Estatística

Professora: Patrícia Ferreira Paranaíba

Teste de Hipóteses

- O teste de hipótese é o procedimento que nos levará a rejeitar ou não uma hipótese a partir das evidências obtidas nos resultados amostrais.
- Essas hipóteses, que podem ser ou não verdadeiras, são denominadas de Hipóteses Estatísticas:
  - HIPÓTESE NULA - É aquela Hipótese Estatística, prefixada, formulada sobre o parâmetro populacional estudado. É representada por H_0.
  - HIPÓTESE ALTERNATIVA - São quaisquer hipóteses que difiram da Hipótese Nula. Pode ser representada por H_1 ou H_a.

Tabela: Erros possíveis de se cometer no processo de tomada de decisão.

Decisões possíveis	Estados possíveis	
	H0 verdadeira	H0 falsa
Aceitação de H0	Decisão correta	Erro do tipo II
Rejeição de H0	Erro do tipo I	Decisão correta

- Ao testar uma hipótese estabelecida, podemos rejeitar H_0 sendo esta verdadeira, cometendo um erro, denominado de Nível de Significância do Teste e é representado por α.
- Consideremos θ o parâmetro estudado e θ_0 o valor inicialmente suposto. Podemos formular as seguintes hipóteses:

$$\begin{cases} H_0: & \theta = \theta_0 \\ H_1: & \theta \neq \theta_0 \end{cases} \qquad \text{Teste Bilateral}$$

$$\begin{cases} H_0: & \theta = \theta_0 \\ H_1: & \theta > \theta_0 \end{cases} \qquad \text{Teste Unilateral}$$

$$\begin{cases} H_0: & \theta = \theta_0 \\ H_1: & \theta < \theta_0 \end{cases} \qquad \text{Teste Unilateral}$$

Teste para médias, variância conhecida

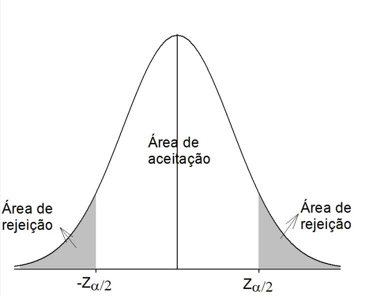
- Suponha que queremos testar a hipótese de que a média é igual a um certo valor especificado μ_0.
- O teste de hipótese pode ser formulado como segue:

$$\begin{cases} H_0: & \mu = \mu_0 \\ H_1: & \mu \neq \mu_0 \end{cases}$$

- Para testar a hipótese, retira-se uma amostra aleatória de n observações e calcula a estatística:

$$z_c = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

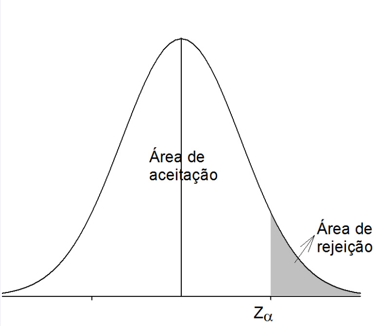
- Como se trata de um teste bilateral, a hipótese H_0 é rejeitada se $|z_c| > z_{\frac{\alpha}{2}}$.



- Se a hipótese formulada for:

$$\begin{cases} H_0: & \mu = \mu_0 \\ H_1: & \mu > \mu_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} H_0: & \mu = \mu_0 \\ H_1: & \mu < \mu_0 \end{cases}$$

- Como se trata de testes unilaterais, a hipótese H_0 é rejeitada se $|z_c| > z_\alpha$.



Exemplo: Uma indústria elétrica que fabrica lâmpadas afirma que o tempo de vida médio é de $800 horas$. Para confirmar esta afirmação foi retirada uma amostra de 40 lâmpadas e obteve uma média $\overline{X} = 750 horas$ e sabe-se que a variância populacional é $\sigma^2 = 1600 horas^2$. Pode-se afirmar que o tempo médio é inferior à $800 horas$? (Considere $\alpha = 5\%$)

Utilizando um teste unilateral

$$\begin{cases} H_0: & \mu = 800 \\ H_1: & \mu < 800 \end{cases}$$

Calculando o valor de z_c

$$z_c = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{750 - 800}{\frac{40}{\sqrt{40}}} = -7,90$$

- Nesse caso, trata-se de um teste unilateral, temos que observar o valor tabelado para $z_\alpha = z_{0,05} = 1,65$.
- Conclusão: Observando $|z_c| = 7,90$, temos que como $7,90 > 1,65$, rejeita-se H_0, a um nível de significância de 5%, ou seja, com 95% de probabilidade a empresa estava errada ao afirmar que o tempo de vida médio é de $800 horas$.

Teste para médias, variância desconhecida

- Suponha que queremos testar a hipótese de que a média é igual a um certo valor especificado μ_0.
- O teste de hipótese pode ser formulado como segue:

$$\begin{cases} H_0: & \mu = \mu_0 \\ H_1: & \mu \neq \mu_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} H_0: & \mu = \mu_0 \\ H_1: & \mu < \mu_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} H_0: & \mu = \mu_0 \\ H_1: & \mu > \mu_0 \end{cases}$$

- Para testar a hipótese, retira-se uma amostra aleatória de n observações ($n \leq 30$) com variância desconhecida calcula-se a estatística:

$$t_c = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$$

- De acordo com o nível de significância α obtemos o valor tabelado t na tabela apropriada.
- A regra de decisão para um teste bilateral será: Rejeita-se H_0 se $|t_c| > t_{\frac{\alpha}{2}}$.
- A regra de decisão para um teste bilateral será: Rejeita-se H_0 se $|t_c| > t_{\alpha}$.

Exemplo: Em uma determinada indústria um determinado rolamento esférico é dito de qualidade se o seu diâmetro médio for igual a $240cm$. Para verificar se os diâmetros médios estão atendendo as especificações, foi retirada uma amostra ao acaso de 20 peças, fornecendo um diâmetro médio de $236cm$ com desvio padrão de $15cm$. Aplicar um teste de hipótese para verificar se o rolamento esférico é de qualidade. (Considere $\alpha = 5\%$)

Utilizando um teste bilateral

$$\begin{cases} H_0: & \mu = 240 \\ H_1: & \mu \neq 240 \end{cases}$$

Calculando o valor de t_c

$$t_c = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\dfrac{S}{\sqrt{n}}} = \frac{236 - 240}{\frac{15}{\sqrt{20}}} = -1,193$$

- Nesse caso, trata-se de um teste bilateral, temos que observar o valor tabelado para $gl = n - 1 = 19$ e $t_{\frac{\alpha}{2}} = t_{\frac{0,05}{2}} = t_{0,025} = 2,093$.
- Conclusão: Observando $|t_c| = 1,193$, temos que como $1,193 < 2,093$ não existe razão para rejeitar H_0, logo os diâmetros médios estão atendendo as especificações.

Teste de hipóteses para proporção

- Assim como para a média, existem testes de hipóteses associados a proporções.
- Estes testes são a respeito do parâmetro populacional p.
- Com os dados coletados de uma amostra de tamanho n, pode-se verificar o número de sucessos X, e estimar a proporção $\hat{p}$.
- Para testar as hipóteses sobre proporções pode-se utilizar a distribuição normal , nesse caso se calcula a estatística

$$z_c = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}}$$

- Rejeita-se H_0:
  - teste bilateral se $|z_c| > z_{\frac{\alpha}{2}}$.
  - teste unilateral se $|z_c| > z_{\alpha}$.

Exemplo: Um centro de pesquisas afirma que 30% das pessoas são usuários de internet sem fio em uma determinada região. Em uma amostra aleatória de 30 pessoas, 12 dizem ter rede sem fio em casa. Teste a afimarção do centro de pesquisa utilizando a significância $\alpha = 0,05$.

Temos que $p_0 = 0,30 \Rightarrow q_0 = 1 - p_0 = 1 - 0,30 = 0,70$, número de sucessos $X = 12$, tamanho da amostra $n = 30$, assim temos:

$$\hat{p} = \frac{X}{n} = \frac{12}{30} = 0,40$$

Utilizando um teste bilateral

$$\begin{cases} H_0 : & p = 0,30 \\ H_1 : & p \neq 0,30 \end{cases}$$

- Calculando o valor de z_c

$$z_c = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}} = \frac{0,40 - 0,30}{\sqrt{\frac{0,3 \times 0,7}{30}}} = 1,20$$

- Nesse caso, trata-se de um teste bilateral, temos que observar o valor tabelado para $z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{\frac{0,05}{2}} = z_{0,025} = 1,960$.
- Conclusão: Observando $|z_c| = 1,20$, temos que como $1,20 < 1,96 \Rightarrow |z_c| < z_{\frac{\alpha}{2}}$ não existe evidências para rejeitar H_0 ao nível de 5% de significância, logo a proporção de pessoas que utilizam a internet sem fio é de 30%.

Teste para a variância populacional

- Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de tamanho n retirada de uma população normal $N(\mu, \sigma^2)$. Suponha que desejamos testar uma hipótese sobre a variância σ^2 desta população.
- Sabemos que a estatística

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$$

tem distribuição qui-quadrado com $n-1$ graus de liberdade. Denotamos $Q \sim \chi^2_{(n-1)}$. Para executar este tipo de teste, podemos seguir os passos:

- Estabelecer uma das hipóteses (bilateral, unilateral à direita ou unilateral à esquerda):

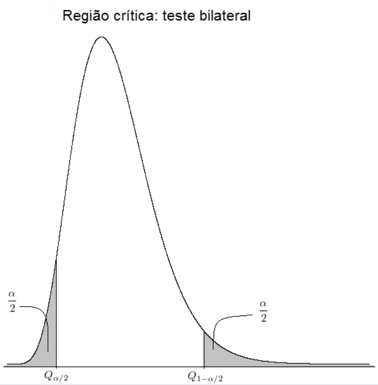
$$\begin{cases} H_0: & \sigma^2 = \sigma_0^2 \\ H_1: & \sigma^2 \neq \sigma_0^2 \end{cases} \qquad \text{Teste Bilateral}$$

$$\begin{cases} H_0: & \sigma^2 = \sigma_0^2 \\ H_1: & \sigma^2 > \sigma_0^2 \end{cases} \qquad \text{Teste Unilateral}$$

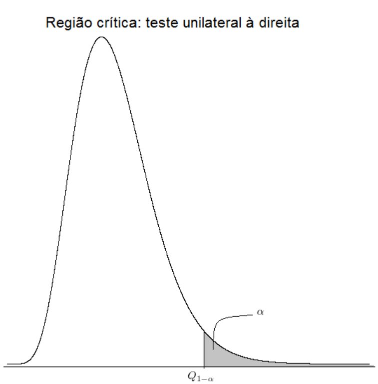
$$\begin{cases} H_0: & \sigma^2 = \sigma_0^2 \\ H_1: & \sigma^2 < \sigma_0^2 \end{cases} \qquad \text{Teste Unilateral}$$

- Fixar o nível de significância α.

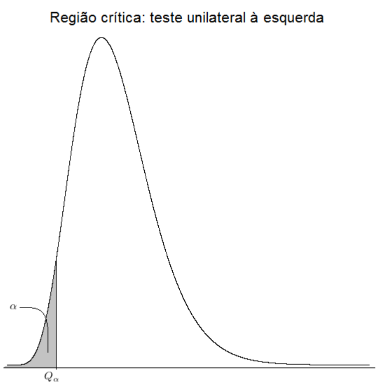
- Determinar a região crítica.
  - Se o teste é bilateral, devemos determinar os pontos críticos $Q_{\alpha/2}$ e $Q_{1-\alpha/2}$ tais que $\mathbb{P}[Q < Q_{\alpha/2}] = \alpha/2$ e $\mathbb{P}[Q > Q_{1-\alpha/2}] = \alpha/2$ utilizando a tabela da distribuição qui-quadrado com $n-1$ graus de liberdade.



- Se o teste é unilateral à direita, devemos determinar o ponto crítico $Q_{1-\alpha}$ tal que $\mathbb{P}[Q > Q_{1-\alpha}] = \alpha$.



- Se o teste é unilateral à esquerda, devemos determinar o ponto crítico Q_α tal que $\mathbb{P}[Q < Q_\alpha] = \alpha$.



- Calcular, sob a hipótese nula, o valor

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$$

- Critério:
    - Teste bilateral: Se $Q_{\text{obs}} < Q_{\alpha/2}$ ou se $Q_{\text{obs}} > Q_{1-\alpha/2}$, rejeitamos H_0. Caso contrário, não rejeitamos H_0.
    - Teste unilateral à direita: se $Q_{\text{obs}} > Q_{1-\alpha}$, rejeitamos H_0. Caso contrário, não rejeitamos H_0.
    - Teste unilateral à esquerda: se $Q_{\text{obs}} < Q_{\alpha}$, rejeitamos H_0. Caso contrário, não rejeitamos H_0.

Exemplo: Uma máquina de preenchimento automático é utilizada para encher garrafas com detergente líquido. Uma amostra aleatória de 20 garrafas resulta em uma variância da amostra do volume de enchimento de $s^2 = 0,0153$ onça fluída^2. Se a variância do volume de enchimento exceder $0,01$ onças fluídas^2, existirá uma proporção inaceitável de garrafas cujo enchimento não foi completo ou foi em demasia. Há evidência nos dados da amostra sugerindo que o fabricante tenha um problema com garrafas com falta ou excesso de detergente? Use $\alpha = 0,05$ e considere que o volume de enchimentos tem distribuição normal.

- Utilizando um teste unilateral:

$$\begin{cases} H_0: & \sigma^2 = 0,01 \\ H_1: & \sigma^2 > 0,01 \end{cases}$$

- Calculando o valor de χ^2

$$\chi_c^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{19 \times 0,0153}{0,01} = 29,07$$

- Nesse caso, trata-se de um teste unilateral. Temos que observar o valor tabelado para $\chi^2_{\alpha;n-1} = \chi^2_{0,05;19} = 30,144$.
- Conclusão: Observando $\chi_c^2 = 29,07$, temos que como $29,07 < 30,144$ não existe evidências para rejeitar H_0 ao nível de 5% de significância, logo a variância do volume de enchimento é igual a $0,01$ onças fluídas^2.