14.8 Multiplicadores de Lagrange

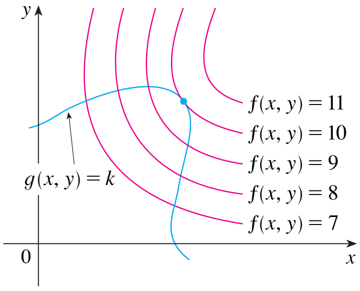

FIGURA 1

TEC *Visual 14.8* mostra uma animação da Figura 1 para as curvas de nível e superfícies de nível.

No Exemplo 6 da Seção 14.7 maximizamos a função volume $V = xyz$ sujeita à restrição $2xz + 2yz + xy = 12$, que expressa a condição de a área da superfície ser de 12 m². Nesta seção apresentaremos o método de Lagrange para maximizar uma função genérica $f(x, y, z)$ sujeita a uma restrição (ou vínculo) da forma $g(x, y, z) = k$.

É fácil explicar a base geométrica do método de Lagrange para as funções de duas variáveis. Então, vamos começar tentando determinar os valores extremos de $f(x, y)$ sujeita a uma restrição da forma $g(x, y) = k$. Em outras palavras, queremos achar os valores extremos de $f(x, y)$ quando o ponto (x, y) pertencer à curva de nível $g(x, y) = k$. A Figura 1 mostra essa curva junto de diversas curvas de nível de f. Estas têm as equações $f(x, y) = c$ onde $c = 7$, 8, 9, 10, 11. Para maximizar $f(x, y)$ sujeita a $g(x, y) = k$ é preciso determinar o maior valor de c, tal que a curva de nível $f(x, y) = c$ intercepte $g(x, y) = k$. Parece, da Figura 1, que isso acontece quando essas curvas se tocam, ou seja, quando essas curvas têm uma reta tangente comum. (Caso contrário, poderíamos aumentar o valor de c.) Isso significa que as retas normais ao ponto (x_0, y_0) onde as duas curvas se tocam devem ser as mesmas. Logo, os vetores gradientes são paralelos, ou seja, $\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0)$ para algum escalar λ.

Esse tipo de argumento também se aplica ao problema de achar os valores extremos de $f(x, y, z)$ sujeita à restrição $g(x, y, z) = k$. Assim, o ponto (x, y, z) está restrito a pertencer à superfície S com equação $g(x, y, z) = k$. Em vez das curvas de nível na Figura 1, devemos considerar as superfícies de nível $f(x, y, z) = c$ e argumentar que, se o valor máximo de f é $f(x_0, y_0, z_0) = c$, então a superfície de nível $f(x, y, z) = c$ é tangente à superfície de nível $g(x, y, z) = k$, e então os correspondentes gradientes são paralelos.

Esse argumento intuitivo pode se tornar preciso da seguinte forma. Suponha que uma função f tenha um valor extremo no ponto $P(x_0, y_0, z_0)$ sobre a superfície S e seja C uma curva com equação vetorial $\mathbf{r}(t) = \langle x(t), y(t), z(t)\rangle$ que pertença a S e passe pelo ponto P. Se t_0 é o valor do parâmetro correspondente ao ponto P, então $\mathbf{r}(t_0) = \langle x_0, y_0, z_0\rangle$. A função composta $h(t) = f(x(t), y(t), z(t))$ representa os valores que f assume sobre a curva C. Como f tem um valor extremo em (x_0, y_0, z_0), segue que h tem um valor extremo em t_0, portanto, $h'(t_0) = 0$. Porém, se f for diferenciável, usando a Regra da Cadeia, podemos escrever

$$\begin{aligned} 0 &= h'(t_0) \\ &= f_x(x_0, y_0, z_0)x'(t_0) + f_y(x_0, y_0, z_0)y'(t_0) + f_z(x_0, y_0, z_0)z'(t_0) \\ &= \nabla f(x_0, y_0, z_0) \cdot \mathbf{r}'(t_0) \end{aligned}$$

Isso mostra que o vetor gradiente $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ é ortogonal ao vetor da tangente $\mathbf{r}'(t_0)$ para todas as curvas C. Mas já sabemos da Seção 14.6 que o vetor gradiente de g, $\nabla g(x_0, y_0, z_0)$, também é ortogonal a $\mathbf{r}'(t_0)$ para todas as curvas. (Veja a Equação 14.6.18.) Isso significa que os vetores $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ e $\nabla g(x_0, y_0, z_0)$ precisam ser paralelos. Logo, se $\nabla g(x_0, y_0, z_0) \neq \mathbf{0}$, existe um número λ tal que

Multiplicadores de Lagrange têm esse nome em homenagem ao matemático franco-italiano Joseph-Louis Lagrange (1736-1813).

1 $$\boxed{\nabla f(x_0, y_0, z_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0, z_0)}$$

O número λ na Equação 1 é chamado **multiplicador de Lagrange**. O procedimento baseado na Equação 1 é o seguinte:

Ao deduzirmos o Método de Lagrange, supusemos que $\nabla g \neq \mathbf{0}$. Em cada um de nossos exemplos, você pode verificar que $\nabla g \neq \mathbf{0}$ em todos os pontos onde $g(x, y, z) = k$. Veja o Exercício 23 para descobrir o que pode sair errado se $\nabla g = \mathbf{0}$.

Método dos Multiplicadores de Lagrange Para determinar os valores máximo e mínimo de $f(x, y, z)$ sujeitos à restrição $g(x, y, z) = k$ [supondo que esses valores extremos existam e que $\nabla g \neq \mathbf{0}$ sobre a superfície $g(x, y, z) = k$]:

(a) Determine todos os valores de x, y, z e λ tais que

$$\nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z)$$

e $$g(x, y, z) = k$$

(b) Calcule f em todos os pontos (x, y, z) que resultaram do passo (a). O maior desses valores será o valor máximo de f, e o menor será o valor mínimo de f.

Se escrevermos a equação vetorial $\nabla f = \lambda \nabla g$ em termos de suas componentes, as equações do passo (a) ficarão

$$f_x = \lambda g_x \qquad f_y = \lambda g_y \qquad f_z = \lambda g_z \qquad g(x, y, z) = k$$

Isso é um sistema de quatro equações a quatro incógnitas, x, y, z e λ. Mas não é necessário calcular de modo explícito valores para λ.

Para as funções de duas variáveis, o método dos multiplicadores de Lagrange é análogo àquele que acabamos de descrever. Para acharmos os valores extremos de $f(x, y)$ sujeitos à restrição $g(x, y) = k$, olhamos para todos os valores de x, y e λ, tais que

$$\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y) \qquad \text{e} \qquad g(x, y) = k$$

Isso leva à solução de um sistema de três equações a três incógnitas:

$$f_x = \lambda g_x \qquad f_y = \lambda g_y \qquad g(x, y) = k$$

Nosso primeiro exemplo de método de Lagrange é reconsiderar o problema dado no Exemplo 6 da Seção 14.7.

EXEMPLO 1 Uma caixa retangular sem tampa deve ser feita com 12 m² de papelão. Determine o volume máximo dessa caixa.

SOLUÇÃO Como no Exemplo 6 na Seção 14.7, sejam x, y e z o comprimento, a largura e a altura, respectivamente, da caixa em metros. Queremos maximizar

$$V = xyz$$

sujeita à restrição

$$g(x, y, z) = 2xz + 2yz + xy = 12$$

Utilizando o método dos multiplicadores de Lagrange, olhamos para os valores de x, y, z e λ, tais que $\nabla V = \lambda \nabla g$ e $g(x, y, z) = 12$. Isso gera as equações

$$V_x = \lambda g_x, \qquad V_y = \lambda g_y, \qquad V_z = \lambda g_z, \qquad 2xz + 2yz + xy = 12$$

ou seja:

$$\boxed{2} \qquad yz = \lambda(2z + y)$$

$$\boxed{3} \qquad xz = \lambda(2z + x)$$

$$\boxed{4} \qquad xy = \lambda(2x + 2y)$$

$$\boxed{5} \qquad 2xz + 2yz + xy = 12$$

Não há regras gerais de como resolver esse sistema de equações. Algumas vezes precisamos de certa engenhosidade. No presente caso, você pode observar que, se multiplicarmos $\boxed{2}$ por x, $\boxed{3}$ por y, e $\boxed{4}$ por z, os lados esquerdos dessas equações ficam idênticos. Fazendo isso, temos

$$\boxed{6} \qquad xyz = \lambda(2xz + xy)$$

$$\boxed{7} \qquad xyz = \lambda(2yz + xy)$$

$$\boxed{8} \qquad xyz = \lambda(2xz + 2yz)$$

Outro método de resolver o sistema de Equações (2–5) é isolar λ em cada uma das Equações 2, 3 e 4 para λ e depois igualar as expressões resultantes.

Observamos que $\lambda \neq 0$ porque $\lambda = 0$ implicaria $yz = xz = xy = 0$ de $\boxed{2}$, $\boxed{3}$ e $\boxed{4}$, e isso contradiz $\boxed{5}$. Logo, de $\boxed{6}$ e $\boxed{7}$, temos

$$2xz + xy = 2yz + xy$$

que nos fornece $xz = yz$. Mas $z \neq 0$ (uma vez que $z = 0$ daria $V = 0$), portanto $x = y$. De $\boxed{7}$ e $\boxed{8}$ temos

$$2yz + xy = 2xz + 2yz$$

que dá $2xz = xy$ e assim (como $x \neq 0$), $y = 2z$. Se colocarmos $x = y = 2z$ em $\boxed{5}$, obtemos

$$4z^2 + 4z^2 + 4z^2 = 12$$

Como x, y e z todos são positivos, teremos $z = 1$ e, portanto, $x = 2$ e $y = 2$. Isso concorda com nossa resposta na Seção 14.7.

Em termos geométricos, o Exemplo 2 pede os pontos mais altos e os pontos mais baixos da curva C da Figura 2 que pertence ao paraboloide $z = x^2 + 2y^2$ e que está diretamente acima do círculo de restrição $x^2 + y^2 = 1$.

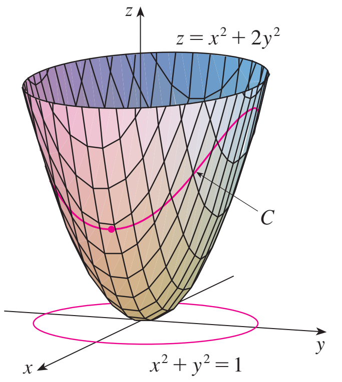

FIGURA 2

EXEMPLO 2 Determine os valores extremos da função $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ no círculo $x^2 + y^2 = 1$.

SOLUÇÃO Foi-nos pedido para determinar os valores extremos de f sujeita à restrição $g(x, y) = x^2 + y^2 = 1$. Usando os multiplicadores de Lagrange, resolvemos as equações $\nabla f = \lambda \nabla g$ e $g(x, y) = 1$, que podem ser escritas como

$$f_x = \lambda g_x \qquad f_y = \lambda g_y \qquad g(x, y) = 1$$

ou

$$2x = 2x\lambda \tag{9}$$

$$4y = 2y\lambda \tag{10}$$

$$x^2 + y^2 = 1 \tag{11}$$

De $\boxed{9}$ temos $x = 0$ ou $\lambda = 1$. Se $x = 0$, então $\boxed{11}$ leva a $y = \pm 1$. Se $\lambda = 1$, então $y = 0$ de $\boxed{10}$, e assim $\boxed{11}$ dá $x = \pm 1$. Dessa forma, os valores extremos possíveis de f são os pontos (0, 1), (0, -1), (1, 0) e (-1, 0). Calculando f nesses quatro pontos, achamos

$$f(0, 1) = 2 \qquad f(0, -1) = 2 \qquad f(1, 0) = 1 \qquad f(-1, 0) = 1$$

Portanto, o valor máximo de f no círculo $x^2 + y^2 = 1$ é $f(0, \pm 1) = 2$, e o valor mínimo é $f(\pm 1, 0) = 1$. Verificando na Figura 2, vemos que esses valores são razoáveis.

A geometria por trás do uso de multiplicadores de Lagrange no Exemplo 2 é mostrada na Figura 3. Os valores extremos de $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ correspondem às curvas de nível que tocam a circunferência $x^2 + y^2 = 1$.

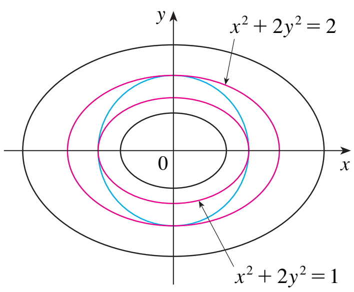

FIGURA 3

EXEMPLO 3 Determine os valores extremos de $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ no disco $x^2 + y^2 \leqslant 1$.

SOLUÇÃO De acordo com o procedimento em (14.7.9), comparamos os valores de f nos pontos críticos com os pontos na fronteira. Uma vez que $f_x = 2x$ e $f_y = 4y$, o único ponto crítico é (0, 0). Comparamos o valor de f no ponto com os valores extremos no limite do Exemplo 2:

$$f(0, 0) = 0 \qquad f(\pm 1, 0) = 1 \qquad f(0, \pm 1) = 2$$

Assim, o valor máximo de f no disco $x^2 + y^2 \leqslant 1$ é $f(0, \pm 1) = 2$, e o valor mínimo é $f(0, 0) = 0$.

EXEMPLO 4 Determine os pontos da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ que estão mais próximos e mais distantes do ponto (3, 1, -1).

SOLUÇÃO A distância de um ponto (x, y, z) ao ponto (3, 1, -1) é

$$d = \sqrt{(x - 3)^2 + (y - 1)^2 + (z + 1)^2}$$

mas a álgebra fica mais simples se maximizarmos e minimizarmos o quadrado dessa distância:

$$d^2 = f(x, y, z) = (x - 3)^2 + (y - 1)^2 + (z + 1)^2$$

A restrição é que o ponto (x, y, z) pertença à esfera, ou seja,

$$g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

De acordo com o método dos multiplicadores de Lagrange, resolvemos $\nabla f = \lambda \nabla g$, $g = 4$. Isso dá

$$2(x - 3) = 2x\lambda \tag{12}$$

$$2(y - 1) = 2y\lambda \tag{13}$$

$$2(z + 1) = 2z\lambda \tag{14}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4 \tag{15}$$

O modo mais simples de resolver essas equações é determinar x, y e z em termos de λ de $\boxed{12}$, $\boxed{13}$ e $\boxed{14}$, e substituir esses valores em $\boxed{15}$. De $\boxed{12}$ temos

$$x - 3 = x\lambda \qquad \text{ou} \qquad x(1 - \lambda) = 3 \qquad \text{ou} \qquad x = \frac{3}{1 - \lambda}$$

[Observe $1 - \lambda \neq 0$ porque $\lambda = 1$ é impossível a partir de $\boxed{12}$.] Da mesma forma, $\boxed{13}$ e $\boxed{14}$ dão

$$y = \frac{1}{1 - \lambda} \qquad z = -\frac{1}{1 - \lambda}$$

Portanto, de $\boxed{15}$ temos

$$\frac{3^2}{(1 - \lambda)^2} + \frac{1^2}{(1 - \lambda)^2} + \frac{(-1)^2}{(1 - \lambda)^2} = 4$$

que nos dá $(1 - \lambda)^2 = \frac{11}{4}$, $1 - \lambda = \pm\sqrt{11}/2$, logo

$$\lambda = 1 \pm \frac{\sqrt{11}}{2}$$

Esses valores de λ então fornecem os pontos correspondentes (x, y, z)

$$\left(\frac{6}{\sqrt{11}}, \frac{2}{\sqrt{11}}, -\frac{2}{\sqrt{11}}\right) \qquad \text{e} \qquad \left(-\frac{6}{\sqrt{11}}, -\frac{2}{\sqrt{11}}, \frac{2}{\sqrt{11}}\right)$$

É fácil ver que f tem valor menor no primeiro desses pontos; dessa forma, o ponto mais próximo é $\left(6/\sqrt{11}, 2/\sqrt{11}, -2/\sqrt{11}\right)$ e o mais distante é $\left(-6/\sqrt{11}, -2/\sqrt{11}, 2/\sqrt{11}\right)$.

A Figura 4 mostra a esfera e o ponto mais próximo P do Exemplo 4. Você pode pensar em um modo de calcular as coordenadas de P sem usar o cálculo?

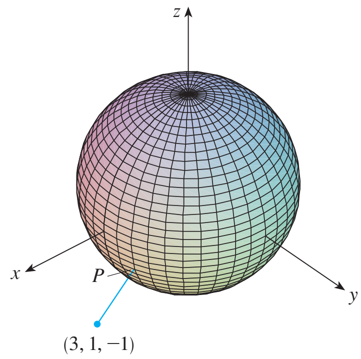

FIGURA 4

Duas Restrições

Suponha agora que queiramos determinar os valores máximo e mínimo de $f(x, y, z)$ sujeita a duas restrições (vínculos) da forma $g(x, y, z) = k$ e $h(x, y, z) = c$. Geometricamente, isso significa que estamos procurando pelos valores extremos de f quando (x, y, z) está restrito a pertencer à curva C, obtida pela intersecção das superfícies de nível $g(x, y, z) = k$ e $h(x, y, z) = c$. (Veja a Figura 5.) Suponha que f tenha um tal valor extremo no ponto $P(x_0, y_0, z_0)$. Sabemos do início dessa seção que ∇f é ortogonal a C em P. Mas também sabemos que ∇g é ortogonal a $g(x, y, z) = k$ e ∇h é ortogonal a $h(x, y, z) = c$, portanto ∇g e ∇h são ortogonais a C. Isso significa que o vetor gradiente $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ está no plano determinado por $\nabla g(x_0, y_0, z_0)$ e $\nabla h(x_0, y_0, z_0)$. (Presumimos que esses vetores gradientes não são nulos nem paralelos.) Portanto, existem números λ e μ (chamados multiplicadores de Lagrange) tais que

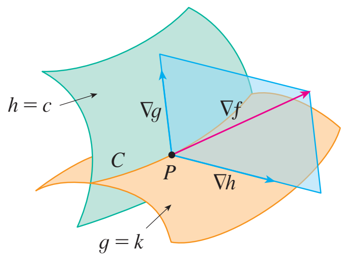

FIGURA 5

$$\boxed{16} \qquad \boxed{\nabla f(x_0, y_0, z_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0, z_0) + \mu \nabla h(x_0, y_0, z_0)}$$

Nesse caso o método de Lagrange nos leva a procurar por valores extremos ao resolver cinco equações nas cinco incógnitas x, y, z, λ e μ. Essas equações são obtidas ao escrever a Equação 16 em termos de seus componentes e ao utilizar as equações de restrição :

$$f_x = \lambda g_x + \mu h_x$$

$$f_y = \lambda g_y + \mu h_y$$

$$f_z = \lambda g_z + \mu h_z$$

$$g(x, y, z) = k$$

$$h(x, y, z) = c$$

EXEMPLO 5 Determine o valor máximo da função $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$ na curva da intersecção do plano $x - y + z = 1$ com o cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

O cilindro $x^2 + y^2 = 1$ intercepta o plano $x - y + z = 1$ em uma elipse (Figura 6).O Exemplo 5 questiona o valor máximo de f quando (x, y, z) pertence a essa elipse.

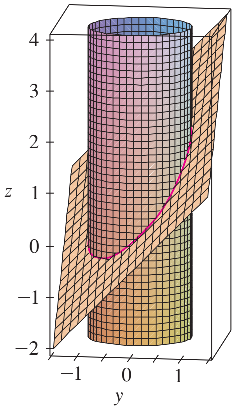

FIGURA 6

SOLUÇÃO Maximizamos a função $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$ sujeita às restrições $g(x, y, z) = x - y + z = 1$ e $h(x, y, z) = x^2 + y^2 = 1$. A condição de Lagrange é $\nabla f = \lambda \nabla g + \mu \nabla h$, de modo que devemos resolver as equações

$$\boxed{17} \qquad 1 = \lambda + 2x\mu$$

$$\boxed{18} \qquad 2 = -\lambda + 2y\mu$$

$$\boxed{19} \qquad 3 = \lambda$$

$$\boxed{20} \qquad x - y + z = 1$$

$$\boxed{21} \qquad x^2 + y^2 = 1$$

Substituindo $\lambda = 3$ [de $\boxed{19}$ em $\boxed{17}$], obtemos $2x\mu = -2$, e então $x = -1/\mu$. Analogamente, $\boxed{18}$ dá $y = 5/(2\mu)$. Substituindo em $\boxed{21}$, temos

$$\frac{1}{\mu^2} + \frac{25}{4\mu^2} = 1$$

e $\mu^2 = \frac{29}{4}$, $\mu = \pm\sqrt{29}/2$. Então $x = \mp 2/\sqrt{29}$, $y = \pm 5/\sqrt{29}$, e, de $\boxed{20}$, $z = 1 - x + y = 1 \pm 7/\sqrt{29}$. Os valores correspondentes de f são

$$\mp\frac{2}{\sqrt{29}} + 2\left(\pm\frac{5}{\sqrt{29}}\right) + 3\left(1 \pm \frac{7}{\sqrt{29}}\right) = 3 \pm \sqrt{29}$$

Portanto, o valor máximo de f na curva dada é $3 + \sqrt{29}$.