Lista de exercícios de Álgebra Linear 2019

30 de novembro de 2019

1. Escreva a matriz $A = (a_{ij})_{3\times 2}$, tal que $a_{ij} = 3i - 2j + 4$.

2. Escreva a matriz $M = (a_{ij})_{2\times 4}$, tal que $a_{ij} = |i - j|$.

3. Quais são os números que formam a diagonal principal da matriz $\begin{pmatrix} 1 & 10 & 1 \\ 3 & -5 & 6 \\ 8 & -1 & 4 \end{pmatrix}$?

4. Escreva a matriz quadrada de ordem 2, cujo elemento genérico é $a_{ij} = 4i - 2j + 3$.

5. Escreva a matriz diagonal de ordem 4, em que $a_{ij} = i$ para $i = j$.

6. Escreva a matriz triangular de ordem 4, em que

$$\begin{cases} a_{ij} = 0, & \text{para} \quad i > j \\ a_{ij} = (i+j)^2, & \text{para} \quad i = j \\ a_{ij} = -2, & \text{para} \quad i < j \end{cases}$$

7. Determine x e y para que se tenha

$$\begin{pmatrix} 3x & 3 \\ x - 2y & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 3 \\ -6 & 10 \end{pmatrix}.$$

8. Determine x, y, z e t, sabendo

   (a) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$

   (b) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y \\ z \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 15 \\ 9 \end{pmatrix}$

   (c) $\begin{pmatrix} x & y \\ 3 & 2z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & 3 \\ t & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -1 \\ 4 & 18 \end{pmatrix}$

   (d) $\begin{pmatrix} x & y \\ 3x & t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y & z \\ -y & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 14 & 0 \end{pmatrix}$

9. Sabendo $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 5 & 0 & 6 \end{pmatrix}$, determine
(a) $5A$ (b) $-2B$ (c) $2A + 3B$ (d) $3A - \frac{1}{2}B$.

10. Determine a matriz$X$ tal que $X - A + B = 0_{3\times 1}$, sendo $A = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

11. Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz quadrada de ordem 2 tal que $a_{ij} = 2i - j + 3$. Se $X + A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}$, determine a matriz X.

12. Seja X uma matriz quadrada de ordem2 tal que $5X - 2A = 2X$. Se $A = \begin{pmatrix} 18 & 9 \\ 9 & 18 \end{pmatrix}$, calcule a matriz X.

13. Sendo $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, Determine a matriz X que verifica a igualdade $3(X - A) = 2(B + X) + 6C$.

14. Determine as matrizes X e Y que são as soluções do sistema $\begin{cases} X + Y = A + 3B \\ X - Y = 3A - 2B \end{cases}$, sendo que $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

15. Sabe-se que $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calcule as matrizes X e Y que verificam as condições $\begin{cases} 2X + Y = 3A + B \\ X - Y = 2A - 3B \end{cases}$.

16. Determine os produtos:

(a) $\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 5 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 5 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 4 & -3 \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

(f) $\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$

17. Sejam as matrizes $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$. Determine:
(a) A^2 (b) B^2 (c) AB (d) $2AB$
(e) $(A+B)^2$ (f) $A^2 + 2AB + B^2$

18. Observando os resultados obtidos no exercício anterior, responda: para essas matrizes A e B vale a igualdade
$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$?

19. Calcule a matriz X sabendo que:

(a) $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 24 \\ 6 \end{pmatrix}$ e $AX = B$.

(b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $AX = B$.

(c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$ e $AX = 3B$.

20. Sendo $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$, determine:
(a) $A^t + B^t$ (b) $(A+B)^t$ (c) $(3A)^t$ (d) $3A^t$ (e) A^tB
(f) AB^t (g) AA^t (h) $(AB)^t$ (i) A^tB^t (j) B^tA^t.

21. Determine, se existir, a inversa de cada uma das seguintes matrizes:
(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ (b) $A = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$
(c) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ (d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

22. Resolver os sistemas pelo escalonamento:

(a) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y+2z=2 \\ x+6y+3z=3 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y+z=-2 \\ 2y=3 \end{cases}$

23. Resolver os sistemas homogênios abaixo:

(a) $\begin{cases} x-y+2z-t=0 \\ 3x+y+3z+t=0 \\ x-y-z-5t=0 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x+y+z+w-t=0 \\ x-y-z+2w-t=0 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 4x+3y-z+t=0 \\ x-y+2z-t=0 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} 3x+2y-12z=0 \\ x-y+z=0 \\ 2x-3y+5z=0 \end{cases}$

24. Mostrar que a matriz real

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix}$$

é inversível para quaisquer $a, b, c \in R$ e que:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 \\ ac-b & -c & 1 \end{pmatrix}$$

25. Verificar quais das seguintes matrizes são inversível e determinar as inversas respectivas:

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

(b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

26. Verifiquei o conjunto com as operações de adição e multiplicação por escalar é ou não é um espaço vetorial. Cite o aximoa que não se verifique no caso negativo.

    (a) $\mathbb{R}^3, (x,y,z)+(x',y',z') = (x+x', y+y', z+z'); k(x,y,z) = (0,0,0)$.
    (b) $\mathbb{R}^2, (x,y) + (x',y') = (x,y); k(x,y) = (kx, ky)$.
    (c) $\mathbb{R}^2, (x,y) + (x',y') = (x+x', y+y'); k(x,y) = (k^2x, k^2y)$.

27. Quais dos seguintes conjuntos W abaixo são subespaço do $\mathbb{R}^3$?

    (a) $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x = 0\}$.
    (b) $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x - 3z = 0\}$.
    (c) $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x = 1\}$.
    (d) $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | xy = 0\}$.

28. Dê um sistema de geradores para cada um dos seguintes subespaço do $\mathbb{R}^3$:

    (a) $U = \{(x,y,z) | x - 2y = 0\}$
    (b) $V = \{(x,y,z) | x + z = 0 \quad \text{e} \quad x - 2y = 0\}$
    (c) $W = \{(x,y,z) | x + 2y - 3z = 0\}$
    (d) $U \cap V$
    (e) $U \cup V$

29. Mostre que os dois conjuntos $\{(1,-1,2), (3,0,1)\}$ e $\{(-1,-2,3), (3,3,-4)\}$ geram o mesmo subespaço vetorial do $\mathbb{R}^3$.

30. Quais os subconjuntos abaixo do $\mathbb{R}^3$ são linearmente independentes:

    (a) $\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (2,3,5)\}$
    (b) $\{(1,1,1), (1,0,1), (1,0,-2)\}$
    (c) $\{(0,0,0), (1,2,3), (4,1,-2)\}$
    (d) $\{(1,1,1), (1,2,1), (3,2,-1)\}$

31. Dê uma base e a dimensão do subespaço W de $\mathbb{R}^4$ onde $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | x - y = y \quad \text{e} \quad x - 3y + t = 0\}$.

32. Determine uma base e a dimensão do espaço solução de cada um dos seguintes sistemas lineares homogêneos:

    (a) $\begin{cases} x - y = 0 \\ 2x - 3y = 0 \\ 3x + \frac{1}{2}y = 0 \end{cases}$

    (b) $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x - y - 2z = 0 \\ x + 4y + 5z = 0 \end{cases}$

    (c) $\begin{cases} 2x - 2y + z = 0 \\ 3x - y + 3z = 0 \\ 3y + 4z = 0 \end{cases}$

    (d) $\begin{cases} x - y - z - t = 0 \\ 3x - y + 2z - 4t = 0 \\ 2y + 5z + t = 0 \end{cases}$

33. Determine as coordenadas do vetor $u = (4, -5, 3) \in \mathbb{R}^3$ em relação às seguintes bases:

    (a) $\{(1, 1, 1), (1, 2, 0), (3, 1, 0)\}$
    (b) $\{(1, 2, 1), (0, 3, 2), (1, 1, 4)\}$

34. Quais das seguintes aplicações de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^3$ são operadores lineares?

    (a) $T(x, y, z) = (x - y, x + y, 0)$
    (b) $T(x, y, z) = (2x - y + z, 0, 0)$
    (c) $T(x, y, z) = (x, x, x)$
    (d) $T(x, y, z) = (2x^2 + 3y, x, z)$

35. Para cada uma das transformações lineares abaixo determine uma base e a dimensão do núcleo e da imagem:

    (a) $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $T(x, y, z) = x + y - z$
    (b) $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y) = (2x, x + y)$
    (c) $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ dada por $T(x, y, z) = (x-y-z, x+y+z, 2x-y, -y)$

36. Seja $T \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ definida por $T(x, y, z) = (x + z, y - 2z)$, Determine a matriz de T em relação às bases $B = \{(1, 2, 1), (0, 1, 1), (0, 3, -1)\}$ e $C = \{(1, 5), (2, 1)\}$

37. Determine as matrizes das seguintes transformações lineares em relação às bases canônicas dos respectivos espaços:

    (a) $T \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ definida por $T(x, y, z) = (x + y, z)$

    (b) $T \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ definida por $T(x, y) = (x + y, x, x - y)$

    (c) $T \in L(\mathbb{R}^4, \mathbb{R})$ definida por $T(x, y, z, t) = 2x + y - z + 3t)$

    (d) $T \in L(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$ definida por $T(x) = (x, 2x, 3x)$