RESUMO DA LINGUAGEM E INTERPRETAÇÃO NA LÓGICA DE PREDICADOS DE PRIMEIRA ORDEM (LPPO)

Baseado no Material da:

Professora Doutora Rita Maria Da Silva Julia

BIBLIOGRAFIA

1. Apt, K.R., From Logic Programming to Prolog, Prentice Hall, 1996
2. BRATKO, L. Prolog Programming for Artificial Intelligence, 3rd Edition, Addison-Wesley, 2000.
3. ENDERTON, H. B. : A Mathematical Introduction to Logic, 2nd Edition. Academic Press, 2000
4. FITTING, M.: First-Order Logic and Automated Theorem Proving, 2nd Edition. Springer-Verlag, 1990.
5. Gochet, P., Gribomont, P., Logique – Méthodes pour l´informatique fondamentale- Hermes, Paris, 1990, 1991.
6. LLOYD, J. W. : Foundations of Logic Programming. 2nd Edition. Springer-Verlag, 1987.
7. MENDELSON, E. Introduction to Mathematical Logic, 4th Edition. Chapman & Hall/CRC, 1997.
8. Reeves, S., Clarke, M., Logic For Computer Science-Addison-Wesley- 1990
9. 10. STERLING, L.; SHAPIRO, E. The Art of PROLOG: Advanced Programming, 2nd Edition. MIT Press, 1994.

1. INTRODUÇÃO À LPPO

Há várias formas de inferência lógica que não podem ser justificadas no contexto da Lógica das Proposições (LP), tal como as 4 inferências envolvendo os enunciados P, Q e R abaixo:

(1) Todo homem é mortal. (P)
Sócrates é homem. (Q)
Então,
Sócrates é mortal . (R)

(2) Todo amigo de Martim é amigo de João. (P)
Pedro não é amigo de João. (Q)
Então,
Pedro não é amigo de Martim. (R)

(3) Todo humano é racional. (P)
Alguns animais são humanos. (Q)
Então,
Alguns animais são racionais. (R)

(4) O successor de um inteiro par é um inteiro ímpar. (P)
2 é um inteiro par. (Q)
Então,
O successor de 2 é um inteiro ímpar. (R)

Note que as 4 inferências acima são representadas, na LP, pela fórmula **$(P \wedge Q) \rightarrow R$**, que não é uma tautologia. Logo, na LP, diferentemente do esperado pelo senso comum, R não pode ser inferido a partir de P e Q. A solução para tal impasse aparece através da utilização da Lógica dos Predicados, que, essencialmente, corresponde a uma extensão da linguagem e da semântica da LP. A título de exemplo, as 4 inferências anteriores são detectadas pela Lógica dos Predicados e podem ser representadas, respectivamente, conforme se segue. Note que, se A(x) indica que x satisfaz uma propriedade A,

$(\forall x)\ A(x)$ significa que a propriedade A vale para todo x, ou seja, que todo elemento do domínio analisado satisfaz a propriedade A. por outro lado, $(\exists x)A(x)$ significa que pelo menos um *x* tem a propriedade A. No caso, $\forall$ é chamado quantificador universal e $\exists$ é chamado de quantificador existencial. A seguir, apresentam-se as inferências abordadas acima na notação do Cálculo dos Predicados, onde A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8, A_9 representam, respectivamente, as propriedades Homem, Mortal, Amigo, Humano, Racional, Animal, Inteiro, Par e Ímpar.

(1) $(\forall x)\ (A_1(x) \rightarrow A_2(x))$

$A_1(a_1)$

Então,

$A_2(a_1)$,

onde a_1 vale *sócrates*.

(2) $(\forall x)\ (A_3(x, a_1) \rightarrow A_3(x, a_2))$

$\neg\ A_3(a_3, a_2)$

Então,

$\neg\ A_3(a_3, a_1)$,

Onde a_1, a_2 e a_3 são elementos constantes do domínio analisado que valem *Martim*, *João* e *Pedro* respectivamente.

(3) $(\forall x)\ (A_4(x) \rightarrow A_5(x))$

$(\exists x)\ (A_6(x) \wedge A_4(x))$

Então,

$(\exists x)\ (A_6(x) \wedge A_5(x))$.

(4) $(\forall x)\ (\ (A_7(x) \wedge A_8(x)) \rightarrow (A_7(f_1(x)) \wedge A_9(f_1(x)))\ )$

$A_7(a_1) \wedge A_8(a_1)$

Então,

$A_7(f_1(a_1)) \wedge A_9(f_1(a_1))$,

onde a_1 vale *2* e $f_1(a_1)$ representa uma aplicação que produz como resultado o *successor de* a_1.

OBSERVAÇÕES IMPORTANTES:

- A validade das inferências acima independe dos significados particulares das propriedades A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8 e A_9, das constantes a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 , e da relação f_1 aplicada.
- As propriedades A_i de aridade "n" são definidas como sendo mapeamentos do tipo: $D^n \rightarrow \{T, F\}$, ou seja, uma propriedade A_i de aridade "n", ao ser aplicada a uma n-tupla do domínio sob análise, produz como resultado valores lógicos "verdadeiro" ou "falso". Na LPPO essas propriedades são denominadas PREDICADOS.
- Os mapeamentos f_i de aridade "n" são definidas como sendo mapeamentos do tipo: $D^n \rightarrow D$, ou seja, um mapeamento f_i de aridade "n", ao ser aplicado a uma n-tupla do domínio sob análise, produz como resultado um elemento deste domínio. Na LPPO esses mapeamentos são denominados FUNÇÕES.

D de Domínio!

2. DEFINIÇÕES GRAMATICAIS DA LPPO

a) ALFABETO

- Constantes: letras minúsculas do início do alfabeto: a, b, c, a_1, b_1 , c_1, ... a_n, b_n , c_n, ...
- Variáveis: letras minúsculas do final do alfabeto: x, y, z, w, x_1 , y_1 , z_1 , w_1 , …, x_n , y_n , z_n , w_n , ...
- Predicados: P, Q, R, P_1, Q_1, R_1,..., P_n, Q_n, R_n, , ...
- Funções: f, f_1 , f_2, ...f_n , ...
- Quantificadores: $\forall$ (universal), $\exists$ (existencial).
- Conectivos: $\neg$ (negação), $\wedge$ (conjunção), $\vee$ (disjunção) , $\rightarrow$ (implicação ou condicional), $\leftrightarrow$ (bi-implicação ou bi-condicional).

b) FORMAÇÃO DE TERMOS NA LPPO

(i) As constantes e as variáveis são termos;

(ii) Se t_1, …, t_n são termos e f_i é uma função de aridade n, então $f_i(t_1, \ldots, t_n)$ é um termo.

c) LINGUAGEM DA LPPO – ÁTOMOS E LITERAIS

A linguagem da LPPO corresponde ao conjunto de suas fórmulas bem formadas, ou seja, das fórmulas que respeitam as regras sintáticas definidas pela seguinte gramática:

- Se $t_1, \ldots, t_n$ são termos e P_i é um predicado de aridade *n*, então $P_i(t_1, \ldots, t_n)$ é uma fórmula. Tais fórmulas são denominadas ***fórmulas atômicas*** ou, simplesmente, **átomos.** Particularmente, quando a aridade do predicado dessas fórmulas é zero (ou seja, $n = 0$), tais fórmulas correspondem às *Proposições*. Exemplo: assumindo que os predicados P e Q têm aridade zero, P e Q são proposições (e fórmulas atômicas).
- Se H é uma fórmula, $(\neg H)$ também o é.
- Se H e G são fórmulas, também o são: $(H \wedge G)$, $(H \vee G)$, $(H \rightarrow G)$ e $(H \leftrightarrow G)$. Particularmente, na fórmula **$(H \rightarrow G)$** que representa a implicação, diz-se que H é o **antecedente** (ou condição) e G é o **conseqüente**.
- Se H é uma fórmula e se x_i é uma variável, $((\forall x_i)\ H)$ e $((\exists x_i)\ H)$ também são fórmulas.

OBS: um ***literal*** na LPPO consiste em uma fórmula que é um átomo ou a negação de um átomo. Exemplos: P, $P_1(x)$, $P_2(x, y)$, $(\neg P)$, $(\neg P_1(x))$, $(\neg P_2(x, y))$

3) ESCOPO DE UM QUANTIFICADOR

Nas fórmulas $((\forall x)\ H)$ e $((\exists x)\ H)$, a fórmula H é chamada de escopo dos quantificadores $\forall$ e $\exists$, respectivamente. Note que H não precisa, necessariamente, conter a variável x.

4) VARIÁVEIS LIVRES E LIGADAS – FÓRMULAS FECHADAS

Uma *ocorrência de uma variável* x é dita ***ligada*** em uma fórmula H se uma das situações abaixo se verifica:

- A variável ocorre em um quantificador $(\forall x)$ ou $(\exists x)$ em H;
- A variável ocorre no escopo de um quantificador $(\forall x)$ ou $(\exists x)$ em H.

Caso contrário, a ocorrência é dita ***livre*** em H.

Exemplos:

(1) $P_1\ (x_1\ ,\ x_2)$

(2) $(P_1\ (x_1\ ,\ x_2) \rightarrow ((\forall x_1)\ P_2\ (x_1)))$

(3) $(((\forall x_1)\ P_1\ (x_1, x_2)) \rightarrow ((\forall x_1)\ Q_1\ (x_1)))$

(4) $((\exists x_1)\ Q_1\ (x_1, x_2))$

No exemplo 1, as ocorrências de x_1 e x_2 são livres. No exemplo 2, a primeira ocorrência de x_1 e a ocorrência de x_2 são livres; as duas outras ocorrências de x_1 são ligadas. No exemplo 3, todas as ocorrências de x_1 são ligadas e a ocorrência de x_2 é livre. No exemplo 4, todas as ocorrências de x_1 são ligadas e a ocorrência de x_2 é livre. Note, tal como no exemplo 2, que uma variável pode ocorrer livre e ligada em uma mesma fórmula.

Nenhuma ocorrência de variável pode ser ligada por mais de um quantificador. Assim sendo, no exemplo 3, a primeira e a segunda ocorrências de x_1 são ligadas pelo primeiro quantificador. Já a terceira e a quarta ocorrências da mesma variável são ligadas pelo segundo quantificador.

Uma variável é dita livre em uma fórmula H se ela tem pelo menos uma ocorrência livre em H. Da mesma forma, ***uma variável é dita ligada*** em uma fórmula H se ela tem pelo menos uma ocorrência ligada em H. Logo, uma variável pode ser livre e ligada em uma mesma fórmula. Por exemplo, x_1 é livre e ligada no exemplo 2.

Uma expressão pode pertencer ao escopo de um quantificador sem ser ligada por ele. Exemplo: em $((\forall x_1)\ ((P_1\ (x_1, x_2) \wedge P) \rightarrow ((\exists x_1)\ Q_1\ (x_1))))$, as expressões P e $Q_1(x_1)$, apesar de pertencerem ao escopo do quantificador universal, não estão ligadas por ele, pois não contêm variáveis livres que o quantificador universal possa ligar. A recíproca não é verdadeira: uma variável não pode estar ligada por um quantificador sem estar no seu escopo.

Uma fórmula da LPPO é dita fechada quando ela não tem ocorrência livre alguma de variáveis.

5) SIGNIFICADOS (INTERPRETAÇÕES) NA LPPO:

A título de rápida revisão, considerando um dado conjunto D não vazio (chamado de *Domínio*), as constantes, as variáveis, as funções e os predicados do alfabeto da LPPO podem ser interpretados da seguinte forma:

a) Constantes: recebem um valor fixo de D;
b) Variáveis: recebem valores que podem variar dentre os elementos de D;
c) Predicados: um predicado P de aridade *n* é interpretado como um mapeamento (relação) definido da seguinte forma: $D^n \rightarrow \{T, F\}$, onde T e F são os valores lógicos "verdadeiro" e "falso", respectivamente. As interpretações dos predicados podem ser representadas de dois modos diferentes: INTENSIONAL ou EXTENSIONAL. Na representação *intensional*, expressa-se a "propriedade" a que se quer associar o predicado; na representação *extensional*, expressam-se as n-tuplas de D^n que tornam o predicado verdadeiro (ou seja, que são mapeadas no valor lógico *verdadeiro* - representado por T - do contra-domínio);
d) Funções: uma função *f* de aridade *n* é interpretada como um mapeamento (relação) definido da seguinte forma: $D^n \rightarrow D$. As interpretações das funções podem ser representadas de dois modos diferentes: INTENSIONAL ou EXTENSIONAL. Na representação *intensional*, expressa-se o "conceito" a que se quer associar a função; na representação *extensional*, expressam-se as n-tuplas de domínio D^n e seus respectivos mapeamentos no contra-domínio D.

6) SIGNIFICADO (INTERPRETAÇÃO) DAS FÓRMULAS DA LPPO EM UM DOMÍNIO D

Considerando que H e G são fórmulas fechadas da LPPO:

a) A negação $(\neg H)$ é verdadeira em D se H é falsa em D. Caso contrário, a negação é falsa em D.

b) A conjunção $(H \wedge G)$ é verdadeira em D se H e G forem AMBAS verdadeiras em D. Caso contrário, a conjunção é falsa em D.

c) A disjunção $(H \vee G)$ é falsa em D se H e G forem AMBAS falsas em D. Caso contrário, a disjunção é verdadeira em D.

d) A implicação ou condicional $(H \rightarrow G)$ é falsa em D se H for verdadeira em D e G for falsa em D. Caso contrário, a implicação é verdadeira em D. Nos casos em que é verdadeira, diz-se que, em D, H é condição SUFICIENTE para G e G é condição NECESSÁRIA para H.

e) A bi-implicação $(H \leftrightarrow G)$ é verdadeira em D se H e G tiverem AMBAS o mesmo valor lógico em D. Caso contrário, a bi-implicação é falsa em D. Nos casos em que é verdadeira, diz-se que, em D, H é condição SUFICIENTE e NECESSÁRIA para G e que G é condição NECESSÁRIA e SUFICIENTE para H.

f) A fórmula universalmente quantificada $((\forall x_i) H)$ é verdadeira em D se a fórmula H é verdadeira para todo elemento de D. Caso contrário, a fórmula universalmente quantificada é falsa em D.

g) A fórmula existencialmente quantificada $((\exists x_i) H)$ é verdadeira em D se existe pelo menos um elemento de D que torne a fórmula H verdadeira em D. Caso contrário, a fórmula existencialmente quantificada é falsa em D.

7) TRADUÇÃO DE SENTENÇAS EM LINGUAGEM NATURAL (LN) PARA FÓRMULAS DA LPPO

Para que sentenças do Português sejam traduzidas em fórmulas, as seguintes informações são muito úteis:

- Sentenças da forma "Todos P´s são Q´s" se tornam $((\forall x)\ (P(x) \rightarrow Q(x)))$
- Sentenças da forma "Alguns P´s são Q´s" se tornam $((\exists x)\ (P(x) \wedge Q(x)))$
- Se H é uma fórmula, então $((\forall x)\ H) \equiv (\neg((\exists x)\ (\neg H)))$
- Se H é uma fórmula, então $(\neg((\forall x)\ H)) \equiv ((\exists x)\ (\neg H))$

Exemplos de Tradução de sentenças da LN em fórmulas da LPPO (onde os predicados P, Q e R são interpretados como *homem* , *mortal* e *ímpar*, respectivamente):

a) **LN:** Todos os homens são mortais

LPPO: $((\forall x)\ (P(x) \rightarrow Q(x)))$. Note que todas as ocorrências de variáveis são ligadas.

b) **LN:** Se todos são homens, todos são mortais

LPPO: $(\ ((\forall x)\ P(x)) \rightarrow ((\forall x)\ Q(x))\ )$. Note que todas as ocorrências de variáveis são ligadas.

c) **LN:** Alguns homens são mortais.

LPPO: $((\exists x)\ (P(x) \wedge Q(x)))$. Note que todas as ocorrências de variáveis são ligadas.

d) **LN:** Se todos são homens, então *x* é mortal.

LPPO: $(\ ((\forall x)\ P(x))\ ) \rightarrow Q(x)\ )$. Note que a terceira ocorrência de *x* é livre, ao passo que as demais são ligadas (observe o impacto que isso traz no enunciado em LN).

e) **LN:** Se x é homem, então *João* é mortal.

LPPO: (P(x) → Q(a)), onde *a* é uma constante que representa *João*. Note que a única ocorrência de *x* é livre.

.

f) **LN:** O tio de *João* é mortal.

LPPO: Q(f(a)), onde *a* é uma constante que representa *João* e *f* representa a função de aridade 1 (um) *tio*.

g) **LN:** A soma de 2 com 3 não é ímpar.

LPPO: (¬ R(f(a,b))), onde *a* e *b* são constantes que representam os valores do domínio *2* e *3*, respectivamente, e *f* representa a função de aridade 2 (dois) *soma*.

8) **<u>EXEMPLOS DE INTERPRETAÇÃO DE PREDICADOS E FUNÇÕES NA LPPO:</u>**

a) P(x,y) : x > y (definição INTENSIONAL do predicado P);

b) Q(x,y): x ≥ y (definição INTENSIONAL do predicado Q);

c) $Q_1(x)$: x é dentista (definição INTENSIONAL do predicado Q_1);

d) $R(x)$ = {João, Maria}: definição EXTENSIONAL do predicado R no domínio D_2 = {João, Maria, Pedro}, por exemplo. Isso indica que, nessa escolha particular de interpretação para o predicado R(x), apenas os elementos do domínio *João* e *Maria* tornam a propriedade associada ao predicado R verdadeira (seja ela qual for). Logo, o elemento *Pedro* a torna falsa. Assim sendo, caso se deseje adicionalmente, por exemplo, associar a propriedade específica "ser cientista da computação" ao predicado R (com a finalidade de se representar conhecimento), deve-se acrescentar também a seguinte interpretação INTENSIONAL ao predicado R(x) :

R(x): x é cientista da computação. Com isso, fica definido que, em D_2, apenas João e Maria são dentistas.

OBS: note que, neste exemplo de definição EXTENSIONAL, a representação completa do mapeamento $D^1 \rightarrow \{T, F\}$ correspondente ao predicado R (de aridade 1) é: {(João, T), (Maria, T), (Pedro, F)}. Contudo, como convencionamos que a representação EXTENSIONAL de um predicado de aridade *n*, a título de simplificação, consiste do conjunto formado pelas n-tuplas do mapeamento do predicado que são mapeadas em T, a representação EXTENSIONAL de R resume-se a:

R(x) = {João, Maria}, tal como ilustrado no exemplo.

e) **P_1(x,y)** = {<2,1> , <3,1> , <3,2>}, definição EXTENSIONAL do predicado P_1 no domínio D_3 = {1, 2, 3}, por exemplo. Isso indica que, nessa escolha particular de interpretação para o predicado P_1(x,y), apenas os pares ORDENADOS *<2,1>*, *<3,1>* e *<3,2>* (formados a partir de D_3) tornam a propriedade associada ao predicado P_1(x,y) verdadeira (seja ela qual for). Logo, todos os demais pares (como *<1,2>* e *<2,2>*, por exemplo) a tornam falsa. Assim sendo, caso se deseje adicionalmente, por exemplo, associar a propriedade específica "maior do que, ou seja, >" ao predicado P_1(x,y) (com a finalidade de se representar conhecimento), deve-se acrescentar também a seguinte interpretação INTENSIONAL ao predicado P_1(x,y) :

P_1(x,y): x > y. Com isso, fica definido que, em D_3, apenas os pares *<2,1>*, *<3,1>* e *<3,2>* satisfazem tal propriedade (indicando que 2 é maior do que 1; 3 é maior do que 1 e que 3 é maior do que 2).

OBS: note que, neste exemplo de definição EXTENSIONAL, a representação completa do mapeamento $D^2 \rightarrow$ {T, F} correspondente ao predicado P_1 (de aridade 2) é: {(<2,1>, T) , (<3,1>, T), (<3,2>, T), (<1,1>, F), (<2,2>, F), (<3,3>, F), (<1,2>, F), (<1,3>, F), (<2,3>, F)}. Contudo, como convencionamos que a representação EXTENSIONAL de um predicado de aridade *n*, a título de simplificação, consiste do conjunto formado pelas n-tuplas do mapeamento do predicado que são mapeadas em T, a representação EXTENSIONAL de P_1 resume-se a:

P_1(x,y) = {<2,1> , <3,1>), <3,2>}, tal como ilustrado no exemplo.

f) f(x,y) = x + y (definição INTENSIONAL da função f);

g) f_1(x) = 2 * x (definição INTENSIONAL da função f*1*);

h) f(x,y) = {(<0,0> , 0), (<0,1> , 1), (<1,0> , 1), (<1,1> , 2), (<0,2> , 2), (<2,0> , 2), (<1,2> , 3), (<2,1> , 3), (<2,2> , 4), (<3,3> , 6), ... }: definição EXTENSIONAL da função *f* no domínio D_4 = N = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...}, por exemplo. Isso indica que, nessa escolha particular de interpretação para a função f(x,y), o conceito ao qual ela se refere (seja ele qual for) é aplicado aos pares de D_4 : <0,0>, <0,1>, <1,0>, <1,1>, <0,2>, <2,0>, <1,2>, <2,1>, <2,2>, <3,3>, ... produzindo como resultado, respectivamente, 0, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 4, 6, ... Assim sendo, caso se deseje adicionalmente, por exemplo, associar o conceito específico "soma de" à função f(x,y) (com a finalidade de se representar conhecimento), deve-se acrescentar também a seguinte interpretação INTENSIONAL a ela :

f(x, y) = x + y. Com isso, fica definido por g, em D_4, que a soma de 0 com 0 produz 0; de 0 com 1 produz 1; de 1 com 0 produz 0; de 1 com 1 produz 2 etc.

i) g(x) = {(Maria,João)}: definição EXTENSIONAL da função *g* no domínio D_2 = {João, Maria, Pedro}, por exemplo. Isso indica que, nessa escolha particular de interpretação para a função g(x), o conceito ao qual ela se refere (seja ele qual for) é aplicado apenas ao elemento *Maria* de D_2 , produzindo *João* como resultado. Assim sendo, caso se deseje adicionalmente, por exemplo, associar o conceito específico "avô de" à função g(x) (com a finalidade de se representar conhecimento), deve-se acrescentar também a seguinte interpretação INTENSIONAL a ela :

g(x) = avô de x. Com isso, fica definido por g em D_2, unicamente, que Maria tem João como avô (nada podendo ser afirmado com relação aos demais elementos de D_2). **Note que, neste exemplo, *avô* é definido como *função*.**

j) $P_2(x,y)$ = {<João, Maria>}: definição EXTENSIONAL do predicado P_2 no domínio D_2 = {João, Maria, Pedro}, por exemplo. Isso indica que, nessa escolha particular de interpretação para o predicado $P_2(x,y)$, apenas o par ORDENADO *<João,Maria>* (formado a partir de D_2) torna a propriedade associada ao predicado $P_2(x,y)$ verdadeira (seja ela qual for). Logo, todos os demais pares (como *<Maria, João>* e *<João, João>*, por exemplo) a tornam falsa. Assim sendo, caso se deseje adicionalmente, por exemplo, associar a propriedade específica "é avô de" ao predicado $P_2(x,y)$ (com a finalidade de se representar conhecimento), deve-se acrescentar também a seguinte interpretação INTENSIONAL ao predicado $P_2(x,y)$:

$P_2(x,y)$: x é avô de y. Com isso, fica definido que, em D_2, apenas o par *<João,Maria>* satisfaze tal propriedade (indicando que, em D_2, apenas João é avô de Maria, ou seja, ninguém mais é avô de ninguém). **Note que, neste exemplo, *avô* é definido como *predicado*.**

OBS: note que, neste exemplo de definição EXTENSIONAL, a representação completa do mapeamento $D^2 \rightarrow$ {T, F} correspondente ao predicado P_2 (de aridade 2) é: {(<João,Maria>, T) , (<Maria,João>, F), (<Maria, Pedro>, F), (<Pedro, Maria>, F), (<João, Pedro>, F), (<Pedro, João>, F), (<Maria, Maria>, F), (<Pedro, Pedro>, F), (<João, João>, F)}. Contudo, como convencionamos que a representação EXTENSIONAL de um predicado de aridade *n*, a título de simplificação, consiste do conjunto formado pelas n-tuplas do mapeamento do predicado que são mapeadas em T, a representação EXTENSIONAL de P_2 resume-se a :

$P_2(x,y)$ = {<João, Maria>}, tal como ilustrado no exemplo.

9) EXEMPLOS DE INTERPRETAÇÃO DE FÓRMULAS NA LPPO:

- A fórmula $((\forall x)\ P(x))$ é verdadeira nas seguintes Interpretações:

  a) D = {0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, ...}
     P(x): x é par.

  b) D = {1, 3, 5}
     P(x): x é ímpar.

  c) D = {João, Maria, Pedro}
     P(x): {João, Maria, Pedro}.

  d) D = {Machado, Proust, Dostoievsky, Nietzsche}
     P(x): {Machado, Proust, Dostoievsky, Nietzsche}

- A fórmula $((\forall x)\ P(x))$ é falsa nas seguintes Interpretações:

  a) D = {1, 2, 4, 6, 8, 10, 12, ...}
     P(x): x é par.

  b) D = {1, 3, 5, 6}
     P(x): x é ímpar.

  c) D = {João, Maria, Pedro}
     P(x): {}.

  d) D = {Machado, Proust, Dostoievsky, Nietzsche}
     P(x): {Machado, Proust, Dostoievsky}

- A fórmula ($(\forall x_1)$ ($(\forall x_2)$ $P(x_1, x_2)$)) é verdadeira nas seguintes Interpretações:

  a) $D = \{0, 2\}$

  $P(x_1, x_2) = \{<0,0>, <0,2>, <2,0>, <2,2>\}$.

  b) $D = \{1\}$

  $P(x_1, x_2)$: $x_1 = x_2$

- A fórmula ($(\forall x_1)$ ($(\forall x_2)$ $P(x_1, x_2)$)) é falsa nas seguintes Interpretações:

a) $D = \{0, 2\}$

$P(x_1, x_2) = \{<0,0>, <0,2>, <2,0>\}$.

b) $D = \{1, 2\}$

$P(x_1, x_2)$: $x_1 = x_2$

- A fórmula ($(\forall x)$ $P(x, a)$) é verdadeira nas seguintes Interpretações:

  a) $D = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, ...\}$

  $P(x, y)$: $x \geq y$

  $a = 0$

  b) D = {João, Maria}

  P(x, y) = {<João, João>, <Maria, João>}

  a : João

- A fórmula $((\forall x)\ P(x, a))$ é falsa nas seguintes Interpretações:

a) $D = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, ...\}$
   $P(x, y): x \geq y$
   $a = 2$

b) D = {João, Maria}
   P(x, y) = {<João, João>, <Maria, João>}
   a : Maria

- A fórmula $((\forall x)\ P(f(x), x))$ é verdadeira nas seguintes Interpretações:

  a) $D = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, ...\}$
     $P(x, y) : x > y$
     $f(x) = 2 * x$

  b) $D = \{ 3, 5\}$
     $P(x, y) : x \geq y$
     $f(x): \{(3,5), (5,5)\}$

- A fórmula $((\forall x)\ P(f(x), x))$ é falsa nas seguintes Interpretações:

  a) $D = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, ...\}$
     $P(x, y) : x > y$
     $f(x) = 2 * x$

  b) $D = \{ 3, 5\}$
     $P(x, y) : x \geq y$
     $f(x): \{(3,5), (5,3)\}$

- A fórmula $((\forall x_1)\ ((\exists x_2)\ P(x_1, x_2)))$ é verdadeira nas seguintes Interpretações:

  a) $D = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, ...\}$
  $P(x, y) : x \geq y$

  b) D = {João, Maria}
  P(x, y) : {<João, João>, <Maria, João>}

- A fórmula $((\forall x_1)\ ((\exists x_2)\ P(x_1, x_2)))$ é falsa nas seguintes Interpretações:

  a) $D = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, ...\}$
  $P(x, y) : x > y$

  b) D = {João, Maria}
  P(x, y) : {<João, João>}

- A fórmula $((\exists x_1)\ ((\forall x_2)\ P(x_1, x_2)))$ é verdadeira nas seguintes Interpretações:

  a) $D = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, ...\}$
  $P(x, y) : x \leq y$

  b) D = {João, Maria}
  P(x, y) : {<João, João>, <João, Maria>}

- A fórmula $((\exists x_1)\ ((\forall x_2)\ P(x_1, x_2)))$ é falsa nas seguintes Interpretações:

  c) $D = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, ...\}$
  $P(x, y) : x < y$

  d) D = {João, Maria}
  P(x, y) : {<João, João>, <Maria, João>}

- A fórmula ($(\forall x_2)$ $(P(x_2) \rightarrow Q(x_2))$) é verdadeira nas seguintes Interpretações:

a) D = {0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, ...}
P(x): x é impar.

b) D = {0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, ...}
P(x): x é par.
Q(x): x é divisível por 2.

c) D = {João, Maria}
P(x) = { }
Q(x) = {João, Maria}

d) D = {João, Maria}
P(x) = { João }
Q(x) = {João, Maria}

- A fórmula ($(\forall x_2)$ $(P(x_2) \rightarrow Q(x_2))$) é falsa nas seguintes Interpretações:

a) D = {3, 4, 6}
P(x): x é par.
Q(x): x é múltiplo de 3.

b) D = {João, Maria}
P(x) : {João}
Q(x)= { }

- A fórmula ($(\forall x_2)$ $(P(x_2) \wedge Q(x_2))$) é verdadeira nas seguintes Interpretações:

a) D = {12, 6}
   P(x): x é par.
   Q(x): x é múltiplo de 3.

b) D = {João, Maria}
   P(x) : {João, Maria}
   Q(x)= {João, Maria }

- A fórmula ($(\forall x_2)$ $(P(x_2) \wedge Q(x_2))$) é falsa nas seguintes Interpretações:

a) D = {4, 12, 6}
   P(x): x é par.
   Q(x): x é múltiplo de 3.

b) D = {João, Maria}
   P(x) : {João, Maria}
   Q(x)= {Maria }

- A fórmula ($(\exists x_2)$ $(P(x_2) \rightarrow Q(x_2))$) é verdadeira nas seguintes Interpretações:

a) D = {0, 1, 4, 6}
P(x): x é impar.

b) D = {2, 6}
P(x): x é par.
Q(x): x é divisível por 3.

c) D = {João, Maria}
P(x) = { }

d) D = {João, Maria}
P(x) : {João}

e) D = {João, Maria}
P(x) = { João, Maria }
Q(x) = {Maria}

f) D = {3, 4, 8}
P(x): x é par.
Q(x): x é múltiplo de 3.

- A fórmula ($(\exists x_2)$ $(P(x_2) \rightarrow Q(x_2))$) é falsa nas seguintes Interpretações:

a) D = {4, 8}
P(x): x é par.
Q(x): x é múltiplo de 3.

b) D = {João, Maria}
P(x) = {João, Maria}
Q(x) = { }

- A fórmula ($(\exists x_2)$ $(P(x_2) \wedge Q(x_2))$) é verdadeira nas seguintes Interpretações:

a) D = {12, 4}
   P(x): x é par.
   Q(x): x é múltiplo de 3.

b) D = {João, Maria}
   P(x) : {João}
   Q(x)= {João}

- A fórmula ($(\exists x_2)$ $(P(x_2) \wedge Q(x_2))$) é falsa nas seguintes Interpretações:

a) D = {4, 12, 6}
   P(x): x é ímpar.
   Q(x): x é múltiplo de 3.

b) D = {João, Maria}
   P(x) : {João}
   Q(x)= {Maria }