14.7 Valores Máximo e Mínimo

Valores Máximo e Mínimo

TESTE DA SEGUNDA DERIVADA: Suponha que as segundas derivadas parciais de f sejam contínuas em pontos próximos de (a, b) e suponha que $f_x(a, b) = 0 = f_y(a, b)$. Seja

$$D = D(a, b) = \det \begin{bmatrix} f_{xx}(a, b) & f_{xy}(a, b) \\ f_{yx}(a, b) & f_{yy}(a, b) \end{bmatrix}.$$

(a) Se $D > 0$ e $f_{xx}(a, b) > 0$, então $f(a, b)$ é mínimo local.

(b) Se $D > 0$ e $f_{xx}(a, b) < 0$, então $f(a, b)$ é máximo local.

(c) Se $D < 0$, então $f(a, b)$ não é mínimo nem máximo local.

No caso (c) o ponto (a, b) é chamado **ponto de sela** de f. Se $D = 0$, o teste não fornece informações.

Valores Máximo e Mínimo Absolutos

Valores Máximo e Mínimo Absolutos

DEFINIÇÃO: Seja D um subconjunto de $\mathbb{R}^2$. Um **ponto de fronteira** de D é um ponto (a, b) tal que qualquer bola aberta de centro em (a, b) contém pontos de D e pontos não pertencentes a D.

DEFINIÇÃO: Seja D um subconjunto de $\mathbb{R}^2$. Dizemos que D é um **conjunto fechado** se D contém todos os seus pontos de fronteira.

Valores Máximo e Mínimo Absolutos

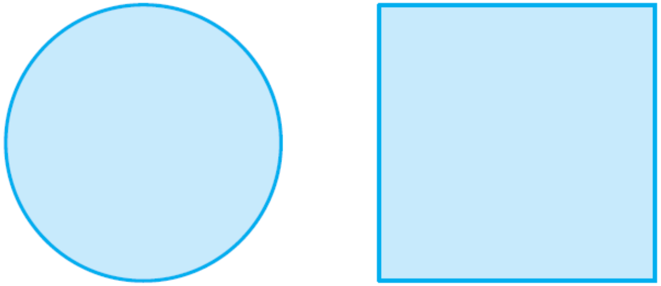
EXEMPLO: O círculo

$$D = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq 1\}$$

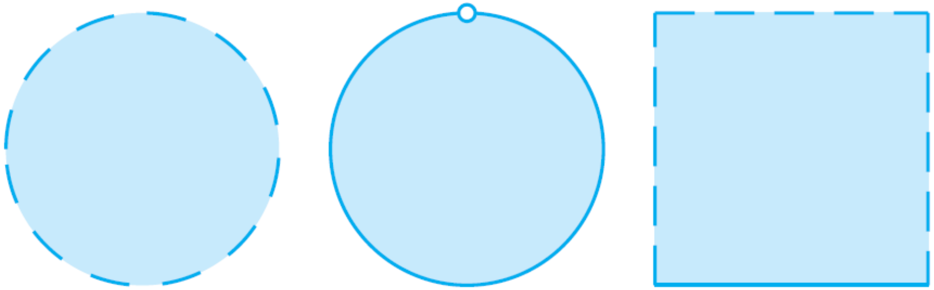
constituído de todos os pontos sobre e dentro da circunferência $x^2 + y^2 = 1$, é um conjunto fechado porque contém seus pontos de fronteira (que são os pontos sobre a circunferência $x^2 + y^2 = 1$).

Valores Máximo e Mínimo Absolutos

Mesmo que um único ponto da fronteira seja omitido do conjunto, ele deixa de ser fechado.



Conjuntos fechados



Conjuntos que não são fechados

Valores Máximo e Mínimo Absolutos

DEFINIÇÃO: Um conjunto em $\mathbb{R}^2$ é um **conjunto limitado** se ele está contido em algum círculo.

Valores Máximo e Mínimo Absolutos

DEFINIÇÃO: Seja f uma função de duas variáveis. Dizemos que

1) (a,b) é **ponto de máximo absoluto** e $f(a,b)$ é **valor máximo absoluto** se $f(x,y) \leq f(a,b)$ para todo (x,y) no domínio de f;

2) (a,b) é **ponto de mínimo absoluto** e $f(a,b)$ é **valor mínimo absoluto** se $f(a,b) \leq f(x,y)$ para todo (x,y) no domínio de f.

Valores Máximo e Mínimo Absolutos

Teorema do valor extremo para funções de duas variáveis: Se f for contínua em um conjunto fechado e limitado D de $\mathbb{R}^2$, então f assume um valor máximo absoluto $f(x_1, y_1)$ e um valor mínimo absoluto $f(x_2, y_2)$ em pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) em D.

Valores Máximo e Mínimo Absolutos

Método para determinar máximo e mínimo absolutos:

Para determinar um máximo ou mínimo absolutos de uma função contínua f em um conjunto fechado e limitado D:

1) Determine os valores de f nos pontos críticos de f no interior de D.

2) Estabeleça os valores extremos de f na fronteira de D.

3) O maior dos valores nos passos 1 e 2 é o valor máximo absoluto e o menor desses valores é o valor mínimo absoluto.