Exercícios selecionados:

2, 7, 9, 10, 12, 13, 15, 17, 19, 21-32, 36, 43-47, 59-68

14.1 Exercícios

1. No Exemplo 2 consideramos a função $W = f(T, v)$, onde W era o índice de sensação térmica, T é a temperatura real, e v é a velocidade do vento. A representação numérica foi fornecida pela Tabela 1.

(a) Qual é o valor de $f(-15, 40)$? Qual é o seu significado?

(b) Descreva em palavras o significado da questão "Para quais valores de v é verdade que $f(-20, v) = -30$?". Em seguida, responda à questão.

(c) Descreva o significado da questão "Para quais valores de T é verdade que $f(T, 20) = -49$?". Em seguida, responda à questão.

(d) Qual o significado da função $W = f(-5, v)$? Descreva seu comportamento.

(e) Qual o significado da função $W = f(T, 50)$? Descreva seu comportamento.

2. O *índice I de temperatura-umidade* (ou simplesmente *humidex*) é a temperatura aparente do ar quando a temperatura real é T e a umidade relativa é h, de modo que podemos escrever $I = f(T, h)$. A tabela seguinte com valores de I foi extraída de uma tabela do Environment Canada.

TABELA 3
Temperatura aparente como função da temperatura e da umidade

Umidade relativa(%)

Temperatura real (°C): T \ h	20	30	40	50	60	70
20	20	20	20	21	22	23
25	25	25	26	28	30	32
30	30	31	34	36	38	41
35	36	39	42	45	48	51
40	43	47	51	55	59	63

(a) Qual é o valor de $f(35, 60)$? Qual é o seu significado?

(b) Para que valor de h temos $f(30, h) = 36$?

(c) Para que valor de T temos $f(T, 40) = 42$?

(d) Quais são os significados das funções $I = f(20, h)$ e $I = f(40, h)$? Compare o comportamento dessas duas funções de h.

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador

1. As Homeworks Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

3. Um fabricante modelou sua função P da produção anual (o valor monetário de toda a produção em milhões de dólares) como uma função de Cobb-Douglas

$$P(L, K) = 1{,}47L^{0{,}65}K^{0{,}35}$$

onde L é o número de horas trabalhadas (em milhares) e K é o capital investido (em milhões de dólares). Encontre $P(120, 20)$ e interprete-o.

4. Verifique se, para a função de produção de Cobb-Douglas

$$P(L, K) = 1{,}01L^{0{,}75}K^{0{,}25}$$

discutida no Exemplo 3, a produção dobrará se as quantidades de trabalho e a de capital investido forem dobradas. Determine se isso também é verdade para uma função de produção genérica

$$P(L, K) = bL^{\alpha}K^{1-\alpha}$$

5. Um modelo para a área da superfície de um corpo humano é dado pela função

$$S = f(w, h) = 0{,}1091w^{0{,}425}h^{0{,}725}$$

onde w é o peso (em libras), h é a altura (em polegadas) e S é medida em pés quadrados.
(a) Encontre $f(160, 70)$ e interprete-a.
(b) Qual é sua própria área de superfície?

6. O indicador de sensação térmica W discutido no Exemplo 2 foi modelado pela seguinte função:

$$W(T, v) = 13{,}12 + 0{,}6215T - 11{,}37v^{0{,}16} + 0{,}3965Tv^{0{,}16}$$

Verifique quão próximo este modelo está dos valores da Tabela 1 para alguns valores de T e v.

7. A altura h de ondas em mar aberto depende da velocidade do vento v e do tempo t durante o qual o vento se manteve naquela intensidade. Os valores da função $h = f(v, t)$, dados em metros, são apresentados na Tabela 4.
(a) Qual é o valor de $f(80, 15)$? Qual é o seu significado?
(b) Qual o significado da função $h = f(60, t)$? Descreva seu comportamento.
(c) Qual o significado da função $h = f(v, 30)$? Descreva seu comportamento.

Duração (horas)

Velocidade do vento (km/h) v \ t	5	10	15	20	30	40	50
20	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6
30	1,2	1,3	1,5	1,5	1,5	1,6	1,6
40	1,5	2,2	2,4	2,5	2,7	2,8	2,8
60	2,8	4,0	4,9	5,2	5,5	5,8	5,9
80	4,3	6,4	7,7	8,6	9,5	10,1	10,2
100	5,8	8,9	11,0	12,2	13,8	14,7	15,3
120	7,4	11,3	14,4	16,6	19,0	20,5	21,1

8. Uma empresa fabrica caixas de papelão de três tamanhos: pequena, média e grande. O custo é de $ 2,50 para fabricar uma caixa pequena, $ 4,00 para uma caixa média e $ 4,50 para uma caixa grande. Os custos fixos são de $ 8.000.
(a) Expresse o custo da fabricação de x caixas pequenas, y caixas médias e z caixas grandes como uma função de três variáveis: $C = f(x, y, z)$.
(b) Encontre $f(3\,000, 5\,000, 4\,000)$ e interprete-a.
(c) Qual o domínio de f?

9. Seja $g(x, y) = \cos(x + 2y)$.
(a) Calcule $g(2, -1)$.
(b) Determine o domínio de g.
(c) Determine a imagem de g.

10. Seja $F(x, y) = 1 + \sqrt{4 - y^2}$.
(a) Calcule $F(3,1)$.
(b) Determine e esboce o domínio de F.
(c) Determine a imagem de F.

11. Seja $f(x, y, z) = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} + \ln(4 - x^2 - y^2 - z^2)$.
(a) Calcule $f(1, 1, 1)$.
(b) Determine o domínio de f.

12. Seja $g(x, y, z) = x^3 y^2 z \sqrt{10 - x - y - z}$.
(a) Calcule $g(1, 2, 3)$.
(b) Determine o domínio de g.

13–22 Determine e esboce o domínio da função.

13. $f(x, y) = \sqrt{x + y}$

14. $f(x, y) = \sqrt{xy}$

15. $f(x, y) = \ln(9 - x^2 - 9y^2)$

16. $f(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2}$

17. $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2} - \sqrt{1 - y^2}$

18. $f(x, y) = \sqrt{y} + \sqrt{25 - x^2 - y^2}$

19. $f(x, y) = \dfrac{\sqrt{y - x^2}}{1 - x^2}$

20. $f(x, y) = \operatorname{arcsen}(x^2 + y^2 - 2)$

21. $f(x, y, z) = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$

22. $f(x, y, z) = \ln(16 - 4x^2 - 4y^2 - z^2)$

23–31 Esboce o gráfico da função.

23. $f(x, y) = 1 + y$

24. $f(x, y) = 2 - x$

25. $f(x, y) = 10 - 4x - 5y$

26. $f(x, y) = e^{-y}$

27. $f(x, y) = y^2 + 1$

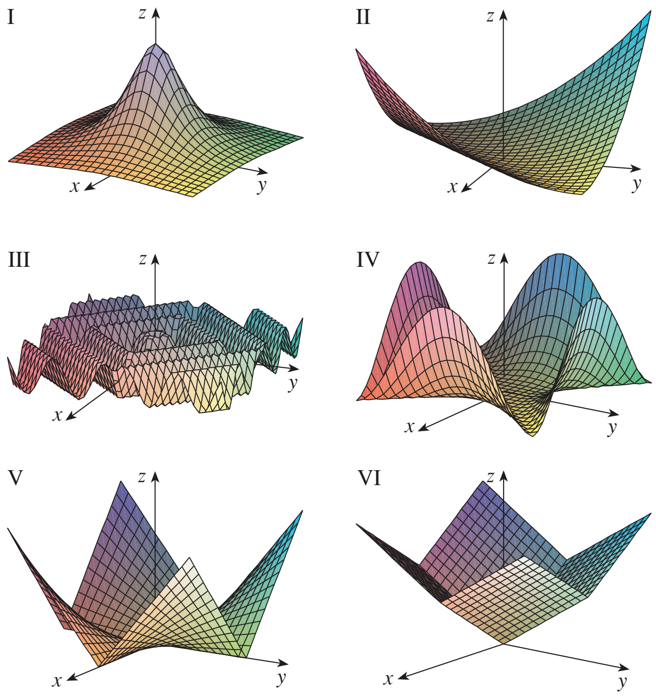
28. $f(x, y) = 1 + 2x^2 + 2y^2$

29. $f(x, y) = 9 - x^2 - 9y^2$

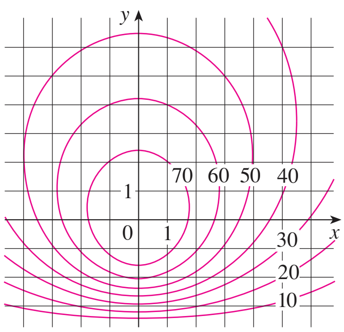
30. $f(x, y) = \sqrt{4x^2 + y^2}$

31. $f(x, y) = \sqrt{4 - 4x^2 - y^2}$

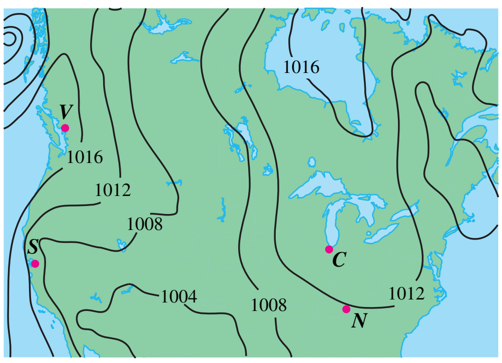
32. Faça uma correspondente entre a função e seu gráfico (identificado por I–VI). Justifique sua escolha.
(a) $f(x, y) = |x| + |y|$
(b) $f(x, y) = |xy|$
(c) $f(x, y) = \dfrac{1}{1 + x^2 + y^2}$
(d) $f(x, y) = (x^2 - y^2)^2$
(e) $f(x, y) = (x - y)^2$
(f) $f(x, y) = \operatorname{sen}(|x| + |y|)$



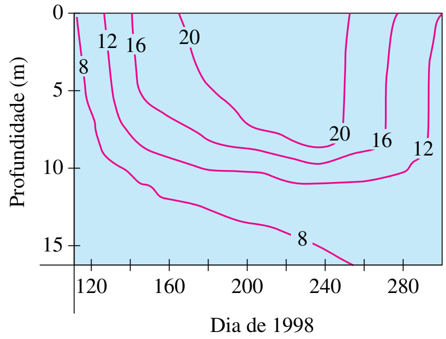
33. Um mapa de contorno de uma função f é apresentado. Use-o para estimar os valores de $f(-3, 3)$ e $f(3, -2)$. O que você pode dizer sobre a forma do gráfico?



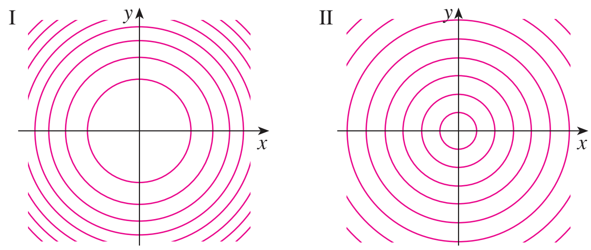
34. Um mapa de contorno da pressão atmosférica na América do Norte é mostrado em 12 de agosto de 2008. Nas curvas de nível (chamadas isobáricas) a pressão é indicada em milibares (mb).
(a) Estime a pressão em C (Chicago), N (Nashville), S (São Francisco) e V (Vancouver).
(b) Em quais desses lugares os ventos eram mais fortes?



35. As curvas de nível (isotérmicas) são mostradas para a temperatura da água (em °C) em Long Lake (Minnesota) em 1998 como uma função de profundidade e da época do ano. Estime a temperatura do lago em 9 de junho (dia 160) em uma profundidade de 10 m e em 29 de junho (dia 180) em uma profundidade de 5 m.

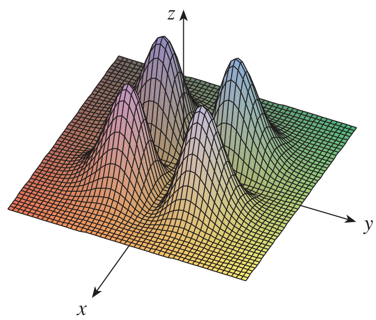


36. Dois mapas de contorno são mostrados na figura. Um é de uma função f cujo gráfico é um cone. O outro é de uma função g cujo gráfico é um paraboloide. Qual é qual? Por quê?



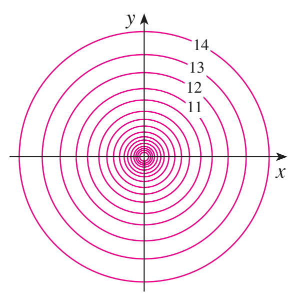
37. Localize os pontos A e B no mapa da Montanha Solitária (Figura 12). Como você descreveria o terreno perto de A? É perto de B?

38. Faça um esboço de um mapa de contorno da função cujo gráfico está mostrado.

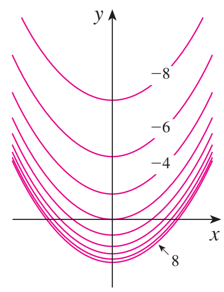


39–42 Um mapa de contorno de uma função é mostrado. Use-o para fazer um esboço do gráfico da f.

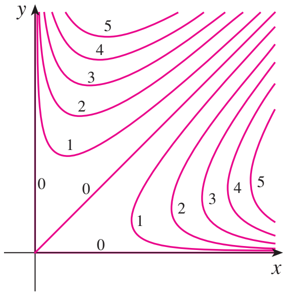
39.



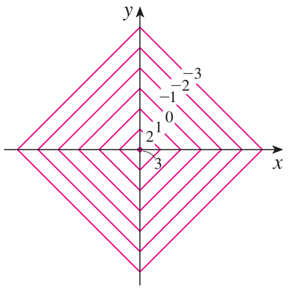
40.



41.



42.



43–50 Faça o mapa de contorno da função mostrando várias curvas de nível.

43. $f(x, y) = (y - 2x)^2$

44. $f(x, y) = x^3 - y$

45. $f(x, y) = \sqrt{x} + y$

46. $f(x, y) = \ln(x^2 + 4y^2)$

47. $f(x, y) = ye^x$

48. $f(x, y) = y \sec x$

49. $f(x, y) = \sqrt{y^2 - x^2}$

50. $f(x, y) = y/(x^2 + y^2)$

51–52 Faça o esboço do mapa de contorno e do gráfico da função e compare-os.

51. $f(x, y) = x^2 + 9y^2$

52. $f(x, y) = \sqrt{36 - 9x^2 - 4y^2}$

53. Uma placa fina de metal, localizada no plano xy, tem temperatura $T(x, y)$ no ponto (x, y). As curvas de nível de T são chamadas *isotérmicas* porque todos os pontos em uma dessas curvas têm a mesma temperatura. Faça o esboço de algumas isotérmicas se a função temperatura for dada por

$$T(x, y) = \frac{100}{1 + x^2 + 2y^2}$$

54. Se $V(x, y)$ é o potencial elétrico em um ponto (x, y) no plano xy, então as curvas de nível de V são chamadas *curvas equipotenciais*, porque em todos os pontos dessa curva o potencial elétrico é o mesmo. Esboce algumas curvas equipotenciais de $V(x, y) = c/\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$, onde c é uma constante positiva.

55–58 Utilize um computador para traçar o gráfico da função usando vários domínios e pontos de vista. Imprima a que, em sua opinião, oferece a melhor visão. Se seu programa também produz curvas de nível, trace o mapa de contorno da mesma função e compare.

55. $f(x, y) = xy^2 - x^3$ (sela do macaco)

56. $f(x, y) = xy^3 - yx^3$ (sela do cachorro)

57. $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)/3}(\text{sen}(x^2) + \cos(y^2))$

58. $f(x, y) = \cos x \cos y$

59–64 Faça uma correspondência entre a função (a) e seu gráfico (indicado por A–F a seguir), (b) e seus mapas de contorno (indicado por I–VI). Justifique sua escolha.

59. $z = \text{sen}(xy)$

60. $z = e^x \cos y$

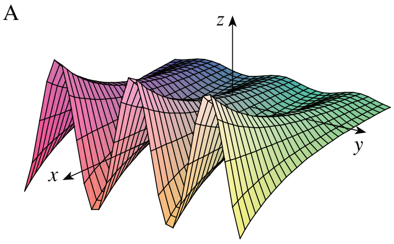
61. $z = \text{sen}(x - y)$

62. $z = \text{sen}\, x - \text{sen}\, y$

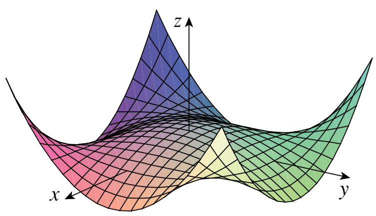
63. $z = (1 - x^2)(1 - y^2)$

64. $z = \dfrac{x - y}{1 + x^2 + y^2}$

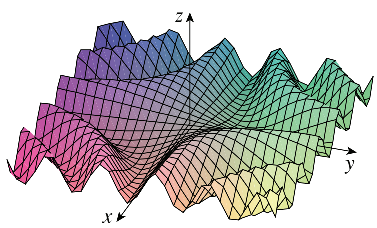
A



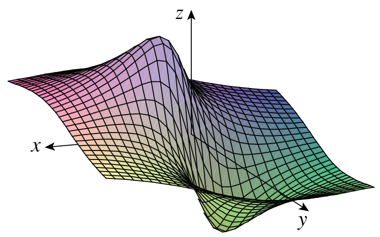
B



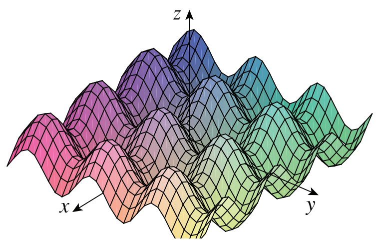
C



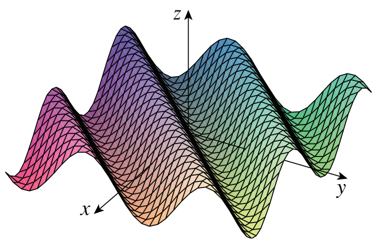
D



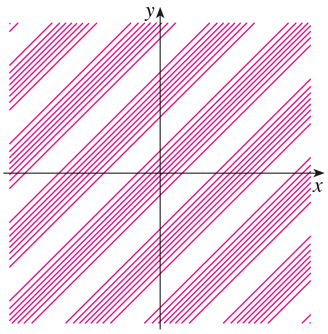
E



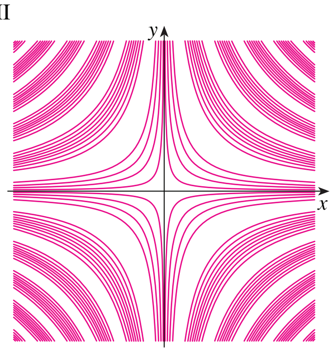
F



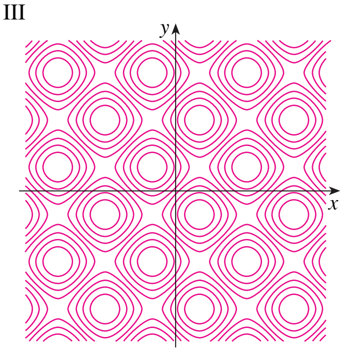
I



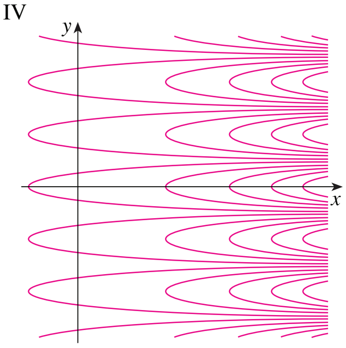
II



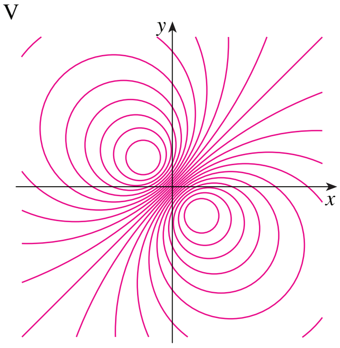
III



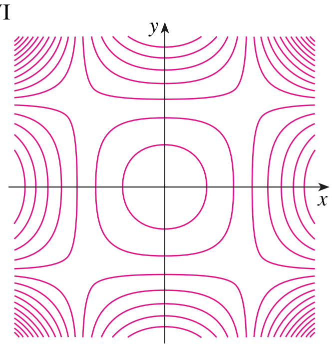
IV



V



VI



65–68 Descreva as superfícies de nível da função.

65. $f(x, y, z) = x + 3y + 5z$

66. $f(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + 5z^2$

67. $f(x, y, z) = y^2 + z^2$

68. $f(x, y, z) = x^2 - y^2 - z^2$

69–70 Descreva como o gráfico de g é obtido a partir do gráfico de f.

69. (a) $g(x, y) = f(x, y) + 2$ (b) $g(x, y) = 2 f(x, y)$
(c) $g(x, y) = -f(x, y)$ (d) $g(x, y) = 2 - f(x, y)$

70. (a) $g(x, y) = f(x - 2, y)$ (b) $g(x, y) = f(x, y + 2)$
(c) $g(x, y) = f(x + 3, y - 4)$

71–72 Utilize um computador para traçar o gráfico da função usando vários domínios e pontos de vista. Imprima aquela que apresente melhor os "picos e vales". Você acha que essa função tem um valor máximo? Você poderia identificar os pontos do gráfico correspondentes aos "máximos locais"? E aos "mínimos locais"?

71. $f(x, y) = 3x - x^4 - 4y^2 - 10xy$

72. $f(x, y) = xye^{-x^2-y^2}$

73–74 Utilize um computador para traçar o gráfico da função usando vários domínios e pontos de vista. Comente o comportamento da função no limite. O que acontece quando x e y se tornam muito grandes? O que acontece quando (x, y) se aproxima da origem?

73. $f(x, y) = \dfrac{x + y}{x^2 + y^2}$ **74.** $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$

75. Use um computador para investigar a família de funções $f(x, y) = e^{cx^2+y^2}$. De que maneira a forma do gráfico depende de c?

76. Use um computador para investigar a família de superfícies

$$z = (ax^2 + by^2)e^{-x^2-y^2}$$

Como a forma do gráfico depende dos números a e b?

77. Use um computador para investigar a família de superfícies $z = x^2 + y^2 + cxy$. Em particular, você deve determinar os valores de transição de c para os quais a superfície muda de um tipo de superfície quádrica para outro.

78. Faça o gráfico da função

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$f(x, y) = e^{\sqrt{x^2+y^2}}$$
$$f(x, y) = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$$
$$f(x, y) = \operatorname{sen}\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$$

e
$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Em geral, se $g(t)$ é uma função de uma variável, como obter o gráfico de

$$f(x, y) = g\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$$

a partir do gráfico de g?

79. (a) Mostre que, tomando logaritmos, a função geral de Cobb-Douglas $P = bL^{\alpha}K^{1-\alpha}$ pode ser expressa como

$$\ln\frac{P}{K} = \ln b + \alpha \ln\frac{L}{K}$$

(b) Se deixarmos $x = \ln(L/K)$ e $y = \ln(P/K)$, a equação no item (a) torna-se a equação linear $y = \alpha x + \ln b$. Use a Tabela 2 (no Exemplo 3) para fazer a tabela dos valores de $\ln(L/K)$ e $\ln(P/K)$ para os anos 1899–1922. Em seguida, use uma calculadora gráfica ou o computador para encontrar a linha de regressão dos quadrado mínimos pelos pontos $(\ln(L/K), \ln(P/K))$.

(c) Deduza que a função de produção de Cobb-Douglas é $P = 1{,}01L^{0{,}75}K^{0{,}25}$.

CAPÍTULO 14

EXERCÍCIOS 14.1

1. (a) -27; uma temperatura de -15 ºC com vento soprando a 40 km/h dá uma sensação equivalente a cerca de -27 ºC sem vento.
(b) Quando a temperatura é -20 ºC, qual velocidade do vento dá uma sensação térmica de -30 ºC? 20 km/h
(c) Com uma velocidade do vento de 20 km/h, qual temperatura dá uma sensação térmica de -49 ºC? -35 ºC
(d) Uma função da velocidade do vento que dá os valores da sensação térmica quando a temperatura é -5 ºC
(e) Uma função da temperatura que dá os valores da sensação térmica quando a velocidade do vento é 50 km/h

3. $\approx 94{,}2$; a produção anual do fabricante está avaliada em \$94,2 milhões quando 120 000 horas trabalhadas são gastas e \$20 milhões de capital são investidos.

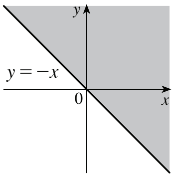
5. (a) $\approx 20{,}5$; a área da superfície de uma pessoa 70 pol. mais alta que pesa 160 libras é de aproximadamente 20,5 pés quadrados.

7. (a) 7,7; um vento de 80 km/h soprando em mar aberto por 15 h criará ondas de cerca de 7,7 m de altura.
(b) $f(60, t)$ é uma função de t que dá a altura das ondas produzidas por ventos de 60 km/h por t horas.
(c) $f(v, 30)$ é uma função de v que dá a altura das ondas produzidas por ventos de velocidade v soprando por 30 horas.

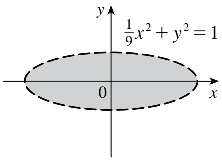
9. (a) 1 (b) $\mathbb{R}^2$ (c) $[-1, 1]$

11. (a) 3 (b) $\{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 < 4, x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0\}$, o interior de uma esfera de raio 2, centro da origem, no primeiro octante

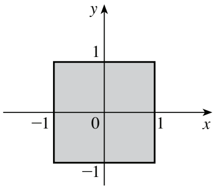
13. $\{(x, y) | y \geqslant -x\}$



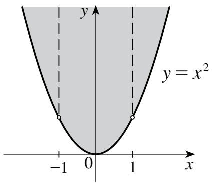
15. $\{(x, y) | \frac{1}{9}x^2 + y^2 < 1\}$, $(-\infty, \ln 9]$



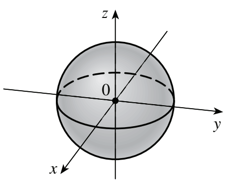
17. $\{(x, y) | -1 \leqslant x \leqslant 1, -1 \leqslant y \leqslant 1\}$



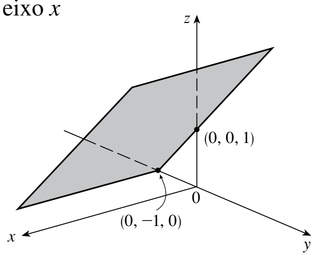
19. $\{(x, y) | y \geqslant x^2, x \neq \pm 1\}$



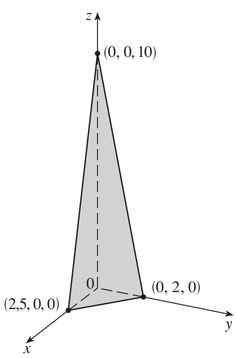
21. $\{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1\}$



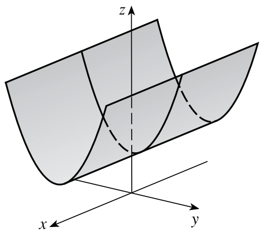
23. $z = 1 + y$, plano paralelo ao eixo x



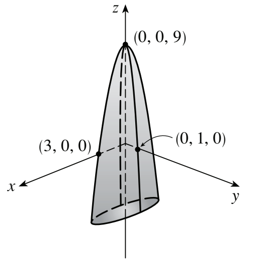
25. $4x + 5y + z = 10$, plano



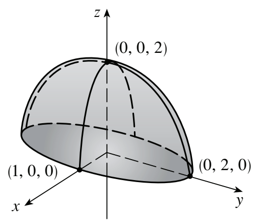
27. $z = y^2 + 1$,
cilindro parabólico



29. $z = 9 - x^2 - 9y^2$,
paraboloide elíptico

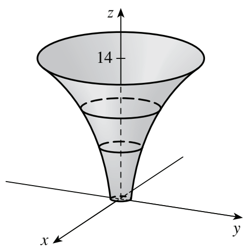


31. $z = \sqrt{4 - 4x^2 + y^2}$,
metade superior da elipsoide

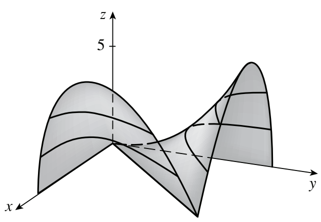


33. ≈ 56, ≈ 35 **35.** 11°C, 19,5°C **37.** Íngreme; quase achatado

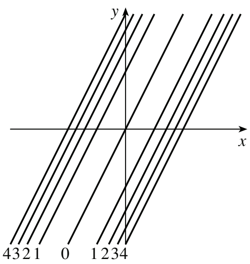
39.



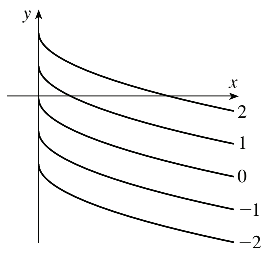
41.



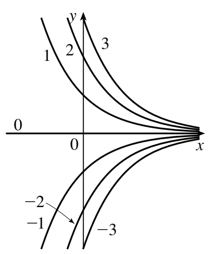
43. $(y - 2x)^2 = k$



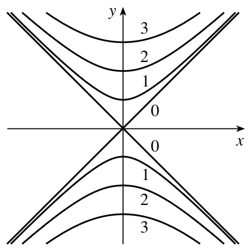
45. $y = \sqrt{x} + k$



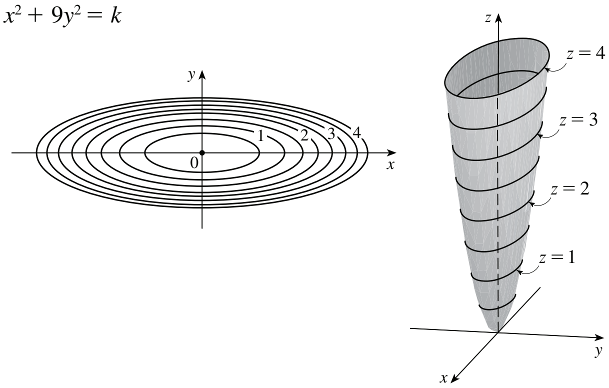
47. $y = ke^{-x}$



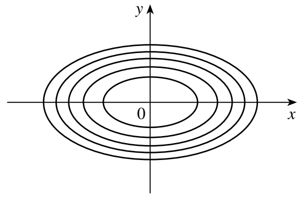
49. $y^2 - x^2 = k^2$



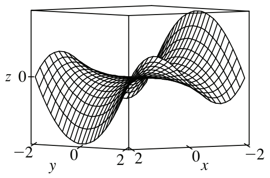
51. $x^2 + 9y^2 = k$



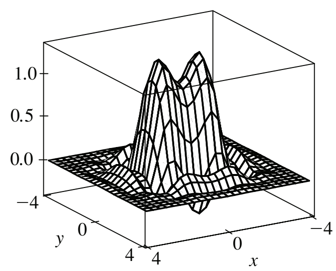
53.



55.



57.



59. (a) C (b) II **61.** (a) F (b) I

63. (a) B (b) VI **65.** Família de planos paralelos

67. Família de cilindros circulares com eixo no eixo x ($k > 0$)

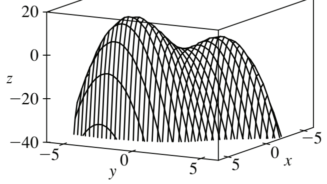
69. (a) Translada o gráfico de f duas unidades para cima

(b) Amplia o gráfico de f verticalmente por um fator 2

(c) Reflete o gráfico de f em relação ao plano xy

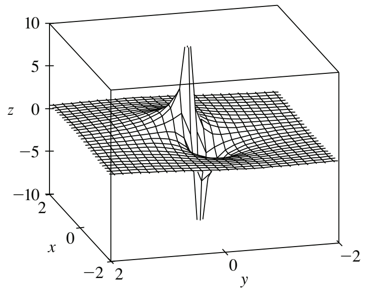
(d) Reflete o gráfico de f em relação ao plano xy e a seguir translada-o 2 unidades para cima

71.



f parece ter um valor máximo de cerca de 15. Há dois pontos de máximo local, porém nenhum ponto de mínimo local.

73.



Os valores da função tendem a 0 quando x, y se torna grande; quando (x, y) se aproxima da origem, f tende a $\pm\infty$ ou 0, dependendo da direção de aproximação.

75. Se $c = 0$, o gráfico é uma superfície cilíndrica. Para $c > 0$, as curvas de nível são elipses. O gráfico tem curva ascendente enquanto deixamos a origem, e a ingremidade aumenta à medida que c aumenta. Para $c < 0$, as curvas de nível são hipérboles. O gráfico tem curva ascendente na direção y e descendente, tendendo ao plano xy, na direção x, causando uma aparência em forma de sela perto de $(0, 0, 1)$.

77. $c = -2, 0, 2$ **79.** (b) $y = 0{,}75x + 0{,}01$