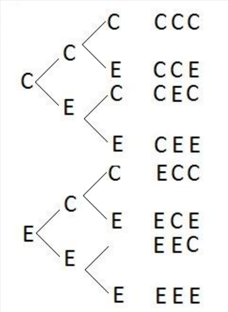
PROBABILIDADE 1

Professora: Patrícia Ferreira Paranaíba

Noção Geral de Variável Aleatória

Na realização de um fenômeno aleatório, é comum termos interesse em uma ou mais quantidades. Essas quantidades são funções das ocorrências do fenômeno.

Exemplo 1: Considere um experimento no qual um estudante é submetido a três questões de múltipla escolha. Considerando que cada questão o estudante pode acertar (C) ou errar (E), todos os resultados possíveis podem ser obtidos pela árvore abaixo:



Assim, o espaço amostral é um conjunto com 8 elementos dado por

$$\Omega = \{CCC, CCE, CEC, CEE, ECC, ECE, EEC, EEE\}$$

Seja X o número de acertos. Temos que a ocorrência no espaço amostral pode ser:

$$\Omega = \left\{ \frac{CCC}{3}, \frac{CCE}{2}, \frac{CEC}{2}, \frac{CEE}{1}, \frac{ECC}{2}, \frac{ECE}{1}, \frac{EEC}{1}, \frac{EEE}{0} \right\}$$

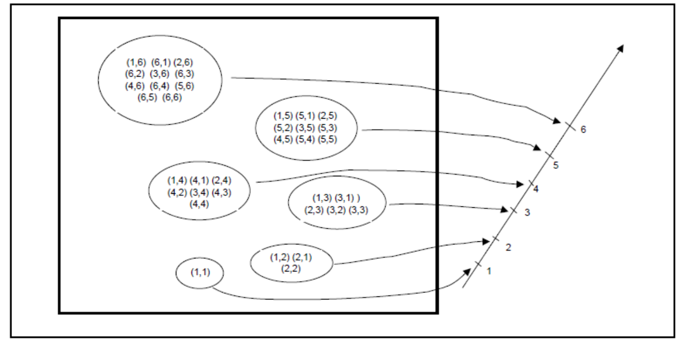
Assim, a cada resultado elementar associamos um valor numérico, que corresponde ao número de acertos, e temos que

$$X(\omega) = \{0, 1, 2, 3\}$$

À função que acabamos de descrever ("X") damos o nome de variável aleatória.

Exemplo2

Consideremos o lançamento de dois dados equilibrados. O espaço amostral desse experimento é formado pelos pares ordenados (i, j) onde $i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Suponhamos que nosso interesse esteja no máximo das faces dos dois dados. Nesse caso, podemos associar um número a cada ponto do espaço amostral, conforme ilustrado na figura abaixo.



Variáveis Aleatórias

Definição: Uma variável aleatória é uma função real (isto é, que assume valores em $\mathbb{R}$) definida no espaço amostral Ω de um experimento aleatório.

Para muitos é estranho utilizar o termo variável para designar uma função. Neste contexto a palavra variável é utilizada para enfatizar que se trata de uma quantidade cujo valor depende de cada ponto do espaço amostral. É aleatória porque o seu valor depende de um ponto ao acaso do espaço amostral.

Função de Distribuição

Definição: A função de distribuição de uma variável aleatória X, representada por F_X, ou simplesmente F, é definida por:

$$F_X(x) = P(X \in (-\infty, x]) = P(X \leq x),\ \forall x \in \mathbb{R}$$

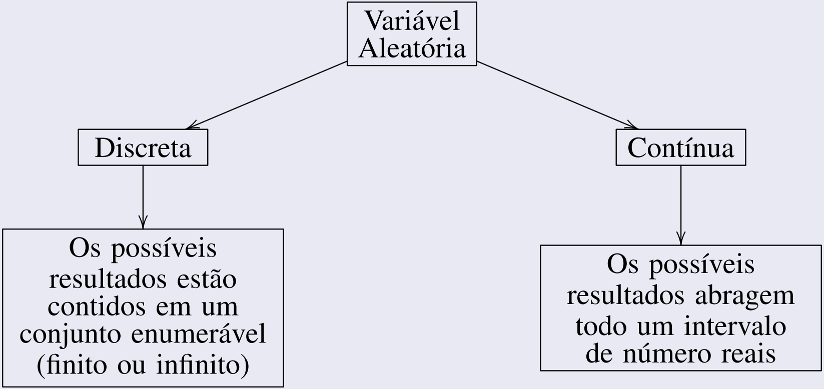
A função de distribuição de X é frequentemente chamada de função de distribuição acumulada (fda) de X. A fda é simplesmente uma maneira conveniente de especificar a probabilidade de todos os intervalos semi-infinitos da reta real, e seus complementos, uniões e interseções.

O conhecimento da função de distribuição acumulada é suficiente para entendermos o comportamento de uma variável aleatória. Ela é chamada de função de distribuição acumulada pois acumula as probabilidades dos valores inferiores ou iguais a x.

Proposição: Uma função de distribuição de uma variável X em $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ obedece às seguintes propriedades:

- Se $x_1 \leq x_2$ então $F(x_1) \leq F(x_2)$, isto é, F é não-decrescente;
- F é contínua à direita;
- $\lim_{x \to -\infty} F = 0$ e $\lim_{x \to \infty} F = 1$.

As variáveis aleatórias podem ser discretas ou contínuas, conforme esquema a seguir.



As variáveis aleatórias abaixo são exemplos de variáveis discretas:

- Lança-se uma moeda 10 vezes e anota-se o número de caras. Este número pode ser 0, 1, 2 ...10.
- Em uma pesquisa de mercado feita com 200 pessoas, pergunta-se sobre a compra de determinado produto. O número de pessoas que compram o produto varia de 0 a 200.
- Conta-se o número de acidentes que ocorrem em uma rodovia num feriado prolongado. O número de acidentes em questão pode ser: 0, 1, 2... Como não temos um valor que limite esse número, supomos que o número de acidentes é qualquer inteiro não negativo.
- Número de chamadas telefônicas que chegam a uma central em um intervalo de tempo.

As variáveis aleatórias abaixo são exemplo de variáveis contínuas:

- Mede-se a altura de uma mulher em uma cidade. O valor encontrado é um número real.
- Em um exame físico para selecionar um jogador de futebol é medido o peso de cada candidato.
- Em campanhas preventivas de hipertensão arterial é comum de tempos em tempos medir-se o nível de colesterol. O valor de cada medida pode ser um número real não negativo.
- Para pacientes que se apresentam num hospital a primeira atitude é medir-se a temperatura, o valor da temperatura é um número real.
- Retira-se uma lâmpada da linha de produção e observa-se o tempo de duração da mesma, o valor é um numero real não negativo.

Variável Aleatória Discreta

Definição 1: A variável aleatória X é **discreta** se tem um número enumerável (finito ou infinito) de valores, isto é, se existe um conjunto $\{x_1, x_2, x_3, \ldots\} \subset \mathbb{R}$ tal que $X(\omega) \in \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}, \forall \omega \in \Omega$.

Definição 2: Se X for uma variável aleatória discreta, com possíveis valores $\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$, então sua **função de probabilidade** é a função que associa a cada valor possível x_i a sua probabilidade de ocorrência $p(x_i)$, ou seja:

$$p(x_i) = P(X = x_i), i = 1, 2, 3, \ldots$$

Uma função de probabilidade deve satisfazer:

$$p(x_i) \geq 0, i = 1, 2, 3, \ldots \qquad \sum_{i=1}^{\infty} p(x_i) = 1$$

Exemplo

Lançam-se 2 dados. Seja X a soma das faces, determinar a função de probabilidade de X.

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

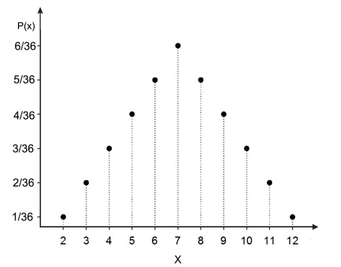


Figura: Representação gráfica da função de probabilidade X.

Variável Aleatória Contínua

Definição 1: A variável aleatória X é **contínua** se sua função de distribuição $F(x)$ é contínua. Isto é, se existe uma função f, tal que

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du, \ \forall x \in \mathbb{R}$$

Definição 2: Se X é uma variável aleatória contínua, uma **função densidade de probabilidade** (f.d.p) é uma função $f(x)$ que satisfaz as seguintes propriedades:

a) $f(x) \geq 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$

b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

Para obter a probabilidade da variável estar num certo intervalo (a,b), fazemos a integral da função neste intervalo, isto é,

$$P(a \leq X \leq b) = P(a < X < b) = \int_{a}^{b} f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Exemplos

1) O tempo gasto, em minutos, por um estudante para responder a uma questão de um teste é uma variável aleatória contínua com função dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{4}, & \text{para } 1 \leq x \leq 3 \\ 0, & \text{para outros valores} \end{cases}$$

a) Verifique se $f(x)$ é uma função densidade de probabilidade.

- $f(x) \geq 0, \quad \forall x \in R$
  - Para $x < 1 \rightarrow f(x) = 0$
  - Para $1 \leq x \leq 3 \rightarrow f(x) > 0$
  - Para $x > 3 \rightarrow f(x) = 0$

- $\int_R f(x)dx = 1$

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{4}dx = \int_1^3 \frac{x}{4}dx = \frac{1}{4}\int_1^3 xdx \\
&= \frac{1}{4}\frac{x^2}{2}\Big]_1^3 \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{3^2}{2} - \frac{1^2}{2}\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{9}{2} - \frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{1}{4}\frac{8}{2} = 1
\end{aligned}$$

b) Qual a probabilidade do aluno responder uma questão entre 2 e 3 minutos?

$$\begin{aligned} P(2 < x < 3) &= \int_2^3 \frac{x}{4} dx = \frac{1}{4} \int_2^3 x dx \\ &= \frac{1}{4} \frac{x^2}{2} \Big]_2^3 \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{3^2}{2} - \frac{2^2}{2} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{9}{2} - \frac{4}{2} \right) \\ &= \frac{1}{4} \frac{5}{2} = \frac{5}{8} = 0,625 \end{aligned}$$

2) Determinar o(s) valor(es) de c para que a função $f(x)$ abaixo seja uma f.d.p.

$$f(x) = \begin{cases} c(1-x)^2, & \text{para}\, 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{c+1}, & \text{para}\, \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{para outros valores} \end{cases}$$

- $f(x) \geq 0, \quad \forall x \in R$
  - Para $0 \leq x < \frac{1}{2}$ temos $f(x) \geq 0$ se $c \geq 0$
  - Para $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ temos $f(x) \geq 0$ se $c + 1 > 0 \Rightarrow c > -1$
  - Assim, $f(x)$ é não negativa se $c \geq 0$

- $\int_R f(x)dx = 1$

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx &= \int_0^{\frac{1}{2}} c(1-x)^2 dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{c+1} dx \\
1 &= \int_0^{\frac{1}{2}} c(1-x)^2 dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{c+1} dx \\
1 &= \left.\frac{-c(1-x)^3}{3}\right]_0^{\frac{1}{2}} + \left.\frac{x}{c+1}\right]_{\frac{1}{2}}^{1} \\
1 &= \frac{7c}{24} + \frac{1}{2(c+1)} = \frac{7c(c+1)+12}{24(c+1)} \\
1 &= \frac{7c^2+7c+12}{24c+24}
\end{aligned}
$$

O que resulta em

$$7c^2 - 17c - 12 = 0 \Rightarrow c = -\frac{4}{7} \quad c = 3$$

Como $c \geq 0$ então a solução negativa é descartada e logo $c = 3$

3) Seja X uma variável aleatória representando o tempo de conversação ao telefone. Supondo que a função de distribuição é dada por $F(x) = (1 - e^{-\lambda x})I_{[0,\infty)}$, com $\lambda > 0$. Determine a função densidade de probabilidade correspondente.

Se $F(x)$ é dada, então $f(x)$ pode ser obtida por diferenciação de $F(x)$

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = \lambda e^{-\lambda x} I_{[0,\infty)}$$

4) Ache a constante k para que a seguinte função seja uma função densidade de probabilidade.

$$f(x) = kx^2 I_{[-k,k]}(x)$$

$$\int_R f(x)dx = \int_{-k}^{k} kx^2 dx = k\frac{x^3}{3}\Big]_{-k}^{k} = \frac{k}{3}(k^3 + k^3) = \frac{2k^4}{3}$$

Assim, igualando o resultado a 1, temos

$$\frac{2k^4}{3} = 1 \Rightarrow k = \sqrt[4]{\frac{3}{2}}$$

Logo

$$f(x) = \sqrt[4]{\frac{3}{2}} x^2 I_{\left[-\sqrt[4]{\frac{3}{2}}, \sqrt[4]{\frac{3}{2}}\right]}(x)$$