Notas para o acompanhamento das aulas de

Geometria Analítica e Álgebra Linear

Bacharelado em Ciência da Computação

Primeira Parte

Importante: Estas notas não dispensa o estudante das Referências Bibliográficas sugeridas

No caso de impressão deste material em papel: faça no modo COLORIDO. Vários textos e figuras fazem o uso de cores

Sumário

Capítulo 1

Brevíssima Revisão de Ensino Médio

(o Sistema de Coordenadas Cartesianas Ortogonais e Equações de Retas no plano - sem o uso de vetores)

1.1 Conjuntos Numéricos

A teoria envolvendo a construção matemática rigorosa dos conjuntos numéricos, suas operações e propriedades foge aos objetivos deste curso introdutório. Tal estudo é visto em disciplinas mais avançadas de *Teoria dos Números* e *Análise Real* (ou *Análise Complexa*).

Abaixo segue um resumo de tais conjuntos.

Conjunto do ***números naturais****:*

$$\boxed{\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}}.$$

Alguns autores consideram 0 (zero) como número natural.

Conjunto dos ***números inteiros****:*

$$\boxed{\mathbb{Z} = \{\ldots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}}.$$

A palavra "números" em alemão é escrita como "zahlen".

Conjunto dos ***números racionais****:*

$$\boxed{\mathbb{Q} = \left\{\tfrac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z} \text{ e } b \neq 0\right\}}.$$

Existe uma relação de equivalência importante em $\mathbb{Q}$:

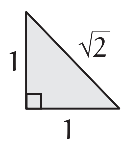
$$\boxed{\tfrac{a}{b} = \tfrac{c}{d} \Longleftrightarrow ad = bc}.$$

Assim, por exemplo, $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$, pois $1.6 = 2.3$.

Todo número racional pode ser escrito em uma forma decimal, sendo esta forma "finita" ou "infinita" formando uma *dízima periódica*. Por exemplo,

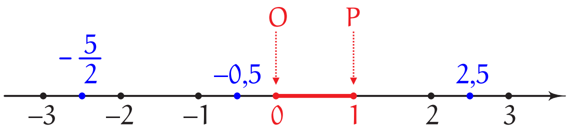
$$\tfrac{1}{2} = 0,5 \qquad \tfrac{7}{8} = 0,875 \qquad \tfrac{1}{3} = 0,3333\ldots \qquad \tfrac{41}{333} = 0,123123123\ldots$$

Existem números que não são racionais. Por exemplo, o comprimento da hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos medem uma unidade de comprimento. Tal número é indicado por $\sqrt{2}$ e é uma raiz da equação $x^2 = 1^2 + 1^2$ (esta equação é proveniente do *Teorema de Pitágoras*), ou seja, $x^2 = 2$.



Podemos associar os números racionais a pontos de uma reta.

Para tanto, basta fixarmos dois pontos O e P distintos na reta e associarmos os números 0 e 1, respectivamente. Com isto, estabelecemos uma *unidade de medida geométrica* sobre a reta que, por meio de seus múltiplos e submúltiplos, e, por meio da ordenação natural do conjunto $\mathbb{Q}$, permite a localização dos demais números racionais sobre essa reta. Os números racionais positivos estão associados a pontos da semirreta com origem em O que passa por P, enquanto que os números racionais negativos estão associados a pontos da semirreta com origem em O que não passa por P (semirreta oposta). A figura abaixo esclarece o procedimento acima.



Existem pontos da reta que não estão associados a números racionais. Tais pontos estão associados aos chamados ***números irracionais***.

À reunião do conjunto dos números racionais e do conjunto dos números irracionais chamamos de conjunto dos ***números reais*** e indicamos por $\mathbb{R}$.

Aqui cabe fazer uma ressalva importante: existe um processo matemático rigoroso de construção do conjunto dos números reais e de sua associação com os pontos de uma reta. Naturalmente, não temos como fazer esse desenvolvimento nestas notas. O que procuramos fazer acima é apenas passar uma ideia intuitiva do procedimento. Voltaremos a falar disso na Seção 2.2 do Capítulo 2 com um pouco mais de rigor.

A reta associada ao conjunto dos números reais, conforme descrevemos acima, chamamos de ***eixo coordenado***, ou então ***eixo real***, ou ainda, de ***reta real***.

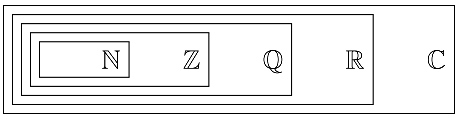
Todo número irracional pode ser aproximado por números racionais e possui uma representação decimal "infinita" que não forma *dízima periódica*. Por exemplo,

$$\sqrt{2} = 1,41421356\ldots \qquad \sqrt{3} = 1,73205080\ldots \qquad \sqrt{5} = 2,23606797\ldots \qquad \pi = 3,14159265\ldots \qquad e = 2,71828182\ldots$$

Ainda há o conjunto dos números complexos:

$$\boxed{\mathbb{C} = \left\{a + bi : a, b \in \mathbb{R} \text{ e } i = \sqrt{-1}\right\}}.$$

Em resumo:



Neste curso trabalharemos apenas com o conjunto dos números reais, admitindo suas operações usuais, bem como suas propriedades.

1.2 O *Sistema de Coordenadas Cartesianas Ortogonais* no plano

A definição de *sistema de coordenadas cartesianas ortogonais* segue abaixo:

Consideremos dois eixos congruentes (isto é, com a mesma unidade de medida geométrica*) perpendiculares e com origens coincidentes no ponto O.*

*Um dos eixos será chamado de **eixo das abscissas**, indicado por Ox, enquanto que o outro será chamado de **eixo das ordenadas**, indicado por Oy. Cada um desses eixos também é chamado, genericamente, de **eixo coordenado**.*

*Um plano determinado por dois eixos, conforme descrito acima, será dito um plano munido de um **sistema de coordenadas cartesianas ortogonais** ou, simplificadamente, **plano cartesiano** e será indicado por Oxy. O ponto O é chamado de **origem** do sistema de coordenadas cartesianas ortogonais.*

É comum representar o plano cartesiano como o eixo Ox na horizontal com a orientação da esquerda para a direita e o eixo Oy na vertical com orientação de baixo para cima.

A grande utilidade do plano cartesiano está no fato de cada ponto deste plano estar associado a um par ordenado de números reais e vice-versa. Esta associação é feita do seguinte modo:

(**i**) Dado um ponto P no plano cartesiano, consideremos as projeções ortogonais desse ponto nos eixos coordenados. A projeção ortogonal P_x de P no eixo Ox é um ponto deste eixo associado a um número real x que chamamos de ***abscissa*** de P, enquanto que a projeção ortogonal P_y de P no eixo Oy é um ponto deste eixo associado a um número real y que chamamos de ***ordenada*** de P. Abscissas e ordenadas são chamadas, também, de ***coordenadas cartesianas*** de P. O ponto P fica, portanto, associado ao par ordenado de números reais (x, y). Indicamos essa associação por

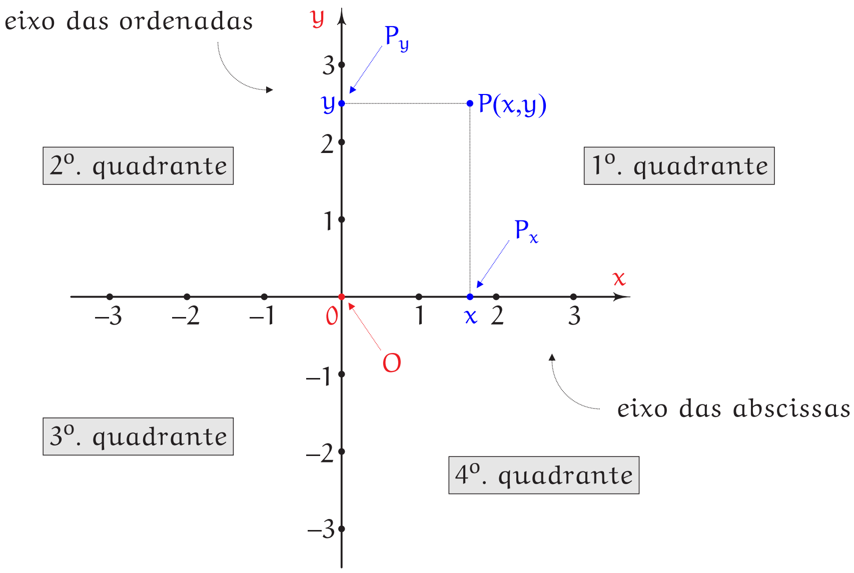
$$\boxed{P = (x, y) \text{ ou } P\,(x, y)}.$$

Observemos que devido à unicidade das projeções ortogonais de P aos eixos coordenados, o par ordenado (x, y) é único!

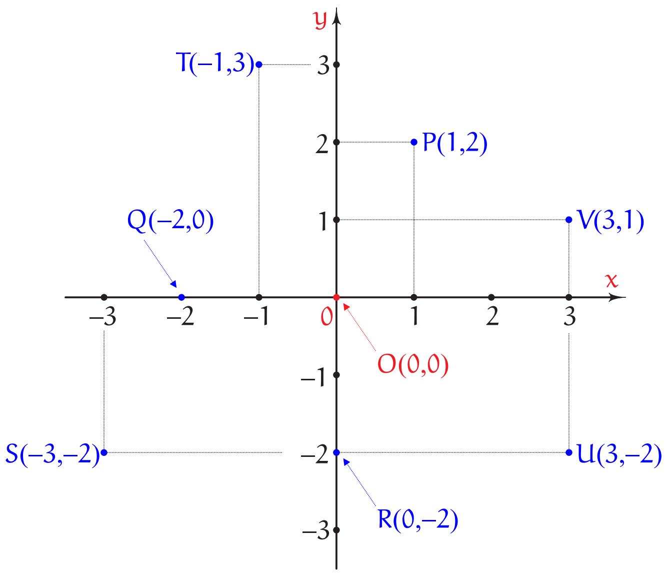
(**ii**) Dado um par ordenado de números reais (x, y), tomamos os pontos P_x, associado ao número x no eixo Ox, e P_y associado ao número y no eixo Oy. Por P_x traçamos uma perpendicular a Ox e por P_y traçamos uma perpendicular a Oy. O cruzamento dessas perpendiculares determina um ponto P. O par ordenado de números reais (x, y) fica, portanto, associado ao ponto P.

Mais uma vez, devido às unicidades de P_x e P_y, o ponto P é o único ponto que pode ser associado ao par ordenado (x, y).

Os pontos $P\,(x, y)$ tais que:
- $x, y > 0$ estão no chamado *1º quadrante*;
- $x < 0$ e $y > 0$ estão no chamado *2º quadrante*;
- $x, y < 0$ estão no chamado *3º quadrante*;
- $x > 0$ e $y < 0$ estão no chamado *4º quadrante*.



Abaixo seguem alguns exemplos para esclarecer os procedimentos descritos acima.



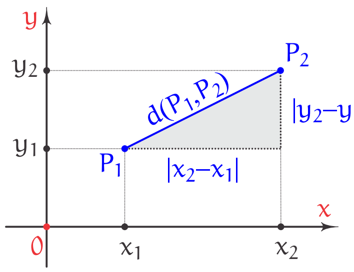
O conjunto dos pares ordenados de números reais é indicado por $\mathbb{R}^2$, ou seja:

$$\boxed{\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}}$$

A associação entre pontos do plano cartesiano e pares ordenados de números reais $\mathbb{R}^2$ descrita em (**i**) e (**ii**) acima permite que se diga que existe uma ***bijeção*** entre o plano cartesiano e $\mathbb{R}^2$. É por isso que alguns textos referem-se ao conjunto $\mathbb{R}^2$ como "plano cartesiano".

1.3 Distância entre dois pontos no *Plano Cartesiano*

Dados dois pontos $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ no plano cartesiano, podemos calcular a distância $d(P_1, P_2)$ entre eles utilizando o Teorema de Pitágoras.



Proposição 1.1 Se $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ são pontos no plano cartesiano, então a distância $d(P_1, P_2)$ entre P_1 e P_2 é dada por:

$$\boxed{d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}.$$

Exemplo 1.1 A distância entre $P_1(-3, 2)$ e $P_2(4, -1)$ é $d(P_1, P_2) = \sqrt{(4 - (-3))^2 + (-1 - 2)^2} = \sqrt{49 + 9} = \sqrt{58}$.

Exercício 1.1 Calcule e distância entre $P_1(5, 0)$ e $P_2(-1, 1)$.

1.4 Alinhamento entre três pontos no *Plano Cartesiano*

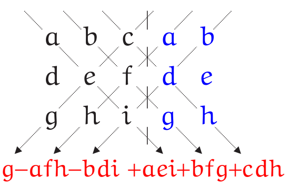
Recordemos que o determinante de uma matriz 2×2 pode ser calculado por

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc.$$

Recordemos, também, que o determinante de uma matriz 3×3 pode ser calculado pela *Regra de Sarrus:*

$$\det \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = aei + bfg + chd - ceg - bdi - ahf.$$

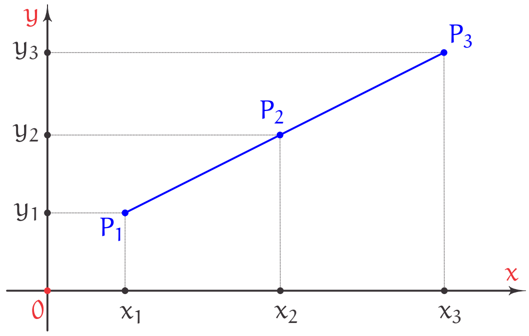
Um procedimento prático da *Regra de Sarrus* é dado pelo esquema abaixo:



Muitas vezes é extremamente útil saber quando três pontos no plano cartesiano estão alinhados por meio de um cálculo algébrico. A resposta é dada pela seguinte proposição.

Proposição 1.2 Os pontos $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ e $P_3(x_3, y_3)$ no plano cartesiano estão alinhados se, e somente se,

$$\boxed{\det\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{bmatrix} = 0}.$$



Exemplo 1.2 Os pontos $P_1\,(-3,1)$, $P_2\,(5,-1)$ e $P_3\,(1,0)$ estão alinhados, pois

$$\det\begin{bmatrix} -3 & 1 & 1\\ 5 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix} = 3+1+0-(-1)-5-0 = 0.$$

Exercício 1.2 Verifique se os pontos $P_1\,(5,0)$, $P_2\,(-1,1)$ e $P_3\,(0,3)$ estão alinhados.

1.5 Retas no *Plano Cartesiano*

Retas no plano cartesiano pode ser associada a uma equação de acordo com a proposição abaixo.

Proposição 1.3 Toda reta do plano cartesiano pode ser associada a pelo menos uma equação da forma

$$\boxed{ax+by+c=0}$$

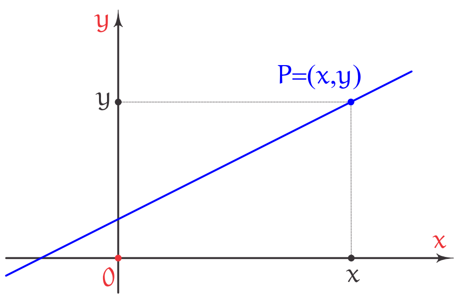
sendo $a, b, c \in \mathbb{R}$ com $a \neq 0$ ou $b \neq 0$. O par ordenado (x, y) representa um ponto genérico da reta.

Reciprocamente, dada uma equação da forma $ax+by+c=0$, existe uma única reta no plano cartesiano cujos pontos (x, y) a satisfazem.

Uma equação de reta da forma

$$\boxed{ax+by+c=0}$$

é dita ***equação geral*** *da reta.*



Observemos que dada uma reta, podem existir várias equações gerais. Por exemplo, $x+2y+3=0$ e $2x+4y+6=0$ são equações da mesma reta.

Observemos também que uma equação de reta no plano cartesiano é, na verdade, uma condição para que os pontos (x, y) da reta cumpram.

Algumas particularidades:

Seja $ax+by+c=0$ equação da reta r.

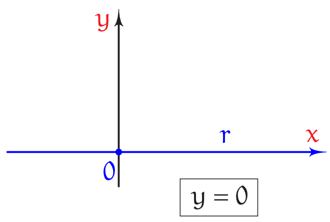
• **(1)** Se $a = 0$ e $c = 0$ (portanto, $b \neq 0$), então a reta r coincide com o eixo coordenado Ox e corta o eixo coordenado Oy na origem.

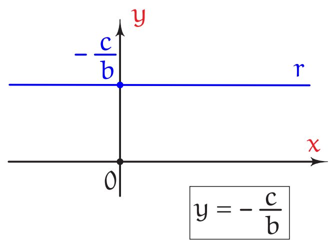
• **(2)** Se $a = 0$ e $c \neq 0$ (portanto, $b \neq 0$), então a reta r é paralela ao eixo coordenado Ox e corta o eixo coordenado Oy no ponto que corresponde à ordenada $y = -\frac{c}{b}$.

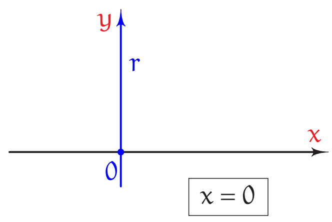
• **(3)** Se $b = 0$ e $c = 0$ (portanto, $a \neq 0$), então a reta r coincide com o eixo coordenado Oy e corta o eixo coordenado Ox na origem.

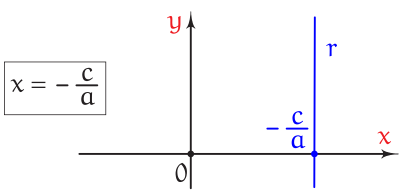
• **(4)** Se $b = 0$ e $c \neq 0$ (portanto, $a \neq 0$), então a reta r é paralela ao eixo coordenado Oy e corta o eixo coordenado Ox no ponto que corresponde à abscissa $x = -\frac{c}{a}$

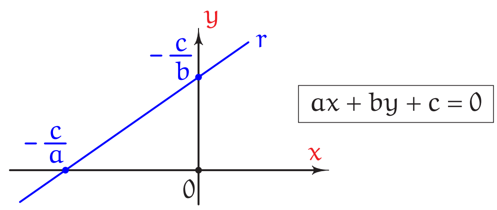
• **(5)** Se $a \neq 0$ e $b \neq 0$, então a reta r não é paralela a qualquer dos eixos coordenados e corta o eixo Ox no ponto que corresponde à abscissa $x = -\frac{c}{a}$ e corta o eixo Oy no ponto que corresponde à ordenada $y = -\frac{c}{b}$.











*Quando $b \neq 0$ na equação geral $ax + by + c = 0$ da reta r, podemos isolar y e escrever a **equação reduzida** de r como sendo*

$$\boxed{y = mx + n}.$$

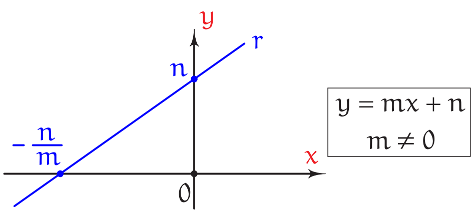
Observemos que $m = -\frac{a}{b}$ enquanto que $n = -\frac{c}{b}$.

O número m é chamado de ***coeficiente angular*** da reta r e mede a "inclinação" dessa em relação ao eixo coordenado Ox.

Como $b \neq 0$, a reta r sempre corta o eixo coordenado Oy no ponto que corresponde à ordenada n.

Se $m \neq 0$, a reta r corta o eixo coordenado Ox no ponto que corresponde à abscissa $-\frac{n}{m}$.

Se $m = 0$ temos que r é paralela ou coincidente com o eixo coordenado Ox.

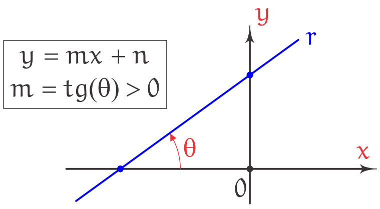


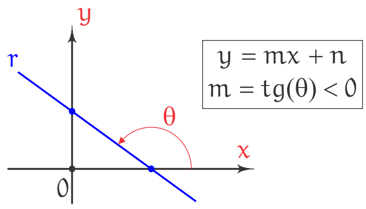
O coeficiente angular pode ser interpretado geometricamente de acordo com a proposição abaixo.

Proposição 1.4 Se $y = mx + n$ é equação reduzida da reta r no plano cartesiano, então

$$\boxed{m = \operatorname{tg}(\theta)}$$

sendo θ a medida do ângulo orientado no sentido anti-horário que a reta r forma com o eixo coordenado Ox.





Por fim, a próxima proposição é bastante útil para encontrar equações de retas.

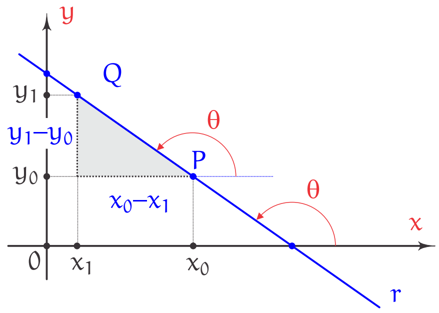
Proposição 1.5 ($\mathbf{1}$) Se $P(x_0, y_0)$ e $Q(x_1, y_1)$ são pontos de uma r no plano cartesiano e $x_0 \neq x_1$, então o coeficiente angular de r é dado por

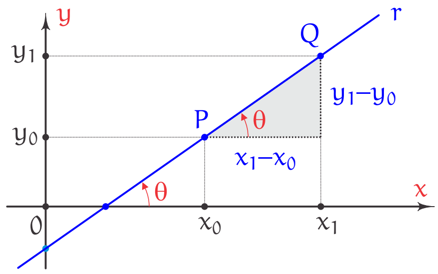
$$\boxed{m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}}.$$

($\mathbf{2}$) Sejam $P(x_0, y_0)$ ponto de uma reta r no plano cartesiano e m seu coeficiente angular. Então,

$$\boxed{y - y_0 = m(x - x_0)}$$

é equação de r.





$$m = \text{tg}(\theta) = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

Exemplo 1.3 Sejam $P_1(-3, 1)$ e $P_2(5, -1)$ pontos da r no plano cartesiano. Como $-3 \neq 5$, a reta r não é paralela ou coincidente ao eixo coordenado Oy e podemos calcular o coeficiente angular m da reta r, que é dado por

$$m = \frac{-1-1}{5-(-3)} = -\frac{2}{8} = -\frac{1}{4}.$$

Logo,

$$y - 1 = -\frac{1}{4}(x - (-3)) \Rightarrow y = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$$

é equação reduzida de r.

Exercício 1.3 Encontre a equação geral da reta r que passa pelos pontos $P_1(5, 0)$, $P_2(-1, 1)$ no plano cartesiano.

Seção de Exercícios Propostos: *Brevíssima Revisão de Ensino Médio*

Exercício 1.4 Dados os pontos no plano cartesiano:

$A\,(500, 500)$	$D\,(-1002, 1002)$	$G\,(0, -517)$	$J\left(\pi, \pi\sqrt{3}\right)$
$B\,(-600, -600)$	$E\,(0, 0)$	$H\,(-321, 0)$	$K\left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$
$C\,(715, -715)$	$F\,(711, 0)$	$I\,(0, 8198)$	$L\left(\frac{9}{2}, \frac{18}{4}\right)$

Quais são pertencentes:

(a) ao primeiro quadrante;
(b) ao segundo quadrante;
(c) ao terceiro quadrante;
(d) ao quarto quadrante;
(e) ao eixo das abscissas;
(f) ao eixo das ordenadas;
(g) à bissetriz dos quadrantes ímpares;
(h) à bissetriz do quadrantes pares.

Exercício 1.5 Calcule a distância entre os pontos $A\,(1, 3)$ e $B\,(-1, 4)$.

Exercício 1.6 Calcule a distância do ponto $P\,(-6, 8)$ à origem do sistema de coordenadas.

Exercício 1.7 Calcule a distância entre os pontos $A\,(a-3, b+4)$ e $B\,(a+2, b-8)$.

Exercício 1.8 Calcule o perímetro do triângulo ABC, sendo dados $A\,(2, 1)$, $B\,(-1, 3)$ e $C\,(4, -2)$.

Exercício 1.9 Prove que o triângulo de vértices $A\,(2, 2)$, $B\,(-4, -6)$ e $C\,(4, -12)$ é um triângulo retângulo.

Exercício 1.10 Dados $A\,(4, 5)$, $B\,(1, 1)$ e $C\,(x, 4)$, calcule x de modo que ABC seja triângulo retângulo com ângulo reto em B.

Exercício 1.11 Dados $A\,(x, 5)$, $B\,(-2, 3)$ e $C\,(4, 1)$, obtenha x de modo que A seja equidistante de B e C.

Exercício 1.12 Determine o ponto P, pertencente ao eixo das abscissas, que é equidistante dos pontos $A\,(1, 3)$ e $B\,(-3, 5)$.

Exercício 1.13 Determine o ponto P, pertencente à bissetriz dos quadrantes pares, que é equidistante dos pontos $A\,(8, -8)$ e $B\,(12, -2)$.

Exercício 1.14 Calcule os determinantes das seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 9 \\ 6 & 14 & 22 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 7 \\ 25 & 16 & 49 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 1 \\ 11 & 0 & 1 \\ 0 & -6 & 1 \end{bmatrix}$$

Exercício 1.15 Os pontos $A\,(1, 3)$, $B\,(2, 5)$ e $C\,(49, 100)$ são colineares?

Exercício 1.16 Determine y para que os pontos $A\,(3, 5)$, $B\,(-3, 8)$ e $C\,(4, y)$ sejam colineares.

Exercício 1.17 Mostre que $A\,(a, 2a-1)$, $B\,(a+1, 2a+1)$ e $C\,(a+2, 2a+3)$ são colineares para todo valor real do número a.

Exercício 1.18 Se $A\,(0, a)$, $B\,(a, -4)$ e $C\,(1, 2)$, então para quais valores de a existe o triângulo ABC?

Exercício 1.19 Dados os pontos $A\,(1, 1)$ e $B\,(10, -2)$, obtenha o ponto em que a reta AB intersecta o eixo das abscissas.

Exercício 1.20 Dados os pontos $A\,(3, 1)$ e $B\,(5, 5)$, obtenha o ponto em que a reta AB intersecta o eixo das ordenadas.

Exercício 1.21 Dados os pontos $A\,(2, -3)$ e $B\,(8, 1)$, obtenha o ponto em que a reta AB intersecta a bissetriz dos quadrantes ímpares.

Exercício 1.22 Dados os pontos $A\,(7, 4)$ e $B\,(-4, 2)$, obtenha o ponto em que a reta AB intersecta a bissetriz dos quadrantes pares.

Exercício 1.23 Dados $A\,(-3, 4)$, $B\,(2, 9)$, $C\,(2, 7)$ e $D\,(4, 5)$, obtenha o ponto de intersecção das retas AB e CD.

Exercício 1.24 Obtenha equações gerais das três retas que contêm os lados do triângulo de vértices $A\,(0, 0)$, $B\,(1, 3)$ e $C\,(4, 0)$.

Exercício 1.25 A reta determinada por $A(a,0)$ e $B(0,b)$ passa por $C(3,4)$. Qual é a relação entre a e b?

Exercício 1.26 Prove que os pontos $A(a,b+c)$, $B(b,a+c)$ e $C(c,a+b)$ são colineares e determine uma equação da reta que os contém.

Exercício 1.27 Desenhe no plano cartesiano as retas cujas equações são dadas abaixo:
(a) $y = 2x$
(b) $x + y = 5$
(c) $x - y + 5 = 0$
(d) $x + y + 3 = 0$
(e) $2y + x = 0$
(f) $x - y - 4 = 0$

Exercício 1.28 Calcule o coeficiente angular das retas:
(a) $x - 3y + 4 = 0$
(b) $5x + 1 = 3y$
(c) $y = -3x + 4$
(d) $\frac{x}{5} - \frac{y}{2} = 1$
(e) $2y = -3$
(f) $2x + 3y = 0$
(g) $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)x + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)y = 7$
(h) que contém os pontos $A(a,b)$ e $B(b,a)$

Exercício 1.29 Determine a equação reduzida da reta que passa por P e tem inclinação de α radianos em relação ao eixo das abscissas nos seguintes casos:
(a) $P = (-1,-3)$ e $\alpha = \frac{\pi}{4}$ rad
(b) $P = (2,-4)$ e $\alpha = \frac{\pi}{3}$ rad
(c) $P = (-1,-4)$ e $\alpha = \frac{\pi}{2}$ rad
(d) $P = (-1,3)$ e $\alpha = \operatorname{arcsen}\left(\frac{3}{5}\right)$ rad
(e) $P = (7,2)$ e $\alpha = 0$ rad
(f) $P = (-1,5)$ e $\alpha = \operatorname{arctg}(2)$ rad

Exercício 1.30 Determine a equação reduzida da reta que passa por $P(-5,3)$ e é paralela à reta que passa por $A\left(\frac{1}{2},\frac{6}{5}\right)$ e $B\left(\frac{3}{2},-\frac{4}{5}\right)$.

Exercício 1.31 Determine o ponto de intersecção entre as retas de equações reduzidas:
(a) $y = x + 1$ e $y = -x + 2$
(b) $y = 2x + 1$ e $y = 3x - 1$
(c) $y = x + 3$ e $y = -2x + 4$
(d) $y = 2x + 4$ e $y = -2x + 7$

Exercício 1.32 Sejam as retas r de equação $y = 4x - 3$ e s de equação $y = 3x$. Encontre a equação reduzida da reta que passa pelo ponto de intersecção de r e s e tem inclinação de $\frac{\pi}{3}$ rad em relação ao eixo das abscissas.

Exercício 1.33 Considere os segmentos a de extremos $(3,0)$ e $(0,5)$ e b de extremos $(4,0)$ e $(0,2)$. Encontre a equação reduzida da reta que passa pela origem do sistema de coordenadas e pelo ponto de interseção dos segmentos a e b.

Capítulo 2

Vetores e Coordenadas Cartesianas

Neste capítulo começamos o estudo dos vetores, que são ferramentas matemáticas bastante úteis em várias áreas das Ciências Exatas como, por exemplo, na Física e nas Engenharias. Os vetores podem constituir uma alternativa útil e simples na resolução de certos problemas de Geometria Euclidiana Plana, mas é na resolução de problemas envolvendo Geometria Analítica no espaço euclidiano tridimensional que os vetores tornam-se, frequentemente, indispensáveis. Daí a importância de seu estudo pormenorizado.

Ao final deste capítulo há três seções de exercícios. A primeira delas (página 49) é oriunda do chamado "*Projeto Prossiga de Geometria Analítica*" que ocorreu no ano 2016, na Universidade Federal de Uberlândia, e do qual este autor fez parte, juntamente com cerca de uma dezena de outros professores. Nesta primeira seção de exercícios, parte deles estão resolvidos e servem de modelos para as resoluções dos demais. Esta é a seção "principal" de exercícios e é a que o leitor deve estudar, ***pois é parte complementar da teoria***. A segunda seção de exercícios (página 62) é "extra". Trata-se de uma seção com muitos exercícios resolvidos que são clássicos na Geometria Euclidiana. Esta segunda seção de exercícios é destinada, principalmente, para leitores do Curso de Matemática. Por fim, temos uma terceira seção "extra" de exercícios propostos (página 84). São exercícios análogos aos da primeira seção, e ficam como aprofundamento para aqueles que decidirem fazê-los.

Como vamos utilizar muitos conceitos advindos da Geometria Euclidiana Plana e Espacial básica (de Ensino Médio), entendemos que é conveniente fazer uma pequena recordação das notações clássicas mais usuais da Geometria e que são utilizadas neste texto. Elas seguem abaixo:

• **Pontos**: letras latinas maiúsculas $(A, B, C, \ldots)$.

• **Segmento** com extremos A e B: "*segmento* AB" ou, simplesmente, $\overline{AB}$.

• **Comprimento do segmento** AB: denotamos simplesmente por "AB", sem a barra superior. Também utilizamos letras latinas minúsculas para designar comprimentos $(a, b, c, \ldots)$. Alguns textos também trazem a notação $|AB|$.
Observação importante: quando não houver perigo de confusão, denotamos "AB" tanto para o *segmento* AB (que é um conjunto de pontos), quanto para o *comprimento do segmento* AB (que é um número real).

• **Semirreta com origem** A **contendo** B: "*semirreta* AB" ou, simplesmente, $\overrightarrow{AB}$, ou $\overrightarrow{AB}$ (quando não houver perigo de confusão com a notação de vetor que veremos adiante). Alguns textos também utilizam a notação S_{AB}.

• **Retas**: letras latinas minúsculas $(r, s, t, \ldots)$. Também utilizamos a notação $\overleftrightarrow{AB}$ para designar a reta que contém os pontos distintos A e B.

• **Planos**: letras gregas minúsculas $(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)$.

• **Ângulo de vértice** A **e lados contendo os segmentos** AB **e** AC: escrevemos $B\widehat{A}C$ ou $C\widehat{A}B$ ou, simplesmente, $\widehat{A}$ (quando não houver perigo de confusão).

• **Medida de ângulo**: letras gregas minúsculas $(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)$. As vezes, a notação de *ângulo* é, também, utilizada para indicar a *medida do ângulo*.

Antes de começarmos: nosso ambiente de trabalho é, predominantemente, o espaço euclidiano tridimensional. Portanto, neste capítulo, a menos que se diga o contrário, segmentos, retas e demais objetos geométricos, estão sendo considerados neste espaço.

2.1 Vetores: abordagem geométrica

Nas Ciências Exatas, é muito comum trabalharmos com dois tipos bastantes distintos de grandezas:

Grandezas escalares: que são caracterizadas apenas por um único valor numérico como, por exemplo, temperatura, distância, massa, área, volume, etc.
Grandezas vetoriais: que são caracterizadas por um valor numérico, direção e sentido de percurso como, por exemplo, velocidade, aceleração, força, etc.

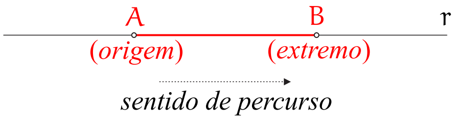
(**1**) Em grandezas vetoriais, a direção é determinada por uma reta no espaço. Retas paralelas determinam a mesma direção;
(**2**) Fixada uma direção, ou seja, fixada uma reta, há dois possíveis sentidos de percurso, ou orientações;
(**3**) Consideremos, em todo o desenvolvimento que faremos nessas notas, que ***uma unidade de medida de comprimento foi fixada***.

Observações:

(**i**) Formalmente, um ***segmento*** AB da reta r é constituído por todos os pontos da reta r que estão entre A e B. Quando $A = B$ dizemos que o segmento de reta é ***degenerado*** ou ***nulo***. O comprimento de um segmento de reta degenerado é, por convenção, zero. No que se segue, a menos que se diga o contrário, *segmento* significa *segmento não degenerado*.

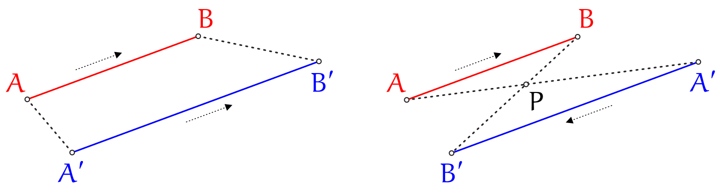
(**ii**) Uma direção também pode ser determinada por um segmento de reta no espaço. Portanto, segmentos paralelos determinam a mesma direção. Além disso, fixado um segmento, há dois possíveis sentidos de percurso ou orientações.

Um segmento de reta AB com sentido de percurso fixado de A para B será chamado de ***segmento orientado***, sendo A a ***origem*** e B o ***extremo***.



Dois segmentos orientados paralelos podem ter o mesmo sentido de percurso ou sentidos de percurso contrários. Vejamos como formalizar esses conceitos:

Sejam AB e $A'B'$ dois segmentos orientados paralelos não colineares, sendo A, A' as origens e B, B' os extremos.
• Quando os segmentos AA' e BB' possuem intersecção vazia, dizemos que os segmentos orientados AB e $A'B'$ possuem o ***mesmo sentido de percurso***.
• Quando os segmentos AA' e BB' possuem um ponto P como interseção, dizemos que os segmentos orientados AB e $A'B'$ possuem o ***sentidos de percurso contrários***.



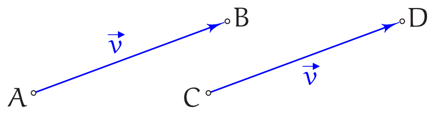
Sejam AB e $A'B'$ segmentos orientados colineares, ambos sobre uma reta r.
• Quando AB e $A'B'$ induzem o mesmo sentido de percurso sobre a reta r, dizemos que os segmentos orientados AB e $A'B'$ possuem o ***mesmo sentido de percurso***.
• Quando AB e $A'B'$ induzem sentidos de percurso contrários sobre a reta r, dizemos que os segmentos orientados AB e $A'B'$ possuem ***sentidos de percurso contrários***.

Consideremos um segmento orientado AB com origem em A e extremo em B. Um segmento orientado CD com origem em C e extremo em D paralelo a AB, com o mesmo comprimento de AB e com mesmo sentido de percurso de AB é chamado de segmento orientado ***equipolente*** a AB. Neste caso, dizemos ainda que os segmentos orientados AB e CD são *equipolentes*. Também consideramos que um segmento orientado é equipolente a ele próprio. Além disso, todos os segmentos degenerados são considerados equipolentes.

*Ao conjunto de todos os segmentos orientados equipolentes ao segmento orientado AB chamamos de **vetor** com **origem** em A e **extremo** em B e indicamos por $\overrightarrow{AB}$. Ao conjunto dos segmentos degenerados chamamos de **vetor nulo**.*

Dizemos que o segmento orientado AB é um ***representante*** do vetor $\overrightarrow{AB}$, ou que o vetor $\overrightarrow{AB}$ está *representado* pelo segmento orientado AB. Qualquer segmento orientado CD equipolente a AB pode ser representante do vetor $\overrightarrow{AB}$, ou seja, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Representamos graficamente um vetor $\overrightarrow{AB}$ por uma *seta* (ou *flecha*) com origem em A e extremo em B.



Notemos que, pela forma como foi definido, um vetor não depende de sua *posição* no espaço, ou seja, um determinado vetor pode ter um representante com origem em qualquer ponto do espaço. Desta forma, é natural representarmos vetores por uma única letra (geralmente com uma seta em cima), sem especificar os pontos de origem e extremo de um representante. Na figura acima temos $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

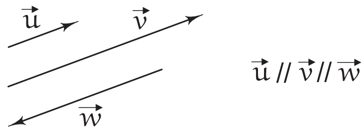
Observação: Nunca devemos falar "vetores equipolentes". Conforme definimos acima, a relação de equipolência é uma relação binária envolvendo segmentos orientados([1]). Se o segmento orientado AB é equipolente ao segmento orientado CD, então os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ são iguais, ou seja, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Definições Complementares

• **(1)** O chamado ***vetor nulo***, definido acima, pode ser representado com origem e extremo coincidentes, ou seja, $\vec{v} = \overrightarrow{AA}$, por exemplo. Simplificadamente podemos escrever $\vec{v} = \vec{0}$. É claro que, neste caso, o vetor nulo não determina direção e, portanto, também não determina sentido.

• **(2)** O ***comprimento*** de um vetor $\vec{v}$ é o comprimento de qualquer segmento orientado que o represente. Indicamos o comprimento de $\vec{v}$ por $\|\vec{v}\|$ ou $|\vec{v}|$. As vezes o comprimento de um vetor também é chamado de ***módulo*** ou ***norma***. O vetor nulo possui comprimento também nulo, ou seja $\|\vec{0}\| = 0$.

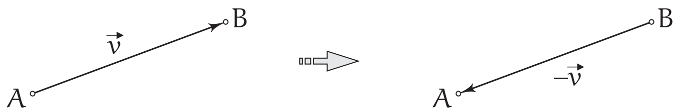
• **(3)** Os vetores não nulos $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são ***vetores paralelos***, ou possuem mesma direção, quando segmentos orientados que os representem são paralelos ou colineares, conforme exemplos na figura abaixo. Indicamos por $\vec{u} /\!/ \vec{v}$. Convencionamos que o vetor nulo é paralelo a qualquer outro vetor.



• **(4)** Dois vetores não nulos $\vec{u}$ e $\vec{v}$ paralelos possuem ***mesmo sentido*** quando possuem segmentos orientados que os representem com mesmo sentido de percurso, caso contrário, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ possuem ***sentidos opostos***.

• **(5)** Dizemos que dois vetores não nulos $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são ***vetores iguais***, ou possuem mesmo comprimento, direção e sentido, quando segmentos orientados que os representem possuem mesmo comprimento, direção e sentido. Neste caso, escrevemos $\vec{u} = \vec{v}$.

• **(6)** O ***vetor oposto*** de um vetor não nulo $\vec{v}$ é o vetor paralelo e de mesmo comprimento de $\vec{v}$ mas que possui sentido oposto ao sentido de $\vec{v}$. Indicamos o vetor oposto de $\vec{v}$ por $-\vec{v}$ (figura abaixo). Desta forma, temos que se $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, então $-\vec{v} = -\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$. Além disso, $-\vec{v} /\!/ \vec{v}$ e $\|-\vec{v}\| = \|\vec{v}\|$.

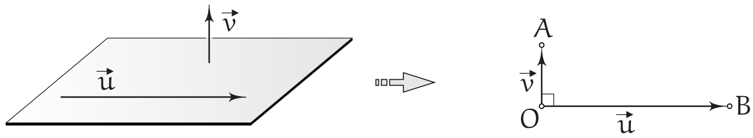


• **(7)** Um vetor $\vec{v}$ é dito ***vetor unitário*** quando $\|\vec{v}\| = 1$.

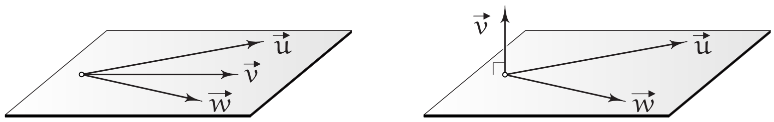
• **(8)** O ***versor*** de um vetor não nulo $\vec{v}$ é o vetor unitário que possui a mesma direção e sentido de $\vec{v}$ (adiante veremos como calcular o versor de um vetor não nulo).

• **(9)** Dois vetores não nulos $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são ***vetores ortogonais*** quando possuem segmentos orientados que os representem que sejam perpendiculares. Indicamos por $\vec{u} \perp \vec{v}$ (figura abaixo). Convencionamos que o vetor nulo é ortogonal a qualquer vetor.

[1] Em Matemática, o conjunto de todos os segmentos orientados equipolentes ao segmento orientado AB é chamado de *classe de equipolência* do segmento orientado AB. Isto significa que um vetor é uma classe de equipolência de segmentos orientados. A relação de equipolência entre segmentos orientados do espaço é um caso particular daquilo que chamamos em Matemática de *relação de equivalência*. Formalmente, uma relação de equivalência em um conjunto não vazio C é uma relação binária entre elementos desse conjunto, que indicamos por $\sim$, cumprindo três propriedades:
(i) $a \sim a$ para qualquer $a \in C$ (reflexividade).
(ii) $a \sim b \Rightarrow b \sim a$ para quaisquer $a, b \in C$ (simetria).
(iii) $a \sim b$ e $b \sim c \Rightarrow a \sim c$ para quaisquer $a, b, c \in C$ (transitividade).
A relação de equipolência no conjunto dos segmentos orientados do espaço, incluindo os segmentos degenerados, cumpre as três condições acima.

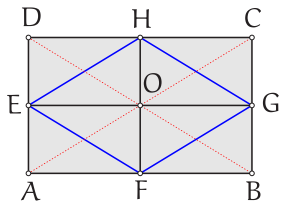


• **(10)** Três ou mais vetores não nulos são ***vetores coplanares*** quando possuem segmentos orientados que os representem que sejam coplanares, conforme exemplo na figura abaixo. Notemos que dois vetores não nulos são sempre coplanares. O vetor nulo é coplanar a qualquer conjunto de vetores coplanares.



coplanares *não coplanares*

Exemplo 2.1 Consideremos a figura abaixo:



Nesta figura temos o losango EFGH inscrito no retângulo ABCD (não quadrado), sendo O o ponto de intersecção das diagonais do losango. Os pontos E, F, G e H são pontos médios dos lados DA, AB, BC e CD, respectivamente.

A seguir, temos diversas afirmações envolvendo vetores. Vamos decidir quais são verdadeiras e quais são falsas baseados nas diversas definições dadas acima.

(a) $\overrightarrow{EO} = \overrightarrow{OG}$	**(b)** $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{CH}$	**(c)** $\overrightarrow{DO} = \overrightarrow{HG}$	**(d)** $\|\overrightarrow{OC}\| = \|\overrightarrow{BO}\|$
(e) $\|\overrightarrow{OH}\| = \|\overrightarrow{DH}\|$	**(f)** $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{CO}$	**(g)** $\|\overrightarrow{AC}\| = \|\overrightarrow{BD}\|$	**(h)** $\|\overrightarrow{OA}\| = \|\overrightarrow{DB}\|/2$
(i) $\overrightarrow{AF} /\!/ \overrightarrow{CD}$	**(j)** $\overrightarrow{GF} /\!/ \overrightarrow{HG}$	**(k)** $\overrightarrow{AO} /\!/ \overrightarrow{OC}$	**(l)** $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{OH}$
(m) $\overrightarrow{EO} \perp \overrightarrow{CB}$	**(n)** $\overrightarrow{AO} \perp \overrightarrow{HF}$	**(o)** $\overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{FE}$	**(p)** $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AD}$ são coplanares

Temos:

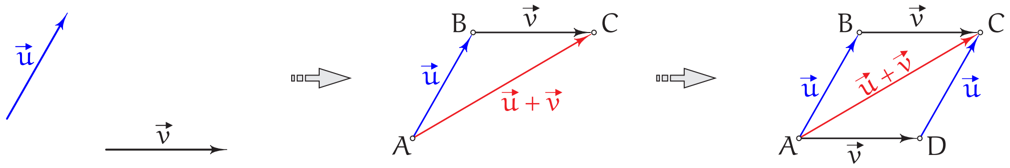
(a) *Verdade.* Os vetores $\overrightarrow{EO}$ e $\overrightarrow{OG}$ possuem mesmo comprimento, direção e sentido. Logo, são iguais.
(b) *Falso.* Embora $\overrightarrow{AF}$ e $\overrightarrow{CH}$ possuam mesmo comprimento e direção, são vetores com sentidos opostos.
(c) *Verdade.* Os vetores $\overrightarrow{DO}$ e $\overrightarrow{HG}$ possuem mesmo comprimento, direção e sentido. Logo, são iguais.
(d) *Verdade.* Embora $\overrightarrow{OC}$ e $\overrightarrow{BO}$ possuam direções diferentes, são vetores com o mesmo comprimento.
(e) *Falso.* O retângulo não é quadrado. Logo, os comprimentos de $\overrightarrow{OH}$ e $\overrightarrow{DH}$ são diferentes.
(f) *Falso.* Embora $\overrightarrow{EH}$ e $\overrightarrow{CO}$ possuam mesmo comprimento e direção, são vetores com sentidos opostos.
(g) *Verdade.* Embora $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{BD}$ possuam direções diferentes, são vetores com o mesmo comprimento.
(h) *Verdade.* Embora $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{DB}$ possuam direções diferentes, o comprimento de $\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}$ é igual ao comprimento de $\overrightarrow{OA}$.
(i) *Verdade.* Os vetores $\overrightarrow{AF}$ e $\overrightarrow{CD}$ possuem a mesma direção (sentidos e comprimentos diferentes). Logo, são paralelos.
(j) *Falso.* Os vetores $\overrightarrow{GF}$ e $\overrightarrow{HG}$ possuem direções diferentes. Logo, não são paralelos.
(k) *Verdade.* Os vetores $\overrightarrow{AO}$ e $\overrightarrow{OC}$ possuem mesmo comprimento, direção e sentido. Logo, são paralelos.
(l) *Verdade.* Os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{OH}$ definem retas perpendiculares (no ponto F). Logo, são vetores ortogonais.
(m) *Verdade.* Os vetores $\overrightarrow{EO}$ e $\overrightarrow{CB}$ definem retas perpendiculares (no ponto G). Logo, são vetores ortogonais.
(n) *Falso.* Os vetores $\overrightarrow{AO}$ e $\overrightarrow{HF}$ definem retas não perpendiculares. Logo, não são vetores ortogonais.
(o) *Verdade.* Os vetores $\overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{EF} = -\overrightarrow{FE}$ possuem mesmo comprimento, direção e sentido. Logo, são iguais.
(p) *Verdade.* Os vetores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AD}$ estão representados sobre um retângulo, que é uma figura plana. Logo, são coplanares.

Operações com Vetores

Adição: *sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores no espaço. Tomemos representantes de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ de tal modo que o extremo de $\vec{u}$ coincida com a origem de $\vec{v}$, ou seja, $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$. Definimos o vetor soma $\vec{u} + \vec{v}$ com sendo*

$$\boxed{\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}}.$$

A figura abaixo ilustra geometricamente a operação de adição de vetores.



Observações:

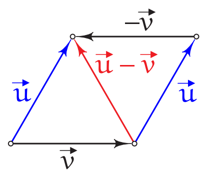
(**1**) Poderíamos tomar $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$. Logo, $\vec{u}+\vec{v}$ poderia ser representado pela diagonal AC do paralelogramo baseado em AB e AD, conforme a figura acima à direita. Por esse motivo, às vezes, a adição é chamada de "*Regra do paralelogramo*".

(**2**) A soma de três ou mais vetores processa-se de modo análogo, por exemplo, se $\vec{u} = \overrightarrow{PQ}$, $\vec{v} = \overrightarrow{QR}$ e $\vec{w} = \overrightarrow{RS}$, então $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w} = \overrightarrow{PS}$.

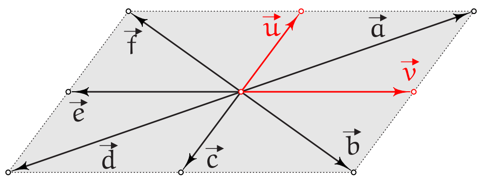
Proposição 2.1 (**Propriedades da adição de vetores**) Sejam $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ vetores no espaço. Então, valem as seguintes propriedades:
(**i**) Comutativa: $\vec{u}+\vec{v} = \vec{v}+\vec{u}$;
(**ii**) Associativa: $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w} = \vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$;
(**iii**) O vetor nulo é elemento neutro aditivo: $\vec{u}+\vec{0} = \vec{u}$;
(**iv**) Todo vetor não nulo $\vec{u}$ possui um elemento oposto, indicado por $-\vec{u}$, tal que: $\vec{u}+(-\vec{u}) = \vec{0}$.

O vetor $\vec{u}+(-\vec{v})$ se escreve $\vec{u}-\vec{v}$ e é chamado de ***diferença*** entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Observemos que o vetor $\vec{u}-\vec{v}$ possui representante que forma uma das diagonais de um paralelogramo baseado em representantes de $\vec{u}$ e $\vec{v}$, conforme exemplo na figura abaixo (a outra diagonal é a do representante da soma).



Exemplo 2.2 Escrevamos os vetores $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \vec{e}$ e $\vec{f}$ em função de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ na figura abaixo.



Temos:
$\vec{a} = \vec{u}+\vec{v}$ $\quad \vec{b} = -\vec{u}+\vec{v}$ $\quad \vec{c} = -\vec{u}$ $\quad \vec{d} = -\vec{u}-\vec{v}$ $\quad \vec{e} = -\vec{v}$ $\quad \vec{f} = \vec{u}-\vec{v}$

Exemplo 2.3 Mostremos que $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$.

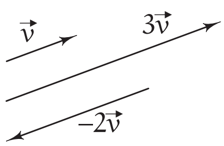
Basta lembrar que $-\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CA}$ e a propriedade comutativa da adição de vetores:

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}.$$

***Multiplicação de número real por vetor**: sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\vec{v}$ vetor no espaço. Definimos o vetor $\alpha\vec{v}$ de tal modo que:*

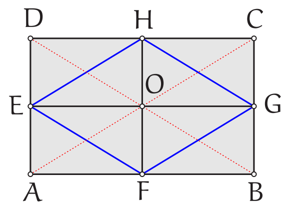
- *comprimento: o comprimento de $\alpha\vec{v}$ é $||\alpha\vec{v}|| = |\alpha|.||\vec{v}||$.*
- *direção: quando $\alpha \neq 0$ e $\vec{v} \neq \vec{0}$, a direção de $\alpha\vec{v}$ é a direção de $\vec{v}$. Quando $\alpha = 0$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, $\alpha\vec{v}$ é o vetor nulo.*
- *sentido: quando $\alpha > 0$ o sentido de $\alpha\vec{v}$ é o mesmo de $\vec{v}$. Quando $\alpha < 0$ o sentido de $\alpha\vec{v}$ é o oposto ao de $\vec{v}$.*

A figura abaixo ilustra alguns exemplos geométricos da operação de multiplicação de vetor por escalar.



Proposição 2.2 (**Propriedades da multiplicação de número real por vetor**) Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\vec{u}, \vec{v}$ vetores no espaço. Então, valem as seguintes propriedades:
(**i**) Associativa: $\alpha(\beta\vec{v}) = (\alpha\beta)\vec{v}$;
(**ii**) Distributiva em relação à soma de vetores: $\alpha(\vec{u}+\vec{v}) = \alpha\vec{u}+\alpha\vec{v}$;
(**iii**) Distributiva em relação à soma de números reais: $(\alpha+\beta)\vec{v} = \alpha\vec{v}+\beta\vec{v}$;
(**iv**) O número real 1 é elemento neutro multiplicativo: $1\vec{v} = \vec{v}$.

Exemplo 2.4 Consideremos a figura abaixo:



Nesta figura temos o losango EFGH inscrito no retângulo ABCD (não quadrado), sendo O o ponto de intersecção das diagonais do losango. Os pontos E, F, G e H são pontos médios dos lados DA, AB, BC e CD, respectivamente.

Determinemos representantes para os vetores abaixo expressando-os com origem no ponto A.

(**a**) $\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CH}$ (**b**) $\overrightarrow{EH}+\overrightarrow{FG}$ (**c**) $2\overrightarrow{AE}+2\overrightarrow{AF}$ (**d**) $\overrightarrow{EH}+\overrightarrow{EF}$ (**e**) $\overrightarrow{EO}+\overrightarrow{BG}$
(**f**) $2\overrightarrow{OE}+2\overrightarrow{OC}$ (**g**) $\overrightarrow{BC}/2+\overrightarrow{EH}$ (**h**) $\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{FG}$ (**i**) $\overrightarrow{OG}-\overrightarrow{HO}$ (**j**) $\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FO}+\overrightarrow{AO}$

Temos:

(**a**) $\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CH}=\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{AE}$;
(**b**) $\overrightarrow{EH}+\overrightarrow{FG}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AC}$;
(**c**) $2\overrightarrow{AE}+2\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}$;
(**d**) $\overrightarrow{EH}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AB}$;
(**e**) $\overrightarrow{EO}+\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FO}=\overrightarrow{AO}$;
(**f**) $2\overrightarrow{OE}+2\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{GE}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$;
(**g**) $\overrightarrow{BC}/2+\overrightarrow{EH}=\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{EH}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EH}=\overrightarrow{AH}$;
(**h**) $\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{FG}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{AD}$;
(**i**) $\overrightarrow{OG}-\overrightarrow{HO}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FO}=\overrightarrow{AO}$;
(**j**) $\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FO}+\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AC}$.

Observações:

(**1**) Chamemos o conjunto de todos os vetores no espaço euclidiano tridimensional de $\mathbb{V}^3$. A operação de adição é "*interna*" a $\mathbb{V}^3$, isto é, somam-se dois elementos de $\mathbb{V}^3$ e o resultado é um novo elemento de $\mathbb{V}^3$. Já a multiplicação de vetor por escalar é uma operação "*externa*" a $\mathbb{V}^3$, uma vez que envolve elementos (os escalares) que não estão em $\mathbb{V}^3$. Simbolicamente:

$$\boxed{\begin{array}{rccc} +: & \mathbb{V}^3\times\mathbb{V}^3 & \longrightarrow & \mathbb{V}^3 \\ & (\vec{u},\vec{v}) & \longmapsto & \vec{u}+\vec{v} \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rccc} \cdot: & \mathbb{R}\times\mathbb{V}^3 & \longrightarrow & \mathbb{V}^3 \\ & (\alpha,\vec{u}) & \longmapsto & \alpha\vec{u} \end{array}}.$$

(**2**) As 4 propriedades de adição de vetores, juntamente com as 4 propriedades de multiplicação de vetor por escalar, conferem a $\mathbb{V}^3$ uma estrutura algébrica chamada de *espaço vetorial.* Esta estrutura pode ser generalizada para conjuntos diferentes do conjunto dos vetores, e é objeto de estudos em uma área da Matemática chamada *Álgebra Linear*.

(**3**) A regra "*em uma equação vetorial podemos trocar vetores de membro invertendo o sinal*" é válida, ou seja: $\vec{u}+\vec{v}=\vec{w} \Rightarrow \vec{u}=\vec{w}-\vec{v}$ e decorre naturalmente das propriedades da adição de vetores.

(**4**) Quando $\alpha = \frac{1}{\beta} \in \mathbb{R}^*$ e $\vec{u}$ é vetor no espaço, às vezes, denotamos $\alpha\vec{u}$ por $\frac{\vec{u}}{\beta}$, ou seja, $\alpha\vec{u} = \frac{1}{\beta}\vec{u} = \frac{\vec{u}}{\beta}$.

A proposição abaixo é extremamente importante. Ela relaciona o conceito de paralelismo entre vetores a uma equação vetorial de proporcionalidade.

Proposição 2.3 (**Condição de paralelismo entre vetores**) Os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, $\vec{v} \neq \vec{0}$, são paralelos se, e somente se, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{u} = \alpha\vec{v}$, ou seja,

$$\boxed{\vec{u}//\vec{v} \Longleftrightarrow \exists\alpha \in \mathbb{R} \text{ tal que } \vec{u} = \alpha\vec{v}}.$$

Observação: $\vec{u} = \alpha\vec{v}$ exprime algebricamente a noção geométrica de paralelismo entre vetores. É costume dizer que se dois vetores são *paralelos*, então eles são *proporcionais*.

Demonstração da Proposição 2.3.

Devemos mostrar dois resultados:
(**a**) Se $\vec{u}/\!/\vec{v}$, então $\exists\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{u} = \alpha\vec{v}$.
(**b**) Se $\exists\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{u} = \alpha\vec{v}$, então $\vec{u}/\!/\vec{v}$.

Para mostrar o item (**a**), devemos exibir uma expressão para α.
(**a − i**) Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ possuirem o mesmo sentido, façamos

$$\boxed{\alpha = \frac{||\vec{u}||}{||\vec{v}||}}.$$

Daí, $\alpha\vec{v} = \frac{||\vec{u}||}{||\vec{v}||}\vec{v}$ será um vetor de norma $||\vec{u}||$ (pois $\left\|\frac{||\vec{u}||}{||\vec{v}||}\vec{v}\right\| = \frac{||\vec{u}||}{||\vec{v}||}||\vec{v}|| = ||\vec{u}||$), com mesma direção e sentido de $\vec{u}$, ou seja, $\frac{||\vec{u}||}{||\vec{v}||}\vec{v}$ é o próprio $\vec{u}$:

$$\boxed{\vec{u} = \frac{||\vec{u}||}{||\vec{v}||}\vec{v} = \alpha\vec{v}}.$$

(**a − ii**) Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ possuirem sentidos opostos, façamos

$$\boxed{\alpha = -\frac{||\vec{u}||}{||\vec{v}||}}.$$

Daí, $\alpha\vec{v} = -\frac{||\vec{u}||}{||\vec{v}||}\vec{v}$ será um vetor de norma $||\vec{u}||$ (pois $\left\|-\frac{||\vec{u}||}{||\vec{v}||}\vec{v}\right\| = \left|-\frac{||\vec{u}||}{||\vec{v}||}\right|||\vec{v}|| = \frac{||\vec{u}||}{||\vec{v}||}||\vec{v}|| = ||\vec{u}||$), com mesma direção e sentido de $\vec{u}$, ou seja, $-\frac{||\vec{u}||}{||\vec{v}||}\vec{v}$ é o próprio $\vec{u}$:

$$\boxed{\vec{u} = -\frac{||\vec{u}||}{||\vec{v}||}\vec{v} = \alpha\vec{v}}.$$

Quanto ao item (**b**):
Se $\exists\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{u} = \alpha\vec{v}$, então $\vec{u}/\!/\alpha\vec{v}$ (vetores iguais são paralelos).
Mas, por definição, $\alpha\vec{v}/\!/\vec{v}$.
Logo, pela transitividade do paralelismo, $\vec{u}/\!/\vec{v}$, como queríamos. □

Exemplo 2.5 (**Versor**) Calculemos o versor de um vetor $\vec{v} \neq \vec{0}$.

Como $\vec{v} \neq \vec{0}$, então $||\vec{v}|| \neq 0$ e podemos considerar no número real positivo $\alpha = \frac{1}{||\vec{v}||}$.

Consideremos o vetor $\vec{u} = \alpha\vec{v} = \frac{1}{||\vec{v}||}\vec{v}$.

Pela Proposição 2.3 temos $\vec{u}/\!/\vec{v}$.

De $\alpha = \frac{1}{||\vec{v}||} > 0$ temos $\vec{u}$ e $\vec{v}$ com o mesmo sentido.

Por fim, $||\vec{u}|| = ||\alpha\vec{v}|| = \left\|\frac{1}{||\vec{v}||}\vec{v}\right\| = \left|\frac{1}{||\vec{v}||}\right|.||\vec{v}|| = \frac{1}{||\vec{v}||}.||\vec{v}|| = 1$, ou seja, $\vec{u}$ é vetor unitário com a mesma direção e sentido de $\vec{v}$. Logo,

$$\boxed{\vec{u} = \frac{\vec{v}}{||\vec{v}||}}$$

é o versor de $\vec{v} \neq \vec{0}$.

Exemplo 2.6 Se $||\vec{u}|| = 5$, calculemos os versores de $\vec{u}$ e de $-10\vec{u}$.

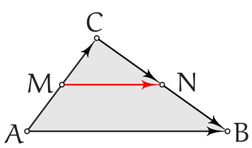
O versor de $\vec{u}$ é $\frac{\vec{u}}{||\vec{u}||} = \frac{1}{5}\vec{u}$. (pois $||\vec{u}|| = 5$).

O versor de $-10\vec{u}$ é $\frac{-10\vec{u}}{||-10\vec{u}||}$, ou seja, $-\frac{1}{5}\vec{u}$ pois:

$$\frac{-10\vec{u}}{||-10\vec{u}||} = \frac{-10\vec{u}}{|-10|.||\vec{u}||} = \frac{-10\vec{u}}{10.5} \text{ (pois } ||\vec{u}|| = 5) = \frac{-\vec{u}}{5} = -\frac{1}{5}\vec{u}.$$

Exemplo 2.7 Mostremos que o segmento que une os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado, e possui comprimento igual à metade do comprimento deste lado.

Considere o triângulo ABC com M e N pontos médios dos lados AC e BC, respectivamente:



Se provarmos que $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, então o segmento MN será paralelo ao lado AB (Proposição 2.3) e, $\|\overrightarrow{MN}\| = \left\|\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right\| = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\|$, ou seja, $MN = \frac{AB}{2}$, provando o que queremos.

Assim:

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CN} = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{CB} \text{ (pois } \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MC} \text{ e } \overrightarrow{CN} = \overrightarrow{NB}) \Rightarrow$$
$$\overrightarrow{MN} = \tfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}\right) \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{MN} = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}}$$

Nota Complementar.

É possível definir uma operação de adição entre ponto e vetor no espaço euclidiano tridimensional. Esta operação é, na verdade, uma consequência da adição de vetores, muito embora possa parecer um pouco estranha à primeira vista.

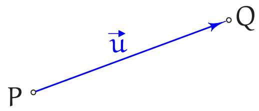
A operação de adição entre ponto e vetor torna-se bastante natural quando trabalhamos com coordenadas, conforme veremos nas Seção 2.2 adiante.

Vamos à definição:

Soma de ponto com vetor: *Sejam P e $\vec{u}$ ponto e vetor no espaço euclidiano. Definimos a soma do ponto P com o vetor $\vec{u}$ como sendo o ponto Q tal que o segmento orientado PQ, com origem em P e extremo em Q seja um representante de $\vec{u}$, ou seja, $\overrightarrow{PQ} = \vec{u}$.*

Note que, uma vez fixada a origem P, o ponto Q é único, pois o comprimento, a direção e o sentido de $\overrightarrow{PQ}$ estão univocamente determinados por $\vec{u}$. Costumamos escrever $P + \vec{u} = Q$. Assim:

$$\boxed{P + \vec{u} = Q \iff \vec{u} = \overrightarrow{PQ} \iff \vec{u} = Q - P}.$$



Propriedades da operação de adição entre ponto e vetor.

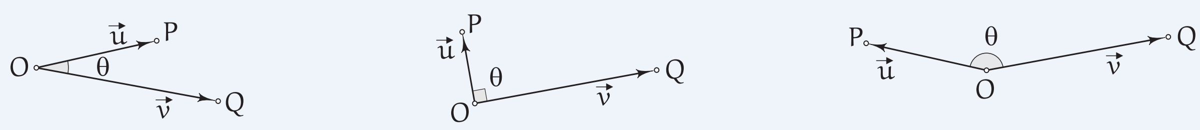
Para quaisquer P e Q pontos e $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores do espaço temos:

(**i**) $P + \vec{0} = P$ (elemento neutro);
(**ii**) $P + \vec{u} = P + \vec{v} \Rightarrow \vec{u} = \vec{v}$ (Lei do cancelamento de pontos);
(**iii**) $(P + \vec{u}) + \vec{v} = P + (\vec{u} + \vec{v})$ (associativa);
(**iv**) $P + \vec{u} = Q + \vec{u} \Rightarrow P = Q$ (Lei do cancelamento de vetores);
(**v**) $(P - \vec{u}) + \vec{u} = P$ (elemento oposto).

Ângulo Formado por Vetores

Embora vetores não dependam previamente de pontos de origem fixados no espaço, podemos definir ângulo entre dois vetores do seguinte modo:

Consideremos vetores não nulos $\vec{u}$ e $\vec{v}$ no espaço. Definimos o ***ângulo*** *formado pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ como sendo o ângulo formado por dois segmentos orientados representantes de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ tomados com a mesma origem.*



Em particular, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são ditos ***ortogonais*** *quando o ângulo por eles formado for um ângulo reto. A notação utilizada, neste caso, é $\vec{u} \perp \vec{v}$.*

Convencionamos que o ***vetor nulo*** *é* ***ortogonal*** *a qualquer outro vetor.*

Da Geometria Euclidiana sabemos que a "abertura" de um ângulo pode variar desde um ângulo nulo até um ângulo raso e, portanto, o mesmo ocorre com os vetores. Em termos de medidas, dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não nulos podem formar um ângulo de medida θ tal que $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$ (radianos) ou $0° \leqslant \theta \leqslant 180°$.

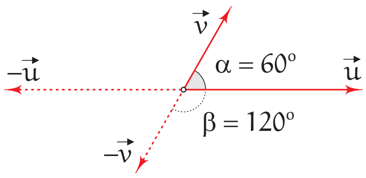
No caso do vetor nulo, como foi convencionado que ele é ortogonal a qualquer outro vetor, também convencionamos que a medida θ de um ângulo envolvendo o vetor nulo é $\theta = \frac{\pi}{2}$ rad ou $\theta = 90°$.

A noção de ângulo entre vetores será muito útil quando trabalharmos com os produtos envolvendo vetores, conforme veremos adiante.

Exemplo 2.8 Sabendo-se que o ângulo formado pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ mede $60°$, determinemos a medida do ângulo formado pelos vetores:
(**a**) $\vec{u}$ e $-\vec{v}$ (**b**) $-\vec{u}$ e $2\vec{v}$ (**c**) $-\vec{u}$ e $-\vec{v}$ (**d**) $3\vec{u}$ e $5\vec{v}$

Temos:
(**a**) O ângulo entre $\vec{v}$ e $-\vec{v}$ mede $180°$, pois esses vetores possuem mesma direção porém sentidos opostos. Logo, o ângulo entre $\vec{u}$ e $-\vec{v}$ é suplementar do ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Sabemos que o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ mede $60°$, então o ângulo entre $\vec{u}$ e $-\vec{v}$ mede $180° - 60° = 120°$.



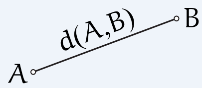
(**b**) O ângulo entre $-\vec{u}$ e $2\vec{v}$ é o mesmo de $-\vec{u}$ e $\vec{v}$, que é suplementar do ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Portanto, o ângulo entre $-\vec{u}$ e $2\vec{v}$ mede $120°$.
(**c**) O ângulo entre $-\vec{u}$ e $-\vec{v}$ é o mesmo de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ (opostos pelo vértice). Portanto, o ângulo entre $-\vec{u}$ e $-\vec{v}$ mede $60°$.
(**d**) O ângulo entre $3\vec{u}$ e $5\vec{v}$ é o mesmo de $\vec{u}$ e $\vec{v}$,(opostos pelo vértice). Portanto, o ângulo entre $3\vec{u}$ e $5\vec{v}$ mede $60°$.

2.2 Vetores: abordagem algébrica

2.2.1 Coordenadas na Reta

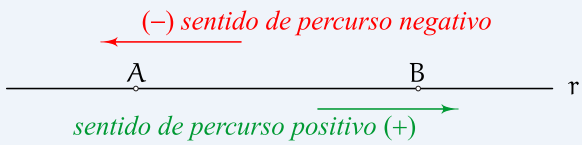
No início deste capítulo fixamos uma unidade de comprimento para que pudéssemos falar de comprimento de segmentos e, portanto, de comprimento de vetores. Fixar ou definir uma unidade de comprimento equivale a admitir a *existência* de uma noção de distância([2]) entre dois pontos de uma reta. É precisamente a noção de distância que permite a introdução de coordenadas na reta, ou seja, a distância permite associar pontos da reta a números (e vice-versa). Já falamos sobre isso de maneira simplificada na Seção 1.1 do Capítulo 1, quando introduzimos o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais. Agora, vejamos como introduzir coordenadas na reta de um modo um pouco mais rigoroso, por meio das definições abaixo.

Assumamos uma unidade de comprimento fixada. Dados dois pontos A e B sobre uma reta r, definimos a ***distância*** *entre A e B como sendo o comprimento do segmento de reta AB, e indicamos por $d(A, B)$.*

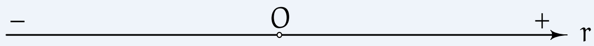


Uma reta r se diz ***orientada*** *quando sobre ela se estabelece um sentido de percurso, dito* ***positivo****. O sentido de percurso contrário é dito* ***negativo****.*

Dada uma reta r orientada e dois pontos $A, B \in r$ dizemos que A está à ***esquerda*** *de B (ou que B está à* ***direita*** *de A) quando o sentido de percurso de A para B é positivo.*([3])



Uma reta orientada na qual se fixou um ponto O, dito ***origem****, é chamada de* ***eixo****.*



Vamos estabelecer uma bijeção([4]) entre o conjunto dos números reais e um eixo do seguinte modo:

[2]Em Matemática, *distância* ou *métrica* em um conjunto $\mathbf{S}$ é uma função $d : \mathbf{S} \times \mathbf{S} \to \mathbb{R}$, indicada por $d(X, Y)$, que associa dois elementos X e Y de $\mathbf{S}$ a um número real $d = d(X, Y)$, cumprindo as seguintes condições:
(**i**) $d(X, Y) \geqslant 0$ e $d(X, Y) = 0 \iff X = Y$;
(**ii**) $d(X, Y) = d(Y, X)$ (simetria);
(**iii**) $d(X, Y) \geqslant d(X, Z) + d(Z, Y)$, $\forall Z \in \mathbf{S}$ (desigualdade triangular).
[3]Nesta definição é conveniente pensar na reta r na posição horizontal com o sentido positivo para o lado direito.
[4]Uma bijeção $\varphi : \mathbb{R} \to r$ é uma regra que associa (ou faz corresponder) cada número real do conjunto $\mathbb{R}$ a um único ponto da reta r, satisfazendo dois quesitos:
(**i**) números reais distintos do conjunto $\mathbb{R}$ estão associados a pontos distintos da reta r (injetividade).

Sejam r um eixo, com origem O, e $\mathbb{R}$ conjunto dos números reais.

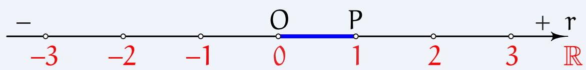
À origem $X = O$ fazemos corresponder o número $x = 0$;
A um ponto $X \in r$ à direita de O fazemos corresponder o número $x = d(O, X)$;
A um ponto $X \in r$ à esquerda de O fazemos corresponder o número $x = -d(X, O)$.

Reciprocamente:

Ao número $x = 0$ fazemos corresponder a origem $X = O$;
A um número real $x \in \mathbb{R}_+$ fazemos corresponder o ponto $X \in r$ à direita de O tal que $d(O, X) = x$;
A um número real $x \in \mathbb{R}_-$ fazemos corresponder o ponto $X \in r$ à esquerda de O tal que $-d(X, O) = x$;

*O número $x \in \mathbb{R}$ associado ao ponto $X \in r$, conforme descrito acima, é chamado de **coordenada** do ponto X no eixo r.*

*O eixo r associado ao conjunto $\mathbb{R}$, conforme descrito acima, é chamado de **eixo coordenado**, ou **eixo real**, ou **reta real**.*



É comum representar um eixo coordenado na posição horizontal com sentido de percurso positivo da esquerda para a direita.

Embora seja muito intuitiva, a definição de eixo coordenado dada acima é um tanto longa (às vezes, em matemática, as coisas mais simples e intuitivas são difíceis de serem justificadas). Por isso, é comum sacrificar um pouco o rigor da linguagem matemática e dizer que um eixo coordenado é, simplesmente, *uma reta associada ao conjunto dos números reais na qual foi fixada a unidade de medida*.

Por fim, a proposição abaixo fornece a distância entre dois pontos sobre um eixo coordenado utilizando suas coordenadas. Sua demonstração pode ser encontrada na referência [4].

Proposição 2.4 Se X e Y são pontos de um eixo coordenado, então

$$\boxed{d(X, Y) = |x - y|},$$

sendo x a coordenada de X e y a coordenada de Y.

2.2.2 Coordenadas no Plano

A definição de eixo coordenado dada acima é útil para definirmos um *sistema de coordenadas cartesianas ortogonais* no plano. Já apresentamos essa definição na Seção 1.2 do Capítulo 1, mas vamos repetí-la abaixo:

Consideremos dois eixos coordenados congruentes (isto é, segmentos unitários são congruentes em cada um dos eixos) perpendiculares e com origens coincidentes no ponto O.

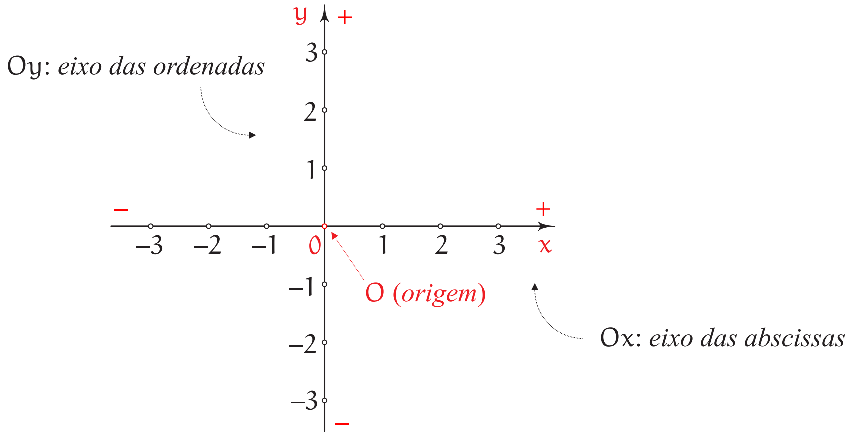
*Um dos eixos coordenados será chamado de **eixo das abscissas**, indicado por Ox, enquanto que o outro será chamado de **eixo das ordenadas**, indicado por Oy.*

*Um plano determinado por dois eixos coordenados, conforme descrito acima, será dito um plano munido de um **sistema de coordenadas cartesianas ortogonais** ou, simplificadamente, **plano cartesiano**, indicado por Oxy.*

*O ponto O é chamado de **origem** do sistema de coordenadas cartesianas ortogonais.*

É comum representar o plano cartesiano com o eixo Ox na horizontal com a orientação (sentido de percurso) da esquerda para a direita e o eixo Oy na vertical com orientação de baixo para cima.

(**ii**) qualquer ponto da reta r está associado a algum número real de $\mathbb{R}$ (sobrejetividade).
Pergunta: O que a bijeção φ tem de importante?
Resposta: Unicidade de associação!
Ou seja, todos os números reais de $\mathbb{R}$ estão associados de forma unívoca a todos os pontos da reta r e vice-versa.
Em outras palavras: não há ponto da reta r associado a mais do que um único número real de $\mathbb{R}$ e; não há número real de $\mathbb{R}$ associado a mais do que um único ponto da reta r.

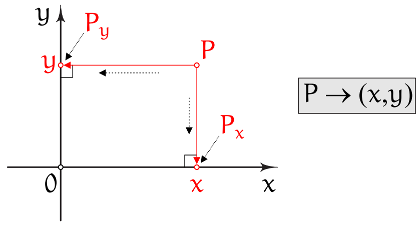


A grande utilidade do plano cartesiano está no fato de cada ponto deste plano estar associado a um par ordenado de números reais e vice-versa. Esta associação é feita do seguinte modo:

• **(1)** Dado um ponto P no plano cartesiano, consideremos as projeções ortogonais desse ponto nos eixos coordenados([5]). A projeção ortogonal P_x de P no eixo coordenado Ox é um ponto de coordenada x neste eixo, que chamamos de ***abscissa*** de P, enquanto que a projeção ortogonal P_y de P no eixo Oy é um ponto de coordenada y neste eixo, que chamamos de ***ordenada*** de P. Abscissas e ordenadas são chamadas, também, de ***coordenadas cartesianas*** de P. O ponto P fica, portanto, associado ao par ordenado de números reais (x, y). Indicamos essa associação por

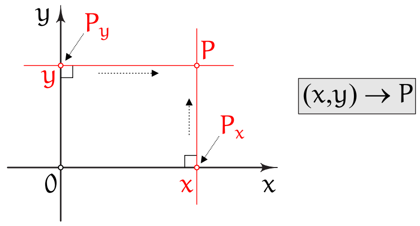
$$\boxed{P = (x, y) \text{ ou } P\,(x, y)}.$$

Observemos que devido às unicidades das projeções ortogonais de P nos eixos coordenados, o par ordenado (x, y) é único!



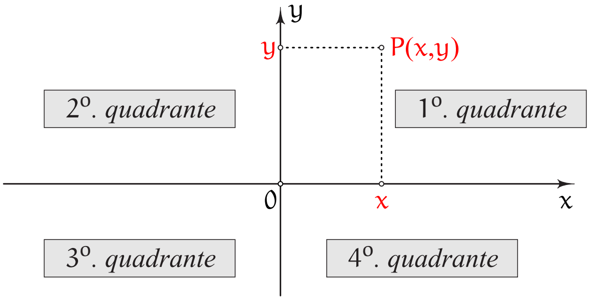
• **(2)** Dado um par ordenado de números reais (x, y), tomamos os pontos P_x e P_y, de coordenadas x e y nos eixos Ox e O_y, respectivamente. Por P_x traçamos a perpendicular ao eixo Ox e por P_y traçamos a perpendicular ao eixo Oy. O cruzamento dessas perpendiculares determina um ponto P. O par ordenado de números reais (x, y) fica, portanto, associado ao ponto P.

Mais uma vez, devido às unicidades de P_x e P_y (e das perpendiculares), P é o único ponto que pode ser associado ao par ordenado (x, y).



Os eixos coordenados Ox e Oy dividem o plano cartesiano em quatro regiões, chamadas de quadrantes. Os pontos $P\,(x, y)$ tais que:
• $x, y > 0$, estão no chamado ***1º quadrante*** do plano cartesiano;
• $x < 0$ e $y > 0$, estão no chamado ***2º quadrante*** do plano cartesiano;
• $x, y < 0$, estão no chamado ***3º quadrante*** do plano cartesiano;
• $x > 0$ e $y < 0$, estão no chamado ***4º quadrante*** do plano cartesiano.

[5] As projeções ortogonais de um ponto P nos eixos coordenados são os pés das perpendiculares baixadas de P aos eixos coordenados.



O conjunto dos pares ordenados de números reais é indicado por $\mathbb{R}^2$, ou seja:

$$\boxed{\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}}$$

A associação entre pontos do plano cartesiano e pares ordenados de números reais $\mathbb{R}^2$ descrita em (**1**) e (**2**) acima permite que se diga que existe uma ***bijeção*** entre o plano cartesiano e $\mathbb{R}^2$. É por isso que alguns textos referem-se ao conjunto $\mathbb{R}^2$ como "plano cartesiano".

Por fim, uma observação simples, porém importante e útil na resolução de exercícios, diz respeito a igualdade de pares ordenados:

$$\boxed{(x_1, y_1) = (x_2, y_2) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{array} \right.}.$$

2.2.3 Vetores no Plano Cartesiano

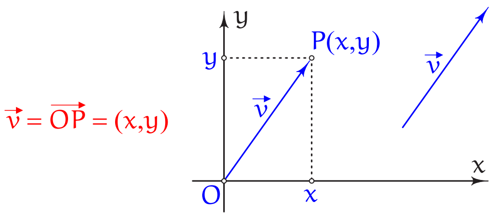
Embora estejamos trabalhando com vetores no espaço. Podemos fazer uma restrição e considerar apenas os vetores que possuam representantes contidos em um determinado plano. Um tal conjunto de vetores costuma ser denotado por $\mathbb{V}^2$. Para simplificar, iremos chamá-los de "vetores no plano".

Todo vetor em um plano pode ser associado a um único par ordenado, e vice-versa, do seguinte modo:

Fixemos um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais Oxy, com origem O, no plano. Dado um vetor $\vec{v}$ neste plano cartesiano, tomemos um representante de $\vec{v}$ com origem O e extremo $P(x, y)$, ou seja, $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$.

O par ordenado (x, y), associado ao ponto P está, <u>também</u>, associado ao vetor $\vec{v}$, e escrevemos $\vec{v} = (x, y)$.

*Assim como já introduzido para os pontos P, x é chamado de **abscissa** de $\vec{v}$ e y é chamado de **ordenada** de $\vec{v}$. Abscissas e ordenadas são chamadas, também, de **coordenadas cartesianas** de $\vec{v}$.*



Observemos que as coordenadas de um vetor são as coordenadas de seu extremo, desde que a origem do vetor esteja na origem do sistema de coordenadas.

Vamos introduzir, na próxima definição, dois vetores que desempenharão um papel muito importante no estudo algébrico dos vetores no plano cartesiano.

*Fixemos um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais Oxy no plano. Consideremos os vetores $\vec{i} = (1, 0)$ e $\vec{j} = (0, 1)$. O conjunto $\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}\}$ é chamado de **base canônica** do plano cartesiano.*

A próxima proposição relaciona coordenadas de vetores com a base canônica introduzida acima.

Proposição 2.5 Consideremos um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais Oxy no plano com a base canônica $\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}\}$ fixada. Para os vetores $\vec{v}$ desse plano cartesiano temos

$$\boxed{\vec{v} = (x, y) \Longleftrightarrow \vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}}.$$

Demonstração da Proposição 2.5.

($\Rightarrow$) Façamos $\vec{v} = \overrightarrow{OP} = (x, y)$, sendo O a origem do plano cartesiano. Logo, $P(x, y)$ é tal que x é a coordenada da projeção ortogonal P_x do ponto P no eixo Ox, e y é a coordenada da projeção ortogonal P_y do ponto P no eixo Oy.
• Se $x > 0$ temos $x = d(O, P_x)$ e temos o ponto P_x à direita de O. Com isto, os vetores $x\vec{i}$ e $\overrightarrow{OP_x}$ possuem o mesmo comprimento, direção e sentido, ou seja, são iguais.
• Se $x = 0$ temos $P_x = O$ e, mais uma vez, $x\vec{i}$ e $\overrightarrow{OP_x}$ são iguais ao vetor nulo.
• Se $x < 0$ temos $x = -d(P_x, O)$ e temos o ponto P_x à esquerda de O. Com isto, de novo, os vetores $x\vec{i}$ e $\overrightarrow{OP_x}$ possuem o mesmo comprimento, direção e sentido, ou seja, são iguais.

Naturalmente a mesma análise pode ser feita com o y. Logo, temos

$$\begin{cases} x\vec{i} = \overrightarrow{OP_x} \\ y\vec{j} = \overrightarrow{OP_y} \end{cases}.$$

Como $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_x} + \overrightarrow{OP_y}$. concluímos que $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

($\Leftarrow$) Façamos $x\vec{i} = \overrightarrow{OA}$.
• Se $x > 0$ temos A à direita de O e a coordenada de A no eixo Ox é $d(O, A) = ||\overrightarrow{OA}|| = ||x\vec{i}|| = |x|.||\vec{i}|| = x.1 = x$.
• Se $x = 0$ temos $A = O$ e a coordenada de A no eixo Ox é 0.
• Se $x < 0$ temos A à esquerda de O e a coordenada de A no eixo Ox é $-d(A, O) = -||\overrightarrow{OA}|| = -||x\vec{i}|| = -|x|.||\vec{i}|| = -(-x).1 = x$.

Desta forma, a coordenada de A no eixo Ox é x em qualquer caso.

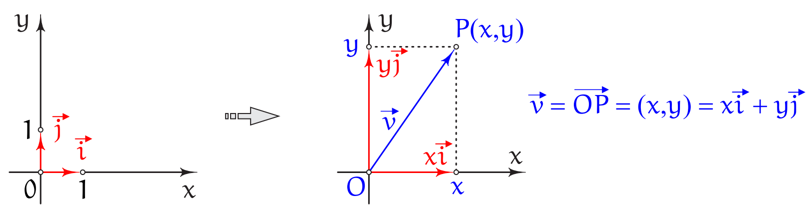
De forma análoga, fazendo $y\vec{j} = \overrightarrow{OB}$, a coordenada de B no eixo Oy é y.

Traçando-se as perpendiculares aos eixos coordenados pelos pontos A e B encontramos o ponto P de coordenadas (x, y). Desta forma, temos $\overrightarrow{OP} = (x, y)$.

Mas $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OP} \Rightarrow x\vec{i} + y\vec{j} = \overrightarrow{OP} \Rightarrow \vec{v} = \overrightarrow{OP}$ (pois, por hipótese, $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}$) $\Rightarrow \vec{v} = (x, y)$, como queríamos.$\square$

Observemos que, devido à unicidade do par ordenado associado a $\vec{v}$, então $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}$ também é escrito de modo único para cada vetor $\vec{v}$.

Uma soma do tipo $x\vec{i} + y\vec{j}$ é chamada de ***combinação linear*** dos vetores $\vec{i}$ e $\vec{j}$. Assim, dizemos que $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}$ está escrito como *combinação linear dos vetores da base canônica do plano cartesiano.*

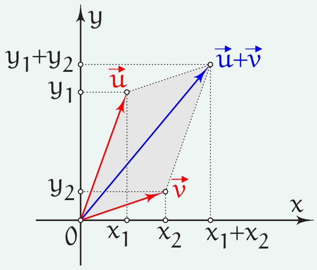


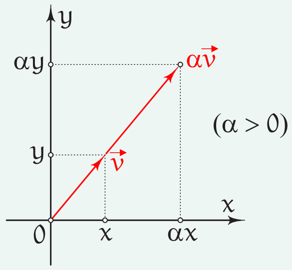
Alguns casos particulares interessantes:
• O vetor nulo é da forma $\vec{0} = (0, 0)$;
• Vetores paralelos ao eixo das abscissas possuem ordenadas nulas, ou seja, são da forma $\vec{v} = (x, 0)$. Se $x > 0$, então $\vec{v}$ e $\vec{i}$ possuem o mesmo sentido. Se $x < 0$, então $\vec{v}$ e $\vec{i}$ possuem sentidos opostos.
• Vetores paralelos ao eixo das ordenadas possuem abscissas nulas, ou seja, são da forma $\vec{v} = (0, y)$. Se $y > 0$, então $\vec{v}$ e $\vec{j}$ possuem o mesmo sentido. Se $y < 0$, então $\vec{v}$ e $\vec{j}$ possuem sentidos opostos.

A Proposição 2.5 acima, além de estabelecer uma conexão entre pares ordenados e a base canônica do plano cartesiano, também permite deduzir como ficam as operações de adição e multiplicação por escalar em termos de coordenadas, bem como algumas propriedades algébricas bastante úteis envolvendo vetores. Esse é o conteúdo da próxima proposição.

Proposição 2.6 (**Propriedades**) Fixemos um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais Oxy no plano com base canônica $\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}\}$.

• (1) (**Operações**) Se $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$, então $\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$.
Se $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\vec{v} = (x, y)$, então $\alpha\vec{v} = (\alpha x, \alpha y)$.





Consequentemente, todas as propriedades de adição de vetores e multiplicação de vetor por escalar valem para pares ordenados de números reais.

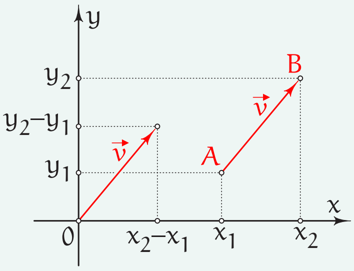
Observação: as operações de adição de pares ordenados e multiplicação de par ordenado por escalar expostas acima são chamadas de *operações usuais* em $\mathbb{R}^2$.

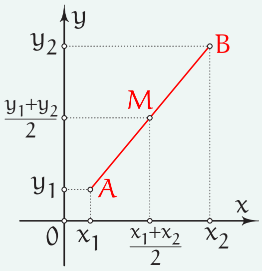
• (2) (**Condição de paralelismo**) Os vetores $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$, sendo $\vec{v} \neq \vec{0}$, são paralelos se, e somente se, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $x_1 = \alpha x_2$ e $y_1 = \alpha y_2$, ou seja, $(x_1, y_1) = \alpha (x_2, y_2)$.

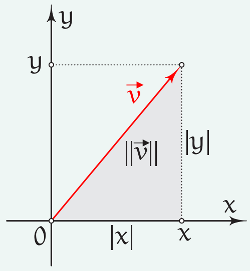
• (3) (**Vetor definido por dois pontos**) Se $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$, então $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$. Por esse motivo, é comum escrevermos $\vec{v} = B - A$, ou $B = A + \vec{v}$. (figura abaixo à esquerda)

• (4) (**Ponto médio**) Se $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$, então as coordenadas do ponto médio M do segmento AB é $M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$. (figura abaixo ao centro)

• (5) (**Módulo**) Se $\vec{v} = (x, y)$, então $\|\vec{v}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$. (figura abaixo à direita)







Demonstração da Proposição 2.6.

• (1) Consideremos a base canônica $\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}\}$ no plano cartesiano e a Proposição 2.5.

(**a**) Adição:

Se $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$, então

$$\begin{cases} \vec{u} = (x_1, y_1) \\ \vec{v} = (x_2, y_2) \end{cases} \underset{*}{\Rightarrow} \begin{cases} \vec{u} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} \\ \vec{v} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} \end{cases} \Rightarrow \vec{u} + \vec{v} = \left(x_1\vec{i} + y_1\vec{j}\right) + \left(x_2\vec{i} + y_2\vec{j}\right) \Rightarrow$$

$$\vec{u} + \vec{v} = \left(x_1\vec{i} + x_2\vec{i}\right) + \left(y_1\vec{j} + y_2\vec{j}\right) \Rightarrow \vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2)\,\vec{i} + (y_1 + y_2)\,\vec{j} \underset{*}{\Rightarrow}$$

$$\boxed{\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)}.$$

(**b**) Multiplicação por escalar:

Se $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\vec{v} = (x, y)$, então

$$\alpha\vec{v} = \alpha(x, y) \underset{*}{\Rightarrow} \alpha\vec{v} = \alpha\left(x\vec{i} + y\vec{j}\right) = (\alpha x)\,\vec{i} + (\alpha y)\,\vec{j} \underset{*}{\Rightarrow} \boxed{\alpha\vec{v} = (\alpha x, \alpha y)}.$$

Nas passagens indicadas com $(*)$ utilizamos a Proposição 2.5.

• (2) $(\Rightarrow)$ Se $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$, com $\vec{v} \neq \vec{0}$, são paralelos, então, pela Proposição 2.3, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{u} = \alpha\vec{v}$.

Logo, $(x_1, y_1) = \alpha(x_2, y_2)$. Pelo item (**1**) acima: $(x_1, y_1) = (\alpha x_2, \alpha y_2)$ e, portanto, $x_1 = \alpha x_2$ e $y_1 = \alpha y_2$.

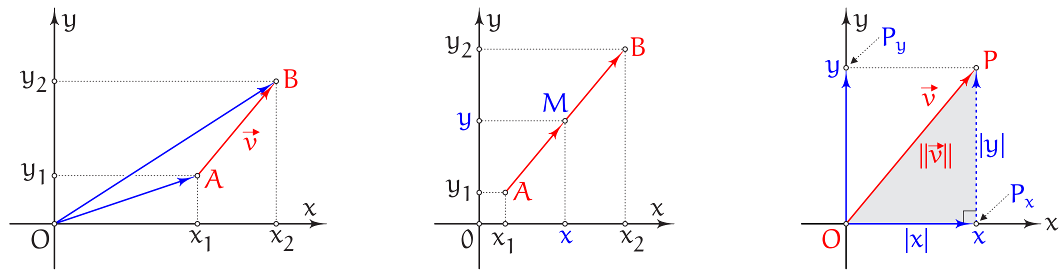
$(\Leftarrow)$ Se existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $x_1 = \alpha x_2$ e $y_1 = \alpha y_2$, então $(x_1, y_1) = \alpha(x_2, y_2)$ e, portanto, $\vec{u} = \alpha\vec{v}$. Pela Proposição 2.3 temos $\vec{u} /\!/ \vec{v}$.

• (3) Sendo O a origem do sistema de coordenadas, $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$; consideremos os vetores $\overrightarrow{OA} = (x_1, y_1)$

e $\overrightarrow{OB} = (x_2, y_2)$ (figura abaixo à esquerda). Logo, utilizando o Item $(\mathbf{1})$ acima:

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + (-1)\,\overrightarrow{OA} = (x_2, y_2) + (-1)\,(x_1, y_1) = (x_2, y_2) + (-x_1, -y_1) \Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{v} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)}.$$



● (4) Seja $M\,(x, y)$ as coordenadas do ponto médio do segmento AB, sendo $A\,(x_1, y_1)$ e $B\,(x_2, y_2)$. Logo, $\overrightarrow{AM}$ e $\overrightarrow{MB}$ são vetores de mesmo comprimento, direção e sentido, ou seja, são iguais (figura acima ao centro). Mas, de acordo com o Item $(\mathbf{3})$:

$$\begin{cases} \overrightarrow{AM} = M - A = (x, y) - (x_1, y_1) = (x - x_1, y - y_1) \\ \overrightarrow{MB} = B - M = (x_2, y_2) - (x, y) = (x_2 - x, y_2 - y) \end{cases}.$$

Da igualdade $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$ temos:

$$(x - x_1, y - y_1) = (x_2 - x, y_2 - y) \Rightarrow \begin{cases} x - x_1 = x_2 - x \\ y - y_1 = y_2 - y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = x_1 + x_2 \\ 2y = y_{21} + y_2 \end{cases} \Rightarrow M\,(x, y) = \boxed{M\left(\tfrac{x_1 + x_2}{2}, \tfrac{y_1 + y_2}{2}\right)}.$$

● (5) Sendo O a origem do sistema de coordenadas.

$(\mathbf{a})$ É claro que se $\vec{v} = \vec{0}$, então o resultado é verdadeiro.

$(\mathbf{b})$ Se $\vec{v} = \overrightarrow{OP} = (x, y)$ é tal que $y = 0$ e $x \neq 0$, então P está sobre o eixo Ox e sua coordenada neste eixo é x. Então, $x = d\,(O, P)$, se P estiver à direita de O e $x = -d\,(P, O)$, se x estiver à esquerda de O. Isto significa que $\|\overrightarrow{OP}\| = |x|$ em ambos os casos. Portanto, $\|\vec{v}\| = \|\overrightarrow{OP}\| = |x| = \sqrt{x^2 + 0^2}$.

$(\mathbf{c})$ Se $\vec{v} = \overrightarrow{OP} = (x, y)$ é tal que $x = 0$ e $y \neq 0$, então raciocínio análogo nos conduz a $\|\vec{v}\| = \sqrt{0^2 + y^2}$.

$(\mathbf{d})$ Se $\vec{v} = \overrightarrow{OP} = (x, y)$ é tal que $x \neq 0$ e $y \neq 0$, então consideremos os pontos P_x e P_y projeções ortogonais de $P\,(x, y)$ nos eixos Ox e Oy, respectivamente. Logo, as coordenadas de P_x e P_y nos seus respectivos eixos são x e y (figura acima à direita). Portanto,

$$\begin{cases} \|\overrightarrow{OP_x}\| = |x| \\ \|\overrightarrow{OP_y}\| = |y| \end{cases},$$

de acordo com o raciocínio que fizemos em $(\mathbf{b})$ acima.

Porém, OP_xPP_y é um retângulo. Portanto, $\overrightarrow{OP_y} = \overrightarrow{P_xP}$, e temos

$$\|\overrightarrow{P_xP}\| = |y|.$$

Por fim, observemos que OP_xP é um triângulo retângulo com OP hipotenusa, OP_x e P_xP catetos. Logo, a hipotenusa mede $\|\overrightarrow{OP}\| = \|\vec{v}\|$ e os catetos medem $\|\overrightarrow{OP_x}\| = |x|$ e $\|\overrightarrow{P_xP}\| = |y|$. Portanto, pelo Teorema de Pitágoras:

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{|x|^2 + |y|^2} \Rightarrow \boxed{\|\vec{v}\| = \sqrt{x^2 + y^2}},$$

como queríamos. $\square$

Observação: No plano, as operações de adição de vetores e multiplicação de vetor por escalar, que introduzimos na Seção 2.1, são equivalentes às chamadas *operações usuais* de adição de pares ordenados e multiplicação de par ordenado por escalar, conforme apresentadas no Item $(\mathbf{1})$ da Proposição 2.6 acima. Da forma como estamos desenvolvendo a teoria até aqui, dá-se a impressão de que as operações usuais de pares ordenados "vieram depois" das suas análogas com vetores, quando, na verdade, ocorreu o contrário. Afinal, devido a sua simplicidade, é bem mais natural começar com as *operações usuais* de pares ordenados do que com as operações geométricas de vetores como, por exemplo, a adição de vetores, que pode soar um pouco estranha à primeira vista... As definições geométricas das operações com vetores no plano foram pensadas exatamente para serem compatíveis com as *operações usuais* com pares ordenados.

A mesma observação também ocorre com vetores no espaço, conforme poderemos constatar nas próximas subseções.

Exemplo 2.9 Dados os vetores no plano $\vec{u} = (2, -4)$, $\vec{v} = (-5, 1)$ e $\vec{w} = (-12, 6)$, determinemos a_1 e a_2 tais que $\vec{w} = a_1\vec{u} + a_2\vec{v}$.

Temos:

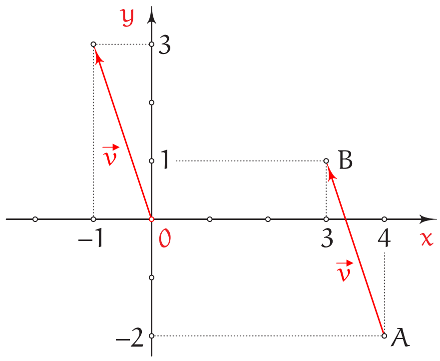
$$\vec{w} = a_1\vec{u} + a_2\vec{v} = (-12, 6) = a_1(2, -4) + a_2(-5, 1) \Rightarrow (-12, 6) = (2a_1 - 5a_2, -4a_1 + a_2) \Rightarrow$$
$$\begin{cases} 2a_1 - 5a_2 = -12 \\ -4a_1 + a_2 = 6 \end{cases} \Rightarrow \cdots \Rightarrow \boxed{a_1 = -1 \text{ e } a_2 = 2}.$$

Exemplo 2.10 Determinemos, no plano, as coordenadas do ponto inicial do segmento orientado que representa o vetor $\vec{v} = (-1, 3)$, sabendo que sua extremidade está no ponto $(3, 1)$.

Seja A a origem de $\vec{v}$ e $B(3, 1)$ seu extremo. Chamemos $A(x, y)$. Logo,

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = B - A = (3, 1) - (x, y) = (3 - x, 1 - y) \Rightarrow$$
$$(-1, 3) = (3 - x, 1 - y) \Rightarrow \begin{cases} 3 - x = -1 \\ 1 - y = 3 \end{cases} \Rightarrow (x, y) = (4, -2).$$

Portanto, $A(4, -2)$ é origem de $\vec{v}$.



Exemplo 2.11 Calculemos os valores de a para que o vetor $\vec{u} = \left(a, \frac{1}{2}\right)$ seja unitário.

Temos:

$$\|\vec{u}\| = 1 \Rightarrow \sqrt{a^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1 \Rightarrow a^2 + \frac{1}{4} = 1^2 \Rightarrow a^2 = \frac{3}{4} \Rightarrow \boxed{a = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}}.$$

2.2.4 Coordenadas no Espaço

De forma análoga ao plano, podemos definir um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais no espaço. O que vamos fazer a seguir é, basicamente, copiar a teoria apresentada na Subseção 2.2.2 (Coordenadas no Plano) acrescentando mais um eixo coordenado. Vejamos:

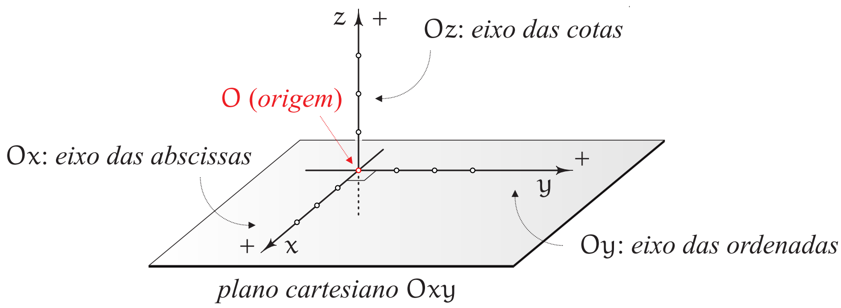
Consideremos três eixos coordenados congruentes, perpendiculares dois a dois e com origens coincidentes no ponto O.

Um dos eixos coordenados será chamado de ***eixo das abscissas****, indicado por Ox, um outro será chamado de* ***eixo das ordenadas****, indicado por Oy, enquanto que o último será chamado de* ***eixo das cotas****, indicado por Oz.*

Considerando os três eixos, conforme descrito acima, dizemos que o espaço está munido de um ***sistema de coordenadas cartesianas ortogonais*** *ou, simplificadamente,* ***espaço cartesiano****, indicado por $Oxyz$.*

O ponto O é chamado de ***origem*** *do sistema de coordenadas cartesianas ortogonais.*

É comum representar o espaço cartesiano como o plano cartesiano Oxy na horizontal e o eixo Oz na vertical com orientação de baixo para cima. A posição relativa dos três eixos coordenados no espaço geralmente é definida de tal modo que as orientações dos eixos respeitem as indicações naturais dos dedos indicador, médio e polegar da mão direita. Em outras palavras, se os eixos Ox, Oy e Oz forem determinados pelos dedos indicador, médio e polegar da mão direita, então as orientações desses eixos respeitam as indicações naturais desses dedos. A figura abaixo ilustra os eixos coordenados na posição que estamos estabelecendo.

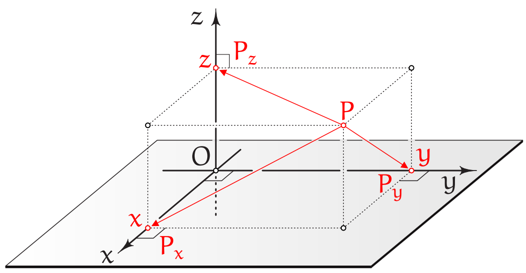


A grande utilidade do plano cartesiano está no fato de cada ponto deste plano estar associado a uma terna (ou tripla) ordenada de números reais e vice-versa. Esta associação é feita do seguinte modo:

• **(1)** Dado um ponto P no espaço cartesiano, consideremos as projeções ortogonais desse ponto nos eixos coordenados. A projeção ortogonal P_x de P no eixo Ox é um ponto de coordenada x neste eixo, que chamamos de ***abscissa*** de P; a projeção ortogonal P_y de P no eixo Oy é um ponto de coordenada y neste eixo, que chamamos de ***ordenada*** de P; enquanto que a projeção ortogonal P_z de P no eixo Oz é um ponto de coordenada z neste eixo, que chamamos de ***cota*** de P. Abscissas, ordenadas e cotas são chamadas, também, de ***coordenadas cartesianas*** de P. O ponto P fica, portanto, associado à terna ordenada de números reais (x, y, z). Indicamos essa associação por

$$\boxed{P = (x, y, z) \text{ ou } P\,(x, y, z)}.$$

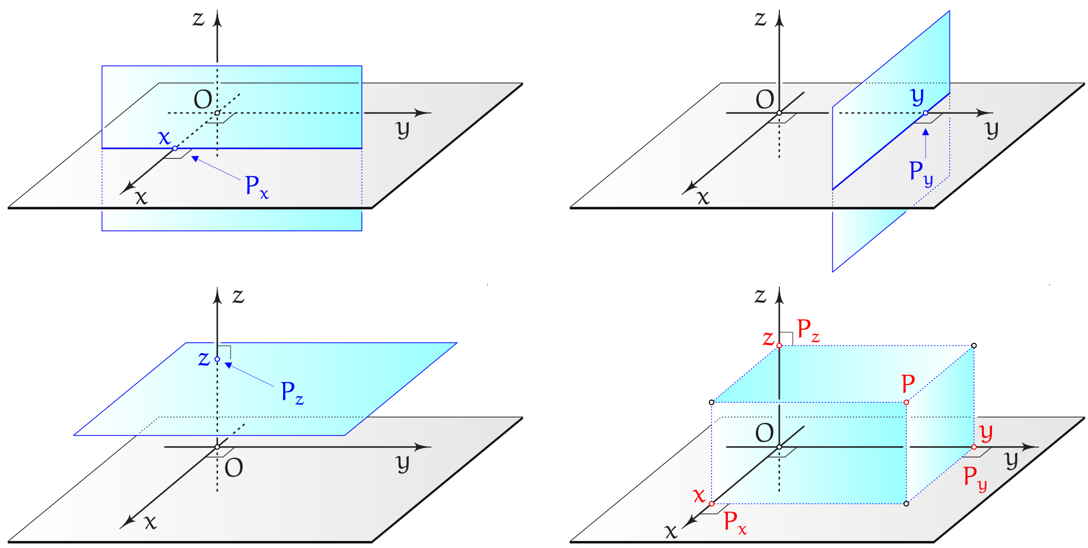
Assim como no plano cartesiano, devido às unicidades das projeções ortogonais de P nos eixos coordenados, a terna ordenada (x, y, z) é única.



$P \to (x,y,z)$

• **(2)** Dada uma terna ordenada de números reais (x, y, z), tomamos os pontos P_x, P_y e P_z, de coordenadas x, y e z nos eixos Ox, O_y e O_z, respectivamente. Por P_x traçamos o plano perpendicular ao eixo Ox, por P_y traçamos o plano perpendicular ao eixo Oy e, por P_z traçamos o plano perpendicular ao eixo Oz. A intersecção desses três planos perpendiculares aos eixos determina um único ponto P. A terna ordenada de números reais (x, y, z) fica, portanto, associada a este ponto P.

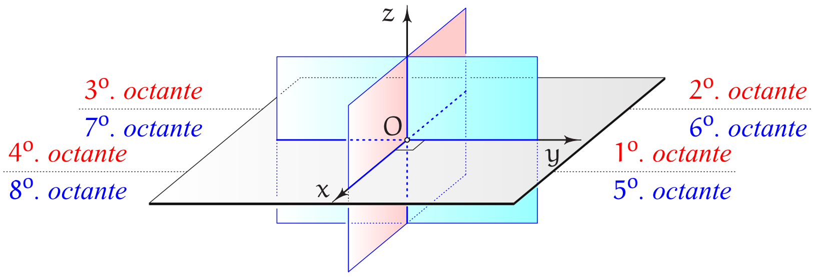
Mais uma vez, devido às unicidades de P_x, P_y e P_z nos eixos (e dos planos perpendiculares construídos), o ponto P é o único ponto que pode ser associado à terna ordenada (x, y, z).



$(x,y,z) \to P$

Os eixos coordenados Ox, Oy e Oz determinam três planos cartesianos Oxy, Oxz e Oyz que devidem o espaço em oito regiões, chamadas de *octantes*. Os pontos $P(x, y, z)$ tais que:

- $x, y, z > 0$, estão no chamado ***1º octante*** do espaço cartesiano;
- $x < 0$ e $y, z > 0$, estão no chamado ***2º octante*** do espaço cartesiano;
- $x, y < 0$ e $z > 0$, estão no chamado ***3º octante*** do espaço cartesiano;
- $x, z > 0$ e $y < 0$, estão no chamado ***4º octante*** do espaço cartesiano;
- $x, y > 0$ e $z < 0$, estão no chamado ***5º octante*** do espaço cartesiano;
- $x, z < 0$ e $y > 0$, estão no chamado ***6º octante*** do espaço cartesiano;
- $x, y, z < 0$, estão no chamado ***7º octante*** do espaço cartesiano;
- $x > 0$ e $y, z < 0$, estão no chamado ***8º octante*** do espaço cartesiano.



O conjunto das ternas ordenadas de números reais é indicado por $\mathbb{R}^3$, ou seja:

$$\boxed{\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}}$$

A associação entre pontos do espaço cartesiano e ternas ordenadas de números reais $\mathbb{R}^3$ descrita em (**1**) e (**2**) acima permite que se diga que existe uma ***bijeção*** entre o espaço cartesiano e $\mathbb{R}^3$. É por isso que alguns textos referem-se ao conjunto $\mathbb{R}^3$ como "espaço cartesiano".

E ainda, de forma análoga aos pares ordenados, uma observação sobre igualdade de ternas ordenadas:

$$\boxed{(x_1, y_1, z_1) = (x_2, y_2, z_2) \iff \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \\ z_1 = z_2 \end{cases}}.$$

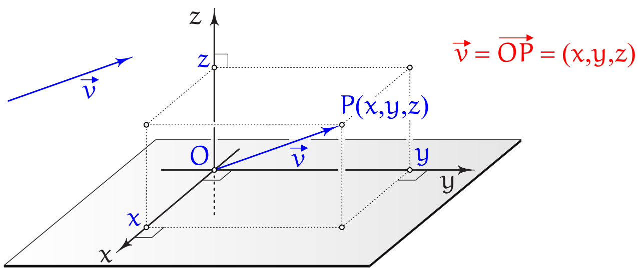
2.2.5 Vetores no Espaço Cartesiano

Mais uma vez, o que vamos fazer a seguir é, basicamente, copiar a teoria apresentada na Subseção 2.2.3 (Vetores no Plano Cartesiano) acrescentando mais um eixo coordenado. Sendo assim, todo vetor no espaço pode ser associado a uma única terna ordenada e vice-versa do seguinte modo:

Fixemos um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais $Oxyz$, com origem O, no espaço. Dado um vetor $\vec{v}$ neste espaço cartesiano, tomemos um representante de $\vec{v}$ com origem O e extremo $P(x, y, z)$, ou seja, $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$.

A terna ordenada (x, y, z), associada ao ponto P está, <u>também</u>, associada ao vetor $\vec{v}$, e escrevemos $\vec{v} = (x, y, z)$.

*Assim como já introduzido para os pontos P, x é chamado de **abscissa** de $\vec{v}$, y é chamado de **ordenada** de $\vec{v}$ e z é chamado de **cota** de $\vec{v}$. Abscissas, ordenadas e cotas são chamadas, também, de **coordenadas cartesianas** de $\vec{v}$.*



Observemos que as coordenadas de um vetor são as coordenadas de seu extremo, desde que a origem do vetor esteja na origem do sistema de coordenadas.

Vamos introduzir, na próxima definição, três vetores que desempenharão um papel muito importante no estudo algébrico dos vetores no espaço cartesiano.

Fixemos um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais $Oxyz$ *no espaço. Consideremos os vetores* $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$ *e* $\vec{k} = (0, 0, 1)$. *O conjunto* $\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ *é chamado de* ***base canônica*** *do espaço cartesiano.*

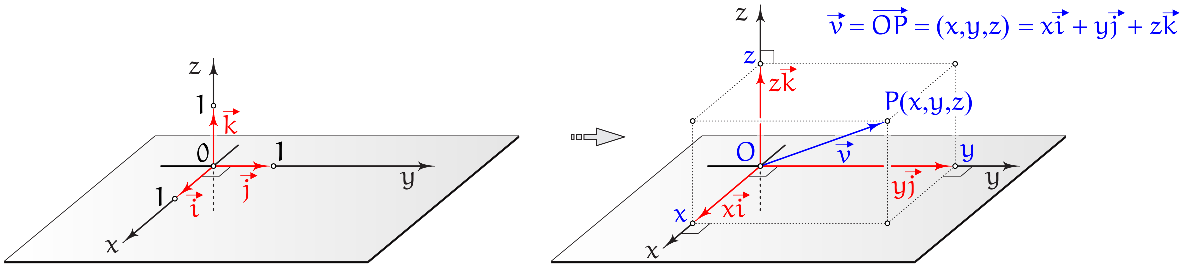
A próxima proposição relaciona coordenadas de vetores com a base canônica introduzida acima. Sua demonstração segue os mesmos passos da Proposição 2.5 e será deixada como exercício.

Proposição 2.7 Consideremos um sistema de coordenadas cartesianas ortogonis $Oxyz$ no espaço com a base canônica $\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ fixada. Para os vetores $\vec{v}$ do espaço cartesiano temos

$$\boxed{\vec{v} = (x, y, z) \Longleftrightarrow \vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}.$$

Observemos que, devido à unicidade da terna ordenada associada a $\vec{v}$, então $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ também é escrito de modo único para cada vetor $\vec{v}$. Observemos, também, que os vetores da base canônica satisfazem a "*regra da mão direita*", já apresentada.

Uma soma do tipo $x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ é chamada de ***combinação linear*** dos vetores $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$. Assim, dizemos que $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ está escrito como *combinação linear dos vetores da base canônica do espaço cartesiano.*



Alguns casos particulares interessantes:

• O vetor nulo é da forma $\vec{0} = (0, 0, 0)$;

• Vetores paralelos ao eixo das abscissas possuem ordenadas e cotas nulas, ou seja, são da forma $\vec{v} = (x, 0, 0)$. Se $x > 0$, então $\vec{v}$ e $\vec{i}$ possuem o mesmo sentido. Se $x < 0$, então $\vec{v}$ e $\vec{i}$ possuem sentidos opostos.

• Vetores paralelos ao eixo das ordenadas possuem abscissas e cotas nulas, ou seja, são da forma $\vec{v} = (0, y, 0)$. Se $y > 0$, então $\vec{v}$ e $\vec{j}$ possuem o mesmo sentido. Se $y < 0$, então $\vec{v}$ e $\vec{j}$ possuem sentidos opostos.

• Vetores paralelos ao eixo das cotas possuem abscissas e ordenadas nulas, ou seja, são da forma $\vec{v} = (0, 0, z)$. Se $z > 0$, então $\vec{v}$ e $\vec{k}$ possuem o mesmo sentido. Se $z < 0$, então $\vec{v}$ e $\vec{k}$ possuem sentidos opostos.

• Os eixos Ox, Oy e Oz determinam três planos cartesianos no espaço. Os pontos P do plano Oxy, quando considerados pontos do espaço, estão associados a três coordenadas tais que $P(x, y, 0)$. Analogamente, os pontos dos planos cartesianos Oxz e Oyz são da forma $P(x, 0, z)$ e $P(0, y, z)$, respectivamente.

A Proposição 2.7 acima, além de estabelecer uma conexão entre ternas ordenadas e a base canônica do espaço cartesiano, também permite deduzir como ficam as operações de adição e multiplicação por escalar em termos de coordenadas, bem como algumas propriedades algébricas bastante úteis envolvendo vetores. Esse é o conteúdo da próxima proposição, cuja demonstração é bastante similar àquela feita na Proposição 2.6 e será, também, deixada como exercício.

Proposição 2.8 (**Propriedades**) Fixemos um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais $Oxyz$ no espaço com base canônica $\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

• **(1)** (**Operações**) Se $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$, então $\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$.
Se $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\vec{v} = (x, y, z)$, então $\alpha\vec{v} = (\alpha x, \alpha y, \alpha z)$.

Consequentemente, todas as propriedades de adição de vetores e multiplicação de vetor por escalar valem para ternas ordenadas de números reais.

Observação: as operações de adição de ternas ordenadas e multiplicação de terna ordenada por escalar expostas acima são chamadas de *operações usuais* em $\mathbb{R}^3$.

• **(2)** (**Condição de paralelismo**) Os vetores $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$, sendo $\vec{v} \neq \vec{0}$, são paralelos se, e somente se, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $x_1 = \alpha x_2$, $y_1 = \alpha y_2$ e $z_1 = \alpha z_2$ ou seja, $(x_1, y_1, z_1) = \alpha(x_2, y_2, z_2)$.

• **(3)** (**Vetor definido por dois pontos**) Se $A(x_1, y_1, z_1)$ e $B(x_2, y_2, z_2)$, então $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$.
Por esse motivo, é comum escrevermos $\vec{v} = B - A$, ou $B = A + \vec{v}$.

• **(4)** (**Ponto médio**) Se $A(x_1, y_1, z_1)$ e $B(x_2, y_2, z_2)$, então as coordenadas do ponto médio M do segmento AB é $M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right)$.

• **(5)** (**Módulo**) Se $\vec{v} = (x, y, z)$, então $\|\vec{v}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Exemplo 2.12 Dados os pontos $A(3,-4,-2)$ e $B(-2,1,0)$, determinemos o ponto N pertencente ao segmento AB tal que $\overrightarrow{AN} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$.

Temos $\overrightarrow{AB} = B - A = (-2,1,0) - (3,-4,-2) = (-5,5,2)$.

Façamos $N(x,y,z)$. Logo, $\overrightarrow{AN} = N - A = (x,y,z) - (3,-4,-2) = (x-3, y+4, z+2)$.

Desta forma:

$$\overrightarrow{AN} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB} \Rightarrow (x-3,y+4,z+2) = \frac{2}{5}(-5,5,2) \Rightarrow (x-3,y+4,z+2) = \left(-2,2,\frac{4}{5}\right) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x-3=-2 \\ y+4=2 \\ z+2=4/5 \end{cases} \Rightarrow x=1,\ y=-2 \text{ e } z=-\frac{6}{5}.$$

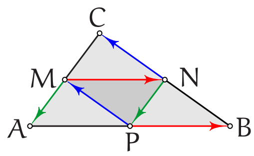
Logo, $N\left(1,-2,-\frac{6}{5}\right)$.

Exemplo 2.13 Determinemos os três vértices de um triângulo, sabendo que os pontos médios de seus lados são $M(5,0,-2)$, $N(3,1,-3)$ e $P(4,2,1)$.

Chamemos o triângulo de ABC sendo M, N e P pontos médios de CA, BC e AB, respectivamente.

Aqui é conveniente lembrar o Exemplo 2.7, página 21, que afirma que o segmento que liga os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado e mede a metade de seu comprimento.

Isto significa que, considerando os vetores representados na figura abaixo,



temos:

$$\begin{cases} \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PB} \\ \overrightarrow{PM} = \overrightarrow{NC} \\ \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MA} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N-M=B-P \\ M-P=C-N \\ P-N=A-M \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (3,1,-3)-(5,0,-2)=B-(4,2,1) \\ (5,0,-2)-(4,2,1)=C-(3,1,-3) \\ (4,2,1)-(3,1,-3)=A-(5,0,-2) \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} B=(2,3,0) \\ C=(4,-1,-6) \\ A=(6,1,2) \end{cases}}.$$

Exemplo 2.14 Calculemos as coordenadas do ponto P, no eixo das abscissas, que seja equidistante dos pontos $A(3,-1,4)$ e $B(1,-2,-3)$.

Façamos $P(x,y,z)$. Como P está no eixo das abscissas (eixo Ox), temos $y=z=0$, ou seja, $P(x,0,0)$.

Desta forma, temos

$$\begin{cases} \overrightarrow{PA} = A-P = (3,-1,4)-(x,0,0) = (3-x,-1,4) \\ \overrightarrow{PB} = B-P = (1,-2,-3)-(x,0,0) = (1-x,-2,-3) \end{cases}.$$

Da equidistância de P a A e B temos

$$\|\overrightarrow{PA}\| = \|\overrightarrow{PB}\| \Rightarrow \sqrt{(3-x)^2+(-1)^2+4^2} = \sqrt{(1-x)^2+(-2)^2+(-3)^2} \Rightarrow$$
$$\left(9-6x+x^2\right)+1+16 = \left(1-2x+x^2\right)+4+9 \Rightarrow -4x=-12 \Rightarrow x=3.$$

Portanto, o ponto pedido é $P(3,0,0)$.

2.3 Produto Escalar (ou Produto Interno)

Para esta seção sugerimos que o leitor recorde a definição de ângulo entre vetores que foi dada no final da Seção 2.1, pois veremos adiante que o chamado *produto escalar* está relacionado com a medida de ângulo entre dois vetores. Vamos à definição:

*Seja $Oxyz$ sistema de coordenadas cartesianas ortogonais no espaço com base canônica $\mathcal{B} = \{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$. Sejam $\vec{u} = (x_1,y_1,z_1)$ e $\vec{v} = (x_2,y_2,z_2)$ vetores no espaço. Definimos o **produto escalar** de $\vec{u}$ por $\vec{v}$, e indicamos $\vec{u}\cdot\vec{v}$, como sendo o número real*

$$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}.$$

*Também é comum chamar o produto escalar de **produto interno** e, às vezes, ele é indicado por $\langle\vec{u},\vec{v}\rangle$.*

Enfatizamos que o adjetivo "escalar" se refere ao fato do produto definido acima ser um número real.

A motivação para definir o produto escalar, do modo como estamos fazendo, vem da Proposição 2.10 que apresentaremos mais abaixo. Mas antes, vejamos algumas propriedades imediatas do produto escalar, cujas demonstrações, por serem bastante simples, ficam como exercício para o leitor.

Proposição 2.9 (**Propriedades do produto escalar**) Seja $Oxyz$ sistema de coordenadas cartesianas ortogonais no espaço com base canônica $\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$. Sejam $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ vetores no espaço e $\alpha \in \mathbb{R}$.

(**1**) $\vec{u} \cdot \vec{0} = 0$;

(**2**) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ (comutativa);

(**3**) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ (distributiva);

(**4**) $\alpha (\vec{u} \cdot \vec{v}) = (\alpha\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (\alpha\vec{v})$ (associatividade em relação ao produto por escalar);

(**5**) $\vec{u} \cdot \vec{u} \geqslant 0$ e, além disso, $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0$ se, somente se, $\vec{u} = \vec{0}$;

(**6**) $||\vec{u}||^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}$, ou seja, $||\vec{u}|| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$.

Observação: Por causa do Item (**4**) da Proposição 2.9 acima podemos escrever $\alpha (\vec{u} \cdot \vec{v})$ ou $(\alpha\vec{u}) \cdot \vec{v}$ como $\alpha\vec{u} \cdot \vec{v}$, sem os parênteses e sem perigo de confusão.

Cuidado: A "Lei do Cancelamento" não é uma propriedade do produto escalar, ou seja, $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{w} \cdot \vec{v}$ não significa que $\vec{u} = \vec{w}$, nem mesmo quando $\vec{v} \neq \vec{0}$. Por exemplo: se $\vec{u} = (1, 0, 0)$, $\vec{v} = (0, 1, 0)$ e $\vec{w} = (0, 0, 1)$, então $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1.0 + 0.1 + 0.0 = 0 = 0.0 + 0.1 + 1.0 = \vec{w} \cdot \vec{v}$ mas $\vec{u} \neq \vec{w}$.

Exemplo 2.15 Mostremos que

$$\boxed{\begin{cases} ||\vec{u} + \vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + ||\vec{v}||^2 \\ ||\vec{u} - \vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + ||\vec{v}||^2 \end{cases}}.$$

De fato, pelo Item (**6**) da Proposição 2.9 temos

$$\begin{aligned} ||\vec{u} + \vec{v}||^2 &= (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{u} + (\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{v} \text{ (Item (3) da Proposição 2.9)} \\ &= \vec{u} \cdot (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{v} \cdot (\vec{u} + \vec{v}) \text{ (Item (2) da Proposição 2.9)} \\ &= \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}||^2 + \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{v} + ||v||^2 \\ &= ||\vec{u}||^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + ||v||^2. \end{aligned}$$

A segunda igualdade se processa de modo totalmente análogo, e será deixada como exercício proposto.

Exemplo 2.16 Mostremos que

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(||\vec{u} + \vec{v}||^2 - ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2\right)}.$$

Utilizando o Exemplo 2.15 acima temos:

$$\frac{1}{2}\left(||\vec{u} + \vec{v}||^2 - ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2\right) = \frac{1}{2}\left(||\vec{u}||^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + ||\vec{v}||^2 - ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2\right) = \frac{1}{2}(2\vec{u} \cdot \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{v}.$$

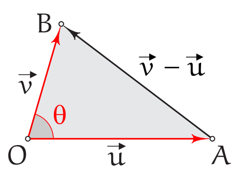
Proposição 2.10 (**Interpretação geométrica do produto escalar**) Seja $Oxyz$ sistema de coordenadas cartesianas ortogonais no espaço com base canônica $\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$. Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores no espaço e $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$ a medida, em radianos, do ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Então,

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}||.||\vec{v}|| \cos(\theta)}.$$

Demonstração da Proposição 2.10.

(**Caso 1**) Quando $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são não nulos e $0 < \theta < \pi$.

Neste caso, quando posicionados com a mesma origem O, os representantes dos vetores $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ formam um triângulo OAB tal que o ângulo interno do vértice O mede θ. Além disso, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \vec{v} - \vec{u}$.



Pela *Lei dos Cossenos*,

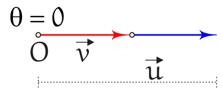
$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2.OA.OB.\cos(\theta) \Rightarrow ||\overrightarrow{AB}||^2 = ||\overrightarrow{OA}||^2 + ||\overrightarrow{OB}||^2 - 2||\overrightarrow{OA}||.||\overrightarrow{OB}||\cos(\theta) \Rightarrow$$
$$||\vec{v} - \vec{u}||^2 = ||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 - 2||\vec{u}||.||\vec{v}||\cos(\theta)$$

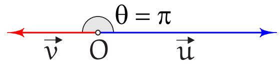
Mas $||\vec{v} - \vec{u}||^2 = ||\vec{u}||^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + ||\vec{v}||^2$, pelo Exemplo 2.15 acima.
Logo, a equação acima fica

$$||\vec{u}||^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + ||\vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 - 2||\vec{u}||.||\vec{v}||\cos(\theta) \Rightarrow \boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = ||\vec{u}||.||\vec{v}||\cos(\theta)}.$$

(Caso 2) Quando $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são não nulos, $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$.
Neste caso, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são paralelos, ou seja, pela Proposição 2.3, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{u} = \alpha\vec{v}$. Isto significa que se $\vec{v} = (x, y, z)$, então $\vec{u} = (\alpha x, \alpha y, \alpha z)$. Logo,

$$||\vec{u}||.||\vec{v}|| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}\sqrt{(\alpha x)^2 + (\alpha y)^2 + (\alpha z)^2} = \sqrt{x^2+y^2+z^2}\left(|\alpha|\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right) = |\alpha|\left(x^2+y^2+z^2\right).$$





• Se $\theta = 0$ temos $\vec{u}//\vec{v}$ com o mesmo sentido. Isto significa $\alpha > 0$ e, portanto, $|\alpha| = \alpha$. Assim:

$$||\vec{u}||.||\vec{v}|| = \alpha\left(x^2+y^2+z^2\right) = x(\alpha x) + y(\alpha y) + z(\alpha z) = (x, y, z)\cdot(\alpha x, \alpha y, \alpha z) \Rightarrow ||\vec{u}||.||\vec{v}|| = \vec{u}\cdot\vec{v} \Rightarrow$$
$$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = ||\vec{u}||.||\vec{v}||\cos(0)},$$

pois $\cos(0) = 1$.
• Se $\theta = \pi$ temos $\vec{u}//\vec{v}$ com sentidos opostos. Isto significa $\alpha < 0$ e, portanto, $|\alpha| = -\alpha$. Assim:

$$||\vec{u}||.||\vec{v}|| = -\alpha\left(x^2+y^2+z^2\right) = -\left(x(\alpha x) + y(\alpha y) + z(\alpha z)\right) = -\left((x, y, z)\cdot(\alpha x, \alpha y, \alpha z)\right) \Rightarrow ||\vec{u}||.||\vec{v}|| = -\vec{u}\cdot\vec{v} \Rightarrow$$
$$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = ||\vec{u}||.||\vec{v}||\cos(\pi)},$$

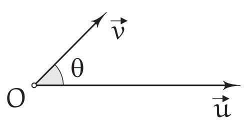
pois $\cos(\pi) = -1$.

(Caso 3) Quando $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$.
Neste caso $\vec{u} = (0, 0, 0)$ ou $\vec{v} = (0, 0, 0)$ e, portanto, $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$. Como $||\vec{u}|| = 0$ ou $||\vec{v}|| = 0$, segue a igualdade

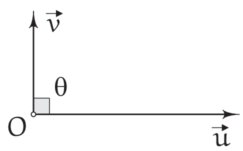
$$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = ||\vec{u}||.||\vec{v}||\cos(\theta)}.$$

É conveniente lembrar, neste caso, que o fato do vetor nulo ser considerado ortogonal a qualquer outro vetor, convencionamos que $\theta = \frac{\pi}{2}$. Isto faz com que no segundo membro da equação tenhamos, no mínimo, dois fatores iguais a zero, uma vez que $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. □

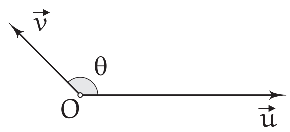
Observemos que, nas condições da Proposição 2.10 acima, dados dois vetores não nulos $\vec{u}$ e $\vec{v}$, podemos deduzir:
(**i**) o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é agudo ou nulo se, e somente se, $\vec{u}\cdot\vec{v} > 0$;
(**ii**) o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é reto se, e somente se, $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$;
(**iii**) o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é obtuso ou raso se, e somente se, $\vec{u}\cdot\vec{v} < 0$.



$\vec{u}\cdot\vec{v} > 0$



$\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$



$\vec{u}\cdot\vec{v} < 0$

O item (**ii**), juntamente com o fato de que vetores nulos são ortogonais a quaisquer vetores e fazem com que o produto escalar seja igual a zero, permite que escrevemos o seguinte corolário (consequência) da Proposição 2.10.

Corolário 2.1 Seja $Oxyz$ sistema de coordenadas cartesianas ortogonais no espaço com base canônica $\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$. O vetor $\vec{u}$ é ortogonal ao vetor $\vec{v}$ se, e somente se, seu produto escalar é zero. Em símbolos:

$$\boxed{\vec{u} \perp \vec{v} \Longleftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = 0}.$$

Exemplo 2.17 Calculemos a medida θ do ângulo entre os vetores
(**a**) $\vec{u} = (2, 0, -3)$ e $\vec{v} = (1, 1, 1)$.
(**b**) $\vec{u} = (1, 10, 200)$ e $\vec{v} = (-10, 1, 0)$.

Item (**a**). Para vetores não nulos podemos escrever:

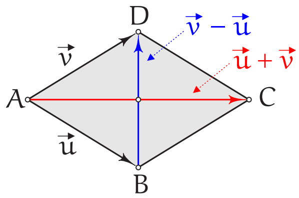
$$\cos(\theta) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{||\vec{u}||.||\vec{v}||} = \frac{2.1+0.1+(-3).1}{\sqrt{2^2+0^2+(-3)^2}.\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{-1}{\sqrt{13}\sqrt{3}} = \frac{-1}{\sqrt{39}} \Rightarrow \boxed{\theta = \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{39}}\right) \cong 1,7316 \text{ rad} \cong 99,213^\circ}.$$

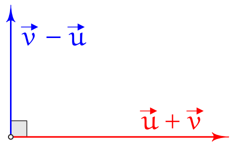
Item (**b**). Analogamente:

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{||\vec{u}||.||\vec{v}||} = \frac{-10+10+0}{\sqrt{1^2+10^2+200^2}\sqrt{(-10)^2+1^2+0^2}} = 0 \Rightarrow \boxed{\theta = \frac{\pi}{2} \text{ rad}} \text{ (ou seja, } \vec{u} \text{ e } \vec{v} \text{ são ortogonais).}$$

Exemplo 2.18 Provemos que as diagonais de um losango cortam-se formando ângulo reto.

Sejam $ABCD$ um losango com AC e BD diagonais. Consideremos os vetores $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$. Logo, $\vec{u}+\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ e $\vec{v}-\vec{u} = \overrightarrow{BD}$.





Se mostrarmos que $\overrightarrow{AC}$ é ortogonal a $\overrightarrow{BD}$, resolvemos o problema. Para tanto, basta mostrar, de acordo com o Corolário 2.1, que o produto escalar entre $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{BD}$ é nulo. Vejamos:

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD} = (\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{v}-\vec{u}) = \vec{u}\cdot\vec{v} - \vec{u}\cdot\vec{u} + \vec{v}\cdot\vec{v} - \vec{v}\cdot\vec{u} = -||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2.$$

Mas $ABCD$ é um losango, portanto, possui os quatro lados com mesmo comprimento. Logo, $AB = AD$, ou seja, $||\overrightarrow{AB}|| = ||\overrightarrow{AD}||$. Portanto, $||\vec{u}|| = ||\vec{v}||$.

Desta forma:

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD} = 0$$

e, portanto, as diagonais de um losango são ortogonais.

Uma curiosidade.

Vimos que o produto escalar, da forma como definimos, está relacionado com a medida do ângulo entre dois vetores.

Haveria outra forma de definir o produto escalar de modo a obter uma equação simples envolvendo a medida usual de ângulo entre vetores? A resposta é não. Vejamos como justificar isso.

Trabalhando com coordenadas na base canônica do espaço, consideremos dois vetores não nulos $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$. Suponhamos, ainda que os ângulo entre eles mede θ e não é nem nulo e nem raso ($0 < \theta < \pi$).

Chamando $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$, sendo $O = (0, 0, 0)$, temos um triângulo OAB tal que o ângulo interno do vértice O mede θ. Além disso,

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \vec{v} - \vec{u} = (x_2, y_2, z_2) - (x_1, y_1, z_1) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$

Pela Lei dos Cossenos aplicada ao triângulo OAB:

$$\begin{aligned}
||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 - 2||\vec{u}||.||\vec{v}||\cos(\theta) = ||\vec{v}-\vec{u}||^2 &= \left(\sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}\right)^2 \\
&= (x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2 \\
&= (x_2^2 - 2x_2x_1 + x_1^2) + (y_2^2 - 2y_2y_1 + y_1^2) + (z_2^2 - 2z_2z_1 + z_1^2) \\
&= (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) + (x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) - 2(x_2x_1 + y_2y_1 + z_2z_1) \\
&= ||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 - 2(x_2x_1 + y_2y_1 + z_2z_1) \Rightarrow \\
&\boxed{||\vec{u}||.||\vec{v}||\cos(\theta) = x_2x_1 + y_2y_1 + z_2z_1},
\end{aligned}$$

o que faz com que a definição de produto escalar que demos, $\vec{u}\cdot\vec{v} = x_2x_1 + y_2y_1 + z_2z_1$, esteja de acordo com a Proposição 2.10 e seja bastante conveniente quando a intenção é trabalhar com ângulos.

Exemplo 2.19 (**Desigualdade de Cauchy-Schwarz**) Mostremos que $|\vec{u}\cdot\vec{v}| \leqslant ||\vec{u}||.||\vec{v}||$.

Pela Proposição 2.10 temos $\vec{u}\cdot\vec{v} = ||\vec{u}||.||\vec{v}||\cos(\theta)$, sendo θ a medida do ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Logo,

$$|\vec{u}\cdot\vec{v}| = |\ ||\vec{u}||.||\vec{v}||\cos(\theta)\ | = ||\vec{u}||.||\vec{v}||.|\cos(\theta)\ |$$

Mas $-1 \leqslant \cos(\theta) \leqslant 1$. Portanto, $0 \leqslant |\cos(\theta)| \leqslant 1$, o que permite a conclusão da desigualdade:

$$|\cos(\theta)| \leqslant 1 \Rightarrow ||\vec{u}||.||\vec{v}||.|\cos(\theta)| \leqslant ||\vec{u}||.||\vec{v}|| \Rightarrow \boxed{|\vec{u}\cdot\vec{v}| \leqslant ||\vec{u}||.||\vec{v}||}.$$

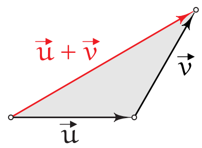
Exemplo 2.20 (**Desigualdade triangular**) Mostremos que $||\vec{u}+\vec{v}|| \leqslant ||\vec{u}|| + ||\vec{v}||$.

Pelo Exemplo 2.15 temos

$$||\vec{u}+\vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + ||\vec{v}||^2 \Rightarrow |\ ||\vec{u}+\vec{v}||^2| = |\ ||\vec{u}||^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + ||\vec{v}||^2| \Rightarrow ||\vec{u}+\vec{v}||^2 \leqslant ||\vec{u}||^2 + 2|\vec{u}\cdot\vec{v}| + ||\vec{v}||^2.$$

Pelo Exemplo 2.19 temos $|\vec{u}\cdot\vec{v}| \leqslant ||\vec{u}||.||\vec{v}||$. Logo,

$$||\vec{u}+\vec{v}||^2 \leqslant ||\vec{u}||^2 + 2|\vec{u}\cdot\vec{v}| + ||\vec{v}||^2 \leqslant ||\vec{u}||^2 + 2||\vec{u}||.||\vec{v}|| + ||\vec{v}||^2 = (||\vec{u}|| + ||\vec{v}||)^2 \Rightarrow$$
$$\boxed{||\vec{u}+\vec{v}|| \leqslant ||\vec{u}|| + ||\vec{v}||}.$$



Sejam $\vec{u}$ um vetor não nulo e $\mathcal{B} = \{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ a base canônica do espaço cartesiano. Os ângulos formados pelo vetor $\vec{u}$ com cada um dos vetores da base canônica são chamados de ***ângulos diretores*** de $\vec{u}$. Os cossenos das medidas dos ângulos diretores de $\vec{u}$ possuem uma relação interessante, conforme veremos abaixo, e são chamados de ***cossenos diretores*** de $\vec{u}$.

Exemplo 2.21 (**Cossenos diretores**) Sejam α,β e γ as medidas dos ângulos diretores do vetor $\vec{u} = (x, y, z)$, $\vec{u} \neq \vec{0}$, com os vetores $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$ da base canônica, respectivamente. Mostremos os seguintes itens envolvendo os cossenos diretores de $\vec{u}$:

(**a**) $\begin{cases} \cos(\alpha) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ \cos(\beta) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ \cos(\gamma) = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \end{cases}$

(**b**) $\cos^2(\alpha) + \cos^2(\beta) + \cos^2(\gamma) = 1$.

(**c**) $\frac{\vec{u}}{||\vec{u}||} = (\cos(\alpha), \cos(\beta), \cos(\gamma))$ ou, equivalentemente, $\vec{u} = (||\vec{u}||\cos(\alpha), ||\vec{u}||\cos(\beta), ||\vec{u}||\cos(\gamma))$.

De fato:

- Quanto ao Item (**a**), temos $\vec{i} = (1, 0, 0)$. Logo, pela Proposição 2.10,

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{i}}{||\vec{u}||.||\vec{i}||} = \frac{(x,y,z)\cdot(1,0,0)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}.\sqrt{1^2+0^2+0^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

De modo análogo para $\cos(\beta)$ e $\cos(\gamma)$.

- Quanto ao Item (**b**), temos:

$$\cos^2(\alpha) + \cos^2(\beta) + \cos^2(\gamma) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)^2 + \left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)^2$$
$$= \frac{x^2}{x^2+y^2+z^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2+z^2} + \frac{z^2}{x^2+y^2+z^2} = \frac{x^2+y^2+z^2}{x^2+y^2+z^2} = 1$$

- Quanto ao Item (**c**), temos:

$$\frac{\vec{u}}{||\vec{u}||} = \frac{(x,y,z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\cos(\alpha), \sqrt{x^2+y^2+z^2}\cos(\beta), \sqrt{x^2+y^2+z^2}\cos(\gamma)\right)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}; \text{ (Item (a))}$$
$$= \frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}(\cos(\alpha),\cos(\beta),\cos(\gamma))}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = (\cos(\alpha), \cos(\beta), \cos(\gamma)).$$

Observações:

No Item (**a**) do Exemplo 2.21 acima, o produto escalar fornece um modo muito simples de calcular as medidas dos ângulos de um vetor com os vetores da base canônica. Este mesmo exercício, sem o uso do produto escalar, já não é tão simples de resolver.

O Item (**b**) pode ser usado como uma condição para a existência de vetores, dados os ângulos diretores. Para que o vetor exista, a equação tem que ser satisfeita.

No Item (**c**) é interessante notar que as coordenadas do *versor* de um vetor não nulo $\vec{u}$ são, exatamente, os cossenos diretores de $\vec{u}$.

Exemplo 2.22 Seja $\vec{u} = \left(1, -3, \sqrt{6}\right)$. Calculemos seus cossenos diretores e verifiquemos que a soma de seus quadrados é, realmente, igual a 1.

Pelo Item (**a**) do Exemplo 2.21 acima:

$$\begin{cases} \cos(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{1^2+(-3)^2+\left(\sqrt{6}\right)^2}} = \frac{1}{4} \\ \cos(\beta) = \frac{-3}{\sqrt{1^2+(-3)^2+\left(\sqrt{6}\right)^2}} = -\frac{3}{4} \\ \cos(\gamma) = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{1^2+(-3)^2+\left(\sqrt{6}\right)^2}} = \frac{\sqrt{6}}{4} \end{cases}$$

Temos

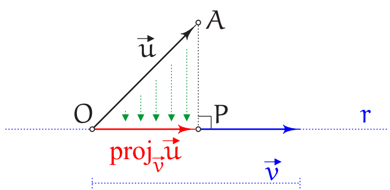
$$\cos^2(\alpha) + \cos^2(\beta) + \cos^2(\gamma) = \left(\tfrac{1}{4}\right)^2 + \left(-\tfrac{3}{4}\right)^2 + \left(\tfrac{\sqrt{6}}{4}\right)^2 = \tfrac{1}{16} + \tfrac{9}{16} + \tfrac{6}{16} = 1.$$

Vetor Projeção Ortogonal

Consideremos dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ no espaço, sendo $\vec{v} \neq \vec{0}$. Tomemos ambos os vetores com a mesma origem O. Chamemos $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ e r a reta suporte de $\vec{v}$ passando por O (ou seja, r é a reta paralela a $\vec{v}$ passando por O).

Seja P a projeção ortogonal do ponto A na reta r, isto é, P é o pé da perpendicular baixada de A até a reta r.

O vetor $\overrightarrow{OP}$ é chamado de ***vetor projeção ortogonal*** de $\vec{u}$ na direção de $\vec{v}$ e escrevemos $\text{proj}_{\vec{v}}\,\vec{u}$.



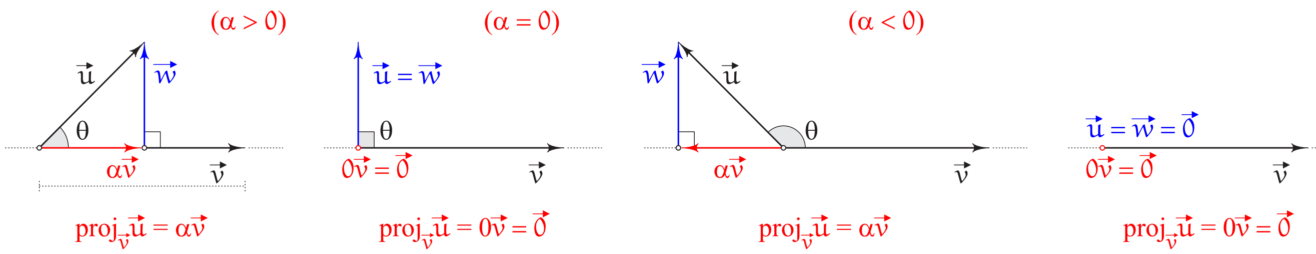
A próxima proposição fornece uma expressão para o vetor projeção ortogonal em termos do produto escalar.

Proposição 2.11 (**Vetor projeção ortogonal**) Seja $Oxyz$ sistema de coordenadas cartesianas ortogonais no espaço com base canônica $\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$. Sejam $\vec{u}$ vetor qualquer e $\vec{v} \neq \vec{0}$. Então, o vetor projeção ortogonal de $\vec{u}$ na direção do vetor $\vec{v}$ é dado por

$$\boxed{\text{proj}_{\vec{v}}\,\vec{u} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{||\vec{v}||^2}\vec{v}}.$$

Demonstração da Proposição 2.11.

O vetor projeção ortogonal $\text{proj}_{\vec{v}}\,\vec{u}$ é paralelo a $\vec{v}$. Logo, pela Proposição 2.3, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\text{proj}_{\vec{v}}\,\vec{u} = \alpha\vec{v}$.



Façamos $\vec{w} = \vec{u} - \alpha\vec{v}$. Temos $\vec{w} \perp \vec{v}$ e, pelo Corolário 2.1, temos:

$$\vec{w}\cdot\vec{v} = 0 \Rightarrow (\vec{u} - \alpha\vec{v})\cdot\vec{v} = 0 \Rightarrow (\vec{u}\cdot\vec{v}) - \alpha(\vec{v}\cdot\vec{v}) = 0 \Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} - \alpha||\vec{v}||^2 = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{||\vec{v}||^2}.$$

Portanto, $\text{proj}_{\vec{v}}\,\vec{u} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{||\vec{v}||^2}\vec{v}$. $\square$

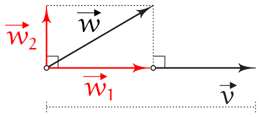
Exemplo 2.23 Achemos as coordenadas da projeção do vetor $\vec{u} = (1, -1, 2)$ na direção do vetor $\vec{v} = (3, -1, 1)$.

Pela Proposição 2.11 temos $\text{proj}_{\vec{v}}\,\vec{u} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{||\vec{v}||^2}\vec{v}$. Logo:

$$\text{proj}_{\vec{v}}\,\vec{u} = \frac{(1,-1,2)\cdot(3,-1,1)}{\left(\sqrt{3^2+(-1)^2+1^2}\right)^2}\,(3,-1,1) \Rightarrow \boxed{\text{proj}_{\vec{v}}\,\vec{u} = \left(\tfrac{18}{11}, -\tfrac{6}{11}, \tfrac{6}{11}\right)}.$$

Exemplo 2.24 Escrevamos $\vec{w} = (-1, -3, 2)$ como soma de dois vetores $\vec{w}_1$ e $\vec{w}_2$, sendo $\vec{w}_1$ paralelo a $\vec{v} = (0, 1, 3)$ e $\vec{w}_2$ ortogonal a este último.

O vetor $\vec{w}_1$ é a projeção ortogonal de $\vec{w}$ na direção de $\vec{v}$.



Logo:

$$\vec{w}_1 = \text{proj}_{\vec{v}}\,\vec{w} = \frac{\vec{w}\cdot\vec{v}}{||\vec{v}||^2}\vec{v} = \frac{(-1,-3,2)\cdot(0,1,3)}{\left(\sqrt{0^2+1^2+3^2}\right)^2}\,(0,1,3) = \left(0, \tfrac{3}{10}, \tfrac{9}{10}\right)$$

O vetor $\vec{w}_2$ é tal que

$$\vec{w} = \vec{w}_1 + \vec{w}_2 \Rightarrow \vec{w}_2 = (-1,-3,2) - \left(0, \tfrac{3}{10}, \tfrac{9}{10}\right) = \left(-1, -\tfrac{33}{10}, \tfrac{11}{10}\right)$$

Observemos que, realmente, $\vec{w}_1 \perp \vec{w}_2$ pois $\vec{w}_1 \cdot \vec{w}_2 = 0$.

2.4 Produto Vetorial

Nesta seção vamos definir um novo produto entre vetores, chamado *produto vetorial* que, ao contrário do produto escalar e, como o próprio nome diz, tem por resultado um vetor. Veremos adiante que produto vetorial está relacionado com áreas, o que faz com ele seja de extrema importância em várias áreas da Matemática. Vamos à definição:

Seja $Oxyz$ sistema de coordenadas cartesianas ortogonais no espaço com base canônica $\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$. Sejam $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ vetores no espaço. Definimos o ***produto vetorial*** *de $\vec{u}$ por $\vec{v}$ (nessa ordem) como sendo o vetor*

$$\boxed{\vec{u}\times\vec{v} = \det\begin{bmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{bmatrix}\vec{i} - \det\begin{bmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{bmatrix}\vec{j} + \det\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix}\vec{k} = \left(\det\begin{bmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{bmatrix}, -\det\begin{bmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{bmatrix}, \det\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix}\right)}.$$

Observação: A definição do produto vetorial sugere a aplicação do *Desenvolvimento de Laplace para cálculo do determinante* na primeira linha da matriz com entradas mistas

$$\begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{bmatrix}.$$

Estamos empregando a palavra "sugere" e "entradas mistas" porque a matriz acima possui a primeira linha constituída de vetores, enquanto que as demais linhas são números reais. O desenvolvimento de Laplace geralmente é aplicado em matrizes quadradas com entradas numéricas e, portanto, o resultado é um número, algo que não ocorre no caso em que estamos considerando.

Com a observação acima e com uma boa dose de abuso de notação matemática, podemos facilitar o cálculo do produto vetorial aplicando a *Regra de Sarrus* (que vale apenas para o cálculo de determinantes de matrizes 3×3) na matriz mista acima, ou seja,

$$\boxed{\vec{u}\times\vec{v} \equiv \det\begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{bmatrix}}.$$

Exemplo 2.25 Calculemos $\vec{u}\times\vec{v}$, sendo $\vec{u} = (1, 2, 3)$ e $\vec{v} = (-1, 1, 2)$.

Pela definição dada de produto vetorial:

$$\vec{u}\times\vec{v} \equiv \det\begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \equiv (4-3)\,\vec{i} + (-3-2)\,\vec{j} + (1+2)\,\vec{k} = (1, -5, 3)\,.$$

Vejamos algumas propriedades do produto vetorial.

Proposição 2.12 (**Propriedades do produto vetorial**) Seja $Oxyz$ sistema de coordenadas cartesianas ortogonais no espaço com base canônica $\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

Sejam $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ vetores no espaço e $\alpha \in \mathbb{R}$.

(**1**) $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$ se, e somente se, $\vec{u}$ é paralelo a $\vec{v}$. Particularmente, a propriedade é verdadeira quando $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ é o vetor nulo.

(**2**) $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$ (portanto, o produto vetorial não é comutativo);

(**3**) $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$ (distributiva à direita) e $(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = \vec{u} \times \vec{w} + \vec{v} \times \vec{w}$ (distributiva à esquerda);

(**4**) $\alpha\, (\vec{u} \times \vec{v}) = (\alpha\vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (\alpha\vec{v})$ (associativa em relação ao produto por escalar);

(**5**) $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$ (comutatividade em relação aos produtos escalar e vetorial)

Observemos que no Item (**5**) das propriedades do produto vetorial acima, $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$ é um número e não um vetor. Além disso, como não faz sentido a expressão $(\vec{u} \cdot \vec{v}) \times \vec{w}$ (pois produto vetorial envolve dois vetores e não um número e um vetor), podemos omitir os parênteses e escrever esta propriedade simplesmente como $\vec{u} \cdot \vec{v} \times \vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} \cdot \vec{w}$. Veremos mais propriedades do número $\vec{u} \cdot \vec{v} \times \vec{w}$ na próxima seção.

A próxima proposição relaciona o produto vetorial a área e é de extrema importância no desenvolvimento teórico do estudo de vetores.

Proposição 2.13 (**Caracterização geométrica do produto vetorial**) Seja $Oxyz$ sistema de coordenadas cartesianas ortogonais no espaço com base canônica $\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$. Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores não paralelos no espaço. Então:

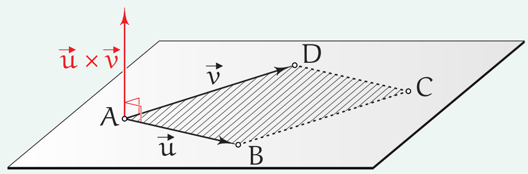
(**1**) a direção de $\vec{u} \times \vec{v}$ é ortogonal às direções de $\vec{u}$ e de $\vec{v}$ simultaneamente.

(**2**) o sentido de $\vec{u} \times \vec{v}$ satisfaz a "regra da mão direita", ou seja, $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{u} \times \vec{v}$ possuem os sentidos estabelecidos pelos dedos indicador, médio e polegar, respectivamente, da mão direita (o mesmo da base conônica $\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$). De modo rigoroso, do ponto de vista matemático, o sentido de $\vec{u} \times \vec{v}$ é tal que, escrevendo $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ e $\vec{u} \times \vec{v} = (x_3, y_3, z_3)$, então

$$\det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix} > 0.$$

(**3**) o comprimento de $\vec{u} \times \vec{v}$ é numericamente igual a <u>área</u> $\mathcal{A}\,(ABCD)$ do paralelogramo $ABCD$ gerado por (ou baseado em) $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$, ou seja,

$$\boxed{\mathcal{A}\,(ABCD) = \|\vec{u} \times \vec{v}\|}$$



Exemplo 2.26 Dados os vetores $\vec{u} = (3, -1, 2)$ e $\vec{v} = (-2, 2, 1)$, calculemos:
(**a**) a área do paralelogramo determinado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$.
(**b**) a altura do paralelogramo relativa à base definida pelo vetor $\vec{v}$.

Temos no Item (**a**):

$$\vec{u} \times \vec{v} \equiv \det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \equiv (-1-4)\,\vec{i} + (-4-3)\,\vec{j} + (6-2)\,\vec{k} = (-5, -7, 4)\,.$$

Pela Proposição 2.13 temos:

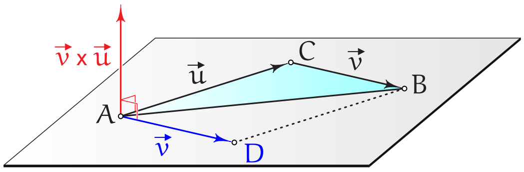
$$\mathcal{A} = \|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\,(-5, -7, 4)\,\| = \sqrt{(-5)^2 + (-7)^2 + 4^2} = \sqrt{25 + 49 + 16} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}.$$

Quanto ao Item (**b**), devemos lembrar, da Geometria, que a área de um paralelogramo é o produto do comprimento da base pela altura h. Neste caso, o comprimento da base é $\|\vec{v}\| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 1^2} = 3$.

De $\mathcal{A} = \|\vec{v}\|h$ temos, aproveitando o Item (**a**), que $3\sqrt{10} = 3h$, ou seja, $h = \sqrt{10}$.

Exemplo 2.27 Calculemos a área do triângulo ABC sendo $\overrightarrow{AC} = (1, 1, 3)$ e $\overrightarrow{CB} = (-1, 1, 0)$.

Consideremos a figura abaixo:



Tomemos $\vec{u} = \overrightarrow{AC}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{CB}$. A área $\mathcal{A}(ABC)$ do triângulo ABC é metade da área do paralelogramo $ADBC$, sendo $\overrightarrow{AD} = \vec{v} = \overrightarrow{CB}$.

De acordo com a Proposição 2.13, a área do paralelogramo $ADBC$, gerado por $\vec{v}$ e $\vec{u}$ é, numericamente, o comprimento do vetor $\vec{v} \times \vec{u} = \overrightarrow{CB} \times \overrightarrow{AC}$.

Logo,

$$\mathcal{A}(ABC) = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{CB} \times \overrightarrow{AC}\|.$$

Mas,

$$\overrightarrow{CB} \times \overrightarrow{AC} \equiv \det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \equiv 3\vec{i} + 3\vec{j} + (-1-1)\vec{k} = (3, 3, -2).$$

Conclusão: $\mathcal{A}(ABC) = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{CB} \times \overrightarrow{AC}\| = \frac{1}{2}\|(3,3,-2)\| = \frac{1}{2}\sqrt{3^2 + 3^2 + (-2)^2} = \frac{\sqrt{22}}{2}$.

Às vezes, é útil calcularmos o comprimento do vetor produto vetorial em função da medida θ do ângulo entre os vetores envolvidos. A próxima proposição apresenta essa fórmula.

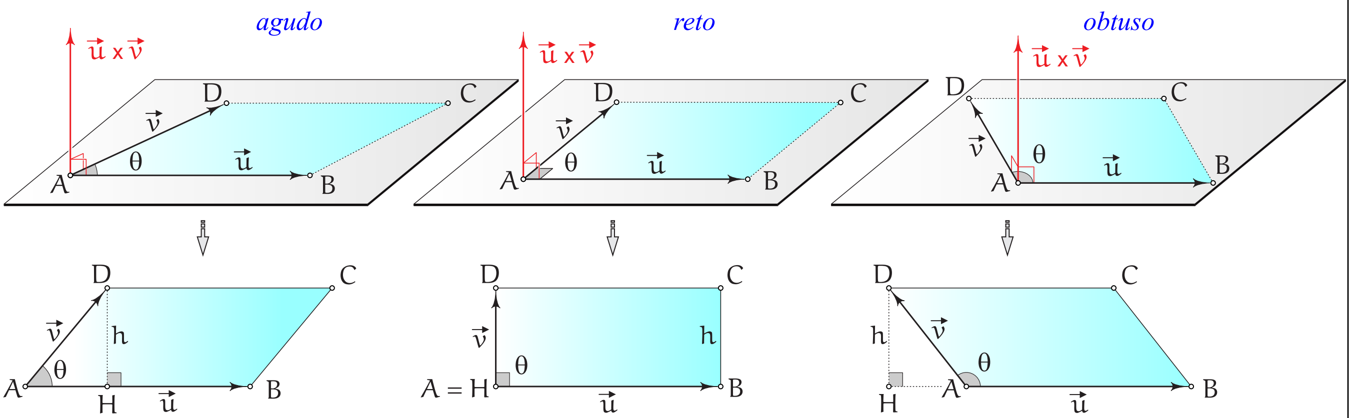
Proposição 2.14 Seja $Oxyz$ sistema de coordenadas cartesianas ortogonais no espaço com base canônica $\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$. Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores não paralelos e $0 < \theta < \pi$ a medida do ângulo, em radianos, entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Então:

$$\boxed{\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\| \operatorname{sen}(\theta)}.$$

Demonstração da Proposição 2.14.

Vamos dividir a demonstração em três casos:

• **(1)** Ângulo agudo: $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.
Observemos a figura abaixo à esquerda.



A área $\mathcal{A}$ do paralelogramo gerado pelos vetores $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$ é dada por $\mathcal{A} = \|\vec{u}\|.h$, sendo h a altura do paralelogramo baixada do vértice D ao lado AB.

Da trigonometria aplicada ao triângulo AHD temos $\operatorname{sen}(\theta) = \frac{DH}{AD} = \frac{h}{\|\vec{v}\|} \Rightarrow h = \|\vec{v}\| \operatorname{sen}(\theta)$.

Portanto, $\mathcal{A} = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\| \operatorname{sen}(\theta)$.

Pelo Item (**3**) da Proposição 2.13, temos $\mathcal{A} = \|\vec{u} \times \vec{v}\|$.

Portanto,

$$\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\| \operatorname{sen}(\theta).$$

• **(2)** Ângulo reto: $\theta = \frac{\pi}{2}$. Observemos a figura acima ao centro.

Neste caso, o paralelogramo gerado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é, na verdade, um retângulo. Sua área é, portanto, dada por $\mathcal{A} = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|$.

Como $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, então podemos escrever $\mathcal{A} = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\| \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Pelo Item (**3**) da Proposição 2.13, temos $\mathcal{A} = ||\vec{u} \times \vec{v}||$.
Portanto,

$$||\vec{u} \times \vec{v}|| = ||\vec{u}||.||\vec{v}||\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

• (**3**) Ângulo obtuso: $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$.
Observemos a figura acima à direita.
A área $\mathcal{A}$ do paralelogramo gerado pelos vetores $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$ é dada por $\mathcal{A} = ||\vec{u}||.h$, sendo h a altura do paralelogramo baixada do vértice D à reta que contém o lado AB (neste caso, o ponto H não está no segmento AB).
Da trigonometria aplicada ao triângulo AHD temos $\text{sen}\,(\pi - \theta) = \frac{DH}{AD} = \frac{h}{||\vec{v}||} \Rightarrow h = ||\vec{v}||\,\text{sen}\,(\pi - \theta)$.
Mas $\text{sen}\,(\pi - \theta) = \text{sen}\,(\pi)\cos(\theta) - \text{sen}\,(\theta)\cos(\pi) = \text{sen}\,(\theta)$.
Portanto, $h = ||\vec{v}||\,\text{sen}\,(\theta)$, implicando em $\mathcal{A} = ||\vec{u}||.||\vec{v}||\,\text{sen}\,(\theta)$.
Pelo Item (**3**) da Proposição 2.13, temos $\mathcal{A} = ||\vec{u} \times \vec{v}||$.
Portanto,

$$||\vec{u} \times \vec{v}|| = ||\vec{u}||.||\vec{v}||\,\text{sen}\,(\theta).$$

Concluimos que, em qualquer situação:

$$\boxed{||\vec{u} \times \vec{v}|| = ||\vec{u}||.||\vec{v}||\,\text{sen}\,(\theta)},$$

como queríamos. □

Exemplo 2.28 A medida, em radianos, do ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é $\frac{\pi}{6}$. Sendo $||\vec{u}|| = 1$ e $||\vec{v}|| = 7$, calculemos $||\vec{u} \times \vec{v}||$ e $\left|\left|\frac{1}{3}\vec{u} \times \frac{3}{4}\vec{v}\right|\right|$.

Utilizando a Proposição 2.14 acima temos:
• No primeiro caso: $||\vec{u} \times \vec{v}|| = ||\vec{u}||.||\vec{v}||\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1.7.\frac{1}{2} = \frac{7}{2}$.

• No segundo caso: $\left|\left|\frac{1}{3}\vec{u} \times \frac{3}{4}\vec{v}\right|\right| = \frac{1}{3}.\frac{3}{4}.||\vec{u} \times \vec{v}|| = \frac{1}{3}.\frac{3}{4}.\frac{7}{2} = \frac{7}{8}$.

Exemplo 2.29 Seja $\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ base canônica do sistema de coordenadas cartesianas ortogonais $Oxyz$ do espaço. Mostremos que $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$, $\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$ e $\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$.

No sistema de coordenadas temos $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$ e $\vec{k} = (0, 0, 1)$. Logo,

$$\vec{i} \times \vec{j} \equiv \det\begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \equiv 0\vec{i} + 0\vec{j} + 1\vec{k} = (0, 0, 1) = \vec{k} \quad ; \quad \vec{j} \times \vec{k} \equiv \det\begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \equiv 1\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k} = (1, 0, 0) = \vec{i}$$

$$\vec{k} \times \vec{i} \equiv \det\begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \equiv 0\vec{i} + 1\vec{j} + 0\vec{k} = (0, 1, 0) = \vec{j}$$

Observação: Quando uma base ortonormal e ordenada cumpre a propriedade apresentada por este exemplo, ou seja, quando, respeitando-se a ordem dos vetores da base, o produto vetorial de dois vetores consecutivos é o seguinte, formando um ciclo ordenado e fechado, dizemos que a base possui ***orientação positiva***. Logo, $\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ possui orientação positiva.

$$\begin{array}{ccc} & \vec{k} & \\ \swarrow & & \nwarrow \\ \vec{i} & \longrightarrow & \vec{j} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \vec{i} \to \vec{j} \to \vec{k} \to \vec{i} \to \vec{j} \to \vec{k} \quad \to \quad \cdots \\ \hline\hline \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k} \\ \qquad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i} \\ \qquad\qquad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j} \\ \qquad\qquad\qquad \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k} \quad \textit{e se repete ...} \end{array}$$

No produto vetorial não vale ...

• (**1**) No produto vetorial não vale a *propriedade comutativa*, ou seja, geralmente $\vec{u} \times \vec{v} \neq \vec{v} \times \vec{u}$.
Os próprios vetores $\vec{i}$ e $\vec{j}$ da base canônica $\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ servem de exemplo: façamos $\vec{u} = \vec{i}$ e $\vec{v} = \vec{j}$. Logo,

$\vec{u} \times \vec{v} = \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$ (exemplo acima) e

$$\vec{v} \times \vec{u} = \vec{j} \times \vec{i} \equiv \det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \equiv 0\vec{i} + 0\vec{j} - 1\vec{k} = (0, 0, -1) = -\vec{k}$$

Conclusão: $\vec{u} \times \vec{v} \neq \vec{v} \times \vec{u}$.

• **(2)** No produto vetorial não vale a *propriedade associativa*, ou seja, geralmente $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} \neq \vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$.

Mais uma vez, os vetores $\vec{i}$ e $\vec{j}$ da base canônica $\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ servem de exemplo: façamos $\vec{u} = \vec{v} = \vec{i}$ e $\vec{w} = \vec{j}$. Logo

$$\begin{cases} (\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = \left(\vec{i} \times \vec{i}\right) \times \vec{j} = \vec{0} \times \vec{j} = \vec{0} \text{ (faça!)} \\ \vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = \vec{i} \times \left(\vec{i} \times \vec{j}\right) = \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j} \text{ (faça!)} \end{cases}.$$

Conclusão: $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} \neq \vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$.

• **(3)** No produto vetorial não vale a "*Lei do Cancelamento*", ou seja, geralmente $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{u} \times \vec{w}$ não implica em $\vec{v} = \vec{w}$.

Eis um exemplo: $\vec{u} = \vec{w} = (1, 0, 0)$ e $\vec{v} = (6, 0, 0)$. Temos $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0} = \vec{u} \times \vec{w}$ (faça!) e, no entanto, $\vec{v} \neq \vec{w}$.

2.5 Produto Misto

Vimos que é possível definir duas operações de produto distintas envolvendo vetores: o *produto escalar* (que é número) e o *produto vetorial* (que é vetor). Nesta seção iremos definir o *produto misto*. Na verdade, não trata-se de uma nova operação entre os vetores, mas apenas combinação dos dois produtos já definidos. A motivação vem da propriedade $\vec{u} \cdot \vec{v} \times \vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} \cdot \vec{w}$, sendo $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ vetores quaisquer do espaço (esta propriedade é o Item (**5**) da Proposição 2.12, vista na Seção 2.4 acima). Nesta propriedade podemos constatar que, desde que a ordem dos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ não mude, podemos comutar os produtos escalar e vetorial. Sendo assim, temos a motivação para definir o chamado *produto misto*, conforme abaixo:

Seja $Oxyz$ *sistema de coordenadas cartesianas ortogonais no espaço com base canônica* $\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.
O número real $\vec{u} \cdot \vec{v} \times \vec{w}$ *é chamado de* ***produto misto*** *dos vetores* $\vec{u}$, $\vec{v}$ *e* $\vec{w}$ *(nesta ordem).*

Em alguns textos, o produto misto acima é indicado por $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$.

O produto misto possui uma propriedade geométrica impressionante. Por mais incrível que possa parecer, ele está relacionado com volume no espaço, o que torna seu estudo extremamente importante. Mas antes, vejamos um modo simples de calcular o produto misto sem ter que fazer os dois produtos (escalar e vetorial) indicados em sua definição.

Proposição 2.15 Seja $Oxyz$ sistema de coordenadas cartesianas ortogonais no espaço com base canônica $\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$. *Se* $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ *e* $\vec{w} = (x_3, y_3, z_3)$, *então*

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} \times \vec{w} = \det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix}}.$$

Exemplo 2.30 Calculemos o produto misto de $\vec{u} = (-1, -3, 1)$, $\vec{v} = (1, 0, 1)$ e $\vec{w} = (2, 1, 1)$.

Temos:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} \times \vec{w} = \det \begin{bmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 0 + 1 - 6 - 0 + 3 + 1 = -1.$$

Agora, algumas propriedades algébricas do produto misto.

Proposição 2.16 (**Propriedades do produto misto**). Seja $Oxyz$ sistema de coordenadas cartesianas ortogonais no espaço com base canônica $\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

(**1**) Sejam $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ vetores no espaço. Então, $\vec{u} \cdot \vec{v} \times \vec{w} = 0$ se, e somente se, os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ forem coplanares. Particularmente, se algum dos três vetores for nulo, ou se dois dos vetores forem paralelos, temos o produto misto nulo.

(**2**) Se dois vetores forem comutados no produto misto $\vec{u} \cdot \vec{v} \times \vec{w}$, então o produto misto muda de sinal, ou seja,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} \times \vec{w} = -\vec{v} \cdot \vec{u} \times \vec{w} = -\vec{w} \cdot \vec{v} \times \vec{u} = -\vec{u} \cdot \vec{w} \times \vec{v}.$$

(**3**) Sejam $\vec{u}$, $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{v}$, $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{w}$, $\vec{w}_1$ e $\vec{w}_2$ vetores no espaço. Então,

$$\begin{cases} (\vec{u}_1 + \vec{u}_2) \cdot \vec{v} \times \vec{w} = \vec{u}_1 \cdot \vec{v} \times \vec{w} + \vec{u}_2 \cdot \vec{v} \times \vec{w}; \\ \vec{u} \cdot (\vec{v}_1 + \vec{v}_2) \times \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{v}_1 \times \vec{w} + \vec{u} \cdot \vec{v}_2 \times \vec{w}; \\ \vec{u} \cdot \vec{v} \times (\vec{w}_1 + \vec{w}_2) = \vec{u} \cdot \vec{v} \times \vec{w}_1 + \vec{u} \cdot \vec{v} \times \vec{w}_2. \end{cases}$$

(**4**) Sejam $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ vetores no espaço e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então,

$$\alpha (\vec{u} \cdot \vec{v} \times \vec{w}) = (\alpha\vec{u}) \cdot \vec{v} \times \vec{w} = \vec{u} \cdot (\alpha\vec{v}) \times \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{v} \times (\alpha\vec{w}).$$

(**5**) Sejam $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ vetores no espaço e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Então,

$$\begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{v} \times \vec{w} = (\vec{u} + \alpha\vec{v} + \beta\vec{w}) \cdot \vec{v} \times \vec{w}; \\ \vec{u} \cdot \vec{v} \times \vec{w} = \vec{u} \cdot (\vec{v} + \alpha\vec{u} + \beta\vec{w}) \times \vec{w}; \\ \vec{u} \cdot \vec{v} \times \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{v} \times (\vec{w} + \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}). \end{cases}$$

Exemplo 2.31 Mostremos que $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{v} + \vec{w}) \times (\vec{w} + \vec{u}) = 2 (\vec{u} \cdot \vec{v} \times \vec{w})$.

Temos, de acordo com os Itens (**1**) (**2**) e (**3**) da Proposição 2.16:

$$\begin{aligned} (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{v} + \vec{w}) \times (\vec{w} + \vec{u}) &= \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) \times (\vec{w} + \vec{u}) + \vec{v} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) \times (\vec{w} + \vec{u}) \\ &= \vec{u} \cdot \vec{v} \times (\vec{w} + \vec{u}) + \vec{u} \cdot \vec{w} \times (\vec{w} + \vec{u}) + \vec{v} \cdot \vec{v} \times (\vec{w} + \vec{u}) + \vec{v} \cdot \vec{w} \times (\vec{w} + \vec{u}) \\ &= \vec{u} \cdot \vec{v} \times (\vec{w} + \vec{u}) + \vec{v} \cdot \vec{w} \times (\vec{w} + \vec{u}) \text{ (pois } \vec{u}, \vec{w}, \vec{w} + \vec{u} \text{ e } \vec{v}, \vec{v}, \vec{w} + \vec{u} \text{ são coplanares)} \\ &= \vec{u} \cdot \vec{v} \times \vec{w} + \vec{u} \cdot \vec{v} \times \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{w} \times \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w} \times \vec{u} \\ &= \vec{u} \cdot \vec{v} \times \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w} \times \vec{u} \text{ (pois } \vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \text{ e } \vec{v}, \vec{w}, \vec{w} \text{ são coplanares)} \\ &= \vec{u} \cdot \vec{v} \times \vec{w} + \vec{u} \cdot \vec{v} \times \vec{w} \text{ (no segundo produto misto foram duas inversões)} \\ &= 2 (\vec{u} \cdot \vec{v} \times \vec{w}), \end{aligned}$$

como queríamos.

O Item (**1**) das propriedades do produto misto apresentada na Proposição 2.16 acima permite uma consequência importante (corolário), sendo útil para verificar a coplanaridade de 4 pontos no espaço.

Dados 4 pontos A, B, C e D no espaço, podemos construir 3 vetores: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AD}$, todos com a mesma origem A. Esses 3 vetores são coplanares se, e somente se, seu produto misto é nulo, o que equivale dizer que A, B, C e D são coplanares se, e somente se, o produto misto dos 3 vetores em questão é nulo.

Sintetizamos esse resultado no corolário abaixo:

Corolário 2.2 Nas condições da Proposição 2.16 temos:

$$\boxed{A,\ B,\ C \text{ e } D \text{ são coplanares} \iff \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD} = 0}.$$

Fazendo $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$ e $D(x_4, y_4, z_4)$, o resultado acima em, termos de coordenadas, pode ser expresso do seguinte modo:

$$\boxed{A,\ B,\ C \text{ e } D \text{ são coplanares} \iff \det \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{bmatrix} = 0}.$$

É claro que, devido à equivalência, a negação é válida, ou seja, A, B, C e D não são coplanares $\iff \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD} \neq 0$.

Vejamos um exemplo.

Exemplo 2.32 Verifiquemos que os pontos $A(1, 0, 2)$, $B(-3, 7, 0)$, $C(1, 5, -3)$ e $D(-3, 12, -5)$ são coplanares.

Temos:

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = B - A = (-3, 7, 0) - (1, 0, 2) = (-4, 7, -2); \\ \overrightarrow{AC} = C - A = (1, 5, -3) - (1, 0, 2) = (0, 5, -5); \\ \overrightarrow{AD} = D - A = (-3, 12, -5) - (1, 0, 2) = (-4, 12, -7) \end{cases}.$$

Logo:

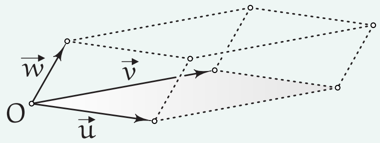
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD} = \det \begin{bmatrix} -4 & 7 & -2 \\ 0 & 5 & -5 \\ -4 & 12 & -7 \end{bmatrix} = 140 + 0 + 140 - 40 - 0 - 240 = 0,$$

ou seja, A, B, C e D são coplanares.

Por fim, o principal motivo da existência do produto misto: sua caracterização geométrica.

Proposição 2.17 (**Caracterização geométrica do produto misto**). Seja $Oxyz$ sistema de coordenadas cartesianas ortogonais no espaço com base canônica $\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$. Sejam $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ vetores não coplanares. Então, o volume $\mathcal{V}$ do paralelepípedo gerado por (ou baseado em) $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ é igual ao módulo do produto misto $\vec{u} \cdot \vec{v} \times \vec{w}$, ou seja,

$$\boxed{\mathcal{V} = |\vec{u} \cdot \vec{v} \times \vec{w}|}.$$



Paralelepípedo

Demonstração da Proposição 2.17.

Consideremos os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ e $\vec{u} \times \vec{v}$ com representantes de mesma origem O e tomemos os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ como geradores da base do paralelepípedo.

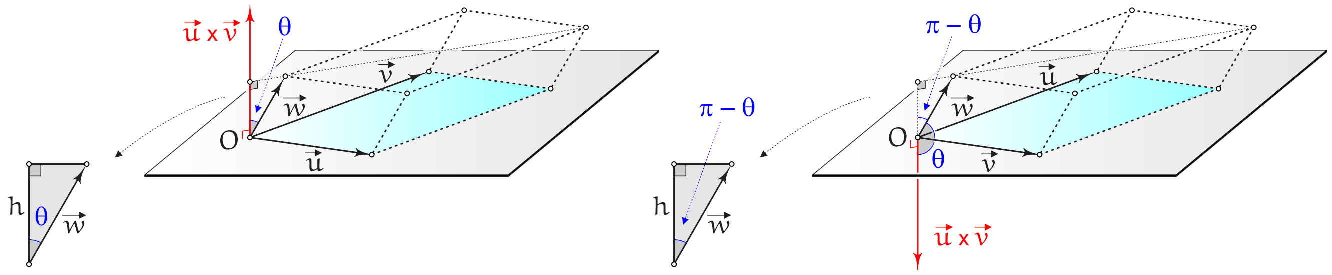
Chamemos, ainda, de θ a medida do ângulo formado por $\vec{w}$ e $\vec{u} \times \vec{v}$.

Temos duas possíveis posições em relação aos vetores $\vec{w}$ e $\vec{u} \times \vec{v}$:

(**i**) Ambos estão no mesmo lado do plano que passa pela base do paralelepípedo e, neste caso, $0 \leqslant \theta < \frac{\pi}{2}$.

(**ii**) Cada um está em um dos lados opostos do plano que passa pela base do paralelepípedo e, neste caso, $\frac{\pi}{2} < \theta \leqslant \pi$.

A figura abaixo ilustra as duas situações possíveis.



Observemos que $\theta = \frac{\pi}{2}$ não ocorre, pois os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ não são coplanares.

Lembrando que o volume $\mathcal{V}$ do paralelepípedo é dado pelo produto da área $\mathcal{A}$ de sua base por sua altura h, ou seja, $\mathcal{V} = \mathcal{A}h$, nossa preocupação será com a altura, pois pela Proposição 2.13, a área da base é dada por $\mathcal{A} = ||\vec{u} \times \vec{v}||$.

No caso (**i**) a altura h do paralelepípedo é dada por $h = ||\vec{w}|| \cos(\theta)$.

No caso (**ii**) a altura h do paralelepípedo é dada por $h = ||\vec{w}|| \cos(\pi - \theta)$.

Como

$$\cos(\pi - \theta) = \cos(\pi)\cos(\theta) + \operatorname{sen}(\pi)\operatorname{sen}(\theta) = -\cos(\theta),$$

podemos escrever, no caso (**ii**), $h = ||\vec{w}|| (-\cos(\theta))$.

Juntando os dois casos, para não nos preocuparmos com sinais, podemos escrever $h = |\, ||\vec{w}|| \cos(\theta)\, |$.

Deste modo:

$$\mathcal{V} = \mathcal{A}.h = ||\vec{u} \times \vec{v}||.|\, ||\vec{w}|| \cos(\theta)\, | = |\, ||\vec{u} \times \vec{v}||.||\vec{w}|| \cos(\theta)\, | = |\, (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}| \Rightarrow$$

$$\boxed{\mathcal{V} = |\vec{u} \cdot \vec{v} \times \vec{w}|}.$$

Na primeira linha acima, utilizamos a Proposição 2.10, que relaciona o produto escalar com a medida de ângulo entre dois vetores.

Na conclusão usamos a propriedade (**5**) da Proposição 2.12, que permite comutar o produto escalar com o produto vetorial. □

Exemplo 2.33 Calculemos o volume $\mathcal{V}$ do paralelepípedo gerado pelos vetores $\vec{u} = (1, 0, 1)$, $\vec{v} = (0, 3, 3)$ e $\vec{w} = (2, 1, 2)$.

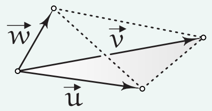
De acordo com a Proposição 2.17, o módulo do produto misto de $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ fornece o volume do paralelepípedo em questão. Logo:

$$\mathcal{V} = |\vec{u} \cdot \vec{v} \times \vec{w}| = \left| \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \right| = |6 + 0 + 0 - 6 - 0 - 3| = |-3| = 3.$$

Considerando que todo paralelepípedo pode ser decomposto em seis tetraedros, a Proposição 2.17 possui uma consequência interessante enunciada abaixo.

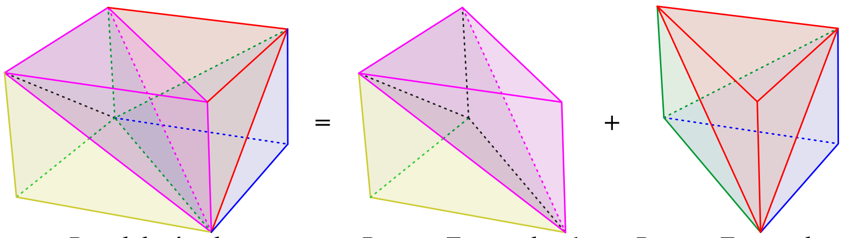
Corolário 2.3 Nas condições da Proposição 2.17, o volume $\mathcal{V}$ do tetraedro gerado por (ou baseado em) $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ é igual a um sexto do módulo do produto misto $\vec{u} \cdot \vec{v} \times \vec{w}$, ou seja,

$$\boxed{\mathcal{V} = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v} \times \vec{w}|}{6}}.$$

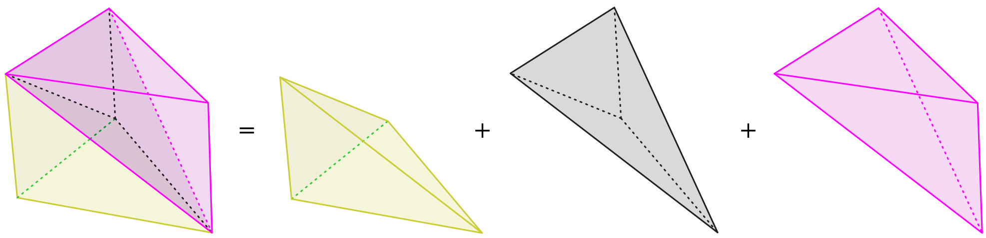


Tetraedro

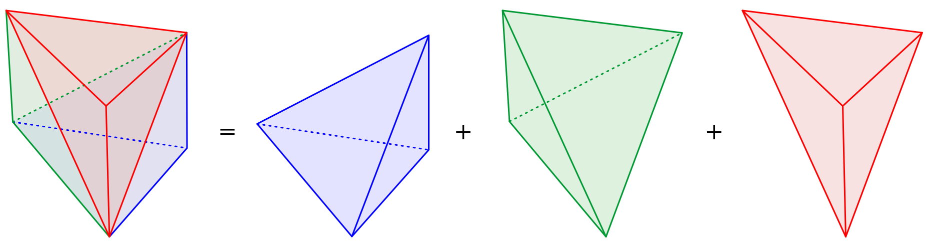
A título de ilustração, vamos "recortar" um paralelepípedo em 6 tetraedros, todos de mesmo volume. Para facilitar, vamos tomar um paralelepípedo reto retângulo (bloco retangular), mas o raciocínio é válido de modo generalizado. Comecemos dividindo o paralelepipedo em dois prismas triangulares de mesmo volume, que chamaremos de "Prisma Triangular 1" e "Prisma Triangular 2", conforme a figura abaixo.


Paralelepípedo *Prisma Triangular 1* *Prisma Triangular 2*

Em seguida, tomamos o "Prisma Triangular 1" e o dividimos em 3 pirâmides de bases triangulares, que são os tetraedros, todos de mesmo volume, e chamaremos de "Tetraedros 1, 2 e 3". Recordando que a fórmula do volume V_P de uma pirâmide é $V_P = \frac{1}{3}(\text{área da base})\,(\text{altura})$, o leitor não terá dificuldades para verificar que, realmente, os tetraedos possuem o mesmo volume. A figura abaixo apresenta o procedimento.


Prisma Triangular 1 *Tetraedro 1* *Tetraedro 2* *Tetraedro 3*

Finalmente, fazemos a mesma divisão como o "Prisma Triangular 2" e o dividimos nos "Tetraedros 4, 5 e 6", todos de mesmo volume, ficando assim, ilustrado o Corolário 2.3. A figura abaixo mostra esta última etapa.


Prisma Triangular 2 *Tetraedro 4* *Tetraedro 5* *Tetraedro 6*

Exemplo 2.34 Calculemos o volume do tetraedro $ABCD$ sendo $\overrightarrow{AB} = (1, 1, 0)$, $\overrightarrow{AC} = (0, 1, 1)$ e $\overrightarrow{AD} = (-4, 0, 0)$.

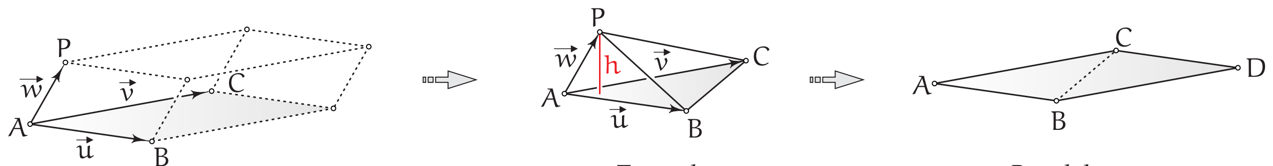
Conforme vimos no Corolário 2.3, o volume $\mathcal{V}$ pedido é $\frac{1}{6}$ do volume do paralelepípedo gerado pelos vetores fornecidos.

Logo,

$$\mathcal{V} = \tfrac{1}{6}|\vec{u} \cdot \vec{v} \times \vec{w}| = \tfrac{1}{6}\left|\det\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -4 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right| = \tfrac{1}{6}|0+0-4-0-0-0| = \tfrac{2}{3}.$$

Exemplo 2.35 Calculemos o volume da pirâmide de base ABC e vértice P, sendo $A\,(4,0,0)$, $B\,(4,8,0)$ e $C\,(0,6,0)$ e $P\,(4,-4,18)$. Calculemos, também, a altura dessa pirâmide relativa ao vértice P.

Consideremos o paralelepípedo gerado pelos vetores não coplanares $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AP}$. (figura abaixo)



Paralelepípedo *Tetraedro (pirâmide de base triangular)* *Paralelogramo (base do paralelepípedo)*

A Proposição 2.17 fornece a caracterização geométrica do produto misto: *Sejam $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ vetores não coplanares. Então, o volume do paralelepípedo baseado em $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ é igual ao módulo do produto misto $|\vec{u}\cdot\vec{v}\times\vec{w}|$.*

O Corolário 2.3 é consequência dessa caracterização: *Sejam $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ vetores não coplanares. Então, o volume $\mathcal{V}$ do tetraedro baseado em $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ é igual a $\frac{1}{6}$ do módulo do produto misto $|\vec{u}\cdot\vec{v}\times\vec{w}|$.*

No nosso caso, $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = B - A = (0,8,0)$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC} = C - A = (-4,6,0)$ e $\vec{w} = \overrightarrow{AP} = P - A = (0,-4,18)$. Assim:

$$\mathcal{V}\,(ABCP) = \tfrac{1}{6}|\vec{u}\cdot\vec{v}\times\vec{w}| = \tfrac{1}{6}\left|\det\begin{bmatrix} 0 & 8 & 0 \\ -4 & 6 & 0 \\ 0 & -4 & 18 \end{bmatrix}\right| = \tfrac{1}{6}\,|0+0+0-0+8.4.18-0| \Rightarrow \boxed{\mathcal{V}\,(ABCP) = 96}.$$

Da Geometria Euclidiana Espacial sabemos que o volume de uma pirâmide é um terço da área da base ABC pela altura h relativa a esta base.

Quanto à área $\mathcal{A}$ do triângulo ABC (base da pirâmide), temos que é dada pela metade da área do paralelogramo $ABCD$ gerado pelos vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ (observe que a diagonal BC do paralelogramo $ABCD$ o divide nos triângulos de mesma área ABC e BCD).

Entretanto, a área do paralelogramo $ABCD$ é, numericamente, o comprimento do vetor produto vetorial $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$. Assim:

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} \equiv \det\begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 8 & 0 \\ -4 & 6 & 0 \end{bmatrix} \equiv (0-0)\,\vec{i} + (0-0)\,\vec{j} + (0+32)\,\vec{k} = (0,0,32)\,.$$

Logo:

$$\mathcal{A}\,(ABC) = \tfrac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\| = \tfrac{1}{2}\sqrt{0^2+0^2+32^2} = 16.$$

Por fim

$$\mathcal{V}\,(ABCP) = \tfrac{1}{3}\mathcal{A}\,(ABC)\,.h \Rightarrow 96 = \tfrac{1}{3}16.h \Rightarrow \boxed{h = 18}.$$

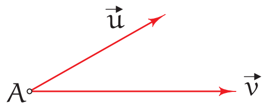
é a altura procurada.

Seção de Exercícios Propostos e Resolvidos: *Vetores e Coordenadas Cartesianas*

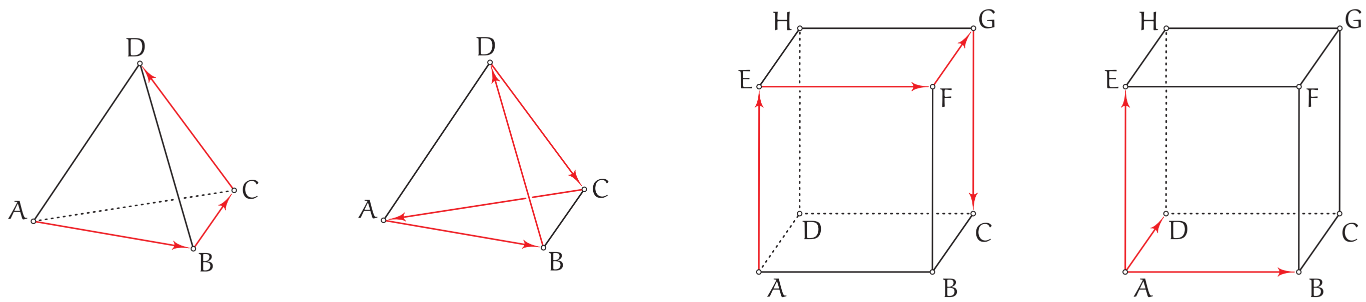
Exercícios referentes à Seção 2.1 ***Vetores: abordagem geométrica***, página 15.

Observação: As resoluções são sugeridas, e podem não ser únicas.

Exercício 2.1 Dados representantes dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ com origem em A, conforme a figura abaixo, desenhe um representante de $\vec{x}$, com origem também em A, tal que $\vec{u}+\vec{v}+\vec{x}=\vec{0}$.



Exercício 2.2 (**Resolvido**) Encontre o vetor soma dos vetores indicados na figura abaixo nos seguintes casos:



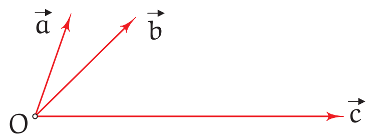
(i) **(ii)** **(iii)** **(iv)**

Resolução.

Resolução de (**i**)*:* $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}$.
Resolução de (**ii**)*:* $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$.
Resolução de (**iii**)*:* $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FG}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{AC}$.
Resolução de (**iv**)*:* $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{AG}$, *pois* $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ *e* $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{CG}$.

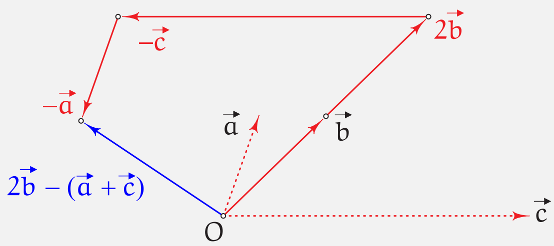
Exercício 2.3 (**Resolvido parcialmente**) Dados os vetores $\vec{a},\vec{b}$ e $\vec{c}$ com origem em O, como na figura a seguir, desenhe um representante, também com origem em O, de cada um dos seguintes vetores:

(**i**) $4\vec{a}-2\vec{b}-\vec{c}$
(**ii**) $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$
(**iii**) $2\vec{b}-(\vec{a}+\vec{c})$



Resolução parcial.

Resolução de (**iii**)*: Observemos que* $2\vec{b}-(\vec{a}+\vec{c})=2\vec{b}-\vec{a}-\vec{c}=2\vec{b}-\vec{c}-\vec{a}$. *Então, geometricamente temos:*



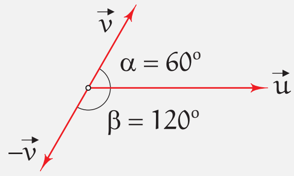
Exercício 2.4 (**Resolvido parcialmente**) Sabendo-se que a medida do ângulo entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é $60°$, determine a medida do ângulo formado pelos vetores:

(**i**) $\vec{u}$ e $-\vec{v}$ (**ii**) $-\vec{u}$ e $\vec{v}$ (**iii**) $-\vec{u}$ e $-\vec{v}$ (**iv**) $2\vec{u}$ e $3\vec{v}$

Resolução parcial.

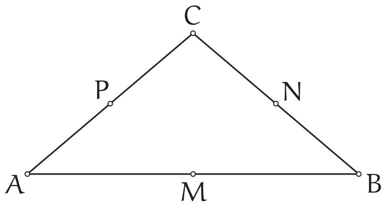
*Resolução de (**i**): O ângulo entre $\vec{v}$ e $-\vec{v}$ mede $180°$, pois esses vetores possuem mesma direção porém sentidos opostos. Logo, o ângulo entre $\vec{u}$ e $-\vec{v}$ é suplementar do ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$.*

Sabemos que o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ mede $60°$, então o ângulo entre $\vec{u}$ e $-\vec{v}$ mede $180° - 60° = 120°$.



Respostas dos demais itens: $120°$, $60°$ e $60°$, respectivamente.

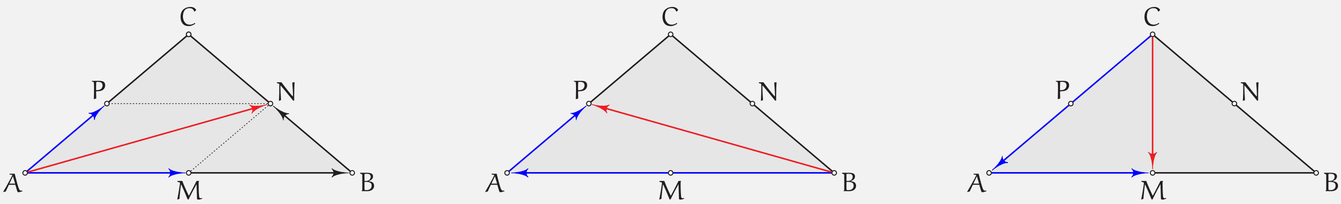
Exercício 2.5 (**Resolvido**) Considere a figura:



Sabendo-se que M, N e P são pontos médios. Exprima $\overrightarrow{BP}$, $\overrightarrow{AN}$ e $\overrightarrow{CM}$ em função de $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$.

Resolução.

Observemos a figura abaixo:



Quanto a $\overrightarrow{AN}$: temos N como ponto médio do lado BC do triângulo, assim, $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$. Pela figura podemos notar que $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$. Como $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$, então $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.

Quanto a $\overrightarrow{BP}$: temos P como ponto médio do lado AC do triângulo, assim, $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. Pela figura podemos notar que $\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AP} + (-\overrightarrow{AB})$. Logo, $\overrightarrow{BP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$.

Quanto a $\overrightarrow{CM}$: temos que M como ponto médio do lado AB do triângulo, assim, $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. Pela figura podemos notar que $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AM} + (-\overrightarrow{AC})$. Logo, $\overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.

Exercício 2.6 Demonstre que os pontos médios das diagonais de um paralelogramo coincidem.

Exercícios referentes à Seção 2.2 ***Vetores: abordagem algébrica***, página 23.

Oxy é sistema de coordenadas cartesianas ortogonais no plano com base canônica $B = \{\vec{i}, \vec{j}\}$.

$Oxyz$ é sistema de coordenadas cartesianas ortogonais no espaço com base canônica $B = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

Exercício 2.7 Determine um vetor de módulo 5 paralelo ao vetor $\vec{v} = (1, -1, 2)$.

Resposta: $\vec{u} = \left(\frac{5}{\sqrt{6}}, -\frac{5}{\sqrt{6}}, \frac{10}{\sqrt{6}}\right)$ *ou* $\vec{u} = \left(-\frac{5}{\sqrt{6}}, \frac{5}{\sqrt{6}}, -\frac{10}{\sqrt{6}}\right)$.

Exercício 2.8 (**Resolvido**) Determine a extremidade do segmento que represente o vetor $\vec{v} = (2, -5)$, sabendo-se que sua origem é o ponto $A(-1, 3)$.

Resolução.

Dados $\vec{v} = (2, -5)$ *e* $A(-1, 3)$*, origem de* $\vec{v}$*, determinemos o ponto* $B(x, y)$ *extremidade de* $\vec{v}$*. Observemos que*

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = B - A \Rightarrow (2, -5) = (x, y) - (-1, 3) \Rightarrow (x, y) = (2, -5) + (-1, 3) \Rightarrow (x, y) = (1, -2).$$

Portanto, a extremidade de $\vec{v}$ *é* $B(1, -2)$.

Exercício 2.9 No plano cartesiano, dados os vetores $\vec{u} = (2, -4)$, $\vec{v} = (-5, 1)$ e $\vec{w} = (-12, 6)$, determine k_1 e k_2 tais que $\vec{w} = k_1\vec{u} + k_2\vec{v}$.

Resposta: $k_1 = -1$ *e* $k_2 = 2$.

Exercício 2.10 (**Resolvido**) Dados os pontos $A(-1, 2, 3)$ e $B(4, -2, 0)$, determine P tal que $\overrightarrow{AP} = 3\overrightarrow{AB}$.

Resolução.

Temos $A(-1, 2, 3)$*,* $B(4, -2, 0)$ *e* $P(x, y, z)$.
De $\overrightarrow{AP} = 3\overrightarrow{AB}$ *temos* $P - A = 3(B - A)$*, ou seja,*

$$(x + 1, y - 2, z - 3) = 3(4 + 1, -2 - 2, 0 - 3) \Rightarrow (x + 1, y - 2, z - 3) = 3(5, -4, -3) \Rightarrow$$

$$(x + 1, y - 2, z - 3) = (15, -12, -9) \Rightarrow \begin{cases} x + 1 = 15 \\ y - 2 = -12 \\ z - 3 = -9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 14 \\ y = -10 \\ z = -6 \end{cases}$$

Logo, $P = (14, -10, -6)$.

Exercício 2.11 Determine a e b de modo que os vetores $\vec{u} = (4, 1, -3)$ e $\vec{v} = (6, a, b)$ sejam paralelos.

Resposta: $a = \frac{3}{2}$ *e* $b = -\frac{9}{2}$.

Exercício 2.12 Verifique se são colineares os seguintes pontos:
(**i**) $A(-1, -5, 0)$, $B(2, 1, 3)$ e $C(-2, -7, -1)$ (**ii**) $A(2, 1, -1)$, $B(3, -1, 0)$ e $C(1, 0, 4)$

Resposta: sim e não, respectivamente.

Exercício 2.13 Calcule a e b de modo que sejam colineares os pontos $A(3, 1, -2)$, $B(1, 5, 1)$ e $C(a, b, 7)$.

Resposta: $a = -3$ *e* $b = 13$.

Exercício 2.14 (**Resolvido**) Mostre que os pontos $A(4, 0, 1)$, $B(5, 1, 3)$, $C(3, 2, 5)$ e $D(2, 1, 3)$ são vértices de um paralelogramo.

Resolução.

Dados os pontos $A(4, 0, 1)$*,* $B(5, 1, 3)$*,* $C(3, 2, 5)$ *e* $D(2, 1, 3)$*, temos:*

$\overrightarrow{AB} = B - A = (1, 1, 2)$; $\overrightarrow{DC} = C - D = (1, 1, 2)$; $\overrightarrow{AD} = D - A = (-2, 1, 2)$ *e* $\overrightarrow{BC} = C - B = (-2, 1, 2)$,

de onde concluímos que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ *e* $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$*, ou seja, o quadrilátero* $ABCD$ *é, de fato, um paralelogramo.*

Exercício 2.15 Determine o ponto simétrico do ponto $A(3, 1, -2)$ em relação ao ponto $M(-1, 0, -3)$.

Resposta: $B\,(-5, -1, -4)$.

Exercício 2.16 Dados os pontos $A(1, 2, 3)$, $B(-6, -2, 3)$ e $C(1, 2, 1)$, determine o versor do vetor $3\overrightarrow{BA} - 2\overrightarrow{BC}$.

Resposta: $\left(\frac{7}{9}, \frac{4}{9}, \frac{4}{9}\right)$.

Exercício 2.17 Determine n para que o vetor $\vec{v} = \left(n, \frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right)$ seja unitário.

Resposta: $n = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Exercício 2.18 Obtenha o ponto P do eixo das abscissas, que seja equidistante dos pontos $A(2,-3,1)$ e $B(-2,1,-1)$.

Resposta: $P\,(1,0,0)$.

Exercício 2.19 Um segmento de reta limitado pelos pontos $A(-1,8,3)$ e $B(9,-7,-2)$ é dividido pelos pontos C, D, E, F nesta ordem, em cinco partes iguais. Determine as coordenadas do ponto E.

Resposta: $E\,(5,-1,0)$.

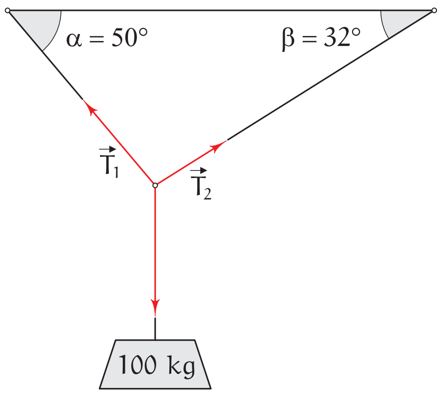
Exercício 2.20 Considere os vetores $\vec{a}=(2,-3,6)$ e $\vec{b}=(-1,2,-2)$. Calcule as coordenadas do vetor $\vec{c}$ sobre a bissetriz do ângulo formado pelos vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$, sabendo-se que $\|\vec{c}\|=3\sqrt{42}$.

Dica: trabalhe com os versores de $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

Observação: *A bissetriz de um ângulo não nulo e não raso é uma semirreta com origem no vértice do ângulo, e contida em seu interior, que divide esse ângulo em dois ângulos congruentes.*

Resposta: $\vec{c}=(-3,15,12)$.

Exercício 2.21 (**Resolvido de forma resumida**) Uma massa de 100 kg está em equilíbrio, presa ao teto por dois fios, conforme mostrado na figura abaixo. Encontre os vetores que representam as tensões $\vec{T}_1$ e $\vec{T}_2$ em ambos os fios e as suas magnitudes (em *newtons*).



Resolução resumida.

No ponto de junção dos fios represente o vetor peso por $\vec{P}$. *Esse vetor tem direção vertical e sentido para baixo.*

Adotando $g=9,8\ m/s^2$ *como a constante da aceleração gravitacional na superfície terrestre, pela Segunda Lei de Newton temos* $\|\vec{P}\|=mg$, *sendo* m *a massa do objeto em quilogramas, ou seja,* $\|\vec{P}\|=980$ *newtons.*

Como o sistema está estático, a soma das forças que atuam sobre o ponto de junção dos fios deve ser nula, ou seja, $\vec{T}_1+\vec{T}_2+\vec{P}=\vec{0}$.

Logo, $\vec{T}_1+\vec{T}_2=-\vec{P}$.

Esses três vetores formam um triângulo com ângulos internos medindo $40°$, $58°$ *e* $82°$ *(faça uma ilustração).*

Pela Lei dos Senos,

$$\frac{\|\vec{T}_1\|}{\operatorname{sen}(58°)}=\frac{\|-\vec{P}\|}{\operatorname{sen}(82°)}\Rightarrow\|\vec{T}_1\|=\frac{980\operatorname{sen}(58°)}{\operatorname{sen}(82°)}\cong 839\ \text{N}$$

Analogamente

$$\frac{\|\vec{T}_2\|}{\operatorname{sen}(40°)}=\frac{\|-\vec{P}\|}{\operatorname{sen}(82°)}\Rightarrow\|\vec{T}_2\|=\frac{980\operatorname{sen}(40°)}{\operatorname{sen}(82°)}\cong 636\ \text{N}$$

Adotando um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais no plano com origem no ponto de junção dos fios e unidade de medida em newtons, podemos escrever:

$$\vec{T}_1=\left(-\|\vec{T}_1\|\cos(50°),\|\vec{T}_1\|\operatorname{sen}(50°)\right)\cong(-539,643)$$
$$\vec{T}_2=\left(\|\vec{T}_2\|\cos(32°),\|\vec{T}_2\|\operatorname{sen}(32°)\right)\cong(539,337)$$

Exercícios referentes à Seção 2.3 ***Produto Escalar***, página 34.

$Oxyz$ é sistema de coordenadas cartesianas ortogonais no espaço com base canônica $B=\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$.

Exercício 2.22 (**Resolvido**) Dados os vetores $\vec{u}=(1,a,-2a-1)$, $\vec{v}=(a,a-1,1)$ e $\vec{w}=(a,-1,1)$, determinar a de modo que $\vec{u}\cdot\vec{v}=(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w}$.

Resolução.

Dada a equação $\vec{u}\cdot\vec{v} = (\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w}$, *sendo* $\vec{u} = (1, a, -2a-1)$, $\vec{v} = (a, a-1, 1)$ *e* $\vec{w} = (a, -1, 1)$ *temos:*

$$(1, a, -2a-1)\cdot(a, a-1, 1) = (1+a, 2a-1, -2a)\cdot(a, -1, 1) \Rightarrow$$
$$a + a(a-1) - 2a - 1 = (1+a)a + (2a-1)(-1) - 2a \Rightarrow$$
$$a + a^2 - a - 2a - 1 = a + a^2 - 2a + 1 - 2a \Rightarrow \boxed{a = 2}$$

Exercício 2.23 Dados os pontos $A(-1, 0, 2)$, $B(-4, 1, 1)$ e $C(0, 1, 3)$, determinar o vetor $\vec{x}$ de forma que $2\vec{x} - \overrightarrow{AB} = \vec{x} + (\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AB})\overrightarrow{AC}$.

Resposta: $\vec{x} = (-17, -13, -15)$.

Exercício 2.24 (**Resolvido**) Quais condições os vetores não paralelos $\vec{a}$ e $\vec{b}$ devem satisfazer para que o vetor $\vec{a}+\vec{b}$ divida o ângulo formado pelos dois primeiros vetores em dois ângulos congruentes?

Resolução.

Sejam α *a medida do ângulo formado por* $\vec{a}+\vec{b}$ *e* $\vec{a}$ *e* β *a medida do ângulo formado por* $\vec{a}+\vec{b}$ *e* $\vec{b}$. *Sendo* $\vec{a}$ *e* $\vec{b}$ *não paralelos, temos* $\vec{a}$, $\vec{b}$ *e* $\vec{a}+\vec{b}$ *não nulos e, portanto,* $\cos(\alpha) = \frac{\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b})}{||\vec{a}||.||\vec{a}+\vec{b}||}$ *e* $\cos(\beta) = \frac{\vec{b}\cdot(\vec{a}+\vec{b})}{||\vec{b}||.||\vec{a}+\vec{b}||}$.

Mas pela hipótese, $\alpha = \beta$. *Logo,*

$$\frac{\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b})}{||\vec{a}||.||\vec{a}+\vec{b}||} = \frac{\vec{b}\cdot(\vec{a}+\vec{b})}{||\vec{b}||.||\vec{a}+\vec{b}||} \Rightarrow \frac{\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{b}}{||\vec{a}||} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{b}}{||\vec{b}||} \Rightarrow \frac{||\vec{a}||^2+\vec{a}\cdot\vec{b}}{||\vec{a}||} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}+||\vec{b}||^2}{||\vec{b}||} \Rightarrow$$
$$||\vec{a}|| + \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{||\vec{a}||} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{||\vec{b}||} + ||\vec{b}|| \Rightarrow ||\vec{a}|| - ||\vec{b}|| = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{||\vec{b}||} - \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{||\vec{a}||} \Rightarrow ||\vec{a}|| - ||\vec{b}|| = \frac{||\vec{a}||-||\vec{b}||}{||\vec{a}||.||\vec{b}||}\vec{a}\cdot\vec{b}$$

Há dois caminhos para analisarmos essa última equação: $||\vec{a}|| - ||\vec{b}|| = 0$ *ou* $||\vec{a}|| - ||\vec{b}|| \neq 0$.

(**i**) *se* $||\vec{a}|| - ||\vec{b}|| = 0$ *temos que a igualdade ocorre e, neste caso,*

$$||\vec{a}|| = ||\vec{b}||.$$

(**ii**) *se* $||\vec{a}|| - ||\vec{b}|| \neq 0$ *podemos escrever* $1 = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{||\vec{a}||.||\vec{b}||}$, *o que significa que o cosseno da medida do ângulo entre* $\vec{a}$ *e* $\vec{b}$ *é* 1 *e, portanto, o ângulo entre* $\vec{a}$ *e* $\vec{b}$ *é nulo. Neste caso teríamos* $\vec{a}$ *paralelo a* $\vec{b}$ *(e com o mesmo sentido), o que é barrado pela hipótese.*

Conclusão: a condição necessária para que $\vec{a}+\vec{b}$ *divida* $\vec{a}$ *e* $\vec{b}$ *não paralelos em ângulos congruentes é que* $||\vec{a}|| = ||\vec{b}||$.

Exercício 2.25 Demonstre que todo ângulo inscrito em uma semicircunferência é reto.

Dica: sendo $A\hat{B}C$ *o ângulo inscrito e* O *centro da semicircunferência (logo,* O *é ponto médio de* AC*), deve-se mostrar que* $\overrightarrow{BA}$ *é ortogonal a* $\overrightarrow{BC}$. *Para isso, escreva esses dois vetores em função de* $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ *e* $\overrightarrow{OC}$ *e desenvolva o produto escalar* $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$.

Exercício 2.26 Escreva o vetor $(7, -1)$ como soma de dois vetores, um dos quais é paralelo e o outro é perpendicular ao vetor $(1, -1)$.

Dica: use projeção ortogonal.

Resposta: $(7, -1) = (4, -4) + (3, 3)$.

Exercício 2.27 Calcule a medida do ângulo entre os vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$ sabendo-se que: a medida do ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é $\frac{\pi}{8}$ rad, $||\vec{u}|| = ||\vec{w}|| = 5$, $||\vec{v}|| = 1$, $||\vec{u} - \vec{v} + \vec{w}|| = ||\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}||$.

Dica: eleve os dois membros da última equação ao quadrado e desenvolva, chegando a $\vec{v}\cdot\vec{w} = -\vec{u}\cdot\vec{v}$.

Resposta: $\frac{7\pi}{8}$ *rad.*

Exercício 2.28 Seja o $\triangle ABC$, sendo $A(-1, -2, 4)$, $B(-4, -2, 0)$ e $C(3, -2, 1)$. Determinar a medida do ângulo interno ao vértice B.

Resposta: $45°$.

Exercício 2.29 (**Resolvido**) Os pontos A, B e C são vértices de um triângulo equilátero cujo lado mede 10 cm. Calcular o produto escalar dos vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$.

Resolução.

De acordo com o enunciado temos $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{AC}\| = 10$. *Mas o triângulo* ABC *é equilátero. Logo, a medida de seu ângulo interno com vértice em* A *é* $\alpha = \frac{\pi}{3}$ rad.

Da teoria sabemos que

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\|.\|\overrightarrow{AC}\| \cos(\alpha) \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 10.10 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{100}{2} = 50$$

Exercício 2.30 Os lados de um triângulo retângulo ABC (reto em A) medem 5, 12 e 13. Calcular $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$.

Resposta: 169.

Exercício 2.31 Sabe-se que o ângulo entre os vetores $\vec{u} = (2, 1, -1)$ e $\vec{v} = (1, -1, m + 2)$ mede $\frac{\pi}{3}$ rad, determine m.

Resposta: $m = -4$.

Exercício 2.32 Dados os vetores $\vec{a} = (2, 1, \alpha)$, $\vec{b} = (\alpha + 2, -5, 2)$ e $\vec{c} = (2\alpha, 8, \alpha)$, determinar o valor de α para que o vetor $\vec{a} + \vec{b}$ seja ortogonal ao vetor $\vec{c} - \vec{a}$.

Resposta: $\alpha = 3$ *ou* $\alpha = -6$.

Exercício 2.33 Determinar o vetor $\vec{v}$, paralelo a $\vec{u} = (1, -1, 2)$, tal que $\vec{v} \cdot \vec{u} = -18$.

Resposta: $\vec{v} = (-3, 3, -6)$.

Exercício 2.34 (**Resolvido**) Determinar o vetor $\vec{v}$, ortogonal ao vetor $\vec{u} = (2, -3, -12)$ e colinear a $\vec{w} = (-6, 4, -2)$.

Resolução.

Sejam $\vec{u} = (2, -3, -12)$, $\vec{w} = (-6, 4, -2)$ *e* $\vec{v} = (x, y, z)$. *Como* $\vec{v}$ *é colinear a* $\vec{w} \neq \vec{0}$, *temos que existe* $\lambda \in \mathbb{R}$ *tal que* $\vec{v} = \lambda\vec{w}$, *ou seja,*

$$\vec{v} = (x, y, z) = \lambda(-6, 4, -2) = (-6\lambda, 4\lambda, -2\lambda).$$

Como $\vec{v}$ *é ortogonal a* $\vec{u}$, *então* $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, *ou seja,*

$$(2, -3, -12) \cdot (-6\lambda, 4\lambda, -2\lambda) = 0 \Rightarrow -12\lambda - 12\lambda + 24\lambda = 0 \Rightarrow 0\lambda = 0$$

e constatamos que a equação $0\lambda = 0$ *é verdadeira para qualquer valor de* λ.

Deste modo, qualquer vetor da forma $\vec{v} = (-6\lambda, 4\lambda, -2\lambda)$, *com* $\lambda \in \mathbb{R}$, *satisfaz as condições do enunciado.*

Exercício 2.35 Verificar se existe um ângulo reto no $\triangle ABC$, sendo $A(2, 1, 3)$, $B(3, 3, 5)$ e $C(0, 4, 1)$.

Resposta: sim, e ele está no vértice A.

Exercício 2.36 (**Resolvido**) As medidas dos ângulos diretores de um vetor podem ser de $45°$, $60°$ e $90°$? Justifique.

Resolução.

Não! Se α, β *e* γ *são as medidas dos ângulos diretores de um vetor, vimos que ocorre a seguinte propriedade:*

$$\cos^2(\alpha) + \cos^2(\beta) + \cos^2(\gamma) = 1.$$

No caso em questão temos

$$\cos^2(45°) + \cos^2(60°) + \cos^2(90°) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 0^2 = \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \neq 1.$$

Exercício 2.37 As medidas dos ângulos diretores de um vetor são $45°$, $60°$ e γ. Determinar γ.

Resposta: $\gamma = 60°$ *ou* $\gamma = 120°$.

Exercício 2.38 Determinar o vetor $\vec{v}$, sabendo que $||\vec{v}|| = 5$, $\vec{v}$ é ortogonal ao eixo Oz, $\vec{v} \cdot \vec{w} = 6$ e $\vec{w} = 2\vec{j} + 3\vec{k}$.

Resposta: $\vec{v} = (4,3,0)$ *ou* $\vec{v} = (-4,3,0)$.

Exercício 2.39 Determinar o vetor $\vec{v}$, ortogonal ao eixo Oz, que satisfaz as condições $\vec{v} \cdot \vec{v}_1 = 10$ e $\vec{v} \cdot \vec{v}_2 = -5$, sendo $\vec{v}_1 = (2,3,-1)$ e $\vec{v}_2 = (1,-1,2)$.

Resposta: $\vec{v} = (-1,4,0)$.

Exercício 2.40 (**Resolvido**) Determinar um vetor unitário ortogonal ao vetor $\overrightarrow{v} = (2,-1,1)$.

Resolução.

Seja $\vec{n} = (x,y,z)$ *um vetor unitário e ortogonal a* $\vec{v}$. *Assim,* $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ *e* $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$. *Sendo* $\overrightarrow{v} = (2,-1,1)$ *temos*

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ 2x - y + z = 0 \Rightarrow z = y - 2x \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 + (y-2x)^2 = 1 \Rightarrow 5x^2 - 4xy + 2y^2 = 1$$

que claramente possui infinitas soluções (geometricamente isso era esperado).

Podemos tomar uma solução particular fazendo, por exemplo, $z = 0$. *Logo,*

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y - 2x = 0 \Rightarrow y = 2x \end{cases} \Rightarrow x^2 + 4x^2 = 1 \Rightarrow 5x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$$

Substituindo x *em* $y = 2x$ *temos* $y = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$.

Logo, $\vec{n} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, 0\right)$ *é um (dentre infinitos) dos vetores unitários ortogonais a* $\vec{v}$.

Exercício 2.41 O vetor $\vec{v}$ é ortogonal aos vetores $\vec{u} = (2,-1,3)$ e $\vec{w} = (1,0,-2)$ e forma ângulo agudo com o vetor $\vec{j}$ (da base canônica). Calcular $\vec{v}$, sabendo que $||\vec{v}|| = 3\sqrt{6}$.

Resposta: $\vec{v} = (2,7,1)$.

Exercício 2.42 Determinar o vetor projeção do vetor $\vec{u} = (1,2,-3)$ na direção de $\vec{v} = (2,1,-2)$.

Resposta: $\text{proj}_{\vec{v}}\,\vec{u} = \left(\frac{20}{9}, \frac{10}{9}, -\frac{20}{9}\right)$.

Exercício 2.43 Qual o comprimento do vetor projeção de $\vec{u} = (3,5,2)$ sobre o eixo dos x?

Resposta: 3.

Exercício 2.44 (**Resolvido**) Calcular a projeção ortogonal do vetor $\vec{v} = (4,-3,2)$ sobre uma reta que forma com os eixos do *Sistema de Coordenadas Cartesianas Ortogonais* ângulos congruentes.

Resolução.

Consideremos uma reta r *no espaço e* $\vec{u} = (a,b,c)$ *um vetor não nulo paralelo a* r.

Da teoria sabemos que a medida α *do ângulo entre* r *e o eixo* Ox *(que é paralelo ao vetor* $\vec{i} = (1,0,0)$*) é dada pela fórmula*

$$\cos(\alpha) = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{i}|}{||\vec{u}||.||\vec{i}||}$$

(aqui é bom lembrar que, por definição, o ângulo entre duas retas nunca é obtuso - por isso o módulo no produto escalar).

Analogamente para as medidas β *e* γ *dos ângulos entre* r *e os eixos* Oy *e* Oz *(com vetores diretos* $\vec{j} = (0,1,0)$ *e* $\vec{k} = (0,0,1)$*, respectivamente), ou seja,*

$$\cos(\beta) = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{j}|}{||\vec{u}||.||\vec{j}||} \text{ e } \cos(\gamma) = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{k}|}{||\vec{u}||.||\vec{k}||}.$$

Do enunciado sabemos que os ângulos entre r *e os eixos coordenados são congruentes, de onde concluímos que*

$$\frac{|\vec{u} \cdot \vec{i}|}{||\vec{u}||.||\vec{i}||} = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{j}|}{||\vec{u}||.||\vec{j}||} = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{k}|}{||\vec{u}||.||\vec{k}||} \Rightarrow |\vec{u} \cdot \vec{i}| = |\vec{u} \cdot \vec{j}| = |\vec{u} \cdot \vec{k}| \Rightarrow |a| = |b| = |c|.$$

Sendo $|a| = m > 0$ *temos quatro pares de possibilidades:*

$$\begin{aligned}\vec{u}_1 &= (m, m, m) = m\,(1,1,1) \text{ e seu oposto;}\\ \vec{u}_2 &= (-m, m, m) = m\,(-1,1,1) \text{ e seu oposto;}\\ \vec{u}_3 &= (m, -m, m) = m\,(1,-1,1) \text{ e seu oposto;}\\ \vec{u}_4 &= (m, m, -m) = m\,(1,1,-1) \text{ e seu oposto;}\end{aligned}$$

Portanto, temos quatro retas r *que satisfazem as condições do enunciado (como era de se esperar...).*

Façamos $m = 1$ *e calculemos a projeção ortogonal de* $\vec{v}$ *sobre* r *com vetor diretor* $\vec{u}_1 = (1,1,1)$.
Da teoria sabemos que

$$\text{proj}_{\vec{u}_1}\vec{v} = \frac{\vec{v}\cdot\vec{u}_1}{||\vec{u}_1||^2}\vec{u}_1 = \frac{(4,-3,2)\cdot(1,1,1)}{\left(\sqrt{1^2+1^2+1^2}\right)^2}.(1,1,1) = \frac{3}{3}.(1,1,1) = (1,1,1)$$

Procedendo de modo análogo para $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$ *e* $\vec{u}_4$ *temos*

$$\begin{aligned}\text{proj}_{\vec{u}_2}\vec{v} &= -\tfrac{5}{3}.(-1,1,1) = \left(\tfrac{5}{3}, -\tfrac{5}{3}, -\tfrac{5}{3}\right)\\ \text{proj}_{\vec{u}_3}\vec{v} &= \tfrac{9}{3}.(1,-1,1) = (3,-3,3)\\ \text{proj}_{\vec{u}_4}\vec{v} &= -\tfrac{1}{3}.(1,1,-1) = \left(-\tfrac{1}{3}, -\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}\right)\end{aligned}$$

Exercício 2.45 Mostrar que se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são vetores, tais que $\vec{u}+\vec{v}$ é ortogonal a $\vec{u}-\vec{v}$, então $||\vec{u}|| = ||\vec{v}||$.

Exercício 2.46 Calcular o módulo dos vetores $\vec{u}+\vec{v}$ e $\vec{u}-\vec{v}$, sabendo que $||\vec{u}|| = 4$, $||\vec{v}|| = 3$ e o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ mede $60°$.

Resposta: $\sqrt{37}$ *e* $\sqrt{13}$, *respectivamente.*

Exercício 2.47 (**Resolvido**) Sabendo-se que $||\vec{u}|| = 2$, $||\vec{v}|| = 3$ e que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ formam um ângulo de medida $\frac{3\pi}{4}$ rad, determinar $|2\vec{u}-\vec{v})\cdot(\vec{u}-2\vec{v})|$.

Resolução.

Se α *é a medida do ângulo entre os vetores não nulos* $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$, *vimos que* $\cos(\alpha) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{||\vec{u}||.||\vec{v}||}$.

No caso em questão, sendo $||\vec{u}|| = 2$, $||\vec{v}|| = 3$ *e* $\alpha = \frac{3\pi}{4}$ rad, *temos:*

$$\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{2.3} \Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = -\frac{6\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = -3\sqrt{2}.$$

Utilizando as propriedades de produto escalar temos:

$$\begin{aligned}|(2\vec{u}-\vec{v})\cdot(\vec{u}-2\vec{v})| &= |\,(2\vec{u})\cdot\vec{u} - (2\vec{u})\cdot(2\vec{v}) - \vec{v}\cdot\vec{u} + \vec{v}\cdot(2\vec{v})\,| = |2||\vec{u}||^2 - 4\,(\vec{u}\cdot\vec{v}) - \vec{u}\cdot\vec{v} + 2||\vec{v}||^2|\\ &= |2.2^2 - 5\left(-3\sqrt{2}\right) + 2.3^2| = |8 + 15\sqrt{2} + 18| = 26 + 15\sqrt{2}.\end{aligned}$$

Exercício 2.48 Determinar $\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w} + \vec{v}\cdot\vec{w}$, sabendo-se que $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w} = \vec{0}$, $||\vec{u}|| = 2$, $||\vec{v}|| = 3$ e $||\vec{w}|| = \sqrt{5}$.

Resposta: -9.

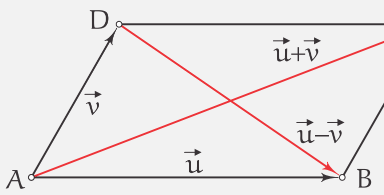
Exercício 2.49 Demonstre o Teorema de Pitágoras vetorialmente.

Dica: represente os lados do triângulo por meio de vetores. Escreva o vetor hipotenusa como soma dos vetores catetos. Tome a norma, eleve ao quadrado e desenvolva.

Exercício 2.50 (**Resolvido**) Mostre que as diagonais de um paralelogramo têm mesma medida se, e somente se, o paralelogramo é retângulo.

Resolução.

Considere a figura abaixo:



($\Longrightarrow$) Suponhamos que as diagonais do paralelogramo ABCD tenham a mesma medida. Logo:

$$\|\vec{u}+\vec{v}\| = \|\vec{u}-\vec{v}\| \Rightarrow \|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}-\vec{v}\|^2 \Rightarrow$$
$$\|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2 \Rightarrow$$
$$4\vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = 0$$

Logo, $\vec{u}$ é ortogonal a $\vec{v}$ e, portanto, ABCD é um retângulo.

($\Longleftarrow$) Suponhamos que ABCD seja um retângulo. Logo, $\vec{u}\perp\vec{v}$ o que significa $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$. Assim,

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \Rightarrow 4\vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \Rightarrow$$
$$\|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2 \Rightarrow$$
$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}-\vec{v}\|^2 \Rightarrow \|\vec{u}+\vec{v}\| = \|\vec{u}-\vec{v}\|,$$

pois $\|\vec{u}+\vec{v}\|$ e $\|\vec{u}-\vec{v}\|$ não podem ser negativos.
Logo, as diagonais de ABCD têm o mesmo comprimento.

Exercício 2.51 Mostre que a soma dos quadrados dos comprimentos das diagonais de um paralelogramo é igual à soma dos quadrados dos comprimentos dos quatro lados.

Exercícios referentes à Seção 2.4 ***Produto Vetorial***, página 40.

$Oxyz$ é sistema de coordenadas cartesianas ortogonais no espaço com base canônica $B = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

Exercício 2.52 (**Resolvido Parcialmente**) Dados os vetores $\vec{u} = (2,-1,1)$, $\vec{v} = (2,-1,0)$ e $\vec{w} = (-1,2,2)$, calcular:

(**i**) $\vec{w}\times\vec{v}$
(**ii**) $\vec{v}\times(\vec{w}-\vec{u})$
(**iii**) $(\vec{u}+\vec{v})\times(\vec{u}-\vec{v})$
(**iv**) $2\vec{u}\times 3\vec{v}$
(**v**) $(\vec{u}\times\vec{v})\cdot(\vec{u}\times\vec{v})$
(**vi**) $(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w}$ e $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})$
(**vii**) $(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w}$ e $\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w})$
(**viii**) $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}\times\vec{v})$

Resolução Parcial.

(**v**)*: Dados $\vec{u} = (2,-1,1)$ e $\vec{v} = (2,-1,0)$ façamos $\vec{u}\times\vec{v}$:*

$$\vec{u}\times\vec{v} \equiv \det\begin{bmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -1 & 1\\ 2 & -1 & 0\end{bmatrix} \equiv \vec{i} + 2\vec{j} + (-2+2)\,\vec{k} = (1,2,0)$$

Agora, façamos $(\vec{u}\times\vec{v})\cdot(\vec{u}\times\vec{v})$:

$$(\vec{u}\times\vec{v})\cdot(\vec{u}\times\vec{v}) = (1,2,0)\cdot(1,2,0) = 1+4+0 = 5.$$

Respostas dos demais itens:
*De (**i**) até (**iv**): $(2,4,-3)$, $(-1,-2,3)$, $(-2,-4,0)$ e $(6,12,0)$, respectivamente.*
*De (**vi**) até (**viii**): 3, $(4,-2,4)$ e 0, respectivamente.*

Exercício 2.53 (**Resolvido**) Dados os seguintes pontos $A(2,-1,2)$, $B(1,2,-1)$ e $C(3,2,1)$, determinar o vetor $\overrightarrow{CB}\times(\overrightarrow{BC}-2\overrightarrow{CA})$.

Resolução.

Dados $A(2,-1,2)$, $B(1,2,-1)$ *e* $C(3,2,1)$, *observemos que*

$$\overrightarrow{CB} = B - C = (1,2,-1) - (3,2,1) = (-2,0,-2).$$

Como $\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{CB}$, *temos* $\overrightarrow{BC} = (2,0,2)$.

Quanto a $\overrightarrow{CA}$ *temos*

$$\overrightarrow{CA} = A - C = (2,-1,2) - (3,2,1) = (-1,-3,1).$$

Agora, calculemos $\overrightarrow{CB} \times (\overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{CA})$:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{CB} \times (\overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{CA}) &= (-2,0,-2) \times [(2,0,2) - 2(-1,-3,1)] \\
&= (-2,0,-2) \times [(2,0,2) + (2,6,-2)] \\
&= (-2,0,-2) \times (4,6,0) \\
&\equiv \det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 0 & -2 \\ 4 & 6 & 0 \end{bmatrix} \equiv 12\vec{i} - 8\vec{j} - 12\vec{k} \\
&= (12,-8,-12).
\end{aligned}$$

Exercício 2.54 Determinar um vetor simultaneamente ortogonal aos vetores $2\vec{a} + \vec{b}$ e $\vec{b} - \vec{a}$, sendo $\vec{a} = (3,-1,-2)$ e $\vec{b} = (1,0,-3)$.

Resposta: qualquer vetor da forma $(3\lambda, 7\lambda, \lambda)$ *com* $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exercício 2.55 Dados os vetores $\vec{a} = (1,-1,2)$, $\vec{b} = (3,4,-2)$ e $\vec{c} = (-5,1,-4)$, mostrar que $\vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c}$ e calcular seu valor.

Resposta: 10.

Exercício 2.56 (**Resolvido**) Determinar o valor de m para que o vetor $\vec{w} = (1,2,m)$ seja simultaneamente ortogonal aos vetores $\vec{v}_1 = (2,-1,0)$ e $\vec{v}_2 = (1,-3,-1)$.

Resolução.

Sendo $\vec{w}$ *simultaneamente ortogonal a* $\vec{v}_1$ *e a* $\vec{v}_2$ *temos que* $\vec{w}$ *é paralelo a* $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$. *Assim,*

$$\|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2\| \equiv \det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & -1 \end{bmatrix} \equiv \vec{i} + 2\vec{j} + (-6+1)\,\vec{k} = (1,2,-5)\,.$$

Assim, $\vec{w} = \lambda\,(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2)$, *ou seja* $(1,2,m) = \lambda\,(1,2,-5)$, *de onde concluimos que* $\lambda = 1$ *e, portanto,* $m = -5$.

Exercício 2.57 Dados os vetores $\vec{v} = \left(a, 5b, -\frac{c}{2}\right)$ e $\vec{w} = (-3a, x, y)$, determinar os valores de x e y para que $\vec{v} \times \vec{w} = \vec{0}$.

Resposta: $x = -15b$ *e* $y = \frac{3}{2}c$.

Exercício 2.58 Se $\|\vec{u} \times \vec{v}\| = 3\sqrt{3}$, $\|\vec{u}\| = 3$ e $60°$ é a medida do ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$, determinar $\|\vec{v}\|$.

Resposta: 2.

Exercício 2.59 (**Resolvido**) Mostrar que o quadrilátero que tem como vértices os pontos $A(1,-2,3)$, $B(4,3,-1)$, $C(5,7,-3)$ e $D(2,2,1)$ é um paralelogramo e calcular sua área.

Observação: *Paralelogramo é um quadrilátero com lados opostos paralelos.*

Resolução.

Se mostrarmos que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ *e* $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ *concluiremos que os lados* AB *e* DC *são paralelos; e o mesmo com os lados* AD *e* BC.

Vejamos:
De $A(1,-2,3)$, $B(4,3,-1)$, $C(5,7,-3)$ *e* $D(2,2,1)$ *temos:*

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = B - A = (3,5,-4) \\ \overrightarrow{DC} = C - D = (3,5,-4) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \qquad e \qquad \begin{cases} \overrightarrow{AD} = D - A = (1,4,-2) \\ \overrightarrow{BC} = C - B = (1,4,-2) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$$

Logo, $ABCD$ *é, de fato, um paralelogramo.*
Quanto à área $\mathcal{A}$ *do paralelogramo* $ABCD$*, sabemos da teoria de produto vetorial que* $\mathcal{A} = ||\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}||$.

Assim,

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} \equiv \det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 5 & -4 \\ 1 & 4 & -2 \end{bmatrix} \equiv (-10+16)\vec{i} + (-4+6)\vec{j} + (12-5)\vec{k} = (6,2,7)$$

Logo, $\mathcal{A} = ||\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}|| = \sqrt{6^2+2^2+7^2} = \sqrt{89}$.

Exercício 2.60 Dois vértices consecutivos de um paralelogramo são $A = (2,-4,0)$ e $B = (1,-3,-1)$ e o ponto médio das diagonais é $M = (3,2,-2)$. Calcular a área do paralelogramo.

Resposta: $2\sqrt{74}$.

Exercício 2.61 Calcular a área do paralelogramo cujos lados são determinados pelos vetores $2\vec{u}$ e $-\vec{v}$ sendo $\vec{u} = (2,-1,0)$ e $\vec{v} = (1,-3,2)$.

Resposta: $6\sqrt{5}$.

Exercício 2.62 (**Resolvido Parcialmente**) Calcular a área do triângulo de vértices:
(**i**) $A(-1,0,2)$, $B(-4,1,1)$ e $C(0,1,3)$
(**ii**) $A(1,0,1)$, $B(4,2,1)$ e $C(1,2,0)$
(**iii**) $A(2,3,-1)$, $B(3,1,-2)$ e $C(-1,0,2)$
(**iv**) $A(-1,2,-2)$, $B(2,3,-1)$ e $C(0,1,1)$

Resolução Parcial.

(**i**) *Temos os pontos* A, B *e* C*, então podemos construir os vetores* $\overrightarrow{AB} = B - A = (-3,1-1)$ *e* $\overrightarrow{AC} = C - A = (1,1,1)$.

Da teoria, sabemos que a área $\mathcal{A}$ *do triângulo* ABC *é dada por* $\mathcal{A} = \frac{||\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}||}{2}$. *Assim,*

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \equiv \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \equiv (1+2)\,\vec{i} + (-1+3)\,\vec{j} + (-3-1)\,\vec{k} = (2,2,-4)$$

$$||\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|| = \sqrt{2^2+2^2+4^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

Substituindo: $\mathcal{A} = \frac{2\sqrt{6}}{2} = \sqrt{6}$.

Respostas dos demais itens: $\frac{7}{2}$, $\frac{9\sqrt{2}}{2}$ *e* $2\sqrt{6}$, *respectivamente.*

Exercício 2.63 Calcular a área do paralelogramo que tem um vértice no ponto $A(3,2,1)$ e uma diagonal de extremidades $B(1,1,-1)$ e $C(0,1,2)$.

Resposta: $\sqrt{74}$.

Exercício 2.64 Calcular x sabendo que $A(x,1,1)$, $B(1,-1,0)$ e $C(2,1,-1)$ são vértices de um triângulo de área $\frac{\sqrt{29}}{2}$.

Resposta: $x = 3$ *ou* $x = \frac{1}{5}$.

Exercício 2.65 (**Resolvido**) Dado o triângulo de vértices $A(0,1,-1)$, $B(-2,0,1)$ e $C(1,-2,0)$, calcular a medida da altura relativa ao lado BC.

Resolução.

Da teoria sabemos que a área $\mathcal{A}$ *do triângulo* ABC *é dada por* $\mathcal{A} = \frac{||\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC}||}{2}$. *Por outro lado, da Geometria Euclidiana Plana, sabemos que* $\mathcal{A} = \frac{b.h}{2}$ *sendo* $b = ||\overrightarrow{BC}||$ *comprimento da base* BC *do triângulo e* h *sua altura* *relativa a este lado.*

Assim,

$$\frac{||\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}||}{2} = \frac{||\overrightarrow{BC}||.h}{2} \Rightarrow h = \frac{||\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}||}{||\overrightarrow{BC}||}.$$

Sendo $\overrightarrow{BA} = A - B = (2, 1, -2)$ *e* $\overrightarrow{BC} = C - B = (3, -2, -1)$, *temos:*

$$\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC} \equiv \det\begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & -1 \end{bmatrix} \equiv (-1-4)\,\vec{i} + (-6+2)\,\vec{j} + (-4-3)\,\vec{k} = (-5, -4, -7)$$

Assim,

$$||\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC}|| = \sqrt{(-5)^2 + (-4)^2 + (-7)^2} = \sqrt{25 + 16 + 49} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$$
$$||\overrightarrow{BC}|| = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{9 + 4 + 1} = \sqrt{14}$$

Logo,

$$h = \frac{3\sqrt{10}}{\sqrt{14}} = \frac{3\sqrt{2}\sqrt{5}}{\sqrt{2}\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{35}}{7}.$$

Exercício 2.66 Determinar o vetor $\vec{v}$ tal que $\vec{v}$ seja ortogonal ao eixo dos y e $\vec{u} = \vec{v} \times \vec{w}$, sendo $\vec{u} = (1, 1, -1)$ e $\vec{w} = (2, -1, 1)$.

Resposta: $\vec{v} = (1, 0, 1)$.

Exercício 2.67 Dados os vetores $\vec{u} = (0, 1, -1)$, $\vec{v} = (2, -2, -2)$ e $\vec{w} = (1, -1, 2)$, determinar o vetor $\vec{x}$ paralelo a $\vec{w}$ e que satisfaz a condição $\vec{x} \times \vec{u} = \vec{v}$.

Resposta: $\vec{x} = (-2, 2, -4)$.

Exercício 2.68 Demonstrar que $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{c} = \vec{c} \times \vec{a}$, sabendo que $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$.

Exercício 2.69 Sejam AC e BD as diagonais de um paralelogramo $ABCD$, sendo $\overrightarrow{AC} = (-1, 5, 0)$ e $\overrightarrow{BD} = (-3, 3, 2)$. Calcule a área do paralelogramo.

Resposta: $\sqrt{62}$.

Exercícios referentes à Seção 2.5 ***Produto Misto***, página 44.

$Oxyz$ é sistema de coordenadas cartesianas ortogonais no espaço com base canônica $B = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

Exercício 2.70 (**Resolvido Parcialmente**) Verificar se são coplanares os pontos:
(**i**) $A(1, 1, 1)$, $B(-2, -1, -3)$, $C(0, 2, -2)$ e $D(-1, 0, -2)$
(**ii**) $A(1, 0, 2)$, $B(-1, 0, 3)$, $C(2, 4, 1)$ e $D(-1, -2, 2)$
(**iii**) $A(2, 1, 3)$, $B(3, 2, 4)$, $C(-1, -1, -1)$ e $D(0, 1, -1)$

Resolução Parcial

(**i**) *Dados* $A(1, 1, 1)$, $B(-2, -1, -3)$, $C(0, 2, -2)$ *e* $D(-1, 0, -2)$, *calculemos* $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ *e* $\overrightarrow{AD}$*:*

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (-2, -1, -3) - (1, 1, 1) = (-3, -2, -4)$$
$$\overrightarrow{AC} = C - A = (0, 2, -2) - (1, 1, 1) = (-1, 1, -3)$$
$$\overrightarrow{AD} = D - A = (-1, 0, -2) - (1, 1, 1) = (-2, -1, -3)$$

Da teoria, sabemos que os pontos A, B, C *e* D *são coplanares se, e somente se, o produto misto de* $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ *e* $\overrightarrow{AD}$ *é nulo. Vejamos:*

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD} = \det\begin{bmatrix} -3 & -2 & -4 \\ -1 & 1 & -3 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix} = 9 - 12 - 4 - 8 + 9 + 6 = 0.$$

Portanto, os pontos A, B, C e D são coplanares.

Respostas dos demais itens: não e sim, respectivamente.

Exercício 2.71 (**Resolvido**) Para que valor de m os pontos $A(m, 1, 2)$, $B(2, -2, -3)$, $C(5, -1, 1)$ e $D(3, -2, -2)$ são coplanares?

Resolução.

Consideremos os vetores

$$\overrightarrow{BA} = A - B = (m-2, 3, 5); \qquad \overrightarrow{BC} = C - B = (3, 1, 4); \qquad \overrightarrow{BD} = D - B = (1, 0, 1).$$

Dizer que os pontos A, B, C e D são coplanares é equivalente dizer que o produto misto dos vetores acima é nulo, ou seja, que os quatros pontos em questão não forma um tetraedro. Desta forma, devemos calcular o produto misto desses três vetores e igualar a zero para achar o valor de m.

Assim,

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD} = \det \begin{bmatrix} m-2 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow (m-2) + 12 + 0 - (5 + 0 + 9) = 0 \Rightarrow m - 4 = 0 \Rightarrow \boxed{m = 4}.$$

Exercício 2.72 Considere os vetores $\vec{u} = (1, 1, 0)$, $\vec{v} = (2, 0, 1)$, $\vec{w}_1 = 3\vec{u} - 2\vec{v}$, $\vec{w}_2 = \vec{u} + 3\vec{v}$ e $\vec{w}_3 = \vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$. Determinar o volume do paralelepípedo definido por $\vec{w}_1$, $\vec{w}_2$ e $\vec{w}_3$.

Resposta: 44.

Exercício 2.73 Calcular o valor de m para que o volume do paralelepípedo determinado pelos vetores $\vec{v}_1 = 2\vec{i} - \vec{j}$, $\vec{v}_2 = 6\vec{i} + m\vec{j} - 2\vec{k}$ e $\vec{v}_3 = -4\vec{i} + \vec{k}$ seja igual a 10.

Resposta: $m = 6$ *ou* $m = -4$.

Exercício 2.74 (**Resolvido**) Os vetores $\vec{a} = (2, -1, -3)$, $\vec{b} = (-1, 1, -4)$ e $\vec{c} = (m+1, m, -1)$ determinam um paralelepípedo de volume 42. Calcular m.

Resolução.

Sabemos da teoria que o volume $\mathcal{V}$ de um paralelepípedo gerado por três vetores não coplanares $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ é dado por $\mathcal{V} = |\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c}|$.

No caso em questão temos $\vec{a} = (2, -1, -3)$, $\vec{b} = (-1, 1, -4)$, $\vec{c} = (m+1, m, -1)$ e $V = 42$. Logo,

$$\mathcal{V} = |\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c}| = 42 \Rightarrow \left| \det \begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & -4 \\ m+1 & m & -1 \end{bmatrix} \right| = 42 \Rightarrow$$

$$|-2 + 4(m+1) + 3m + 3(m+1) + 1 + 8m| = 42 \Rightarrow |6 + 18m| = 42 \Rightarrow$$

$$6 + 18m = 42 \text{ ou } 6 + 18m = -42 \Rightarrow \boxed{m = 2 \text{ ou } m = -\tfrac{8}{3}}.$$

Exercício 2.75 Três vértices de um tetraedro de volume 6 são $A = (-2, 4, -1)$, $B = (-3, 2, 3)$ e $C = (1, -2, -1)$. Determinar o quarto vértice D, sabendo-se que ele pertence ao eixo Oy.

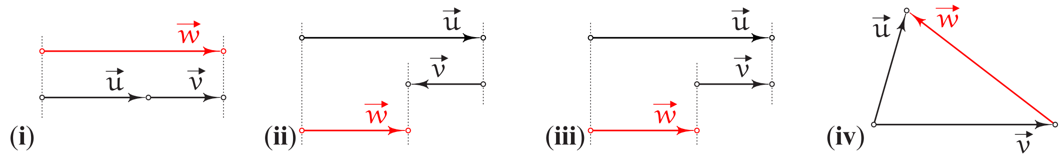
Resposta: $D\,(0, 2, 0)$ *ou* $D\,(0, -4, 0)$.

Seção EXTRA de Exercícios Resolvidos: *Vetores e Coordenadas Cartesianas*

Exercícios referentes à Seção 2.1 ***Vetores: abordagem geométrica***, página 15.

Observação: As resoluções são sugeridas, e podem não ser únicas.

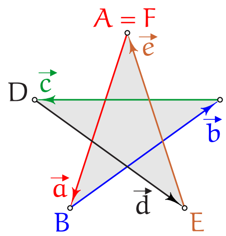
Exercício 2.76 (**Resolvido**) Coloque $\vec{w}$ em função de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ na figuras abaixo.



Resolução.

(**i**) $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$ (**ii**) $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$ (**iii**) $\vec{w} = \vec{u} - \vec{v}$ (**iv**) $\vec{w} = \vec{u} - \vec{v}$

Exercício 2.77 (**Resolvido**) Faça a soma de todos os vetores indicados na figura abaixo.



Resolução.

A soma é $\vec{0}$ *pois, associando segmentos orientados aos vetores:* $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$, $\vec{c} = \overrightarrow{CD}$, $\vec{d} = \overrightarrow{DE}$ *e* $\vec{e} = \overrightarrow{EF}$ (*notando que* $A = F$ *pois a figura é "fechada"*), *temos:*

$$\begin{aligned}
\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} + \vec{e} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF} \\
&= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF} \\
&= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF} \\
&= \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EF} \\
&= \overrightarrow{AF} = \vec{0} \ (\textit{pois } A = F)
\end{aligned}$$

Exercício 2.78 (**Resolvido**) Prove a "*Lei do Cancelamento*" da adição de vetores:

$$\begin{cases} \vec{w} + \vec{u} = \vec{w} + \vec{v} \Rightarrow \vec{u} = \vec{v} & (1) \\ \vec{x} + \vec{z} = \vec{y} + \vec{z} \Rightarrow \vec{x} = \vec{y} & (2) \end{cases}$$

Resolução.

$$\begin{aligned}
&\vec{w} + \vec{u} = \vec{w} + \vec{v} \Rightarrow \\
&(-\vec{w}) + (\vec{w} + \vec{u}) = (-\vec{w}) + (\vec{w} + \vec{v}) \ (\textit{somando-se o oposto de } \vec{w} \textit{ nos dois lados}) \Rightarrow \\
&((-\vec{w}) + \vec{w}) + \vec{u} = ((-\vec{w}) + \vec{w}) + \vec{v} \ (\textit{propriedade associativa}) \Rightarrow \\
&(\vec{w} + (-\vec{w})) + \vec{u} = (\vec{w} + (-\vec{w})) + \vec{v} \ (\textit{comutativa}) \Rightarrow \\
&\vec{0} + \vec{u} = \vec{0} + \vec{v} \ (\textit{elemento oposto}) \Rightarrow \\
&\vec{u} + \vec{0} = \vec{v} + \vec{0} \ (\textit{comutativa}) \Rightarrow \\
&\boxed{\vec{u} = \vec{v}} \ (\textit{elemento neutro}).
\end{aligned}$$

Para provar a asserção (2) *basta aplicar a propriedade comutativa que recairemos na* (1).

Exercício 2.79 (**Resolvido**) Prove as seguintes *regras de sinais, sendo* $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\vec{u}$ vetor no espaço.
(**a**) $(-\alpha)\vec{u} = -(\alpha\vec{u})$;
(**b**) $\alpha(-\vec{u}) = -(\alpha\vec{u})$;
(**c**) $(-\alpha)(-\vec{u}) = \alpha\vec{u}$.

Resolução.

(**a**) *Temos:*

$$\vec{0} = \vec{0} \Rightarrow 0\vec{u} = \vec{0} \ (\textit{definição-multiplicação por zero})$$
$$\Rightarrow (\alpha - \alpha)\vec{u} = \vec{0} \Rightarrow (\alpha + (-\alpha))\vec{u} = \vec{0} \Rightarrow \alpha\vec{u} + (-\alpha)\vec{u} = \vec{0} \ (\textit{distributiva})$$
$$\Rightarrow -(\alpha\vec{u}) + (\alpha\vec{u} + (-\alpha)\vec{u}) = -(\alpha\vec{u}) + \vec{0} \Rightarrow (-(\alpha\vec{u}) + \alpha\vec{u}) + (-\alpha)\vec{u} = -(\alpha\vec{u}) + \vec{0} \ (\textit{associativa})$$
$$\Rightarrow \vec{0} + (-\alpha)\vec{u} = -(\alpha\vec{u}) + \vec{0} \ (\textit{elemento oposto})$$
$$\Rightarrow (-\alpha)\vec{u} + \vec{0} = -(\alpha\vec{u}) + \vec{0} \ (\textit{comutativa})$$
$$\Rightarrow \boxed{(-\alpha)\vec{u} = -(\alpha\vec{u})} \ (\textit{elemento neutro}).$$

(**b**) *Temos:*

$$\vec{0} = \vec{0} \Rightarrow \alpha\vec{0} = \vec{0} \ (\textit{definição-multiplicação envolvendo elemento neutro})$$
$$\Rightarrow \alpha(\vec{u} + (-\vec{u})) = \vec{0} \ (\textit{elemento oposto})$$
$$\Rightarrow \alpha\vec{u} + \alpha(-\vec{u}) = \vec{0} \ (\textit{distributiva})$$
$$\Rightarrow -(\alpha\vec{u}) + (\alpha\vec{u} + \alpha(-\vec{u})) = -(\alpha\vec{u}) + \vec{0} \Rightarrow (-(\alpha\vec{u}) + \alpha\vec{u}) + \alpha(-\vec{u}) = -(\alpha\vec{u}) + \vec{0} \ (\textit{associativa})$$
$$\Rightarrow \vec{0} + \alpha(-\vec{u}) = -(\alpha\vec{u}) + \vec{0} \ (\textit{elemento oposto})$$
$$\Rightarrow \alpha(-\vec{u}) + \vec{0} = -(\alpha\vec{u}) + \vec{0} \ (\textit{comutativa})$$
$$\Rightarrow \boxed{\alpha(-\vec{u}) = -(\alpha\vec{u})} \ (\textit{elemento neutro}).$$

(**c**) *Temos:*

$$\begin{aligned} (-\alpha)(-\vec{u}) &= -(\alpha(-\vec{u})) \ (\textit{parte } (\mathbf{a}) \textit{ deste exercício}) \\ &= -(-(\alpha\vec{u})) \ (\textit{parte } (\mathbf{b}) \textit{ deste exercício}) \\ &\Rightarrow \boxed{(-\alpha)(-\vec{u}) = \alpha\vec{u}}. \end{aligned}$$

Exercício 2.80 (**Resolvido**) Mostre que se $\alpha\vec{u} = \beta\vec{u}$ e $\vec{u} \neq \vec{0}$, então $\alpha = \beta$.

Resolução.

Temos:

$$\alpha\vec{u} = \beta\vec{u} \Rightarrow \alpha\vec{u} + (-(\beta\vec{u})) = \beta\vec{u} + (-(\beta\vec{u})) \Rightarrow \alpha\vec{u} + (-\beta)\vec{u} = \vec{0} \Rightarrow$$
$$(\alpha + (-\beta))\vec{u} = \vec{0} \Rightarrow \alpha + (-\beta) = 0 \Rightarrow \alpha - \beta = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha = \beta}.$$

Exercício 2.81 (**Resolvido**) Resolver a equação $2\vec{x} - 3\vec{u} = 10(\vec{x} + \vec{v})$ no vetor incógnita $\vec{x}$.

Resolução.

Temos:

$$2\vec{x} - 3\vec{u} = 10(\vec{x} + \vec{v}) \Rightarrow 2\vec{x} - 3\vec{u} = 10\vec{x} + 10\vec{v} \Rightarrow 2\vec{x} - 10\vec{x} = 10\vec{v} + 3\vec{u} \Rightarrow -8\vec{x} = 10\vec{v} + 3\vec{u} \Rightarrow \boxed{\vec{x} = -\tfrac{5}{4}\vec{v} - \tfrac{3}{8}\vec{u}}.$$

Exercício 2.82 (**Resolvido**) Resolva o sistema

$$\begin{cases} \vec{x} + 2\vec{y} = \vec{u} \\ 3\vec{x} - \vec{y} = 2\vec{u} + \vec{v} \end{cases}$$

nos vetores incógnitas $\vec{x}$ e $\vec{y}$.

Resolução.

Temos:

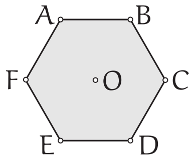
$$\begin{cases} \vec{x} + 2\vec{y} = \vec{u} \\ 3\vec{x} - \vec{y} = 2\vec{u} + \vec{v} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{x} + 2\vec{y} = \vec{u} \quad (*) \\ 6\vec{x} - 2\vec{y} = 4\vec{u} + 2\vec{v} \end{cases} \Rightarrow 7\vec{x} = 5\vec{u} + 2\vec{v} \Rightarrow \boxed{\vec{x} = \tfrac{5}{7}\vec{u} + \tfrac{2}{7}\vec{v}}.$$

Substituindo $\vec{x}$ na equação $(*)$, temos:

$$\left(\tfrac{5}{7}\vec{u} + \tfrac{2}{7}\vec{v}\right) + 2\vec{y} = \vec{u} \Rightarrow 2\vec{y} = \vec{u} - \tfrac{5}{7}\vec{u} - \tfrac{2}{7}\vec{v} \Rightarrow 2\vec{y} = \tfrac{2}{7}\vec{u} - \tfrac{2}{7}\vec{v} \Rightarrow \boxed{\vec{y} = \tfrac{1}{7}\vec{u} - \tfrac{1}{7}\vec{v}}.$$

Exercício 2.83 (**Resolvido**) Sendo $ABCDEF$ um hexágono regular com centro em O, mostre que

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = 6\overrightarrow{AO}.$$



Resolução.

Temos

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AO}; \quad (1)$$
$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}; \quad (2)$$
$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FE}; \quad (3)$$
$$\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AO}; \quad (4)$$
$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{FE}. \quad (5)$$

Consequentemente,

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) + \left(2\overrightarrow{AO}\right) + \left(\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FE}\right) + \overrightarrow{AF}$$

substituindo as informações das linhas (2), (3) *e* (4).

Logo, reorganizando:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = 2\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AF}\right) + \overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{FE}$$

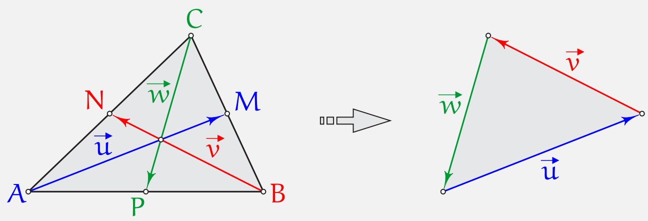
e, finalmente, utilizando as informações das linhas (1) *e* (5) *acima, temos:*

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = 2\left(\overrightarrow{AO}\right) + \overrightarrow{AO} + 2\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{AO} = 6\overrightarrow{AO}.$$

Exercício 2.84 Em um triângulo ABC, sejam M, N e P os pontos médios dos lados BC, CA e AB, respectivamente. Mostremos que $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} = \vec{0}$.

Resolução.

O exercício pede para demonstrarmos que, na verdade, os vetores que representam as medianas de um triângulo qualquer formam um novo triângulo.



Temos:

$$\begin{cases} \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} \\ \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} \\ \overrightarrow{CP} = \overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}\right) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} = \left(\overrightarrow{AC} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{CB}\right) + \left(\overrightarrow{BC} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{CA}\right) + \left(\overrightarrow{CA} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{CB}\right) \Rightarrow$$

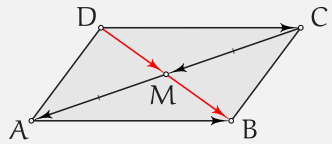
$$\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} = \overrightarrow{AC} - \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CB} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{CB} \Rightarrow$$

$$\boxed{\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} = \vec{0}}.$$

Exercício 2.85 (**Resolvido**) Mostre que as diagonais de um paralelogramo têm o mesmo ponto médio.

Resolução.

Consideremos a figura abaixo.



Seja M *o ponto médio da diagonal* AC*. Temos:*

$$\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}.$$

Mas, $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{CM}$ *(pois* M *é ponto médio de* AC*) e* $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ *(lados paralelos de um paralelogramo). Logo,*

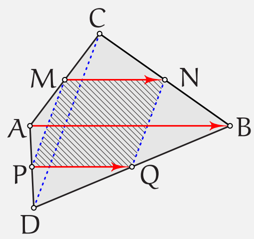
$$\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{DM} \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{MB}}.$$

Assim, a diagonal DB *contém o ponto* M *e este é o ponto médio de* DB*, ou seja,* M *é ponto médio das duas diagonais do paralelogramo.*

Exercício 2.86 (**Resolvido**) Mostre que se os pontos médios dos lados de um quadrilátero qualquer são vértices de um paralelogramo.

Resolução.

Consideremos um quadrilátero $ADBC$ *qualquer e* M, N, P *e* Q *pontos médios dos lados* AC, BC, AD *e* BD*, respectivamente, conforme a figura abaixo:*



Tomemos a diagonal AB *deste quadrilátero*

Temos, assim, um triângulo ABC *e, de acordo com o Exercício 2.7, página 21, o segmento* MN *é paralelo a* AB *e mede a metade de seu comprimento, ou seja,*

$$\overrightarrow{MN} = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}.$$

De modo análogo temos o triângulo ABD *e o segmento* PQ*, ou seja,*

$$\overrightarrow{PQ} = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AB},$$

Logo,

$$\boxed{\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PQ}}.$$

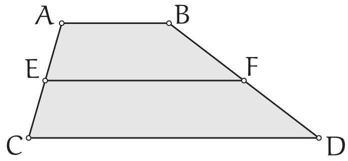
De modo análogo, considerando-se os triângulos ACD *e* BCD *temos*

$$\boxed{\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{NQ}},$$

ou seja, MNQP *é um quadrilátero que possui lados opostos paralelos! Portanto, trata-se de um paralelogramo.*

Observação: *Este resultado é válido, inclusive, para quadriláteros não convexos!*

Exercício 2.87 (**Resolvido**) Mostre que o segmento que une os pontos médios dos lados não paralelos de um trapézio é paralelo às bases e sua medida é metade da soma das medidas das bases.



Resolução.

Temos

$$\begin{aligned}\overrightarrow{EF} &= \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{BD} = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{BD}\\ &= \tfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}\right) + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{CD} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \tfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AB}\right).\end{aligned}$$

Pelo fato de que em um trapézio os segmentos CD *e* AB *são paralelos, segue que o mesmo ocorre com os vetores* $\overrightarrow{CD}$ *e* $\overrightarrow{AB}$ *e, por conseguinte, o vetor* $\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AB}\right)$ *(que é igual a* $\overrightarrow{EF}$*) é paralelo a* $\overrightarrow{CD}$ *e a* $\overrightarrow{AB}$*. Mostremos essa afirmação do seguinte modo:*

$$\overrightarrow{CD} /\!/ \overrightarrow{AB} \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ tal que } \overrightarrow{CD} = \lambda\overrightarrow{AB}.$$

Logo, de $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AB}\right)$ *temos*

$$\overrightarrow{EF} = \tfrac{1}{2}\left(\lambda\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}\right) = \tfrac{1+\lambda}{2}\overrightarrow{AB},$$

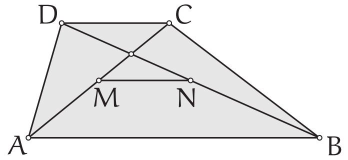
ou seja, $\overrightarrow{EF} /\!/ \overrightarrow{AB}$*. Como* $\overrightarrow{CD} /\!/ \overrightarrow{AB}$*, segue que* $\overrightarrow{EF} /\!/ \overrightarrow{CD} /\!/ \overrightarrow{AB}$*.*

Isto conclui que EF *é paralelo a* CD *e* AB*.*

Quanto à medida de EF*, basta observar que* $\overrightarrow{CD}$ *e* $\overrightarrow{AB}$ *são vetores paralelos e com o mesmo sentido. Logo,*

$$\|\overrightarrow{EF}\| = \left\|\tfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AB}\right)\right\| = \tfrac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{CD}\| + \|\overrightarrow{AB}\|\right).$$

Exercício 2.88 (**Resolvido**) Mostre que o segmento que une os pontos médios das diagonais de um trapézio é paralelo às bases, e seu comprimento é a metade da diferença dos comprimentos das bases.



Resolução.

Temos

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DN} = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{DB} = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{CD} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{CD} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{DB}\\ &= \tfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB}\right) + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{CD} = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \tfrac{1}{2}\overrightarrow{DC} = \tfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC}\right).\end{aligned}$$

Pelo fato de que em um trapézio os segmentos DC *e* AB *são paralelos, segue que o mesmo ocorre com os vetores*

$\overrightarrow{DC}$ e $\overrightarrow{AB}$ e, por conseguinte, o vetor $\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DC}\right)$ (que é igual a $\overrightarrow{MN}$) é paralelo a $\overrightarrow{DC}$ e a $\overrightarrow{AB}$. A demonstração desse fato é análoga à feita no exercício anterior e isto conclui que MN é paralelo a DC e AB.

Quanto à medida de MN, basta observar que $-\overrightarrow{DC}$ e $\overrightarrow{AB}$ são vetores paralelos mas com sentidos opostos. Logo,

$$||\overrightarrow{MN}|| = \left\|\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DC}\right)\right\| = \frac{1}{2}\left(||\overrightarrow{AB}||-||\overrightarrow{DC}||\right).\ (\textit{supondo } ||\overrightarrow{AB}|| \geqslant ||\overrightarrow{DC}||)$$

Exercício 2.89 (**Resolvido**) Verdadeiro ou falso? Justifique.
(**a**) $\vec{u}=\vec{v} \Rightarrow ||\vec{u}||=||\vec{v}||$.
(**b**) $||\vec{u}||=||\vec{v}|| \Rightarrow \vec{u}=\vec{v}$.
(**c**) $\vec{u}=\vec{v} \Longleftrightarrow ||\vec{u}||=||\vec{v}||$. (cuidado: é uma equivalência)
(**d**) $\vec{u}=\vec{v} \Rightarrow \vec{u}/\!/\vec{v}$.
(**e**) $\vec{u}/\!/\vec{v} \Rightarrow \vec{u}=\vec{v}$.
(**f**) $\vec{u}=\vec{v} \Longleftrightarrow \vec{u}/\!/\vec{v}$. (cuidado: é uma equivalência)
(**g**) $\vec{u}/\!/\vec{v} \Rightarrow \frac{\vec{u}}{||\vec{u}||}=\frac{\vec{v}}{||\vec{v}||}$.
(**h**) $\frac{\vec{u}}{||\vec{u}||}=\frac{\vec{v}}{||\vec{v}||} \Rightarrow \vec{u}/\!/\vec{v}$.
(**i**) $\vec{u}/\!/\vec{v}$ e possuem mesmo sentido $\Rightarrow \frac{\vec{u}}{||\vec{u}||}=\frac{\vec{v}}{||\vec{v}||}$.
(**j**) $\frac{\vec{u}}{||\vec{u}||}=\frac{\vec{v}}{||\vec{v}||} \Rightarrow \vec{u}/\!/\vec{v}$ e possuem mesmo sentido.
(**k**) $\vec{u}/\!/\vec{v}$ e possuem mesmo sentido $\Longleftrightarrow \frac{\vec{u}}{||\vec{u}||}=\frac{\vec{v}}{||\vec{v}||}$. (cuidado: é uma equivalência)
(**l**) $||\vec{w}||=||\vec{u}||+||\vec{v}|| \Rightarrow \vec{w}/\!/\vec{u}/\!/\vec{v}$.
(**m**) $\vec{w}/\!/\vec{u}/\!/\vec{v} \Rightarrow ||\vec{w}||=||\vec{u}||+||\vec{v}||$.
(**n**) $\vec{w}=\vec{u}+\vec{v}$, $\vec{u}/\!/\vec{v}$ e com mesmo sentido $\Rightarrow ||\vec{w}||=||\vec{u}||+||\vec{v}||$.
(**o**) $||\vec{w}||=||\vec{u}||+||\vec{v}|| \Rightarrow \vec{w}=\vec{u}+\vec{v}$, $\vec{u}/\!/\vec{v}$ e com mesmo sentido.
(**p**) $\vec{w}=\vec{u}+\vec{v}$, $\vec{u}/\!/\vec{v}$, com sentidos opostos e $||\vec{u}||\geqslant||\vec{v}|| \Rightarrow ||\vec{w}||=||\vec{u}||-||\vec{v}||$.
(**q**) $||\vec{w}||=||\vec{u}||-||\vec{v}|| \Rightarrow \vec{w}=\vec{u}+\vec{v}$, $\vec{u}/\!/\vec{v}$, com sentidos opostos e $||\vec{u}||\geqslant||\vec{v}||$.
(**r**) $\vec{u}/\!/\vec{v}$ e $\vec{u}/\!/\vec{w} \Rightarrow \vec{u}/\!/\left(\vec{v}+\vec{w}\right)$.
(**s**) $\vec{u}/\!/\left(\vec{v}+\vec{w}\right) \Rightarrow \vec{u}/\!/\vec{v}$ e $\vec{u}/\!/\vec{w}$.
(**t**) $||5\vec{u}||=||-5\vec{u}||=5||\vec{u}||$.
(**u**) $\vec{u}/\!/\vec{v}$, $||\vec{u}||=2$ e $||\vec{v}||=4 \Rightarrow \vec{v}=2\vec{u}$ ou $\vec{v}=-2\vec{u}$.
(**v**) $||\vec{u}||=3 \Rightarrow$ o versor de $-10\vec{u}$ é $-\frac{\vec{u}}{3}$.
(**w**) $||\alpha\vec{u}||=||\beta\vec{v}||$ com $\vec{u}/\!/\vec{v} \Rightarrow \alpha=\beta$.
(**x**) $\vec{u}\perp\vec{v}$ e $\vec{w}\perp\vec{v} \Rightarrow \vec{u}\perp\vec{w}$.
(**y**) $\vec{u}\perp\vec{v}$ e $\vec{w}\perp\vec{v} \Rightarrow \vec{u}/\!/\vec{w}$.
(**z**) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD} \Rightarrow (A,B)=(C,D)$, sendo que a notação (X,Y) significa segmento orientado com origem no ponto X e extremo no ponto Y.

Observação.

Neste exercício é importante ter em mente o seguinte:

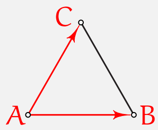
(**i**) Se a afirmação for falsa, geralmente basta dar **um contra-exemplo** para a afirmação, ou seja: um exemplo que satisfaz a hipótese da afirmação mas não satisfaz a tese da afirmação (lembre-se: se a afirmação é do tipo $P \Rightarrow Q$, então P é a hipótese e Q é a tese).

(**ii**) Se a afirmação for verdadeira, há três possibilidades para justificá-la:
(1) ela pode ser ou derivar diretamente de uma definição;
(2) ela pode ser um resultado matemático já demonstrado na teoria apresentada (propriedades, proposições, teoremas, corolários, etc);
(3) ela pode ser um resultado matemático que deve ser **demonstrado** por você. Isso significa que a afirmação deve valer para **qualquer** exemplo que satisfaz sua hipótese, ou seja: qualquer exemplo que satisfaz a hipótese da afirmação deve satisfazer também a tese da afirmação.

Resolução.

(**a**) $\vec{u}=\vec{v} \Rightarrow ||\vec{u}||=||\vec{v}||$.
Verdade, *pois se $\vec{u}=\vec{v}$, então, por definição, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ possuem mesmo comprimento, direção e sentido.*

(**b**) $||\vec{u}||=||\vec{v}|| \Rightarrow \vec{u}=\vec{v}$.
Falso, *pois não basta que dois vetores possuam mesmo comprimento para que sejam iguais (eles podem, por exemplo, ter direções diferentes). Um contra-exemplo: seja ABC um triângulo equilátero. Façamos $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ e $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$.*

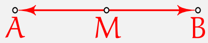


Temos $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$ (= comprimento de cada um dos lados do triângulo equilátero). Mas $\vec{u} \neq \vec{v}$, pois são vetores não paralelos.

(**c**) $\vec{u} = \vec{v} \iff \|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$.
Falso. *Para que a implicação dupla ocorra deveríamos ter, além da "ida" ($\Rightarrow$), a "volta" ($\Leftarrow$) verdadeira. (vimos que, neste caso, ($\Leftarrow$) é falsa pelo Item (**b**)).*

(**d**) $\vec{u} = \vec{v} \Rightarrow \vec{u} /\!/ \vec{v}$.
Verdade, *pelo mesmo motivo do Item (**a**).*

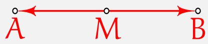
(**e**) $\vec{u} /\!/ \vec{v} \Rightarrow \vec{u} = \vec{v}$.
Falso. *Um contra-exemplo: sejam A e B pontos distintos e M ponto médio de AB. Façamos $\vec{u} = \overrightarrow{MA}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{MB}$.*



Temos $\vec{u} /\!/ \vec{v}$, mas $\vec{u} \neq \vec{v}$, pois são vetores com sentidos opostos.

(**f**) $\vec{u} = \vec{v} \iff \vec{u} /\!/ \vec{v}$.
Falso, *pelo mesmo motivo do Item (**c**).*

(**g**) $\vec{u} /\!/ \vec{v} \Rightarrow \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$.
Falso. *Um contra-exemplo: sejam A e B pontos distintos e M ponto médio de AB. Façamos $\vec{u} = \overrightarrow{MA}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{MB}$.*



Logo, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são vetores paralelos com sentidos opostos. Mas um vetor (não nulo) e seu versor possuem o mesmo sentido (definição). Assim, os versores $\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$ e $\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$ possuem, também, sentidos opostos. Portanto, não podem ser iguais.

(**h**) $\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} \Rightarrow \vec{u} /\!/ \vec{v}$.
Verdade. *Se $\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$, então $\vec{u} = \frac{\|\vec{u}\|}{\|\vec{v}\|}\vec{v}$, ou seja, $\vec{u} /\!/ \vec{v}$ (condição de paralelismo: veja a Proposição 2.3 com $\alpha = \frac{\|\vec{u}\|}{\|\vec{v}\|}$).*

(**i**) $\vec{u} /\!/ \vec{v}$ *e possuem mesmo sentido* $\Rightarrow \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$.
Verdade. *Precisamos mostrar que $\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$, ou seja, que $\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$ possui o mesmo comprimento, direção e sentido de $\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$.*

Quanto ao comprimento: ambos possuem comprimento 1 (são versores).

Quanto à direção: por definição, $\vec{u} /\!/ \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$ e $\vec{v} /\!/ \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$. Mas, por hipótese, $\vec{u} /\!/ \vec{v}$. Logo, $\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} /\!/ \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$, ou seja, possuem mesma direção.

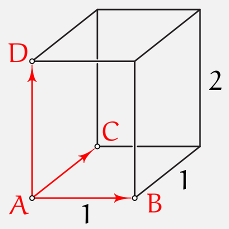
Quanto ao sentido: por definição, $\vec{u}$ possui o mesmo sentido de $\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$ (pois $\frac{1}{\|\vec{u}\|} > 0$) e o mesmo ocorre com $\vec{v}$ e $\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$. Mas, por hipótese, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ possuem mesmo sentido. Logo, $\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$ e $\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$ possuem o mesmo sentido.

Conclusão: $\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$.

(**j**) $\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} \Rightarrow \vec{u} /\!/ \vec{v}$ *e possuem mesmo sentido.*
Verdade. *Já vimos no Item (**h**) que $\vec{u} /\!/ \vec{v}$ ocorre. Portanto, basta mostrar que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ possuem mesmo sentido. Para tanto: $\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} \Rightarrow \vec{u} = \frac{\|\vec{u}\|}{\|\vec{v}\|}\vec{v}$. Como $\frac{\|\vec{u}\|}{\|\vec{v}\|} > 0$ temos, por definição, que $\frac{\|\vec{u}\|}{\|\vec{v}\|}\vec{v}$ possui o mesmo sentido de $\vec{v}$, ou seja, $\vec{u}$ possui o mesmo sentido de $\vec{v}$.*

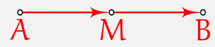
(**k**) $\vec{u} /\!/ \vec{v}$ *e possuem mesmo sentido* $\iff \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$.
Verdade. *Basta juntar as implicações dos Itens (**i**) e (**j**).*

(**l**) $\|\vec{w}\| = \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\| \Rightarrow \vec{w} /\!/ \vec{u} /\!/ \vec{v}$.
Falso. *Um contra-exemplo: considere um bloco retangular com base quadrada com comprimento e largura 1 e altura 2, conforme a figura abaixo, e façamos $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ e $\vec{w} = \overrightarrow{AD}$.*



Temos $||\vec{u}|| = ||\vec{v}|| = 1$ e $||\vec{w}|| = 2$. Logo, $||\vec{u}|| + ||\vec{v}|| = ||\vec{w}||$. Entretanto, $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são dois a dois ortogonais, portanto, não paralelos.

(m) $\vec{w} /\!/ \vec{u} /\!/ \vec{v} \Rightarrow ||\vec{w}|| = ||\vec{u}|| + ||\vec{v}||$.
Falso. *Um contra-exemplo: sejam A e B pontos à distância 2 um do outro. Seja M o ponto médio de AB. Tomemos $\vec{w} = \overrightarrow{AM}$, $\vec{u} = \overrightarrow{MB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$.*

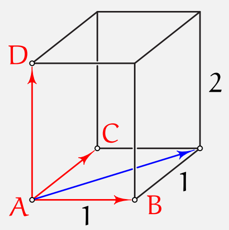


Temos os três vetores paralelos dois a dois sendo $||\vec{w}|| = ||\vec{u}|| = 1$ e $||\vec{v}|| = 2$. Portanto, $||\vec{w}|| \neq ||\vec{u}|| + ||\vec{v}||$.

(n) $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$, $\vec{u} /\!/ \vec{v}$ *e com mesmo sentido* $\Rightarrow ||\vec{w}|| = ||\vec{u}|| + ||\vec{v}||$.
Verdade. *De $\vec{u} /\!/ \vec{v}$ e com mesmo sentido, temos que $\exists\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{u} = \lambda\vec{v}$ e $\lambda > 0$. De $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$ temos*

$$\begin{aligned} ||\vec{w}|| &= ||\vec{u} + \vec{v}|| = ||\lambda\vec{v} + \vec{v}|| = ||\,(\lambda+1)\,\vec{v}|| = |\lambda+1|.||\vec{v}|| = (\lambda+1)\,||\vec{v}|| \ (\textit{pois } \lambda > 0) \\ &= \lambda||\vec{v}|| + ||\vec{v}|| = ||\lambda\vec{v}|| + ||\vec{v}|| = ||\vec{u}|| + ||\vec{v}||. \end{aligned}$$

(o) $||\vec{w}|| = ||\vec{u}|| + ||\vec{v}|| \Rightarrow \vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$, $\vec{u} /\!/ \vec{v}$ *e com mesmo sentido.*
Falso. *Considere um bloco retangular com base quadrada com comprimento e largura 1 e altura 2, conforme a figura abaixo, e façamos $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ e $\vec{w} = \overrightarrow{AD}$.*

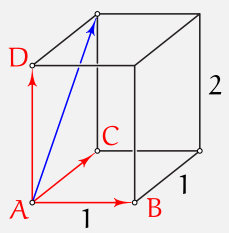


Temos $||\vec{w}|| = ||\vec{u}|| + ||\vec{v}||$. Entretanto, $\vec{w}$ é ortogonal a $\vec{u} + \vec{v}$ e, portanto, não podem ser iguais.

(p) $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$, $\vec{u} /\!/ \vec{v}$, *com sentidos opostos e* $||\vec{u}|| \geqslant ||\vec{v}|| \Rightarrow ||\vec{w}|| = ||\vec{u}|| - ||\vec{v}||$.
Verdade. *De $\vec{u} /\!/ \vec{v}$ e com sentidos opostos, temos que $\exists\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{u} = \lambda\vec{v}$ e $\lambda < 0$. De $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$ temos*

$$\begin{aligned} ||\vec{w}|| &= ||\vec{u} + \vec{v}|| = ||\lambda\vec{v} + \vec{v}|| = ||\,(\lambda+1)\,\vec{v}|| = |\,(\lambda+1)\,|.||\vec{v}|| = |\,(\lambda+1)\,.||\vec{v}||\,| = |\lambda||\vec{v}|| + ||\vec{v}||\,| \\ &= |-|\lambda|.||\vec{v}|| + ||\vec{v}||\,| \ (\textit{pois } \lambda < 0 \Rightarrow -|\lambda| < 0) = |-||\lambda\vec{v}|| + ||\vec{v}||\,| = |-||\vec{u}|| + ||\vec{v}||\,| = |\,||\vec{u}|| - ||\vec{v}||\,| \\ &= ||\vec{u}|| - ||\vec{v}|| \ (\textit{pois, por hipótese, } ||\vec{u}|| > ||\vec{v}||) \end{aligned}$$

(q) $||\vec{w}|| = ||\vec{u}|| - ||\vec{v}|| \Rightarrow \vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$, $\vec{u} /\!/ \vec{v}$, *com sentidos opostos e* $||\vec{u}|| \geqslant ||\vec{v}||$.
Falso. *Considere um bloco retangular com base quadrada com comprimento e largura 1 e altura 2, conforme a figura abaixo, e façamos $\vec{w} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{u} = \overrightarrow{AD}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.*

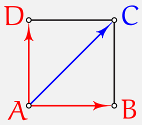


Temos $||\vec{w}|| = ||\vec{v}|| = 1$ e $||u|| = 2$, portanto, $||\vec{w}|| = ||\vec{u}|| - ||\vec{v}||$. Entretanto, $\vec{w}$ é ortogonal a $\vec{u} + \vec{v}$, logo, são vetores diferentes.

(r) $\vec{u} /\!/ \vec{v}$ *e* $\vec{u} /\!/ \vec{w} \Rightarrow \vec{u} /\!/ (\vec{v} + \vec{w})$.

Verdade. *De $\vec{u}/\!/\vec{v}$, temos que $\exists\lambda_1 \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{v} = \lambda_1\vec{u}$. De $\vec{u}/\!/\vec{w}$, temos que $\exists\lambda_2 \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{w} = \lambda_2\vec{u}$. Logo, $\vec{v} + \vec{w} = \lambda_1\vec{u} + \lambda_2\vec{u} = (\lambda_1 + \lambda_2)\,\vec{u}$, ou seja, $\vec{u}/\!/(\vec{v} + \vec{w})$.*

(s) $\vec{u}/\!/(\vec{v} + \vec{w}) \Rightarrow \vec{u}/\!/\vec{v}$ e $\vec{u}/\!/\vec{w}$.
Falso. *Um contra-exemplo: considere um quadrado $ABCD$ de tal modo que AB e AD sejam lados do quadrado e AC uma das diagonais. Façamos $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{w} = \overrightarrow{AD}$.*



Temos $\vec{v} + \vec{w} = \overrightarrow{AC}$. Tomemos $\vec{u} = 2\overrightarrow{AC} = 2\,(\vec{v} + \vec{w})$. Temos $\vec{u}/\!/(\vec{v} + \vec{w})$. Entretanto, $\vec{u}$ não é paralelo a $\vec{v}$ (e nem a $\vec{w}$).

(t) $\|5\vec{u}\| = \| - 5\vec{u}\| = 5\|\vec{u}\|$.
Verdade. *Segue da definição de produto de escalar por vetor (confira).*

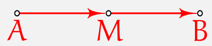
(u) $\vec{u}/\!/\vec{v}$, $\|\vec{u}\| = 2$ e $\|\vec{v}\| = 4 \Rightarrow \vec{v} = 2\vec{u}$ ou $\vec{v} = -2\vec{u}$.
Verdade. *De $\vec{u}/\!/\vec{v}$ temos que $\exists\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{u} = \lambda\vec{v}$. Mas*

$$\|\vec{u}\| = 2 \Rightarrow \|\lambda\vec{v}\| = 2 \Rightarrow |\lambda|.\|\vec{v}\| = 2 \Rightarrow |\lambda| = \tfrac{2}{\|\vec{v}\|} \Rightarrow |\lambda| = \tfrac{1}{2} \text{ (pois } \|\vec{v}\| = 4).$$

Desta forma, $|\lambda| = \frac{1}{2} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2}$ ou $\lambda = -\frac{1}{2}$. Substituindo em $\vec{u} = \lambda\vec{v}$ temos $\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{v}$ ou $\vec{u} = -\frac{1}{2}\vec{v}$.
Conclusão: $\vec{v} = 2\vec{u}$ ou $\vec{v} = -2\vec{u}$.

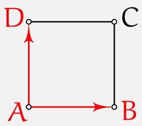
(v) $\|\vec{u}\| = 3 \Rightarrow$ o versor de $-10\vec{u}$ é $-\frac{\vec{u}}{3}$.
Verdade. *O versor de $-10\vec{u}$ é $\frac{-10\vec{u}}{\|-10\vec{u}\|} = -\frac{10\vec{u}}{|-10|.\|\vec{u}\|} = -\frac{10\vec{u}}{10.3} = -\frac{\vec{u}}{3}$.*

(w) $\|\alpha\vec{u}\| = \|\beta\vec{v}\|$ com $\vec{u}/\!/\vec{v} \Rightarrow \alpha = \beta$.
Falso. *Um contra-exemplo: Sejam A e B pontos distintos e M ponto médio de AB. Façamos $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AM}$, $\alpha = 1$ e $\beta = 2$.*



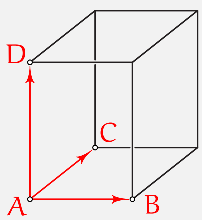
Logo, $\vec{u} = 2\vec{v}$ e temos $\|\alpha\vec{u}\| = \|\beta\vec{v}\|$ com $\vec{u}/\!/\vec{v}$. Entretanto, $\alpha \neq \beta$.

(x) $\vec{u} \perp \vec{v}$ e $\vec{w} \perp \vec{v} \Rightarrow \vec{u} \perp \vec{w}$.
Falso. *Um contra-exemplo: considere um quadrado $ABCD$ de tal modo que AB e AD sejam lados do quadrado e AC uma das diagonais. Façamos $\vec{u} = \overrightarrow{AD}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ e $w = 2\overrightarrow{AD}$.*



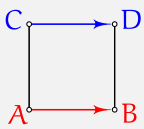
Temos $\vec{u} \perp \vec{v}$ e $\vec{w} \perp \vec{v}$. Entretanto, $\vec{u}$ é paralelo a $\vec{w}$ e não ortogonal a $\vec{w}$.

(y) $\vec{u} \perp \vec{v}$ e $\vec{w} \perp \vec{v} \Rightarrow \vec{u}/\!/\vec{w}$.
Falso. *Considere um bloco retangular, conforme a figura abaixo, e façamos $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ e $\vec{w} = \overrightarrow{AD}$.*



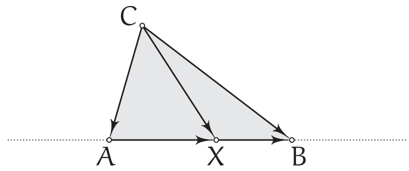
Temos $\vec{u} \perp \vec{v}$ e $\vec{w} \perp \vec{v}$. Entretanto, $\vec{u}$ é ortogonal a $\vec{w}$ e não paralelo a $\vec{w}$.

(z) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Rightarrow (A, B) = (C, D)$.
Falso. *Consideremos um quadrado $ABDC$, conforme a figura abaixo.*



Temos $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, pois estamos tratando de dois segmentos orientados com mesmo comprimento, direção e sentido. Portanto, representam o mesmo vetor. Entretanto, (A, B) e (C, D) são segmentos distintos, pois estão sobre lados opostos de um quadrado (apesar de terem o mesmo comprimento direção e sentido e, portanto, representarem o mesmo vetor). Lembre-se: segmentos orientados dependem dos pontos de origem e extremo, enquanto que vetores não dependem desses pontos.

Exercício 2.90 (**Resolvido**) Seja ABC um triângulo e $X \neq B$ na reta que passa por A e B. Logo, $\exists m \in \mathbb{R}$, $m \neq -1$, tal que $\overrightarrow{AX} = m\overrightarrow{XB}$. Coloque $\overrightarrow{CX}$ em função de $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB}$ e m.



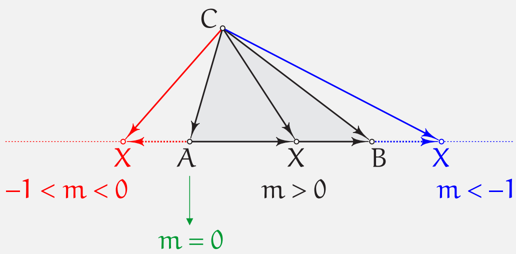
Resolução.

Temos:

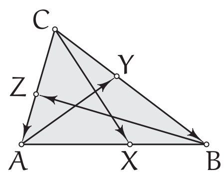
$$\overrightarrow{AX} = m\overrightarrow{XB} \Rightarrow \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CX} = m\left(\overrightarrow{XC} + \overrightarrow{CB}\right) \Rightarrow \overrightarrow{CX} - m\overrightarrow{XC} = m\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AC} \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{CX} + m\overrightarrow{CX} = m\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA} \Rightarrow (1+m)\,\overrightarrow{CX} = m\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA} \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{CX} = \frac{m\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}}{1+m}}.$$

Observação: *na figura abaixo temos uma ideia da distribuição de m ao longo da reta que passa por A e B.*



Exercício 2.91 (**Resolvido**) Generalização do exercício anterior: Seja ABC um triângulo, $X \neq B$, $Y \neq C$ e $Z \neq A$ nas retas que passam por AB, BC e CA. Logo, $\exists m, n, p \in \mathbb{R}$, $m, n, p \neq -1$, tais que $\overrightarrow{AX} = m\overrightarrow{XB}$, $\overrightarrow{BY} = n\overrightarrow{YC}$ e $\overrightarrow{CZ} = p\overrightarrow{ZA}$. Coloque $\overrightarrow{CX}$, $\overrightarrow{AY}$ e $\overrightarrow{BZ}$ em função de $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB}$, m, n e p.



Resolução.

$\overrightarrow{CX}$ está pronto pois, pelo Exercício 2.90 acima:

$$\boxed{\overrightarrow{CX} = \frac{m\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}}{1+m}}.$$

Quanto a $\overrightarrow{AY}$, temos:

$$\overrightarrow{BY} = n\overrightarrow{YC} \Rightarrow \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AY} = n\left(\overrightarrow{YA} + \overrightarrow{AC}\right) \Rightarrow \overrightarrow{AY} - n\overrightarrow{YA} = n\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BA} \Rightarrow \overrightarrow{AY} + n\overrightarrow{AY} = -n\overrightarrow{CA} - \left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}\right) \Rightarrow$$

$$(1+n)\,\overrightarrow{AY} = -n\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CA} \Rightarrow (1+n)\,\overrightarrow{AY} = -n\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA} \Rightarrow (1+n)\,\overrightarrow{AY} = \overrightarrow{CB} - (1+n)\,\overrightarrow{CA} \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{AY} = \frac{\overrightarrow{CB}-(1+n)\overrightarrow{CA}}{1+n} \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{AY} = \frac{\overrightarrow{CB}}{1+n} - \overrightarrow{CA}}.$$

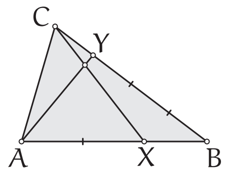
Quanto a $\overrightarrow{BZ}$, temos:

$$\overrightarrow{CZ} = p\overrightarrow{ZA} \Rightarrow \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BZ} = p\left(\overrightarrow{ZB} + \overrightarrow{BA}\right) \Rightarrow \overrightarrow{BZ} - p\overrightarrow{ZB} = -\overrightarrow{CB} + p\overrightarrow{BA} \Rightarrow \overrightarrow{BZ} + p\overrightarrow{BZ} = -\overrightarrow{CB} + p\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}\right) \Rightarrow$$

$$(1+p)\,\overrightarrow{BZ} = -\overrightarrow{CB} + p\overrightarrow{BC} + p\overrightarrow{CA} \Rightarrow (1+p)\,\overrightarrow{BZ} = -\overrightarrow{CB} - p\overrightarrow{CB} + p\overrightarrow{CA} \Rightarrow (1+p)\,\overrightarrow{BZ} = p\overrightarrow{CA} - (1+p)\,\overrightarrow{CB} \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{BZ} = \frac{p\overrightarrow{CA} - (1+p)\overrightarrow{CB}}{1+p} \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{BZ} = \frac{p}{1+p}\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB}}.$$

Exercício 2.92 (**Resolvido**) Em um triângulo ABC é dado X sobre AB tal que $||\overrightarrow{AX}|| = 2||\overrightarrow{XB}||$ e é dado Y sobre BC tal que $||\overrightarrow{BY}|| = 3||\overrightarrow{YC}||$. Mostre que os segmentos CX e AY não são paralelos.



Resolução.

Mostrar que CX e AY não são paralelos equivale ao fato de $\overrightarrow{CX}$ e $\overrightarrow{AY}$ não serem vetores paralelos. Para tanto, vamos supor que $\overrightarrow{CX}$ e $\overrightarrow{AY}$ são paralelos. Logo, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{CX} = \lambda\overrightarrow{AY}$ (condição de paralelismo: Proposição 2.3). Assim:

$$\overrightarrow{CX} = \lambda\overrightarrow{AY} \Rightarrow \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BX} = \lambda\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CY}\right) \Rightarrow \overrightarrow{CB} + \tfrac{1}{3}\overrightarrow{BA} = \lambda\left(\overrightarrow{AC} + \tfrac{1}{4}\overrightarrow{CB}\right) \Rightarrow \overrightarrow{CB} + \tfrac{1}{3}\overrightarrow{BA} = \lambda\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \tfrac{1}{4}\overrightarrow{CB}\right) \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{CB} + \tfrac{1}{3}\overrightarrow{BA} = \lambda\left(-\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{CB} + \tfrac{1}{4}\overrightarrow{CB}\right) \Rightarrow \overrightarrow{CB} + \lambda\overrightarrow{CB} - \tfrac{\lambda}{4}\overrightarrow{CB} = -\lambda\overrightarrow{BA} - \tfrac{1}{3}\overrightarrow{BA} \Rightarrow \left(1 + \tfrac{3}{4}\lambda\right)\overrightarrow{CB} = -\left(\lambda + \tfrac{1}{3}\right)\overrightarrow{BA} \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{CB} = -\frac{\lambda + \frac{1}{3}}{1 + \frac{3}{4}\lambda}\overrightarrow{BA}, \text{ se } 1 + \tfrac{3}{4}\lambda \neq 0.$$

Esta última equação diz que se $1 + \frac{3}{4}\lambda \neq 0$, os vetores $\overrightarrow{CB}$ e $\overrightarrow{BA}$ são paralelos, o que não é possível pois CB e BA são lados de triângulo. Logo, devemos analisar o que ocorre quando $1 + \frac{3}{4}\lambda = 0$. Neste caso, $\lambda = -\frac{4}{3}$. Mas, na penúltima equação acima, temos

$$\left(1 + \tfrac{3}{4}\lambda\right)\overrightarrow{CB} = -\left(\lambda + \tfrac{1}{3}\right)\overrightarrow{BA}$$

que, para $\lambda = -\frac{4}{3}$, se resume a

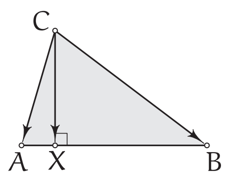
$$0.\overrightarrow{CB} = -\left(-\tfrac{4}{3} + \tfrac{1}{3}\right)\overrightarrow{BA} \Rightarrow \overrightarrow{0} = \overrightarrow{BA}.$$

Esta equação diz que o vetor $\overrightarrow{BA}$ é nulo, o que também não é possível pois BA é lado de triângulo.

Conclusão: quando supomos que $\overrightarrow{CX}$ e $\overrightarrow{AY}$ são paralelos, chegamos a resultados impossíveis (absurdos). Logo, $\overrightarrow{CX}$ e $\overrightarrow{AY}$ não são paralelos e, consequentemente, CX e AY não são paralelos.Em um triângulo ABC é dado X sobre AB tal que $||\overrightarrow{AX}|| = 2||\overrightarrow{XB}||$ e é dado Y sobre BC tal que $||\overrightarrow{BY}|| = 3||\overrightarrow{YC}||$. Mostre que os segmentos CX e AY se cruzam.

Observação: *se mudarmos a questão para: "Em um triângulo ABC é dado X sobre AB tal que $||\overrightarrow{AX}|| = 2||\overrightarrow{XB}||$ e é dado Y sobre BC tal que $||\overrightarrow{BY}|| = 3||\overrightarrow{YC}||$. Mostre que os segmentos CX e AY se cruzam" teremos um problema sutilmente bem mais difícil de ser resolvido com vetores.*

Exercício 2.93 (**Resolvido**) Sendo CX a altura do triângulo ABC relativa ao vértice C, exprima $\overrightarrow{CX}$ e X em função de A, $\overrightarrow{CA}$ e $\overrightarrow{CB}$, supondo que os ângulos internos $\widehat{A}$ e $\widehat{B}$ do triângulo são agudos.



Resolução.

Seja α e β as medidas dos ângulos $\widehat{A}$ e $\widehat{B}$. Como $0 < \alpha, \beta < \frac{\pi}{2}$, da trigonometria temos:

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{||\overrightarrow{CX}||}{||\overrightarrow{AX}||} \text{ e } \operatorname{tg}(\beta) = \frac{||\overrightarrow{CX}||}{||\overrightarrow{XB}||}.$$

Logo:

$$||\overrightarrow{CX}|| = \operatorname{tg}(\alpha)\, ||\overrightarrow{AX}|| \text{ e } ||\overrightarrow{CX}|| = \operatorname{tg}(\beta)\, ||\overrightarrow{XB}||,$$

ou seja,

$$\operatorname{tg}(\alpha)\, ||\overrightarrow{AX}|| = \operatorname{tg}(\beta)\, ||\overrightarrow{XB}||.$$

Como $\overrightarrow{AX}$ e $\overrightarrow{XB}$ são paralelos e possuem mesmo sentido, a equação acima diz que

$$\operatorname{tg}(\alpha)\, \overrightarrow{AX} = \operatorname{tg}(\beta)\, \overrightarrow{XB} \Rightarrow \overrightarrow{AX} = \frac{\operatorname{tg}(\beta)}{\operatorname{tg}(\alpha)} \overrightarrow{XB}; \text{ (pois } \operatorname{tg}(\alpha) \neq 0)$$

Neste ponto, podemos aproveitar o Exercício 2.90 acima. Para tanto, basta observar que $\overrightarrow{AX} = \frac{\operatorname{tg}(\beta)}{\operatorname{tg}(\alpha)} \overrightarrow{XB}$ é equivalente à condição $\overrightarrow{AX} = m\overrightarrow{XB}$ do Exercício 2.90, ou seja, $m = \frac{\operatorname{tg}(\beta)}{\operatorname{tg}(\alpha)}$.

Assim:

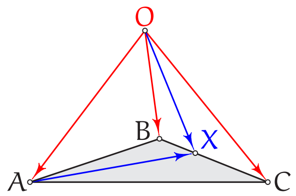
$$\overrightarrow{CX} = \frac{m\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA}}{1+m} \text{ (Exercício 2.90)} = \frac{\frac{\operatorname{tg}(\beta)}{\operatorname{tg}(\alpha)} \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA}}{1 + \frac{\operatorname{tg}(\beta)}{\operatorname{tg}(\alpha)}} \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{CX} = \frac{\operatorname{tg}(\beta)\overrightarrow{CB} + \operatorname{tg}(\alpha)\overrightarrow{CA}}{\operatorname{tg}(\alpha) + \operatorname{tg}(\beta)}}.$$

Quanto ao ponto X, temos $X = A + \overrightarrow{AX}$. Como $\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CX}$, temos

$$X = A + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CX} \Rightarrow \boxed{X = A - \overrightarrow{CA} + \frac{\operatorname{tg}(\beta)\overrightarrow{CB} + \operatorname{tg}(\alpha)\overrightarrow{CA}}{\operatorname{tg}(\alpha) + \operatorname{tg}(\beta)}}.$$

***Observação:** Este exercício pode ser resolvido de forma análoga com $\widehat{A}$ ou $\widehat{B}$ obtuso.*

Exercício 2.94 (**Resolvido**) Sejam $OABC$ um tetraedro e X o ponto do segmento BC tal que $\overrightarrow{BX} = m\overrightarrow{BC}$. Exprima $\overrightarrow{OX}$ e $\overrightarrow{AX}$ em função de $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ e m.



Resolução.

Temos:

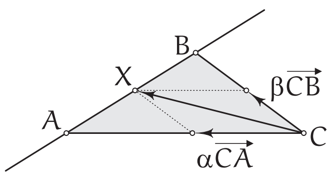
$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BX} \Rightarrow \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OB} + m\overrightarrow{BC}; \text{ (pois, de acordo com o enunciado, } \overrightarrow{BX} = m\overrightarrow{BC}) \Rightarrow$$
$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OB} + m\left(\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC}\right) \Rightarrow \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OB} + m\left(-\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right) \Rightarrow \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OB} - m\overrightarrow{OB} + m\overrightarrow{OC} \Rightarrow$$
$$\overrightarrow{OX} = (1-m)\,\overrightarrow{OB} + m\overrightarrow{OC}.$$

Quanto a $\overrightarrow{AX}$:

$$\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OX} = -\overrightarrow{OA} + (1-m)\,\overrightarrow{OB} + m\overrightarrow{OC}.$$

Exercício 2.95 (**Resolução**) Sejam A, B e C três pontos quaisquer tais que $A \neq B$. Mostre que:

$$\boxed{X \text{ é ponto da } \textbf{reta} \text{ que contém } AB \iff \overrightarrow{CX} = \alpha\overrightarrow{CA} + \beta\overrightarrow{CB} \text{ com } \alpha + \beta = 1}.$$



Resolução.

Temos que mostrar dois resultados:

(a) Se X é ponto da reta que contém AB, então $\overrightarrow{CX} = \alpha\overrightarrow{CA} + \beta\overrightarrow{CB}$ com $\alpha + \beta = 1$.

*(b) Se $\overrightarrow{CX} = \alpha\overrightarrow{CA} + \beta\overrightarrow{CB}$ com $\alpha + \beta = 1$, então X é ponto da **reta** que contém AB.*

Quanto ao item (a):

Se X é ponto da reta que contém AB, então o vetor $\overrightarrow{AX}$ é paralelo ao vetor $\overrightarrow{AB}$ e, portanto, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{AX} = \lambda\overrightarrow{AB}$ (condição de paralelismo: Proposição 2.3). Como $\overrightarrow{CX} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AX}$, temos $\overrightarrow{CX} = \overrightarrow{CA} + \lambda\overrightarrow{AB}$. Mas $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$. Logo,

$$\overrightarrow{CX} = \overrightarrow{CA} + \lambda\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}\right) = \overrightarrow{CA} + \lambda\left(-\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}\right) = (1-\lambda)\,\overrightarrow{CA} + \lambda\overrightarrow{CB}.$$

Conclusão: para escrevermos $\overrightarrow{CX} = \alpha\overrightarrow{CA} + \beta\overrightarrow{CB}$, devemos ter

$$\begin{cases} \alpha = 1 - \lambda \\ \beta = \lambda \end{cases}$$

e, portanto, $\alpha + \beta = (1-\lambda) + \lambda = 1$.

Quanto ao item (b):

Se $\overrightarrow{CX} = \alpha\overrightarrow{CA} + \beta\overrightarrow{CB}$ com $\alpha + \beta = 1$, então $\overrightarrow{CX} = (1-\beta)\,\overrightarrow{CA} + \beta\overrightarrow{CB}$ (isolando α na equação $\alpha + \beta = 1$).

Logo:

$$\overrightarrow{CX} = (1-\beta)\,\overrightarrow{CA} + \beta\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} - \beta\overrightarrow{CA} + \beta\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} + \beta\overrightarrow{AC} + \beta\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} + \beta\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}\right) = \overrightarrow{CA} + \beta\overrightarrow{AB}.$$

Mas

$$X = C + \overrightarrow{CX} = C + \overrightarrow{CA} + \beta\overrightarrow{AB};\ (\textit{substituindo o } \overrightarrow{CX} \textit{ acima}) = A + \beta\overrightarrow{AB}$$

ou seja, X é obtido de A somado a um vetor paralelo a AB, ou seja, X é um ponto pertencente à reta que contém AB.

Observação: *O ponto X pode não estar entre A e B!*

Exercício 2.96 (**Resolvido**) Sejam A, B e C três pontos quaisquer tais que $A \neq B$. Mostre que:

$$\boxed{X \text{ é ponto do } \textbf{segmento } AB \iff \overrightarrow{CX} = \alpha\overrightarrow{CA} + \beta\overrightarrow{CB} \text{ com } \alpha + \beta = 1 \text{ e } \alpha, \beta \geqslant 0}.$$

Resolução.

Aqui, basta aplicar o exercício anterior ressaltando que, como X está entre A e B, então $\overrightarrow{CX}$ só pode ser escrito como $\alpha\overrightarrow{CA} + \beta\overrightarrow{CB}$ quando $\alpha\overrightarrow{CA}$ e $\overrightarrow{CA}$ possuem o mesmo sentido, assim como $\beta\overrightarrow{CB}$ e $\overrightarrow{CB}$ (veja a figura do exercício anterior para o caso no qual ABC forma triângulo). Desta forma, se $\alpha\overrightarrow{CA}$ e $\overrightarrow{CA}$ devem possuir mesmo sentido, então $\alpha \geqslant 0$ (definição).De forma análoga, $\beta \geqslant 0$.

Observação: *$\alpha = 0$ ou $\beta = 0$ ocorrem quando X está em um dos extremos do segmento AB.*

Exercício 2.97 (**Resolvido**) Prove que as três medianas de um triângulo são concorrentes em um mesmo ponto interior ao triângulo. E que este ponto divide cada mediana na razão $2:1$ a partir do vértice correspondente.

Resolução.

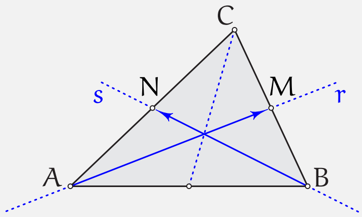
Observação: *Uma mediana AM de um trângulo ABC é um segmento de reta que liga o vértice A ao ponto médio M do lado oposto BC ao vértice A. Um triângulo possui, portanto, três medianas. O ponto de cruzamento das três medianas é chamado de **baricentro** do triângulo. Trata-se do "centro de gravidade" do triângulo.*

Vamos dividir a prova em duas partes.

Na primeira parte vamos provar que as <u>retas</u> suporte de duas medianas de um triângulo são concorrentes em um ponto que chamaremos de G.

Na segunda parte vamos provar que a terceira mediana passa por G, e que a divide na razão $2:1$ a partir do vértice correspondente.

(**i**) *Consideremos duas medianas* AM *e* BN *de um triângulo* ABC *juntamente com suas retas suporte* r *e* s*, respectivamente.*



Para mostrar que r *e* s *são concorrentes, basta mostrar que* $\overrightarrow{AM}$ *e* $\overrightarrow{BN}$ *não são paralelos.*

De fato: raciocinando por absurdo, suponhamos que $\overrightarrow{AM}$ *seja paralelo a* $\overrightarrow{BN}$*. Logo, pela Proposição 2.3, existe* $\lambda \in \mathbb{R}$ *tal que*

$$\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{BN}.$$

Mas $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}$ *e* $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AN}$*. Portanto,*

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \lambda\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AN}\right).$$

Sendo M *e* N *pontos médios de* BC *e* AC*, respectivamente, temos* $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ *e* $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$*. Portanto,*

$$\overrightarrow{AB} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \lambda\left(\overrightarrow{BA} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right).$$

Por fim, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$*. Portanto,*

$$\overrightarrow{AB} + \tfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right) = \lambda\left(\overrightarrow{BA} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right) \Rightarrow \overrightarrow{AB} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{BA} + \tfrac{\lambda}{2}\overrightarrow{AC} \Rightarrow \boxed{\left(\tfrac{1}{2} + \lambda\right)\overrightarrow{AB} = \left(-\tfrac{1}{2} + \tfrac{\lambda}{2}\right)\overrightarrow{AC}}.$$

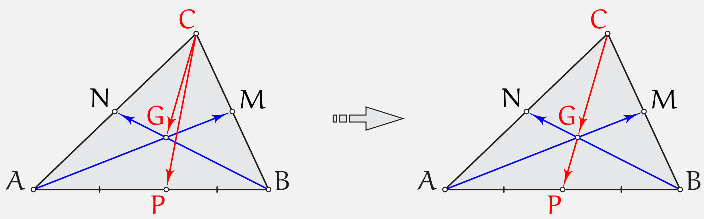
Se $\lambda = 1$*, então* $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$*, (↯).*

Se $\lambda \neq 1$ *temos* $\overrightarrow{AC} = \dfrac{\frac{1}{2} + \lambda}{-\frac{1}{2} + \frac{\lambda}{2}}\overrightarrow{AB}$ *e, pela Proposição 2.3, temos* $\overrightarrow{AC} /\!/ \overrightarrow{AB}$*, (↯).*

Portanto, em ambas as situações chegamos a contradições, o que significa que r *e* s *não podem ser paralelas, ou seja,* r *e* s *são concorrentes.*

(**ii**) *Consideremos o triângulo* ABC *e os pontos médios* M*,* N *e* P *dos lados* BC*,* AC *e* AB*, respectivamente.*

No Item (**i**) *vimos que as retas suporte de* AM *e* BN *são concorrentes. Chamemos de* G *o ponto de concorrência dessas retas e consideremos os vetores* $\overrightarrow{CG}$ *e* $\overrightarrow{CP}$*.*



Se mostrarmos que $\overrightarrow{CG}$ *e* $\overrightarrow{CP}$ *são vetores paralelos estaremos provando que a reta suporte da mediana* CP *passa pelo ponto* G *e, portanto,* G *seria o ponto de intersecção das três retas suporte das três medianas do triângulo* ABC*.*

Pela Proposição 2.3, existem $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *tais que* $\overrightarrow{NG} = \alpha\overrightarrow{BN}$ *e* $\overrightarrow{MG} = \beta\overrightarrow{AM}$*. Assim,*

$$\begin{cases} \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{NG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \alpha\overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \alpha\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \alpha\left(\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}\right) = \left(\frac{1}{2} + \frac{\alpha}{2}\right)\overrightarrow{CA} - \alpha\overrightarrow{CB} \\ \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{MG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} + \beta\left(\overrightarrow{AM}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} + \beta\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CM}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} + \beta\left(\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}\right) = -\beta\overrightarrow{CA} + \left(\frac{1}{2} + \frac{\beta}{2}\right)\overrightarrow{CB} \end{cases}$$

Logo,

$$\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{\alpha}{2}\right)\overrightarrow{CA} - \alpha\overrightarrow{CB} = -\beta\overrightarrow{CA} + \left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{\beta}{2}\right)\overrightarrow{CB} \Rightarrow \boxed{\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{\alpha}{2} + \beta\right)\overrightarrow{CA} = \left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{\beta}{2} + \alpha\right)\overrightarrow{CB}}.$$

Como os vetores $\overrightarrow{CA}$ *e* $\overrightarrow{CB}$ *não são paralelos, a equação vetorial acima somente será verdadeira quando os coeficientes forem nulos, ou seja:*

$$\begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{2} + \beta = 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{\beta}{2} + \alpha = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + 2\beta = -1 \\ 2\alpha + \beta = -1 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta = -\tfrac{1}{3}$$

Logo, $\overrightarrow{CG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CB} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}\right)$.

Mas $\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}\right)$.

Conclusão: $\boxed{\overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CP}}$.

Esta última equação nos diz algo mais:

- *Pela Proposição 2.3,* $\overrightarrow{CG}$ *e* $\overrightarrow{CP}$ *são vetores paralelos, o que significa que a reta suporte da mediana* CP *passa pelo ponto* G*.*
- *Como* $\frac{2}{3} < 1$*, de* $\overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CP}$ *temos* $G = C + \frac{2}{3}\overrightarrow{CP}$ *e, portanto,* G *está na mediana* CP*. Isto significa que o baricentro* G *está no interior do triângulo* ABC*.*
- *De* $\|\overrightarrow{CG}\| = \|\frac{2}{3}\overrightarrow{CP}\|$ *temos* $\|\overrightarrow{CG}\| = \frac{2}{3}\|\overrightarrow{CP}\|$*, o que significa que* G *divide a mediana* CP *na razão* $2:1$ *a partir do vértice* C*, ou seja, o segmento* CG *possui o dobro do comprimento do segmento* GP*.*

Finalizando: a escolha das duas retas suporte das medianas do Item (**i**) *foi arbitrária. Isto significa que o trabalho feito no Item* (**ii**) *pode ser com qualquer uma das três medianas, permitindo as mesmas conclusões para qualquer mediana do triângulo* ABC*.*

Exercício 2.98 (**Resolvido**) Prove que as três bissetrizes internas de um triângulo são concorrentes em um mesmo ponto interior ao triângulo.

Resolução.

Observação: *o ponto de encontro das bissetrizes internas de um triângulo é chamado de* ***incentro****. Trata-se do ponto equidistante aos três lados do triângulo e, portanto, trata-se do centro do círculo inscrito ao triângulo.*

*************** ***RESOLVER*** ***************

Exercício 2.99 (**Resolvido**) Prove que as três alturas internas de um triângulo são concorrentes em um mesmo ponto.

Resolução.

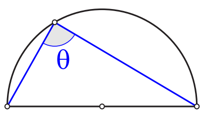
Observação: *o ponto de encontro das alturas de um triângulo é chamado de* ***ortocentro****.*

*************** ***RESOLVER*** ***************

Exercícios referentes à Seção 2.3 ***Produto Escalar***, página 34.

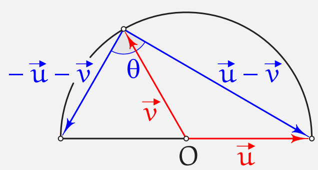
$Oxyz$ é sistema de coordenadas cartesianas ortogonais no espaço com base canônica $B = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

Exercício 2.100 Mostre que qualquer ângulo inscrito em uma semi-circunferência "enxergando" o diâmetro é reto.



Resolução.

Posicionemos representantes dos vetores $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$ *conforme figura abaixo.*



As cordas que formam o ângulo que devemos mostrar ser reto são tais que os vetores $-\vec{u}-\vec{v}$ *e* $\vec{u}-\vec{v}$ *podem ser* *posicionados sobre elas. Além disso,* $||\vec{u}|| = ||\vec{v}|| = r$ *(raio do semicírculo). Logo,*

$$(-\vec{u}-\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = ||-\vec{u}-\vec{v}||.||\vec{u}-\vec{v}||\cos(\theta) \Rightarrow$$

$$\cos(\theta) = \frac{-(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})}{||\vec{u}+\vec{v}||.||\vec{u}-\vec{v}||} = \frac{-(\vec{u}\cdot\vec{u}-\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\vec{u}-\vec{v}\cdot\vec{v})}{||\vec{u}+\vec{v}||.||\vec{u}-\vec{v}||} = \frac{-\left(||\vec{u}||^2-||\vec{v}||^2\right)}{||\vec{u}+\vec{v}||.||\vec{u}-\vec{v}||} = 0 \ (\textit{pois } ||\vec{u}|| = ||\vec{v}||)$$

Assim, $\cos(\theta) = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$ rad, *ou seja, o ângulo em questão é reto.*

Exercício 2.101 Ache a medida em radianos do ângulo formado pelos vetores $\vec{u} = (3,3,0)$ e $\vec{v} = (2,1,-2)$.

Resolução.

Seja θ *a medida do ângulo em questão. Temos:*

$$\cos(\theta) = \frac{(3,3,0)\cdot(2,1,-2)}{||(3,3,0)||.||(2,1,-2)||} = \frac{9}{\sqrt{18}\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

Exercício 2.102 Ache x de modo que $\vec{u} \perp \vec{v}$, sendo $\vec{u} = (x,x,4)$ e $\vec{v} = (4,x,1)$.

Resolução.

Como $\vec{u} \perp \vec{v}$, *temos* $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \Rightarrow (x,x,4)\cdot(4,x,1) = 0 \Rightarrow 4x + x^2 + 4 = 0 \Rightarrow x = -2$.

Exercício 2.103 Ache $\vec{u}$ ortogonal a $\vec{v} = (4,-1,5)$ e $\vec{w} = (1,-2,3)$ e que satisfaz $\vec{u}\cdot(1,1,1) = -1$.

Resolução.

Seja $\vec{u} = (x,y,z)$. *Logo:*

$$\begin{cases} (x,y,z)\cdot(4,-1,5) = 0 \\ (x,y,z)\cdot(1,-2,3) = 0 \\ (x,y,z)\cdot(1,1,1) = -1 \end{cases}$$

ou seja:

$$\begin{cases} 4x - y + 5z = 0 \\ x - 2y + 3z = 0 \\ x + y + z = -1 \end{cases} \Rightarrow x = 1,\ y = -1 \ \textit{e}\ z = -1$$

Logo: $\vec{u} = (1,-1,-1)$.

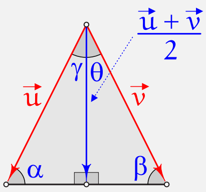
Exercício 2.104 Mostre, usando vetores, que um triângulo é isósceles se, e somente se, possui dois ângulos congruentes.

Observação: Um triângulo isósceles é, por definição, um triângulo com dois lados congruentes.

Resolução.

$(\Rightarrow)$ *Hipótese: o triângulo é isósceles. Tese: o triângulo possui dois ângulos congruentes.*

Posicionemos os vetores $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$ *conforme figura abaixo.*



Logo, $||\vec{u}|| = ||\vec{v}||$ *e devemos mostrar que* $\alpha = \beta$. *Para tanto, basta mostrar que* $\gamma = \theta$. *Temos:*

$$\begin{cases} \vec{u}\cdot\frac{\vec{u}+\vec{v}}{2} = ||\vec{u}||.\left\|\frac{\vec{u}+\vec{v}}{2}\right\|\cos(\gamma) \\ \vec{v}\cdot\frac{\vec{u}+\vec{v}}{2} = ||\vec{v}||.\left\|\frac{\vec{u}+\vec{v}}{2}\right\|\cos(\theta) \end{cases} \qquad (*)$$

Mas, aplicando a propriedade distributiva, também temos:

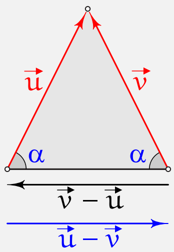
$$\begin{cases} \vec{u}\cdot\frac{\vec{u}+\vec{v}}{2} = \frac{1}{2}\left(||\vec{u}||^2+\vec{u}\cdot\vec{v}\right) \\ \vec{v}\cdot\frac{\vec{u}+\vec{v}}{2} = \frac{1}{2}\left(||\vec{v}||^2+\vec{u}\cdot\vec{v}\right) \end{cases} \Rightarrow \vec{u}\cdot\frac{\vec{u}+\vec{v}}{2} = \vec{v}\cdot\frac{\vec{u}+\vec{v}}{2};\ (\textit{pois } ||\vec{u}|| = ||\vec{v}||)$$

Utilizando essa informação em $(*)$, *temos*

$$||\vec{u}||.\left\|\frac{\vec{u}+\vec{v}}{2}\right\|\cos(\gamma) = ||\vec{v}||.\left\|\frac{\vec{u}+\vec{v}}{2}\right\|\cos(\theta) \Rightarrow \cos(\gamma)=\cos(\theta) \Rightarrow \gamma=\theta.$$

Consequentemente, $\alpha=\beta$ *e, portanto, o triângulo possui dois ângulos congruentes.*

$(\Leftarrow)$ *Posicionemos os vetores* $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$ *conforme figura abaixo.*



Por hipótese, o triângulo possui dois ângulos congruentes e temos de mostrar que $||\vec{u}|| = ||\vec{v}||$. *Temos:*

$$\begin{cases} \vec{u}\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = ||\vec{u}||.||\vec{u}-\vec{v}||\cos(\alpha) \\ \vec{v}\cdot(\vec{v}-\vec{u}) = ||\vec{v}||.||\vec{v}-\vec{u}||\cos(\alpha) \end{cases} \Rightarrow \frac{\vec{u}\cdot(\vec{u}-\vec{v})}{||\vec{u}||} = \frac{\vec{v}\cdot(\vec{v}-\vec{u})}{||\vec{v}||}\ (\textit{pois } ||\vec{u}-\vec{v}||\cos(\alpha) = ||\vec{v}-\vec{u}||\cos(\alpha)\,)$$

$$\Rightarrow \frac{||\vec{u}||^2-\vec{u}\cdot\vec{v}}{||\vec{u}||} = \frac{||\vec{v}||^2-\vec{u}\cdot\vec{v}}{||\vec{v}||}\ (\textit{propriedade distributiva})$$

$$\Rightarrow ||\vec{u}|| - \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{||\vec{u}||} = ||\vec{v}|| - \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{||\vec{v}||} \Rightarrow ||\vec{u}|| - ||\vec{v}|| = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{||\vec{u}||} - \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{||\vec{v}||}$$

$$\Rightarrow ||\vec{u}|| - ||\vec{v}|| = \frac{||\vec{v}||(\vec{u}\cdot\vec{v}) - ||\vec{u}||(\vec{u}\cdot\vec{v})}{||\vec{u}||.||\vec{v}||} \Rightarrow ||\vec{u}|| - ||\vec{v}|| = -\left(||\vec{u}|| - ||\vec{v}||\right)\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{||\vec{u}||.||\vec{v}||}$$

$$\Rightarrow \left(||\vec{u}|| - ||\vec{v}||\right)\left(1+\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{||\vec{u}||.||\vec{v}||}\right) = 0.$$

A última igualdade ocorre se, e somente se, (**a**): $1+\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{||\vec{u}||.||\vec{v}||} = 0$ *ou* (**b**): $||\vec{u}|| - ||\vec{v}|| = 0$.

No caso (**a**) *temos* $\vec{u}\cdot\vec{v} = -||\vec{u}||.||\vec{v}||$, *o que implica que o ângulo entre os vetores* $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$ *é* π $(-1=\cos(\pi))$ *e, portanto, não pode ocorrer.*

Resta o casos (**b**): $||\vec{u}|| = ||\vec{v}||$, *conforme queríamos. Logo, o triângulo possui dois lados com mesma medida, ou seja, é isósceles.*

Exercício 2.105 Demonstre que $|\vec{u}\cdot\vec{v}| = ||\vec{u}||.||\vec{v}|| \iff \vec{u}$ e $\vec{v}$ são paralelos. (cuidado: uma implicação dupla!)

Resolução.

$(\Rightarrow)$ *Por hipótese,* $|\vec{u}\cdot\vec{v}| = ||\vec{u}||.||\vec{v}||$. *Logo,* $\vec{u}\cdot\vec{v} = \pm||\vec{u}||.||\vec{v}||$.

Se $\vec{u}\cdot\vec{v} = +||\vec{u}||.||\vec{v}|| \Rightarrow \cos(\alpha) = 1$ (α *é a medida do ângulo formado por* $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$) $\Rightarrow \alpha = 0 \Rightarrow \vec{u}//\vec{v}$ (*e com mesmo sentido*).

Se $\vec{u}\cdot\vec{v} = -||\vec{u}||.||\vec{v}|| \Rightarrow \cos(\alpha) = -1$ (α *é a medida do ângulo formado por* $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$) $\Rightarrow \alpha = \pi \Rightarrow \vec{u}//\vec{v}$ (*e com sentidos opostos*).

$(\Leftarrow)$ *Por hipótese,* $\vec{u}//\vec{v} \Rightarrow$ *a medida* α *do ângulo formado por* $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$ *é* 0 *ou* π.

Se $\alpha = 0 \Rightarrow \cos(\alpha) = 1 \Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = ||\vec{u}||.||\vec{v}||\cos(\alpha) = ||\vec{u}||.||\vec{v}||$.

Se $\alpha = \pi \Rightarrow \cos(\alpha) = -1 \Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = ||\vec{u}||.||\vec{v}||\cos(\alpha) = -||\vec{u}||.||\vec{v}||$.

Em ambos os casos, $|\vec{u}\cdot\vec{v}| = ||\vec{u}||.||\vec{v}||$, *conforme queríamos.*

Exercício 2.106 Mostre que qualquer vetor $\vec{u}$ do espaço pode ser escrito como

$$\vec{u} = \left(\vec{u}\cdot\vec{i}\right)\vec{i} + \left(\vec{u}\cdot\vec{j}\right)\vec{j} + \left(\vec{u}\cdot\vec{k}\right)\vec{k}$$

e, também, como

$$\vec{u} = \mathrm{proj}_{\vec{i}}\,\vec{u} + \mathrm{proj}_{\vec{j}}\,\vec{u} + \mathrm{proj}_{\vec{k}}\,\vec{u}$$

Interprete geometricamente esta última equação (faça um desenho envolvendo todos os vetores que nela aparecem).

Resolução.

Seja

$$\vec{u} = (a, b, c) = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k} \qquad (*)$$

No primeiro caso temos:

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{i} &= \left(a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}\right)\cdot\vec{i}\\ &= a\left(\vec{i}\cdot\vec{i}\right) + b\left(\vec{j}\cdot\vec{i}\right) + c\left(\vec{k}\cdot\vec{i}\right)\\ &= a\|\vec{i}\|^2 + b.0 + c.0 \text{ (pois a base canônica é ortonormal)}\\ &= a.\end{aligned}$$

De modo análogo, mostra-se que $b = \vec{u}\cdot\vec{j}$ *e* $c = \vec{u}\cdot\vec{k}$. *Substituindo essas informações em* $(*)$ *temos:*

$$\vec{u} = \left(\vec{u}\cdot\vec{i}\right)\vec{i} + \left(\vec{u}\cdot\vec{j}\right)\vec{j} + \left(\vec{u}\cdot\vec{k}\right)\vec{k},$$

conforme queríamos.

No segundo caso temos:

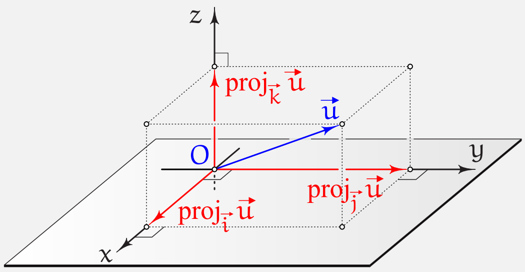
$$\begin{aligned}\operatorname{proj}_{\vec{i}}\vec{u} &= \frac{\vec{u}\cdot\vec{i}}{\|\vec{i}\|^2}\vec{i} \text{ (fórmula provada na parte teórica)}\\ &= \frac{\left(a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}\right)\cdot\vec{i}}{1^2}\vec{i} = a\vec{i} \text{ (veja desenvolvimento feito no caso acima)}\end{aligned}$$

De modo análogo, $\operatorname{proj}_{\vec{j}}\vec{u} = b\vec{j}$ *e* $\operatorname{proj}_{\vec{k}}\vec{u} = c\vec{k}$. *Substituindo essas informações em* $(*)$, *temos:*

$$\vec{u} = \operatorname{proj}_{\vec{i}}\vec{u} + \operatorname{proj}_{\vec{j}}\vec{u} + \operatorname{proj}_{\vec{k}}\vec{u},$$

conforme queríamos.

Eis a interpretação geométrica:



Exercícios referentes à Seção 2.4 ***Produto Vetorial***, página 40.

$Oxyz$ é sistema de coordenadas cartesianas ortogonais no espaço com base canônica $\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

Exercício 2.107 (**Resolvido**) Calcule $\vec{u}\times\vec{v}$ e $\vec{v}\times\vec{u}$ nos seguintes casos:

(**a**) $\vec{u} = (6, -2, -4)$ e $\vec{v} = (-1, -2, 1)$;
(**b**) $\vec{u} = (1, -3, 1)$ e $\vec{v} = (1, 1, 4)$;
(**c**) $\vec{u} = (2, 1, 2)$ e $\vec{v} = (4, 2, 4)$.

O que podemos afirmar a respeito de $\vec{u}\times\vec{v}$ e $\vec{v}\times\vec{u}$?

Resolução.

Item (**a**):

$$\vec{u}\times\vec{v} \equiv \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6 & -2 & -4 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \equiv -10\vec{i} - 2\vec{j} - 14\vec{k} = (-10,-2,-14) \qquad e$$

$$\vec{v}\times\vec{u} \equiv \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -2 & 1 \\ 6 & -2 & -4 \end{bmatrix} \equiv 10\vec{i} + 2\vec{j} + 14\vec{k} = (10,2,14)\,.$$

Item (**b**):

$$\vec{u}\times\vec{v} \equiv \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \equiv -13\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k} = (-13,-3,4) \qquad e \qquad \vec{v}\times\vec{u} \equiv \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \equiv 13\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k} = (13,3,-4)\,.$$

Item (**c**):

$$\vec{u}\times\vec{v} \equiv \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{bmatrix} \equiv \vec{0} = (0,0,0) \qquad e \qquad \vec{u}\times\vec{v} \equiv \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \equiv \vec{0} = (0,0,0)\,.$$

Os vetores $\vec{u}\times\vec{v}$ e $\vec{v}\times\vec{u}$ possuem mesmo comprimento, mesma direção (para os não nulos), porém sentidos opostos.

Exercício 2.108 (**Resolvido**) Calcule a área do triângulo ABC, sendo $\overrightarrow{AC} = (-1,1,0)$ e $\overrightarrow{AB} = (0,1,3)$.

Resolução.

A área $\mathcal{A}$ do triângulo ABC é numericamente igual à metade do comprimento do vetor $\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AB}$:

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AB}\| = \frac{1}{2}\left\|\det\begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}\right\| = \frac{1}{2}\|3\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}\| = \frac{1}{2}\sqrt{3^2 + 3^2 + (-1)^2} = \frac{\sqrt{19}}{2}.$$

Exercício 2.109 (**Resolvido**) Ache um vetor **unitário** e ortogonal a $\vec{u} = (1,-3,1)$ e $\vec{v} = (-3,3,3)$.

Resolução.

Sabemos que $\vec{u}\times\vec{v}$ é ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Logo, o versor de $\vec{u}\times\vec{v}$ será um vetor unitário ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$:

$$\vec{u}\times\vec{v} \equiv \det\begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -3 & 1 \\ -3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \equiv -12\vec{i} - 6\vec{j} - 6\vec{k} = (-12,-6,-6)\,.$$

$$\frac{\vec{u}\times\vec{v}}{\|\vec{u}\times\vec{v}\|} = \frac{(-12,-6,-6)}{\sqrt{(-12)^2+(-6)^2+(-6)^2}} = \frac{(-12,-6,-6)}{\sqrt{216}} = \left(-\frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{6}\right).$$

Exercício 2.110 (**Resolvido**) Resolva o sistema (ache as coordenadas de $\vec{x}$):

$$\begin{cases} \vec{x}\cdot\left(2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}\right) = 9 \\ \vec{x}\times\left(-\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}\right) = -2\vec{i} + 2\vec{k} \end{cases}.$$

Resolução.

Seja $\vec{x} = (a,b,c)$. Temos:

$$\vec{x}\cdot\left(2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}\right) = 9 \Rightarrow (a,b,c)\cdot(2,3,4) = 9 \Rightarrow 2a + 3b + 4c = 9. \qquad (*)$$

e

$$\vec{x} \times \left(-\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}\right) = -2\vec{i} + 2\vec{k} \Rightarrow (a, b, c) \times (-1, 1, -1) = (-2, 0, 2) \Rightarrow$$
$$\det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & b & c \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \equiv (-2, 0, 2) \Rightarrow (-b - c, a - c, a + b) = (-2, 0, 2)\,. \qquad (**)$$

Juntando as informações $(*)$ *e* $(**)$ *temos:*

$$\begin{cases} 2a + 3b + 4c = 9 \\ \quad - b - c = -2 \\ a \quad - c = 0 \\ a + b \quad = 2 \end{cases} \Rightarrow \cdots \Rightarrow a = b = c = 1,$$

ou seja, $\vec{x} = (1, 1, 1)$.

Exercício 2.111 (**Resolvido**) Ache $\vec{x}$ tal que $\vec{x} \times \left(\vec{i} + \vec{k}\right) = 2\left(\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}\right)$ e $||\vec{x}|| = \sqrt{6}$.

Resolução.

Seja $\vec{x} = (a, b, c)$. *Temos:*

$$\vec{x} \times \left(\vec{i} + \vec{k}\right) = 2\left(\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}\right) \Rightarrow (a, b, c) \times (1, 0, 1) = (2, 2, -2) \Rightarrow$$
$$\det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & b & c \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \equiv (2, 2, -2) \Rightarrow (b, c - a, -b) = (2, 2, -2)\,. \qquad (*)$$

Temos também:

$$||\vec{u}|| = \sqrt{6} \Rightarrow \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{6} \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 6. \qquad (**)$$

Juntando as informações $(*)$ *e* $(**)$ *temos:*

$$\begin{cases} \quad b \quad = 2 \\ -a \quad + c = 2 \\ \quad - b \quad = -2 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 6 \end{cases} \Rightarrow \cdots \Rightarrow a = -1,\ b = 2 \text{ e } c = 1,$$

ou seja, $\vec{x} = (-1, 2, 1)$.

Exercício 2.112 (**Resolvido**) Mostre que:

(**a**) $||\vec{u} \times \vec{v}|| \leqslant ||\vec{u}||.||\vec{v}||$;
(**b**) $||\vec{u} \times \vec{v}|| = ||\vec{u}||.||\vec{v}|| \iff \vec{u} \perp \vec{v}$ (cuidado: implicação dupla!)

Resolução.

(**a**) *Temos:*

$$||\vec{u} \times \vec{v}|| = ||\vec{u}||.||\vec{v}|| \operatorname{sen}(\theta)\,;\ (\theta \text{ é a medida do ângulo entre } \vec{u} \text{ e } \vec{v}) \Rightarrow$$
$$||\vec{u} \times \vec{v}|| \leqslant ||\vec{u}||.||\vec{v}||;\ (\text{pois } 0 \leqslant \operatorname{sen}(\theta) \leqslant 1 \text{ para } 0 \leqslant \theta \leqslant \pi).$$

(**b**) *Temos:*
$(\Rightarrow)$ *Se* $||\vec{u} \times \vec{v}|| = ||\vec{u}||.||\vec{v}||$, *então* $\operatorname{sen}(\theta) = 1$ (θ *é a medida do ângulo entre* $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$) $\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$.
$(\Leftarrow)$ *Se* $\vec{u} \perp \vec{v}$, *então* $\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \operatorname{sen}(\theta) = 1$. *Logo,* $||\vec{u} \times \vec{v}|| = ||\vec{u}||.||\vec{v}|| \operatorname{sen}(\theta) \Rightarrow ||\vec{u} \times \vec{v}|| = ||\vec{u}||.||\vec{v}||$.

Exercício 2.113 (**Resolvido**) Prove que $(\vec{u} + \vec{v}) \times (\vec{u} - \vec{v}) = 2(\vec{v} \times \vec{u})$.

Resolução.

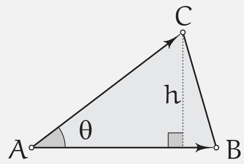
Temos:

$$(\vec{u}+\vec{v})\times(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}\times\vec{u}-\vec{u}\times\vec{v}+\vec{v}\times\vec{u}-\vec{v}\times\vec{v} = \vec{0}+\vec{v}\times\vec{u}+\vec{v}\times\vec{u}-\vec{0} = 2\,(\vec{v}\times\vec{u})\,.$$

Exercício 2.114 (**Resolvido**) Mostre que a altura do triângulo ABC relativa ao lado AB mede $h = \frac{||\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}||}{||\overrightarrow{AB}||}$.

Resolução.

Consideremos a figura abaixo:



Temos $h = ||\overrightarrow{AC}||\,\mathrm{sen}\,(\theta)$.
Mas $||\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|| = ||\overrightarrow{AB}||.||\overrightarrow{AC}||\,\mathrm{sen}\,(\theta)$.
Logo, $||\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|| = ||\overrightarrow{AB}||h \Rightarrow h = \frac{||\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}||}{||\overrightarrow{AB}||}$.

Exercícios referentes à Seção 2.5 ***Produto Misto***, página 44.

$Oxyz$ é sistema de coordenadas cartesianas ortogonais no espaço com base canônica $B = \{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$.

Exercício 2.115 (**Resolvido**) Calcule o volume do paralelepípedo gerado pelos vetores $\vec{u} = (2,-2,0)$, $\vec{v} = (0,1,0)$ e $\vec{w} = (-2,-1,-1)$.

Resolução.

Temos:

$$\mathcal{V} = |\vec{u}\cdot\vec{v}\times\vec{w}| = \left|\det\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & -1 \end{bmatrix}\right| = |-2| = 2.$$

Exercício 2.116 (**Resolvido**) Mostre que $|\vec{u}\cdot\vec{v}\times\vec{w}| \leqslant ||\vec{u}||.||\vec{v}||.||\vec{w}||$.

Resolução.

Temos:

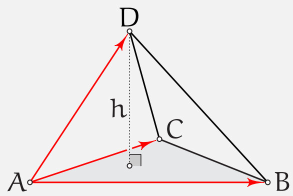
$$|\vec{u}\cdot\vec{v}\times\vec{w}| = |\vec{u}\times\vec{v}\cdot\vec{w}| \underset{(*)}{\leqslant} ||\vec{u}\times\vec{v}||.||\vec{w}|| \underset{(**)}{\leqslant} ||\vec{u}||.||\vec{v}||.||\vec{w}||.$$

Em $(*)$ *utilizamos a Desigualdade de Cauchy-Schwarz (Exemplo 2.19, página 38).*
Em $(**)$ *utilizamos o Item* (**a**) *do Exercício Resolvido 2.112, página 81.*

Exercício 2.117 (**Resolvido**) Prove que a altura do tetraedro $ABCD$ relativa à face ABC (base do tetraedro) tem medida $h = \frac{|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}|}{||\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}||}$.
Dica: O volume do tetraedro é $\frac{1}{3}$(área ΔABC)h.

Resolução.

Consideremos a figura abaixo:



A área da base ABC *do tetraedro é dada por*

$$\Big(\text{Área da base ABC}\Big) = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\|. \qquad (*)$$

O volume do tetraedro pode ser dado de dois modos diferentes:

(**a**) $\mathcal{V} = \frac{1}{6}|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}|$; (*Corolário 2.3 da Proposição 2.17, página 47*)

(**b**) $\mathcal{V} = \frac{1}{3}\Big(\text{Área da base ABC}\Big)\,h$; (*da Geometria Euclidiana Espacial*)

Juntando (**a**) *e* (**b**) *temos:*

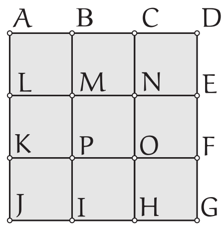
$$\frac{1}{6}|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}| = \frac{1}{3}\Big(\text{Área da base ABC}\Big)\,h \Rightarrow \frac{1}{6}|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}| = \frac{1}{3}\Big(\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\|\Big)\,h;\ (\text{substituindo } (*)) \Rightarrow$$

$$\boxed{h = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}|}{\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\|}}$$

Seção EXTRA de Exercícios Propostos: *Vetores e Coordenadas Cartesianas*

Exercícios referentes à Seção 2.1 ***Vetores: abordagem geométrica***, página 15.

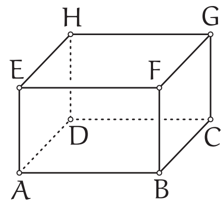
Exercício 2.118 Considere a figura abaixo, formada por quadrados:



Determine representantes para os vetores abaixo, expressando-os com origem no ponto A.

(a) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CN}$ **(b)** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}$ **(c)** $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DC}$ **(d)** $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AK}$
(e) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{EO}$ **(f)** $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BL}$ **(g)** $\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{AN}$ **(h)** $\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{OE}$
(i) $\overrightarrow{MO}-\overrightarrow{NP}$ **(j)** $\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{CB}$ **(k)** $\overrightarrow{LP}+\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{NF}$ **(l)** $\overrightarrow{BL}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{PB}$

Exercício 2.119 Considere o bloco retangular da figura abaixo:



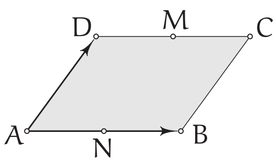
Determine representantes para os vetores abaixo, expressando-os com origem no ponto A.

(a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CG}$ **(b)** $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DG}$ **(c)** $\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{EH}$ **(d)** $\overrightarrow{EG}-\overrightarrow{BC}$
(e) $\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{EH}$ **(f)** $\overrightarrow{EF}-\overrightarrow{FB}$ **(g)** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}$ **(h)** $\overrightarrow{EG}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{FH}$

Exercício 2.120 Dados dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não paralelos, representar graficamente os vetores $\vec{u}+\vec{v}$, $\vec{u}-\vec{v}$, $\vec{v}-\vec{u}$ e $-\vec{u}-\vec{v}$, todos com origem em um mesmo ponto.

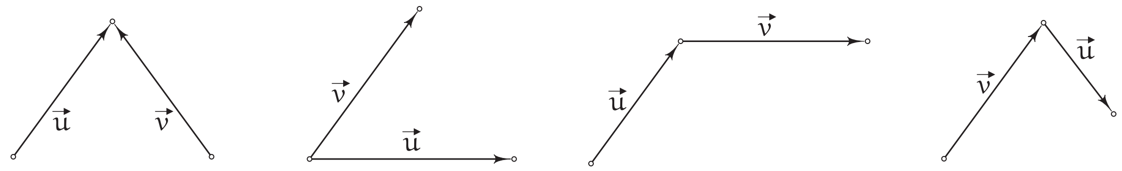
Exercício 2.121 Decidir se é verdadeira ou falsa cada uma das afirmações:
(a) Se $\vec{u}=\vec{v}$, então $||\vec{u}||=||\vec{v}||$;
(b) Se $||\vec{u}||=||\vec{v}||$, então $\vec{u}=\vec{v}$;
(c) Se $\vec{u}/\!/\vec{v}$, então $\vec{u}=\vec{v}$;
(d) Se $\vec{u}=\vec{v}$, então $\vec{u}/\!/\vec{v}$;
(e) Se $\vec{w}=\vec{u}+\vec{v}$, então $||\vec{w}||=||\vec{u}||+||\vec{v}||$;
(f) Se $||\vec{w}||=||\vec{u}||+||\vec{v}||$, então $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são paralelos;
(g) Se $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$, então ABCD (nesta ordem) é um paralelogramo;
(h) $||5\vec{v}||=||-5\vec{v}||=5||\vec{v}||$;
(i) Os vetores $3\vec{v}$ e $-4\vec{v}$ são paralelos e de mesmo sentido;
(j) Se $\vec{u}/\!/\vec{v}$, $||\vec{u}||=2$ e $||\vec{v}||=4$, então $\vec{v}=2\vec{u}$ ou $\vec{v}=-2\vec{u}$;
(k) Se $||\vec{v}||=3$, então o versor de $-10\vec{v}$ é $-\frac{\vec{v}}{3}$.

Exercício 2.122 O paralelogramo ABCD da figura abaixo é determinado pelos vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AD}$, sendo M e N pontos médios dos lados DC e AB, respectivamente.

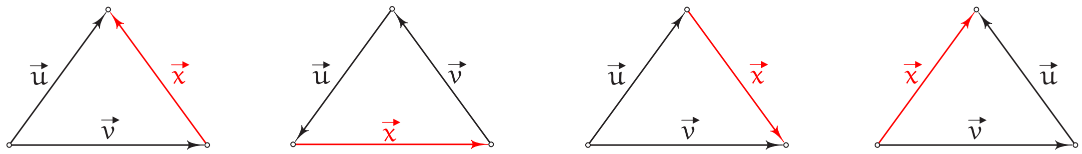


Determinar:
(a) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}$ **(b)** $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DA}$ **(c)** $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}$ **(d)** $\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{BC}$ **(e)** $\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MB}$ **(f)** $\overrightarrow{BM}-\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$

Exercício 2.123 Aproveitando as figuras dadas abaixo, apresentar, graficamente, um representante do vetor $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$ nos seguintes casos:



Exercício 2.124 Escrever o vetor $\vec{x}$ em função de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ para cada uma das representações gráficas abaixo:



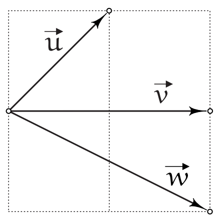
Exercício 2.125 Considere um triângulo ABC. Represente, graficamente, o vetor $\vec{x}$ nos seguintes casos:
(**a**) $\vec{x} = \overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{BC}$ (**b**) $\vec{x} = 3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{BC}$ (**c**) $\vec{x} = 2\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{BA}$ (**d**) $\vec{x} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{CB}$

Exercício 2.126 Sejam os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não paralelos. Represente, graficamente, um representante do vetor:
(**a**) $\vec{u} - \vec{v}$ (**b**) $\vec{v} - \vec{u}$ (**c**) $-\vec{v} - 2\vec{u}$ (**d**) $2\vec{u} - 3\vec{v}$

Exercício 2.127 Em um triângulo ABC, seja $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ e $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$. Construa, graficamente, um representante de cada um dos vetores abaixo:
(**a**) $\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$ (**b**) $\frac{\vec{a}-\vec{b}}{2}$ (**c**) $\frac{\vec{b}-\vec{a}}{2}$ (**d**) $\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$ (**e**) $2\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$ (**f**) $\frac{1}{3}\vec{a} - 2\vec{b}$

Exercício 2.128 Considere três vetores não nulos $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$, coplanares, não-paralelos dois a dois e representados graficamente com uma mesma origem comum. Represente, graficamente, o vetor $\vec{x}$ tal que:
(**a**) $\vec{x} = 4\vec{a} - 2\vec{b} - \vec{c}$ (**b**) $\left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right) + \vec{x} = \vec{0}$ (**c**) $\vec{a} + \vec{c} + \vec{x} = 2\vec{b}$

Exercício 2.129 Considere três vetores não nulos $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$, coplanares, não-paralelos dois a dois e representados graficamente com uma mesma origem comum, como na figura abaixo, cujo fundo é composto por quatro quadrados.

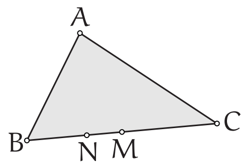


Represente, graficamente, um representante do vetor $\vec{x}$ tal que:
(**a**) $\vec{x} = \vec{u} - \vec{v}$ (**b**) $\vec{x} = \vec{v} - \vec{u}$ (**c**) $\vec{x} = -\vec{v} - 2\vec{u}$ (**d**) $\vec{x} = 2\vec{u} - 3\vec{v}$
(**e**) $\vec{x} = 4\vec{u} - 2\vec{v} - \vec{w}$ (**f**) $(\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}) + \vec{x} = \vec{0}$ (**g**) $\vec{u} + \vec{w} + \vec{x} = 2\vec{v}$

Represente graficamente:
(**h**) $a\vec{v}$ e $b\vec{w}$ tal que $\vec{u} = a\vec{v} + b\vec{w}$.
Os números a e b pertencem a quais intervalos: $]-\infty, -1]$, $]-1, 0]$, $]0, 1]$ ou $]1, +\infty[$?
(**i**) $\alpha\vec{u}$ e $\beta\vec{w}$ tal que $\vec{v} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{w}$.
Os números α e β pertencem a quais intervalos: $]-\infty, -1]$, $]-1, 0]$, $]0, 1]$ ou $]1, +\infty[$?
(**j**) Teria sido possível realizar os itens (**h**) e (**i**) no caso em que $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ não sejam coplanares? Justifique.

Exercício 2.130 Considere três vetores não nulos $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$, coplanares, representados graficamente com uma mesma origem comum, e de tal modo que:
(**i**) o ângulo formado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$ mede $45°$;
(**ii**) o ângulo formado por $\vec{u}$ e $\vec{w}$ mede $60°$;
(**iii**) o ângulo formado por $\vec{v}$ e $\vec{w}$ mede $105°$;
Determinar:
(**a**) o vetor $\vec{x} + \vec{y}$, sendo $\vec{x} = \vec{u} + 2\vec{v}$ e $\vec{y} = \vec{v} - 2\vec{u}$ e representá-lo graficamente junto aos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$.
(**b**) a medida do ângulo determinado pelos vetores $-3\vec{v}$ e $\vec{w}$.
(**c**) a medida do ângulo determinado pelos vetores $-3\vec{u}$ e $-\vec{w}$.

Exercício 2.131 Considere a figura abaixo, sendo $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.



Expresse os vetores $\overrightarrow{AM}$ e $\overrightarrow{AN}$ em função de $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$.

Exercício 2.132 Sendo $ABCDEF$ um hexágono regular com centro em O, mostre que $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF} = 6\overrightarrow{AO}$.

Exercícios referentes à Seção 2.2 ***Vetores: abordagem algébrica***, página 23.

Oxy é sistema de coordenadas cartesianas ortogonais no plano com base canônica $\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}\}$.

$Oxyz$ é sistema de coordenadas cartesianas ortogonais no espaço com base canônica $\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

Exercício 2.133 Dados os vetores no plano $\vec{u} = (3, -1)$ e $\vec{v} = (-1, 2)$, determinar o vetor $\vec{x}$ tal que:
(a) $4(\vec{u} - \vec{v}) + \frac{1}{3}\vec{x} = 2\vec{u} - \vec{x}$;
(b) $3\vec{x} - (2\vec{v} - \vec{u}) = 2(4\vec{x} - 3\vec{u})$.

Exercício 2.134 Sejam os pontos no plano $A(-5, 1)$ e $B(1, 3)$. Determinar o vetor $\vec{v} = (a, b)$ tal que:
(a) $B = A + 2\vec{v}$;
(b) $A = B + 3\vec{v}$.

Exercício 2.135 Sejam os pontos no plano $P(2, 3)$, $Q(4, 2)$ e $R(3, 5)$.
(a) Representar em um mesmo sistema de coordenadas os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ de modo que $Q = P + \vec{u}$, $R = Q + \vec{v}$ e $P = R + \vec{w}$.
(b) Determinar $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$.

Exercício 2.136 Sabendo que $A(1, -1)$, $B(5, 1)$ e $C(6, 4)$ são vértices de um paralelogramo no plano, determinar o quarto vértice de cada um dos três paralelogramos possíveis de serem formados com os pontos A, B e C.

Exercício 2.137 Sendo $A(-2, 3)$ e $B(6, -3)$ extremidades de um segmento no plano, determinar:
(a) Os pontos C, D e E que dividem o segmento AB em quatro partes de mesmo comprimento.
(b) Os pontos F e G que dividem o segmento AB em três partes de mesmo comprimento.

Exercício 2.138 Dados os vetores no plano $\vec{u} = (1, -1)$, $\vec{v} = (-3, 4)$ e $\vec{w} = (8, -6)$, calcular:
(a) $\|\vec{u}\|$ **(b)** $\|\vec{v}\|$ **(c)** $\|\vec{w}\|$ **(d)** $\|\vec{u} + \vec{v}\|$ **(e)** $\|2\vec{u} - \vec{w}\|$ **(f)** $\|\vec{w} - 3\vec{u}\|$ **(g)** $\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$ **(h)** $\left|\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}\right|$

Exercício 2.139 No plano, encontrar o ponto P do eixo das abscissas de modo que sua distância ao ponto $A(2, -3)$ seja igual a 5.

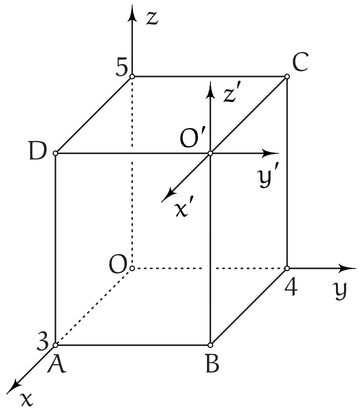
Exercício 2.140 Encontrar o vetor unitário que tenha
(i) o mesmo sentido de $\vec{v}$;
(ii) sentido contrário ao de $\vec{v}$;
nos casos:
(a) $\vec{v} = -\vec{i} + \vec{j}$ **(b)** $\vec{v} = 3\vec{i} - \vec{j}$ **(c)** $\vec{v} = \left(1, \sqrt{3}\right)$ **(d)** $\vec{v} = (0, 4)$

Exercício 2.141 Traçar no mesmo plano cartesiano os retângulos de vértices:
(a) $A(0, 0, 1)$, $B(0, 0, 2)$, $C(4, 0, 2)$ e $D(4, 0, 1)$;
(b) $A(2, 1, 0)$, $B(2, 2, 0)$, $C(0, 2, 2)$ e $D(0, 1, 2)$.

Exercício 2.142 Traçar no mesmo sistema $Oxyz$ os cubos constituídos dos pontos (x, y, z), de modo que:
(a) $-4 \leqslant x \leqslant -2$, $1 \leqslant y \leqslant 3$, $0 \leqslant z \leqslant 2$;
(b) $-2 \leqslant x \leqslant 0$, $2 \leqslant y \leqslant 4$, $-4 \leqslant z \leqslant -2$.

Exercício 2.143 Calcular a distância do ponto $A(3, 4, -2)$
(a) ao plano xy **(b)** ao plano xz **(c)** ao plano yz **(d)** ao eixo dos x **(e)** ao eixo dos y **(f)** ao eixo dos z

Exercício 2.144 O bloco retangular de dimensões 3, 4 e 5 está referido ao sistema $Oxyz$ conforme figura abaixo.



Considerando um segundo sistema de coordenadas cartesianas ortogonais chamado de $O'x'y'z'$, sendo $Ox /\!/ O'x'$, $Oy /\!/ O'y'$ e $Oz /\!/ O'z'$, e sendo O' um dos vértices do bloco conforme a figura, determinar as coordenadas dos pontos O, A, B, C, D e O' em relação aos dois sistemas de coordenadas dados.

Exercício 2.145 Sabendo que $3\vec{u} - 4\vec{v} = 2\vec{w}$, determinar a, b e c, sendo $\vec{u} = (2, -1, c)$, $\vec{v} = (a, b-2, 3)$ e $\vec{w} = (4, -1, 0)$.

Exercício 2.146 Representar no mesmo sistema $Oxyz$ o vetor $\vec{v} = (1, -1, 3)$ com origem nos pontos $O\,(0, 0, 0)$, $A\,(-3, -4, 0)$, $B\,(-2, 4, 2)$, $C\,(3, 0, -4)$ e $D\,(3, 4, -2)$.

Exercício 2.147 Sendo $A\,(-2, 1, 3)$ e $B\,(6, -7, 1)$ extremidades de um segmento, determinar:
(**a**) os pontos C, D e E que dividem o segmento AB em quatro partes de mesmo comprimento;
(**b**) os pontos F e G que dividem o segmento AB em três partes de mesmo comprimento.

Exercício 2.148 Apresentar coordenadas genéricas para o vetor que satisfaz a condição:
(**a**) paralelo ao eixo dos x (**b**) representado no eixo dos z (**c**) paralelo ao plano xy (**d**) paralelo ao plano yz
(**e**) ortogonal ao eixo dos y (**f**) ortogonal ao eixo dos z (**g**) ortogonal ao plano xy (**h**) ortogonal ao plano xz

Exercício 2.149 Dado o vetor $\vec{w} = (3, 2, 5)$, determinar a e b de modo que os vetores $\vec{u} = (3, 2, -1)$ e $\vec{v} = (a, 6, b) + 2\vec{w}$ sejam paralelos.

Exercício 2.150 Verificar se são colineares os pontos:
(**a**) $A\,(-1, -5, 0)$, $B\,(2, 1, 3)$ e $C\,(-2, -7, -1)$;
(**b**) $A\,(2, 1, -1)$, $B\,(3, -1, 0)$ e $C\,(1, 0, 4)$;
(**c**) $A\,(-1, 4, -3)$, $B\,(2, 1, 3)$ e $C\,(4, -1, 7)$.

Exercício 2.151 Encontrar o vértice oposto a B, no paralelogramo $ABCD$, para:
(**a**) $A\,(-1, 0, 3)$, $B\,(1, 1, 2)$ e $C\,(3, -2, 5)$;
(**b**) $A\,(4, 0, 1)$, $B\,(5, 1, 3)$ e $C\,(3, 2, 5)$.

Exercício 2.152 Determinar o valor de n para que o vetor $\vec{v} = \left(n, -\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$ seja unitário.

Exercício 2.153 Dados os pontos $A\,(1, 0, -1)$, $B\,(4, 2, 1)$ e $C\,(1, 2, 0)$, determinar o valor de m para que $\|\vec{v}\| = 7$, sendo $\vec{v} = m\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$.

Exercício 2.154 Dado o vetor $\vec{v} = (2, -1, 3)$, determinar o vetor paralelo a $\vec{v}$ que tenha:
(**a**) sentido contrário ao de $\vec{v}$ e três vezes o módulo de $\vec{v}$;
(**b**) o mesmo sentido de $\vec{v}$ e módulo 4;
(**c**) sentido contrário do sentido de $\vec{v}$ e módulo 5.

Exercícios referentes à Seção 2.3 ***Produto Escalar***, página 34.

$Oxyz$ é sistema de coordenadas cartesianas ortogonais no espaço com base canônica $\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

Exercício 2.155 Dados os vetores $\vec{u} = (2, -3, -1)$ e $\vec{v} = (1, -1, 4)$, calcular:
(**a**) $2\vec{u} \cdot (-\vec{v})$ (**b**) $(\vec{u} + 3\vec{v}) \cdot (\vec{v} - 2\vec{u})$ (**c**) $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v})$ (**d**) $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{v} - \vec{u})$

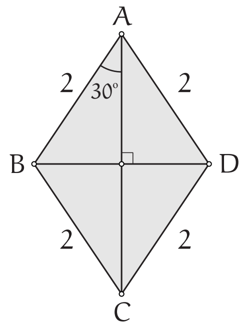
Exercício 2.156 Dados os pontos $A(4,0,-1)$, $B(2,-2,1)$ e $C(1,3,2)$ e os vetores $\vec{u}=(2,1,1)$ e $\vec{v}=(-1,-2,3)$, obter o vetor $\vec{x}$ tal que:
(**a**) $3\vec{x}+2\vec{v}=\vec{x}+\left(\overrightarrow{AB}\cdot\vec{u}\right)\vec{v}$;
(**b**) $\left(\overrightarrow{BC}\cdot\vec{v}\right)\vec{x}=(\vec{u}\cdot\vec{v})\,\vec{v}-3\vec{x}$.

Exercício 2.157 Determinar o vetor $\vec{v}$, sabendo que $\|\vec{v}\|=5$, $\vec{v}$ é ortogonal ao eixo Ox, $\vec{v}\cdot\vec{w}=6$ e $\vec{w}=\vec{i}+2\vec{j}$.

Exercício 2.158 Dados os vetores $\vec{u}=(1,2-3)$, $\vec{v}=(2,0,-1)$ e $\vec{w}=(3,1,0)$, determinar o vetor $\vec{x}$ tal que $\vec{x}\cdot\vec{u}=-16$, $\vec{x}\cdot\vec{v}=0$ e $\vec{x}\cdot\vec{w}=3$.

Exercício 2.159 Calcular $\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}+\vec{v}\cdot\vec{w}$, sabendo que $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}=\vec{0}$, $\|\vec{u}\|=2$, $\|\vec{v}\|=3$ e $\|\vec{w}\|=5$.

Exercício 2.160 O quadrilátero $ABCD$ da figura abaixo é um losango de lado medindo 2.



Calcular:
(**a**) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}$ (**b**) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$ (**c**) $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$ (**d**) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$ (**e**) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC}$ (**f**) $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{DA}$

Exercício 2.161 Sabendo que $\|\vec{u}\|=\sqrt{2}$, $\|\vec{v}\|=3$ e que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ formam ângulo de $\frac{3\pi}{4}$ rad, determinar:
(**a**) $|\,(2\vec{u}-\vec{v})\cdot(\vec{u}-2\vec{v})\,|$;
(**b**) $\|\vec{u}-2\vec{v}\|$.

Exercício 2.162 Qual é o valor de α para que os vetores $\vec{a}=\alpha\vec{i}+2\vec{j}-4\vec{k}$ e $\vec{b}=2\vec{i}+(1-2\alpha)\,\vec{j}+3\vec{k}$ sejam ortogonais?

Exercício 2.163 Dados os pontos $A(-1,0,5)$, $B(2,-1,4)$ e $C(1,1,1)$, determinar x tal que $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{BP}$ sejam ortogonais, sendo $P(x,0,x-3)$.

Exercício 2.164 Dados os pontos $A(m,1,0)$, $B(m-1,2m,2)$ e $C(1,3,-1)$, determinar m de modo que o triângulo ABC seja retângulo em A. Calcular a área do triângulo.

Exercício 2.165 Determinar o vetor $\vec{u}$ tal que $\|\vec{u}\|=2$, o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}=(1,-1,0)$ é 45° e $\vec{u}$ é ortogonal a $\vec{w}=(1,1,0)$.

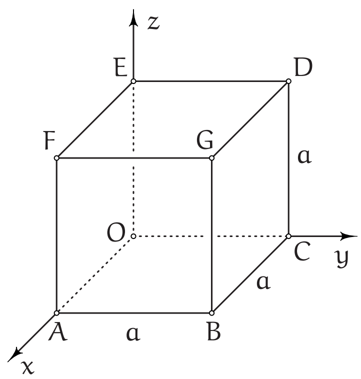
Exercício 2.166 Sendo $\vec{a}\perp\vec{b}$, $\|\vec{a}\|=6$ e $\|\vec{b}\|=8$, calcular $\|\vec{a}+\vec{b}\|$ e $\|\vec{a}-\vec{b}\|$.

Exercício 2.167 Determinar o ângulo entre os vetores:
(**a**) $\vec{u}=(2,-1,-1)$ e $\vec{v}=(-1,-1,2)$ (**b**) $\vec{u}=(1,-2,1)$ e $\vec{v}=(-1,1,0)$

Exercício 2.168 Calcular os ângulos internos do triângulo de vértices $A(2,1,3)$, $B(1,0,-1)$ e $C(-1,2,1)$.

Exercício 2.169 Calcular n para que seja de 30° o ângulo entre os vetores $\vec{v}=(-3,1,n)$ e $\vec{k}$.

Exercício 2.170 Seja o cubo de aresta medindo a, representado na figura abaixo.



Determinar:
(**a**) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC}$ (**b**) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OD}$ (**c**) $\overrightarrow{OE} \cdot \overrightarrow{OB}$ (**d**) $\|\overrightarrow{OB}\|$ e $\|\overrightarrow{OG}\|$ (**e**) $\overrightarrow{EG} \cdot \overrightarrow{CG}$ (**f**) $\left(\overrightarrow{ED} \cdot \overrightarrow{AB}\right) \overrightarrow{OG}$

Exercício 2.171 Os ângulos diretores de um vetor $\vec{a}$ medem $45°$, $60°$ e $120°$, respectivamente, e $\|\vec{a}\| = 2$. Determine o vetor $\vec{a}$.
Nota: os ângulos diretores referidos acima são os os ângulos que $\vec{a}$ forma com $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$, respectivamente.

Exercício 2.172 Mostrar que existem vetores com qualquer módulo cujos ângulos diretores são $30°$, $90°$ e $60°$, respectivamente, e determinar aquele que tem módulo 10.

Exercício 2.173 Determinar o vetor $\vec{a}$ de módulo 5, sabendo que é ortogonal ao eixo Oy e ao vetor $\vec{v} = \vec{i} - 2\vec{k}$, e forma ângulo obtuso com o vetor $\vec{i}$.

Exercício 2.174 O vetor $\vec{v}$ é ortogonal aos vetores $\vec{u} = (1, 2, 0)$ e $\vec{w} = (2, 0, 1)$ e forma ângulo agudo com o vetor $\vec{j}$. Determinar $\vec{v}$, sabendo que $\|\vec{v}\| = \sqrt{21}$.

Exercício 2.175 Determinar os vetores projeção de $\vec{v} = 4\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$ sobre os eixos cartesianos x, y e z.

Exercício 2.176 Sejam $A\,(2, 1, 3)$, $B\,(m, 3, 5)$ e $C\,(0, 4, 1)$ vértices de um triângulo.
(**a**) Para que valores de m o triângulo ABC é retângulo em A ?
(**b**) Calcular a medida da projeção do cateto AB sobre a hipotenusa BC.
(**c**) Determinar o ponto H, pé da altura relativa ao vértice A do triângulo retângulo.
(**d**) Mostrar que $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC}$.

Exercício 2.177 No plano, obter os dois vetores unitários ortogonais a cada um dos vetores
(**a**) $4\vec{i} + 3\vec{j}$ (**b**) $(-2, 3)$ (**c**) $(-1, -1)$

Exercício 2.178 Determinar a medida do ângulo entre os pares de vetores no plano:
(**a**) $\vec{u} = (2, 1)$ e $\vec{v} = (4, -2)$ (**b**) $\vec{u} = (1, -1)$ e $\vec{v} = (-4, -2)$ (**c**) $\vec{u} = (1, 1)$ e $\vec{v} = (-1, 1)$

Exercício 2.179 Determinar o valor de α para que seja $45°$ a medida do ângulo entre os vetores no plano $\vec{u} = (2, 1)$ e $\vec{v} = (1, a)$.

Exercícios referentes à Seção 2.4 ***Produto Vetorial***, página 2.4.

$Oxyz$ é sistema de coordenadas cartesianas ortogonais no espaço com base canônica $\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

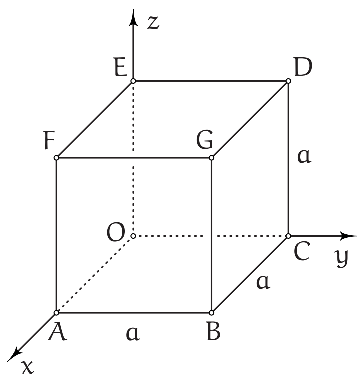
Exercício 2.180 Se $\vec{u} = 3\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{v} = 2\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k}$ e $\vec{w} = -\vec{i} + \vec{k}$, determinar:
(**a**) $|\vec{u} \times \vec{u}|$ (**d**) $(\vec{u} \times \vec{v}) \times (\vec{v} \times \vec{u})$ (**g**) $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$ (**j**) $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{v}$
(**b**) $(2\vec{v}) \times (3\vec{v})$ (**e**) $(\vec{u} - \vec{v}) \times \vec{w}$ (**h**) $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w})$ (**k**) $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$
(**c**) $(\vec{u} \times \vec{w}) + (\vec{w} \times \vec{u})$ (**f**) $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$ (**i**) $\vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$ (**l**) $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$

Exercício 2.181 Dados os pontos $A\,(2, 1, -1)$, $B\,(3, 0, 1)$ e $C\,(2, -1, -3)$, determinar o ponto D tal que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{AC}$.

Exercício 2.182 Resolver os sistemas:

(**a**) $\begin{cases} \vec{x} \times \vec{j} = \vec{k} \\ \vec{x} \cdot \left(4\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}\right) = 10 \end{cases}$ (**b**) $\begin{cases} \vec{x} \times \left(2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}\right) = \vec{0} \\ \vec{x} \cdot \left(\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}\right) = 12 \end{cases}$

Exercício 2.183 Considerando o cubo da figura abaixo:



Calcule:
(**a**) $\overrightarrow{OF} \times \overrightarrow{OD}$ (**b**) $\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{FA}$ (**c**) $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ (**d**) $\overrightarrow{EC} \times \overrightarrow{EA}$ (**e**) $\overrightarrow{OA} \cdot \left(\overrightarrow{OC} \times \overrightarrow{OE}\right)$ (**f**) $\overrightarrow{GB} \times \overrightarrow{AF}$

Exercício 2.184 Determinar um vetor simultaneamente ortogonal aos vetores $\vec{u} + 2\vec{v}$ e $\vec{v} - \vec{u}$, sendo $\vec{u} = (-3, 2, 0)$ e $\vec{v} = (0, -1, -2)$.

Exercício 2.185 Dado $\vec{v}_1 = (1, -2, 1)$, determinar vetores $\vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$ de modo que os três sejam mutuamente ortogonais.

Exercício 2.186 Determinar um vetor de módulo 2 ortogonal a $\vec{u} = (3, 2, 2)$ e a $\vec{v} = (0, 1, 1)$.

Exercício 2.187 Sendo $\|\vec{u}\| = 2\sqrt{2}$, $\|\vec{v}\| = 4$ e $45°$ o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$, calcular:
(**a**) $\|\vec{u} \times \vec{v}\|$
(**b**) $\left\|\frac{2}{5}\vec{u} \times \frac{1}{2}\vec{v}\right\|$

Exercício 2.188 Dois vértices consecutivos de um paralelogramo são $A\,(2, -4, 0)$ e $B\,(1, -3, -1)$ e o ponto médio das diagonais é $M\,(3, 2, -2)$. Calcular a área do paralelogramo.

Exercício 2.189 Sabendo que $\|\vec{u}\| = 6$, $\|\vec{v}\| = 4$ e $30°$ é a medida do ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$, calcular:
(**a**) a área do triângulo determinado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$.
(**b**) a área do paralelogramo determinado por $\vec{u}$ e $-\vec{v}$.
(**c**) a área do paralelogramo determinado por $\vec{u} + \vec{v}$ e $\vec{u} - \vec{v}$.

Exercício 2.190 Calcular a distância do ponto $P\,(4, 3, 3)$ à reta que passa por $A\,(1, 2, -1)$ e $B\,(3, 1, 1)$.

Exercício 2.191 Encontrar um vetor ortogonal ao plano determinado pelos pontos P, Q e R e calcular a área do triângulo PQR.
(**a**) $P\,(3, 0, 0)$, $Q\,(0, 3, 0)$ e $R\,(0, 0, 2)$.
(**b**) $P\,(2, 3, 0)$, $Q\,(0, 2, 1)$ e $R\,(2, 0, 2)$.

Exercício 2.192 Dados os pontos $A\,(2, 1, -1)$ e $B\,(0, 2, 1)$, determinar o ponto C do eixo Oy de modo que a área do triângulo ABC seja $1,5$ unidades de área.

Exercício 2.193 Os pontos médios dos lados do triângulo ABC são $M\,(0, 1, 3)$, $N\,(3, -2, 2)$ e $P\,(1, 0, 2)$. Determinar a área do triângulo ABC.

Exercícios referentes à Seção 2.5 ***Produto Misto***, página 44.

$Oxyz$ é sistema de coordenadas cartesianas ortogonais no espaço com base canônica $\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

Exercício 2.194 Dados os vetores $\vec{u} = (3, -1, 1)$, $\vec{v} = (1, 2, 2)$ e $\vec{w} = (2, 0, -3)$, calcular:
(**a**) $\vec{u} \cdot \vec{v} \times \vec{w}$
(**b**) $\vec{w} \cdot \vec{u} \times \vec{v}$

Exercício 2.195 Sabendo que $\vec{u} \cdot \vec{v} \times \vec{w} = 2$, calcular:
(**a**) $\vec{u} \cdot \vec{w} \times \vec{v}$ (**b**) $\vec{v} \cdot \vec{w} \times \vec{u}$ (**c**) $\vec{v} \times \vec{w} \cdot \vec{u}$ (**d**) $\vec{u} \times \vec{w} \cdot 3\vec{v}$ (**e**) $\vec{u} \cdot 2\vec{w} \times \vec{v}$ (**f**) $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{u} \times \vec{w}$

Exercício 2.196 Verificar se são coplanares os vetores:
(**a**) $\vec{u} = (1, -1, 2)$, $\vec{v} = (2, 2, 1)$ e $\vec{w} = (-2, 0, -4)$ (**b**) $\vec{u} = (2, -1, 3)$, $\vec{v} = (3, 1, -2)$ e $\vec{w} = (7, -1, 4)$

Exercício 2.197 Verificar se são coplanares os pontos:
(**a**) $A\,(1, 1, 0)$, $B\,(-2, 1, -6)$, $C\,(-1, 2, -1)$ e $D\,(2, -1, 4)$ (**b**) $A\,(2, 1, 2)$, $B\,(0, 1, -2)$, $C\,(1, 0, -3)$ e $D\,(3, 1, -2)$

Exercício 2.198 Prove que o volume do cubo determinado pelos vetores $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$ é 1.

Exercício 2.199 Calcular o valor de m para que o volume do paralelepípedo determinado pelos vetores $\vec{v}_1 = (0, -1, 2)$, $\vec{v}_2 = (-4, 2, -1)$ e $\vec{v}_3 = (3, m, -2)$ seja igual a 33. Calcular a altura deste paralelepípedo relativa à base definida por $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$.

Exercício 2.200 Dados os pontos $A\,(2, 1, 1)$, $B\,(-1, 0, 1)$ e $C\,(3, 2, -2)$, determinar o ponto D do eixo Oz para que o volume do paralelepípedo determinado por $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AD}$ seja 25 unidades de volume.

Exercício 2.201 Calcular o volume do tetraedro de base ABC e vértice P, sendo $A\,(2, 0, 0)$, $B\,(2, 4, 0)$, $C\,(0, 3, 0)$ e $P\,(2, -2, 9)$. Qual é a altura do tetraedro relativa ao vértice P ?

Exercício 2.202 Três vértices de um tetraedro de volume 6 são $A\,(-2, 4, -1)$, $B\,(-3, 2, 3)$ e $C\,(1, -2, -1)$. Determinar o quarto vértice D, sabendo que ele pertence ao eixo Oy.

Exercício 2.203 Sendo $\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = 4$ e $120°$ a medida do ângulo entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, calcular:
(**a**) $\|\vec{u} + \vec{v}\|$ (**b**) $\|\vec{u} \times (\vec{v} - \vec{u})\|$ (**c**) o volume do paralelepípedo determinado por $\vec{u} \times \vec{v}$, $\vec{u}$ e $\vec{v}$

Capítulo 3

Retas, Planos e Distâncias

Neste capítulo faremos o estudo dos diversos tipos de equações de retas no espaço. Veremos que, ao contrário do que ocorre com retas no plano cartesiano, o uso de vetores é praticamente obrigatório quando estamos trabalhando com retas no espaço.

Também faremos a extensão desse estudo de equações para os planos no espaço. O plano é o primeiro tipo de superfície no qual é feito um estudo sistemático do ponto de vista analítico; e veremos que os vetores ajudam muito nesse processo. No Capítulo **??**, de superfícies, página **??**, faremos estudos analíticos de outras superfícies muito importantes como, por exemplo, esferas, cones e cilindros.

Por fim, ainda neste capítulo efetuaremos o importante estudo de distâncias envolvendo pontos, retas e planos no espaço. Fórmulas para o cálculo de distâncias serão apresentadas em seis possíveis casos:

- Distância entre dois pontos;
- Distância entre ponto e reta;
- Distância entre ponto e plano;
- Distância entre duas retas;
- Distância entre reta e plano;
- Distância entre dois planos.

3.1 Retas

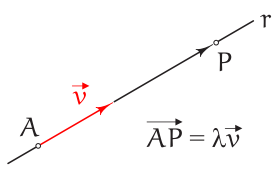
A *Geometria Analítica* tem por principal finalidade associar elementos algébricos, como coordenadas cartesianas e equações envolvendo coordenadas, a objetos geométricos, como pontos, segmentos e retas, por exemplo. Poder transferir um problema do campo da *geometria* para o campo da *álgebra* é, sem dúvida, um recurso muito interessante. Não significa que todo problema de geometria possa ser resolvido com álgebra, mas é sempre bom ter mais do que uma ferramenta matemática à disposição para modelar problemas. É isto que faremos nessa seção com as retas no espaço. Vamos apresentar quatro tipos de equações de retas associadas às coordenadas cartesianas do espaço. Cada uma delas tem a sua utilidade e é importante que o leitor saiba identificá-las quando for resolver algum problema.

Como usaremos coordenadas cartesianas a maior parte do tempo, vamos fixar durante toda a seção que $Oxyz$ é *sistema de coordenadas cartesianas ortogonais no espaço com base canônica* $\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$. Para simplificar, não mais mencionaremos a base canônica, ficando subentendido que as propriedades operatórias estudadas no Capítulo 2 de vetores são válidas apenas quando a consideramos.

3.1.1 Equação Vetorial de uma Reta no Espaço

Dado um ponto A no espaço e um vetor $\vec{v} \neq \vec{0}$, existe uma única reta r no espaço que passa por A e tem mesma direção de $\vec{v}$.

Dado um ponto $P \in r$, o vetor $\overrightarrow{AP}$ é paralelo a $\vec{v}$. Logo, $\overrightarrow{AP}$ é proporcional a $\vec{v}$ (Proposição 2.3) e, portanto, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{AP} = \lambda\vec{v}$.



Essas considerações motivam a seguinte definição:

Dado um ponto A no espaço e um vetor $\vec{v} \neq \vec{0}$, a equação

$$\boxed{\overrightarrow{AP} = \lambda\vec{v}}$$

ou, equivalentemente,

$$\boxed{P = A + \lambda\vec{v}},$$

*com $\lambda \in \mathbb{R}$, (já que $\overrightarrow{AP} = P - A$) é chamada de **equação vetorial** da reta r que passa por A e tem a direção de $\vec{v}$.*

P é ponto da reta r.

*O vetor $\vec{v}$ é chamado de **vetor diretor** de r (ou seja, o vetor que dá a direção de r) e o número real λ é chamado de **parâmetro** da equação vetorial de r.*

Observações:

(1) Como podemos notar, partimos de um ponto A e de um vetor $\vec{v} \neq \vec{0}$ e construímos uma reta r e sua equação. Entretanto, é claro que o procedimento recíproco vale, ou seja, se partirmos de uma reta r no espaço, podemos tomar um ponto $A \in r$ e um vetor $\vec{v} \neq \vec{0}$ com a mesma direção de r e escrever a equação vetorial de r, como acima.

(2) Dada uma reta r, sua equação vetorial não é única, pois temos liberdade para escolher $A \in r$ e $\vec{v} \neq \vec{0}$ com a mesma direção de r.

(3) Dada uma equação vetorial de r, há uma *correspondência biunívoca* entre os pontos de r e os parâmetros λ, ou seja, para cada ponto de r temos um único valor de λ e vice-versa.

Quando temos coordenadas, podemos transformar uma equação vetorial de reta utilizando ternas ordenadas:

Seja $Oxyz$ sistema de coordenadas cartesianas ortogonais no espaço.

Seja $P = A + \lambda\vec{v}$, com $\lambda \in \mathbb{R}$, equação vetorial da reta r no espaço.

*Fazendo $A(x_0, y_0, z_0)$, $P(x, y, z)$ e $\vec{v} = (a, b, c)$, podemos escrever a **equação vetorial de r em coordenadas**:*

$$\boxed{(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda(a, b, c)},$$

com $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exemplo 3.1 Verifiquemos se as retas r e s dadas pelas equações vetoriais

$$\begin{cases} (x, y, z) = (1, 1, 0) + \lambda\left(1, 0, -\frac{1}{2}\right), \ \lambda \in \mathbb{R} \\ (x, y, z) = \left(0, 1, \frac{1}{2}\right) + \mu(-2, 0, 1), \ \mu \in \mathbb{R} \end{cases}$$

são coincidentes, paralelas, concorrentes ou reversas no espaço.

Como os vetores diretores $\vec{v} = \left(1, 0, -\frac{1}{2}\right)$ e $\vec{w} = (-2, 0, 1)$ de r e s, respectivamente, são paralelos (por que?), temos duas possibilidades: $r = s$ ou $r /\!/ s$.

Se $r = s$, então deverá existir um ponto em comum a essas retas, ou seja, um ponto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ que satisfaça as duas equações ao mesmo tempo. Isto significa que deverão existir λ_0 e μ_0 reais tais que

$$\begin{cases} (x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 0) + \lambda_0\left(1, 0, -\frac{1}{2}\right) \\ (x_0, y_0, z_0) = \left(0, 1, \frac{1}{2}\right) + \mu_0(-2, 0, 1) \end{cases} \Rightarrow (1, 1, 0) + \lambda_0\left(1, 0, -\frac{1}{2}\right) = \left(0, 1, \frac{1}{2}\right) + \mu_0(-2, 0, 1) \Rightarrow \begin{cases} 1 + \lambda_0 = -2\mu_0 \\ 1 = 1 \\ -\frac{\lambda_0}{2} = \frac{1}{2} + \mu_0 \end{cases}$$

Como a 1^{a}. e 3^{a}. equações coincidem (verifique), temos um sistema possível e indeterminado (possui infinitas soluções), mostrando que, na verdade, r e s possuem infinitos pontos em comum.

Logo, $r = s$.

3.1.2 Equações Paramétricas de uma Reta no Espaço

Dada uma equação vetorial de uma reta r no espaço cartesiano, é possivel colocar cada coordenada de um ponto de r em função do parâmetro da equação. Este é o conteúdo desenvolvida na próxima definição:

Seja $Oxyz$ *sistema de coordenadas cartesianas ortogonais no espaço.*

Seja r *reta de equação vetorial* $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda (a, b, c)$*, com* $\lambda \in \mathbb{R}$*. Logo, podemos escrever*

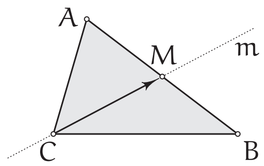
$$\boxed{\begin{cases} x = x_0 + \lambda a \\ y = y_0 + \lambda b \\ z = z_0 + \lambda c \end{cases}},$$

que são as chamadas ***equações paramétricas*** *de* r*, sendo* $\lambda \in \mathbb{R}$ *o* ***parâmetro*** *das equações paramétricas de* r*.*

Pensando nas equações acima como equações na variável λ, os termos independentes x_0, y_0 e z_0 formam as coordenadas de um ponto de r, ou seja, $A(x_0, y_0, z_0) \in r$. Já os coeficientes a, b e c formam as coordenadas do vetor diretor $\vec{v} = (a, b, c)$ de r.

Exemplo 3.2 Os pontos $A(3, 6, -7)$, $B(-5, 2, 3)$ e $C(4, -7, -6)$ formam um triângulo no espaço. Vamos encontrar as equações paramétricas da reta suporte da mediana do triângulo ABC relativa ao vértice C. Além disso, vamos verificar se o ponto $D(-1, 4, 2)$ pertence ou não a m.

A reta suporte da mediana relativa ao vértice C do triângulo ABC passa por C e pelo ponto médio M de AB. Chamemos essa reta de m.



Um vetor diretor de m pode ser $\vec{v} = \overrightarrow{CM} = M - C = \left(\frac{3+(-5)}{2}, \frac{6+2}{2}, \frac{-7+3}{2}\right) - (4, -7, -6) = (-5, 11, 4)$.
Uma equação vetorial para m pode ser dada por

$$P = C + \lambda \vec{v} \Rightarrow (x, y, z) = (4, -7, -6) + \lambda (-5, 11, 4), \text{ com } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Portanto, as equações paramétricas de m podem ser escritas como

$$\begin{cases} x = 4 - 5\lambda \\ y = -7 + 11\lambda \\ z = -6 + 4\lambda \end{cases},$$

sendo $\lambda \in \mathbb{R}$ o parâmetro.

Por fim, se $D(-1, 4, 2) \in m$, então deve existir um único $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ associado a D nas equações paramétricas de m. Vejamos se isso ocorre quando fazemos $(x, y, z) = (-1, 4, 2)$:

$$\begin{cases} -1 = 4 - 5\lambda_0 \\ 4 = -7 + 11\lambda_0 \\ 2 = -6 + 4\lambda_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_0 = 1 \\ \lambda_0 = 1 \\ \lambda_0 = 2 \end{cases},$$

ou seja, o sistema de equações é impossível. Logo, D não pertence a m.

3.1.3 Equações Simétricas de uma Reta no Espaço

Quando uma reta r no espaço possui um vetor diretor cujas coordenadas são todas não nulas, é possível escrever um tipo especial de sistema de equações de r sem que o parâmetro apareça de forma explícita. Este é o conteúdo da próxima definição.

Seja $Oxyz$ *sistema de coordenadas cartesianas ortogonais no espaço.*

Seja r *reta de equação vetorial* $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda (a, b, c)$*, com* $\lambda \in \mathbb{R}$*, e suponhamos que* $a, b, c \neq 0$ *(ou seja, nenhuma coordenada do vetor diretor* $\vec{v} = (a, b, c)$ *é nula). Das equações paramétricas*

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda a \\ y = y_0 + \lambda b \\ z = z_0 + \lambda c \end{cases}$$

podemos escrever $\lambda = \frac{x-x_0}{a}$, $\lambda = \frac{y-y_0}{b}$ *e* $\lambda = \frac{z-z_0}{c}$, *ou seja,*

$$\boxed{\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}}$$

que são as chamadas ***equações simétricas*** *de* r.

Observemos que nas equações simétricas da reta r temos x_0, y_0 e z_0 formando as coordenadas de um ponto de r, ou seja, $A(x_0, y_0, z_0) \in r$. Já os denominadores a, b e c formam as coordenadas do vetor diretor $\vec{v} = (a, b, c)$ de r.

Exemplo 3.3 Verifiquemos se as retas r e s dadas são concorrentes:

$$\begin{cases} r : x + 1 = -y + 4 = \frac{z+8}{3} \\ s : \frac{x-3}{2} = \frac{-y-1}{3} = \frac{z-2}{4} \end{cases}$$

Observemos que as equações fornecidas são simétricas, mas podemos reescrevê-las de forma mais explícita:

$$\begin{cases} r : \frac{x-(-1)}{1} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z-(-8)}{3} \\ s : \frac{x-3}{2} = \frac{y-(-1)}{-3} = \frac{z-2}{4} \end{cases},$$

o que significa que $A(-1, 4, -8) \in r$; $B(3, -1, 2) \in s$; $\vec{v} = (1, -1, 3)$ é vetor diretor de r e $\vec{w} = (2, -3, 4)$ é vetor diretor de s.

Logo, escrever as equações vetoriais de r e s é bem simples:

$$\begin{cases} r : (x, y, z) = (-1, 4, -8) + \lambda(1, -1, 3), \text{ com } \lambda \in \mathbb{R} \\ s : (x, y, z) = (3, -1, 2) + \mu(2, -3, 4), \text{ com } \mu \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Para verificar se r e s são concorrentes, uma das formas é encontrar um único ponto $P(x_0, y_0, z_0)$ comum a ambas, o que significa que devem existir λ_0 e μ_0 associados a P em cada uma das equações vetoriais acima, ou seja,

$$(x_0, y_0, z_0) = (-1, 4, -8) + \lambda_0(1, -1, 3) = (3, -1, 2) + \mu_0(2, -3, 4).$$

Vejamos se, de fato, existem os parâmetros λ_0 e μ_0:

$$\begin{cases} -1 + \lambda_0 = 3 + 2\mu_0 \\ 4 - \lambda_0 = -1 - 3\mu_0 \\ -8 + 3\lambda_0 = 2 + 4\mu_0 \end{cases} \Rightarrow \cdots \text{ (verifique)} \Rightarrow \lambda_0 = 2 \text{ e } \mu_0 = -1.$$

Conclusão: $(x_0, y_0, z_0) = (-1, 4, -8) + 2(1, -1, 3) = (1, 2, -2)$ é o único ponto de intersecção entre r e s. Portanto, r e s são, de fato, concorrentes.

3.1.4 Equações Reduzidas de uma Reta no Espaço

Quando estudamos equações de retas no plano no Ensino Médio, aprendemos que existem as chamadas "equações reduzidas". No espaço elas também existem, mas não na forma de uma única equação para cada reta, mas sim de um sistema de duas equações reduzidas para cada reta. Além disso, devido ao fato de termos três coordenadas para cada ponto no espaço, é possível termos três tipos diferentes de sistema de equações reduzidas para uma única reta. Vejamos como trabalhar esses conceitos.

Seja r reta de equação vetorial $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda(a, b, c)$, com $\lambda \in \mathbb{R}$, e suponhamos que $a \neq 0$. Das equações paramétricas

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda a \\ y = y_0 + \lambda b \\ z = z_0 + \lambda c \end{cases}$$

podemos isolar λ na primeira equação de substituir na segunda:

$$y = y_0 + \frac{x-x_0}{a}b \Rightarrow y = \frac{b}{a}x + y_0 - \frac{x_0}{a}b.$$

Escrevendo $m = \frac{b}{a}$ e $n = y_0 - \frac{x_0}{a}b$ temos

$$y = mx + n.$$

Analogamente, podemos isolar λ na primeira equação e substituir na terceira:

$$z = z_0 + \frac{x-x_0}{a}c \Rightarrow z = \frac{c}{a}x + z_0 - \frac{x_0}{a}c.$$

Escrevendo $p = \frac{c}{a}$ e $q = z_0 - \frac{x_0}{a}c$ temos

$$z = px + q.$$

Com base nesse desenvolvimento, consideremos a seguinte definição:

Seja $Oxyz$ *sistema de coordenadas cartesianas ortogonais no espaço.*

Seja r *reta no espaço que possua um vetor diretor* $\vec{v} = (a, b, c)$ *cuja primeira coordenada* a *(abscissa) não seja nula.*

Nessa condições, vimos que é possível escrever as equações

$$\boxed{\begin{cases} y = mx + n \\ z = px + q \end{cases}},$$

que são chamadas de ***equações reduzidas de*** r ***na variável*** x.

É claro que, com o mesmo procedimento, poderíamos obter as ***equações reduzidas de*** r ***na variável*** y *(desde que* $b \neq 0$*)* ***e na variável*** z *(desde de que* $c \neq 0$*), que são dadas genericamente por*

$$\boxed{\begin{cases} x = my + n \\ z = py + q \end{cases}} \quad e \quad \boxed{\begin{cases} x = mz + n \\ y = pz + q \end{cases}}.$$

Observação: As equações reduzidas de r são equações das retas projeções ortogonais de r nos planos coordenados. Por exemplo: $y = mx + n$ é a equação da reta que é projeção ortogonal de r no plano coordenado Oxy.

Exemplo 3.4 Afirma-se que as retas

$$r : \begin{cases} x - y - z = 2 \\ x + y - z = 0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad s : \begin{cases} 2x - 3y + z = 5 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases}$$

são paralelas. Isso é verdade?

Primeiramente, observemos que as equações que foram dadas podem ser transformadas em equações reduzidas na variável x:

$$r : \begin{cases} x - y - z = 2 \\ x + y - z = 0 \end{cases} \equiv \begin{cases} x - y - z = 2 \\ 2x - 2z = 2 \end{cases} \equiv \begin{cases} x - y - z = 2 \\ z = x - 1 \end{cases} \equiv \begin{cases} x - y - (x-1) = 2 \\ z = x - 1 \end{cases} \equiv \begin{cases} y = -1 \\ z = x - 1 \end{cases}$$

$$s : \begin{cases} 2x - 3y + z = 5 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases} \equiv \begin{cases} 2x - 3y + z = 5 \\ 5x - 5z = 0 \end{cases} \equiv \begin{cases} 2x - 3y + z = 5 \\ z = x \end{cases} \equiv \begin{cases} 2x - 3y + x = 5 \\ z = x \end{cases} \equiv \begin{cases} y = x - 5/3 \\ z = x \end{cases}$$

Se r e s forem paralelas, seus vetores diretores também serão paralelos.

Para encontrarmos um vetor diretor para cada uma das retas, basta encontrarmos dois pontos distintos de cada uma delas. Para fazer isso, atribuímos dois valores distintos de x em cada sistema de equações reduzidas na variável x das retas r e s. Vejamos:

$$\begin{cases} \text{Fazendo } x = 0 \text{ em } r \text{ temos } y = -1 \text{ e } z = -1 \Rightarrow A\,(0, -1, -1) \in r. \\ \text{Fazendo } x = 0 \text{ em } s \text{ temos } y = -5/3 \text{ e } z = 0 \Rightarrow B\,(0, -5/3, 0) \in s. \\ \text{Fazendo } x = 1 \text{ em } r \text{ temos } y = -1 \text{ e } z = 0 \Rightarrow C\,(1, -1, 0) \in r. \\ \text{Fazendo } x = 1 \text{ em } s \text{ temos } y = -2/3 \text{ e } z = 1 \Rightarrow D\,(1, -2/3, 1) \in s. \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{cases} \vec{v} = \overrightarrow{AC} = C - A = (1, -1, 0) - (0, -1, -1) = (1, 0, 1) \text{ é vetor diretor de } r. \\ \vec{w} = \overrightarrow{BD} = D - B = (1, -2/3, 1) - (0, -5/3, 0) = (1, 1, 1) \text{ é vetor diretor de } s. \end{cases}$$

Como podemos ver, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ não são proporcionais, Logo, não são paralelos.

Portanto, a afirmação é falsa e as retas r e s não podem ser paralelas e nem coincidentes (elas são concorrentes ou reversas).

3.1.5 Casos Particulares de Retas no Espaço

Nesta subseção vamos apresentar alguns casos particulares de equações de retas que surgem com certa frequência em diversos problemas. Basicamente, vamos analisar como são as equações de retas paralelas a planos e eixos coordenados cartesianos.

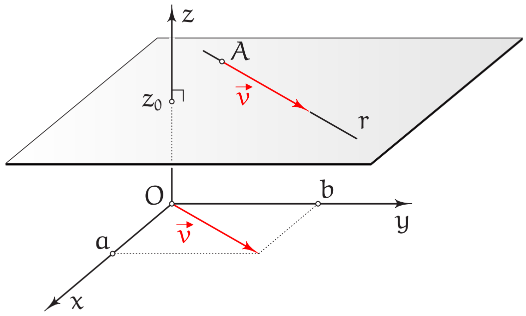
Reta paralela a plano coordenado

(1) **Se a reta** r **é paralela ao plano coordenado** Oxy, então seus vetores diretores devem ser da forma

$$\boxed{\vec{v} = (a, b, 0)}.$$

Logo, se r passa por $A(x_0, y_0, z_0)$, então suas equações paramétricas são da forma

$$\boxed{r: \begin{cases} x = x_0 + \lambda a \\ y = y_0 + \lambda b \\ z = z_0 \end{cases}, \text{ com } \lambda \in \mathbb{R},}$$



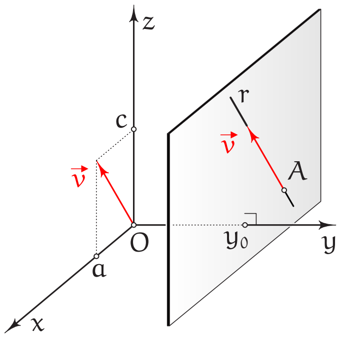
ou seja, z é sempre constante.

(2) **Se a reta** r **é paralela ao plano coordenado** Oxz, então seus vetores diretores devem ser da forma

$$\boxed{\vec{v} = (a, 0, c)}.$$

Logo, se r passa por $A(x_0, y_0, z_0)$, então suas equações paramétricas são da forma

$$\boxed{r: \begin{cases} x = x_0 + \lambda a \\ y = y_0 \\ z = z_0 + \lambda c \end{cases}, \text{ com } \lambda \in \mathbb{R},}$$



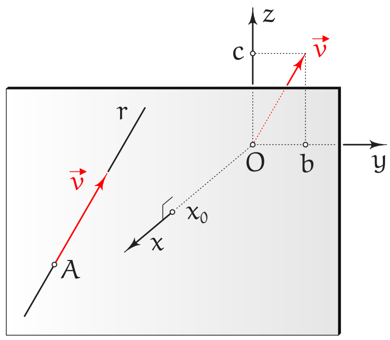
ou seja, y é sempre constante.

(3) **Se a reta** r **é paralela ao plano coordenado** Oyz, então seus vetores diretores devem ser da forma

$$\boxed{\vec{v} = (0, b, c)}.$$

Logo, se r passa por $A(x_0, y_0, z_0)$, então suas equações paramétricas são da forma

$$\boxed{r: \begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 + \lambda b \\ z = z_0 + \lambda c \end{cases}, \text{ com } \lambda \in \mathbb{R},}$$



ou seja, x é sempre constante.

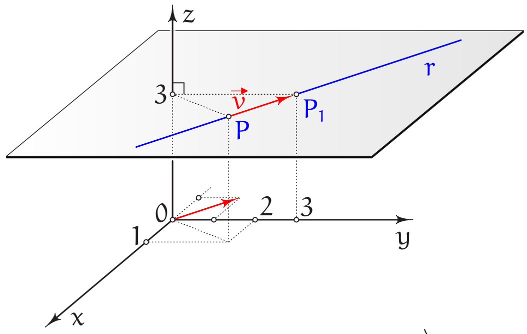
Exemplo 3.5 Encontremos equações paramétricas das retas:
(**a**) reta r paralela ao plano coordenado Oxy passando pelos pontos $P(1, 2, 3)$ e $P_1(0, 3, 3)$.
(**b**) reta s paralela ao plano coordenado Oxz passando pelos pontos $P(1, 2, 3)$ e $P_2(0, 2, 2)$.
(**c**) reta t paralela ao plano coordenado Oyz passando pelos pontos $P(1, 2, 3)$ e $P_3(1, 0, 2)$.

No Item (**a**) um vetor diretor de r deve ser da forma $\vec{v} = (a, b, 0)$. Observemos que $\vec{v} = \overrightarrow{PP_1} = P_1 - P = (-1, 1, 0)$ cumpre essa condição.

Um ponto fixo de r para escrevermos as equações paramétricas pode ser o próprio ponto P.

Logo, as equações paramétricas de r podem ser

$$r:\begin{cases} x = 1-\lambda \\ y = 2+\lambda \\ z = 3 \end{cases},\ \lambda\in\mathbb{R}.$$

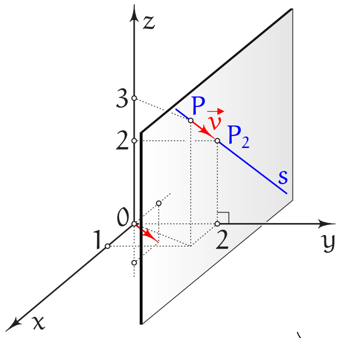


No Item (**b**) um vetor diretor de s deve ser da forma $\vec{v}=(a,0,c)$. Observemos que $\vec{v}=\overrightarrow{PP_2}=P_2-P=(-1,0,-1)$ cumpre essa condição.

Um ponto fixo de s para escrevermos as equações paramétricas pode ser o próprio ponto P.

Logo, as equações paramétricas de s podem ser

$$s:\begin{cases} x = 1-\lambda \\ y = 2 \\ z = 3-\lambda \end{cases},\ \lambda\in\mathbb{R}.$$

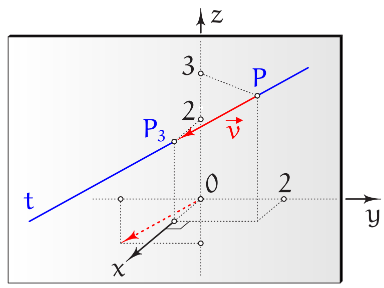


No Item (**c**) um vetor diretor de t deve ser da forma $\vec{v}=(0,b,c)$. Observemos que $\vec{v}=\overrightarrow{PP_3}=P_3-P=(0,-2,-1)$ cumpre essa condição.

Um ponto fixo de t para escrevermos as equações paramétricas pode ser o próprio ponto P.

Logo, as equações paramétricas de t podem ser

$$t:\begin{cases} x = 1 \\ y = 2-2\lambda \\ z = 3-\lambda \end{cases},\ \lambda\in\mathbb{R}.$$



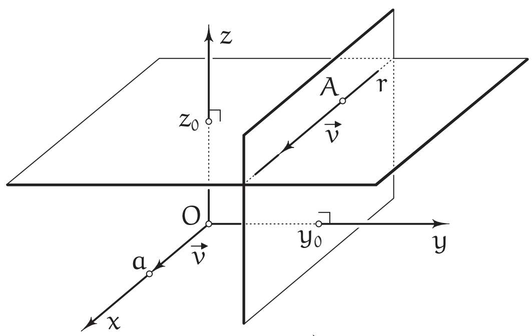
Reta paralela a eixo coordenado

(**1**) **Se a reta r é paralela ao eixo coordenado** Ox, então seus vetores diretores deverão ser da forma

$$\vec{v}=(a,0,0)\,.$$

Logo, suas equações paramétricas são da forma

$$\boxed{\begin{cases} x = x_0+\lambda a \\ y = y_0 \\ z = z_0 \end{cases}},$$



ou seja, y e z são sempre constantes (figura abaixo no canto superior esquerdo). Neste caso, as equações reduzidas de r na variável x são dadas por

$$\begin{cases} y = y_0 \\ z = z_0 \end{cases}.$$

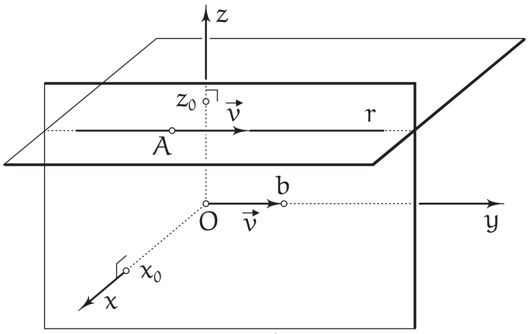
Em particular, o eixo coordenado Ox possui equações reduzidas $\left\{ \begin{array}{l} y = 0 \\ z = 0 \end{array} \right.$.

(**2**) **Se a reta** r **é paralela ao eixo coordenado** Oy, então seus vetores diretores deverão ser da forma

$$\vec{v} = (0, b, 0)\,.$$

Logo, suas equações paramétricas são da forma

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{l} x = x_0 \\ y = y_0 + \lambda b \\ z = z_0 \end{array} \right.},$$



ou seja, x e z são sempre constantes (figura acima no canto superior direito). Neste caso, as equações reduzidas de r na variável y são dadas por

$$\left\{ \begin{array}{l} x = x_0 \\ z = z_0 \end{array} \right. .$$

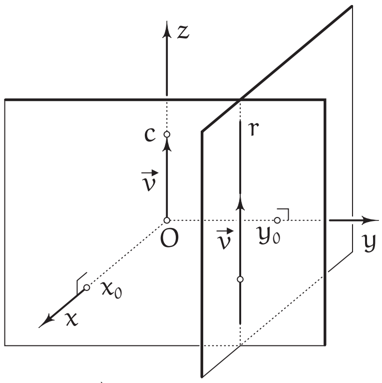
Em particular, o eixo coordenado Oy possui equações reduzidas $\left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ z = 0 \end{array} \right.$.

(**3**) **Se a reta** r **é paralela ao eixo coordenado** Oz, então seus vetores diretores deverão ser da forma

$$\vec{v} = (0, 0, c)\,.$$

Logo, suas equações paramétricas são da forma

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{l} x = x_0 \\ y = y_0 \\ z = z_0 + \lambda c \end{array} \right.},$$



ou seja, x e y são sempre constantes (figura acima na parte inferior). Neste caso, as equações reduzidas de r na variável z são dadas por

$$\left\{ \begin{array}{l} x = x_0 \\ y = y_0 \end{array} \right. .$$

Em particular, o eixo coordenado Oz possui equações reduzidas $\left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \end{array} \right.$.

Exemplo 3.6 Descrevamos as retas de equações (paramétricas)

$$r_1 : \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ z = 0 \end{array} \right. ; \quad r_2 : \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \end{array} \right. ; \quad r_3 : \left\{ \begin{array}{l} y = 0 \\ z = 0 \end{array} \right. ; \quad r_4 : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 \\ z = 2 \end{array} \right. ; \quad r_5 : \left\{ \begin{array}{l} x = 10 \\ y = -1 \end{array} \right. ; \quad r_6 : \left\{ \begin{array}{l} y = 2 \\ z = 5 \end{array} \right. .$$

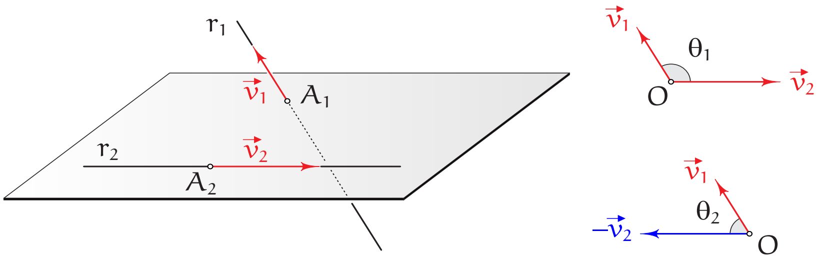
Temos:
Reta r_1: eixo coordenado Oy;
Reta r_2: eixo coordenado Oz;
Reta r_3: eixo coordenado Ox;
Reta r_4: reta paralela ao eixo Oy passando por $(1, 0, 2)$; (y pode assumir qualquer valor)
Reta r_5: reta paralela ao eixo Oz passando por $(10, -1, 0)$; (z pode assumir qualquer valor)
Reta r_6: reta paralela ao eixo Ox passando por $(0, 2, 5)$; (x pode assumir qualquer valor)

3.1.6 Ângulo entre Duas Retas no Espaço

Podemos definir ângulo entre retas do espaço em termos de seus vetores diretores, conforme definição abaixo.

Sejam r_1 e r_2 retas no espaço com vetores diretores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$.

*Consideremos os ângulos formados pelos vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ e pelos vetores $\vec{v}_1$ e $-\vec{v}_2$. O menor desses dois ângulos é chamado de **ângulo** entre as retas r_1 e r_2.*



Como consequência, retas poderão formar ângulo nulo, agudo ou reto, mas nunca obtuso.

A próxima proposição apresenta uma fórmula para o cálculo da medida de um ângulo entre duas retas utilizando seus vetores diretores.

Proposição 3.1 Se r_1 e r_2 são retas no espaço com vetores diretores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, então a medida θ do ângulo formado pelas retas r_1 e r_2 é tal que

$$\boxed{\cos(\theta) = \frac{|\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2|}{||\vec{v}_1||.||\vec{v}_2||}},$$

com $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$.

Exemplo 3.7 Achemos a medida *(*em radianos*)* do ângulo entre as retas:

(**a**) $r: \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = -2 - \lambda \\ z = \sqrt{2}\lambda \end{cases}$ e $s: \begin{cases} x = -2 + \lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = -5 + \sqrt{2}\lambda \end{cases}$.

(**b**) $r: \begin{cases} \frac{x+2}{3} = 3 - z \\ y = 0 \end{cases}$ e $s: \begin{cases} \frac{x+1}{2} = z + 3 \\ y = 0 \end{cases}$.

No Item (**a**) temos equações paramétricas das retas r e s. Um vetor diretor de r é $\vec{v} = \left(1, -1, \sqrt{2}\right)$ e um vetor diretor de s é $\vec{w} = \left(1, 1, \sqrt{2}\right)$.

De acordo com a Proposição 3.1, se θ é a medida do ângulo entre r e s, temos:

$$\cos(\theta) = \frac{\left|\left(1, -1, \sqrt{2}\right) \cdot \left(1, 1, \sqrt{2}\right)\right|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2}\sqrt{1^2 + 1^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2}} = \frac{2}{\sqrt{4}\sqrt{4}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}.$$

No Item (**b**) podemos escrever os sistemas de equações na forma reduzida na variável z:

$$r: \begin{cases} \frac{x+2}{3} = 3 - z \\ y = 0 \end{cases} \equiv \begin{cases} x = -3z + 7 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$s: \begin{cases} \frac{x+1}{2} = z + 3 \\ y = 0 \end{cases} \equiv \begin{cases} x = 2z + 5 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{Fazendo } z = 0 \text{ em } r \text{ temos } x = 7 \text{ e } y = 0 \Rightarrow A(7, 0, 0) \in r. \\ \text{Fazendo } z = 0 \text{ em } s \text{ temos } x = 5 \text{ e } y = 0 \Rightarrow B(5, 0, 0) \in s. \\ \text{Fazendo } z = 1 \text{ em } r \text{ temos } x = 4 \text{ e } y = 0 \Rightarrow C(4, 0, 1) \in r. \\ \text{Fazendo } z = 1 \text{ em } s \text{ temos } x = 7 \text{ e } y = 0 \Rightarrow D(7, 0, 1) \in s. \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{cases} \vec{v} = \overrightarrow{AC} = C - A = (4, 0, 1) - (7, 0, 0) = (-3, 0, 1) \text{ é vetor diretor de } r. \\ \vec{w} = \overrightarrow{BD} = D - B = (7, 0, 1) - (5, 0, 0) = (2, 0, 1) \text{ é vetor diretor de } s. \end{cases}$$

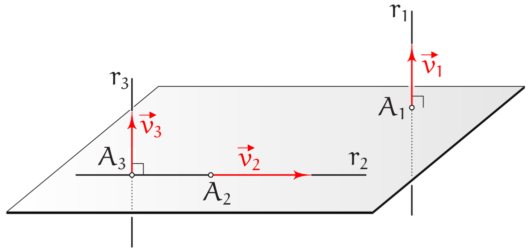
De acordo com a Proposição 3.1, se θ é a medida do ângulo entre r e s, temos:

$$\cos(\theta) = \frac{|(-3, 0, 1) \cdot (2, 0, 1)|}{\sqrt{(-3)^2 + 1^2}\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{5}{\sqrt{10}\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}.$$

Retas Ortogonais

Duas retas são ***ortogonais*** quando possuem vetores diretores ortogonais.

Observemos que duas retas podem ser ortogonais sem serem concorrentes, ou seja, podem ser ortogonais e reversas.



É comum chamar duas retas que são ortogonais e concorrentes de retas perpendiculares.

Exemplo 3.8 Verifiquemos se as retas r e s são ortogonais e, em caso afirmativo, se são também perpendiculares.

$$r : (x, y, z) = (1, 2, 3) + \lambda\,(1, 2, 1)\,, \text{ com } \lambda \in \mathbb{R};$$
$$s : (x, y, z) = (2, 4, 4) + \mu\,(-1, 1, -1)\,, \text{ com } \mu \in \mathbb{R}.$$

Temos $\vec{v} = (1, 2, 1)$ e $\vec{w} = (-1, 1, -1)$ são vetores diretores de r e s, respectivamente.

Calculando o produto escalar entre os vetores diretores temos $\vec{v}\cdot\vec{w} = (1, 2, 1)\cdot(-1, 1, -1) = 0$, ou seja, $\vec{v}$ é ortogonal a $\vec{w}$ e, portanto, r é ortogonal a s.

Se r for, também, perpendicular a s, deverá existir um ponto $P\,(x_0, y_0, z_0)$ em comum a r e s. Sejam λ_0 e μ_0 parâmetros associados a P em r e s. Substituindo (x_0, y_0, z_0) em suas equações temos:

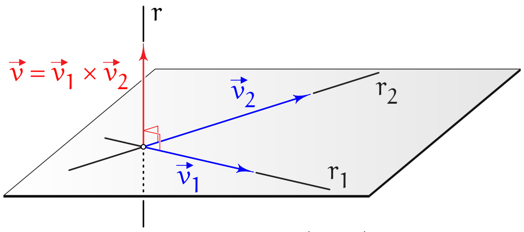
$$(x_0, y_0, z_0) = (1, 2, 3) + \lambda_0\,(1, 2, 1) = (2, 4, 4) + \mu_0\,(-1, 1, -1) \Rightarrow \begin{cases} 1 + \lambda_0 = 2 - \mu_0 \\ 2 + 2\lambda_0 = 4 + \mu_0 \\ 3 + \lambda_0 = 4 - \mu_0 \end{cases} \Rightarrow \cdots \text{ (faça)} \Rightarrow \lambda_0 = 1 \text{ e } \mu_0 = 0.$$

Logo, $P\,(2, 4, 4)$ é ponto de intersecção entre r e s. Portanto, r é perpendicular a s.

Reta Ortogonal a Duas Retas Não Paralelas

Uma reta r pode ser simultaneamente ortogonal a outras duas retas não paralelas r_1 e r_2. Para encontrarmos um vetor diretor $\vec{v}$ de r, basta tomarmos o produto vetorial dos vetores diretores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ das retas r_1 e r_2, respectivamente, ou seja,

$$\boxed{\vec{v} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2},$$



pois vimos que no produto vetorial, o vetor $\vec{v}$ é, simultaneamente, ortogonal a $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$.

Observemos que as retas não paralelas r_1 e r_2 podem ser concorrentes (como na figura acima) ou reversas.

Exemplo 3.9 Dadas as retas r_1 e r_2 não paralelas

$$\begin{cases} r_1 : (x, y, z) = (0, 0, 1) + \lambda\,(2, 3, -4)\,, \text{ com } \lambda \in \mathbb{R} \\ r_2 : (x, y, z) = (5, 0, 1) + \mu\,(0, 1, -1)\,, \text{ com } \mu \in \mathbb{R} \end{cases},$$

achemos uma equação vetorial de uma reta r que passe por $A\,(3, 4, -1)$ e que seja ortogonal a r_1 e a r_2 simultaneamente.

Primeiramente, observemos que $A \notin r_1$ e $A \notin r_2$.

Temos $\vec{v}_1 = (2, 3, -4)$ e $\vec{v}_2 = (0, 1, -1)$ vetores diretores de r_1 e r_2, respectivamente.

O produto vetorial $\vec{v} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2$ é ortogonal a $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ ao mesmo tempo. Logo, pode ser tomado como vetor diretor de r.

Neste caso, $\vec{v} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \equiv \det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \equiv -3\vec{i} + 2\vec{k} + 2\vec{j} + 4\vec{i} = (1, 2, 2).$

Conclusão:

$$r : (x, y, z) = (3, 4, -1) + \eta\,(1, 2, 2)\,, \text{ com } \eta \in \mathbb{R}.$$

3.2 Planos

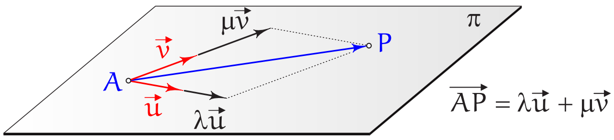
À semelhança do que fizemos com as retas na seção anterior, vamos apresentar três tipos de equações de planos associadas às coordenadas cartesianas do espaço. Mais uma vez, cada uma delas tem a sua utilidade e é importante que o leitor saiba identificá-las quando for resolver algum problema.

Continua válida a mesma observação inicial que fizemos no caso das retas: vamos fixar durante toda a seção que $Oxyz$ é *sistema de coordenadas cartesianas ortogonais no espaço.*

3.2.1 Equação Vetorial de um Plano no Espaço

Dado um ponto A no espaço e dois vetores não paralelos $\vec{u}$ e $\vec{v}$, existe um único plano π no espaço que passa por A e é paralelo a $\vec{u}$ e a $\vec{v}$ simultaneamente.

Dado um ponto $P \in \pi$, o vetor $\overrightarrow{AP}$ pode ser escrito como soma de vetores proporcionais a $\vec{u}$ e a $\vec{v}$, ou seja, existem $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tais que $\overrightarrow{AP} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$.



Essas considerações motivam a seguinte definição:

Dado um ponto A no espaço e dois vetores não paralelos $\vec{u}$ e $\vec{v}$, a equação

$$\boxed{\overrightarrow{AP} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}},$$

ou, equivalentemente,

$$\boxed{P = A + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}},$$

*com $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, (já que $\overrightarrow{AP} = P - A$) é chamada de **equação vetorial** do plano π que passa por A e é paralelo a $\vec{u}$ e $\vec{v}$ simultaneamente.*

P é ponto arbitrário de π.

*Os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são chamados de **vetores diretores** de r e os números reais λ e μ são chamados de **parâmetros** da equação vetorial de π.*

Observações:

(1) Como podemos notar, partimos de um ponto A e de dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não paralelos e construímos um plano π e sua equação. Entretanto, é claro que o procedimento recíproco vale, ou seja, se partirmos de um plano π no espaço, podemos tomar um ponto $A \in \pi$ e dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não proporcionais mas paralelos a π e escrever a equação vetorial de π, como acima.

(2) Dado um plano π, sua equação vetorial não é única, pois temos liberdade para escolher $A \in \pi$ e vetores não paralelos $\vec{u}$ e $\vec{v}$ paralelos a π.

(3) Dada uma equação vetorial de π, há uma *correspondência biunívoca* entre os pontos de π e pares ordenados de parâmetros (λ, μ), ou seja, para cada ponto de π temos um único par ordenado (λ, μ) e vice-versa.

Quando temos coordenadas, podemos transformar uma equação vetorial de plano utilizando ternas ordenadas:

Seja $Oxyz$ sistema de coordenadas cartesianas ortogonais no espaço.

Seja $P = A + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$, com $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, equação vetorial do plano π no espaço.

*Escrevendo $A(x_0, y_0, z_0)$, $P(x, y, z)$, $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$ e $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$ podemos escrever a **equação vetorial de π em coordenadas**:*

$$\boxed{(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda(a_1, b_1, c_1) + \mu(a_2, b_2, c_2)},$$

com $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Exemplo 3.10 Escrevamos uma equação vetorial para o plano π que passa por $A(1, 0, 1)$ e $B(0, 1, -1)$ e é paralelo ao segmento CD, sendo $C(1, 2, 1)$ e $D(0, 1, 0)$.

Assim como os pontos C e D, os pontos A e B formam um segmento no espaço e aí vem uma dúvida: *Sempre existe um plano paralelo a dois segmentos dados no espaço?*

A resposta é sim. Se os segmentos estiverem em retas concorrentes ou paralelas, é evidente a existência do plano π. Agora, e se os segmentos estiverem em retas reversas no espaço? Mesmo neste caso, a resposta continua sendo sim. A prova disso pode ser feita utilizando vetores. Entretanto, se não quiséssemos utilizar vetores, a demonstração seria um pouco mais difícil. Em cursos de *Geometria Euclidiana Espacial* (sem uso de vetores) questões como essa são abordadas, respondidas e justificadas.

Vamos à equação de nosso exemplo:

Os segmentos AB e CD podem ser utilizados para construirmos os vetores

$$\begin{cases} \vec{u} = \overrightarrow{AB} = B - A = (0,1,-1) - (1,0,1) = (-1,1,-2) \\ \vec{v} = \overrightarrow{CD} = D - C = (0,1,0) - (1,2,1) = (-1,-1,-1) \end{cases},$$

que não são proporcionais, logo, não são paralelos e podem ser tomados como vetores diretores de um plano π paralelo a ambos. Como este plano π deve passar por A e por B, podemos utilizar um desses pontos para a construção da equação vetorial de π:

$$(x,y,z) = (1,0,1) + \lambda(-1,1,-2) + \mu(-1,-1,-1), \text{ com } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

3.2.2 Equações Paramétricas de um Plano no Espaço

Dada uma equação vetorial de um plano π no espaço cartesiano, é possivel colocar cada coordenada de um ponto de π em função dos parâmetros da equação. Este é o conteúdo desenvolvida na próxima definição:

Seja $Oxyz$ sistema de coordenadas cartesianas ortogonais no espaço.

Seja π com equação vetorial $(x,y,z) = (x_0,y_0,z_0) + \lambda(a_1,b_1,c_1) + \mu(a_2,b_2,c_2)$, com $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Logo, podemos escrever

$$\boxed{\begin{cases} x = x_0 + \lambda a_1 + \mu a_2 \\ y = y_0 + \lambda b_1 + \mu b_2 \\ z = z_0 + \lambda c_1 + \mu c_2 \end{cases}}$$

*que são as chamadas **equações paramétricas** de π, sendo $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ os **parâmetros** das equações paramétricas de π.*

Pensando nas equações acima como equações nas variáveis λ e μ, os termos independentes x_0, y_0 e z_0 formam as coordenadas de um ponto de π, ou seja, $A(x_0,y_0,z_0) \in \pi$. Já os coeficientes a_1, b_1, c_1, a_2, b_2 e c_2 formam as coordenadas dos vetores diretores $\vec{u} = (a_1,b_1,c_1)$ e $\vec{v} = (a_2,b_2,c_2)$ de π.

Exemplo 3.11 Escrevamos as equações paramétricas do plano π que encontramos no Exemplo 3.10 logo acima.

Vimos que a equação vetorial do plano π é

$$(x,y,z) = (1,0,1) + \lambda(-1,1,-2) + \mu(-1,-1,-1), \text{ com } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Logo, o sistema de equações paramétricas do plano π é dado por:

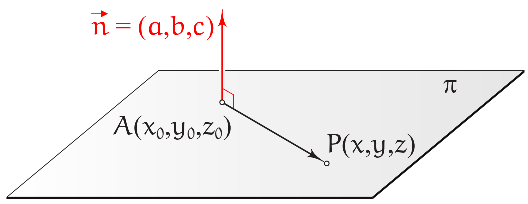
$$\begin{cases} x = 1 - \lambda - \mu \\ y = \lambda - \mu \\ z = 1 - 2\lambda - \mu \end{cases}, \text{ com } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

3.2.3 Equação Geral de um Plano no Espaço

Há uma terceira forma de equação cartesiana de plano que, sem dúvida, é a mais importante dentre todas as equações de plano, devido à sua concisão e utilidade em cursos de *Cálculo Diferencial e Integral*, por exemplo. Trata-se da equação geral de plano, que passamos a desenvolver abaixo.

Tomemos um ponto $A(x_0,y_0,z_0)$ em um plano π e um vetor $\vec{n} = (a,b,c)$, não nulo, ortogonal a π. Seja $P(x,y,z)$ um ponto arbitrário de π.

Temos $\overrightarrow{AP}$ ortogonal a $\vec{n}$, ou seja, $\overrightarrow{AP} \perp \vec{n}$, conforme ilustrado na figura abaixo.



De $\overrightarrow{AP} \perp \vec{n}$ temos $\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n} = 0$, ou seja,

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot (a, b, c) = 0 \Rightarrow ax - ax_0 + by - by_0 + cz - cz_0 = 0 \Rightarrow$$
$$ax + by + cz + \underbrace{(-ax_0 - by_0 - cz_0)}_{=d} = 0 \Rightarrow ax + by + cz + d = 0.$$

Seja $Oxyz$ *sistema de coordenadas cartesianas ortogonais no espaço.*

A equação

$$\boxed{ax + by + cz + d = 0}$$

associada ao plano π *tal como desenvolvida acima é chamada de* ***equação geral*** *do plano* π*.*

O vetor $\vec{n} = (a, b, c)$ *também é dito vetor* ***normal*** *ao plano* π*.*

Observações:

(**1**) Observemos que o desenvolvimento acima partiu de um ponto A do plano π, e de um vetor normal $\vec{n}$ a este plano, e chegou à equação geral do plano π. Entretanto, o procedimento recíproco também é válido, ou seja, dada uma equação $ax + by + cz + d = 0$ nas variáveis x, y e z (isso significa que a, b e c não são todos nulos), esta equação representa um plano no espaço, que é ortogonal ao vetor $\vec{n}$ não nulo de coordenadas (a, b, c) e as coordenadas de um ponto A desse plano formam uma terna-raiz da equação $ax + by + cz + d = 0$, ou seja, $A(x_0, y_0, z_0)$ é tal que $ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$.

(**2**) Observemos também que, se tivermos a equação vetorial de um plano π, descobrir um vetor normal $\vec{n}$ a π para escrever sua equação geral é muito simples: basta calcular o produto vetorial

$$\boxed{\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}},$$

sendo $\vec{u}$ e $\vec{v}$ os vetores diretores de π na equação vetorial. A justificativa é óbvia, pois $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são paralelos a π e o produto vetorial $\vec{n}$ é ortogonal a $\vec{u}$ e a $\vec{v}$ simultaneamente. Portanto, $\vec{n}$ é ortogonal a π.

(**2**) Por fim, um modo ainda mais fácil de encontrar a equação geral de um plano π, se tivermos a equação vetorial. Se $A \in \pi$ é dado, $P \in \pi$ é um ponto arbitrário e, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são vetores diretores de π, então os três vetores: $\overrightarrow{AP}$, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares. Isto siginifica que seu produto misto é zero! Logo, é muito fácil encontrar a equação geral. Vejamos um exemplo.

Exemplo 3.12 Vamos encontrar a equação geral do plano π do Exemplo 3.10 acima.

Vimos que a equação vetorial do plano π é

$$(x, y, z) = (1, 0, 1) + \lambda(-1, 1, -2) + \mu(-1, -1, -1), \text{ com } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Fazendo $A(1, 0, 1)$, $\vec{u} = (-1, 1, -2)$ e $\vec{v} = (-1, -1, -1)$, chamemos de $P(x, y, z)$ um ponto arbitrário de π. Logo, $\overrightarrow{AP} = P - A = (x, y, z) - (1, 0, 1) = (x - 1, y, z - 1)$.

Como os vetores $\overrightarrow{AP}$, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são coplanares, seu produto misto é zero, ou seja, $\overrightarrow{AP} \cdot \vec{u} \times \vec{v} = 0$. Assim,

$$\det \begin{bmatrix} x-1 & y & z-1 \\ -1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow -(x-1) + 2y + z - 1 + z - 1 - y - 2(x-1) = 0 \Rightarrow \boxed{-3x + y + 2z + 1 = 0}$$

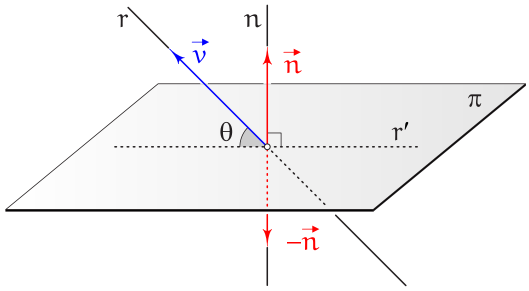
é a equação procurada.

3.2.4 Ângulo entre Reta e Plano no Espaço

Podemos trabalhar com ângulos entre retas e planos no espaço. Para tanto, segue a definição necessária para esse estudo:

Sejam r *reta com vetor diretor* $\vec{v}$ *e* π *plano com vetor normal* $\vec{n}$ *no espaço.*

Consideremos os ângulos formados pelos vetores $\vec{v}$ *e* $\vec{n}$ *e pelos vetores* $\vec{v}$ *e* $-\vec{n}$*. O* <u>*complemento*</u> ([1]) *do* <u>*menor*</u> *desses dois ângulos é chamado de* ***ângulo*** *entre a reta* r *e o plano* π*.*



Como consequência, reta e plano poderão formar ângulo nulo, agudo ou reto, mas nunca obtuso.

Quando o vetor diretor $\vec{v}$ da reta r e o vetor normal $\vec{n}$ do plano π são paralelos, dizemos que a reta r e o plano π são ***perpendiculares*** ou ***ortogonais***. Neste caso, o complemento citado acima é um ângulo reto.

Observemos também que, se a reta r e o plano π não forem ortogonais, o ângulo entre r e π é o mesmo que o ângulo formado por r e $r' = \text{proj}_\pi r$. (r' é a projeção ortogonal da reta r sobre o plano π). A figura acima ilustra essa situação.

Por fim, outra forma alternativa de se definir o ângulo entre uma reta e um plano é considerá-lo como sendo o complemento do ângulo entre as retas r e n, de vetores diretores $\vec{v}$ e $\vec{n}$, respectivamente. Novamente, isso pode ser vista na figura acima.

Uma vez definido o ângulo entre uma reta e um plano, resta verificarmos como calcular a medida desse ângulo em função dos vetores envolvidos. Este é o próximo resultado matemático, enunciado abaixo:

Proposição 3.2 Se r é uma reta com vetor diretor $\vec{v}$ e π é um plano com vetor normal $\vec{n}$, então a medida θ do ângulo formado pela reta r e o plano π é tal que

$$\boxed{\text{sen}\,(\theta) = \frac{|\vec{v}\cdot\vec{n}|}{||\vec{v}||.||\vec{n}||}},$$

com $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$.

Demonstração.

Consideremos o ângulo de medida θ entre a reta r e o plano π e o ângulo de medida α entre as retas r e n (normal ao plano π).

De acordo com o que foi definido e observado acima, temos $\theta + \alpha = \frac{\pi}{2}$.

Mas vimos que o ângulo de medida α entre as retas é tal que $\cos(\alpha) = \frac{|\vec{v}\cdot\vec{n}|}{||\vec{v}||.||\vec{n}||}$ (Proposição 3.1).

Assim,

$$\cos(\alpha) = \frac{|\vec{v}\cdot\vec{n}|}{||\vec{v}||.||\vec{n}||} \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{|\vec{v}\cdot\vec{n}|}{||\vec{v}||.||\vec{n}||} \Rightarrow$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos(\theta) + \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\text{sen}\,(\theta) = \frac{|\vec{v}\cdot\vec{n}|}{||\vec{v}||.||\vec{n}||} \Rightarrow \boxed{\text{sen}\,(\theta) = \frac{|\vec{v}\cdot\vec{n}|}{||\vec{v}||.||\vec{n}||}},$$

como queríamos. □

Exemplo 3.13 Achemos a medida do ângulo entre:

(**a**) $r: \begin{cases} x = 0 \\ y = z \end{cases}$ e $\pi: z = 0$.

(**b**) $r: \begin{cases} x + y = 2 \\ x = 1 + 2z \end{cases}$ e $\pi: \sqrt{\frac{45}{7}}x + y + 2z - 10 = 0$.

No caso (**a**) nem é preciso fórmula, pois $r: \begin{cases} x = 0 \\ y = z \end{cases}$ é bissetriz de quadrantes ímpares do plano coordenado Oyz e o plano $\pi: z = 0$ é o plano coordenado Oxy. Logo, o ângulo entre r e π mede $\frac{\pi}{4}$ rad, ou seja, 45°.

Mas vamos verificar esse resultado com a fórmula deduzida na Proposição 3.2.

Um vetor diretor de r pode ser obtido por meio dos pontos que correspondem a $z = 0$ e $z = 1$ (por exemplo) nas equações reduzidas de r, ou seja, $\vec{v} = (0,1,1) - (0,0,0) = (0,1,1)$.

Um vetor normal a π pode ser obtido por meio dos coeficientes das variáveis x, y e z na equação geral de π, ou seja, $\vec{n} = (0,0,1)$.

Logo, se θ é a medida do ângulo entre r e π, então:

$$\text{sen}\,(\theta) = \frac{|\vec{v}\cdot\vec{n}|}{||\vec{v}||.||\vec{n}||} = \frac{|(0,1,1)\cdot(0,0,1)|}{\sqrt{0^2+1^2+1^2}\sqrt{0^2+0^2+1^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} \text{ rad}.$$

[1] Dois ângulos de medidas α e β são ditos **complementares** (ou um dos ângulo é o **complemento** do outro) quando $\alpha + \beta = 90°$ (ou $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ rad).

No caso (**b**) o procedimento é análogo, observando apenas que as equações de r são reduzidas na variável x:

$$r : \begin{cases} x + y = 2 \\ x = 1 + 2z \end{cases} \equiv \begin{cases} y = -x + 2 \\ z = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \end{cases}$$

Vetor diretor de $r : \vec{v} = (1, 1, 0) - \left(0, 2, -\frac{1}{2}\right) = \left(1, -1, \frac{1}{2}\right)$.

Vetor normal a $\pi : \vec{n} = \left(\sqrt{\frac{45}{7}}, 1, 2\right)$.

Logo,

$$\text{sen}\,(\theta) = \frac{\left|\left(1,-1,\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\sqrt{\frac{45}{7}},1,2\right)\right|}{\sqrt{1+1+\frac{1}{4}}\sqrt{\frac{45}{7}+1+4}} = \frac{\sqrt{\frac{45}{7}}-1+1}{\frac{3}{2}\sqrt{\frac{80}{7}}} = \frac{2\sqrt{3^2.5}}{3\sqrt{4^2 5}} = \frac{2.3}{3.4} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6} \text{ rad}.$$

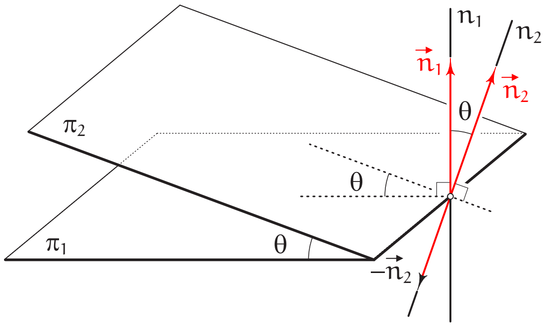
3.2.5 Ângulo entre Dois Planos no Espaço

Além do conceito de ângulo entre reta e plano, também temos o conceito de ângulo ente planos, que passamos a definir abaixo:

Sejam π_1 e π_2 planos no espaço com vetores normais $\vec{n}_1$ e $\vec{n}_2$.

*Consideremos os ângulos formados pelos vetores $\vec{n}_1$ e $\vec{n}_2$ e pelos vetores $\vec{n}_1$ e $-\vec{n}_2$. O menor desses dois ângulos é chamado de **ângulo** entre os planos π_1 e π_2.*

Observemos que essa é a mesma definição do ângulo entre as retas normais n_1 e n_2 a π_1 e π_2, de vetores diretores $\vec{n}_1$ e $\vec{n}_2$, respectivamente.



Como consequência, planos poderão formar ângulo nulo, agudo ou reto, mas nunca obtuso.

Além disso, a fórmula para cálculo da medida θ do ângulo entre dois planos é mesma fórmula utilizada para o cálculo da medida do ângulo entre duas retas:

$$\boxed{\cos(\theta) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{||\vec{n}_1||.||\vec{n}_2||}},$$

com $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$.

Exemplo 3.14 Achemos a medida do ângulo entre o planos

$$\pi_1 : X = (0, 0, 0) + \lambda(1, 0, 0) + \mu(1, 1, 1) \quad \text{e} \quad \pi_2 : X = (1, 0, 0) + \lambda(-1, 2, 0) + \mu(0, 1, 0).$$

Basta encontrarmos vetores normais ao planos e calcularmos a medida do ângulo entre eles.

Chamando os vetores diretores de π_1 de $\vec{u}_1 = (1, 0, 0)$.e $\vec{u}_2 = (1, 1, 1)$ e, os vetores diretores de π_2 de $\vec{v}_1 = (-1, 2, 0)$ e $\vec{v}_2 = (0, 1, 0)$, temos:

Vetor normal a $\pi_1 : \vec{n}_1 = \vec{u}_1 \times \vec{u}_2 \equiv \det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \equiv -\vec{j} + \vec{k} = (0, -1, 1)$.

Vetor normal a $\pi_2 : \vec{n}_2 = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \equiv \det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \equiv -\vec{k} = (0, 0, -1)$.

Logo, se θ é a medida do ângulo entre os planos, então:

$$\cos(\theta) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{||\vec{n}_1||.||\vec{n}_2||} = \frac{|(0,-1,1)\cdot(0,0,-1)|}{\sqrt{2}\sqrt{1}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} \text{ rad}.$$

Uma observação importante sobre equações de retas e planos concorrentes.

Na seção anterior estudamos as equações das retas no espaço. Além das quatro formas de equações apresentadas, há ainda um outro modo de apresentar uma equação de reta no espaço: como intersecção de dois planos concorrentes. Assim, quando escrevemos

$$r : \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases},$$

estamos pensando na reta r que é intersecção dos planos concorrentes π_1 e π_2 cujas equações gerais são dadas acima.

Observe que esta forma de apresentar uma reta pode não coincidir com aquelas que estudamos na seção anterior. Por outro lado, quando apresentamos um sistema de equações reduzidas (não importa em qual variável), sempre podemos pensar naquelas duas equações como equações de planos e a reta r é, portanto, fruto de uma intersecção de planos. O mesmo pode ser pensado das equações simétricas de uma reta r: escolhendo-se duas das equações (das três equações disponíveis) elas podem ser pensadas como equações de planos e a reta r é, novamente, fruto de uma intersecção de planos.

Por fim, um cuidado especial quando apresentamos uma reta r com equações que se *parecem* com equações simétricas, como, por exemplo, $x - z = y - 1 = 0$. Aqui, mais uma vez, podemos escolher duas das equações (dentre as três disponíveis) e enxergar r como intersecção de dois planos concorrentes. Podemos escrever

$$r : \begin{cases} x - z = 0 \\ y - 1 = 0 \end{cases}, \quad r : \begin{cases} x - z = y - 1 \\ y - 1 = 0 \end{cases} \quad \text{ou, ainda, } r : \begin{cases} x - z = 0 \\ x - z = y - 1 \end{cases}.$$

Todas essas formas de apresentação referem-se à mesma reta r.

3.3 Distâncias

Todas as noções de distância entre pontos, retas e planos que são estudadas nesta seção são, na verdade, provenientes de apenas uma única noção: a de que a distância entre dois desses objetos no espaço, digamos F_1 e F_2, é a menor distância que se pode obter entre um ponto de F_1 e um ponto de F_2.

Vamos apresentar seis casos que nos interessam em termos de distâncias e suas respectivas fórmulas envolvendo vetores:

- Distância entre dois pontos;
- Distância entre ponto e reta;
- Distância entre ponto e plano;
- Distância entre duas retas;
- Distância entre reta e plano;
- Distância entre dois planos.

Mais uma vez, é sempre bom recordar que estamos fixando $Oxyz$ *sistema de coordenadas cartesianas ortogonais* no espaço.

3.3.1 Distância de Ponto a Ponto

A distância entre dois pontos no espaço pode ser calculada como sendo o comprimento do segmento de reta que liga esses dois pontos, ou então, como sendo o comprimento do vetor com origem e extremo nesses pontos. Esse é o conteúdo da próxima definição.

*Dados dois pontos P e Q no espaço, definimos a **distância** entre os pontos P **e** Q, indicada por $d(P, Q)$, como sendo o comprimento do segmento de reta com extremos em P e Q, o que equivale dizer que a distância entre P e Q é o comprimento do vetor $\overrightarrow{PQ}$ ou $\overrightarrow{QP}$.*

Como já vimos o cálculo do comprimento de um vetor utilizando suas coordenadas, então a fórmula de distância entre dois pontos fica extremamente fácil. Vamos recordá-la na proposição abaixo.

Proposição 3.3 Seja $Oxyz$ sistema de coordenadas cartesianas ortogonais no espaço.

Se $P(x_1, y_1, z_1)$ e $Q(x_2, y_2, z_2)$, então a distância entre P e Q é dada por

$$\boxed{d(P, Q) = \|\overrightarrow{PQ}\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}.$$

Obviamente, se $P = Q$, então $d(P, Q) = 0$.

Exemplo 3.15 Achemos os pontos da reta $r : \begin{cases} x+y=2 \\ x=y+z \end{cases}$ que distam 3 do ponto $Q(0,2,1)$.

Observemos que a reta r foi dada como intersecção dos planos concorrentes π_1 e π_2, de equações gerais $x+y-2=0$ e $x-y-z=0$, respectivamente.

Um ponto $P(x_0,y_0,z_0)$ de r possui expressão

$$P(x_0, 2-x_0, x_0-y_0) = P(x_0, 2-x_0, x_0-(2-x_0)) = P(x_0, 2-x_0, 2x_0-2).$$

Assim, $\overrightarrow{PQ} = Q-P = (0,2,1)-(x_0,2-x_0,2x_0-2) = (-x_0, x_0, -2x_0+3)$.

Logo,

$$d(P,Q) = 3 \Rightarrow ||\overrightarrow{PQ}|| = 3 \Rightarrow \sqrt{(-x_0)^2 + x_0^2 + (-2x_0+3)^2} = 3 \Rightarrow$$
$$2x_0^2 + 4x_0^2 - 12x_0 + 9 = 9 \Rightarrow x_0(6x_0-12) = 0 \Rightarrow x_0 = 0 \text{ ou } x_0 = 2.$$

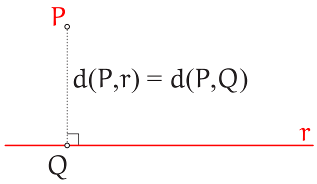
Portanto, há dois pontos que satisfazem o enunciado: $P_1(0,2,-2)$ e $P_2(2,0,2)$.

3.3.2 Distância de Ponto a Reta

Dado um ponto e P uma reta r no espaço, dentre todos os segmentos de reta que ligam P a um ponto de r, qual é o de menor comprimento? É fácil perceber que é aquele perpendicular à reta. E isso é fácil de ser justificado utilizando o Teorema de Pitágoras (tente fazer isso). Essa é a motivação para a seguinte definição:

Dados o ponto P e a reta r no espaço, definimos a ***distância*** *do ponto P à reta r, indicada por $d(P,r)$, como sendo o comprimento do segmento de reta PQ perpendicular a r baixado a partir de P, com $Q \in r$, ou seja, $d(P,r) = d(P,Q)$.*

Obviamente, se $P \in r$, então $d(P,r) = 0$.



A próxima proposição fornece uma fórmula para o cálculo de distância de ponto a reta utilizando um vetor diretor da reta. Sua demonstração é simples e faz uso da interpretação geométrica do produto vetorial. Convidamos o leitor a tentar demonstrá-la.

Proposição 3.4 *Sejam P ponto e r reta com vetor diretor $\vec{v}$ no espaço. Então,*

$$\boxed{d(P,r) = \frac{||\overrightarrow{AP}\times\vec{v}||}{||\vec{v}||}},$$

sendo A um ponto qualquer de r.

Observemos que se $P \in r$, então $\overrightarrow{AP} /\!/ \vec{v}$ e, portanto, $\overrightarrow{AP}\times\vec{v} = \vec{0}$, ou seja, $d(P,r) = 0$. Notemos que, neste caso, A pode ser inclusive igual a P!

Exemplo 3.16 Achemos os pontos da reta $r : \begin{cases} x+y=2 \\ x=y+z \end{cases}$ que distam $\sqrt{\frac{14}{3}}$ da reta $s : x = y = z+1$.

Como vimos no Exemplo 3.15, um ponto $P(x_0,y_0,z_0)$ de r possui expressão $P(x_0, 2-x_0, 2x_0-2)$.

Sejam $A(0,0,-1) \in s$ (um ponto escolhido de s) e $\vec{v} = (1,1,1)$ vetor diretor de s (lembre-se que as equações de s são simétricas e os denominadores formam as coordenadas de um vetor diretor de s).

Temos $\overrightarrow{AP} = P-A = (x_0, 2-x_0, 2x_0-2)-(0,0,-1) = (x_0, 2-x_0, 2x_0-1)$ e

$$\overrightarrow{AP}\times\vec{v} \equiv \det\begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_0 & 2-x_0 & 2x_0-1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \equiv (2-x_0-(2x_0-1), 2x_0-1-x_0, x_0-(2-x_0)) = (-3x_0+3, x_0-1, 2x_0-2).$$

Logo,

$$d(P,s) = \sqrt{\frac{14}{3}} \Rightarrow \frac{||\overrightarrow{AP}\times\vec{v}||}{||\vec{u}||} = \sqrt{\frac{14}{3}} \Rightarrow \frac{\sqrt{(-3x_0+3)^2+(x_0-1)^2+(2x_0-2)^2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{3}} \Rightarrow$$
$$9x_0^2 - 18x_0 + 9 + x_0^2 - 2x_0 + 1 + 4x_0^2 - 8x_0 + 4 = 14 \Rightarrow 14x_0^2 - 28x_0 = 0 \Rightarrow x_0(x_0-2) = 0 \Rightarrow x_0 = 0 \text{ ou } x_0 = 2.$$

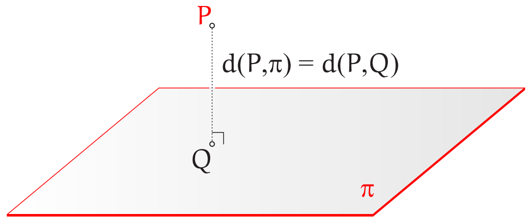
Logo, há dois pontos que satisfazem o enunciado: $P_1(0,2,-2)$ e $P_2(2,0,2)$.

3.3.3 Distância de Ponto a Plano

Aqui a ideia é a mesma daquela que citamos no caso de distância de ponto a reta. Seja P um ponto e π um plano no espaço. Dentre todos os segmentos de reta que ligam P a um ponto de π, qual é o de menor comprimento? É fácil ver que é aquele perpendicular ao plano π (e, mais uma vez, o Teorema de Pitágoras justifica isso). Sendo assim, a definição abaixo fica natural:

*Dados o ponto P e o plano π no espaço, definimos a **distância** do ponto P ao plano π, indicada por $d(P,\pi)$, como sendo o comprimento do segmento de reta PQ perpendicular a π baixado a partir de P, com $Q \in \pi$, ou seja, $d(P,\pi) = d(P,Q)$.*

Obviamente, se $P \in \pi$, então $d(P,\pi) = 0$.



A próxima proposição fornece uma fórmula para o cálculo de distância de ponto a plano utilizando vetores diretores do plano. Sua demonstração faz uso da interpretação geométrica do produto misto e, embora seja um pouco difícil de se ilustrar com uma figura, convidamos o leitor a tentar demonstrá-la.

Proposição 3.5 *Sejam P ponto e π plano com vetores diretores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ no espaço. Então,*

$$\boxed{d(P,\pi) = \frac{|\overrightarrow{AP}\cdot\vec{u}\times\vec{v}|}{||\vec{u}\times\vec{v}||}},$$

sendo A um ponto qualquer de π.

Observemos que se $P \in \pi$, então $\overrightarrow{AP}$, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são coplanares e, portanto, $\overrightarrow{AP}\cdot\vec{u}\times\vec{v} = 0$, ou seja, $d(P,\pi) = 0$. Notemos que, neste caso, A pode ser inclusive igual a P!

Exemplo 3.17 Calculemos a distância do ponto $P(1,2,3)$ ao plano π de equação vetorial $(x,y,z) = (1,1,1) + \lambda(1,0,2) + \mu(2,0,1)$, com $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Um ponto A do plano π pode ser escolhido como sendo $A(1,1,1)$. Logo, $\overrightarrow{AP} = P - A = (1,2,3) - (1,1,1) = (0,1,2)$.

Fazendo $\vec{u} = (1,0,2)$ e $\vec{v} = (2,0,1)$ temos:

$$\vec{u}\times\vec{v} \equiv \det\begin{bmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 0 & 2\\ 2 & 0 & 1\end{bmatrix} \equiv (0,3,0).$$

Logo,

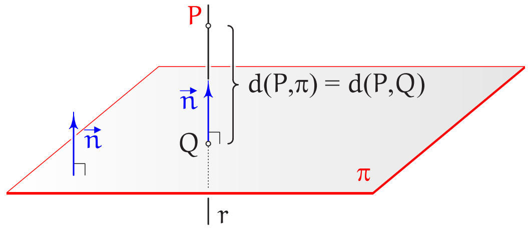
$$d(P,\pi) = \frac{|\overrightarrow{AP}\cdot\vec{u}\times\vec{v}|}{||\vec{u}\times\vec{v}||} = \frac{|(0,1,2)\cdot(0,3,0)|}{||(0,3,0)||} = \frac{3}{3} = 1.$$

Embora a proposição acima seja interessante, frequentemente o plano π é fornecido por meio de sua equação geral. Sendo assim, seria bom se deduzíssemos uma fórmula que faça uso dos elementos da equação geral do plano ao invés dos vetores diretores. Esse é o conteúdo da próxima proposição.

Proposição 3.6 *Seja $Oxyz$ sistema de coordenadas cartesianas ortogonais no espaço. Sejam $P(x_0,y_0,z_0)$ ponto e π plano no espaço com equação geral $ax+by+cz+d=0$. Então,*

$$\boxed{d(P,\pi) = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}.$$

Observação: Lembremos que $\vec{n} = (a,b,c)$ é vetor normal ao plano π. Logo, podemos fazer a intersecção da reta r que passa por P e é perpendicular a π (a equação vetorial de r pode ser dada por $X = P + \lambda\vec{n}$, com $\lambda \in \mathbb{R}$) com o próprio plano π. Com esse procedimento podemos encontrar o ponto $\{Q\} = r \cap \pi$. A distância de P a π coincide com a distância de P a Q, ou seja, $d(P,\pi) = d(P,Q)$, conforme podemos observar na figura abaixo.



Exemplo 3.18 Achemos os pontos da reta $r: \begin{cases} x+y=2 \\ x=y+z \end{cases}$ que distam $\sqrt{6}$ do plano $\pi: x-2y-z=1$.

Como vimos no Exemplo 3.15, um ponto $P(x_0, y_0, z_0)$ de r possui expressão $P(x_0, 2-x_0, 2x_0-2)$.
Da equação geral do plano π temos $a=1$, $b=-2$, $c=-1$ e $d=-1$. Logo,

$$d(P,\pi) = \sqrt{6} \Rightarrow \frac{|1.x_0+(-2)(2-x_0)+(-1)(2x_0-2)+(-1)|}{||(1,-2,-1)||} = \sqrt{6} \Rightarrow \frac{|x_0-4+2x_0-2x_0+2-1|}{\sqrt{1+4+1}} = \sqrt{6} \Rightarrow \frac{|x_0-3|}{\sqrt{6}} = \sqrt{6} \Rightarrow$$
$$\begin{cases} x_0-3=6 \\ \text{ou} \\ x_0-3=-6 \end{cases} \Rightarrow x_0 = 9 \text{ ou } x_0 = -3.$$

Logo, há dois pontos que satisfazem o enunciado: $P_1(9,-7,16)$ e $P_2(-3,5,-8)$.

3.3.4 Distância de Reta a Reta

Para definir distância entre duas retas no espaço temos três situações a serem consideradas:
- Retas concorrentes;
- Retas paralelas;
- Retas reversas (ou seja, não coplanares).

As duas primeiras situações são bastante simples, porém, a terceira não é. Para tornar as definições que apresentaremos mais naturais, o leitor sempre deve ter em mente o conceito de distância entre dois objetos que já mencionamos no início desta seção: o comprimento do menor segmento que liga um ponto de uma reta a um ponto da outra reta.

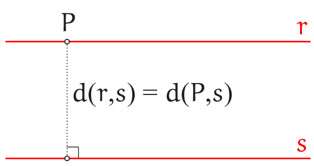
Antes das definições, um resultado de *Geometria Euclidiana Espacial* envolvendo retas reversas: Quando r e s são reversas é possível mostrar que existe, e é único, o plano π paralelo à reta r e que contém a reta s. A demonstração pode ser feita com vetores (mais fácil) ou sem vetores (mais difícil). Não a faremos aqui, mas encorajamos o leitor para que tente fazê-la. Vamos admitir esse resultado na definição abaixo.

Sejam r e s retas distintas no espaço. Temos três situações a serem consideradas:

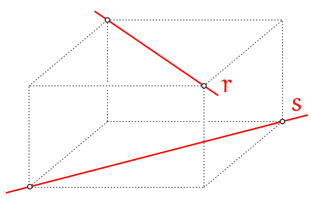
(1) *Quando r e s são concorrentes, definimos a **distância** entre as retas r e s como sendo nula, ou seja, $d(r,s)=0$.*

(2) *Quando r e s são paralelas, definimos a **distância** entre as retas r e s como sendo a distância de um ponto P qualquer de r até s, e o problema do cálculo da distância entre r e s recai sobre o problema da distância de ponto a reta que já estudamos, ou seja, $d(r,s) = d(P,s)$.*

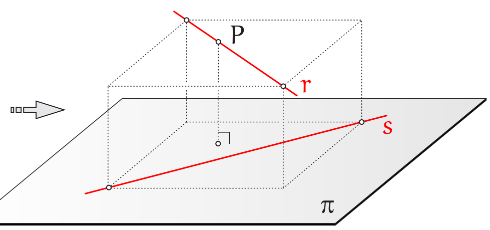
(3) *Quando r e s são reversas, definimos a **distância** entre as retas r e s como sendo a distância de um ponto P qualquer da reta r até o plano π, que contém a reta s e é paralelo à reta r.*



retas paralelas



retas reversas



d(r,s) = d(P,π)

Quando r e s são reversas, observemos que se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são vetores diretores de r e s, respectivamente, podemos escrever a equação vetorial do plano π da definição utilizando os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ como sendo vetores diretores de π. Logo, o cálculo da distância entre r e s pode ser feito utilizando-se o cálculo da distância de um ponto P qualquer de r ao plano π, conforme já visto. Vamos sintetizar essa observação na proposição abaixo.

Proposição 3.7 *Sejam r e s retas concorrentes ou reversas com vetores diretores $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Então,*

$$\boxed{d\,(r,s) = \frac{|\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{u}\times\vec{v}|}{||\vec{u}\times\vec{v}||}},$$

sendo $P \in r$ e $Q \in s$ pontos quaisquer.

Observações:

(1) Na proposição acima, embora estejamos interessados em retas reversas, incluímos na hipótese a possibilidade de r e s serem concorrentes. Isto não causa problema algum pois, neste caso, os vetores $\overrightarrow{PQ}$, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ serão coplanares e, portanto, o produto misto é zero, que é a distância entre retas concorrentes.

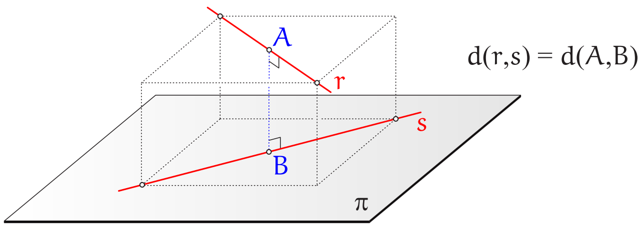
(2) O cálculo do produto vetorial $\vec{u}\times\vec{v}$ é bastante útil para identificar a posição relativa das retas r e s no espaço:

(2i) Se $\vec{u}\times\vec{v} = \vec{0}$, então as retas r e s são paralelas ou coincidentes (isto é $r = s$). Neste caso, para saber se r e s são distintas ou não, basta procurar por algum ponto comum às duas retas. Se este ponto existir, as retas são coincidentes, caso contrário, as retas são paralelas.

(2ii) Se $\vec{u}\times\vec{v} \neq \vec{0}$, então as retas r e s são concorrentes ou reversas e podemos utilizar a proposição acima. Observemos ainda que se r e s são concorrentes, então os vetores $\overrightarrow{PQ}$, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são coplanares e, conforme observado acima, o produto misto $\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{u}\times\vec{v}$ é nulo.

Curiosidade: E aquela história do comprimento do menor segmento que liga um ponto de uma reta r a um ponto de outra reta s, ser a distância entre r e s? Como enxergamos isso no caso das retas r e s serem reversas?

Dadas duas retas reversas r e s, é possível provar que sempre existe um segmento de reta AB perpendicular a r e a s ao mesmo tempo. A distância entre r e s coincide com o comprimento de AB, ou seja, $d\,(r,s) = d\,(A,B)$ e, conforme a figura abaixo sugere, AB é o segmento de menor comprimento ligando um ponto de r a um ponto de s.



Exemplo 3.19 Calculemos a distância entre as retas $r : \begin{cases} x+y=2 \\ x = y+z \end{cases}$ e $s : x = y = z+1$ do Exemplo 3.16.

Precisamos de um vetor diretor de r. Para economizar, tomemos $\vec{u} = \overrightarrow{P_1P_2}$, sendo $P_1\,(0,2,-2)$ e $P_2\,(2,0,2)$ os pontos de r que encontramos no próprio Exemplo 3.16, ou seja, $\vec{u} = (2,0,2)-(0,2,-2) = (2,-2,4)$.

Um vetor diretor de s pode ser $\vec{v} = (1,1,1)$.

Assim:

$$\vec{u}\times\vec{v} \equiv \det\begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \equiv (-6,2,4)\,.$$

Um ponto de r pode ser $P_1\,(0,2,-2)$. Um ponto de s pode ser $Q\,(1,1,0)$. Logo, $\overrightarrow{P_1Q} = (1,1,0)-(0,2,-2) = (1,-1,2)$.

Assim,

$$d\,(r,s) = \frac{|\overrightarrow{P_1Q}\cdot\vec{u}\times\vec{v}|}{||\vec{u}\times\vec{v}||} = \frac{|(1,-1,2)\cdot(-6,2,4)|}{||(-6,2,4)||} = \frac{|-6-2+8|}{\sqrt{36+4+16}} = 0.$$

Isto significa que r e s são, na verdade, retas concorrentes!

Não é difícil calcular o ponto de intersecção entre r e s, que é o próprio $Q\,(1,1,0)$ que escolhemos acima (verifique).

3.3.5 Distância de Reta a Plano

Para definirmos a distância de reta a plano temos, também, três situações possíveis:

- Reta contida em plano;
- Reta e plano concorrentes;
- Reta paralela a plano.

Em qualquer caso, a definição é bem simples e intuitiva, conforme podemos constatar abaixo.

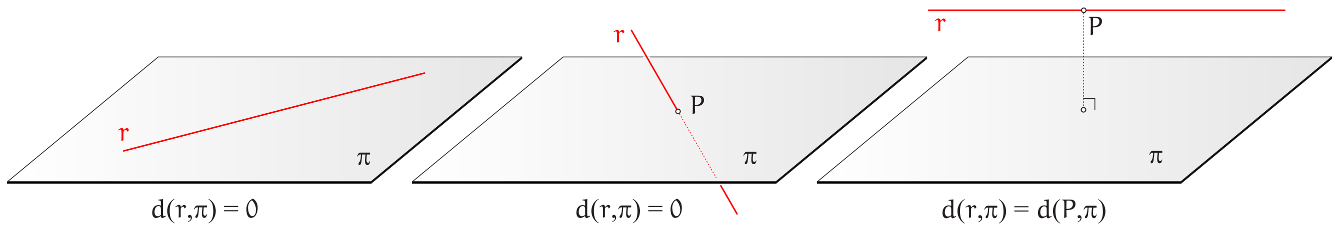
Sejam r reta e π plano no espaço. Temos três situações a serem consideradas:

(**1**) *Quando $r \subset \pi$, definimos a* ***distância*** *entre a reta r e o plano π como sendo nula, ou seja, $d(r, \pi) = 0$.*

(**2**) *Quando r e π são concorrentes, definimos a* ***distância*** *entre a reta r e o plano π como sendo, também, nula, ou seja, $d(r, \pi) = 0$.*

(**3**) *Quando r é paralela a π, definimos a* ***distância*** *entre a reta r e o plano π como sendo a distância de um ponto P qualquer da reta r até o plano π, ou seja, $d(r, \pi) = d(P, \pi)$*

A figura abaixo ilustra cada uma das situações descritas na definição.



Observemos que neste caso, não há novas fórmulas de distância a serem deduzidas.

3.3.6 Distância de Plano a Plano

Por fim, distância entre planos no espaço. Neste último caso não há novidades: temos duas situações bastante simples a serem consideradas:

- Planos concorrentes;
- Planos paralelos.

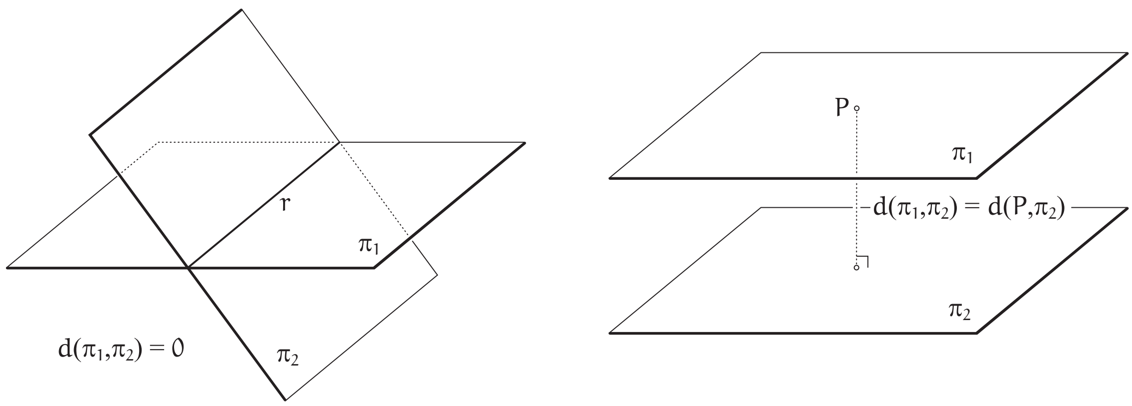
Vamos à definição:

Sejam π_1 e π_2 planos distintos no espaço. Temos duas situações a serem consideradas:

(**1**) *Quando π_1 e π_2 são concorrentes, definimos a* ***distância*** *entre π_1 e π_2 como sendo nula, ou seja, $d(\pi_1, \pi_2) = 0$.*

(**2**) *Quando π_1 e π_2 são paralelos $(\pi_1 /\!/ \pi_2)$, definimos a* ***distância*** *entre os planos π_1 e π_2 como sendo a distância de um ponto P qualquer do plano π_1 ao plano π_2, ou seja, $d(\pi_1, \pi_2) = d(P, \pi_2)$.*

A figura abaixo ilustra cada uma das duas situações descritas.



Também não há novas fórmulas de distância a serem deduzidas nesses casos.

Seção de Exercícios Propostos e Resolvidos: *Retas, Planos e Distâncias*

Exercícios referentes à Seção 3.1 ***Retas***, página 91.

Observação: As resoluções são sugeridas, e podem não ser únicas.

$Oxyz$ é sistema de coordenadas cartesianas ortogonais no espaço com base canônica $\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

Exercício 3.1 Determinar o ponto da reta

$$r : \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 5 + t \\ z = 2 - 2t \end{cases}, \text{ com } t \in \mathbb{R}.$$

que tem abscissa 5.

Resposta: $P\,(5, 2, 8)$.

Exercício 3.2 Achar os valores de m e n para que o ponto $P(3, m, n)$ pertença à reta

$$s : \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = -3 - t \\ z = -4 + t \end{cases}, \text{ com } t \in \mathbb{R}.$$

Respostas: $m = -2$ *e* $n = -5$.

Exercício 3.3 (**Resolvido**) Determinar as equações reduzidas, com variável independente x, da reta que passa pelo ponto $A(4, 0, -3)$ e tem a direção do vetor $\vec{u} = (2, 4, 5)$.

Resolução.

Da teoria sabemos que a equação vetorial de uma reta é da forma $P = A + t\vec{v}$, *com* $t \in \mathbb{R}$.

Chamemos de r *a reta que passa pelo ponto* $A(4, 0, -3)$ *e tem vetor diretor* $\vec{u} = (2, 4, 5)$. *Então,* $r : (x, y, z) = (4, 0, -3) + t(2, 4, 5)$, *com* $t \in \mathbb{R}$.

Daí temos as equações paramétricas de r:

$$r : \begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = 4t \\ z = -3 + 5t \end{cases}, \text{ com } t \in \mathbb{R}.$$

Isolando t *na primeira equação e substituindo nas demais temos:*

$$\begin{cases} x = 4 + 2t \Rightarrow t = \frac{x-4}{2}; \\ y = 4t \Rightarrow y = 4\left(\frac{x-4}{2}\right) \Rightarrow y = 2x - 8 \\ z = -3 + 5t \Rightarrow z = -3 + 5\left(\frac{x-4}{2}\right) \Rightarrow z = \frac{5}{2}x - 13 \end{cases}.$$

Assim, as equações reduzidas de r, *com variável independente* x, *são:*

$$\begin{cases} y = 2x - 8 \\ z = \frac{5}{2}x - 13 \end{cases}.$$

Exercício 3.4 Quais as equações paramétricas das retas r, s e t paralelas aos eixos x, y e z, respectivamente, e que passam pelo ponto $(1, 2, 3)$? Faça um esboço das retas.

Respostas: $r : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$, com $\lambda \in \mathbb{R}$; $\quad s : \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + \lambda \\ z = 3 \end{cases}$, com $\lambda \in \mathbb{R}$; $\quad t : \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 + \lambda \end{cases}$, com $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exercício 3.5 Qual deve ser o valor de m para que os pontos $A(3, m, 1)$, $B(1, 1, -1)$ e $C(-2, 10, -4)$ pertençam à mesma reta?

Resposta: $m = -5$.

Exercício 3.6 (**Resolvido Parcialmente**) Sejam $A(3, 6, -7)$, $B(-5, 2, 3)$ e $C(4, -7, -6)$ pontos dados.

(**i**) Escreva as equações vetorial e paramétricas para a reta r determinada pelos pontos B e C, e obtenha sua forma simétrica (se existir). O ponto $D(3, 1, 4)$ pertence a esta reta r?

(**ii**) Os pontos A, B e C são vértices de um triângulo?

(**iii**) Escreva as equações paramétricas da reta m que passa pela mediana relativa ao vértice C do triângulo ABC. Lembre-se que a mediana relativa ao vértice C do triângulo é o segmento ligando C ao ponto médio do segmento AB.

Resolução Parcial.

(**i**)*: Primeiramente, tomemos o vetor determinado por B e C, que é vetor diretor da reta r:*

$$\overrightarrow{BC} = C - B = (4 + 5, -7 - 2, -6 - 3) = (9, -9, -9).$$

Escolhemos um dos pontos (ou A, ou B) para escrevermos a equação vetorial da reta r, por exemplo, o ponto B:

$$r : (x, y, z) = \underbrace{(-5, 2, 3)}_{B} + t\underbrace{(9, -9, -9)}_{\overrightarrow{BC}}, \text{ com } t \in \mathbb{R}.$$

Para as equações paramétricas, montemos um sistema de equações, dependentes do parâmetro t, da seguinte maneira:

$$r : \begin{cases} x = -5 + 9t \\ y = 2 - 9t \\ z = 3 - 9t \end{cases}, \text{ com } t \in \mathbb{R}.$$

É evidente que há como obtermos as equações simétricas da reta r, isolando o parâmetro t nas equações paramétricas e igualando seus valores:

$$r : \tfrac{x+5}{9} = \tfrac{y-2}{-9} = \tfrac{z-3}{-9}.$$

Por fim, analisemos se o ponto $D(3, 1, 4)$ pertence à reta r. Para isso, usando as equações simétricas da reta r, substituimos as variáveis x, y e z pelas coordenadas de D:

$$\tfrac{3+5}{9} \neq \tfrac{1-2}{-9} \neq \tfrac{4-3}{-9}.$$

Portanto, as equações simétricas não se verificam para o ponto D. Concluimos que D não pertence à reta r.

Respostas de (**ii**) *e* (**iii**)*: Sim e* $m : \begin{cases} x = 4 - 5\lambda \\ y = -7 + 11\lambda \\ z = -6 + 4\lambda \end{cases}$, *com $\lambda \in \mathbb{R}$, respectivamente.*

Exercício 3.7 (**Resolvido Parcialmente**) Achar as equações das seguintes retas:
(**i**) reta que passa pelo ponto $A(3, 2, 1)$ e é perpendicular ao plano Oxz;
(**ii**) reta que passa pelo ponto $A(2, 3, 4)$ e é ortogonal ao mesmo tempo aos eixos Ox e Oy.

Resolução Parcial.

(**i**)*: Seja r a reta pedida. Observemos que r poder ter vetor diretor $\vec{j} = (0, 1, 0)$, pois $\vec{j}$ é ortogonal ao plano Oxz.*

Como $A(3, 2, 1)$ pertence a r, podemos escrever $r : (x, y, z) = (3, 2, 1) + \lambda(0, 1, 0)$, com $\lambda \in \mathbb{R}$, como uma equação vetorial da reta r.

Resposta de (**ii**)*: $s : (x, y, z) = (2, 3, 4) + \lambda\,(0, 0, 1)$, com $\lambda \in \mathbb{R}$.*

Exercício 3.8 São dados os pontos $A(2, 1, 2)$, $B(-1, 1, -1)$ e $C(-2, -5, -4)$.

(**i**) Os pontos A, B e C formam vértices de um triângulo?

(**ii**) Escreva todas as formas possíveis de equações para a reta que passa por B e C. O ponto $D(1, 1, 2)$ pertence a essa reta?

Respostas: (**i**) *Sim;* (**ii**) *D não pertence à reta que passa por B e C.*

Exercício 3.9 (**Resolvido Parcialmente**) Sejam $P(2,1,-1)$ e $Q(0,-1,0)$. Determine um ponto C da reta PQ tal que a área do triângulo ABC seja 9 nos seguintes casos:

(**i**) $A(0,3,0)$, $B(6,3,3)$;

(**ii**) $A(-1,1,2)$, $B(-5,-3,4)$.

Resolução Parcial.

(**i**): *Do enunciado da questão temos os pontos* $A(0,3,0)$, $B(6,3,3)$, $P(2,1,-1)$ *e* $Q(0,-1,0)$.

Um vetor diretor da reta r *que passa por* P *e* Q *é* $\vec{v} = \overrightarrow{PQ} = Q - P = (-2,-2,1)$. *Logo, uma equação vetorial de* r *é dada por*

$$X = P + \lambda\vec{v} \Rightarrow (x,y,z) = (2,1,-1) + \lambda(-2,-2,1),$$

sendo $\lambda \in \mathbb{R}$ *parâmetro da equação vetorial.*

Deste modo, um ponto qualquer de r *tem coordenadas da forma* $(2-2\lambda, 1-2\lambda, -1+\lambda)$.

Queremos encontrar $C(2-2\lambda_0, 1-2\lambda_0, -1+\lambda_0)$ *em* r *de tal modo que a área* A_{ABC} *do triângulo* ABC *seja* 9.

Como encontrar λ_0*? (se é que existe!)*

Da teoria sabemos que

$$A_{ABC} = \tfrac{1}{2}\|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB}\|.$$

Assim,

$$\tfrac{1}{2}\|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB}\| = 9 \Rightarrow \boxed{\|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB}\|^2 = 324}.$$

Mas

$$\begin{cases} \overrightarrow{AC} = C - A = (2-2\lambda_0, 1-2\lambda_0, -1+\lambda_0) - (0,3,0) = (2-2\lambda_0, -2-2\lambda_0, -1+\lambda_0) \\ \overrightarrow{AB} = B - A = (6,3,3) - (0,3,0) = (6,0,3) \end{cases}$$

e

$$\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB} = (-6-6\lambda_0, -12+12\lambda_0, 12+12\lambda_0)$$

Deste modo,

$$\|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB}\|^2 = 324\lambda_0^2 + 72\lambda_0 + 324.$$

Como $\|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB}\|^2 = 324$ *temos:*

$$324\lambda_0^2 + 72\lambda_0 + 324 = 324 \Rightarrow \boxed{324\lambda_0^2 + 72\lambda_0 = 0},$$

cujas soluções são

$$\begin{cases} \lambda_0' = 0 \\ \lambda_0'' = -\frac{72}{324} = -\frac{2}{9} \end{cases}$$

Portanto, há duas soluções:

$$\begin{cases} C'(2,1,-1) \\ C''\left(2+\frac{4}{9}, 1+\frac{4}{9}, -1-\frac{2}{9}\right) \Rightarrow C''\left(\frac{22}{9}, \frac{13}{9}, -\frac{11}{9}\right) \end{cases}$$

Resposta de (**ii**): C *pode ser qualquer ponto da forma* $(2-2t, 1-2t, -1+t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Exercício 3.10 (**Resolvido Parcialmente**) Achar a medida do ângulo entre as retas:

(**i**) $r: \begin{cases} x = -2-2t \\ y = 2t \\ z = 3-4t \end{cases}$ e $s: \begin{cases} x = 4t \\ y = 2t-6 \\ z = 2t+1 \end{cases}$;

(**ii**) $r: \begin{cases} y = -2x-1 \\ z = x+2 \end{cases}$ e $s: \begin{cases} \frac{y}{3} = \frac{z+1}{-3} \\ x = 2 \end{cases}$.

Resolução Parcial.

$(\mathbf{ii})$*: Dados*

$$r : \begin{cases} y = -2x - 1 \\ z = x + 2 \end{cases} \quad e \quad s : \begin{cases} \frac{y}{3} = \frac{z+1}{-3} \\ x = 2 \end{cases},$$

Observemos que as equações de s podem ser reescritas como equações reduzidas na variável z (ou y).
Precisamos de vetores diretores das retas em questão.

Escolhamos dois pontos em r, por exemplo: $A\,(0,-1,2)$ e $B\,(1,-3,3)$ (que foram obtidos fazendo $x = 0$ e $x = 1$ nas equações de r).
Escolhamos dois pontos em s, por exemplo: $C\,(2,0,-1)$ e $D\,(2,1,-2)$ (que foram obtidos fazendo $y = 0$ e $y = 1$ nas equações de s).

Logo, $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = B - A = (1,-2,1)$ é um vetor diretor de r.
Analogamente, $\vec{v} = \overrightarrow{CD} = D - C = (0,1,-1)$ é um vetor diretor de s.

De teoria, vimos que se θ é a medida do ângulo entre as retas r e s, então:

$$\cos(\theta) = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{||\vec{u}||.||\vec{v}||} = \frac{|(1,-2,1)\cdot(0,1,-1)|}{||(1,-2,1)||.||(0,1,-1)||} = \frac{|0-2-1|}{\sqrt{1+4+1}.\sqrt{0+1+1}} = \frac{3}{\sqrt{6}.\sqrt{2}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

ou seja, $\theta = \frac{\pi}{3}$ radianos, ou $\theta = 30°$.
Lembremos que o ângulo entre duas retas <u>nunca</u> é obtuso, daí o módulo no produto escalar da fórmula acima, ou seja, $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$ (ou $0° \leqslant \theta \leqslant 90°$).

Resposta de $(\mathbf{i})$: $60°$.

Exercício 3.11 Calcular o valor de n para que seja de $30°$ a medida do ângulo entre as retas:

$$r : \frac{x-2}{4} = \frac{y+4}{5} = \frac{z}{3} \quad \text{e} \quad s : \begin{cases} y = nx + 5 \\ z = 2x - 2 \end{cases}.$$

Resposta: $n = 7$ *ou* $n = 1$.

Exercício 3.12 A reta r passa pelo ponto $A(1,-2,1)$ e é paralela à reta

$$s : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -3t \\ z = -t \end{cases}.$$

Se $P(-3, m, n) \in r$, determine m e n.

Respostas: $m = 10$ *ou* $n = 5$.

Exercício 3.13 A reta

$$s : \begin{cases} y = mx + 3 \\ z = x - 1 \end{cases}$$

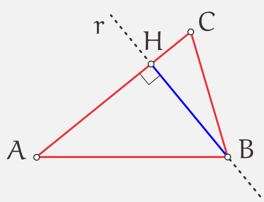
é ortogonal à reta determinada pelos pontos $A(1,0,m)$ e $B(-2,2m,2m)$. Calcular o valor de m.

Resposta: $m = 1$ *ou* $m = -\frac{3}{2}$.

Exercício 3.14 (**Resolvido**) Dado um triângulo de vértices $A(1,4,0)$, $B(2,1,-1)$ e $C(1,2,2)$, escrever uma equação vetorial da reta que contém a altura relativa ao vértice B.

Resolução.

Dados $A(1,4,0)$, $B(2,1,-1)$ e $C(1,2,2)$, consideremos a reta r que contém a altura relativa ao vértice B.



Da teoria, temos que uma equação vetorial da reta r *é dada por*

$$X = B + t\overrightarrow{BH}, \text{ com } t \in \mathbb{R},$$

sendo $H = A + \overrightarrow{AH}$.

Porém, da teoria deduzimos que

$$\overrightarrow{AH} = \text{proj}_{\overrightarrow{AC}}\overrightarrow{AB} = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{||\overrightarrow{AC}||^2}.\overrightarrow{AC}$$

Assim, como $\overrightarrow{AB} = B - A = (1,-3,-1)$ *e* $\overrightarrow{AC} = C - A = (0,-2,2)$, *temos*

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = (1,-3,-1)\cdot(0,-2,2) = 0+6-2 = 4 \\ ||\overrightarrow{AC}||^2 = 0^2 + (-2)^2 + 2^2 = 8 \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AH} = \frac{4}{8}(0,-2,2) = (0,-1,1).$$

Desta forma,

$$H = A + \overrightarrow{AH} = (1,4,0) + (0,-1,1) = (1,3,1)$$
$$\overrightarrow{BH} = H - B = (1,3,1) - (2,1,-1) = (-1,2,2)$$

Por fim,

$$r : (x,y,z) = (2,1,-1) + t(-1,2,2), \text{ com } t \in \mathbb{R}.$$

Exercício 3.15 Calcular o valor de m para que sejam coplanares as seguintes retas:

$$r : \begin{cases} y = 2x+3 \\ z = 3x-1 \end{cases} \quad \text{e} \quad s : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{m}.$$

Resposta: $m = 4$.

Exercício 3.16 (**Resolvido Parcialmente**) Calcular o ponto de interseção das retas:

(**i**) $r : \begin{cases} y = 3x-1 \\ z = 2x+1 \end{cases}$ e $s : \begin{cases} y = 4x-2 \\ z = 3x \end{cases}$;

(**ii**) $r : \begin{cases} y = -5 \\ z = 4x+1 \end{cases}$ e $s : \frac{x-1}{2} = \frac{z-5}{-3}$; $y = -5$.

Resolução Parcial.

(**i**)*: Se* $P = (x_0, y_0, z_0)$ *é o ponto de intersecção das retas* r *e* s, *então suas coordenadas devem satisfazer as equações dessas retas, ou seja,*

$$\begin{cases} y_0 = 3x_0 - 1 \\ z_0 = 2x_0 + 1 \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} y_0 = 4x_0 - 2 \\ z_0 = 3x_0 \end{cases}.$$

Podemos igualar as expressões que contenham y_0 *ou que contenham* z_0 *de cada equação de reta para encontrarmos* x_0 *(que deve ser o mesmo nas duas equações, se* P *de fato existir):*

$$\begin{cases} 3x_0 - 1 = 4x_0 - 2 \\ 2x_0 + 1 = 3x_0 \end{cases} \Rightarrow x_0 = 1.$$

Substituimos o valor de x_0 *em qualquer uma das equações das retas* r *ou* s *encontramos os valores de* y_0 *e* z_0 *do ponto de intersecção:*

$$y_0 = 2 \text{ e } z_0 = 3.$$

(verifique esses valores substituindo x_0 *em ambas as equações das retas)*

Portanto, a interseção entre as retas r *e* s *é o ponto* $P(1,2,3)$.

Resposta de (**ii**)*:* $P(1,-5,5)$.

Exercício 3.17 Em que ponto a reta que passa por $A(1,0,1)$ e $B(-2,2,3)$ intersecta o plano yz?

Resposta: $P\left(0, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}\right)$.

Exercício 3.18 (**Resolvido**) Dadas as retas

$$r : (x, y, z) = (0, 0, 2) + \lambda(1, 1, 3), \text{ com } \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad s : \begin{cases} x = 2 \\ y = t \\ z = 2 - t \end{cases}, \text{ com } t \in \mathbb{R}$$

e o ponto $A(4, 5, 1)$; ache uma equação vetorial da reta m que passa por A e seja ortogonal a r e a s.

Resolução.

Chamemos de $\vec{u} = (1, 1, 3)$ *e* $\vec{v} = (0, 1, -1)$ *os vetores diretores das retas* r *e* s*, respectivamente. Se a reta* m *é ortogonal a* r *e* s *podemos considerar* $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$ *com seu vetor diretor. Então,*

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} \equiv \det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \equiv (-4, 1, 1).$$

Como $A(4, 5, 1) \in m$*, podemos escrever* $m : (x, y, z) = (4, 5, 1) + \mu(-4, 1, 1)$*, com* $\mu \in \mathbb{R}$*, como uma equação vetorial da reta* m*.*

Exercício 3.19 Estabelecer as equações paramétricas da reta que passa pelo ponto de interseção das retas

$$r : x - 2 = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{3} \quad \text{e} \quad s : \begin{cases} x = 1 - y \\ z = 2 + 2y \end{cases}$$

e é, ao mesmo tempo, ortogonal a ambas.

Resposta: $t : \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -1 - 5\lambda \\ z = 3\lambda \end{cases}$*, com* $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exercício 3.20 Calcular o ponto de interseção das retas

$$r : \begin{cases} x = 5 + t \\ y = 2 - t \\ z = 7 - 2t \end{cases} \quad \text{e} \quad s : \frac{x-2}{2} = \frac{-y}{-3} = \frac{-z+5}{-4}.$$

Resposta: $P(4, 3, 9)$.

Exercício 3.21 Estude a posição relativa das retas r e s nos seguintes casos:

(i) $r : \frac{x+1}{2} = y = z + 12$ e $s : (x, y, z) = (0, 0, 0) + \lambda(1, 2, 0)$, com $\lambda \in \mathbb{R}$;

(ii) $r : \frac{x-1}{3} = \frac{y-5}{3} = \frac{z+2}{5}$ e $s : x = -y = \frac{z-1}{4}$.

Respostas: reversas e concorrentes, respectivamente.

Exercício 3.22 Determinar as equações paramétricas da perpendicular comum às seguintes retas reversas:

$$r : \frac{x+1}{3} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z-2}{-1} \quad \text{e} \quad t : \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{-5}.$$

Resposta: $s : \begin{cases} x = -\frac{2}{13} + \lambda \\ y = -\frac{139}{39} + \lambda \\ z = \frac{67}{39} + \lambda \end{cases}$*, com* $\lambda \in \mathbb{R}$.

Dica: temos $A(3\alpha - 1, -2\alpha - 3, -\alpha + 2) \in r$ *e* $B(2\beta + 2, 3\beta - 1, -5\beta + 1) \in s$*. Da ortogonalidade,* $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u} = \overrightarrow{AB} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{143}{507}$ *e o ponto utilizado na equação de* s *é ponto de* r*.*

Exercício 3.23 (**Resolvido**) Determinar uma equação da reta que passa pelo ponto $A(-4, -5, 3)$ e intersecta as retas:

$$r : \frac{x+1}{3} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z-2}{-1} \quad \text{e} \quad t : \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{-5}.$$

Resolução.

Das equações simétricas das retas r *e* t *fornecidas temos:*
- O vetor $\vec{u} = (3, -2, -1)$ *como vetor diretor de* r *e* $B(-1, -3, 2)$ *como um de seus pontos. Logo, um ponto* P *genérico de* r *é da forma*

$$P = (-1, -3, 2) + \lambda(3, -2, -1) = (-1 + 3\lambda, -3 - 2\lambda, 2 - \lambda), \text{ com } \lambda \in \mathbb{R}.$$

- O vetor $\vec{v} = (2, 3, -5)$ *como vetor diretor de* t *e* $C(2, -1, 1)$ *como um de seus pontos. Logo, um ponto* Q *genérico de* t *é da forma*

$$Q = (2, -1, 1) + \mu(2, 3, -5) = (2 + 2\mu, -1 + 3\mu, 1 - 5\mu), \text{ com } \mu \in \mathbb{R}.$$

Determinemos valores λ *e* μ *de tal modo que existam* P *e* Q *alinhados a* A, *ou seja, busquemos* λ *e* μ *tal que* $\overrightarrow{AP}$ *seja paralelo a* $\overrightarrow{AQ}$, *o que equivale à existência de* $\alpha \in \mathbb{R}$ *tal que* $\overrightarrow{AP} = \alpha\overrightarrow{AQ}$.
Vejamos:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AP} &= P - A = (-1 + 3\lambda, -3 - 2\lambda, 2 - \lambda) - (-4, -5, 3) = (3 + 3\lambda, 2 - 2\lambda, -1 - \lambda) \\ \overrightarrow{AQ} &= Q - A = (2 + 2\mu, -1 + 3\mu, 1 - 5\mu) - (-4, -5, 3) = (6 + 2\mu, 4 + 3\mu, -2 - 5\mu) \end{aligned}$$

De $\overrightarrow{AP} = \alpha\overrightarrow{AQ}$ *temos*

$$(3 + 3\lambda, 2 - 2\lambda, -1 - \lambda) = \alpha(6 + 2\mu, 4 + 3\mu, -2 - 5\mu) \Rightarrow \begin{cases} 3 + 3\lambda = \alpha\,(6 + 2\mu) \\ 2 - 2\lambda = \alpha\,(4 + 3\mu) \\ -1 - \lambda = \alpha\,(-2 - 5\mu) \end{cases}$$

Trata-se de um sistema não linear nas incógnitas α, λ *e* μ *que pode ser resolvido por meio de substituições de incógnitas. Entretanto, não vamos fazer isso, pois uma solução óbvia é* $\lambda = \mu = 0$ *e* $\alpha = \frac{1}{2}$ *(verifique!).*
Desta forma, há uma reta s *que passa pelos pontos* $P(-1, -3, 2) \in r$ *e* $Q(2, -1, 1) \in t$ *e contém o ponto* $A(-4, -5, 3)$. *Tomando* $\vec{w} = \overrightarrow{PQ} = Q - P = (3, 2, -1)$ *como vetor diretor de* s, *temos a equação vetorial*

$$s : (x, y, z) = (-4, -5, 3) + \tau\,(3, 2, -1)\,, \text{ com } \tau \in \mathbb{R}.$$

Exercício 3.24 Determinar a equação da reta que passa pelo ponto $A(-1, 2, -3)$, é perpendicular ao vetor $\vec{n} = (6, -2, -3)$ e corta a reta

$$r : \tfrac{x-1}{3} = \tfrac{y+1}{2} = \tfrac{z-3}{-5}.$$

Resposta: $s : (x, y, z) = (-1, 2, -3) + \lambda\,(2, -3, 6)$, *com* $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exercícios referentes à Seção 3.2 ***Planos***, página 101.

$Oxyz$ é sistema de coordenadas cartesianas ortogonais no espaço com base canônica $\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

Exercício 3.25 (**Resolvido Parcialmente**) Seja o plano $\pi : 2x - y + 3z + 1 = 0$. Calcular:
(**i**) O ponto de π que tem abscissa 4 e ordenada 3;
(**ii**) O ponto de π que tem abscissa 1 e cota 2;
(**iii**) O valor de k para que o ponto $P(2, k + 1, k)$ pertença a π;
(**iv**) O ponto de abscissa zero e cuja ordenada é o dobro da cota.

Resolução Parcial.

(**iv**)*: Consideremos o plano* $\pi : 2x - y + 3z + 1 = 0$. *Como a abscissa do ponto* $P\,(x, y, z)$ *procurado é zero e sua ordenada é o dobro de sua cota, então o ponto é da forma* $P(0, 2z, z)$.

Substituindo $P(0, 2z, z)$ *na equação do plano, temos:*

$$(0) - (2z) + 3(z) + 1 = 0 \Rightarrow z = -1.$$

Portanto, substituindo $z = -1$ *em* P *, temos* $P(0, -2, -1)$.

Respostas de (**i**) *,* (**ii**) *e* (**iii**)*:* $(4, 3, -2)$, $(1, 9, 2)$ *e* $k = -2$, *respectivamente.*

Exercício 3.26 Determinar a equação geral do plano que:

(**i**) passa pelos pontos $A(-3,1,-2)$ e $B(-1,2,1)$ e é paralelo ao vetor $\vec{v} = 2\vec{i} - 3\vec{k}$.

(**ii**) contém os pontos $A(1,-2,2)$ e $B(-3,1,-2)$ e é perpendicular ao plano $\pi : 2x + y - z + 8 = 0$.

Respostas: $3x - 12y + 2z + 25 = 0$ *e* $x - 12y - 10z - 5 = 0$, *respectivamente.*

Exercício 3.27 (**Resolvido**) Dada a equação geral do plano $\pi : 3x - 2y - z - 6 = 0$, determinar um sistema de equações paramétricas de π.

Resolução.

Dado o plano π *de equação geral* $3x - 2y - z - 6 = 0$, *podemos fazer obter equações paramétricas para* π *de diversas formas. Uma maneira "canônica" é escolher três pontos não colineares de* π, *escrever uma equação vetorial e, posteriormente, as equações paramétricas. Entretanto, quando a equação geral apresenta as três variáveis (como nesse caso), podemos fazer duas das variáveis serem os parâmetros e isolar a última variável em função desses parâmetros, ou seja,*

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = -6 + 3\lambda - 2\mu \end{cases}, \text{ com } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Exercício 3.28 Obtenha as equações paramétricas dos planos π_1 e π_2, onde:

(**i**) π_1 é o plano que passa pelos pontos $A(1,1,4)$, $B(6,5,4)$ e $C(-2,0,2)$;

(**ii**) π_2 é o plano que passa pelo ponto $D(1,1,1)$ e é paralelo aos vetores $\vec{u} = (2,3,-2)$ e $\vec{v} = (8,5,2)$.

Respostas: $\pi_1 : \begin{cases} x = 1 + 5\lambda - 3\mu \\ y = 1 + 4\lambda - \mu \\ z = 4 - 2\mu \end{cases}$, *com* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ *e* $\pi_2 : \begin{cases} x = 1 + 2\lambda + 8\mu \\ y = 1 + 3\lambda + 5\mu \\ z = 1 - 2\lambda + 2\mu \end{cases}$, *com* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Exercício 3.29 Seja r a reta que passa pelos pontos $P(-2,0,-1)$ e $Q(-3,2,5)$. Verifique se $r \subset \pi_i$, $r /\!/ \pi_i$ ou $r \cap \pi_i$ é um ponto, onde π_i $(i = 1,2)$ são os planos do exercício anterior. Caso $r \cap \pi_i$ seja um ponto, determine este ponto.

Respostas: $r \cap \pi_1 = \left\{\left(-\frac{23}{10}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)\right\}$ *e* $r \cap \pi_2 = \{(-2,0,-1)\}$.

Exercício 3.30 (**Resolvido**) O plano $\pi : x + y - z - 2 = 0$ intersecta os eixos cartesianos nos pontos A, B e C. Calcular a área do triângulo ABC.

Resolução.

O ponto A *do plano* π *que está no eixo* x *possui ordenada e cota nulas. Fazendo* $y = 0$ *e* $z = 0$ *na equação de* π, *chegamos a* $x = 2$ *e obtemos o ponto* $A(2,0,0)$.

De modo análogo, B *é da forma* $(0,y,0)$. *Fazendo* $x = 0$ *e* $z = 0$ *na equação de* π, *obtemos o ponto* $B(0,2,0)$.

Por fim, C *é da forma* $(0,0,z)$. *Fazendo* $x = 0$ *e* $y = 0$ *na equação de* π, *obtemos o ponto* $C(0,0,-2)$.

Consideremos os vetores $\overrightarrow{AB} = B - A = (-2,2,0)$ *e* $\overrightarrow{AC} = C - A = (-2,0,-2)$. *Assim, a área do triângulo* ABC *será obtida da seguinte maneira:*

$$\mathcal{A} = \frac{\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\|}{2}.$$

Calculemos o produto vetorial:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{bmatrix} = (-4,-4,4).$$

Logo,

$$\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\| = \sqrt{(-4)^2 + (-4)^2 + (4)^2} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}.$$

Portanto, temos que a área será:

$$\mathcal{A} = \frac{\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\|}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}.$$

Exercício 3.31 Determinar a e b, de modo que os planos $\pi_1 : ax + by + 4z - 1 = 0$ e $\pi_2 : 3x - 5y - 2z + 5 = 0$ sejam paralelos.

Respostas: $a = -6$ e $b = 10$.

Exercício 3.32 Determinar m de modo que os planos $\pi_1 : 2mx + 2y - z = 0$ e $\pi_2 : 3x - my + 2z - 1 = 0$ sejam perpendiculares.

Resposta: $m = \frac{1}{2}$.

Exercício 3.33 (**Resolvido**) Mostrar que a reta

$$r : \begin{cases} \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} \\ z = 0 \end{cases}$$

está contida no plano $\pi : 2x + y - 3z - 1 = 0$.

Resolução.

Primeiramente, observemos que as equações de r fornecidas podem ser facilmente escritas na forma reduzida na variável x (ou y).

Fazendo $x = 0$ e $x = 1$ nas equações de r encontramos os pontos $A\,(0, 1, 0)$ e $B\,(1, -1, 0)$ de r.

Mas as coordenadas de A e B satisfazem a equação do plano π (verifique!).

Lembrando que se uma reta possui dois de seus pontos em um plano então ela está contida nesse plano, concluímos que $r \subset \pi$.

Exercício 3.34 Determinar a medida do ângulo entre:

(**i**) os planos $\pi_1 : x + 2y + z - 10 = 0$ e $\pi_2 : 2x + y - z + 1 = 0$;

(**ii**) a reta $r : \frac{x-2}{3} = \frac{-y}{4} = \frac{z+1}{5}$ e o plano $\pi : 2x - y + 7z - 1 = 0$.

Respostas: 60° *em ambos os itens.*

Exercício 3.35 Encontrar equações reduzidas da reta interseção dos planos

$$\pi_1 : 3x - y + z - 3 = 0 \qquad \text{e} \qquad \pi_2 : x + 3y + 2z + 4 = 0.$$

Resposta: $r : \begin{cases} y = x - 2 \\ z = -2x + 1 \end{cases} ;\ x \in \mathbb{R}.$

Exercício 3.36 Determinar a equação geral do plano que contém o ponto $A(2, 0, 1)$ e a reta interseção dos planos $\pi_1 : 2x - 3y - 5z = 0$ e $\pi_2 : x - y = 0$.

Resposta: $\pi : 5x - 7y - 10z = 0$.

Exercício 3.37 (**Resolução**) Obtenha uma equação geral do plano π que passa pelo ponto $P(1, 1, 2)$ e é paralelo ao plano π_1, com equação geral $\pi_1 : x - y + 2z + 1 = 0$.

Resolução.

Sendo o plano π procurado paralelo ao plano π_1, o vetor $\vec{n} = (1, -1, 2)$, normal a π_1, também é normal a π. Portanto, a equação geral de π é da forma

$$\pi : x - y + 2z + d = 0.$$

Como $P\,(1, 1, 2) \in \pi$, podemos encontrar d substituindo as coordenadas de P na equação acima:

$$(1) - (1) + 2(2) + d = 0 \Rightarrow d = -4.$$

Portanto,

$$\pi : x - y + 2z - 4 = 0.$$

Exercício 3.38 Escreva a equação geral do plano que passa pelos pontos $A(2, 1, 0)$, $B(1, 2, 0)$ e $C(1, 1, 0)$.

(**i**) Verifique se o ponto $D(4, 4, 0)$ está nesse plano.
(**ii**) Verifique se a reta que passa pelo ponto $E(3, 3, 0)$ com vetor diretor $\vec{v} = (1, 1, 0)$ está contida nesse plano.

Respostas: $z = 0$, *sim e sim, respectivamente.*

Exercício 3.39 Decomponha $\vec{u} = (1, 2, 4)$ como soma de um vetor paralelo à reta $r : (x, y, z) = (1, 9, 18) + \lambda(2, 1, 0)$, com $\lambda \in \mathbb{R}$, com outro paralelo ao plano

$$\pi : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + \mu \\ z = \lambda - \mu \end{cases}, \text{ com } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Resposta: $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$, *sendo* $\vec{v} = (-10, -5, 0)$ *e* $\vec{w} = (11, 7, 4)$.

Exercício 3.40 Note que dois planos transversais têm como interseção uma reta. Assim sendo, dados $\pi_1 : 2x+y+z = 0$ e $\pi_2 : x + y - z + 3 = 0$, verifique que eles são transversais e encontre a reta $r = \pi_1 \cap \pi_2$.

Resposta: $r : (x, y, z) = (-3, 3, 3) + \lambda\,(6, -9, -3)$*;* $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exercício 3.41 (**Resolvido Parcialmente**) Pelo exercício anterior uma reta pode ser dada como a interseção de dois planos. Sendo assim, calcule m em cada caso, usando a informação dada sobre as retas em cada letra:

$$r : \begin{cases} x - my + 1 = 0 \\ y - z - 1 = 0 \end{cases} \qquad s : x = \frac{y}{m} = z \qquad t : \begin{cases} x + y - z = 0 \\ y + z + 1 = 0 \end{cases}$$

(**i**) r e s são paralelas.
(**ii**) r e t são concorrentes.
(**iii**) r e s são reversas.

Resolução Parcial.

(**ii**)*: Queremos* m *tal que* $r \cap t$ *tenha um único ponto, ou seja, que o sistema formado pelas equações de* r *e* t *tenha uma única solução.*

$$\begin{cases} x - my + 1 = 0 \\ y - z - 1 = 0 \Longleftrightarrow y - z = 1 \\ x + y - z = 0 \Longleftrightarrow y - z = -x \\ y + z + 1 - 0 \end{cases}$$

Da 2^a *e* 3^a *linhas, temos:*

$$\begin{cases} y - z = 1 \\ y - z = -x \end{cases} \Rightarrow x = -1$$

Da 2^a *e* 4^a *linhas, temos:*

$$\begin{cases} y - z = 1 \\ y + z = -1 \end{cases} \Rightarrow 2y = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ e, portanto, } z = -1$$

Por fim, substituindo os valores encontrados na 1^a *linha temos* $(-1) - m(0) + 1 = 0$*, ou seja,* $0m = 0$ *e a igualdade é satisfeita para qualquer valor de* $m \in \mathbb{R}$.

Desta forma, concluímos que as retas r *e* t *são concorrentes no ponto* $P\,(-1, 0, -1)$ *para qualquer valor de* $m \in \mathbb{R}$.

Respostas de (**i**) *e* (**iii**)*:* $[m = 1]$ *e* $[m \neq 0$ *e* $m \neq 1]$*, respectivamente.*

Exercício 3.42 Determinar o ponto de interseção das seguintes retas:

$$r : \begin{cases} 3x + y + 6z + 13 = 0 \\ 9x + 3y + 5z = 0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad s : \begin{cases} x = 1 \\ 4x + y - z - 9 = 0 \end{cases}$$

Resposta: $P\,(1, 2, -3)$.

Exercício 3.43 (**Resolvido Parcialmente**) Mostre que as retas r e s determinam um plano π e obtenha uma equação geral de π.

(**i**) $r : x - 1 = y = 2z$ e $s : x - 1 = y = z$.

(**ii**) $r : \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z}{4}$ e $s : \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-4}{4}$.

Resolução Parcial.

Temos as equações simétricas de r *e* s*:*

$$r : x - 1 = y = 2z \Longleftrightarrow \frac{x-1}{1} = \frac{y-0}{1} = \frac{z-0}{\frac{1}{2}}$$
$$s : x - 1 = y = z \Longleftrightarrow \frac{x-1}{1} = \frac{y-0}{1} = \frac{z-0}{1}$$

que nos fornece:

- $\vec{u} = \left(1, 1, \frac{1}{2}\right)$ *como vetor diretor de* r *e* $A = (1, 0, 0)$ *como um de seus pontos.*
- $\vec{v} = (1, 1, 1)$ *como vetor diretor da* s *e* $B = (1, 0, 0)$ *como um de seus pontos.*

Notemos que o vetor $\vec{u}$ *não é paralelo ao vetor* $\vec{v}$*, o que significa que a reta* r *não é paralela à reta* s*.*

Além disso, notemos que $A = B$*, ou seja,* r *e* s *são concorrentes e, portanto, determinam um plano* π *no espaço.*

Os vetores $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$ *podem ser tomados como vetores diretores de* π *e, portanto* $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$ *pode ser tomado como um de seus vetores normais.*

Assim,

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = \det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right).$$

Portanto, uma equação geral para o plano π *pode ser tomada como*

$$\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + 0z + d = 0.$$

Para encontrar d *precisamos de um ponto de* π*, por exemplo,* $A = (1, 0, 0) \in \pi$*:*

$$\frac{1}{2}(1) - \frac{1}{2}(0) + d = 0 \Rightarrow d = -\frac{1}{2}.$$

Por fim,

$$\pi : \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2} = 0 \Longleftrightarrow \boxed{\pi : x - y - 1 = 0}.$$

Resposta de (**ii**)*:* $8x - 4y - z + 4 = 0$.

Exercício 3.44 Encontre $m \in \mathbb{R}$ de modo que a reta $r : \frac{x-1}{m} = \frac{y}{2} = \frac{z}{m}$ seja concorrente com o plano $\pi : x + my + z = 0$.

Resposta: qualquer $m \neq 0$.

Exercício 3.45 (**Resolvido Parcialmente**) Sejam $r : (x, y, z) = (n, 2, 0) + \lambda(2, m, n)$, com $\lambda \in \mathbb{R}$, e $\pi : nx - 3y + z = 1$. Usando, em cada caso, a informação dada, obtenha condições sobre m e n para que:

(**i**) r e π sejam paralelos, com r não contida em π;
(**ii**) r e π sejam concorrentes;
(**iii**) r esteja contida em π.

Resolução Parcial.

(**iii**)*: Consideremos:*

- $\vec{u} = (2, m, n)$ *um vetor diretor de* r*.*
- $A(n, 2, 0)$ *um ponto de* r*.*
- $\vec{n} = (n, -3, 1)$ *um vetor normal a* π*.*

Observemos que de $r \subset \pi$ *temos necessariamente que* $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$*.*

Logo, $(2, m, n) \cdot (n, -3, 1) = 0$*, ou seja,* $2n - 3m + n = 0$*. Portanto,* $m = n$*.*

Também de $r \subset \pi$ *temos necessariamente que* $A \in \pi$*. Logo,* $n(n) - 3(2) + (0) = 1 \Rightarrow n^2 = 7 \Rightarrow n = \pm\sqrt{7}$*.*

Conclusão: $m = n = \pm\sqrt{7}$*.*

Respostas: (**i**)*:* $m = n$ *e* $n \neq \pm\sqrt{7}$*;* (**ii**)*:* $n \neq m$*.*

Exercício 3.46 (**Resolvido**) Determine a equação do plano que contém a reta $r : \frac{x-2}{3} = \frac{y+3}{2} = z$ e o ponto comum aos três planos:

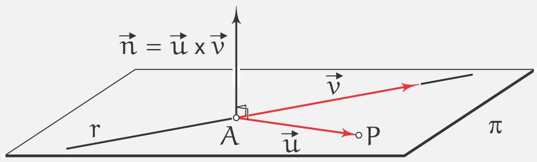
$$\begin{cases} x + y + 2z + 1 = 0 \\ 3x - y + z - 1 = 0 \\ x - 4y + 2z + 2 = 0 \end{cases}.$$

Resolução.

De acordo com o enunciado, os três planos fornecidos possuem um ponto $P(x_0, y_0, z_0)$ *em comum. Suas coordenadas devem satisfazer as três equações simultaneamente, ou seja,*

$$\begin{cases} x_0 + y_0 + 2z_0 + 1 = 0 \\ 3x_0 - y_0 + z_0 - 1 = 0 \\ x_0 - 4y_0 + 2z_0 + 2 = 0 \end{cases} \equiv \begin{cases} x_0 + y_0 + 2z_0 + 1 = 0 \\ -4y_0 - 5z_0 - 4 = 0 \\ -5y_0 \qquad + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow y_0 = \tfrac{1}{5},\ z_0 = -\tfrac{24}{25} \text{ e } x_0 = \tfrac{18}{25}.$$

Logo, $P\left(\frac{18}{25}, \frac{1}{5}, -\frac{24}{25}\right)$. *Notemos que* $P \notin r$ *pois suas coordenadas não satisfazem a equação de* r. *Tomemos* $A = (2, -3, 0) \in r$ *e* $\vec{v} = (3, 2, 1)$ *vetor diretor de* r. *O plano* π *procurado possui vetores diretores* $\vec{u} = \overrightarrow{AP} = P - A = \left(-\frac{32}{25}, \frac{16}{5}, -\frac{24}{25}\right)$ *e* $\vec{v}$*, conforme representação geométrica abaixo.*



Uma equação vetorial para o plano π *pode ser escrita como*

$$\pi : (x, y, z) = (2, -3, 0) + \lambda(-4, 10, -3) + \mu(3, 2, 1), \text{ com } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

(*na equação acima trocamos* $\vec{u}$ *por* $\frac{25}{8}\vec{u}$*, pois* $\frac{25}{8}\vec{u}$ *é paralelo a* $\vec{u}$ *e pode ser, também, tomado como um dos vetores diretores de* π)

Se quisermos a equação geral de π *podemos considerar o vetor normal* $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$*:*

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} \equiv \det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -32/25 & 16/5 & -24/25 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \equiv \frac{8}{25} \det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 10 & -3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{8}{25}(16, -5, -38)$$

Assim, podemos considerar $\frac{25}{8}\vec{n} = (16, -5, -38)$ *no lugar de* $\vec{n}$ *para escrever a equação geral do plano* π (*pois* $\frac{25}{8}\vec{n}$ *é paralelo a* $\vec{n}$), *ou seja,*

$$\pi : 16x - 5y - 38z + d = 0.$$

Para encontrar d *basta substituir as coordenadas de* A *na equação acima:*

$$16(2) - 5(-3) - 38(0) + d = 0 \Rightarrow d = -47.$$

Logo, a equação geral do plano π *pode ser escrita como*

$$\boxed{\pi : 16x - 5y - 38z - 47 = 0}.$$

Exercício 3.47 Do ponto $P(5, 4, -7)$ é traçada uma perpendicular ao plano π. Se o pé desta perpendicular é o ponto $Q(2, 2, -1)$, encontre a equação cartesiana de π.

Resposta: $\pi : -3x - 2y + 6z + 16 = 0$.

Exercício 3.48 Determine a equação geral do plano mediador do segmento AB, onde $A(4, 3, -2)$ e $B(1, 9, 2)$.

Resposta: $\pi : -3x + 6y + 4z - \frac{57}{2} = 0$.

Exercício 3.49 Estude a posição relativa dos planos $\pi_1 : 2x + y + 3z + 1 = 0$ e $\pi_2 : (x, y, z) = (1, 1, 1) + \lambda(1, 1, 0) + \mu(2, -1, m)$, com $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, de acordo com os valores possíveis de m.

Resposta: são planos concorrentes para quaisquer valores reais de m.

Exercício 3.50 Determine o plano que passa pelo ponto $A(4, 1, -1)$ e é perpendicular aos planos $2x + y - 3z = 0$ e $x + y - 2z - 3 = 0$.

Resposta: $\pi : x + y + z - 4 = 0$.

Exercício 3.51 (**Resolvido Parcialmente**) Determine a medida do ângulo entre a reta e o plano em cada caso:

(i) $r : \begin{cases} x = 0 \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$, com $\lambda \in \mathbb{R}$, e $\pi : z = 0$

(ii) $r : x = y = z$ e $\pi : z = 0$

Resolução Parcial.

(ii): Dados o plano $\pi : z = 0$ (eq. geral) e a reta $r : x = y = z$ (eq. simétricas), um vetor normal ao plano é $\vec{n} = (0, 0, 1)$ e um vetor diretor de r é $\vec{v} = (1, 1, 1)$.

Da teoria, vimos que a equação que fornece a medida θ do ângulo entre r e π é dada por

$$\operatorname{sen}(\theta) = \frac{|\vec{v} \cdot \vec{n}|}{||\vec{v}||.||\vec{n}||}.$$

Lembremos que o ângulo entre uma reta e um plano nunca pode ser obtuso.
Assim,

$$\operatorname{sen}(\theta) = \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{1}} \Rightarrow \operatorname{sen}(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \theta = \operatorname{arcsen}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right).$$

Resposta de (i): $45°$.

Exercício 3.52 (**Resolvido Parcialmente**) Determine o ângulo entre os planos π_1 e π_2:

(i) $\pi_1 : 2x - y + 3z + 3 = 0$ e $\pi_2 : (x, y, z) = (0, 1, 2) + \lambda(3, 1, 2) + \mu(1, 0, -1)$, com $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
(ii) $\pi_1 : x + y + 1 = 0$ e $\pi_2 : (x, y, z) = (-1, 0, 0) + \lambda(1, -1, 0) + \mu(-3, 0, 0)$, com $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Resolução Parcial.

(ii): Temos $\pi_1 : x+y+1 = 0$ e $\pi_2 : X = (-1, 0, 0)+\lambda(1, -1, 0)+\mu(-3, 0, 0)$, com $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, sendo $(1, -1, 0)$ e $(-3, 0, 0)$ vetores diretores de π_2. Sabemos que a medida θ do ângulo entre estes dois planos é dado por $\cos(\theta) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{||\vec{n}_1|| \cdot ||\vec{n}_2||}$, em que $\vec{n}_1 = (1, 1, 0)$ e $\vec{n}_2 = (1, -1, 0) \times (-3, 0, 0)$ são vetores normais a π_1 e π_2, respectivamente.

Calculando $\vec{n}_2$ temos

$$\vec{n}_2 = \det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{bmatrix} = (0, 0, 3).$$

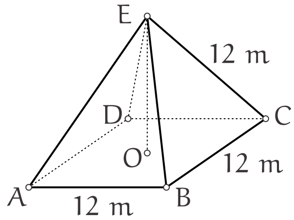
Substituindo na fórmula:

$$\cos(\theta) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{||\vec{n}_1|| \cdot ||\vec{n}_2||} = \frac{|(1,1,0) \cdot (0,0,3)|}{\sqrt{1^2+1^2}\sqrt{3^2}} = \frac{0}{3\sqrt{2}} = 0.$$

Logo, $\theta = \arccos(0) = \frac{\pi}{2}$ é a medida do ângulo entre os planos, ou seja, eles são ortogonais.

Resposta de (i): $\arccos\left(\frac{10}{3\sqrt{42}}\right)$.

Exercício 3.53 Considere a pirâmide $ABCDE$ cuja base $ABCD$ é um quadrado de lado 12 m sobre o plano xy e cada aresta lateral mede 12 m. Suponha que o centro do quadrado $ABCD$ seja a origem $O(0, 0, 0)$ do sistema de coordenadas e que o ponto A esteja sobre o eixo x positivo.



(i) Determine as coordenadas dos pontos A, B, C, D e E.
(ii) Determine as equações dos planos que contêm cada uma das faces laterais da pirâmide.
(iii) Calcule o volume da pirâmide.

Respostas:
(i) $A(6\sqrt{2}, 0, 0)$, $B(0, 6\sqrt{2}, 0)$, $C(-6\sqrt{2}, 0, 0)$, $D(0, -6\sqrt{2}, 0)$ e $E(0, 0, 6\sqrt{2})$.
(ii) *face* ABE $\pi_1 : x + y + z - 6\sqrt{2} = 0$;
face BCE $\pi_2 : -x + y + z - 6\sqrt{2} = 0$;

face ADE $\pi_3 : -x + y - z + 6\sqrt{2} = 0$;
face DCE $\pi_4 : x + y - z + 6\sqrt{2} = 0$.
(**iii**) $V = 288\sqrt{2}$.

Exercício 3.54 Dados os pontos $A(2, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$, $C(0, 0, 1)$ e $D(3, 2, 4)$, seja π_1 o plano que contém o triângulo ABC. Determine o ponto P do plano π_1 tal que $\|\overrightarrow{PD}\|$ é a altura do tetraedro $ABCD$, em relação à base ABC.

Resposta: $P\left(\frac{7}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right)$.

Exercício 3.55 (**Resolvido**) Determinar a equação do plano que passa pelo ponto $M(1, 2, -3)$ e que é paralelo às seguintes retas:

$$r : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-7}{3} \qquad \text{e} \qquad s : \frac{x+5}{3} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+3}{-1}$$

Resolução.

As equações das retas r e s estão na forma simétrica. Logo, $\vec{v}_1 = (2, -3, 3)$ e $\vec{v}_2 = (3, -2, -1)$ são vetores diretores de r e s, respectivamente.

Seja $N = (x, y, z)$ um ponto qualquer do plano π procurado. Como $M \in \pi$, o vetor $\overrightarrow{MN}$ é paralelo ao plano π, sendo

$$\overrightarrow{MN} = N - M = (x - 1, y - 2, z + 3).$$

Como o plano π deverá ser paralelo aos vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, chegamos à conclusão de que $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ e $\overrightarrow{MN}$ devem ser vetores coplanares. Logo, o produto misto entre esses vetores deve ser nulo, ou seja,

$$\overrightarrow{MN} \cdot \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = 0 \Rightarrow \det \begin{bmatrix} x-1 & y-2 & z+3 \\ 2 & -3 & 3 \\ 3 & -2 & -1 \end{bmatrix} = 9x + 11y + 5z - 16 = 0.$$

Portanto, o plano π que estamos procurando terá equação geral $9x + 11y + 5z - 16 = 0$.

Exercícios referentes à Seção 3.3 ***Distâncias***, página 106.

$Oxyz$ é sistema de coordenadas cartesianas ortogonais no espaço com base canônica $\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

Exercício 3.56 Determinar, no eixo das ordenadas, um ponto equidistante de $A(1, 1, 4)$ e $B(-6, 6, 4)$.

Resposta: $P(0, 7, 0)$.

Exercício 3.57 (**i**) Seja $P = (a, b)$. Determine o lugar geométrico dos pontos do plano que distam r de P.

(**ii**) Seja $P = (a, b, c)$. Determine o lugar geométrico dos pontos do espaço que distam r do ponto P.

Respostas: (**i**) *círculo de centro* $C(a, b)$ *e raio* r; (**ii**) *esfera de centro* $C(a, b, c)$ *e raio* r.

Exercício 3.58 (**Resolvido**) Sejam o ponto $P(1, 2, 3)$ e a reta $r : \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2t \\ z = 2 - t \end{cases}$, com $t \in \mathbb{R}$.

(**i**) Calcule a distância de P à reta r.
(**ii**) Determine a distância de P a cada um dos eixos coordenados.

Resolução.

(**i**)*: Dados o ponto $P(1, 2, 3)$ e a reta $r : \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2t \\ z = 2 - t \end{cases}$, com $t \in \mathbb{R}$, podemos calcular $d(P, r)$ por meio da fórmula*

$$d(P, r) = \frac{\|\overrightarrow{AP} \times \vec{v}\|}{\|\vec{v}\|},$$

sendo $A \in r$ um ponto qualquer e $\vec{v}$ um vetor diretor de r.

Tomemos, por exemplo, $A = (1, 0, 2)$. Logo, $\overrightarrow{AP} = P - A = (1, 2, 3) - (1, 0, 2) = (0, 2, 1)$.
Um vetor diretor de r pode ser $\vec{v} = (-2, 2, -1)$.

Calculemos $\overrightarrow{AP} \times \vec{v}$*:*

$$\overrightarrow{AP} \times \vec{v} \equiv \det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \equiv (2+2)\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k} = (4, 2, -4).$$

Assim,

$$d(P, r) = \frac{\|\overrightarrow{AP} \times \vec{v}\|}{\|\vec{v}\|} = \frac{\sqrt{16+4+16}}{\sqrt{4+4+1}} = \frac{\sqrt{36}}{\sqrt{9}} = \frac{6}{3} = 2.$$

(**ii**)*: A distância de um ponto* P *a uma reta* r *é dada por*

$$d(P, r) = \frac{\|\overrightarrow{AP} \times \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|},$$

sendo $A \in r$ *e* $\vec{u}$ *vetor diretor de* r*.*

Dado $P = (1, 2, 3)$*, devemos calcular a distância de* P *aos eixos* Ox*,* Oy *e* Oz*, com vetores diretores* $\vec{i} = (1, 0, 0)$*,* $\vec{j} = (0, 1, 0)$ *e* $\vec{k} = (0, 0, 1)$*, respectivamente.*

Observemos que $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$*. Então:*

(**1**) $d(P, Ox) = \frac{\|\overrightarrow{AP} \times \vec{i}\|}{\|\vec{i}\|} = \|\overrightarrow{AP} \times \vec{i}\|$*, fazendo* $A = (1, 0, 0) \in Ox$*, temos que* $\overrightarrow{AP} = P - A = (0, 2, 3)$*.*

$$\overrightarrow{AP} \times \vec{i} \equiv \det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \equiv (0, 3, -2).$$

Logo, $d(P, Ox) = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$*.*

(**2**) $d(P, Oy) = \frac{\|\overrightarrow{AP} \times \vec{j}\|}{\|\vec{j}\|} = \|\overrightarrow{AP} \times \vec{j}\|$*, fazendo* $A = (0, 2, 0)$*, temos que* $\overrightarrow{AP} = P - A = (1, 0, 3)$*.*

$$\overrightarrow{AP} \times \vec{j} \equiv \det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \equiv (-3, 0, 1).$$

Logo, $d(P, Oy) = \sqrt{(-3)^2 + 1^2} = \sqrt{10}$*.*

(**3**) $d(P, Oz) = \frac{\|\overrightarrow{AP} \times \vec{k}\|}{\|\vec{k}\|} = \|\overrightarrow{AP} \times \vec{k}\|$*, fazendo* $A = (0, 0, 3)$*, temos que* $\overrightarrow{AP} = P - A = (1, 2, 0)$*.*

$$\overrightarrow{AP} \times \vec{k} \equiv \det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \equiv (2, -1, 0).$$

Logo, $d(P, Oz) = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$*.*

Exercício 3.59 Considere a reta $r : \begin{cases} x = 1 \\ z = -1 \end{cases}$ e o ponto $A = (1, 2, 3)$.

(**i**) Existem pontos da reta r que distam 4 unidades do ponto A? Se sim, quais?
(**ii**) Existem pontos da reta r que distam 3 unidades do ponto A? Se sim, quais?
(**iii**) Existem pontos da reta r que distam 5 unidades do ponto A? Se sim, quais?

Respostas: (**i**) *sim,* $P(1, 2, -1)$, (**ii**) *não,* (**iii**) *sim,* $P_1(1, 5, 1)$ *e* $P_2(1, -1, -1)$.

Exercício 3.60 Determinar a distância do ponto $P(2, -1, 2)$ aos planos $\pi_1 : 2x - 2y - z + 3 = 0$ e $\pi_2 : x + y + z = 0$.

Respostas: $d(P, \pi_1) = \frac{7}{3}$ *e* $d(P, \pi_2) = \sqrt{3}$.

Exercício 3.61 Dado o tetraedro de vértices $A(1, 2, 1)$, $B(2, -1, 1)$, $C(0, -1, -1)$ e $D(3, 1, 0)$, calcular a medida da altura baixada do vértice D ao plano de face ABC.

Resposta: $\frac{8}{\sqrt{19}}$.

Exercício 3.62 (**Resolvido Parcialmente**) Calcular a distância entre as retas r e s nos seguintes casos:

(**i**) $r : \begin{cases} x = 0 \\ y = z \end{cases}$ e $s : \begin{cases} y = 3 \\ z = 2x \end{cases}$

(**ii**) $r : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 3t \\ z = -t \end{cases}$ e s : Eixo Ox

(**iii**) $r : x = y = z - 2$ e $s : \begin{cases} y = x + 1 \\ z = x - 3 \end{cases}$

Resolução Parcial.

*(**i**): Dados* $r : \begin{cases} x = 0 \\ y = z \end{cases}$ *e* $s : \begin{cases} y = 3 \\ z = 2x \end{cases}$*, para calcular a distância entre* r *e* s *precisamos de um ponto e um vetor diretor de cada reta.*

Observemos que $A = (0,0,0)$*,* $B = (0,1,1) \in r$ *e, portanto,* $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (0,1,1)$ *é vetor diretor de* r*.*

Analogamente, $C = (0,3,0)$*,* $D = (1,3,2) \in s$ *e, portanto,* $\vec{v} = \overrightarrow{CD} = (1,0,2)$ *é vetor diretor de* s*.*

Tomemos o vetor $\overrightarrow{AC} = (0,3,0)$ *e lembremos, da teoria, que*

$$d(r,s) = \frac{|\overrightarrow{AC} \cdot \vec{u} \times \vec{v}|}{||\vec{u} \times \vec{v}||}.$$

Assim,

$$\vec{u} \times \vec{v} \equiv \det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \equiv 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} = (2,1,-1).$$

e

$$\overrightarrow{AC} \cdot \vec{u} \times \vec{v} = \det \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = 3.$$

Portanto,

$$d(r,s) = \frac{|3|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{3}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

Respostas de (**ii**) *e* (**iii**)*:* $\frac{\sqrt{10}}{5}$ *e* $\sqrt{\frac{62}{3}}$*, respectivamente.*

Exercício 3.63 (**Resolvido**) Escrever as equações dos planos paralelos ao plano $\pi : 3x - 2y - 6z - 5 = 0$ que distam 5 unidades da origem.

Resolução.

Temos o plano $\pi : 3x - 2y - 6z - 5 = 0$ *com vetor normal* $\vec{n} = (3,-2,-6)$*. Planos* σ *paralelos a* π *são normais a* $\vec{n}$*. Portanto, possuem equações gerais da forma* $\sigma : 3x - 2y - 6z + d = 0$*. Busquemos* d *tais que* $d(O,\sigma) = 5$*, sendo* $O = (0,0,0)$*.*

Como $d(O,\sigma) = \frac{|3(0) - 2(0) - 6(0) + d|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2 + (-6)^2}}$ *temos a equação*

$$\frac{|3(0) - 2(0) - 6(0) + d|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2 + (-6)^2}} = 5 \Rightarrow \frac{|d|}{7} = 5 \Rightarrow d = \pm 35.$$

Portanto, há duas soluções:

$$\sigma_1 : 3x - 2y - 6z + 35 = 0 \quad e \quad \sigma_2 : 3x - 2y - 6z - 35 = 0.$$

Exercício 3.64 Calcular a distância entre os planos paralelos $\pi_1 : x - 2z + 1 = 0$ e $\pi_2 : 3x - 6z - 8 = 0$.

Resposta: $\frac{11\sqrt{5}}{15}$.

Exercício 3.65 Determinar a distância da reta r ao plano $\pi : x + y - 12 = 0$, onde $r : \begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \\ z = t \end{cases}$.

Resposta: $\frac{5\sqrt{2}}{2}$.

Exercício 3.66 Calcule a distância do ponto $C(2,1,2)$ à reta determinada pelos pontos $A(1,0,1)$ e $B(0,1,1)$.

Resposta: $\sqrt{3}$.

Exercício 3.67 Obter a projeção ortogonal de P sobre a reta r e o simétrico de P em relação à reta r, se $P(2,-1,3)$ e r tem equações paramétricas

$$\begin{cases} x = 3t \\ y = 5t - 7 \\ z = 0 \end{cases}, \text{ com } t \in \mathbb{R}.$$

Calcule, também, a distância de P a r.

Respostas: A projeção ortogonal de P *sobre* r *é o ponto* $P'\left(\frac{54}{17}, -\frac{29}{17}, 0\right)$. *O simétrico de* P *em relação a* r *é o ponto* $P''\left(\frac{74}{17}, -\frac{41}{17}, -3\right)$. *A distância de* P *a* r *é* $\sqrt{\frac{400}{289} + \frac{144}{289} + 9} \cong 3,3$.

Exercício 3.68 (**Resolvido**) Determine o ponto do segmento AB que está mais próximo de P e o que está mais afastado de P, sendo $P(1,0,4)$, $A(1,2,1)$ e $B(4,5,0)$.

Sugestão: Para isto, comece encontrando a intersecção da reta r que contém AB, com a perpendicular a r passando por P.

Resolução.

Dados $P(1,0,4)$, $A(1,2,1)$, $B(4,5,0)$, *vamos encontrar a reta* r *que passa por* A *e por* B:

O vetor $\overrightarrow{AB} = (3,3,-1)$ *é um vetor diretor de* r *e* $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 + 3t \\ z = 1 - t \end{cases}$, *com* $t \in \mathbb{R}$, *equações paramétricas de* r.

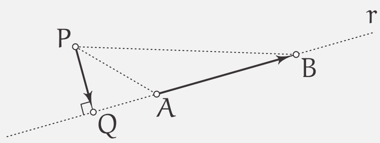
Observemos que, sendo $X = A + t\overrightarrow{AB}$ *a equação vetorial da reta* r, *os pontos de* r *que estão no segmento* AB *correspondem aos valores de* t *entre* 0 *e* 1 (*o ponto* A *corresponde a* $t = 0$ *e o ponto* B *corresponde a* $t = 1$).

Consideremos o ponto $Q = (1 + 3t_0, 2 + 3t_0, 1 - t_0) \in r$ *tal que* $\overrightarrow{PQ}$ *seja ortogonal a* $\overrightarrow{AB}$. *Assim,* $d(P,r) = d(P,Q)$ *e o ponto* Q *é o ponto da reta* r *mais próximo de* P. *Será que* Q *está no segmento* AB?

Vejamos: nas condições acima, $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$, *ou seja,*

$$(3t_0, 2 + 3t_0, -3 - t_0) \cdot (3,3,-1) = 0 \Rightarrow 9t_0 + 6 + 9t_0 + 3 + t_0 = 0 \Rightarrow 9 + 19t_0 = 0 \Rightarrow t_0 = -\frac{9}{19}.$$

Sendo $t_0 = -\frac{9}{19}$ *valor fora do intervalo* $[0,1]$, *temos* $Q \in r$ *fora do segmento* AB.



Desta forma, os extremos A *e* B *do segmento* AB *são os pontos procurados:*

$$d(P,A) = \sqrt{(1-1)^2 + (0-2)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$
$$d(P,B) = \sqrt{(4-1)^2 + (5-0)^2 + (0-4)^2} = \sqrt{9+25+16} = \sqrt{50}$$

Exercício 3.69 Mostre que as retas

$$r : \begin{cases} x + 2y + 3z - 6 = 0 \\ y - 2z + 1 = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad s : \begin{cases} x = 7t \\ y = -2t - 1 \\ z = -t + 5 \end{cases}, \text{ com } t \in \mathbb{R}.$$

são paralelas e calcule a distância entre elas.

Resposta: $\sqrt{\frac{1085}{54}} \cong 4,48$.

Exercício 3.70 Obtenha o lugar geométrico dos pontos equidistantes de $A(2,1,0)$ e $B(10,7,2)$.

Resposta: é o plano de equação $4x + 3y + z - 37 = 0$.

Exercício 3.71 Obtenha a equação do plano perpendicular a

$$\alpha : 3x - y + z = 0 \qquad \text{e} \qquad \beta : x + 5y + 3z = 0$$

que dista $\sqrt{6}$ da origem.

Respostas: $-x - y + 2z + 6 = 0$ *ou* $-x - y + 2z - 6 = 0$.

Exercício 3.72 (**Resolvido**) Determine o ponto do eixo Oz equidistante do ponto $M(1, -2, 0)$ e do plano $\pi : 3x - 2y + 6z - 9 = 0$.

Resolução.

Dados $M(1, -2, 0)$ *e* $\pi : 3x - 2y + 6z - 9 = 0$, *consideremos um ponto* $P\,(0, 0, z_0)$ *do eixo* Oz *tal que* $d\,(P, M) = d\,(P, \pi)$.

Da teoria, a distância entre os pontos $A\,(x_1, y_1, z_1)$ *e* $B = (x_2, y_2, z_2)$ *é dada por*

$$d\,(A, B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2},$$

enquanto que a distância entre um ponto $A\,(x_1, y_1, z_1)$ *e um plano* $\pi : ax + by + cz + d = 0$ *é dada por*

$$d\,(A, \pi) = \tfrac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Desta forma,

$$d\,(P, M) = d\,(P, \pi) \Rightarrow \sqrt{(0 - 1)^2 + (0 + 2)^2 + (z_0 - 0)^2} = \tfrac{|3(0) - 2(0) + 6(z_0) - 9|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2 + 6^2}} \Rightarrow$$

$$\sqrt{5 + z_0^2} = \tfrac{|6z_0 - 9|}{7} \Rightarrow 5 + z_0^2 = \tfrac{36z_0^2 - 108z_0 + 81}{49} \Rightarrow 245 + 49z_0^2 = 36z_0^2 - 108z_0 + 81 \Rightarrow$$

$$13z_0^2 + 108z_0 + 164 = 0 \Rightarrow \boxed{z_0 = -2 \text{ ou } z_0 = -\tfrac{82}{13}}.$$

Portanto, há duas soluções: os pontos $P_1(0, 0, -2)$ *e* $P_2\left(0, 0, -\frac{82}{13}\right)$, *que são equidistantes de* $M(1, -2, 0)$ *e* $\pi : 3x - 2y + 6z - 9 = 0$ *e pertencem ao eixo* Oz.

Exercício 3.73 Encontre a equação do lugar geométrico dos pontos cujas distâncias a

$$\alpha : 3x - 2y - 6z = 12 \qquad \text{e} \qquad \beta : 3x - 2y - 6z = -2$$

estão, nesta ordem, em uma razão 2.

Respostas: são os planos $3x - 2y - 6z + 16 = 0$ *ou* $-9x + 6y + 18z + 8 = 0$.

Exercício 3.74 (**Resolução**) Determine a distância do ponto $P(9, 1, 0)$ ao plano $\pi : x - 2y + z - 3 = 0$ das seguintes maneiras:

(**i**) calculando o pé da perpendicular;
(**ii**) pela fórmula da distância de ponto a plano;
(**iii**) por projeção de um vetor (qual?) na direção normal do plano (qual?).

Resolução.

(**i**)**:** *Temos* $P(9, 1, 0)$ *e* $\pi : x - 2y + z - 3 = 0$, *sendo* $\vec{n} = (1, -2, 1)$ *um de seus vetores normais. O vetor* $\vec{n}$ *pode ser vetor diretor da reta* r *que contem* P *e é ortogonal ao plano* π. *Assim.*

$$r : (x, y, z) = (9, 1, 0) + t(1, -2, 1), \text{ com } t \in \mathbb{R}.$$

Sendo $\{Q\} = r \cap \pi$, *temos* $d\,(P, \pi) = d\,(P, Q)$.

Assim, precisamos calcular $Q\,(x_0, y_0, z_0)$, *cujas coordenadas satisfazem as equações de* r *e* π *simultaneamente, ou seja:*

$$(9 + t_0) - 2(1 - 2t_0) + t_0 - 3 = 0 \Rightarrow 4 + 6t_0 = 0 \Rightarrow t_0 = -\tfrac{2}{3}.$$

Substituindo t_0 *na equação vetorial de* r *temos*

$$Q\left(\tfrac{25}{3}, \tfrac{7}{3}, -\tfrac{2}{3}\right).$$

Assim,

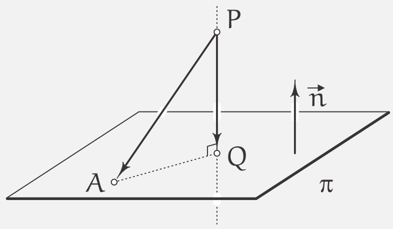
$$d(P,\pi) = d(P,Q) = \sqrt{\left(9-\frac{25}{3}\right)^2 + \left(1-\frac{7}{3}\right)^2 + \left(0+\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{4+16+4}}{3} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

(**ii**)*: Temos* $P(9,1,0)$ *e* $\pi : x-2y+z-3=0$*. Pela fórmula da distância entre ponto e plano, fazemos:*

$$d(P,\pi) = \frac{|(9)-2(1)+(0)-3|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+1^2}} = \frac{|4|}{\sqrt{6}} = \frac{4\sqrt{6}}{6} = \frac{2\sqrt{6}}{3}.$$

(**iii**)*: Dados* $P(9,1,0)$ *e* $\pi : x-2y+z-3=0$ *devemos calcular* $d(P,\pi)$ *por meio de projeção.*

Tomemos um ponto $A \in \pi$ *qualquer e consideremos o vetor* $\overrightarrow{PA}$*. Observemos que a distância de* P *a* π *coincide com o comprimento do vetor* $\overrightarrow{PQ} = \text{proj}_{\vec{n}}\,\overrightarrow{PA}$*, sendo* $\vec{n}$ *um vetor normal qualquer ao plano* π*.*



Quanto ao ponto A *tomemos, por exemplo,* $A(0,0,3)$ *(verifique que* $A \in \pi$*). Assim,* $\overrightarrow{PA} = A - P = (-9,-1,3)$*. Quanto ao vetor* $\vec{n}$*, da equação geral de* π *podemos tomar* $\vec{n} = (1,-2,1)$*.*

Assim,

$$\overrightarrow{PQ} = \text{proj}_{\vec{n}}\,\overrightarrow{PA} = \frac{\overrightarrow{PA}\cdot\vec{n}}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} = \frac{-9+2+3}{1+4+1}(1,-2,1) = -\frac{2}{3}(1,-2,1) \Rightarrow$$
$$d(P,\pi) = \|\overrightarrow{PQ}\| = \frac{2\sqrt{1+4+1}}{3} = \frac{2\sqrt{6}}{3}.$$

Exercício 3.75 Obtenha uma equação da reta r contida no plano $\pi : y = z$, sabendo que a medida angular entre r e $s : (x,y,z) = (1,1,2) + t(1,-1,0)$ é 60^o e que r dista 1 do ponto $P = (1,0,0)$.

Respostas: $r : \begin{cases} x = 0 \\ z = y \end{cases}$ *ou* $r : \begin{cases} x = 2 \\ z = y \end{cases}$ *ou* $r : \begin{cases} x = 4y-8 \\ z = y \end{cases}$ *ou* $r : \begin{cases} x = y+10 \\ z = y \end{cases}$.

Exercício 3.76 **Extra** (trabalhoso) Encontre a equação do plano que contém a reta intersecção de $\alpha : 3x-y+2z+9 = 0$ e $\beta : x+z-3 = 0$ e que dista duas 2 unidades da origem.

Respostas:
$\pi : 158x + (-25+\sqrt{546})y + (133+\sqrt{546})z - 24 - 18\sqrt{546} = 0$ *ou*
$\pi : 158x + (-25-\sqrt{546})y + (133-\sqrt{546})z - 24 + 18\sqrt{546} = 0$.

Seção EXTRA de Exercícios Resolvidos: *Retas, Planos e Distâncias*

Exercícios referentes à Seção 3.1 ***Retas***, página 91.

Observação: As resoluções são sugeridas, e podem não ser únicas.

$Oxyz$ é sistema de coordenadas cartesianas ortogonais no espaço com base canônica $\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

Exercício 3.77 (**Resolvido**) Como se reconhece, por meio de coordenadas, um ponto do eixo Ox das abscissas? E do eixo Oy das ordenadas? E do eixo Oz das cotas? E do plano cartesiano Oxy? E do plano cartesiano Oxz? E do plano cartesiano Oyz?

Resolução.

Eixo Ox *das abscissas:* $(x, 0, 0)$; $x \in \mathbb{R}$.
Eixo Oy *das ordenadas:* $(0, y, 0)$; $y \in \mathbb{R}$.
Eixo Oz *das cotas:* $(0, 0, z)$; $z \in \mathbb{R}$.
Plano cartesiano Oxy*:* $(x, y, 0)$; $x, y \in \mathbb{R}$.
Plano cartesiano Oxz*:* $(x, 0, z)$; $x, z \in \mathbb{R}$.
Plano cartesiano Oyz*:* $(0, y, z)$; $y, z \in \mathbb{R}$.

Exercício 3.78 (**Resolvido**) Quais as equações paramétricas das retas r, s e t paralelas aos eixos Ox, Oy e Oz, respectivamente, passando pelo ponto $P(1, 2, 3)$? Faça um esboço envolvendo o sistema de coordenadas e as retas.

Resolução.

Observação: *Devido ao fato de uma reta* r *paralela ao eixo* Oz*, por exemplo, possuir equações paramétricas na forma*

$$\begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 \\ z = z_0 + \lambda c \end{cases} ;\ (x_0, y_0, z_0) \in r;\ c \in \mathbb{R}^* \text{ e } \lambda \in \mathbb{R},$$

é costume escrever apenas as variáveis constantes x *e* y*, ou seja, as equações acima podem ser escritas ocultando a variável* z *que pode variar livremente:*

$$\boxed{\begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 \end{cases}}.$$

A mesma observação vale para retas paralelas ao eixo Ox *ou* Oy.

Logo:

$$r : \begin{cases} x = \lambda \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases} ;\ s : \begin{cases} x = 1 \\ y = \lambda \\ z = 3 \end{cases} \text{ e } t : \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = \lambda \end{cases}.$$

Faça figuras no espaço cartesiano ilustrando essas retas.

Exercício 3.79 (**Resolvido**) São dados os pontos $A(3, 6, -7)$, $B(-5, 2, 3)$ e $C(4, -7, -6)$.
(**a**) Escrevas todas as formas possíveis de equações para a reta que passa por B e C. O ponto $D(3, 1, 4)$ pertence a essa reta?
(**b**) Os pontos A, B e C formam vértices de um triângulo?
(**c**) Escreva, caso A, B e C forme triângulo, as equações paramétricas da reta que passa pela mediana relativa ao vértice C.

Resolução.

(**a**) *Vetor diretor de* r*:* $\overrightarrow{BC} = (9, -9, -9)$ *ou* $\vec{u} = (1, -1, -1)$ *(por quê?)*
Logo:

$$(x, y, z) = (-5, 2, 3) + \lambda(1, -1, -1) \Rightarrow \begin{cases} x = -5 + \lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 3 - \lambda \end{cases} \Rightarrow x + 5 = \tfrac{y-2}{-1} = \tfrac{z-3}{-1} \Rightarrow \begin{cases} y = -x - 3 \\ z = -x - 2 \end{cases}.$$

(Identifique os tipos de equações)

Se $D\,(3,1,4) \in r$, *então existe* $\lambda \in \mathbb{R}$ *tal que* $(3,1,4) = (-5,2,3) + \lambda\,(1,-1,-1) \Rightarrow \begin{cases} 3 = -5+\lambda \\ 1 = 2-\lambda \\ 4 = 3-\lambda \end{cases}$ *que é um sistema incompatível (verifique). Logo,* $D \notin r$.

(b) $\overrightarrow{AB} = (-8,-4,10)$ *e* $\overrightarrow{AC} = (1,-13,1)$ *não são paralelos. Logo,* A, B *e* C *são pontos não colineares e, portanto, formam triângulo.*

(c) *Seja* M *ponto médio do lado* AB. *Logo,* $M = A + \overrightarrow{AM} = A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = (3,6,-7) + \frac{1}{2}(-8,-4,10) = (-1,4,-2)$.
Assim, $\overrightarrow{CM} = (-5,11,4)$.

Temos $r : X = C + \lambda\overrightarrow{CM} \Rightarrow r : X = (4,-7,-6) + \lambda\,(-5,11,4) \Rightarrow r : \begin{cases} x = 4-5\lambda \\ y = -7+11\lambda \\ z = -6+4\lambda \end{cases}$.

Faça uma figura ilustrando esse item.

Exercício 3.80 (**Resolvido**) Dados os pontos $A\,(1,2,5)$ e $B\,(0,1,0)$, determine um ponto P sobre a reta que passa por A e B tal que o comprimento do segmento PB seja o triplo do comprimento do segmento PA. O ponto P é único?

Resolução.

Temos $\|\overrightarrow{PB}\| = 3\|\overrightarrow{PA}\|$.
A reta que passa por A *e* B *é* $r : (x,y,z) = (1,2,5) + \lambda\,(-1,-1,-5)$ *(verifique).*
Logo, se $P\,(x,y,z) \in r \Rightarrow P\,(1-\lambda, 2-\lambda, 5-5\lambda)$.
Portanto, $\overrightarrow{PB} = (-1+\lambda, -1+\lambda, -5+5\lambda)$ *e* $\overrightarrow{PA} = (\lambda,\lambda,5\lambda)$.

$$\|\overrightarrow{PB}\| = 3\|\overrightarrow{PA}\| \Rightarrow \sqrt{2\,(-1+\lambda)^2 + (-5+5\lambda)^2} = 3\sqrt{2\lambda^2 + (5\lambda)^2} \Rightarrow \cdots \ (\textit{faça}) \Rightarrow 8\lambda^2+2\lambda-1 = 0 \Rightarrow \lambda = -\tfrac{1}{2} \ \textit{ou}\ \lambda = \tfrac{1}{4}.$$

Conclusão: $P\left(1+\frac{1}{2}, 2+\frac{1}{2}, 5+5.\frac{1}{2}\right)$ *ou* $P\left(1-\frac{1}{4}, 2-\frac{1}{4}, 5-5.\frac{1}{4}\right)$.
Portanto, P *não é único.*

Faça uma figura.

Exercício 3.81 (**Resolvido**) Dados $A\,(0,2,1)$ e $r : X = (0,2,-2) + \lambda\,(1,-1,2)$, ache os pontos de r que distam $\sqrt{3}$ de A. A distância do ponto A à reta r é maior, menor, ou igual a $\sqrt{3}$? Justifique.

Resolução.

Seja X_0 *um ponto de r que está à distância* $\sqrt{3}$ *de* A. *Como* $d\,(A, X_0) = \|\overrightarrow{AX_0}\|$, *temos* $\|\overrightarrow{AX_0}\| = \sqrt{3}$.
Mas $X_0\,(\lambda_0, 2-\lambda_0, -2+2\lambda_0)$ *para algum* $\lambda_0 \in \mathbb{R}$.
Logo, $\overrightarrow{AX_0} = (\lambda_0, -\lambda_0, -3+2\lambda_0) \Rightarrow \|\overrightarrow{AX_0}\| = \sqrt{(\lambda_0)^2 + (-\lambda_0)^2 + (-3+2\lambda_0)^2}$.
Desta forma:

$$\sqrt{(\lambda_0)^2 + (-\lambda_0)^2 + (-3+2\lambda_0)^2} = \sqrt{3} \Rightarrow \cdots \ (\textit{faça}) \Rightarrow (\lambda_0 - 1)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_0 = 1.$$

Logo, $X_0\,(1,1,0)$ *e, como a equação acima forneceu apenas um único valor para* λ_0, *temos que o ponto* X_0 *é único. Portanto, a distância de* A *a* r *é exatamente* $\sqrt{3}$.

Exercício 3.82 (**Resolvido**) Calcule o valor do m para que as retas

$$r : \begin{cases} y = 2x-5 \\ z = -x+2 \end{cases} \quad \text{e } s : x-5 = \frac{y}{m} = z+1$$

sejam concorrentes.

Resolução.

Se r *e* s *são concorrentes, deverão possuir um único ponto* $P\,(x_0, y_0, z_0)$ *em comum.*

Logo:
De s *temos* $y_0 = mx_0 - 5m$.
De r *temos* $y_0 = 2x_0 - 5$.
Portanto, $mx_0 - 5m = 2x_0 - 5 \Rightarrow x_0 = \frac{5m-5}{m-2}$. $(*)$
De s *temos* $z_0 = x_0 - 6$.
De r *temos* $z_0 = -x_0 + 2$.
Portanto, $x_0 - 6 = -x_0 + 2 \Rightarrow x_0 = 4$. $(**)$
De $(*)$ *e* $(**)$ *temos* $\frac{5m-5}{m-2} = 4 \Rightarrow m = -3$.

Exercício 3.83 (**Resolvido**) Verifique se são concorrentes e, em caso afirmativo, encontre o ponto de intersecção:

$$r: \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = 4 - \lambda \\ z = -8 + 3\lambda \end{cases} \quad \text{e} \quad s: \frac{x-3}{2} = \frac{-y-1}{3} = \frac{z-2}{4}.$$

Resolução.

Temos $r: X = (-1, 4, -8) + \lambda\,(1, -1, 3)$ *e* $s: X = (3, -1, 2) + \mu\,(2, -3, 4)$.
Sendo $A = (-1, 4, -8) \in r$ *e* $B = (3, -1, 2) \in s$, *temos* $\overrightarrow{AB} = (4, -5, 10)$.

$$\det \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -3 & 4 \\ 4 & -5 & 10 \end{bmatrix} = 0 \text{ (faça)}.$$

Logo, $\overrightarrow{AB}$ *e os vetores diretores de* r *e* s *são paralelos. Portanto,* r *e* s *são coplanares e, como os vetores diretores de* r *e* s *não são paralelos, temos que* r *e* s *são concorrentes.*
Se $P\,(x_0, y_0, z_0) \in r \cap s \Rightarrow P = (-1, 4, -8) + \lambda_0\,(1, -1, 3) = (3, -1, 2) + \mu_0\,(2, -3, 4)$ *para algum* λ_0 *e* μ_0 *em* $\mathbb{R}$.
Logo:

$$\begin{cases} -1 + \lambda_0 = 3 + 2\mu_0 \\ 4 - \lambda_0 = -1 - 3\mu_0 \\ -8 + 3\lambda_0 = 2 + 4\mu_0 \end{cases} \Rightarrow \lambda_0 = 2 \text{ e } \mu_0 = -1. \text{ (verifique)}$$

Conclusão: $P = (-1, 4, -8) + 2\,(1, -1, 3) = (1, 2, -2)$ *é o ponto de intersecção procurado.*

Exercício 3.84 (**Resolvido**) Sejam $P\,(1, 0, 1)$ e $Q\,(0, 1, 1)$. Ache as coordenadas do ponto C na reta que passa por P e Q tal que a área do triângulo ABC com $A\,(1, 2, 1)$ e $B\,(1, 2, 3)$ seja igual a $\frac{1}{2}$.

Resolução.

Faça uma figura.

Temos "área do Δ*"* $= \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB}\| = \frac{1}{2} \Rightarrow \|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB}\| = 1$.
Mas $r: X = (1, 0, 1) + \lambda\,(-1, 1, 0)$ *(verifique).*
Logo, $C = (1 - \lambda_0, \lambda_0, 1)$ *para algum* $\lambda_0 \in \mathbb{R}$.

$$\overrightarrow{AC} = (-\lambda, \lambda - 2, 0)\,,\ \overrightarrow{AB} = (0, 0, 2) \text{ e } \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB} = (2\lambda_0 - 4, 2\lambda_0, 0) \text{ (faça)}.$$

Logo, $\|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB}\| = 1 \Rightarrow \sqrt{(2\lambda_0 - 4)^2 + (2\lambda_0)^2} = 1 \Rightarrow \cdots$ *(faça)* $\Rightarrow 8\lambda_0^2 - 16\lambda_0 + 15 = 0$ *que não possui raízes reais (verifique).*

Conclusão: ***não existe*** *um ponto* C *sobre* r *tal que* ΔABC *possua área* $\frac{1}{2}$.

Exercício 3.85 (**Resolvido**) Estude a posição relativa das retas r e s nos seguintes casos (no caso de retas concorrentes, determine o ponto de intersecção):

(**a**) $r: X = (1, -1, 1) + \lambda\,(-2, 1 - 1)$ e $s: \begin{cases} y + z = 3 \\ x + y - z = 6 \end{cases}$.

Obs.: Coloque as equações de s na forma reduzida em relação à variável y.

(**b**) $r: \begin{cases} x - y - z = 2 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$ e $s: \begin{cases} 2x - 3y + z = 5 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases}$.

Obs.: Coloque as equações de r e s na forma reduzida em relação à variável x.

(**c**) $r: \frac{x+1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{2}$ e $s: X = (0,0,0) + \lambda(1,2,0)$.

(**d**) $r: \frac{x+3}{2} = \frac{y-1}{4} = z$ e $s: \begin{cases} 2x - y + 7 = 0 \\ x + y - 6z + 2 = 0 \end{cases}$.

Resolução.

(**a**) $s: \begin{cases} y + z = 3 \\ x + y - z = 6 \end{cases} \Rightarrow s: \begin{cases} z = -y + 3 \\ x + 2y = 9 \text{ (soma das 2 eqs.)} \end{cases} \Rightarrow s: \begin{cases} x = -2y + 9 \\ z = -y + 3 \end{cases}$.

Sejam $A(9,0,3)$ *e* $B(3,3,0) \in s$ *(faça* $y = 0$ *e* $z = 0$ *nas eqs.)* $\Rightarrow \overrightarrow{AB} = (-6,3,-3)$ *é vetor diretor de* s.

Como $\vec{u} = (-2,1,-1)$ *é vetor diretor de* r *e* $\overrightarrow{AB} = 3\vec{u}$ *(*$\overrightarrow{AB}$ *e* $3\vec{u}$ *são paralelos), então* $r /\!/ s$.

Mas $P(1,-1,1) \in r$. *Se* $r = s$, *então* $P \in s$. *Mas* $(1,-1,1)$ *não satisfaz as equações reduzidas de* s *(verifique). Logo,* $r /\!/ s$ *e* $r \cap s = \varnothing$.

Obs.: *veremos mais adiante (estudo de planos) uma maneira mais eficiente de se obter vetores diretores para* s *nessas condições.*

(**b**) *Procedimento análogo ao empregado no item* (**a**) *(para encontrar um vetor diretor para* s*) mostra que vetores diretores de* r *e* s *não são paralelos (verifique). Logo,* r *e* s *são reversas ou concorrentes.*

Se forem concorrentes, deverá existir um ponto $P(x_0, y_0, z_0)$ *em comum. Substituindo* (x_0, y_0, z_0) *nas equações de* r *e* s, *encontramos* $x_0 = 1$, $y_0 = -1$ *e* $z_0 = 0$.

Conclusão: r *e* s *concorrem em* $P(1,-1,0)$.

(**c**) $\vec{u} = (2,3,2)$ *é vetor diretor de* r.

$\vec{v} = (1,2,0)$ *é vetor diretor de* s.

Logo, $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$ *não são paralelos.*

Temos $A(-1,0,-1) \in r$ *e* $B(0,0,0) \in s$. *Logo,* $\overrightarrow{AB} = (1,0,1)$.

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = -3 \neq 0.$$

Conclusão, r *e* s *são reversas.*

(**d**) $\vec{u} = (2,4,1)$ *é vetor diretor para* r.

Temos $A\left(0,7,\frac{3}{2}\right)$ *e* $B(-3,1,0) \in s$ *(faça* $x = 0$ *e* $z = 0$ *nas eqs.)* $\Rightarrow \overrightarrow{AB} = \left(-3,-6,-\frac{3}{2}\right)$ *é vetor diretor de* s.

Como $\overrightarrow{AB} = -\frac{3}{2}\vec{u}$, *temos* $\overrightarrow{AB}$ *e* $\vec{u}$ *paralelos* $\Rightarrow r /\!/ s$.

Observando que $B(-3,1,0)$ *satisfaz as equações de* r *e* s, *concluimos* $r = s$.

Exercício 3.86 (**Resolvido**) Dadas as retas $r: \begin{cases} x = my - 1 \\ z = y - 1 \end{cases}$, $s: x = \frac{y}{m} = z$ e $t: -x + z = y = -z - 1$, calcule, caso possível, valor(es) de m para que:

(**a**) r e s sejam paralelas;
(**b**) r, s e t sejam paralelas a um mesmo plano;
(**c**) r e t sejam concorrentes;
(**d**) s e t sejam coplanares;
(**e**) r e s sejam reversas.

Resolução.

Observemos que $m \neq 0$ *devido às equações de* s.

$A(-1,0,-1)$ *e* $B(m-1,1,0) \in r$ *(faça* $y = 0$ *e* $z = 0$ *nas eqs.)* $\Rightarrow \overrightarrow{AB} = (m,1,1)$ *é vetor diretor de* r.

$\vec{u} = (1,m,1)$ *é vetor diretor de* s.

$C(-1,0,-1)$ *e* $D(1,-1,0) \in t$ *(faça* $y = 0$ *e* $z = 0$ *nas eqs.)* $\Rightarrow \overrightarrow{CD} = (2,-1,1)$ *é vetor diretor de* t.

(**a**) $r /\!/ s \Rightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R}$ *tal que* $(m,1,1) = \alpha(1,m,1) \Rightarrow \cdots$ *(faça)* $\Rightarrow m = 1$.

(**b**) $r, s, t /\!/ \pi \Rightarrow \det \begin{bmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \cdots$ *(faça)* $\Rightarrow m^2 - m = 0 \Rightarrow m = 0$ *(não serve) ou* $m = 1$.

(**c**) r *e* t *concorrentes.*

Observando que $\overrightarrow{AB}$ *e* $\overrightarrow{CD}$ *não são paralelos para qualquer* m, *precisamos determinar apenas o ponto de intersecção. Se* $P(x_0, y_0, z_0) \in r \cap t$, *então* (x_0, y_0, z_0) *satisfaz as equações de* r *e* t. *Substituindo e resolvendo (faça) temos* $x_0 = -1$, $y_0 = 0$ *e* $z_0 = -1$.

Da primeira equação de r, $(x = my - 1)$, *temos, para* $x_0 = -1$ *e* $y_0 = 0$, *que qualquer* $m \in \mathbb{R}$ *é tal que* r *e* t *são concorrentes.*

(**d**) s *e* t *coplanares.*

Observemos que $C(-1, 0, -1) \in t$ *e* $P(0, 0, 0) \in s$. *Logo,* $\overrightarrow{CP} = (1, 0, 1)$.

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} = -m.$$

Como $m \neq 0$, *temos que* s *e* t *são sempre reversas. Logo,* $\nexists m \in \mathbb{R}$ *tal que* s *e* t *sejam coplanares.*

Obs.: *duas retas reversas são sempre paralelas a* ***um*** *plano (veja o item* (**b**)) *mas nunca coplanares (pertencentes a um* ***mesmo*** *plano).*

(**e**) r *e* s *reversas.*

Seja $A(-1, 0, -1) \in r$ *e* $P(0, 0, 0) \in s$. *Logo,* $\overrightarrow{AP} = (1, 0, 1)$.

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \end{bmatrix} \neq 0 \Rightarrow \cdots \text{ (faça)} \Rightarrow m \neq 0 \text{ e } m \neq 1.$$

Exercício 3.87 (**Resolvido**) Verifique se as retas r e s são ortogonais, em caso afirmativo, se são também perpendiculares.

(**a**) $r : X = (0, 1, 0) + \lambda(3, 1, 4)$ e $s : X = (-1, 1, 0) + \mu(1, 0, 1)$;

(**b**) $r : \begin{cases} x = 1 \\ z = 1 \end{cases}$ e $s : X = (0, 0, 0) + \lambda(0, 0, 1)$.

Resolução.

(**a**) $\vec{u} = (3, 1, 4)$ *e* $\vec{v} = (1, 0, 1)$ *são vetores diretores de* r *e* s, *respectivamente.*

Temos $(3, 1, 4) \cdot (1, 0, 1) = 7 \neq 0 \Rightarrow r$ *não é ortogonal a* s.

(**b**) $\vec{u} = (0, 1, 0)$ *e* $\vec{v} = (0, 0, 1)$ *são vetores diretores de* r *e* s, *respectivamente (verifique).*

Temos $(0, 1, 0) \cdot (0, 0, 1) = 0 \Rightarrow r$ *é ortogonal a* s.

Como r *e* s *não possuem pontos em comum (verifique), temos que* r *não é perpendicular a* s.

Exercício 3.88 (**Resolvido**) Ache as equações simétricas da reta perpendicular às retas

$$r : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad s : \begin{cases} x = 0 \\ y = \mu \\ z = 1 + \mu \end{cases}.$$

Resolução.

Observemos que as retas em questão são concorrentes e o ponto de intersecção é $P(0, -1, 0)$ *(verifique).*

O produto vetorial $\vec{u} \times \vec{v}$ *de vetores diretores de* r *e* s *é ortogonal a* r *e* s *ao mesmo tempo. Logo, pode ser tomado como vetor diretor de* t. *Neste caso,* $\vec{u} \times \vec{v} = (1, -1, 1)$.

Conclusão: $t : \frac{x}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{1}$.

Exercício 3.89 (**Resolvido**) Ache a reta que intersecta as retas $r = \frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{2} = -\frac{z}{3}$ e $s : \begin{cases} x = -1 + 5\lambda \\ y = 1 + 3\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$ e forma ângulos congruentes com os eixos coordenados.

Resolução.

Temos $r:\begin{cases} x = 1+3\mu \\ y = 1+2\mu \\ z = -3\mu \end{cases}$ *(forma paramétrica).*

Seja $t : X = (a,b,c) + \alpha\,(m,n,p)$ *a reta pedida.*
Temos $\vec{i} = (1,0,0)$, $\vec{j} = (0,1,0)$ *e* $\vec{k} = (0,0,1)$ *vetores diretores dos eixos coordenados.*
Logo:

$$\cos(\theta) = \frac{|(m,n,p)\cdot(1,0,0)|}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}\sqrt{1^2}} = \frac{|(m,n,p)\cdot(0,1,0)|}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}\sqrt{1^2}} = \frac{|(m,n,p)\cdot(0,0,1)|}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}\sqrt{1^2}} \Rightarrow |m| = |n| = |p|.$$

Logo, há 4 casos distintos de vetores diretores (não paralelos) para t*:*

$$\vec{u} = (1,1,1) \text{ ou } = (-1,1,1) \text{ ou } = (1,-1,1) \text{ ou } = (1,1,-1)\,.$$

Seja o caso $\vec{u} = (1,1,1)$*. Tomemos* $P\,(1+3\mu_0, 1+2\mu_0, -3\mu_0) \in r$ *e* $Q\,(-1+5\lambda_0, 1+3\lambda_0, \lambda_0) \in s$ *tais que* $\overrightarrow{PQ}$ *seja paralelo a* $\vec{u}$*, ou seja,* $\overrightarrow{PQ} = \alpha\vec{u}$*.*
Logo, $(-2+5\lambda_0-3\mu_0, 3\lambda_0-2\mu_0, \lambda_0+3\mu_0) = (\alpha,\alpha,\alpha) \Rightarrow \cdots$ *(faça)* $\Rightarrow \mu_0 = \frac{1}{2}$, $\lambda_0 = \frac{5}{4}$ *e* $\alpha = \frac{11}{4}$.
Logo, $P = \left(\frac{5}{2}, 2, -\frac{3}{2}\right)$.
Conclusão: $t : X = \left(\frac{5}{2}, 2, -\frac{3}{2}\right) + \beta\,(1,1,1)$ *é uma solução.*

Procedimento análogo nos outros casos (faça - mesmo!):

$$\begin{cases} t : X = \left(\frac{2}{3}, 2, \frac{1}{3}\right) + \beta\,(-1,1,1) \\ t : X = \left(\frac{1}{7}, \frac{3}{7}, \frac{6}{7}\right) + \beta\,(1,-1,1) \\ t : X = \left(-3, -\frac{5}{3}, 4\right) + \beta\,(1,1,-1) \end{cases}.$$

Exercício 3.90 (**Resolvido**) Ache a reta que passa pelo ponto $(1,-2,3)$ e que forma ângulos de medida $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{\pi}{3}$ com os eixos Ox e Oy, respectivamente.

Resolução.

Temos que $\vec{i} = (1,0,0)$ *e* $\vec{j} = (0,1,0)$ *são vetores diretores dos eixos* Ox *e* Oy*.*
Seja $r : X = (1,-2,3) + \lambda\,(m,n,p)$ *a reta pedida.*

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{|(m,n,p)\cdot(1,0,0)|}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}\sqrt{1^2}} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{|m|}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}; \qquad (*)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{|(m,n,p)\cdot(0,1,0)|}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}\sqrt{1^2}} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{|n|}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}. \qquad (**)$$

De $(*)$ *e* $(**)$ *temos*

$$|m| = \sqrt{2}|n|. \qquad (***)$$

De $(*)$ *e* $(***)$ *temos*

$$|p| = |n|. \qquad (****)$$

Levando as relações $(***)$ *e* $(****)$ *em conta, há quatro vetores diretores distintos (não paralelos) para* r*:*

$$\vec{u} = \left(\sqrt{2},1,1\right) \text{ ou} = \left(-\sqrt{2},1,1\right) \text{ ou} = \left(\sqrt{2},-1,1\right) \text{ ou} = \left(\sqrt{2},1,-1\right).$$

Conclusão:

$$\begin{cases} r : X = (1,-2,3) + \lambda\left(\sqrt{2},1,1\right) \\ r : X = (1,-2,3) + \lambda\left(-\sqrt{2},1,1\right) \\ r : X = (1,-2,3) + \lambda\left(\sqrt{2},-1,1\right) \\ r : X = (1,-2,3) + \lambda\left(\sqrt{2},1,-1\right) \end{cases}$$

são as retas pedidas.

Exercício 3.91 (**Resolvido**) A diagonal BC de um quadrado $ABCD$ está contida na reta $r : X = (1,0,0) + \lambda\,(0,1,1)$. Conhecendo $A\,(1,1,0)$, determine os outros três vértices.

Resolução.

Faça uma figura.

Temos $B(1,\lambda_0,\lambda_0)\in r$ *e* $C(1,\lambda_1,\lambda_1)\in r$.
Temos $\overrightarrow{AB}=(0,\lambda_0-1,\lambda_0)$ *e* $\overrightarrow{AC}=(0,\lambda_1-1,\lambda_1)$.
Como $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}\Rightarrow(0,\lambda_0-1,\lambda_0)\cdot(0,\lambda_1-1,\lambda_1)=0\Rightarrow\cdots$ *(faça)* $\Rightarrow\lambda_0=\frac{\lambda_1-1}{2\lambda_1-1}$. $(*)$
Temos $\overrightarrow{BC}=(0,\lambda_1-\lambda_0,\lambda_1-\lambda_0)$ *e sabemos da Geometria Euclidiana Plana que* $\|\overrightarrow{BC}\|=\sqrt{2}\|\overrightarrow{AC}\|$.
Como

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{|\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}|}{\|\overrightarrow{AC}\|.\|\overrightarrow{BC}\|}\Rightarrow\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{|\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}|}{\sqrt{2}\|\overrightarrow{AC}\|^2}\Rightarrow\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{|(0,\lambda_1-1,\lambda_1)\cdot(0,\lambda_1-\lambda_0,\lambda_1-\lambda_0)|}{\sqrt{2}\|(0,\lambda_1-1,\lambda_1)\|^2}\Rightarrow\cdots\ \textit{(faça)}\Rightarrow\lambda_0=0.$$

Logo, $B(1,0,0)$.
De $(*)$ *temos* $\lambda_1=1$. *Logo,* $C(1,1,1)$.
Finalmente, $D=A+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\Rightarrow\cdots$ *(faça)* $\Rightarrow D(1,0,1)$.

Faça uma figura.

Exercícios referentes à Seção 3.2 ***Planos***, página 101.

$Oxyz$ é sistema de coordenadas cartesianas ortogonais no espaço com base canônica $\mathcal{B}=\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$.

Exercício 3.92 (**Resolvido**) Escreva equações vetorial, paramétricas e geral para os planos descritos abaixo:

(**a**) π passa por $A(1,1,0)$ e $B(1,-1,1)$ e é paralelo ao vetor $\vec{v}=(2,1,0)$.

(**b**) π passa pelos pontos $A(1,0,1)$, $B(2,1,-1)$ e $C(1,-1,0)$.

Resolução.

(**a**) $\overrightarrow{AB}=(0,-2,1)$ *e* $\vec{v}=(2,1,0)$ *são vetores paralelos a* π, *mas não parlelos entre si, portanto, podem ser tomados como vetores diretores de* π.

Vetorial: $\pi: X=(1,1,0)+\lambda(0,-2,1)+\mu(2,1,0)$

Paramétricas: $\pi:\begin{cases}x=1+2\mu\\ y=1-2\lambda+\mu\\ z=\lambda\end{cases}$ $;\ \lambda,\mu\in\mathbb{R}$.

Geral: $\pi:\det\begin{bmatrix}x-1 & y-1 & z\\ 0 & -2 & 1\\ 2 & 1 & 0\end{bmatrix}=0\Rightarrow\pi:-x+2y+4z-1=0$

(**b**) *Vetores diretores:* $\overrightarrow{AB}$ *e* $\overrightarrow{AC}$. *(faça o resto)*

Exercício 3.93 (**Resolvido**) Verifique se $\pi_1=\pi_2$.

(**a**) $\pi_1: X=(1,2,1)+\lambda(1,-1,2)+\mu\left(-\frac{1}{2},\frac{2}{3},-1\right)$
$\pi_2: X=(1,2,1)+\alpha(-1,1,-2)+\beta(-3,4,-6)$

(**b**) $\pi_1: X=(0,0,0)+\lambda(1,1,0)+\mu(0,1,0)$
$\pi_2: X=(1,1,0)+\lambda(1,2,1)+\mu(0,-1,1)$

(**c**) $\pi_1: x-3y+2z+1=0$
$\pi_2: 2x-6y+4z+1=0$

(**d**) $\pi_1: x-\frac{y}{2}+2z-1=0$
$\pi_2: -2x+y-4z+2=0$

Resolução.

(**a**) $\vec{u}=(1,-1,2)$ *e* $\vec{a}=(-1,1,-2)$ *são paralelos e o mesmo ocorre com* $\vec{v}=\left(-\frac{1}{2},\frac{2}{3},-1\right)$ *e* $\vec{b}=(-3,4,-6)$. *Logo, os vetores diretores de* π_1 *e os vetores diretores de* π_2 *são paralelos a um mesmo plano. Esta informação junto ao fato de que* $A(1,2,1)\in\pi_1\cap\pi_2$ *permite que concluamos* $\pi_1=\pi_1$.

Obs.: *Poderíamos ter resolvido como no item* (**d**) *abaixo. (veja)* (**b**) *Vetor normal a* $\pi_1 : \vec{n}_1 = \det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = (0,0,1)$.

Vetor normal a $\pi_2 : \vec{n}_2 = \det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = (3,1,-1)$.

Como $\vec{n}_1$ *e* $\vec{n}_2$ *não são paralelos, concluimos que* $\pi_1 \neq \pi_2$.

(**c**) *Vetores normais:* $\vec{n}_1 = (1,-3,2)$ *e* $\vec{n}_2 = (2,-6,4) \Rightarrow$ *são paralelos. Logo,* $\pi_1 /\!/ \pi_2$.
O ponto $(-1,0,0) \in \pi_1$ *mas* $(-1,0,0) \notin \pi_2$.
Conclusão: $\pi_1 \neq \pi_2$.

(**d**) *Vetores normais:* $\vec{n}_1 = \left(1,-\frac{1}{2},2\right)$ *e* $\vec{n}_2 = (-2,1,-4) \Rightarrow$ *são paralelos. Logo,* $\pi_1 /\!/ \pi_2$.
O ponto $(1,0,0) \in \pi_1 \cap \pi_2$.
Conclusão: $\pi_1 = \pi_2$.

Obs.: *A equação geral de* π_2 *é obtida da equação geral de* π_1 *pela multiplicação por* -2. *Logo, as equações gerais são iguais, o que permite concluir* $\pi_1 = \pi_2$.

Exercício 3.94 (**Resolvido**) Escreva equações vetorial, paramétricas e geral para:

(**a**) Os três planos coordenados.

(**b**) Os planos que passam por $A\,(1,2,3)$ e são paralelos aos planos coordenados. Faça os três esboços dos gráficos destes planos em sistemas de coordenadas cartesianos ortogonais.

Resolução.

(**a**) π : *plano coordenado* xy. *Vetores diretores:* $\vec{i} = (1,0,0)$ *e* $\vec{j} = (0,1,0)$.
Vetorial: $\pi : X = (0,0,0) + \lambda\,(1,0,0) + \mu\,(0,1,0)$

Paramétricas: $\pi : \begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = 0 \end{cases}$

Geral: $\pi : \det \begin{bmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \pi : z = 0$

De modo análogo, obtém-se as equações para os planos coordenado xz $(y=0)$ *e* yz $(x=0)$. *(faça)*

(**b**) π *paralelo ao plano* xy *e passa por* $A = (1,2,3)$. *Vetores diretores:* $\vec{i} = (1,0,0)$ *e* $\vec{j} = (0,1,0)$.
Vetorial: $\pi : X = (1,2,3) + \lambda\,(1,0,0) + \mu\,(0,1,0)$.

Paramétricas: $\pi : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 + \mu \\ z = 3 \end{cases}$

Geral: $\pi : \det \begin{bmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \pi : z = 3$

Analogamente para os planos π *paralelos aos planos coordenados* xz $(y=2)$ *e* yz $(x=1)$. *(faça)*

Esboços: (faça...)

Exercício 3.95 (**Resolvido**) Escreva uma equação vetorial da reta r que é intersecção de π_1 e π_2:

$$r : \begin{cases} \pi_1 : X = (1,0,0) + \lambda\,(0,1,1) + \mu\,(1,2,1) \\ \pi_2 : X = (0,0,0) + \lambda\,(0,3,0) + \mu\,(-2,-1,-1) \end{cases}$$

Resolução.

Vetores normais aos planos: $\vec{n}_1 = (0,1,1) \times (1,2,1) = (-1,1,-1)$ *e* $\vec{n}_2 = (0,3,0) \times (-2,-1,-1) = (-3,0,6)$.

Um vetor diretor da reta r *que é intersecção de* π_1 *e* π_2 *possui* $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = (6,9,3)$ *como vetor diretor. Simplificando, podemos tomar* $\vec{u} = (2,3,1)$ *como vetor diretor de* r.

Um ponto $P\,(x_0,y_0,z_0)$ *de* r *deve satisfazer as equações de* π_1 *(para algum* $\lambda_0,\mu_0 \in \mathbb{R}$*) e* π_2 *(para algum*

$\lambda_1, \mu_1 \in \mathbb{R}$):

$$(1,0,0) + \lambda_0\,(0,1,1) + \mu_0\,(1,2,1) = (0,0,0) + \lambda_1\,(0,3,0) + \mu_1\,(-2,-1,-1) \Rightarrow \begin{cases} 1+\mu_0 = -2\mu_1 \\ \lambda_0 + 2\mu_0 = 3\lambda_1 - \mu_1 \\ \lambda_0 + \mu_0 = -\mu_1 \end{cases}$$

Tomando $\mu_0 = 0$, temos $\mu_1 = -\frac{1}{2}$, $\lambda_0 = \frac{1}{2}$ e $\lambda_1 = 0$.
Logo, $P = (1,0,0) + \frac{1}{2}(0,1,1) + 0\,(1,2,1) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \in r$.

Conclusão: $r : \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) + \alpha\,(2,3,1)$.

(Obs.: equações vetoriais não são únicas, poderíamos ter escolhido outros valores para os parâmetros acima)

Exercício 3.96 (**Resolvido**) Decomponha o vetor $\vec{v} = (1,2,4)$ em duas parcelas, sendo uma delas paralela ao plano $X = (1,1,0) + \lambda\,(1,0,1) + \mu\,(0,1,-1)$ e outra paralela à reta $X = (0,0,0) + \alpha\,(2,1,0)$.

Resolução.

Se $\vec{v} = \vec{a} + \vec{b}$, então $\vec{a}$ paralelo ao plano deve ser da forma $\vec{a} = \lambda_0\,(1,0,1) + \mu_0\,(0,1,-1)$ para algum $\lambda_0, \mu_0 \in \mathbb{R}$ e $\vec{b}$ paralelo à reta deve ser da forma $\alpha_0\,(2,1,0)$ para algum $\alpha_0 \in \mathbb{R}$.
Logo: $(1,2,4) = \lambda_0\,(1,0,1) + \mu_0\,(0,1,-1) + \alpha_0\,(2,1,0) \Rightarrow \cdots$ (faça) $\Rightarrow \alpha_0 = -5$, $\lambda_0 = 11$ e $\mu_0 = 7$.
Logo, $\vec{v} = (11,7,4) + (-10,-5,0)$ satisfaz o problema.

Exercício 3.97 (**Resolvido**) Verifique se a reta r está contida no plano π.

(**a**) $r : X = (1,0,0) + \lambda\,(2,-1,0)$ e $\pi : x + 2y + 3z = 1$.

(**b**) $r : x - 1 = 2y = 4 - z$ e $\pi : x + 2y - 2z + 1 = 0$.

Resolução.

(**a**) *Vetor normal a $\pi : \vec{n} = (1,2,3)$. Vetor diretor de $r : \vec{u} = (2,-1,0)$.*
Produto escalar: $(1,2,3)\cdot(2,-1,0) = 0$. Logo, $r /\!/ \pi$.
Finalmente, observando que $(1,0,0) \in r \cap \pi$, concluimos $r \subset \pi$.

(**b**) *Vetor normal a $\pi : \vec{n} = (1,2,-2)$. Vetor diretor de $r : \vec{u} = \left(1, \frac{1}{2}, -1\right)$ (veja as equações simétricas de r).*
Produto escalar: $(1,2,-2)\cdot\left(1,\frac{1}{2},-1\right) = 4 \neq 0$. Logo, $r \pitchfork \pi$ e, portanto, $r \not\subset \pi$.

Exercício 3.98 (**Resolvido**) Sejam $P\,(4,1,-1)$ e $r : X = (2,4,1) + \lambda\,(1,-1,2)$.

(**a**) Mostre que $P \notin r$.

(**b**) Obtenha a equação geral do plano determinado por r e P.

Resolução.

(**a**) *Se $P \in r$, então deveria existir $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tal que $(4,1,-1) = (2,4,1) + \lambda_0\,(1,-1,2)$ que é um sistema incompatível (verifique). Logo, $P \notin r$.*

(**b**) *Seja $A\,(2,4,1) \in r$ e tomemos o vetor $\overrightarrow{AP} = (2,-3,-2)$.*
Logo, $\vec{u} = (1,-1,2)$ e $\overrightarrow{AP} = (2,-3,-2)$ podem ser tomados como vetores diretores de π.

Conclusão: $\pi : \det \begin{bmatrix} x-2 & y-4 & z-1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & -2 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \pi : 8x + 6y - z - 39 = 0$.

Exercício 3.99 (**Resolvido**) Obtenha um vetor normal a π nos seguintes casos:

(**a**) π passa pelos pontos $A\,(1,1,1)$, $B\,(1,0,1)$ e $C\,(1,2,3)$.

(**b**) $\pi : \begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = 2 - \alpha + \beta \\ z = \alpha - 2\beta \end{cases}$

Resolução.

(a) $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \cdots$ *(faça)* $= (-2, 0, 0)$. *Simplificando:* $\vec{n}_1 = (1, 0, 0)$ *também é normar a* π.

(b) $\vec{n} = (1, -1, 1) \times (0, 1, -2) = \cdots$ *(faça)* $= (1, 2, 1)$.

Exercício 3.100 (**Resolvido**) Obtenha a equação geral do plano que passa por $P(1, 1, 2)$ e é paralelo a $\pi : x - y + 2z + 1 = 0$.

Resolução.

Seja π_1 *o plano pedido.*
Como $\vec{n} = (1, -1, 2)$ *é normal a* π *e* $\pi_1 // \pi \Rightarrow \vec{n}$ *é veto normal a* π_1. *Logo, a equação geral de* π_1 *deve ser da forma* $x - y + 2z + d = 0$.
Como $P \in \pi_1 \Rightarrow 1 - 1 + 2(2) + d = 0 \Rightarrow d = -4$.

Conclusão: $\pi_1 : x - y + 2z - 4 = 0$.

Exercício 3.101 (**Resolvido**) Dê a equação geral do plano π que passa pela origem e é perpendicular à reta que passa por $A(1, 1, 1)$ e $B(2, 1, -1)$.

Resolução.

Como π *é perpendicular à reta* r *que passa por* A *e* B*, então o vetor* $\overrightarrow{AB}$ *é normal a* π. *Sendo* $\overrightarrow{AB} = (1, 0, -2)$*, temos que a equação geral de* π *possui a forma* $x - 2z + d = 0$.
Como $(0, 0, 0) \in \pi$*, temos* $0 - 2(0) + d = 0 \Rightarrow d = 0$.

Conclusão: $\pi : x - 2z = 0$.

Exercício 3.102 (**Resolvido**) Decomponhe o vetor $\vec{v} = -3\vec{i} + 4\vec{j} - 5\vec{k}$ como soma de dois vetores, um paralelo e outro ortogonal ao plano

$$\pi : \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = -2 \\ z = \lambda - \mu \end{cases}$$

Resolução.

Vetores diretores de $\pi : \vec{u} = (-1, 0, 1)$ *e* $\vec{v} = (0, 0, -1)$. *Vetor normal a* $\pi : \vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = \cdots$ *(faça)* $= (0, -1, 0)$.
Seja $\vec{v} = \vec{a} + \vec{b}$.
Como $\vec{a}$ *é paralelo a* π*, deve ser da forma* $\lambda_0 (-1, 0, 1) + \mu_0 (0, 0, -1)$ *para algum* $\lambda_0, \mu_0 \in \mathbb{R}$. *Como* $\vec{b}$ *é paralelo a* $\vec{n}$*, deve ser da forma* $\alpha_0 (0, -1, 0)$ *para algum* $\alpha_0 \in \mathbb{R}$.
Logo: $(-3, 4, -5) = \lambda_0 (-1, 0, 1) + \mu_0 (0, 0, -1) + \alpha_0 (0, -1, 0) \Rightarrow \cdots$ *(faça)* $\Rightarrow \alpha_0 = -4$, $\lambda_0 = 3$ *e* $\mu_0 = 8$.

Conclusão: $\vec{v} = (-3, 0, -5) + (0, 4, 0)$ *satisfaz o problema.*

Exercício 3.103 (**Resolvido**) Dê uma equação vetorial para a reta que é paralela à reta

$$r : \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$$

e passa pelo ponto $P(1, 1, 1)$.

Resolução.

Seja s *a reta pedida.*
Temos que r *é dada pela intersecção de dois planos:* π_1 *e* π_2. *Logo,* $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2$ *é um vetor diretor de* r. *Como* $s // r$*, temos que* $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2$ *é também vetor diretor de* s.
Desta forma, $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = (1, 1, 1) \times (1, -1, -1) = \cdots$ *(faça)* $\Rightarrow \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = (0, 2, -2)$.

Conclusão: $r : X = (1, 1, 1) + \lambda (0, 2, -2)$.

Exercício 3.104 (**Resolvido**) Estude a posição relativa da reta r e do plano π nos seguintes casos (se r for concorrente com π, então determine o ponto de intesecção):

(**a**) $r : X = (1, 1, 0) + \lambda\,(0, 1, 1)$ e $\pi : x - y - z = 2$

(**b**) $r : \frac{x-1}{2} = y = z$ e $\pi : X = (3, 0, 1) + \lambda\,(1, 0, 1) + \mu\,(2, 2, 0)$

(**c**) $r : \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + y - z - 1 = 0 \end{cases}$ e $\pi : X = \left(0, \frac{1}{2}, 0\right) + \lambda\left(1, -\frac{1}{2}, 0\right) + \mu\,(0, 1, 1)$

Resolução.

(**a**) *Vetor diretor de* $r : \vec{u} = (0, 1, 1)$. *Vetor normal a* $\pi : \vec{n} = (1, -1, -1)$.
Produto vetorial: $(0, 1, 1) \cdot (1, -1, -1) = -2 \neq 0$. *Logo,* r *é concorrente com* π.
O ponto de intersecção $P\,(x_0, y_0, z_0)$ *deve satisfazer as duas equações. Logo,* $P\,(1, 1 + \lambda_0, \lambda_0)$ *para algum* $\lambda_0 \in \mathbb{R}$. *Substituindo em* $x - y - z = 2$, *temos* $1 - 1 - \lambda_0 - \lambda_0 = 2 \Rightarrow \lambda_0 = -1$.

Conclusão: $P\,(1, 0, -1)$

(**b**) *Vetor diretor de* $r : \vec{u} = (2, 1, 1)$. *Vetor normal a* $\pi : \vec{n} = (1, 0, 1) \times (2, 2, 0) = \cdots$ *(faça)* $= (-2, 2, 2)$.
Produto vetorial: $(2, 1, 1) \cdot (-2, 2, 2) = 0$. *Logo,* $r /\!/ \pi$.
Além disso, $P\,(1, 0, 0) \in r$ *mas* $P \notin \pi$ *(verifique).*

Conclusão: $r /\!/ \pi$ *mas* $r \not\subset \pi$.

(**c**) *Vetor diretor de* $r : \vec{u} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = (1, -1, 1) \times (2, 1, -1) = \cdots$ *(faça)* $= (0, 3, 3)$. *Vetor normal a* $\pi : \vec{n} = \left(1, -\frac{1}{2}, 0\right) \times (0, 1, 1) = \cdots$ *(faça)* $= \left(-\frac{1}{2}, -1, 1\right)$.
Produto vetorial: $(0, 3, 3) \cdot \left(-\frac{1}{2}, -1, 1\right) = 0$. *Logo,* $r /\!/ \pi$.
Além disso, $P = \left(\frac{1}{3}, 0, -\frac{1}{3}\right) \in r \cap \pi$ *(verifique).*

Conclusão $r \subset \pi$.

Exercício 3.105 (**Resolvido**) Calcule:

(**a**) $m \in \mathbb{R}$ tal que $r : X = (1, 1, 1) + \lambda\,(2, m, 1)$ seja paralela não contida em $\pi : X = (0, 0, 0) + \alpha\,(1, 2, 0) + \beta\,(1, 0, 1)$.

(**b**) $m, n \in \mathbb{R}$ tais que $r : X = (n, 2, 0) + \lambda\,(2, m, m)$ esteja contida em $\pi : x - 3y + z = 1$.

(**c**) $m \in \mathbb{R}$ tal que $r : \frac{x-1}{m} = \frac{y}{2} = \frac{z}{m}$ seja transversal a $\pi : x + my + z = 0$.

Resolução.

(**a**) *Vetor diretor de* $r : \vec{u} = (2, m, 1)$. *Vetor normal a* $\pi : \vec{n} = (1, 2, 0) \times (1, 0, 1) = \cdots$ *(faça)* $= (2, -1, -2)$.
Para que $r /\!/ \pi$ *devemos ter* $(2, m, 1) \cdot (2, -1, -2) = 0 \Rightarrow m = 2$. *Além disso, temos que* r *não está contida em* π *pois* $(1, 1, 1) \in r$ *mas* $(1, 1, 1) \notin \pi$ *(verifique).*

(**b**) *Vetor diretor de* $r : \vec{u} = (2, m, m)$. *Vetor normal a* $\pi : \vec{n} = (1, -3, 1)$.
Para que $r /\!/ \pi$ *devemos ter* $(2, m, m) \cdot (1, -3, 1) = 0 \Rightarrow m = 1$.
Além disso, para que $r \subset \pi$ *vemos ter um ponto em comum. Tomemos* $P\,(n, 2, 0) \in r$. *Para que* $P \in \pi$ *devemos ter* $n - 3\,(2) + 0 = 1 \Rightarrow n = 7$.

(**c**) *Vetor diretor de* $r : \vec{u} = (m, 2, m)$. *Vetor normal a* $\pi : \vec{n} = (1, m, 1)$.
Para que r *seja concorrente com* π *devemos ter* $(m, 2, m) \cdot (1, m, 1) \neq 0 \Rightarrow m \neq 0$.

Exercício 3.106 (**Resolvido**) Estude a posição relativa de π_1 e π_2 (se $\pi_1 \cap \pi_2 = r$, então dê uma equação vetorial para r).

(**a**) $\pi_1 : X = (1, 1, 1) + \lambda\,(0, 1, 1) + \mu\,(-1, 2, 1)$
$\pi_2 : (1, 0, 0) + \lambda\,(1, -1, 0) + \mu\,(-1, -1, -2)$

(**b**) $\pi_1 : 2x - y + 2z - 1 = 0$
$\pi_2 : 4x - 2y + 4z = 0$

(**c**) $\pi_1 : x - y + 2z - 2 = 0$
$\pi_2 : X = (0, 0, 1) + \lambda\,(1, 0, 3) + \mu\,(-1, 1, 1)$

Resolução.

(**a**) *Vetor normal a* $\pi_1 : \vec{n}_1 = (0,1,1) \times (-1,2,1) = \cdots$ *(faça)* $= (-1,-1,1)$. *Vetor normal a* $\pi_2 : \vec{n}_2 = (1,-1,0) \times (-1,-1,-2) = \cdots$ *(faça)* $= (2,2,-2)$.

Logo, $\vec{n}_1 /\!/ \vec{n}_2$ *e, portanto,* $\pi_1 /\!/ \pi_2$.

Além disso, $P(1,0,0) \in \pi_1 \cap \pi_2$. *(verifique)*

Conclusão: $\pi_1 = \pi_2$.

(**b**) *Vetor normal a* $\pi_1 : \vec{n}_1 = (2,-1,2)$. *Vetor normal a* $\pi_2 : \vec{n}_2 = (4,-2,4)$.

Logo, $\vec{n}_1 /\!/ \vec{n}_2$ *e, portanto,* $\pi_1 /\!/ \pi_2$.

Além disso, $P(0,-1,0) \in \pi_1$ *mas* $P \notin \pi_2$. *(verifique)*

Conclusão: $\pi_1 \neq \pi_2$.

(**c**) *Vetor normal a* $\pi_1 : \vec{n}_1 = (1,-1,2)$. *Vetor normal a* $\pi_2 : \vec{n}_2 = (1,0,3) \times (-1,1,1) = \cdots$ *(faça)* $= (-3,-4,1)$.

Logo, $\vec{n}_1$ *e* $\vec{n}_2$ *são não paralelos e, portanto,* π_1 *e* π_2 *são concorrentes.*

Quanto à reta r *de intersecção:* $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = (7,-7,-7)$ *(verifique) é vetor diretor de* r. *Simplificando:* $\vec{u} = (1,-1,-1)$ *é vetor diretor de* r.

Um ponto de intersecção: $P(0,0,1) \in r \cap \pi$. *(verifique)*

Conclusão: $r : X = (0,0,1) + \alpha(1,-1,-1)$.

Exercício 3.107 (**Resolvido**) Calcule $m \in \mathbb{R}$ para que

$$\begin{aligned} &\pi_1 : X = (1,1,0) + \lambda(m,1,1) + \mu(1,1,m) \ \text{ e} \\ &\pi_2 : 2x + 3y + 2z + 1 = 0 \end{aligned}$$

sejam paralelos distintos.

Resolução.

Vetor normal a $\pi_1 : \vec{n}_1 = (m,1,1) \times (1,1,m) = \cdots$ *(faça)* $= \left(m-1, 1-m^2, m-1\right)$.

Vetor normal a $\pi_2 : \vec{n}_2 = (2,3,2)$.

Para que $\pi_1 /\!/ \pi_2$ *devemos ter* $\vec{n}_1 = \alpha \vec{n}_2 \Rightarrow \begin{cases} m-1 = 2\alpha \\ 1-m^2 = 3\alpha \\ m-1 = 2\alpha \end{cases} \Rightarrow m = -\frac{5}{2}$ *ou* $m = 1$.

Logo:

$$\begin{aligned} &\pi_1 : X = (1,1,0) + \lambda\left(-\tfrac{5}{2},1,1\right) + \mu\left(1,1,-\tfrac{5}{2}\right) \ \textit{ ou} \\ &\pi_1 : X = (1,1,0) + \lambda(1,1,1) + \mu(1,1,1) \ \ (m = 1 \ \textit{não serve pois } \vec{u} = \vec{v} = (1,1,1)) \end{aligned}$$

Portanto, $m = -\frac{5}{2}$:

$$\begin{aligned} &\pi_1 : X = (1,1,0) + \lambda\left(-\tfrac{5}{2},1,1\right) + \mu\left(1,1,-\tfrac{5}{2}\right) \ \textit{ e} \\ &\pi_2 : 2x + 3y + 2z + 1 = 0 \end{aligned}$$

Finalmente, percebemos que $(1,1,0) \in \pi_1$ *mas* $(1,1,0) \notin \pi_2$.

Conclusão $\pi_1 /\!/ \pi_2$ *mas* $\pi_1 \cap \pi_2 = \varnothing$.

Exercício 3.108 (**Resolvido**) Mostre que os planos

$$\begin{aligned} &\pi_1 : X = (0,0,0) + \lambda(-1,m,1) + \mu(2,0,1) \ \text{ e} \\ &\pi_2 : X = (1,2,3) + \alpha(m,1,0) + \beta(1,0,m) \end{aligned}$$

são concorrentes para qualquer $m \in \mathbb{R}$.

Resolução.

Vetores normais: $\vec{n}_1 = (-1,m,1) \times (2,0,1) = (m,3,-2m)$ *e* $\vec{n}_2 = (m,1,0) \times (1,0,m) = \left(m,-m^2,-1\right)$.

Observemos que $\vec{n}_1$ *e* $\vec{n}_2$ *são sempre não paralelos, independente de* m*, pois o sistema* $(m,3,-2m) =$

$\alpha\left(m,-m^2,-1\right)$ é incompatível para qualquer $\alpha\in\mathbb{R}$.

Conclusão: π_1 e π_2 são concorrentes.

Exercício 3.109 (**Resolvido**) Verifique se r é perpendicular a π nos seguintes casos:

(**a**) $r:\begin{cases} x+y+z=1\\ 2x+y-z=0\end{cases}$ e $\pi: x-y+z=1$

(**b**) $r:\begin{cases} x-y-z=0\\ x+y=0\end{cases}$ e $\pi: 2x-2y+4z=1$

Resolução.

(**a**) *Vetor diretor para $r:\vec{n}_1\times\vec{n}_2=(1,1,1)\times(2,1,-1)=(-2,3,-1)$. Um vetor paralelo a $\pi:\overrightarrow{AB}=(0,-1,-1)$ (Tome $A=(0,0,1)$ e $B=(0,-1,0)\in\pi$).*

Produto escalar: $(-2,3,-1)\cdot(0,-1,-1)=-2\neq 0$.

Conclusão r não é ortogonal a π.

(**b**) *Vetor diretor para $r:\vec{n}_1\times\vec{n}_2=(1,-1,-1)\times(1,1,0)=(1,-1,2)$. Um vetor paralelo a $\pi:\overrightarrow{AB}=\left(\frac{1}{2},0,-\frac{1}{4}\right)$ (Tome $A=\left(0,0,\frac{1}{4}\right)$ e $B=\left(\frac{1}{2},0,0\right)\in\pi$).*

Produto escalar: $(1,-1,2)\cdot\left(\frac{1}{2},0,-\frac{1}{4}\right)=0$.

Conclusão $r\perp\pi$.

Exercício 3.110 (**Resolvido**) Ache a equação geral do plano π que passa por $P(0,1,-1)$ e é perpendicular à reta $r: X=(0,0,0)+\lambda(1,-1,1)$.

Resolução.

Se π é perpendicular a r, então um vetor diretor de r é normal a π, ou seja, $\vec{n}=(1,-1,1)$ é normal a π. Logo, sua equação geral é $x-y+z+d=0$. Como $P\in\pi\Rightarrow 0-1-1+d=0\Rightarrow d=2$.

Conclusão: $\pi: x-y+z+2=0$.

Exercício 3.111 (**Resolvido**) Ache:

(**a**) O ponto simétrico de $P(1,4,2)$ em relação a $\pi: x-y+z-2=0$.

(**b**) O ponto simétrico de $P(0,2,1)$ em relação a $r: X=(1,0,0)+\lambda(0,1,-1)$.

Resolução.

(**a**) *$\vec{n}=(1,-1,1)$ é normal a π e pode ser um vetor diretor da reta que contém P e é ortogonal a π. Logo, $X=(1,4,2)+\lambda(1,-1,1)$ é a equação vetorial de r ortogonal a π que contém P.*

O ponto de intersecção $Q=r\cap\pi$ é $Q(2,3,3)$ (verifique: $\lambda_0=1$).

Logo, o ponto $T=(x_0,y_0,z_0)\in r$ procurado é tal que

$$\overrightarrow{TQ}=\overrightarrow{QP}\Rightarrow(2-x_0,3-y_0,3-z_0)=(-1,1,-1)\Rightarrow x_0=3,\ y_0=2,\ z_0=4$$

Logo, $(3,2,4)$ é o ponto procurado.

Esboço: faça!

(**b**) *Seja $Q(1,\lambda_0,-\lambda_0)\in r$ tal que $\overrightarrow{QP}\perp\vec{u}$, sendo $\vec{u}=(0,1,-1)$ um vetor diretor de r. Logo, $(-1,2-\lambda_0,1+\lambda_0)\cdot(0,1,-1)=0\Rightarrow\lambda_0=\frac{1}{2}$.*

Logo, $Q\left(1,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$ e $\overrightarrow{QP}=\left(-1,\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$.

Seja $T=(x_0,y_0,z_0)\in r$ o ponto procurado. Logo,

$$\overrightarrow{TQ}=\overrightarrow{QP}\Rightarrow\left(1-x_0,\frac{1}{2}-y_0,-\frac{1}{2}-z_0\right)=\left(-1,\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)\Rightarrow x_0=2,\ y_0=-1,\ z_0=-2$$

Conclusão: $(2,-1,-2)$ é o ponto procurado.

Esboço: Faça!

Exercício 3.112 (**Resolvido**) Dados os planos $\pi_1 : x - y + z + 1 = 0$ e $\pi_2 : x + y - z - 1 = 0$, determine o plano que contém $\pi_1 \cap \pi_2$ e é ortogonal ao vetor $(1, 1, -1)$.

Resolução.

Como o plano π *procurado é ortogonal ao vetor* $(1,1,-1)$*, então* $\vec{n} = (1,1,-1)$ *e, portanto, a equação geral de* π *é* $x + y - z + d = 0$.

Mas $P = (0,0,-1) \in \pi_1 \cap \pi_2$ *(verifique). Logo,* $0 + 0 - (-1) + d = 0 \Rightarrow d = -1$.

Conclusão: $\pi : x + y - z - 1 = 0$.

Exercício 3.113 (**Resolvido**) O vértice de uma pirâmide regular de base quadrada é $P\left(\sqrt{2}, 2, 0\right)$ e sua base $ABCD$ está contida no plano $\pi : x - z = 0$. Sendo $A(0,2,0)$, determine os outros três vértices e o volume da pirâmide.

Resolução.

Esboço: faça!

Sejam $\vec{n} = (1,0,-1)$ *vetor normal a* π *e* $\overrightarrow{AP} = \left(\sqrt{2}, 0, 0\right)$.

Seja M *a projeção ortogonal de* P *sobre* π*, ou seja* $||\overrightarrow{MP}||$ *é a altura da pirâmide.*

Temos que $\operatorname{proj}_{\vec{n}} \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{MP} \Rightarrow \dfrac{\left(\sqrt{2},0,0\right)\cdot(1,0,-1)}{\left(\sqrt{1+1}\right)^2}(1,0,-1) = \overrightarrow{MP}$*, ou seja,*

$$\overrightarrow{MP} = \left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Como $P = M + \overrightarrow{MP} \Rightarrow \left(\sqrt{2},2,0\right) = M + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$*, ou seja:*

$$M = \left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}, 2, \tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Logo, $\overrightarrow{MA} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Desta forma:

$$C = M - \overrightarrow{MA} = \left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}, 2, \tfrac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left(-\tfrac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(\sqrt{2}, 2, \sqrt{2}\right)$$

Seja $E = (x_0, y_0, x_0) \in \pi$ *tal que* $\overrightarrow{ME} \perp \overrightarrow{MA}$ *e* $||\overrightarrow{ME}|| = ||\overrightarrow{MA}||$ $(E$ *é o ponto* B *ou o ponto* $D)$ *ou seja:*

$$\left(x_0 - \tfrac{\sqrt{2}}{2}, y_0 - 2, x_0 - \tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot\left(-\tfrac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0 \text{ e}$$
$$\sqrt{\left(x_0 - \tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + (y_0 - 2)^2 + \left(x_0 - \tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{2\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}$$

A 1^a*. equação implica* $x_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ *que, substituido na* 2^a*., implica* $y_0 = 3$ *ou* $y_0 = 1$*. (verifique)*

Logo, $B = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 3, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ *e* $D = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Quanto ao volume:

$$V = 4\left(\tfrac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MP}\right]\right|\right) = \tfrac{2}{3}\left|\det\begin{bmatrix} -\sqrt{2}/2 & 0 & -\sqrt{2}/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{2/2} & 0 & -\sqrt{2}/2 \end{bmatrix}\right| = \tfrac{2}{3}.$$

Exercício 3.114 (**Resolvido**) Verifique se os planos são ortogonais:

(**a**) $\pi_1 : X = (1,-3,4) + \lambda(1,0,3) + \mu(0,1,3)$
$\pi_2 : X = (0,0,0) + \lambda(1,1,6) + \mu(1,-1,0)$

(**b**) $\pi_1 : X = (1,1,1) + \lambda(-1,0,-1) + \mu(4,1,1)$
$\pi_2 : X = (3,1,1) + \lambda(1,-3,-1) + \mu(3,1,0)$

Resolução.

(**a**) *Vetores normais:* $\vec{n}_1 = (3, -3, 1)$ *e* $\vec{n}_2 = (6, 6, -2)$. *Logo,* $(3, -3, 1) \cdot (6, 6, -2) = -2 \neq 0$. *Conclusão* $\pi_1 \not\perp \pi_2$.

(**b**) *Vetores normais:* $\vec{n}_1 = (1, -3, -1)$ *e* $\vec{n}_2 = (1, -3, 10)$. *Logo,* $(1, -3, -1) \cdot (1, -3, 10) = 0$. *Conclusão:* $\pi_1 \perp \pi_2$.

Exercício 3.115 (**Resolvido**) Ache a equação geral do plano que passa por $(2, 1, 0)$ e é ortogonal aos planos $x + 2y - 3z + 4 = 0$ e $8x - 4y + 16z - 1 = 0$.

Resolução.

Nessas condições, os vetores normais $\vec{n}_1 = (1, 2, -3)$ *e* $\vec{n}_2 = (8, -4, 16)$ *podem ser tomados como vetores diretores do plano* π *procurado. Logo,* $\pi : X = (2, 1, 0) + \lambda (1, 2, -3) + \mu (8, -4, 16)$. *Equação geral:* $\pi : x - 2y - z = 0$.

Exercício 3.116 (**Resolvido**) Ache um vetor diretor da reta paralela ao plano $x + y + z = 0$ e que forma 45° com o plano $x - y = 0$.

Resolução.

Seja $\vec{u} = (m, n, p)$ *vetor diretor da reta pedida.*
Como $\vec{n} = (1, -1, 0)$ *é normal a* $\pi_2 : x - y = 0$, *temos*

$$\operatorname{sen}(45^\circ) = \frac{|(m,n,p)\cdot(1,-1,0)|}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}\sqrt{2}} \Rightarrow |m - n| = \sqrt{m^2 + n^2 + p^2} \Rightarrow p^2 = -2mn. \ (*)$$

Mas $\vec{u}$ *é paralelo a* $\pi_1 : x + y + z = 0$. *Logo,* $(m, n, p) \cdot (1, 1, 1) = 0 \Rightarrow m + n + p = 0$. $(**)$
Das equações $(*)$ *e* $(**)$ *temos*

$$-2mn = (m + n)^2 \Rightarrow m^2 + 4nm + n^2 = 0 \Rightarrow m = -2n \pm \sqrt{3}n; \ (\textit{resolva a eq. } 2^o\textit{. grau na variável } m)$$

Substituindo em $(**)$ *temos* $p = 2n \mp \sqrt{3}n - n = n \mp \sqrt{3}n$.

Conclusão: $\vec{u} = (m, n, p) = \left(-2n \pm \sqrt{3}n, n, n \mp \sqrt{3}n\right)$. *Simplificando:*

$$\left(-2 + \sqrt{3}, 1, 1 - \sqrt{3}\right) \ \textit{e} \ \left(-2 - \sqrt{3}, 1, 1 + \sqrt{3}\right)$$

são os vetores pedidos.

Exercício 3.117 (**Resolvido**) Calcule a medida dos ângulos entre a diagonal de um cubo e suas faces.

Resolução.

Situando o cubo com três faces contidas nos planos coordenados, temos que $\vec{u} = (1, 1, 1)$ *é um vetor diretor para para a diagonal.*
Portanto, basta calcular o ângulo entre $\vec{u}$ *e o plano* xy, *cuja equação é* $z = 0$ *e que possui* $\vec{n} = (0, 0, 1)$ *como vetor normal.*
Logo, $\operatorname{sen}(\theta) = \frac{|(0,0,1)\cdot(1,1,1)|}{\sqrt{1}\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \theta = \operatorname{arcsen}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

Esboço: Faça!

Exercício 3.118 (**Resolvido**) Ache a equação geral de um plano que contém a reta $r : \begin{cases} x = z + 1 \\ y = z - 1 \end{cases}$ e que forma ângulo de $\frac{\pi}{3}$ radianos com o plano $x + 2y - 3z + 2 = 0$.

Resolução.

Temos que o plano procurado pertence ao feixe de planos que contém r *e, portanto, possui equação geral* $\alpha (x - z - 1) + \beta (y - z + 1) = 0$, *ou seja,* $\alpha x + \beta y + (-\alpha - \beta) z - \alpha + \beta = 0$. *Logo,* $\vec{n}_1 = (\alpha, \beta, -\alpha - \beta)$ *é vetor normal a plano procurado.*
Temos $\vec{n}_2 = (1, 2, -3)$ *vetor normal a* $x + 2y - 3z + 2 = 0$.
Logo, $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{|(\alpha,\beta,-\alpha-\beta)\cdot(1,2,-3)|}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+(-\alpha-\beta)^2}\sqrt{14}} \Rightarrow 3\alpha^2 + 11\alpha\beta + 6\beta^2 = 0$ (*verifique*). *Resolvendo a equação do* 2^o. *grau*

na variável α, temos $\alpha = -3\beta$ ou $\alpha = -\frac{2}{3}\beta$.

Substituindo na equação $\alpha x + \beta y + (-\alpha - \beta) z - \alpha + \beta = 0$, temos

$$-3x + y + 2z + 4 = 0 \text{ ou } -2x + 3y - z + 5 = 0$$

Exercício 3.119 (**Resolvido**) As faces de um tetraedro estão contidas nos planos coordenados e no plano $x+y+z+1 = 0$. Calcule seu volume.

Resolução.

Os vértices desse tetraedro são $O(0,0,0)$, $A(-1,0,0)$, $B(0,-1,0)$ e $C(0,0,-1)$ (verifique).

Logo, seu volume é dado por $\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\right]\right| = \frac{1}{6}\left|\det\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}\right| = \frac{1}{6}$.

Exercício 3.120 (**Resolvido**) Um cubo tem diagonal AB e uma de suas faces está contida no plano $x - y = 0$. Determine todos os seus vértices sabendo que $A(1,1,0)$ e $B\left(1,3,\sqrt{2}\right)$.

Resolução.

Esboço: Faça!

Observemos que

$$\overrightarrow{AC} = \text{proj}_{\vec{n}}\,\overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{AC} = \frac{(0,2,\sqrt{2})\cdot(1,-1,0)}{(\sqrt{2})^2}(1,-1,0) \Rightarrow \overrightarrow{AC} = (-1,1,0)$$

e que

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{AD} = \left(0,2,\sqrt{2}\right) - (-1,1,0) \Rightarrow \overrightarrow{AD} = \left(1,1,\sqrt{2}\right).$$

Logo, $C = A + \overrightarrow{AC} \Rightarrow C = (0,2,0)$ e $D = A + \overrightarrow{AD} \Rightarrow D = \left(2,2,\sqrt{2}\right)$.

Tomemos o ponto M médio de AD: $M = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Tomemos um vetor paralelo a $x - y = 0$ que seja ortogonal $\overrightarrow{AD}$ e que possua mesmo comprimento. Por exemplo: $\vec{u} = \left(1,1,-\sqrt{2}\right)$.

Logo, $\overrightarrow{ME} = \frac{1}{2}\left(1,1,-\sqrt{2}\right) \Rightarrow E = M + \overrightarrow{ME} = (2,2,0)$, $H = M - \overrightarrow{ME} = \left(1,1,\sqrt{2}\right)$, $G = E + \overrightarrow{AC} = (1,3,0)$ e $F = H + \overrightarrow{AC} = \left(0,2,\sqrt{2}\right)$.

Exercícios referentes à Seção 3.3 ***Distâncias***, página 106.

$Oxyz$ é sistema de coordenadas cartesianas ortogonais no espaço com base canônica $\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

Exercício 3.121 (**Respondido**) Calcule a distância entre:

(**i**) Os pontos $P(0,-1,0)$ e $Q(-1,1,0)$;
(**ii**) Os pontos $P(1,1,1)$ e $Q\left(e^{\ln(1)}, \text{sen}\left(\frac{21\pi}{2}\right), |i|\right)$;
(**iii**) O ponto $P(0,-1,0)$ e a reta $r: \begin{cases} x = 2z - 1 \\ y = z + 1 \end{cases}$;
(**iv**) O ponto $P(1,2,3)$ e a reta $r: \frac{x+3}{2} = \frac{y+10}{6} = \frac{z+49}{26}$;
(**v**) Entre as retas $r: \frac{-x+1}{2} = 2y = z$ e $s: X = (0,0,2) + \lambda\left(-2, \frac{1}{2}, 1\right)$;
(**vi**) Entre as retas $r: \frac{-x+1}{2} = 2y = z$ e $s: X = (-3,1,2) + \lambda(1,2,3)$;
(**vii**) Entre as retas $r: \frac{-x+1}{2} = 2y = z$ e $s: X = (-7,2,4) + \lambda(4,-1,-2)$;
(**viii**) Entre as retas $r: \frac{-x+1}{2} = 2y = z$ e $s: X = (1,2,3) + \lambda(1,2,3)$;
(**ix**) O ponto $P(0,0,6)$ e o plano $\pi: x - 2y - 2z - 6 = 0$;
(**x**) O ponto $P(1,2,5)$ e o plano $\pi: 2x - 2y + z - 3 = 0$;
(**xi**) A reta $r: X = (1,6,3) + \lambda(1,0,2)$ e o plano $\pi: x + y + z - 10 = 0$;
(**xii**) A reta $r: X = (1,6,3) + \lambda(1,0,2)$ e o plano $\pi: 2x + y - z + 1 = 0$;
(**xiii**) A reta $r: X = (1,6,9) + \lambda(1,0,2)$ e o plano $\pi: 2x + y - z + 1 = 0$;
(**xiv**) Os planos $\pi_1: 2x - y + 2z + 9 = 0$ e $\pi_2: 4x - 2y + 4z - 21 = 0$;
(**xv**) Os planos $\pi_1: 2x - y + 2z + 9 = 0$ e $\pi_2: 10x - 5y + 10z + 45 = 0$;
(**xvi**) Os planos $\pi_1: 2x - y + 2z + 9 = 0$ e $\pi_2: x + 2y + 3z + 4 = 0$.

Respostas.

(**i**) $d(P,Q)=\sqrt{(-1+0)^2+(1-(-1))^2+(0-0)^2}=\sqrt{5}$.

(**ii**) $Q\left(1,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right),\sqrt{0^2+1^2}\right)\Rightarrow Q(1,1,1)$. *Logo,* $d(P,Q)=0$.

(**iii**) *Um vetor diretor para a reta* $r:\vec{u}=(2,1,1)$. *Um ponto da reta:* $A(1,2,1)$. *Logo,* $d(P,r)=\frac{||\overrightarrow{AP}\times\vec{u}||}{||\vec{u}||}=\frac{||(-2,-1,5)||}{\sqrt{4+1+1}}=\frac{\sqrt{4+1+25}}{\sqrt{6}}=\sqrt{\frac{30}{6}}=\sqrt{5}$.

(**iv**) *Como* $P\in r\Rightarrow d(P,r)=0$.

(**v**) *Como as retas são paralelas e distintas, basta calcular a distância de um ponto de uma à outra. Ex.* $P(0,0,2)\in s$ *e* $A(-3,1,2)\in r$. *Vetor diretor para* $r:\vec{u}=(-4,1,2)$. *Logo,* $d(P,r)=\frac{||\overrightarrow{AP}\times\vec{u}||}{||\vec{u}||}=\frac{||(-2,-6,-1)||}{\sqrt{16+1+2}}=\sqrt{\frac{4+36+1}{21}}=\sqrt{\frac{41}{21}}$.

(**vi**) *As retas são concorrentes:* $A(-3,1,2)\in r\cap s$. *Logo,* $d(r,s)=0$.

(**vii**) *Vetor diretor para* $r:\vec{u}=(-4,1,2)$. *Vetor diretor para* $s:\vec{v}=(4,-1,-2)$. *Logo, as retas são paralelas. Como* $P(-7,2,4)\in r\cap s$ *temos* $d(r,s)=0$ *(as retas são, na verdade, coincidentes).*

(**viii**) *Vetor diretor para* $r:\vec{u}=(-4,1,2)$. *Vetor diretor para* $s:\vec{v}=(1,2,3)$. *Logo, as retas podem ser reversas ou concorrentes. Neste caso, são reversas (verifique). Sejam* $P(1,0,0)\in r$ *e* $Q(1,2,3)\in s$. *Logo:* $d(r,s)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{PQ},\vec{u},\vec{v}\right]\right|}{||\vec{u}\times\vec{v}||}=\frac{1}{\sqrt{1+196+81}}=\frac{1}{\sqrt{278}}=\frac{\sqrt{278}}{278}$.

(**ix**) $d(P,\pi)=\frac{|0-2(0)-2(6)-6|}{||(1,-2,-2)||}=\frac{18}{\sqrt{1+4+4}}=6$.

(**x**) *Como* $P\in\pi\Rightarrow d(P,\pi)=0$.

(**xi**) *Como* r *e* π *são concorrentes, temos* $d(r,\pi)=0$.

(**xiii**) *Como* $r/\!/\pi$ *mas* $r\cap\pi=\varnothing$, *temos que calcular a distância entre um ponto de* r *a* π. *Seja* $P(1,6,3)\in r$. *Logo,* $d(r,\pi)=d(P,\pi)=\frac{|2(1)+6-3+1|}{||(2,1,-1)||}=\frac{6}{\sqrt{4+1+1}}=\frac{6}{\sqrt{6}}=\sqrt{6}$.

(**xiv**) *Como* $r\subset\pi$, *temos* $d(r,\pi)=0$.

(**xv**) *Os planos são paralelos não coincidentes. Logo, basta calcular a distância entre um ponto de* π_1 *a* π_2. *Seja* $P(0,9,0)\in\pi_1$. *Logo,* $d(\pi_1,\pi_2)=d(P,\pi_2)=\frac{|4(0)-2(9)+4(0)-21|}{||(4,-2,4)||}=\frac{39}{\sqrt{16+4+16}}=\frac{39}{6}=\frac{13}{2}$.

(**xv**) *Como os planos são coincidentes. Logo,* $d(\pi_1,\pi_2)=0$.

(**xvi**) *Como os planos são concorrentes. Logo,* $d(\pi_1,\pi_2)=0$.

Exercício 3.122 (**Resolvido**) Determine o ponto M de $\pi:2x-y+z-2=0$ tal que a soma das distâncias de M a $P(2,1,0)$ e de M a $Q(1,-1,-1)$ seja mínima.

Resolução.

Observando que $Q\in\pi$, *minimizar* $d(M,P)+d(M,Q)$ *significa escolher* $M=Q$ *pois, neste caso, teremos* $d(M,Q)=0$ *e a soma acima se reduz a* $d(P,Q)$ *e será mínima. Qualquer outro ponto* $M\neq Q$ *e* $M\in\pi$ *será tal que* MPQ *forma triângulo e, como sabemos da geometria euclidiana plana,* $d(M,P)+d(M,Q)>d(P,Q)$.

Exercício 3.123 (**Resolvido**) Ache os pontos da reta $r:x-1=2y=z$ que equidistam dos planos $\pi_1:2x-3y-4z-3=0$ e $\pi_2:4x-3y-2z+3=0$.

Resolução.

Um ponto de r *possui expressão* $P=\left(x_0,\frac{x_0-1}{2},x_0-1\right)$. *Logo,*

$$d(P,\pi_1)=d(P,\pi_2)\Rightarrow\frac{\left|2x_0-3\left(\frac{x_0-1}{2}\right)-4(x_0-1)-3\right|}{||(2,-3,-4)||}=\frac{\left|4x_0-3\left(\frac{x_0-1}{2}\right)-2(x_0-1)+3\right|}{||(4,-3,-2)||}\Rightarrow$$

$$\frac{\left|2x_0-3\left(\frac{x_0-1}{2}\right)-4(x_0-1)-3\right|}{\sqrt{4+9+16}}=\frac{\left|4x_0-3\left(\frac{x_0-1}{2}\right)-2(x_0-1)+3\right|}{\sqrt{4+9+16}}\Rightarrow x_0=-1\text{ ou }x_0=3\text{ (faça)}$$

Assim, $P_1(-1,-1,-2)$ *ou* $P_2(3,1,2)$.

Exercício 3.124 (**Resolvido**) As retas $r : x = y = z + 1$; $s : x - y = z + 1 = 0$ e $t : \begin{cases} x - y - z = 1 \\ x = 0 \end{cases}$ determinam com o plano $\pi : x + y - z + 1 = 0$ um tetraedro. Calcule a altura relativa à face situada no plano π.

Resolução.

Precisamos determinar o ponto de encontro das retas r, s *e* t *(ápice do tetraedro). Este ponto é* $P(0, 0, -1)$ *(verifique). Logo, basta calcular a distância do ponto* P *ao plano* π. *Assim,* $d(P, \pi) = \frac{|0+0+1+1|}{||(1,1,-1)||} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ *é a altura procurada.*

Exercício 3.125 (**Resolvido**) Mostre que todo plano que passa pelo ponto médio de um segmento PQ é equidistante de P e de Q. Verifique se vale a recíproca.

Resolução.

Sejam $P(x_0, y_0, z_0)$ *e* $Q(x_1, y_1, z_1)$. *Logo, o ponto médio de* PQ *é* $M\left(\frac{x_0+x_1}{2}, \frac{y_0+y_1}{2}, \frac{z_0+z_1}{2}\right)$. *Seja* $\pi : ax + by + cz + d = 0$ *plano que passa por* M. *Logo,* $d = -a\frac{x_0+x_1}{2} - b\frac{y_0+y_1}{2} - c\frac{z_0+z_1}{2}$.

Calculemos $d(P, \pi)$*:*

$$d(P,\pi) = \frac{\left|ax_0+by_0+cz_0-a\frac{x_0+x_1}{2}-b\frac{y_0+y_1}{2}-c\frac{z_0+z_1}{2}\right|}{||(a,b,c)||} = \frac{\left|\frac{ax_0}{2}+\frac{by_0}{2}+\frac{cz_0}{2}-\frac{ax_1}{2}-\frac{by_1}{2}-\frac{cz_1}{2}\right|}{||(a,b,c)||};\ (*)$$

Calculemos $d(Q, \pi)$*:*

$$d(Q,\pi) = \frac{\left|ax_1+by_1+cz_1-a\frac{x_0+x_1}{2}-b\frac{y_0+y_1}{2}-c\frac{z_0+z_1}{2}\right|}{||(a,b,c)||} = \frac{\left|-\frac{ax_0}{2}-\frac{by_0}{2}-\frac{cz_0}{2}+\frac{ax_1}{2}+\frac{by_1}{2}+\frac{cz_1}{2}\right|}{||(a,b,c)||};\ (**)$$

Comparando $(*)$ *e* $(**)$, *temos* $d(P, \pi) = d(Q, \pi)$.

A recíproca não é verdadeira, ou seja, nem todo plano equistante de P *e* Q *deve passar pelo ponto médio* M *de* PQ. *Um contra-exemplo: sejam* $P(0, -1, 1)$, $Q(0, 1, 1)$ *e* $\pi : z = 0$. *Temos* $d(P, \pi) = d(Q, \pi)$ *mas* $M(0, 0, 1) \notin \pi$.

Exercício 3.126 (**Resolvido**) Dê equações gerais dos planos paralelos ao plano π determinado pelas retas $r : \begin{cases} x + z = 5 \\ y = 1 \end{cases}$ e $s : X = (4, 1, 1) + \lambda(4, 2, -3)$ e que distam 2 de π.

Resolução.

Vetores diretores de $\pi : \vec{u} = (-1, 0, 1)$ *e* $\vec{v} = (4, 2, -3)$. *O ponto* $A(4, 1, 1) \in r \cap s$.

Logo, $\det\begin{bmatrix} x-4 & y-1 & z-1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & -3 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow -2x + y - 2z + 9 = 0$, *é equação geral de* π.

Planos paralelos a π *são da forma* $-2x + y - 2z + d = 0$. *Logo, um ponto* P *pertercente a este último pode ser* $P(0, -d, 0)$. *Assim,* $d(P, \pi) = 2 \Rightarrow \frac{|-2(0)-d-2(0)+9|}{||(-2,1,-2)||} = 2 \Rightarrow \frac{|-d+9|}{3} = 2 \Rightarrow d = 15$ *ou* $d = 3$.

Logo, os planos pedidos são $\pi_1 : -2x + y - 2z + 15 = 0$ *e* $\pi_2 : -2x + y - 2z + 3 = 0$.

Exercício 3.127 (**Resolvido**) Considere o tetraedro OABC sendo $O(0, 0, 0)$, $A(1, 0, 0)$, $B0, 2, 0$ e $C(0, 0, 3)$. Ache a equação geral do plano π paralelo à base ABC, distando $\frac{3}{7}$ dela, e que intersecta o tetraedro.

Resolução.

Vetores diretores de π *são* $\overrightarrow{AB} = (-1, 2, 0)$ *e* $\overrightarrow{AC} = (-1, 0, 3)$. *Um ponto de* π *é* $A(1, 0, 0)$.

Logo, $\det\begin{bmatrix} x-1 & y & z \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow 6x + 3y + 2z - 6 = 0$ *é equação geral de* π.

Um plano paralelo a π *possui equação* $6x+3y+2z+d = 0$. *Um ponto deste último pode ser* $P\left(0, 0, -\frac{d}{2}\right)$. *Assim,* $d(P, \pi) = \frac{3}{7} \Rightarrow \frac{|6(0)+3(0)+2\left(-\frac{d}{2}\right)-6|}{||(6,3,2)||} = \frac{3}{7} \Rightarrow \frac{|-d-6|}{7} = \frac{3}{7} \Rightarrow d = -3$ *ou* $d = -9$.

Logo, os planos paralelos à base ABC *e que ditam* $\frac{3}{7}$ *desta são* $\pi_1 : 6x+3y+2z-3 = 0$ *e* $\pi_2 : 6x+3y+2z-9 = 0$.

Resta saber qual destes intersecta o tetraedro. Para tanto, basta descobrir qual dois planos encontrados está mais próximo de $O(0,0,0)$. *Neste caso,* $d(O,\pi_1)=\frac{3}{7}$ *e* $d(O,\pi_2)=\frac{9}{7}$. *Conclusão:* $\pi_1 : 6x+3y+2z-3=0$ *é o plano pedido.*

Seção EXTRA de Exercícios Propostos: *Retas, Planos e Distâncias*

Exercícios referentes à Seção 3.1 ***Retas***, página 91.

$Oxyz$ é sistema de coordenadas cartesianas ortogonais no espaço com base canônica $\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

Exercício 3.128 Determinar a equação vetorial da reta definida pelos pontos $A\,(2,-3,4)$ e $B\,(1,-1,2)$ e verificar se os pontos $C\left(\frac{5}{2},-4,5\right)$ e $D\,(-1,3,4)$ pertencem a r.

Exercício 3.129 Dada a reta $r : (x,y,z) = (-1,2,3) + \lambda\,(2,-3,0)$, escrever equações paramétricas de r.

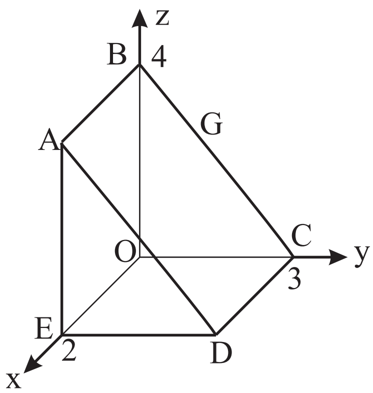
Exercício 3.130 Escrever equações paramétricas da reta que passa por $A\,(1,2,3)$ e é paralela à reta $r : (x,y,z) = (1,4,3) + \lambda\,(0,0,1)$.

Exercício 3.131 Dada a reta $r : \begin{cases} x = 2+\lambda \\ y = 3-\lambda \\ z = -4+2\lambda \end{cases}$, determinar o ponto de r tal que:
(a) a ordenada seja 6; (b) a abscissa seja igual à ordenada; (c) a cota seja o quádruplo da abscissa.

Exercício 3.132 A reta r passa pelo ponto $A\,(4,-3,-2)$ e é paralela à reta $s : \begin{cases} x = 1+3\lambda \\ y = 2-4\lambda \\ z = 3-\lambda \end{cases}$. Se $P\,(m,n,-5) \in r$, determinar m e n.

Exercício 3.133 Determinar equações paramétricas da reta que passa pelos pontos A e B nos seguintes casos:
(a) $A\,(1,-1,2)$ e $B\,(2,1,0)$; (b) $A\,(3,1,4)$ e $B\,(3,-2,2)$;
(c) $A\,(1,2,3)$ e $B\,(1,3,2)$; (d) $A\,(0,0,0)$ e $B\,(0,1,0)$.

Exercício 3.134 Com base na figura abaixo,



escrever as equações paramétricas da reta por:

Exercício 3.135 (a) A e B; (b) C e D; (c) A e D; (d) B e C; (e) D e E; (f) B e D.

Exercício 3.136 O ponto $P = (m,1,n)$ pertence à reta que passa por $A = (3,-1,4)$ e $B = (4,-3,-1)$. Determinar P.

Exercício 3.137 Seja o triângulo de vértices $A\,(-1,4,-2)$, $B\,(3,-3,6)$ e $C\,(2,-1,4)$. Escrever equações paramétricas da reta que passa pelo ponto médio do lado AB e pelo vértice oposto C.

Exercício 3.138 Os pontos $M_1\,(2,-1,3)$, $M_2\,(1,-3,0)$ e $M_3\,(2,1,-5)$ são pontos médios dos lados de um triângulo ABC. Obter as equações paramétricas da reta que contém o lado cujo ponto médio é M_1.

Exercício 3.139 Os vértices de um triângulo são os pontos $A\,(-1,1,3)$, $B\,(2,1,4)$ e $C\,(3,-1,-1)$. Obter equações paramétricas dos lados AB, AC e BC, e da reta r que contém a mediana relativa ao vértice B.

Exercício 3.140 Verificar se os pontos $P_1\,(5,-5,6)$ e $P_2\,(4,-1,12)$ pertencem à reta $r : \frac{x-3}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{-2}$.

Exercício 3.141 Determinar o ponto da reta $r : \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z}{4}$ que possui:
(a) abscissa 5; (b) ordenada 2.

Exercício 3.142 Obter o ponto de abscissa 1 da reta $r : \frac{2x+1}{3} = \frac{3y-2}{2} = z + 4$ e encontrar um vetor diretor de r que tenha ordenada 2.

Exercício 3.143 Obter equações reduzidas na variável x, da reta:
(a) que passa por $A(4, 0, -3)$ e tem a direção de $\vec{v} = (2, 4, 5)$;
(b) pelos pontos $A(1, -2, 3)$ e $B(3, -1, -1)$;
(c) pelos pontos $A(-1, 2, 3)$ e $B(2, -1, 3)$;
(d) dada por $\left\{\begin{array}{l} x = 2 - \lambda \\ y = 3\lambda \\ z = -5 + 4\lambda \end{array}\right.$.

Exercício 3.144 Escrever equações reduzidas na variável z da reta que passa por $A(-1, 6, 3)$ e $B(2, 2, 1)$.

Exercício 3.145 Na reta $r : \left\{\begin{array}{l} y = 2x + 3 \\ z = x - 1 \end{array}\right.$, determinar o ponto de:
(a) ordenada igual a 9; (b) abscissa igual ao dobro da cota; (c) ordenada igual ao triplo da cota.

Exercício 3.146 Representar graficamente as retas de equações:
(a) $\left\{\begin{array}{l} x = 1 - \lambda \\ y = -1 + 2\lambda \\ z = 2 + \lambda \end{array}\right.$; (b) $\left\{\begin{array}{l} y = -x \\ z = x + 3 \end{array}\right.$; (c) $x = y = z$; (d) $\left\{\begin{array}{l} y = 2x \\ z = 3 \end{array}\right.$;
(e) $\left\{\begin{array}{l} y = 4 \\ z = 2x \end{array}\right.$; (f) $\left\{\begin{array}{l} y = 3 \\ z = -1 \end{array}\right.$; (g) $\left\{\begin{array}{l} x = 3 \\ y = -4 \end{array}\right.$; (h) $\left\{\begin{array}{l} x = -3 \\ z = 3 \end{array}\right.$.

Exercício 3.147 Determinar equações paramétricas e representar graficamente a reta que passa por:
(a) $A(3, -2, 4)$ e é paralela ao eixo dos x;
(b) $A(2, 2, 4)$ e é perpendicular ao plano xOz;
(c) $A(-2, 3, 4)$ e é ortogonal ao mesmo tempo aos eixos dos x e dos y;
(d) $A(4, -1, 3)$ e tem a direção de $3\vec{i} - 2\vec{j}$;
(e) $A(3, -1, 3)$ e $B(3, 3, 4)$.

Exercício 3.148 Escrever as equações paramétricas das retas que passam pelo ponto $A(4, -5, 3)$ e são, respectivamente, paralelas aos eixos Ox, Oy e Oz.

Exercício 3.149 Determinar a medida do ângulo entre as seguintes retas:
(a) $r_1 : \left\{\begin{array}{l} x = -2 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = 3 - 2\lambda \end{array}\right.$ e $r_2 : \frac{x}{2} = y + 6 = z - 1$; (b) $r_1 : \left\{\begin{array}{l} y = -2x + 3 \\ z = x - 2 \end{array}\right.$ e $r_2 : \left\{\begin{array}{l} x = 4 \\ y = -z - 1 \end{array}\right.$;
(c) $r_1 : \left\{\begin{array}{l} x = 1 + \sqrt{2}\lambda \\ y = \lambda \\ z = 5 - 3\lambda \end{array}\right.$ e $r_2 : \left\{\begin{array}{l} x = 3 \\ y = 2 \end{array}\right.$; (d) $r_1 : \frac{x-4}{2} = -y = \frac{z+1}{-2}$ e $r_2 : \left\{\begin{array}{l} x = 1 \\ \frac{y}{4} = \frac{z-2}{3} \end{array}\right.$.

Exercício 3.150 Determinar o valor de n para que seja de 30° a medida do ângulo entre as retas r_1 e r_2 nos seguintes casos:
(a) $r_1 : \frac{x-2}{4} = \frac{y}{5} = \frac{z}{3}$ e $r_2 : \left\{\begin{array}{l} y = nx + 5 \\ z = 2x - 2 \end{array}\right.$; (b) $r_1 : \left\{\begin{array}{l} y = nx - 1 \\ z = 2x \end{array}\right.$ e r_2 : eixo Oy.

Exercício 3.151 Sabendo que as retas r_1 e r_2 são ortogonais, determinar o valor de m para os casos:
(a) $r_1 : \left\{\begin{array}{l} x = -3 + 2m\lambda \\ y = 1 + 3\lambda \\ z = -4\lambda \end{array}\right.$ e $r_2 : \left\{\begin{array}{l} x = 2y - 1 \\ z = -y + 4 \end{array}\right.$;
(b) $r_1 : \left\{\begin{array}{l} y = mx + 3 \\ z = x - 1 \end{array}\right.$ e r_2 : reta por $A = (1, 0, m)$ e $B = (-2, 2m, 2m)$.

Exercício 3.152 Encontrar as equações paramétricas da reta que passa por A e é simultaneamente ortogonal às retas r_1 e r_2 nos casos:
(a) $A(3, 2, -1)$, $r_1 : \left\{\begin{array}{l} x = 3 \\ y = -1 \end{array}\right.$ e $r_2 : \left\{\begin{array}{l} y = x - 3 \\ z = -2x + 3 \end{array}\right.$;
(b) $A(0, 0, 0)$, $r_1 : \frac{x}{2} = y = \frac{z-3}{2}$ e $r_2 : \left\{\begin{array}{l} x = 3\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 2 \end{array}\right.$;
(c) A é a intersecção de r_1 e r_2, sendo $r_1 : x - 2 = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{3}$ e $r_2 : \left\{\begin{array}{l} x = 1 - y \\ z = 2 + 2y \end{array}\right.$.

Exercício 3.153 Verificar se as retas são concorrentes e, em caso afirmativo, encontrar o ponto de intersecção:

(a) $r_1: \begin{cases} y = 2x - 3 \\ z = -x + 5 \end{cases}$ e $r_2: \begin{cases} y = -3x + 7 \\ z = x + 1 \end{cases}$; (b) $r_1: \frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-2}{4}$ e $r_2: \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = 4 - \lambda \\ z = -8 + 3\lambda \end{cases}$;

(c) $r_1: \begin{cases} y = 2x - 3 \\ z = -x - 10 \end{cases}$ e $r_2: x = \frac{y-4}{3} = \frac{z+1}{-2}$; (d) $r_1: \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 3 - 5\lambda \\ z = 6 - 6\lambda \end{cases}$ e $r_2: \begin{cases} x = -3 + 6\lambda \\ y = 1 + 7\lambda \\ z = -1 + 13\lambda \end{cases}$;

(e) $r_1: (x, y, z) = (2, 4, 1) + \lambda (1, -2, 3)$ e $r_2: (x, y, z) = (-1, 2, 5) + \lambda (4, 3, -2)$;

(f) $r_1: \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 4 - \lambda \\ z = -\lambda \end{cases}$ e $r_2: \begin{cases} y = -x + 6 \\ z = -x + 2 \end{cases}$.

Exercício 3.154 Calcular o valor de m para que sejam concorrentes as seguintes retas:

(a) $r_1: \begin{cases} y = 2x - 5 \\ z = -x + 2 \end{cases}$ e $r_2: x - 5 = \frac{y}{m} = z + 1$; (b) $r_1: \begin{cases} x = m - \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$ e $r_2: \frac{x-1}{3} = y + 2 = \frac{z}{-2}$.

Exercício 3.155 Dadas as retas $r_1: \begin{cases} y = \frac{x-1}{-2} \\ z = 3 \end{cases}$ e $r_2: \begin{cases} x = \lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases}$, encontrar as equações reduzidas na variável x da reta que passa por $A(0, 1, 0)$ e pelo ponto de intersecção de r_1 com r_2.

Exercício 3.156 Determinar na reta $r: \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 + 2\lambda \end{cases}$ um ponto equidistante dos pontos $A(2, -1, 2)$ e $B(1, 0, -1)$.

Exercício 3.157 Determinar os pontos da reta $r: \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = 3 + 2\lambda \end{cases}$ que:

(a) distam 6 unidades do ponto $A(2, 1, 3)$; (b) distam 2 unidades do ponto $B(1, -1, 3)$.

Exercício 3.158 Escrever equações reduzidas da reta que passa por $A(1, 3, 5)$ e intesecta o eixo dos z ortogonalmente.

Exercício 3.159 Escrever equações reduzidas na variável z, de cada uma das retas que satisfazem às condições dadas:
(a) passa por $A(4, -2, 2)$ e é paralela à reta $r: x = 2y = -2z$;
(b) passa pela origem e é ortogonal a cada uma das retas $r: \frac{2x-1}{3} = \frac{y+2}{-2} = 2z - 2$ e $s: x = -y = -z$.

Exercício 3.160 Determinar o ângulo que a reta que passa por $A(3, -1, 4)$ e $B(1, 3, 2)$ forma com a sua projeção sobre o plano xy.

Exercício 3.161 Apresentar equações paramétricas da projeção da reta $r: \begin{cases} y = 5x - 7 \\ z = -2x + 6 \end{cases}$ sobre o plano xy.

Exercício 3.162 Dados o ponto $A(3, 4, -2)$ e a reta $r: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 4 + 2\lambda \end{cases}$,
(a) determinar equações paramétricas da reta que passa por A e é perpendicular a r;
(b) calcular a distância de A a r;
(c) determinar o ponto simétrico de A em relação a r.

Exercícios referentes à Seção 3.2 ***Planos***, página 101.

$Oxyz$ é sistema de coordenadas cartesianas ortogonais no espaço com base canônica $\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

Exercício 3.163 Seja o plano $\pi: 3x + y - z - 4 = 0$. Calcular:
(a) O ponto de π que tem abscissa 1 e ordenada 3;
(b) O ponto de π que tem abscissa 0 e cota 2;
(c) O valor de k para que o pontos $P = (k, 2, k - 1)$ pertença a π;
(d) O ponto de abscissa 2 e cuja ordenada é o dobro da cota;
(e) O valor de k para que o plano $\pi_1: kx - 4y + 4z - 7 = 0$ seja paralelo a π.

Exercício 3.164 Determinar uma equação geral do plano perpendicular à reta $r : \begin{cases} x = 2 + 2\lambda \\ y = 1 - 3\lambda \\ z = 4\lambda \end{cases}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, e que contenha o ponto $A(-1, 2, 3)$.

Exercício 3.165 Dada a equação geral do plano $\pi : 3x - 2y - z - 6 = 0$, determinar um sistema de equações paramétricas de π.

Exercício 3.166 Escrever uma equação geral e um sistema de equações paramétricas do plano determinado pelos pontos:
(a) $A(1, 0, 2)$, $B(-1, 2, -1)$ e $C(1, 1, -1)$;
(b) $A(2, 0, -1)$, $B(-2, 6, 3)$ e $C(0, 3, 4)$;
(c) $A(2, 1, 3)$, $B(-3, -1, 3)$ e $C(4, 2, 3)$.

Exercício 3.167 Determinar uma equação geral do plano:
(a) que passa por $A(2, 0, -2)$ e é paralelo aos vetores $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$ e $\overrightarrow{v} = 2\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j}$;
(b) que contém os pontos $A(1, -2, 2)$ e $B(-3, 1, -2)$ e é perpendicular ao plano xOy;
(c) que contém a reta $r : \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 3 + 2\lambda \end{cases}$ e é perpendicular ao plano $\pi : 2x + 2y + 3z = 0$;
(d) que contém as retas $r_1 : \begin{cases} y = 2x - 3 \\ z = -x + 2 \end{cases}$ e $r_2 : \begin{cases} \frac{x-1}{3} = \frac{z-1}{-1} \\ y = -1 \end{cases}$;
(e) que contém as restas $r_1 : \begin{cases} x = -2 + \lambda \\ y = -\lambda \\ z = -3 \end{cases}$ e $r_2 : \begin{cases} y = -x - 1 \\ z = 3 \end{cases}$;
(f) que contém o ponto $A(4, 3, 2)$ e a reta $r : \begin{cases} x = \lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 3 + 2\lambda \end{cases}$;
(g) que é paralelo ao eixo dos z e que contenha os pontos $A(0, 3, 4)$ e $B(2, 0, -2)$;
(h) que é paralelo ao eixo dos y e que contenha os pontos $A(2, 3, 0)$ e $B(0, 4, 1)$;
(i) que é perpendicular ao eixo dos y e que contenha o ponto $A(3, 4, -1)$.

Exercício 3.168 Representar graficamente os planos de equações:
(a) $3x + 4y + 2z - 12 = 0$; (b) $6x + 4y - 3z - 12 = 0$; (c) $x + y - 3 = 0$; (d) $2x + 3y - 6 = 0$;
(e) $3y + 4z + 13 = 0$; (f) $2z - 5 = 0$; (g) $y + 4 = 0$; (h) $2x - y = 0$.

Exercício 3.169 Determinar o valor de m para que seja de $30°$ a medida do ângulo entre os planos $\pi_1 : x + my + 2z - 7 = 0$ e $\pi_2 : 4x + 5y + 3z + 2 = 0$.

Exercício 3.170 Dados a reta r e o plano π, determinar o valor de m para que se tenha (I) $r /\!/ \pi$ e (II) $r \perp \pi$ nos seguintes casos:
(a) $r : \begin{cases} x = -3 + \lambda \\ y = -1 + 2\lambda \\ z = 4\lambda \end{cases}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, e $\pi : mx - y - 2z - 3 = 0$;
(b) $r : (x, y, z) = (1, 2, 0) + \lambda(2, m, -1)$ e $\pi : 3x + 2y + mz = 0$.

Exercício 3.171 Calcular os valores de m e n para que a reta r esteja contida no plano π nos seguintes casos:
(a) $r : \begin{cases} x = -2 + \lambda \\ y = 3 - 2\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\pi : mx + 2y - 3z + n = 0$;
(b) $r : \begin{cases} x = 1 + 3\lambda \\ y = -2 + m\lambda \\ z = n - 4\lambda \end{cases}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\pi : 3x - 3y + z - 7 = 0$.

Exercício 3.172 Estabelecer equações reduzidas na variável x da reta que é intersecção dos planos $\pi_1 : 3x - 2y - z - 1 = 0$ e $\pi_2 : x + y + 2z - 1 = 0$.

Exercício 3.173 Encontrar equações paramétricas da reta de intersecção dos planos $\pi_1 : 3x + y - 3z - 5 = 0$ e $\pi_2 : x - y - z - 3 = 0$.

Exercício 3.174 Determinar o ponto de intersecção da reta r com o plano π nos seguintes casos:

(a) $r:\begin{cases} x=3\lambda \\ y=1-2\lambda \\ z=-\lambda \end{cases}$ e $\pi: 2x+3y-2z-7=0$;

(b) $r:\begin{cases} x=4+\lambda \\ y=3+2\lambda \\ z=-2-3\lambda \end{cases}$ e $\pi:\begin{cases} x=2+\lambda+2\mu \\ y=-3-\lambda-\mu \\ z=1+3\lambda-3\mu \end{cases}$.

Exercício 3.175 Dado o ponto $P(5,2,3)$ e o plano $\pi: 2x+y+z-3=0$, determinar:
(a) equações paramétricas da reta que passa por P e é perpendicular a π;
(b) a projeção ortogonal de P sobre π;
(c) o ponto P' simétrico de P em relação a π;
(d) a distância de P até o plano π.

Exercício 3.176 Obter as equações paramétricas das retas nos seguintes casos:
(a) a reta passa por $A(-1,0,2)$ e é paralela a cada um dos planos $\pi_1: 2x+y+z+1=0$ e $\pi_2: x-3y-z-5=0$;
(b) a reta passa pela origem, é ortogonal à reta $r: 2x=y=3z$ e paralela ao plano $\pi: x-y-z+2=0$.

Exercício 3.177 Achar equações paramétricas da reta r que passa por A, é paralela ao plano π e concorrente com a reta s nos seguintes casos:

(a) $A(2,1,-4)$, $\pi: x-y+3z-5=0$ e $s:\begin{cases} x=1+3\lambda \\ y=3-\lambda \\ z=-2-2\lambda \end{cases}, \lambda\in\mathbb{R}$;

(b) $A(3,-2,-4)$, $\pi: 3x-2y-3z+5=0$ e $s:\begin{cases} x=2+\lambda \\ y=-4-2\lambda \\ z=1+3\lambda \end{cases}, \lambda\in\mathbb{R}$.

Determinar, ainda, o ponto de intersecção entre r e s.

Exercício 3.178 Encontrar as equações paramétricas da reta que passa por $A(3,6,4)$, intersecta o eixo Oz e é paralela do plano $\pi: x-3y+5z-6=0$.

Exercício 3.179 Dê uma equação geral do plano que intersecta os eixos coordenados nos pontos de abscissa, ordenada e cota iguais a -3, 6 e -5, respectivamente.

Exercício 3.180 Estabelecer equações gerais dos planos bissectores dos diedros formados pelos planos Oxz e Oyz.

Exercício 3.181 Calcular k de modo que a reta determinada por $A(1,-1,0)$ e $B(k,1,2)$ seja paralela ao plano $\pi:\begin{cases} x=1+3\lambda \\ y=1+2\lambda+\mu \\ z=3+3\lambda \end{cases}$.

Exercício 3.182 Achar o ponto N, projeção ortogonal do ponto $P(3,-1,-4)$ no plano determinado pelos pontos $A(2,-2,3)$, $B(4,-3,-2)$ e $C(0,-4,5)$. Qual o ponto simétrico de P em relação a este plano?

Exercícios referentes à Seção 3.3 ***Distâncias***, página 106.

$Oxyz$ é sistema de coordenadas cartesianas ortogonais no espaço com base canônica $\mathcal{B}=\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$.

Exercício 3.183 Calcular a distância de P_1 a P_2 nos seguintes casos:
(a) $P_1(-2,0,1)$ e $P_2(1,-3,2)$
(b) $P_1(1,0,1)$ e $P_2(2,-1,0)$

Exercício 3.184 Calcular a distância de P à reta r nos seguintes casos:

(a) $P(2,3,-1)$ e $r:\begin{cases} x=3+\lambda \\ y=-2\lambda \\ z=1-2\lambda \end{cases}, \lambda\in\mathbb{R}$

(b) $P(1,-1,0)$ e $r:\begin{cases} x=2-\lambda \\ y=0 \\ z=\lambda \end{cases}, \lambda\in\mathbb{R}$

(c) $P(3,2,1)$ e $r:\begin{cases} y=2x \\ z=x+3 \end{cases}$

(d) $P(0,0,0)$ e $r:\begin{cases} 2x-y+z-3=0 \\ x+y-2z+1=0 \end{cases}$
(r dada por intersecção de planos)

(e) $P(3,-1,1)$ e $r: (x,y,z)=(2,3,-1)+\lambda(1,-4,2)$

(f) $P(1,2,3)$ e r : eixo Ox

(g) $P(1,2,3)$ e r : eixo Oz

(h) $P(1,2,3)$ e $r:\begin{cases} x=1 \\ z=-1 \end{cases}$

Exercício 3.185 Calcular a distância do ponto P até o plano π nos casos:

(a) $P(2,-1,2)$ e $\pi: 2x-2y-z+3=0$;

(b) $P(3,-1,4)$ e $\pi: x+y+z=0$;

(c) $P(1,3,-6)$ e $\pi: 4x-y+z+5=0$;

(d) $P(0,0,0)$ e $\pi: 3x-4y+20=0$;

(e) $P(1,1,1)$ e $\pi: \begin{cases} x=2+2\lambda+2\mu \\ y=-1+\lambda+\mu \\ z=2-\lambda \end{cases}, \lambda,\mu\in\mathbb{R}$.

Exercício 3.186 Calcular a distância entre os planos $\pi_1: x+y+z=4$ e $\pi_2: 2x+2y+2z=5$.

Exercício 3.187 Calcular a distância da reta r ao plano π nos casos:

(a) $r: \begin{cases} x=4+3\lambda \\ y=-1+\lambda \\ z=\lambda \end{cases}, \lambda\in\mathbb{R}$ e $\pi: x-y-2z+4=0$;

(b) $r: \begin{cases} x=3 \\ y=4 \end{cases}$ e $\pi: x+y-12=0$;

(c) $r: \begin{cases} x=3 \\ y=4 \end{cases}$ e $\pi: y=0$.

Exercício 3.188 Calcular a distância entre as retas r_1 e r_2 nos seguintes casos:

(a) $r_1: \begin{cases} x=2-\lambda \\ y=3+\lambda \\ z=1-2\lambda \end{cases}, \lambda\in\mathbb{R}$ e $r_2: \begin{cases} x=\mu \\ y=-1-3\mu \\ z=2\mu \end{cases}, \mu\in\mathbb{R}$;

(b) $r_1: x=y=z$ e $r_2: \begin{cases} y=x+1 \\ z=2x-1 \end{cases}$;

(c) $r_1: \begin{cases} y=2x \\ z=3 \end{cases}$ e $r_2: (x,y,z)=(2,-1,2)+\lambda(1,-1,3)$;

(d) $r_1: \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$ e $r_2: \begin{cases} x=1 \\ y=4 \end{cases}$;

(e) $r_1: \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=2+\lambda \\ z=-2-2\lambda \end{cases}, \lambda\in\mathbb{R}$ e $r_2: \begin{cases} y=3x+1 \\ z=-4x \end{cases}$;

(f) $r_1: \begin{cases} x=3 \\ y=4 \end{cases}$ e r_2: eixo Oz.

Referências Bibliográficas

[1] Baldin, Y. & Furuya, Y. ***Geometria Analítica para todos e atividades com Octave e Geogebra***. São Carlos: EdUFSCar - Editora da Universidade Federal de São Carlos, 2011.

[2] Boulos, P. & Camargo, I. ***Geometria Analítica: um tratamento vetorial***. 3ª. ed. São Paulo: Editora Pearson Education. 2005.

[3] GeoGebra - ***Software livre de geometria dinâmica***. Site: www.geogebra.org

[4] Lima, E. L. ***Geometria Analítica e Álgebra Linear***. Rio de Janeiro: SBM Sociedade Brasileira de Matemática. 2001.

[5] Lima, E. L., Carvalho, P. C. P., Wagner, E. & Morgado, A. C. ***A Matemática do Ensino Médio*** (coleção de 4 volumes - vol. 3). 6ª. ed. Rio de Janeiro: SBM Sociedade Brasileira de Matemática. 2006.

[6] Mello, D. A. & Watanabe, R. G. ***Vetores e uma Iniciação à Geometria Analítica***. 2ª. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2011.

[7] Santos, N. M. ***Vetores e Matrizes: uma introdução à álgebra linear***. 4ª. ed. São Paulo: Editora Cengage Learning, 2007.

[8] Santos, F. J. & Ferreira, S. F. ***Geometria Analítica***. São Paulo: Editora Bookman, 2009.

[9] Silva, V. & Reis, G. L. ***Geometria Analítica***. 2ª. ed. Rio de Janeiro: LTC - Livros Técnicos e Científicos Editora. 1996.

[10] Steinbruch, A & Winterle, P. ***Geometria Analítica***. 2ª. ed. São Paulo: Editora Pearson Education. 1987.

[11] Winterle, P. ***Vetores e Geometria Analítica***. 2ª. ed. São Paulo: Editora Pearson Education. 2014.