- Cálculo IV

05 de Agosto de 2025

→ Ideia de uma função e sua noção de sequência.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} \dots + \frac{x^n}{n!}$$

· Polinômio de Taylor dá uma aproximação. Já uma série é exatamente igual a dada função.

→ $1 + x + x^2 + x^3 \dots = \frac{1}{1-x}$ (Soma P.G)

$$1 - x + x^2 - x^3 + x^4 \dots = \frac{1}{1+x}$$

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \dots = \ln(1+x)$$

— × — × —

° $1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 \dots = \frac{1}{1+x^2}$

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \dots = \operatorname{arctg} x$$

se $x = 1$; ➡ $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \dots$

· A pergunta que surge é: isso é feito?

Qual é a teoria que rege isso?

→ ...

$1 - 1 + 1 - 1 + \dots = ?$ O número de termos não é par nem ímpar. Houve quem dissesse que é 0. Cada par se cancela. Mas há quem diga que é 1.

→ A ideia inicial é interessante, mas há intervalos e passagens que levam a erro.

- $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \ldots = \frac{\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}} = \frac{1}{x-1}$

isso é válido?

$$\boxed{\frac{1}{x-1} + \frac{1}{1-x} = 0}$$

$x + x^2 + x^3 \ldots x^n = \frac{1}{1-x}$

→ Problema da Razão: uma fórmula vale para um domínio e a outra vale para outro.

→ Conceito de Sequência:

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ seq. de números reais.

- Lei de formação
- fórmulas
- Lei de Recorrência

→ Fibonacci. Nasceu de um exercício de cálculo da população de coelhos.
Existem flores em que o número de pétalas que nascem são exatamente os números de fibonacci.

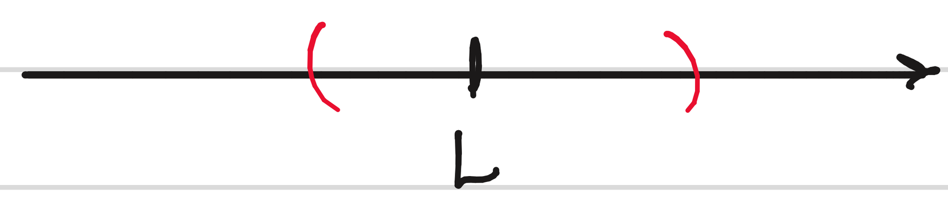
Def: $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é dita convergente se existe $L \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{n \to \infty} a_n = L$

obs: $L \in \mathbb{R}$ (finito).

→ Divergente: $\lim_{n \to \infty} a_n = \infty$, oscila.

- Convergente: Nº Real e finito.

→ $\lim_{n \to \infty} a_n = L \iff \forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0 \rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$



- Isso mostra que as mesmas operações que valem para limites de funções serve para limites de sequências.

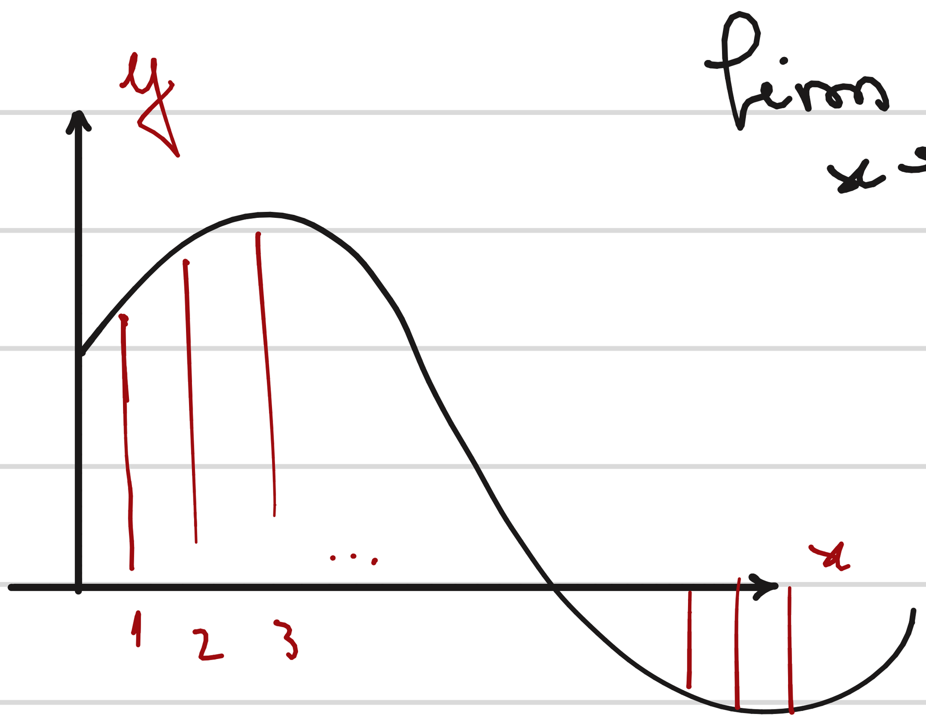
- Teoremas

→ Propriedades Operatórias Básicas:

1) $\lim_{n\to\infty} a_n = L$; $\lim_{m\to\infty} a_m = M$.

- Teorema: seja (a_n) sequência e $f: [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ e $a_n = f(n)$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \to \lim_{n\to\infty} a_n = L$$



→ Ex: $a_n = \frac{\ln n}{n}$, $n > 1$

Seja $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

L'hopital

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$$

$a_n = f(n)$

- Conclusão: Essa sequência converge a zero.

→ Você pode ter uma sequência que tenha limite mesmo a sua função não tendo.

ex. Não existe $\lim_{x\to\infty} \text{sen}\, x$

$a_n = \text{sen}(n\pi)$ → converge a zero.

↳ Devemos analisar $\boxed{\text{caso a caso.}}$

Pois, essa sequência oscila, mas não impede dela ter um limite.

$\rightarrow a_n = \text{sen } n$ não converge.

1) $f(x) = \text{sen } x$ $\quad \nexists \lim f(x)$

$g(x) = \text{sen } n x$ $\quad \exists \lim g(x)$

• Existem subsequências

$$n_i \to \infty, \text{ com } \frac{\pi}{3} + 2k\pi < n_i < \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$$

$$\text{e } \therefore \text{ sen } n_i > \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$n_j \to \infty, \text{ com } \frac{4\pi}{3} + 2k\pi < n_j < \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$$

$$\text{e } \therefore \text{ sen } n_j < \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\rightarrow$ Ex: $a_n = \sqrt[n]{3}$

$$a_n = e^{\ln a_n} = e^{\ln \sqrt[n]{3}} = e^{\ln 3^{\frac{1}{n}}} = e^{\frac{1}{n} \cdot \ln 3}$$

$n \to \infty$ $\quad = e^{0} = 1$ converge a 1.

• $a_n = \sqrt[n]{n}$.

$$\rightarrow a_n = \sqrt[n]{n} = e^{\ln \sqrt[n]{n}} = e^{\ln n^{\frac{1}{n}}} = e^{\frac{\ln}{n}} \rightarrow e^{0} = 1.$$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e$$

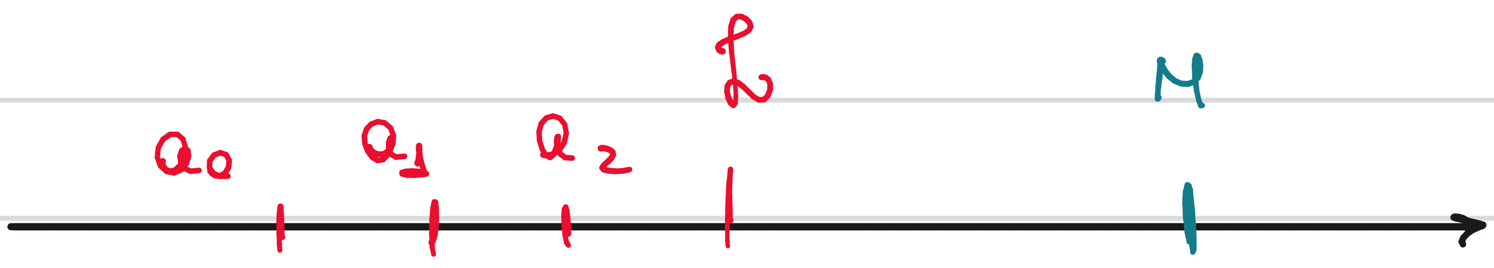
→ **Definição:** $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é <u>crescente</u> se e só se

$$a_{n+1} \geq a_n \quad \forall\ n \geq 0.$$

Def. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitado superiormente

se e só se $\exists\, M \in \mathbb{R} \mid a_n \leq M,\ n \geq 0$

• Teorema: Toda sequência crescente e limitada superiormente é <u>convergente</u>.



$a_1 = \sqrt{\alpha}$; $a_2 = \sqrt{\alpha\sqrt{\alpha}}$; $a_3 = \sqrt{\alpha\sqrt{2\sqrt{\alpha}}}$; etc...

• Passo 1. é crescente

• Passo 2. é limitado superiormente

a_n é convergente.

• $a_{n+1} = \sqrt{\alpha \cdot a_n}$

$n \to \infty$

$L = \sqrt{\alpha \cdot L}$

$L^2 = \alpha L$ $\left\{ \begin{array}{l} L = 0 \\ L = \alpha \end{array} \right.$ convergente p/ α

→ Sequências Numéricas II.

Ex:

1) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^5 = 1$ $\quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^5 = \left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\dots$

2) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$

$= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = e$

3) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{e}$

4) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^n = \lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{3m}$

$\frac{3}{n} = \frac{1}{m}$ $\quad \boxed{m = \frac{n}{3}}$

$\lim_{m\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right]^3$

$= e^3$ //

5) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{3n+2}\right)^n =$

$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{2n}{3n}\left(\frac{1+\frac{1}{2N}}{1+\frac{2}{3N}}\right)\right]^n$

$\lim_{n\to\infty}\cancel{\left(\frac{2}{3}\right)^n}^{\,0}\cdot\underbrace{\left[\frac{1+\frac{1}{2n}}{1+\frac{2}{3n}}\right]^n}_{\text{limite finito}} = 0.$

6) $a_n = n\,\alpha^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$

- $\alpha > 1 \rightarrow a_n > n$ e $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$

- $\alpha = 1 \rightarrow a_n = n$ e $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$

- $0 < \alpha < 1$ $\quad a_n = \underbrace{n}_{\to\infty} \cdot \underbrace{\alpha^n}_{\to 0}$ Indeterminado

- Vamos considerar $f(x) = x \cdot \alpha^x = x \cdot \left(\frac{1}{b}\right)^x$

$b = \frac{1}{\alpha}$

$f(x) = \frac{x}{b^x}$ $\qquad b > 1$

$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{b^x} \overset{\text{l'Hopital}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{b^x \ln b} = 0.$

$a_n = f(n) \rightarrow 0$, com $n \rightarrow \infty$

- $\alpha = 0 \rightarrow a_n = 0 \rightarrow 0.$

obs:

a) $a_n \to 0 \Rightarrow |a_n| \to 0$

b) $|a_n| \to 0 \to a_n \to 0$

c) $a_n \to +\infty \to |a_n| \to +\infty$

d) $|a_n| \to \infty \to a_n \to +\infty$ ou $a_n \to -\infty$
ou a_n oscila $\pm\infty$.

$\rightarrow -1 < \alpha < 0$

com $n|\alpha|^n \to 0 \to n\alpha^n \to 0$

- $\alpha = -1 \to a_n = (-1)^n n$ diverge, $n\alpha^n \to +\infty$
ou $-\infty$
ou $\pm\infty$

Resumindo:

$-1 < \alpha < 1 \Rightarrow a_n = n\alpha^n$ converge a 0.

$\alpha < -1$ ou $\alpha \geq 1 \rightarrow a_n$ Diverge.

7) $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$

$$a_n = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots}{n \cdot n \cdot n \cdot n}$$

$$0 \leq a_n \leq \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}} \rightarrow 0$$

- Conclusão: converge a 0.

- Séries Numéricas:

Def. Seja $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Seq. Numérica

e $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$

→ Dizemos que a série $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = L$

caso contrário dizemos que a série é divergente.

ex > $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$: $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{2^{n+1}}, \ldots\right)$

$a_n = \dfrac{1}{2^{n-1}}$, $n \geq 1$.

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-q} \qquad |q| > 1$$

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (1-q^n)}{1-q}$$

→ A soma infinita não tende, ela é um valor final fixo.

logo: $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$ é convergente.