: LÓGICA PARA CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO (BCC)

PARTE 1: LÓGICA PROPOSICIONAL

1. A LÓGICA DAS PROPOSIÇÕES

1.1. Introdução

Neste curso, o tema central a ser abordado corresponde a uma parte da lógica chamada Lógica das Proposições (LP), que formula raciocínios em torno das *proposições*.

A lógica é a teoria que estuda o raciocínio matemático (prova de teorema).

O raciocínio é aplicado à enunciados chamados "proposições".

A lógica clássica suponha que toda proposição é verdadeira ou falsa, independente do momento (visão de um mundo Platônico).

A lógica pode ser utilizada na concepção de circuitos lógicos (Máquinas Sequenciais).

A lógica é utilizada em Engenharia de Software para a verificação de especificações formais (Métodos Formais).

Existem linguagens de programação onde os programas são compostos por fórmulas lógicas chamadas de cláusulas de Horn.

O cálculo das proposições associa a cada fórmula proposicional uma aplicação de $\{verdadeiro;falso\}n \rightarrow \{verdadeiro;falso\}$ onde n é o número de variáveis proposicionais que aparecem numa fórmula proposicional.

1.2. As Proposições

Platão foi o primeiro a isolar o conceito de proposição. Uma proposição é um enunciado, de qualquer natureza, que pode ser qualificado por verdadeiro ou falso (visão de um mundo Platônico). Exemplos:

1°) $1 + 1 = 2$ é uma proposição verdadeira da aritmética;

2°) $0 > 1$ é uma proposição falsa da aritmética;

3°) *A alface é um vegetal* é uma proposição verdadeira da biologia;

4°) *Tolstoi escreveu Guerra e Paz* é uma proposição verdadeira da literatura;

Existem enunciados que não são proposições. Exemplos:

1°) *Será que Roberto vai ao cinema?* (Frases interrogativas).

2°) *Feche a porta!* (Frases imperativas).

3°) Neste exemplo, não é possível se definir se o enunciado é verdadeiro ou falso, logo não se trata de uma proposição:

Sócrates (enunciado 1): *O que Platão vai dizer é falso*.
Platão (enunciado 2): *Sócrates acabou de dizer a verdade*.

Note que, se o enunciado de Sócrates (1) é verdadeiro, então isso indica que Platão mentiu (o enunciado (2) é falso), isto é, que o enunciado de Sócrates (1) é falso ➔ conflito!!! Este exemplo ilustra o que se chama *paradoxo lógico*, que não é uma proposição.

A seguir, apresentar-se-á um resumo do sistema que define a LP.

1.3. Sistema da Lógica das Proposições (LP)

Conforme introduzido anteriormente, a LP se dedica a efetuar raciocínios sobre às proposições. Para tanto, ela se apóia em um sistema que, simplificada e basicamente, pode ser definido por:

- Um alfabeto;
- Uma linguagem;
- Um conjunto de axiomas;
- Um conjunto de regras de inferências.

A seguir, detalhar-se-á, um pouco mais, cada uma dessas partes do sistema da LP:

a) **O alfabeto**: o alfabeto da LP corresponde a um conjunto formado pelos seguintes símbolos:

- Símbolos de pontuação: (
)

- Símbolos proposicionais: P
  Q
  R
  S
  P_1
  Q_1
  R_1
  S_1
  ...

Note-se que os símbolos proposicionais formam um conjunto infinito, o que faz com que o alfabeto também o seja.

- Os símbolos conectivos têm a seguinte denominação: $\neg$ (não)

  $\wedge$ (e)

  $\vee$ (ou)

  $\rightarrow$ (implica)

  $\leftrightarrow$ (bi-implica)

b) **A Linguagem**: considerando-se que uma expressão é uma seqüência finita de símbolos do alfabeto, chama-se linguagem da LP ao conjunto de todas as expressões da LP (isto é, construídas a partir do alfabeto da LP) que sejam uma fórmula bem formada da LP (ou, simplesmente, fórmula da LP). Uma fórmula da LP, por sua vez, é qualquer expressão da LP que tenha sido construída, exclusivamente, através da aplicação das seguintes definições um número finito de vezes:

- Todo símbolo proposicional é uma fórmula;
- Se H é uma fórmula, então $(\neg H)$ também o é (a fórmula $(\neg H)$ é denominada *negação* de H);
- Se G e H são fórmulas, então, também o são:
  $(G \wedge H)$ (fórmula chamada de *conjunção*);
  $(G \vee H)$ (fórmula chamada de disjunção);
  $(G \rightarrow H)$ (fórmula chamada de *implicação*);
  $(G \leftrightarrow H)$ (fórmula chamada de *bi-implicação*).

Dessa forma, as seguintes expressões são exemplos de fórmulas da LP (e, conseqüentemente, são elementos da linguagem da LP):

P

$(P \wedge Q)$

$(((\neg P) \wedge Q) \vee R_1)$

$(S \rightarrow P)$

Considerando as proposições (ou variáveis proposicionais) x e y, mostrar (provar) que :

$((x \wedge y) \vee ((\neg x) \wedge (\neg y)))$ é uma fórmula (proposicional) ?

Por outro lado, as seguintes expressões não são exemplos de fórmulas da LP (e, conseqüentemente, não pertencem à linguagem da LP):

$P \wedge$

$\neg P \wedge Q \vee \wedge R_1$

Note-se que as definições acima, na realidade, correspondem a um conjunto de "regras de gramática"que definem a "sintaxe" das expressões da LP.

A seguir, serão estabelecidas algumas convenções sintáticas relativas às fórmulas da LP:

(i) Os parênteses do alfabeto são usados nas fórmulas para evitarem ambigüidades. Exemplo: sem parênteses, a expressão $P \vee Q \wedge R_1$ poderia ser lida como $((P \vee Q) \wedge R_1)$ ou, então, como $(P \vee (Q \wedge R_1))$, o que, conforme será visto posteriormente, não representam, de maneira nenhuma, a mesma coisa (neste ponto, já se pode perceber que a primeira fórmula parentizada representa uma conjunção entre R_1 e a disjunção entre P e Q, isto é, o conectivo *ou* se aplica às fórmulas P e Q e o conectivo *e*, por sua vez, aplica-se à fórmula R_1 e à fórmula resultante da aplicação do *ou*; já a segunda fórmula parentizada representa uma disjunção entre P e a conjunção entre Q e R_1, isto é, o conectivo *e* se aplica às fórmulas Q e R_1 e o conectivo *ou* se aplica à fórmula P e à fórmula resultante da aplicação do *e*).

(ii) A fim de se simplificar o processo de parentização de fórmulas necessário à eliminação de ambigüidades, pode-se estabelecer uma ordem de prioridades entre os conectivos que determine, inequivocamente, a quais expressões cada conectivo é aplicado. Neste curso, será adotada a seguinte ordem de prioridades entre os conectivos (há autores que adotam convenções diferentes):

- $\neg$ é prioritário sobre $\wedge$, $\vee$
- $\wedge$, $\vee$ são prioritários sobre $\rightarrow$, $\leftrightarrow$

<u>Exemplos</u>:

1°) A fórmula $P \vee Q \rightarrow R$ será lida como $((P \vee Q) \rightarrow R)$

2°) A fórmula $\neg P \wedge Q$ será lida $((\neg P) \wedge Q)$

3°) A fórmula $\neg(P \wedge Q)$ não pode ser escrita sem os parênteses.

(iii) Serão adotadas, também, as seguintes regras de associatividade para os conectivos:

- $\wedge$, $\vee$ são conectivos associativos à esquerda;

Exemplos:

1°) A fórmula $P \vee Q \vee P$ será lida como $((P \vee Q) \vee P)$

2°) A fórmula $P \wedge Q \wedge P \wedge R$ será lida como $(((P \wedge Q) \wedge P) \wedge R)$

3°) $((\neg P) \vee (\neg(P \vee Q)) \vee R)$ pode ser escrita, simplesmente, como $\neg P \vee \neg(P \vee Q) \vee R$

- O conectivo $\rightarrow$ é associativo à direita. Exemplo:

1°) A fórmula $P \rightarrow Q \rightarrow R$ será lida como $(P \rightarrow (Q \rightarrow R))$

Comprimento de uma Fórmula: Considere o conjunto $C = \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$. O Comprimento de uma formula H da LP, denotado por *comp[H]*, é definido como se segue:

- Se H é um símbolo proposicional, então comp[H] = 1;
- Se H e G são fórmulas da LP e $c \in C$, então:

  comp[$\neg$ H] = comp [H] + 1,

  comp[H c G] = comp[H] + comp[G] + 1

Exs: comp[$(P \rightarrow Q)$] = 3 ; comp[$((P \wedge Q) \leftrightarrow R)$] = 5

c) **Conjunto de Axiomas**: o conjunto de axiomas da LP corresponde a um subconjunto da linguagem da LP e será utilizado nos processos de demonstrações (“raciocínio”) da mesma. Em momento oportuno, serão apresentados mais detalhes sobre o mesmo.

d) **Conjunto de Regras de Inferência**: definindo de modo bem intuitivo, uma regra de inferência é uma ferramenta que permite inferir uma fórmula a partir de outras fórmulas. As regras de inferência também são ferramentas importantes nos processos de demonstrações (“raciocínio”) da LP. Em momento oportuno, serão apresentados mais detalhes sobre tal conjunto.

1.4. Representação das Fórmulas da LP por Meio de Árvores

Há uma outra maneira de se representarem as expressões da LP além da exposta na sintaxe do item anterior. Ela faz apelo à noção de árvore. As árvores são definidas indutivamente a partir de um conjunto *FO* cujos elementos são denominados *folhas* e por um conjunto *L* cujos elementos são chamados de *nós*. As árvores podem ser representadas graficamente.

DEFINIÇÃO 1: O conjunto das árvores de nós N e de folhas FO tem notação Árvores(N, FO). Ele é definido pelas seguintes regras (outra definição indutiva, conforme será visto posteriormente):

- Toda folha é uma árvore; a representação gráfica de uma folha f $\in$ FO consiste na escrita de f dentro de um círculo, conforme Figura 1:

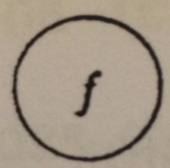

Fig.1- Representação de uma folha f

- Se k é um inteiro ≥ 1 e se $A_1, ..., A_k$ são árvores e se *n* é um nó, então a estrutura

$<< n, A_1, ..., A_k >>$ é uma árvore, tal como representado na Figura 2

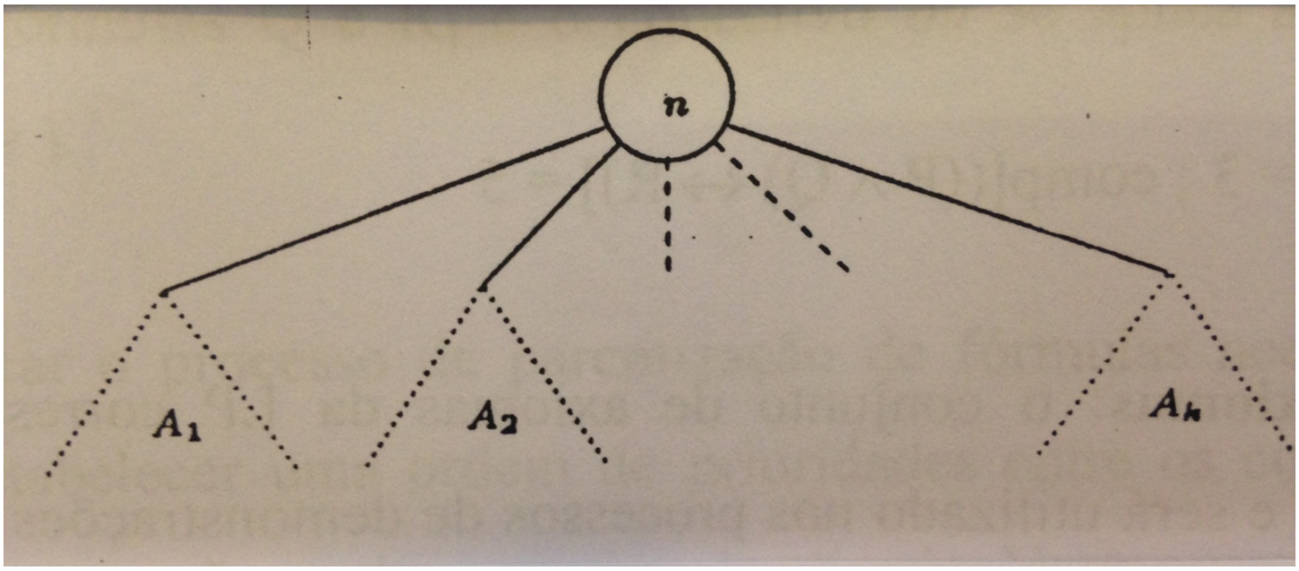

Figura 2: Árvore correspondente à estrutura $<< n, A_1, ..., A_k >>$

Note que a árvore da Figura 3 corresponde à representação de cada árvore A_i da Figura 2, com $i \in [1, k]$.

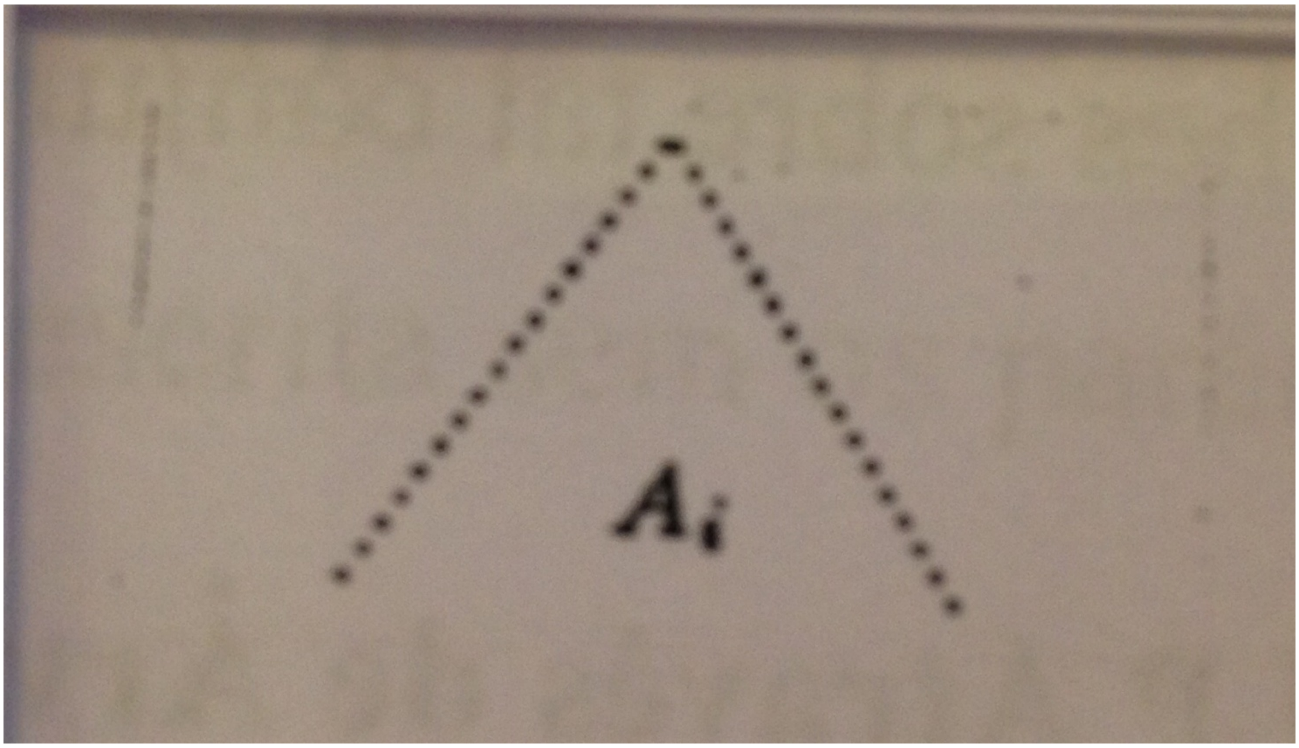

Figura 3: Representação de cada árvore A_i da Figura 2

Considerando a árvore $<< n, A_1, ..., A_k >>$, $A_1, ..., A_k$ são chamados *filhos* do nó *n* (eles são ordenados da esquerda para a direita).

1.4.1. Das Fórmulas Proposicionais às Árvores

O conjunto dos nós das árvores que representam as fórmulas da LP corresponde ao conjunto C dos conectivos, isto é: $C = \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$. O conjunto das folhas dessas árvores corresponde ao conjunto A dos símbolos proposicionais (os símbolos proposicionais são chamados de *variáveis proposicionais* por alguns autores).

DEFINIÇÃO 2: A representação das fórmulas por árvores é definida pela aplicação

σ: $L_0 \rightarrow$ Árvores(C, A),

onde L_0 é a linguagem da LP, e onde σ é definida por indução:

- Se $x \in A$ é uma variável proposicional, então $\sigma(x) = x$;
- Se F_1 é uma fórmula (c G), onde $G \in L_0$ e $c \in C$ é um conectivo unário, isto é, $c \in \{\neg\}$, então $\sigma(F_1) = << c, \sigma(G) >>$;
- Se F_1 é uma fórmula (G c H), onde $G, H \in L_0$ e $c \in C$ é um conectivo binário, isto é, $c \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, <\text{--}>\}$, então $\sigma(F_1) = << c, \sigma(G), \sigma(H) >>$.

Exemplo: A fórmula $(\neg P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q)$ é representada pela árvore da Figura 4:

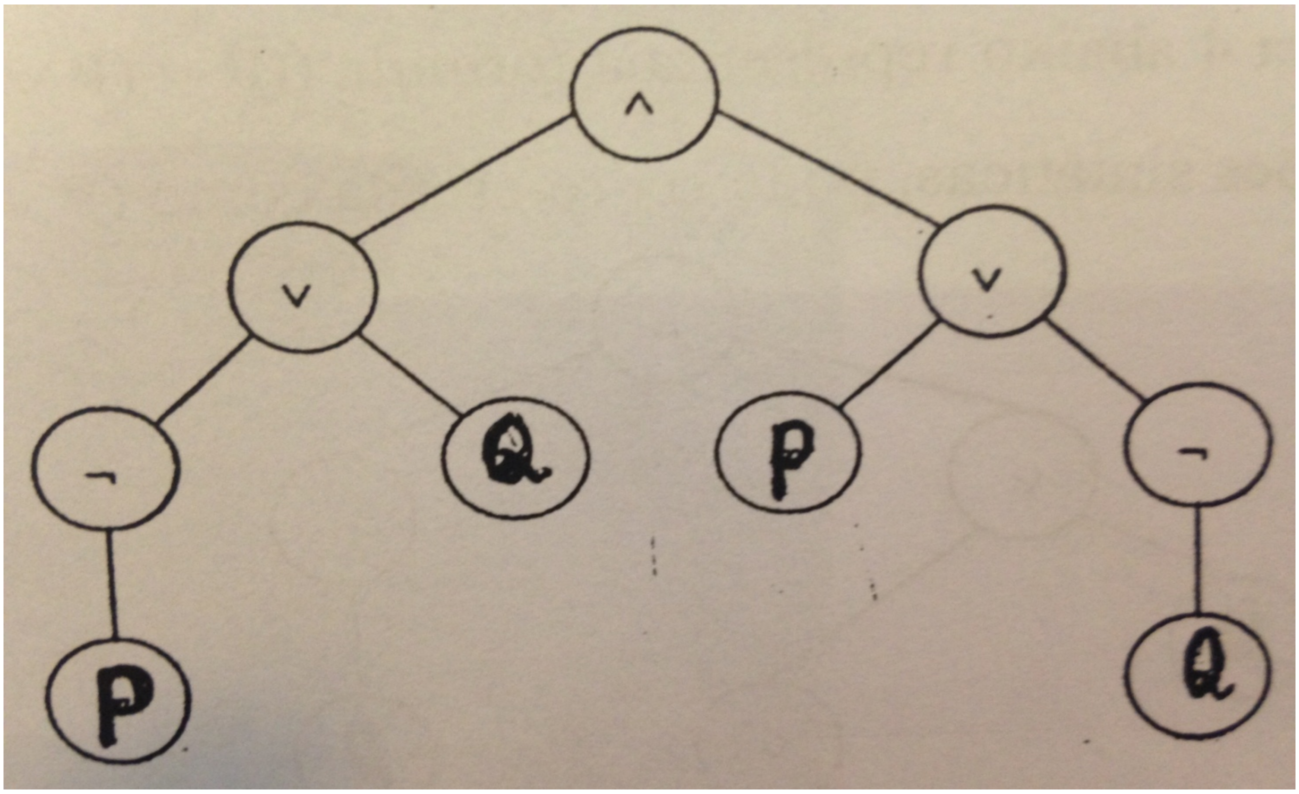

Figura 4: Árvore que representa a fórmula $(\neg P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q)$

Exercício: Desenhar a representação arborescente das fórmulas *$(P \wedge Q) \rightarrow R$* e *$P \wedge (R \rightarrow Q)$*.

1.4.2. Das Árvores às Fórmulas

Inversamente, a partir de uma árvore que seja um elemento de Árvore(C, A), tal que cada conectivo unário e binário tenha, exata e respectivamente, um e dois filhos, é possível de se reconstruir a fórmula correspondente a essa árvore sob sua fórmula sintática. A transformação τ de árvores em fórmulas é definida sobre o subconjunto de Árvores(C, A) composto por essas árvores particulares. Tal subconjunto, denominado por ÁrvoresDeFórmulas(C, A), é definido, indutivamente, por:

- Toda folha pertence a ÁrvoresDeFórmulas(C, A);
- Se A $\in$ ÁrvoresDeFórmulas(C, A) e se c $\in$ C é um conectivo unário, então $\ll$ c, A $\gg$ $\in$ ÁrvoresDeFórmulas(C, A);
- Se A, B $\in$ ÁrvoresDeFórmulas(C, A) e se c $\in$ C é um conectivo binário, então $\ll$ c, A, B $\gg$ $\in$ ÁrvoresDeFórmulas(C, A).

DEFINIÇÃO 3: a TRANSFORMAÇÃO τ : ÁrvoresDeFórmulas(C, A) $\rightarrow L_0$ é definida, por indução, conforme abaixo:

- $\tau(x) = x$ se x é uma folha, isto é, um símbolo proposicional;
- $\tau(\ll c, A \gg) = (c\ \tau(A))$ se A $\in$ ÁrvoresDeFórmulas(C, A) e se c $\in$ C é um conectivo unário;
- $\tau(\ll c, A, B \gg) = (\tau(A)\ c\ \tau(B))$ se A, B $\in$ ÁrvoresDeFórmulas(C, A) e se c $\in$ C é um conectivo binário

EXEMPLO: A árvore da Figura 5 representa a fórmula $((P \vee (P \vee Q)) \wedge (\neg P))$. Tal fórmula, de acordo com nossas convenções sintáticas, pode ser re-escrita como $(P \vee (P \vee Q)) \wedge \neg P$.

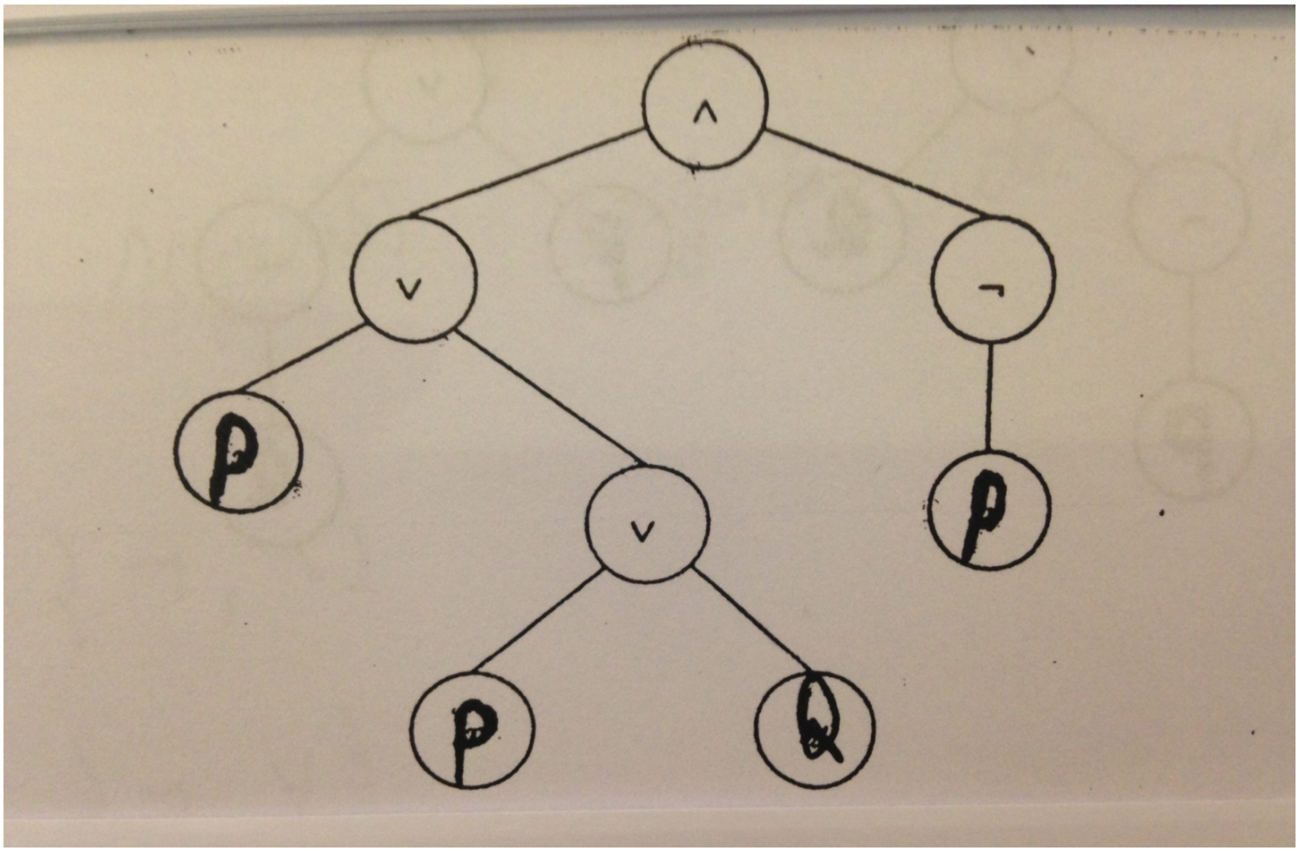

Figura 5- Árvore que representa a fórmula $(P \vee (P \vee Q)) \wedge \neg P$

<u>0BS</u>: RESOLVER EXERCÍCIOS DA LISTA 1

1.5) A Semântica da LP

A semântica da LP visa a atribuir significados às expressões geradas pelas Regras Sintáticas da LP, isto é, às fórmulas da LP. Atribuir significado a uma expressão corresponde a interpretá-la. A interpretação de uma fórmula lógica da LP permite associar-lhe um valor verdade *verdadeiro*, aqui representado por *T*, ou *falso*, aqui representado por *F*. Logo, neste curso, o conjunto de valores verdade é representado por {T, F}.

DEFINIÇÃO 4: a notação B = { T, F } representa o conjunto de valores verdade, onde *F* e *V* correspondem aos valores verdade *falso* e *verdadeiro*, respectivamente.

1.5.1) Interpretação dos Símbolos de Proposição

Para calcular o valor verdade de uma fórmula, precisa-se de atribuir valores em B aos símbolos proposicionais (ou variáveis proposicionais). De fato recorde-se que as variáveis proposicionais são a designação de proposições que podem ser verdadeiras ou falsas (na LP, não podem ser ambos em uma mesma interpretação).

DEFINIÇÃO 5: sendo A o conjunto das variáveis proposicionais, chama-se de *interpretação das variáveis proposicionais* uma aplicação

$\omega: A \rightarrow B$

1.5.2) Avaliação de uma Fórmula da LP

Avaliar uma fórmula da LP corresponde a interpretá-la como uma proposição verdadeira (T) ou falsa (F). Seja A o conjunto de variáveis proposicionais e seja $\omega: A \rightarrow B$ uma interpretação das mesmas. Tal aplicação pode ser estendida para uma aplicação

$\varpi: L_0 \rightarrow B$

da linguagem da LP no conjunto de valores verdade. ϖ é definida indutivamente por:

- Se $x \in A$, então $\varpi(x) = \omega(x)$
- Se $H \in L_0$, então $\varpi(\neg H) = \varphi^{\neg}(\varpi(H))$, com $\varphi^{\neg} : B \rightarrow B$ definida, em extensão, por $\varphi^{\neg}(F) = T$ e $\varphi^{\neg}(T) = F$;
- Se $H, G \in L_0$, então $\varpi(H \wedge G) = \varphi^{\wedge}(\varpi(H), \varpi(G))$, com $\varphi^{\wedge} : B \times B \rightarrow B$ definida, em extensão, por $\varphi^{\wedge}(F,F) = \varphi^{\wedge}(F,T) = \varphi^{\wedge}(T,F) = F$ e $\varphi^{\wedge}(T,T) = T$;
- Se $H, G \in L_0$, então $\varpi(H \vee G) = \varphi^{\vee}(\varpi(H), \varpi(G))$, com $\varphi^{\vee} : B \times B \rightarrow B$ definida, em extensão, por $\varphi^{\vee}(F, F) = F$ e $\varphi^{\vee}(F,T) = \varphi^{\vee}(T,F) = \varphi^{\vee}(T, T) = T$;
- Se $H, G \in L_0$, então $\varpi(H \rightarrow G) = \varphi^{\rightarrow}(\varpi(H), \varpi(G))$, com $\varphi^{\rightarrow} : B \times B \rightarrow B$ definida, em extensão, por $\varphi^{\rightarrow}(T, F) = F$ e $\varphi^{\rightarrow}(F,F) = \varphi^{\rightarrow}(F,T) = \varphi^{\rightarrow}(T, T) = T$; // significa que H verdadeira é uma condição suficiente para G ser verdadeira; a única maneira de tornar a expressão falsa é então de ter H verdadeira e G falsa; qualquer outra situação torna a expressão verdadeira. Ex : Ser Juiz é suficiente para ser advogado; Se H=Juiz então G=Advogado. Ser advogado é então necessário para ser Juiz. O único jeito de produzir inferências que vão produzir "novos conhecimentos" e quando H é verdadeiro, que é a única garantia de ter G verdadeira. Se H é falsa, não temos como garantir o valor de G e nenhuma inferência em termo de produção de conhecimento acontecerá já que não poderemos garantir o valor de G.
- Se $H, G \in L_0$, então $\varpi(H \leftrightarrow G) = \varphi^{\leftrightarrow}(\varpi(H), \varpi(G))$, com $\varphi^{\leftrightarrow} : B \times B \rightarrow B$ definida, em extensão, por $\varphi^{\leftrightarrow}(F, F) = \varphi^{\leftrightarrow}(T, T) = T$ e $\varphi^{\leftrightarrow}(F,T) = \varphi^{\leftrightarrow}(T,F) = F$.

NOTAS ADICIONAIS RELATIVAS À INTERPRETAÇÃO DE FÓRMULAS DA LP:

Considerando que H, G $\in L_0$, em toda interpretação em que, por hipótese, a implicação $H \rightarrow G$ é considerada verdadeira, isso significa que:

(1) O fato de o enunciado proposicional *H* ser verdadeiro é uma condição SUFICIENTE para garantir a veracidade do enunciado *G*, isto é, BASTA se saber que *H* é verdadeiro para se concluir que *G* também o é;

(2) A veracidade do enunciado *G* é uma condição NECESSÁRIA para garantir a veracidade do enunciado *H*, ou seja, NÃO HÁ COMO *H* ser verdadeiro sem que *G* também o seja (ou, ainda, NÃO HÁ COMO *H* ser verdadeiro, em situações em que *G* seja falso).

OBS: FAZER EXERCÍCIOS DAS LISTAS 2 E 3

PROPOSIÇÃO 1: Seja A o conjunto de variáveis proposicionais, seja $n \geq 1$, sejam $H_1, ..., H_n$ fórmulas e seja $\omega: A \rightarrow B$ uma interpretação das variáveis proposicionais. Então,

$\varpi(H_1 \wedge ... \wedge H_n) = F$ se, e somente se, $\exists i \in [1, n] \mid \varpi(H_i) = F$.

<u>Demonstração</u>: fazer, como exercício, por recorrência sobre n, lembrando-se de que $H_1 \wedge H_2 \wedge ... \wedge H_n = (H_1 \wedge H_2 \wedge ... \wedge H_{n-1}) \wedge H_n$.

PROPOSIÇÃO 2: Seja A o conjunto de variáveis proposicionais, seja $n \geq 1$, sejam $H_1, ..., H_n$ fórmulas e seja $\omega: A \rightarrow B$ uma interpretação das variáveis proposicionais. Então,

$\varpi(H_1 \wedge ... \wedge H_n) = T$ se, e somente se, $\forall i \in [1, n], \varpi(H_i) = T$

PROPOSIÇÃO 3: Seja A o conjunto de variáveis proposicionais, seja $n \geq 1$, sejam $H_1, ..., H_n$ fórmulas e seja $\omega: A \rightarrow B$ uma interpretação das variáveis proposicionais. Então,

$\varpi(H_1 \vee ... \vee H_n) = T$ se, e somente se, $\exists i \in [1, n], \varpi(H_i) = T$

PROPOSIÇÃO 4: Seja A o conjunto de variáveis proposicionais, seja $n \geq 1$, sejam $H_1, ..., H_n$ fórmulas e seja $\omega: A \rightarrow B$ uma interpretação das variáveis proposicionais. Então,

$\varpi(H_1 \vee ... \vee H_n) = F$ se, e somente se, $\forall i \in [1, n], \varpi(H_i) = F$.

DEFINIÇÃO 6: Seja A o conjunto de variáveis proposicionais e L_0 a linguagem da LP. A aplicação

$$
\begin{array}{lll}
\text{Eval:} & L_0 \times (A \rightarrow B) & \rightarrow B \\
 & (H, v) & \mapsto \varpi(H)
\end{array}
$$

é chamada *função de avaliação* das fórmulas lógicas.

EXEMPLOS:

Seja A o conjunto das variáveis proposicionais, considere que P, Q $\in$ A, seja ω uma interpretação tal que $\omega(P) = T$ e $\omega(Q) = F$. Calcular:

(i) Eval($Q \vee (P \wedge Q), \omega$)

$= \varpi\ (Q \vee (P \wedge Q))$

$= \varphi^{\vee}(\varpi(Q), \varpi(P \wedge Q))$

$= \varphi^{\vee}(F, \varphi^{\wedge}(\varpi(P), \varpi(Q)))$

$= \varphi^{\vee}(F, \varphi^{\wedge}(T, F))$

$= \varphi^{\vee}(F, F)$

$= F$

(ii) Eval($P \rightarrow (P \vee Q), \omega$)

$= \varpi\ (P \rightarrow (P \vee Q))$

$= \varphi^{\rightarrow}(\varpi(P), \varpi(P \vee Q))$

$= \varphi^{\rightarrow}(T, \varphi^{\vee}(\varpi(P), \varpi(Q)))$

$= \varphi^{\rightarrow}(T, \varphi^{\vee}(T, F))$

$= \varphi^{\rightarrow}(T, T)$

$= T$

1.6. As Tautologias

Uma tautologia é uma fórmula que é avaliada como verdadeira, isto é, T, quaisquer que sejam os valores de suas variáveis proposicionais, isto é, qualquer que seja a interpretação atribuída a elas.

DEFINIÇÃO 7: Seja A o conjunto das variáveis proposicionais e seja $H \in L_0$ uma fórmula. H é chamada uma tautologia se, para toda interpretação ω: A $\rightarrow$ B das variáveis proposicionais, tem-se que Eval(H, ω) = T.

EXEMPLO: A fórmula $P \vee \neg P$ é uma tautologia. De fato, seja ω: A $\rightarrow$ B. Tem-se:

$\text{Eval}(P \vee \neg P, \omega) = \varpi(P \vee \neg P) = \varphi^{\vee}(\omega(P), \varphi^{\neg}(\omega(P)))$

Se $\omega(P) = F$, $\text{Eval}(P \vee \neg P, \omega) = \varphi^{\vee}(F, \varphi^{\neg}(F)) = \varphi^{\vee}(F, T) = T$;

Se $\omega(P) = T$, $\text{Eval}(P \vee \neg P, \omega) = \varphi^{\vee}(T, \varphi^{\neg}(T)) = \varphi^{\vee}(T, F) = T$.

1.6.1. Algumas Tautologias Clássicas

- Idempotência: $P \wedge P \leftrightarrow P$
- Absorção: $P \wedge (P \vee Q) \leftrightarrow P$
- Terceiro excluído: $P \vee \neg P$
- Contraposição: $(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)$
- Exportação: $(P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \leftrightarrow (P \wedge Q \rightarrow R)$
- Silogismo: $(P \rightarrow Q) \rightarrow ((Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R))$
- Lei de Frege: $(P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \rightarrow ((P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R))$
- Lei de Pierce: $((P \rightarrow Q) \rightarrow P) \rightarrow P$
- Ex Falso quod libet sequitur: $(P \wedge \neg P) \rightarrow Q$

1.7. Fórmulas Satisfatíveis

Uma fórmula é dita satisfatível se existe pelo menos uma interpretação das variáveis proposicionais tal que a fórmula seja avaliada como verdadeira. Toda tautologia é, também, uma fórmula satisfatível.

DEFINIÇÃO 8: : Seja A o conjunto das variáveis proposicionais e seja $H \in L_0$ uma fórmula. H é chamada uma fórmula satisfatível se existe uma interpretação ω: A → B das variáveis proposicionais tal que Eval(H, ω) = T.

1.8. Fórmulas Contraditórias

Uma fórmula é dita contraditória se ela não é satisfatível. Uma fórmula contraditória é dita uma *contradição*.

DEFINIÇÃO 9: Seja A o conjunto das variáveis proposicionais e seja $H \in L_0$ uma fórmula. H é chamada uma contradição se, para toda interpretação ω: A → B das variáveis proposicionais, tem-se que Eval(H, ω) = F.

EXEMPLO:

A fórmula $P \wedge \neg P$ é uma contradição. De fato:

Se $\omega(P) = F$, então:

$Eval(P \wedge \neg P, \omega)$

$= \varphi^\wedge(Eval(P, \omega), Eval(\neg P, \omega))$

$= \varphi^\wedge(F, \varphi^\neg(F))$

$= \varphi^\wedge(F, T)$

$= F$

Se $\omega(P) = T$, então:

$Eval(P \wedge \neg P, \omega)$

$= \varphi^\wedge(Eval(P, \omega), Eval(\neg P, \omega))$

$= \varphi^\wedge(T, \varphi^\neg(T))$

$= \varphi^\wedge(T, F)$

$= F$

PROPOSIÇÃO 5: Seja $H \in L_0$ uma fórmula. Então, H é uma tautologia se, e somente se, $\neg H$ é uma contradição, ou seja, *H é uma tautologia* $\leftrightarrow$ *$\neg H$ é uma contradição*.

Demonstração: Seja ω uma interpretação arbitrária das variáveis proposicionais.

- Se H é uma tautologia, tem-se: $Eval(H,\omega) = \varpi(H) = T$. Então:
  $Eval(\neg H, \omega) = \varpi(\neg H) = \varphi^{\neg}(\varpi(H)) = \varphi^{\neg}(T) = F$ e $\neg H$ é, então, uma contradição;

- Reciprocamente, se $\neg H$ é uma contradição, tem-se: $Eval(\neg H,\omega) = \varpi(\neg H) = \varphi^{\neg}(\varpi(H)) = F$. Uma análise da função $\varphi^{\neg}$ mostra que $\varphi^{\neg}(P) = F$ se, e somente se, $P = T$. Logo, $\varpi(H) = Eval(H, \omega) = T$ e H é uma tautologia.

PROPOSIÇÃO 6: Seja $H \in L_0$ uma fórmula. Então H é uma contradição se, e somente se, $\neg H$ é uma tautologia.

Demonstração: fica como exercício (raciocínio análogo ao da demonstração da proposição 5).

1.9. As Tabelas-Verdade

As fórmulas da LP podem ser, então, tautologias, contadições ou fórmulas satisfatíveis. Note-se que basta uma fórmula ser um pouco complexa, para que esses cálculos se tornem bem enfadonhos. O formalismo de tabela-verdade permite calcular, de maneira relativamente simples, as interpretações de uma fórmula para todas as interpretações possíveis de variáveis proposicionais. Tal formalismo se origina dos seguintes resultados elementares:

PROPOSIÇÃO 7: Seja A o conjunto de variáveis proposicionais; seja $H \in L_0$ uma fórmula; seja $\{ P_1, ..., P_n \} \subset A$ o conjunto das variáveis proposicionais que ocorrem pelo menos uma vez em H; sejam $\omega_1 : A \to B$ e $\omega_2 : A \to B$ duas interpretações das variáveis proposicionais tais que $\forall x \in \{ P_1, ..., P_n \}$, $\omega_1(x) = \omega_2(x)$, então $Eval(H, \omega_1) = Eval(H, \omega_2)$.

DEMONSTRAÇÃO: a demonstração se faz trivialmente por indução sobre a fórmula H e não apresenta dificuldade particular.

A Proposição 7 estabelece que se duas interpretações de variáveis proposicionais são iguais no que diz respeito às variáveis $\{ P_1, ..., P_n \}$ que ocorrem pelo menos uma vez em H, então tem-se que: $\varpi_1(H) = \varpi_2(H)$. Assim, para conhecer todas as interpretações possíveis da fórmula H da Proposição 7, basta se restringir às 2^n interpretações das variáveis $P_1, ..., P_n$.

DEFINIÇÃO 10: seja $H \in L_0$ uma fórmula; seja $\{ P_1, ..., P_n \}$ o conjunto das variáveis proposicionais que ocorrem pelo menos uma vez em H; a tabela-verdade de H é uma tabela de $n + 1$ colunas e 2^n linhas. As n primeiras colunas correspondem às n variáveis. A $(n + 1)$-ésima coluna corresponde à fórmula. Cada linha descreve uma interpretação diferente das variáveis $P_1, ..., P_n$ através de n valores 0 ou 1; a $(n + 1)$-ésima coluna provê o valor da fórmula para cada uma dessas diferentes interpretações.

Exemplo: Abaixo, mostra-se a tabela-verdade da fórmula $(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge R)$. Há três variáveis proposicionais que ocorrem pelo menos uma vez na fórmula. A tabela terá, então, 4 colunas e 8 linhas, conforme se segue:

P	Q	R	$(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge R)$
T	T	T	T
T	T	F	T
T	F	T	F
T	F	F	T
F	T	T	T
F	T	F	F
F	F	T	T
F	F	F	F

DEFINIÇÃO 11: seja $H \in L_0$ uma fórmula. Define-se, indutivamente, as sub-fórmulas de H por:

- Se H é uma variável proposicional, H possui apenas uma sub-fórmula que é ela mesma;
- Se $H = \neg G$, as sub-fórmulas de H são H e as sub-fórmulas de G;
- Se H = G c G´, onde c é um conector binário, as sub-fórmulas de H são H, as sub-fórmulas de G e as sub-fórmulas de G´.

<u>Construção Das Tabelas-Verdade:</u>

Para se construir a tabela-verdade de uma fórmula, começa-se por se redigir as colunas correspondentes às variáveis que ocorrem pelo menos uma vez na fórmula. Em seguida, constroem-se as colunas correspondentes às sub-fórmulas da fórmula. Cada coluna corresponde à uma sub-fórmula obtida a partir de uma ou duas sub-fórmulas de colunas já construídas por aplicação de um conector. Ex: no caso da Lei de Pierce, constroem-se as colunas P, Q, $P \to Q$, $(P \to Q) \to P$ e $((P \to Q) \to P) \to P$. Obtém-se a tabela abaixo:

P	Q	$P \to Q$	$(P \to Q) \to P$	$((P\to Q)\to P) \to P$
F	F	T	F	T
F	T	T	F	T
T	F	F	T	T
T	T	T	T	T

PROPOSIÇÃO 8: Uma fórmula é satisfatível se a última coluna de sua tabela-verdade contém pelo menos um T.

PROPOSIÇÃO 9 Uma fórmula é uma tautologia se a última coluna de sua tabela-verdade contém apenas T.

PROPOSIÇÃO 10: Uma fórmula é uma contradição se a última coluna de sua tabela-verdade contém apenas F.

As demonstrações das Proposições 8, 9 e 10 ficam como exercício.

1.10. Equivalência de Formulas:

Duas fórmulas da LP são ditas equivalentes ou logicamente equivalentes se para toda interpretação das variáveis proposicionais que elas contêm elas são ou ambas verdadeiras ou ambas falsas.

DEFINIÇÃO 12: Seja A o conjunto de variáveis proposicionais e seja G, H $\in L_0$ duas fórmulas da LP. Diz-se que H e G são equivalentes se, e somente se, para toda interpretação de variáveis proposicionais $\omega : A \rightarrow B$ tem-se que $\varpi(G) = \varpi(H)$.

Notação: Se G, H $\in L_0$ então $G \Leftrightarrow H$ é uma notação que significa que G e H são equivalentes (há autores que usam o símbolo $\equiv$ para representar a equivalência lógica).

<u>Exemplo</u>:

Mostrar que as fórmulas $P \rightarrow Q$ e $\neg Q \rightarrow \neg P$ são equivalentes.

Solução: graças à Proposição 7, basta-nos considerar as interpretações das variáveis P e Q figurantes nas duas fórmulas. Constrói-se uma tabela-verdade comum para ambas as fórmulas:

P	Q	$P \rightarrow Q$	$\neg Q$	$\neg P$	$\neg Q \rightarrow \neg P$
F	F	T	T	T	T
F	T	T	F	T	T
T	F	F	T	F	F
T	T	T	F	F	T

Pela tabela, constata-se que, qualquer que seja a interpretação de variáveis proposicionais, ambas as fórmulas tem o mesmo valor. Conseqüentemente, elas são equivalentes.

PROPOSIÇÃO 11: Se $G, H \in L_0$. Então $G \Leftrightarrow H$ se, e somente se, $G \leftrightarrow H$ é uma tautologia.

Demonstração:

(i) Hipótese: $G \Leftrightarrow H$. Seja ω $A \rightarrow B$ uma interpretação das variáveis proposicionais. Dessa forma, ou $\varpi(G) = \varpi(H) = F$, ou $\varpi(G) = \varpi(H) = T$. Em ambos os casos, tem-se, conforme as aplicações apresentadas, que: $\varpi(G \leftrightarrow H) = \varphi^{\leftrightarrow}(\varpi(G), \varpi(H)) = T$ (logo, a bi-implicação entre G e H é uma tautologia, cqd);

(ii) Hipótese $G \leftrightarrow H$ é uma tautologia. Seja ω $A \rightarrow B$ uma interpretação das variáveis proposicionais. Dessa forma, tem-se que $\varpi(G \leftrightarrow H) = T$. Observando-se a aplicação $\varphi^{\leftrightarrow}$, sua definição impõe que $\varpi(G) = \varpi(H)$, qualquer que seja ω, isto é, G e H são equivalentes, cqd.

Exemplo: de acordo com o último exemplo apresentado anteriormente, a fórmula
$(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)$ é uma tautologia.

PROPOSIÇÃO 12: Se $H \in L_0$ uma fórmula. Seja $G \in L_0$ uma sub-fórmula de H. Seja $G' \in L_0$ uma fórmula logicamente equivalente a G. Então, a fórmula H´ , obtida pela substituição da fórmula G em H pela fórmula G´ , é logicamente equivalente a H.

Demonstração: fica como exercício.

<u>Equivalências Lógicas Fundamentais</u>:

Sejam H, G, G´ $\in L_0$ fórmulas da LP. Os itens abaixo mostram equivalências clássicas (a demonstração de que são equivalências fica proposta como exercício):

a) $G \rightarrow H \Leftrightarrow \neg H \rightarrow \neg G$ (Lei da Contraposição)
b) $\neg(H \wedge G) \Leftrightarrow \neg H \vee \neg G$ (Lei de Morgan)
c) $\neg(H \vee G) \Leftrightarrow \neg H \wedge \neg G$ (Lei de Morgan)
d) $\neg(\neg H) \Leftrightarrow H$ (variante da Lei do Terceiro Excluído)
e) $H \leftrightarrow G \Leftrightarrow (H \rightarrow G) \wedge (G \rightarrow H)$
f) $H \vee G \Leftrightarrow G \vee H$ (Comutatividade do $\vee$)
g) $H \wedge G \Leftrightarrow G \wedge H$ (Comutatividade do $\wedge$)
h) $(H \vee G) \vee G' \Leftrightarrow H \vee (G \vee G')$ (Associatividade do $\vee$)
i) $(H \wedge G) \wedge G' \Leftrightarrow H \wedge (G \wedge G')$ (Associatividade do $\wedge$)
j) $(H \vee G) \wedge G' \Leftrightarrow (H \wedge G') \vee (G \wedge G')$ (Distributividade do $\wedge$ com relação ao $\vee$)
k) $(H \wedge G) \vee G' \Leftrightarrow (H \vee G') \wedge (G \vee G')$ (Distributividade do $\vee$ com relação ao $\wedge$)
l) $H \rightarrow G \Leftrightarrow \neg H \vee G$

Exercícios:

1) Sejam H, G, G´ $\in L_0$ três fórmulas da LP. Suponha que H seja uma tautologia e que G seja uma contradição. Neste caso, demonstre as seguintes equivalências:

1°) $G' \vee H \Leftrightarrow H$
2°) $G' \vee G \Leftrightarrow G$
3°) $G' \wedge H \Leftrightarrow G'$
4°) $G' \wedge G \Leftrightarrow G$
5°) $G \rightarrow G' \Leftrightarrow H$
6°) $H \rightarrow G' \Leftrightarrow G'$
7°) $G' \rightarrow G \Leftrightarrow \neg G'$
8°) $G' \rightarrow H \Leftrightarrow H$

2) **PROPOR EXERCÍCIOS DO CADERNO 4**

1.11. Método da Árvore Semântica:

É um método para representar a interpretação das fórmulas da LP através de árvores. Seja H uma fórmula da LP. Seja A o conjunto dos símbolos proposicionais que ocorrem em H. A árvore semântica que representa a interpretação de H tem como nós os elementos de A. De cada nó partem dois ramos, onde cada ramo representa um valor verdade possível para o nó (símbolo proposicional). Cada folha da árvore corresponde ao valor verdade de H que é obtido em função da interpretação ω dos símbolos proposicionais estabelecido nas ramificações que conduziram àquela folha.

Exemplo: A Figura 6 mostra a árvore semântica que representa a fórmula:
$(P \rightarrow Q) \leftrightarrow ((\neg P) \rightarrow (\neg Q))$:

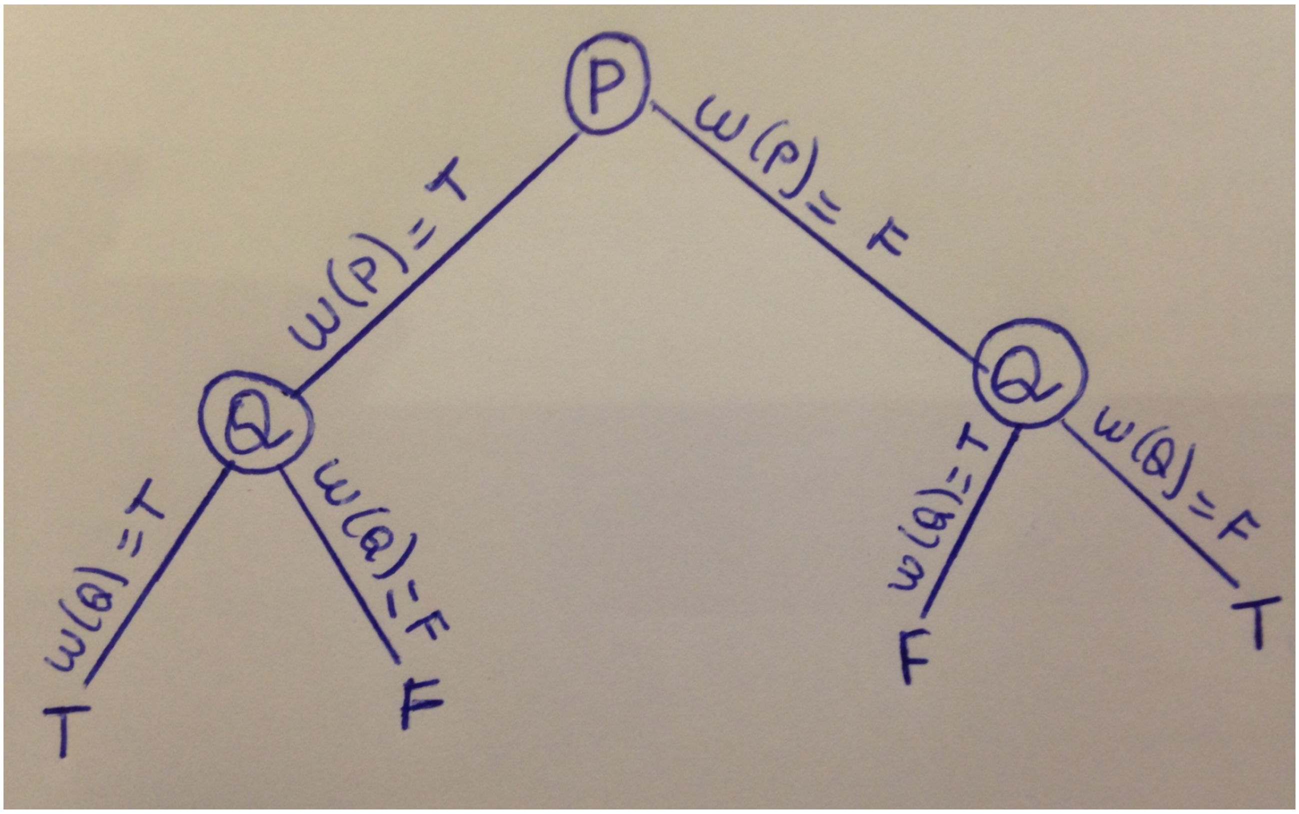

Figura 6: Árvore semântica correspondente à fórmula $(P \rightarrow Q) \leftrightarrow ((\neg P) \rightarrow (\neg Q))$:

Exercício: Usando as árvores semânticas como base de argumentação, defina os conceitos de tautologia, contradição e fórmula satisfatível.

1.12. Método da Negação ou Absurdo

É um método geral de demonstração que, neste contexto, será utilizado para provar a veracidade de enunciados proposicionais. Neste método (prova por absurdo), para se provar que um enunciado (proposição) H é verdadeiro, tenta-se provar que a negação de H é um enunciado verdadeiro. Caso se chegue a um absurdo, isto é, à conclusão de que a negação de H não é verdadeira (ou seja, é falsa), conclui-se que H é verdadeiro (pelo princípio do terceiro excluído) . Caso não se chegue a um absurdo, isto é, caso se prove que a negação de H é verdadeira, conclui-se que H é falso. Caso não se consiga concluir nada sobre a negação de H, nada se pode concluir, também, sobre H.

Exemplos: Prove por absurdo se os seguintes enunciados (proposições) são verdadeiros:

a) Enunciado H: " A fórmula $((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)) \rightarrow (P \rightarrow R)$, chamada lei da transitividade para o conectivo $\rightarrow$, é uma tautologia."

Representação formal do enunciado H:

H: $\forall\omega$, eval $(((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)) \rightarrow (P \rightarrow R), \omega) = T$

Como a prova será feita por absurdo, tentaremos provar que a negação do enunciado H (isto é , $\neg$H) é verdadeira, o que corresponde a provar que $((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)) \rightarrow (P \rightarrow R)$ não é uma tautologia. Assim sendo:

$\neg$H: $\exists\omega \mid$ eval $(((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)) \rightarrow (P \rightarrow R), \omega) = F$

Note que o enunciado $\neg$H garante que existe pelo menos uma interpretação ω na qual a fórmula $((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)) \rightarrow (P \rightarrow R)$ é falsa. Para provar $\neg$H, então, vamos procurar por tal ω, referindo-nos a ele como sendo ω_1 .

Logo, para que a referida fórmula seja falsa em ω_1, as restrições *1* e *2* abaixo têm que ser atendidas:

1- eval($((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)), \omega_1$) = T , e,

2- eval ($(P \rightarrow R), \omega_1$) = F

Para que a restrição *2* seja atendida, as seguintes restrições *3* e *4* têm que ser atendidas:

3- eval (P , ω_1) = T , e,

4- eval (R, ω_1) = F

De *3* geramos a seguinte restrição *5*:

5- $\omega_1(P) = T$

De *4* geramos a seguinte restrição *6*:

6- $\omega_1(R) = F$

Note que, até o presente momento, a interpretação ω_1 candidata a tornar a fórmula $((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)) \rightarrow (P \rightarrow R)$ falsa é perfeitamente viável ($\omega_1(P) = T$ e $\omega_1(R) = F$). Continuemos na análise das restrições ainda não exploradas:

Para satisfazer a restrição *1* , as seguintes restrições *7* e *8* precisam ser atendidas:

7- eval($P \rightarrow Q, \omega_1$) = T , e,

8- eval($Q \rightarrow R, \omega_1$) = T

A fim de que a restrição *7* seja atendida, considerando a exigência expressa na restrição *5*, é necessário que a seguinte restrição *9* seja atendida:

9- $\omega_1(Q) = T$

A fim de que a restrição *8* seja atendida, considerando a exigência expressa na restrição *6*, é necessário que a seguinte restrição *10* seja atendida:

10- $\omega_1(Q) = F$

Observa-se aqui que se chegou a um ABSURDO, pois, a interpretação ω_1 procurada (capaz de tornar o enunciado $\neg$H verdadeiro) é logicamente inconsistente, pois, a fim de atender a todas as restrições do problema, teria que atribuir valores "verdadeiro" e "falso" ao símbolo proposicional *Q* (conforme restrições *9* e *10*, respectivamente). Logo, provou-se que $\neg$H é um enunciado falso e, consequentemente, que o enunciado H é verdadeiro, ou seja, a fórmula
$((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)) \rightarrow (P \rightarrow R)$ é uma tautologia.

b) Enunciado H: "A fórmula $(P \rightarrow Q) \leftrightarrow ((\neg P) \rightarrow (\neg Q))$ é uma tautologia".

Representação formal do enunciado H:

H: $\forall\omega$, eval $((P \rightarrow Q) \leftrightarrow ((\neg P) \rightarrow (\neg Q)), \omega) = T$

Como a prova será feita por absurdo, tentaremos provar que a negação do enunciado H (isto é , $\neg$H) é verdadeira, o que corresponde a provar que $(P \rightarrow Q) \leftrightarrow ((\neg P) \rightarrow (\neg Q))$ não é uma tautologia. Assim sendo:

$\neg$H: $\exists\omega \mid$ eval $((P \rightarrow Q) \leftrightarrow ((\neg P) \rightarrow (\neg Q)), \omega) = F$.

Note que o enunciado $\neg$H garante que existe pelo menos uma interpretação ω na qual a fórmula $(P \rightarrow Q) \leftrightarrow ((\neg P) \rightarrow (\neg Q))$ é falsa. Para provar $\neg$H, então, vamos procurar por tal ω, referindo-nos a ele como sendo ω_1 .

Logo, para que a referida fórmula seja falsa em ω_1, a seguinte restrição *1* tem que ser atendida:

1- $eval(P \rightarrow Q , \omega_1) \neq eval(\neg P \rightarrow \neg Q , \omega_1)$

Sabemos que:

$eval(P \rightarrow Q , \omega_1) = \varphi^{\rightarrow}(\omega_1(P), \omega_1(Q))$ e que:

$eval(\neg P \rightarrow \neg Q , \omega_1) = \varphi^{\rightarrow}(\varphi^{\neg}(\omega_1(P)), \varphi^{\neg}(\omega_1(Q)))$

Logo, a restrição *1* pode ser reescrita como:

$\varphi^{\rightarrow}(\omega_1(P), \omega_1(Q)) \neq \varphi^{\rightarrow}(\varphi^{\neg}(\omega_1(P)), \varphi^{\neg}(\omega_1(Q)))$

Observa-se que a restrição *1*, a qual é a única exigida para tornar o enunciado $\neg H$ verdadeiro, é perfeitamente plausível. De fato, qualquer ω que torne as duas implicações diferentes entre si satisfaz $\neg H$, tal como a interpretação a seguinte interpretação ω_1: $\omega_1(P) = T$ e $\omega_1(Q) = F$.

Logo, NÃO SE CHEGOU A UM ABSURDO, pois encontramos uma interpretação ω_1 que torna o enunciado $\neg H$ verdadeiro. Logo, o enunciado H é falso, provando que a bi-implicação

c) Prove, por absurdo, se o seguinte enunciado H é verdadeiro (resolvendo, a partir de agora, de maneira mais direta):

H: A fórmula $(P \wedge Q) \vee (\neg Q)$ é satisfatível.

H: $\exists \omega$, eval $((P \wedge Q) \vee (\neg Q), \omega) = T$

$\neg$H: $\forall \omega$, eval $((P \wedge Q) \vee (\neg Q), \omega) = F$

Para que $\neg$H seja verdadeiro, em todo ω ambos os argumentos da disjunção têm que ser falsos, ou seja:

1- $\forall \omega$, eval $((P \wedge Q), \omega) = F$ e
2- $\forall \omega$, eval $(\neg Q, \omega) = F$

Chegamos a um ABSURDO que pode ser observado por qualquer uma das duas seguintes análises: a) a restrição *1* é impossível de ser atendida, uma vez que a conjunção apresentada seria verdadeira em uma interpretação ω em que tanto P quanto Q sejam verdadeiros; b) a restrição *2* é impossível de ser atendida, uma vez que a negação apresentada seria verdadeira em uma interpretação ω em que Q seja falso. Logo, conclui-se que $\neg$H é falso e, consequentemente, H é verdadeiro.

d) Prove, por absurdo, se o seguinte enunciado H é verdadeiro:

H: A fórmula $P \wedge (\neg P)$ é satisfatível.

H: $\exists\omega$, eval $(P \wedge (\neg P), \omega) = T$

$\neg$H: $\forall\omega$, eval $(P \wedge (\neg P), \omega) = F$

Para que $\neg$H seja verdadeiro, em todo ω pelo menos um dos argumentos da conjunção tem que ser falso, ou seja, a seguinte restrição *1* tem que ser respeitada:

1- $\forall\omega, \varphi^{\wedge}(\omega(P), \varphi^{\neg}(\omega(P))) = F$

A restrição *1* é perfeitamente plausível, pois, de fato, em qualquer interpretação ω, o valor de pelo menos um dos argumentos da conjunção será falso, o que a torna falsa. NÃO CHEGAMOS ASSIM A UM ABSURDO, provando que $\neg$H é verdadeiro e que H é falso.

- **Exercício**: prove, por absurdo, se a fórmula $(P \wedge Q) \leftrightarrow (\neg P \vee Q)$ é uma tautologia.

EXEMPLOS DE PROVA POR ABSURDO APLICADA A CONHECIMENTOS DO MUNDO (Extraídos do livro do Prof.João Nunes):

1) Considere as três afirmações seguintes:

H_1: Se Alírio toma vinho e o vinho está ruim, ele fica com ressaca.
H_2: Se Alírio fica com ressaca, então ele fica triste e vai para casa.
H_1: Um desses eventos ocorre (e somente um deles!): Alírio vai ao seu encontro romântico com Virgínia ou, então, ele fica triste e vai para casa.

Suponha que as três afirmações acima são verdadeiras. A partir desse fato, prove, por absurdo, se a seguinte afirmação também é verdadeira:

G_1: Se Alírio toma vinho e este está ruim, então ele perde seu encontro romântico com Virgínia.

Solução: considere-se que:
P: Alírio toma vinho;
Q: O vinho está ruim;
R: Alírio fica com ressaca;
S: Alírio fica triste;
P_1: Alírio vai para casa;
Q_1: Alírio vai ao encontro romântico com Virgínia;

Assim sendo:

H_1: $(P \wedge Q) \rightarrow R$
H_2: $R \rightarrow (S \wedge P_1)$
H_3: $(Q_1 \vee (S \wedge P_1)) \wedge (Q_1 \rightarrow \neg (S \wedge P_1))$
G_1: $(P \wedge Q) \rightarrow \neg Q_1$

O enunciado E que descreve o problema é:

E: $\forall\omega$, eval $((H_1 \wedge H_2 \wedge H_3) \rightarrow G_1, \omega) = T$

Como a prova será feita por absurdo, tentaremos provar que $\neg E$ é verdadeiro, o que corresponde a provar que $(H_1 \wedge H_2 \wedge H_3) \rightarrow G_1$ não é uma tautologia. Assim sendo:

$\neg E$: $\exists \omega \mid$ eval $((H_1 \wedge H_2 \wedge H_3) \rightarrow G_1, \omega) = F$

Para que $\neg E$ seja verdadeiro deve haver um ω_1 tal que:

1- eval $((H_1 \wedge H_2 \wedge H_3), \omega_1) = T$ e
2- eval $(G_1, \omega_1) = F$

De *2*:

3- Eval $((P \wedge Q), \omega_1) = T$ e
4- Eval $(\neg Q_1, \omega_1) = F$

De *3* :

5- $\omega_1(P) = T$ e
6- $\omega_1(Q) = T$

De *4* :

7- $\omega_1(Q_1) = T$

De *1 :*

8- eval $(H_1, \omega_1) = T$, ou seja, eval $((P \wedge Q) \rightarrow R, \omega_1) = T$

De *5,* 6 e *8* :
9- $\omega_1(R) = T$

De *1* :

10- eval $(H_2, \omega_1) = T$, ou seja, eval $(R \rightarrow (S \wedge P_1), \omega_1) = T$

De *9* e *10* :

11- Eval(($S \wedge P_1$) , ω_1) = T

De *11* :

12- $\omega_1(S) = T$ e

13- $\omega_1(P_1) = T$

De *1*:

14- eval (H_3 , ω_1) = T , ou seja, eval (($Q_1 \vee (S \wedge P_1)$) $\wedge$ ($Q_1 \rightarrow \neg (S \wedge P_1)$), ω_1) = T

De *14* :

15- eval (($Q_1 \vee (S \wedge P_1)$) , ω_1) = T e

16- eval (($Q_1 \rightarrow \neg (S \wedge P_1)$), ω_1) = T

De *7* e *16*:

17- eval ($\neg (S \wedge P_1)$, ω_1) = T

De *17* :

18- eval (($S \wedge P_1$) , ω_1) = F

De *18* :

19- eval (S , ω_1) = F OU eval (P_1 , ω_1) = F

De *12, 13* e *19* : chega-se a UM ABSURDO, pois não tem como a restrição *19* ser atendida em uma interpretação em que S e P_1 são ambos verdadeiros. Assim sendo, provou-se que o enunciado $\neg E$ é falso e, consequentemente, que o enunciado E é verdadeiro, ou seja, provou-se que G_1 é verdadeiro sempre que H_1 , H_2 e H_3 o são.

1.13. Relações Semânticas entre os Conectivos da LP

Conforme será visto a seguir, há diversas equivalências lógicas que representam as relações semânticas existentes entre os conectivos lógicos. Como conseqüência disso, uma fórmula H da LP pode ser reescrita como uma outra fórmula G tal que:

- G seja equivalente a H
- G tenha os mesmos símbolos proposicionais de H
- G seja expressa em termos de conectivos outros que os de H.

Ver **material complementar** sobre regras de equivalência no moodle .

A título de exemplo, a seguir mostram-se equivalências lógicas que estabelecem as relações entre alguns conectivos (considere que A e B são fórmulas da LP):

a) Equivalências lógicas que estabelecem relações semânticas entre os conectivos $\{\neg , \wedge\}$ e os demais conectivos:

$A \vee B \equiv \neg(\neg A \wedge \neg B)$

$A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B \equiv \neg(\neg\neg A \wedge \neg B) \equiv \neg(A \wedge \neg B)$

$A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A) \equiv \neg(A \wedge \neg B) \wedge \neg(B \wedge \neg A)$

<u>OBS:</u> As equivalências lógicas apresentadas neste item *a)* provam que o conjunto de conectivos $\{\neg , \wedge\}$ é COMPLETO, ou seja, que através dos conectivos $\neg$ e $\wedge$ é possível definir todos os demais.

b) Equivalências lógicas que estabelecem relações semânticas entre os conectivos $\{\neg , \vee\}$ e os demais conectivos:

$A \wedge B \equiv \neg(\neg A \vee \neg B)$

$A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$

$A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A) \equiv (\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A) \equiv \neg(\neg(\neg A \vee B) \vee \neg(\neg B \vee A))$

<u>OBS:</u> As equivalências lógicas apresentadas neste item *b)* provam que o conjunto de conectivos $\{\neg , \vee\}$ é COMPLETO, ou seja, que através dos conectivos $\neg$ e $\vee$ é possível definir todos os demais.

<u>EXERCÍCIO</u>: Apresente as equivalências lógicas que provem que o conjunto de conectivos $\{\neg , \rightarrow\}$ é COMPLETO.

1.14. Prova por Dedução Lógica

Conforme mostrado na secção 1.3, um Sistema Formal da LP compõe-se de um alfabeto, de uma linguagem de um conjunto de axiomas e de um conjunto de regras de inferência. Nos itens ***a*** e ***b*** da referida secção, foram apresentadas, respectivamente e em detalhes, a definição do alfabeto e da linguagem da LP. Nos itens ***c*** e ***d*** da mesma secção, introduziram-se, respectivamente os axiomas e as regras de inferência, prevendo-se, ao mesmo tempo, que o assunto seria abordado em mais detalhes posteriormente. Para completar o assunto, a seguir apresentam-se os axiomas e as regras de inferência que compõem o Sistema Formal da LP proposto no livro de Elliott Mendelson (ver bibliografia do curso).

Observação: Um sistema formal produz fórmulas de modo puramente sintáxico e não precisa associar uma interpretação (semântica - não precisa usar a aplicação Eval). O sistema formal fornece então regras que determinam quais das fórmulas são teoremas.

1.14.1. Os axiomas:

Conforme visto na secção 1.3, o conjunto de axiomas corresponde a um subconjunto da linguagem da LP. Mendelson propõe o seguinte conjunto de três axiomas (suponha que A e B são fórmulas da linguagem de LP (isto é, A e B $\in L_0$) e que o conectivo $\neg$ tenha prioridade sobre o conectivo $\rightarrow$):

(A1): $(A \rightarrow (B \rightarrow A))$

(A2): $((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)))$

(A3): $((\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow ((\neg B \rightarrow A) \rightarrow B))$

Note que Mendelson utiliza como conjunto de conectivos o conjunto ($\neg, \rightarrow$). Mas, conforme proposto como exercício anteriormente, todos os demais conectivos podem ser reescritos através de composições dos conectivos $\neg$ e $\rightarrow$. De fato, tem-se que:

$(A \wedge B) \equiv \neg(A \rightarrow \neg B)$;

$(A \vee B) \equiv (\neg A \rightarrow B)$

$(A \leftrightarrow B) \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A) \equiv \neg((A \rightarrow B) \rightarrow \neg(B \rightarrow A))$

1.14.2. As Regras de Inferência

Mendelson propõe um conjunto de regras de inferência formado apenas por uma regra: Modus Ponens, apresentada a seguir:

$$\frac{A,\ A \rightarrow B}{B}$$

Tal regra de inferência diz o seguinte: sempre que $\varpi(A) = T$ e $\varpi(A \rightarrow B) = T$, tem-se que $\varpi(B) = T$.

1.14.3. Prova na LP usando os axiomas e as regras de inferência:

Na LP, uma fórmula G é uma conseqüência de um conjunto de fórmulas Γ da LP se, e somente se, existe uma seqüência $H_1, ..., H_n$ de fórmulas da LP tal que $G = H_n$ e, para cada ***i*** , H_i é um axioma, ou H_i é um elemento de Γ, ou H_i é uma conseqüência direta de algumas das fórmulas que a antecedem na seqüência pela aplicação de uma regra de inferência a tais fórmulas antecedentes. Tal seqüência é chamada de ***prova*** (ou ***dedução***) de G a partir de Γ. Os elementos de Γ são chamados de hipóteses ou premissas da prova. Usa-se a notação Γ |-- G como uma abreveatura para " G é uma conseqüência de Γ ". Se Γ é um conjunto finito de fórmulas { $A_1, ..., A_m$ }, escreve-se $A_1, ..., A_m$ |-- G, ao invés de { $A_1, ..., A_m$ } |-- G. Se Γ é um conjunto vazio, |-- G se, e somente se, G é um teorema.

Observações gerais sobre as provas nos sistemas axiomáticos:

- Note que $A_1, ..., A_m$ |-- G significa que $\varpi(((A_1 \wedge ... \wedge A_m) \rightarrow G)) = T$.
- Um Sistema Formal da LP é dito correto quando, para toda seqüência de prova $H_1, ..., H_{n-1}, H_n$, tem-se que $\varpi(((H_1 \wedge ... \wedge H_{n-1}) \rightarrow H_n)) = T$. É devido a esta necessidade de correção que, em um sistema axiomático de provas, os axiomas devem ser verdadeiros (por exemplo, se a fórmula H_1 da seqüência apresentada for um axioma falso, H_n, que é a própria fórmula G a ser provada, pode ser verdadeira ou falsa que a veracidade da implicação estará garantida. Logo, o sistema de provas seria inócuo, uma vez que não determinaria se G é verdadeira ou falsa.
- Um Sistema Formal da LP é dito completo quando existir uma prova ou dedução para toda fórmula que seja verdadeira.
- O sistema axiomático de Mendelson apresentado acima é correto e completo (ver demonstração no próprio livro).

PROPOSIÇÃO 14: (Teorema da Dedução): Se Γ é um conjunto de fórmulas da LP, A e B são fórmulas da LP e Γ, A |-- B, então Γ |-- A $\rightarrow$ B.

Exemplos: prove por dedução lógica os seguintes enunciados (as seqüências de fórmulas que corresponde à prova será disposta de modo que cada fórmula ocupe uma linha numerada; ao final de cada linha, será apresentada a justificativa do por que a fórmula da linha é verdadeira):

OBS: EM TODOS OS EXEMPLOS O CONECTIVO ¬ TEM PRIORIDADE SOBRE O →

1) |-- A → A , isto é, A → A é um teorema.

(1) (A → ((A → A) → A)) → ((A → (A → A)) → (A → A)) : instância do axioma (A2)

(2) A → ((A → A) → A) : instância do axioma (A1)

(3) (A → (A → A)) → (A → A) : Modus Ponens (MP) aplicada às linhas (1) e (2)

(4) A → (A → A) : instância do axioma (A1)

(5) A → A : MP aplicada às linhas (3) e (4)

2) A → B, B → C |-- A → C

(1) A → B : hipótese

(2) B → C : hipótese

(3) A : hipótese

(4) B : MP em (1) e (3)

(5) C : MP em (2) e (4)

Logo, da dedução efetuada entre as linhas (1) e (5) tem-se que: *A → B, B → C, A* |-- *C*. Então, pelo Teorema da Dedução, *A → B, B → C* |-- *A → C*, isto é, a implicação *A → C* é uma conseqüência do conjunto de fórmulas $\Gamma = \{ A \rightarrow B, B \rightarrow C \}$.

3) $A \rightarrow (B\rightarrow C), B \mid\!-\!- A \rightarrow C$

(1) $A \rightarrow (B\rightarrow C)$: hipótese

(2) B

(3) A : hipótese

(4) $B\rightarrow C$: MP aplicada às linhas (1) e (3)

(5) C : MP aplicada às linhas (2) e (4)

Então, pela dedução obtida entre as linhas (1) e (5), tem-se que: $A\rightarrow(B\rightarrow C), B, A \mid\!-\!- C$. Logo, do Teorema da Dedução decorre que:

$A \rightarrow (B\rightarrow C), B \mid\!-\!- A \rightarrow C$

4) $\mid\!-\!- \neg\neg B \rightarrow B$

(1) $(\neg B \rightarrow \neg\neg B) \rightarrow ((\neg B \rightarrow \neg B) \rightarrow B)$: Axioma A3

(2) $\neg B \rightarrow \neg B$: Prova do exercício 1

(3) $(\neg B \rightarrow \neg\neg B)\rightarrow B$: Linhas (1) e (2) e Prova do exercício 3

(4) $\neg\neg B \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg\neg B)$: Axioma A1

(5) $\neg\neg B \rightarrow B$: Linhas (3) e (4) e Prova do exercício 2

5) $\mid\!-\!- B \rightarrow \neg B$

(1) $(\neg\neg\neg B \rightarrow \neg B) \rightarrow ((\neg\neg\neg B \rightarrow B) \rightarrow \neg\neg B)$: Axioma A3

(2) $\neg\neg\neg B \rightarrow \neg B$: Prova do exercício 4

(3) $(\neg\neg\neg B \rightarrow \neg\neg B$: MP aplicada a linhas (1) e (2)

(4) $B \rightarrow (\neg\neg\neg B \rightarrow B)$: Axioma (A1)

(5) $B \rightarrow \neg\neg B$: linhas (3) e (4) e Prova do exercício 2

6) $\vdash \neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$

(1) $\neg A$: Hipótese

(2) A : Hipótese

(3) $A \rightarrow (\neg B \rightarrow A)$: Axioma A1

(4) $\neg A \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$: Axioma A1

(5) $\neg B \rightarrow A$: MP aplicada a linhas (2) e (3)

(6) $\neg B \rightarrow \neg A$: MP aplicada a linhas (1) e (4)

(7) $(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow ((\neg B \rightarrow A) \rightarrow B)$: Axioma A3

(8) $(\neg B \rightarrow A) \rightarrow B$: MP aplicada a linhas (6) e (7)

(9) B : MP aplicada a linhas (5) e (8)

Então, da linha (1) à (9), deduz-se que: $\neg A, A \rightarrow B$. Logo, pelo Teorema da Dedução aplicado uma primeira vez, tem-se que: $\neg A \vdash A \rightarrow B$. Em seqüência, aplicando pela segunda vez o Teorema da Dedução, obtém-se: $| \neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$

7) $\vdash (\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B)$

(1) $\neg B \rightarrow \neg A$: Hipótese

(2) A : Hipótese

(3) $(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow ((\neg B \rightarrow A) \rightarrow B)$: Axioma A3

(4) $A \rightarrow (\neg B \rightarrow A)$: Axioma A1

(5) $(\neg B \rightarrow A) \rightarrow B$: MP aplicada a linhas (1) e (3)

(6) $A \rightarrow B$: linhas (4) e (5) e Prova do exercício 2

(7) B : MP aplicada a linhas (2) e (6)

Então, pela dedução entre as linhas (1) e (7) tem-se que: $\neg B \rightarrow \neg A, A \vdash B$, e duas aplicações sucessivas do Teorema da Dedução produz:

$\vdash (\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B)$

8) $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$

(1) $A \rightarrow B$: Hipótese

(2) $\neg\neg A \rightarrow A$: Prova do exercício 4

(3) $\neg\neg A \rightarrow B$: linhas (1) e (2) e Prova do exercício 2

(4) $B \rightarrow \neg\neg B$: Prova do exercício 5

(5) $\neg\neg A \rightarrow \neg\neg B$: linhas (3) e (4) e Prova do exercício 2

(6) $(\neg\neg A \rightarrow \neg\neg B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$: Prova do exercício 7

(7) $\neg B \rightarrow \neg A$: MP aplicada a linhas (5) e (6)

Logo, da dedução entre as linhas (1) e (7), tem-se que: $A \rightarrow B \vdash \neg B \rightarrow \neg A$, Aplicando-se o Teorema da Dedução:

$\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$

9) $\vdash A \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg(A \rightarrow B))$

(1) A : Hipótese

(2) $A \rightarrow B$: Hipótese

(3) B : MP aplicada a linhas (1) e (2)

Então, entre as linhas (1) e (3) deduz-se que:

$A, A \rightarrow B \vdash B$

Aplicando-se duas vezes o Teorema da Dedução, obtém-se o seguinte resultado R1:

R1: $\vdash A \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow B)$

Pela Prova do exercício 8, pode-se garantir a seguinte afirmação E1:

E1: $\vdash ((A \rightarrow B) \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg(A \rightarrow B))$.

Finalmente, de R1 e E1 e da Prova do exercício 2, conclui-se que:

$\vdash A \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg(A \rightarrow B))$

10) $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow B) \rightarrow B)$

(1) $A \rightarrow B$: Hipótese

(2) $\neg A \rightarrow B$: hipótese

(3) $(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$: Prova do exercício 8

(4) $\neg B \rightarrow \neg A$: MP aplicada às linhas (1) e (3)

(5) $(\neg A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg\neg A)$: Prova do exercício 8

(6) $\neg B \rightarrow \neg\neg A$: MP aplicada a linhas (2) e (5)

(7) $(\neg B \rightarrow \neg\neg A) \rightarrow ((\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow B)$: Axioma A3

(8) $(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow B$: MP aplicada a linhas (6) e (7)

(9) B : MP aplicada a linhas (4) e (8)

Logo, pelas linhas de (1) a (9) deduz-se que:

$A \rightarrow B, \neg A \rightarrow B \vdash B$. Por duas aplicações do Teorema da Dedução obtém-se:

$\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow B) \rightarrow B)$