Mit dem Sinus modellieren

Kirill Heitzler

19. Januar 2021

Inhaltsverzeichnis

1 Rückblick

1.1 Rechtwinkliges Dreieck - Beschriftung

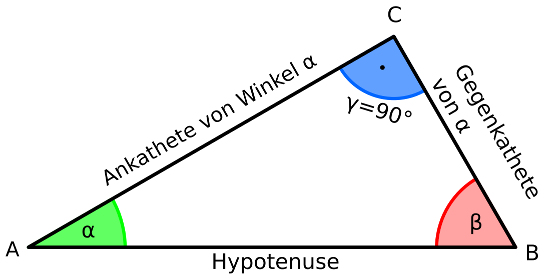


Abbildung 1: Rechtwinkliges Dreieck

Das Rechtwinklige Dreieck wird folgendermaßen wie in Abbildung 1 beschriftet.
Die Ecken werden mit den Buchstaben A, B, C gegen den Uhrzeigersinn bei A angefangen beschriftet.
Die Winkel α, β, γ werden in die Ecken der entsprechenden Buchstaben A, B, C gesetzt.
Die anliegende Kathete zu Winkel α wir 'Ankathete von α' genannt und die Kathete gegenüber von Alpha wird 'Gegenkathete von α'´ genannt.
Die Hypothenuse liegt gegenüber des Rechten Winkel γ.

1.2 Der Sinus

Definition: In einem rechtwinkligen Dreieck nennt man zu einem Winkel α des Dreiecks das Streckenverhältnis

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Hypothenuse}} \tag{1}$$

den **Sinus von** α

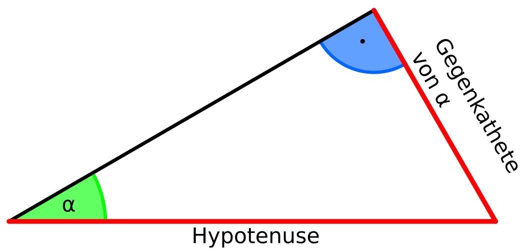


Abbildung 2: Rechtwinkliges Dreieck

1.3 Der Sinus - Beispiel Aufgabe

Gegenkathete von α mithilfe des Sinus berechnen:
Aufgabe: Berechne die Höhe des Freiburger Münsters. Das rechtwinklige Dreieck in Abbildung 3 besitzt einen rechten Winkel(90°), die Hyptenuse 164,05 Meter und die Winkelweite des Winkels α mit 45°. Berechne die Gegenkathete von α namen's x. **Rechnung:**

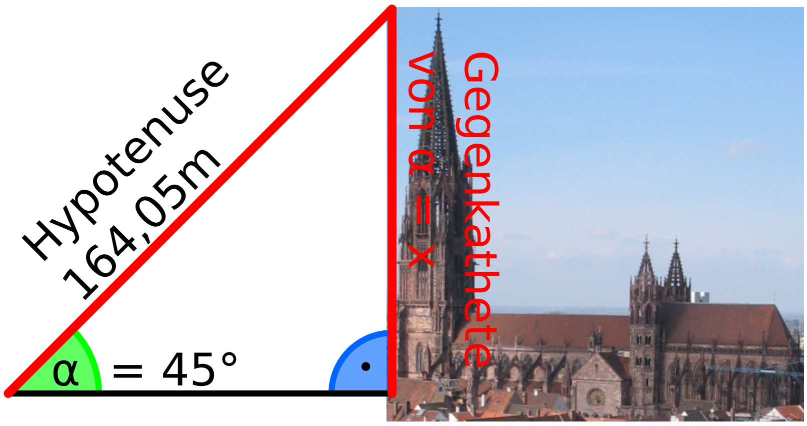


Abbildung 3: Rechtwinkliges Dreieck am Münster

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Hypothenuse}} \tag{1}$$

$$\sin(45) = \frac{x}{164,05m} \qquad | \cdot 164,05m \tag{2}$$

$$\sin(45) \cdot 164,05m = x \tag{3}$$

$$x \cong 116m \tag{4}$$

Antwort: Die Gegenkathete von α beträgt etwa 116 Meter, somit ist das Münster auch etwa 116 Meter groß.

1.4 Der Kosinus und der Tangens

Sinus von α:

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Hypothenuse}} \tag{1}$$

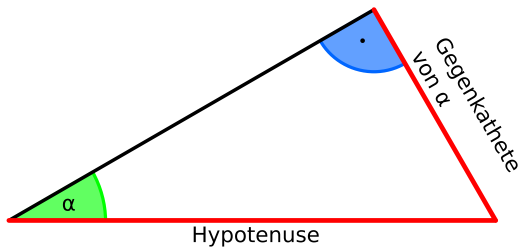


Abbildung 4: Rechtwinkliges Dreieck

Cosinus von α:

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{Ankathete von } \alpha}{\text{Hypothenuse}} \tag{1}$$

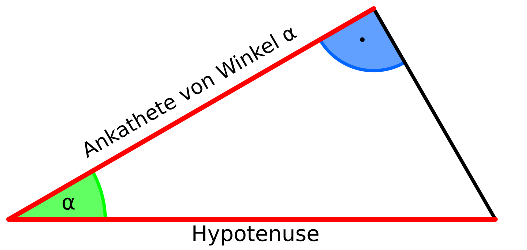


Abbildung 5: Rechtwinkliges Dreieck

Tangens von α:

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Ankathete von } \alpha} \tag{1}$$

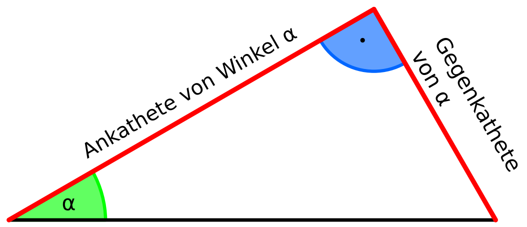


Abbildung 6: Rechtwinkliges Dreieck

2 Einheitskreis

2.1 Einheitskreis - Beispiel

Aufgaben-Text: Auf einem kresiförmigen Koordinatensystem eines Radarschirms Abbildung 7 wird die Lage von zwei Schiffen durch die Entfernung zum Hafen(0) und durch den Kurs gegenüber der x-Achse beschrieben.
Aufgabe: Ein Schiff **A** ist mit dem Kurs **30°** gegenüber der x-Achse **einen Kilometer** weit gefahren. Welche Koordinaten im **x-y-Kooradinatensystem** hat es? Welche Koordinaten hat das Schiff **B**, das mit dem Kurs **75°** textbfeinen Kilometer weit gefahren ist?

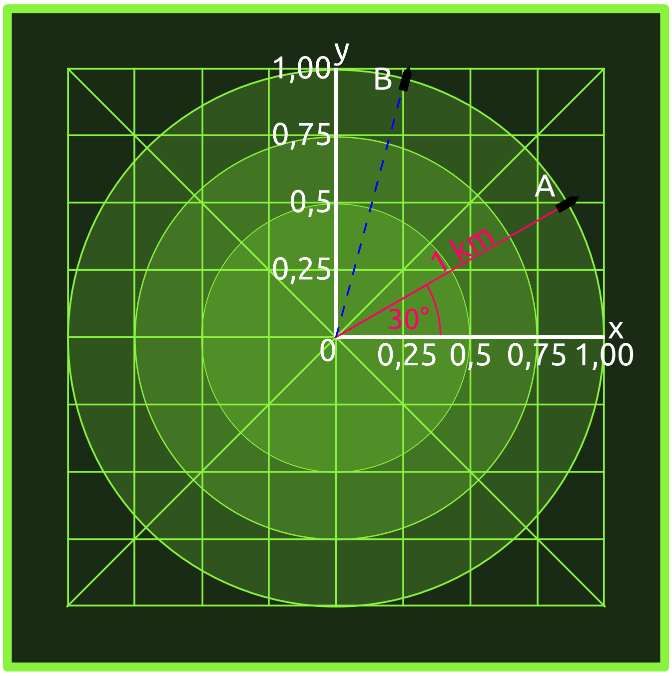


Abbildung 7: Radar

Lösung:

Das Schiff **A** mit dem Kurs **30°** befindet sich auf der x-Achse: etwa **0,86 Kilometer** und y-Achse: **0,5 Kilometer**. Also auf dem Punkt **A(0,86|0,5)**

Das Schiff **B** mit dem Kurs **75°** befindet sich auf der x-Achse: etwa **0,25 Kilometer** und y-Achse: **0,96 Kilometer**. Also auf dem Punkt **A(0,25|0,96)**

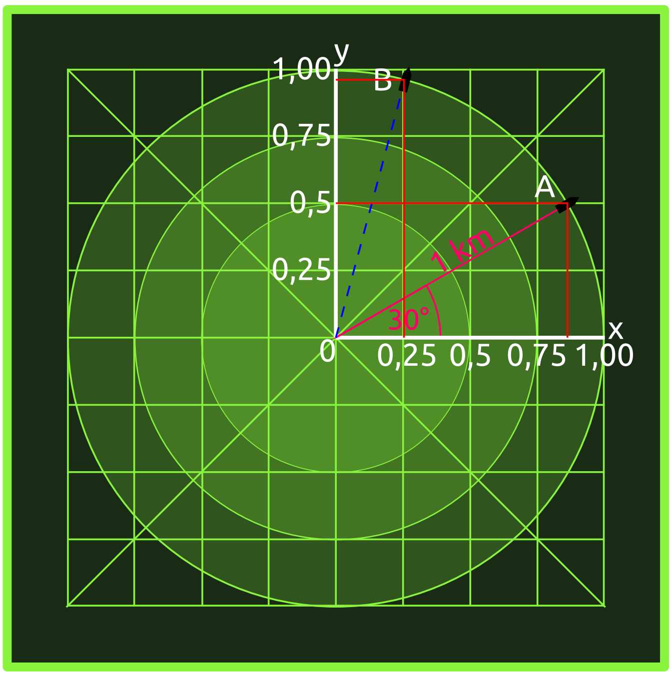


Abbildung 8: Radar Lösung

2.2 Der Sinus und Kosinus am Einheitskreis

Dreiecke mit der **Hypotenusenlänge 1** kann man in einem Koordinatensystem auf folgenden Weise darstellen:

1. Die Endpunkte der **Hypotenuse** sind der Ursprung O und ein Punkt **P**, der auf einem Kreis O mit dem **Radius 1** liegt. Diesen Kreis nennt man den **Einheitskreis**.

2. Die Ecke mit dem rechten Winkel liegt auf der **x-Achse senkrecht unter P**. Der Punkt P hat somit Koordinaten $\mathbf{P(cos(\alpha)|sin(\alpha))}$

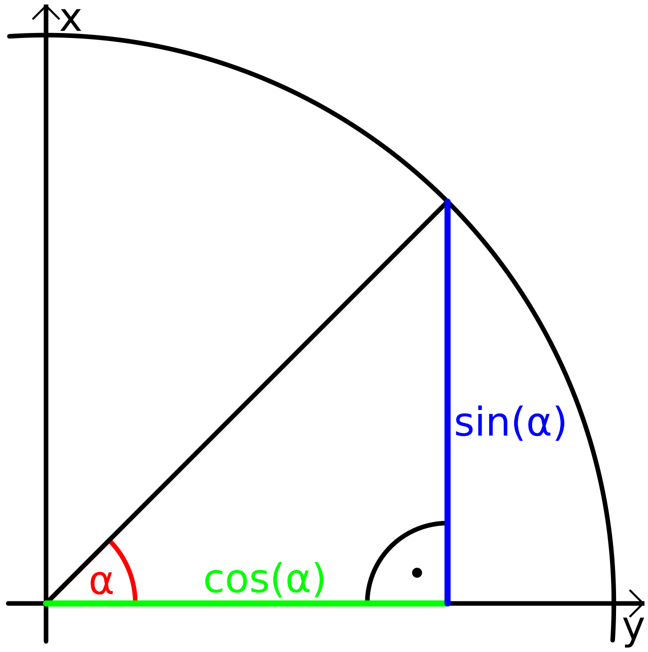
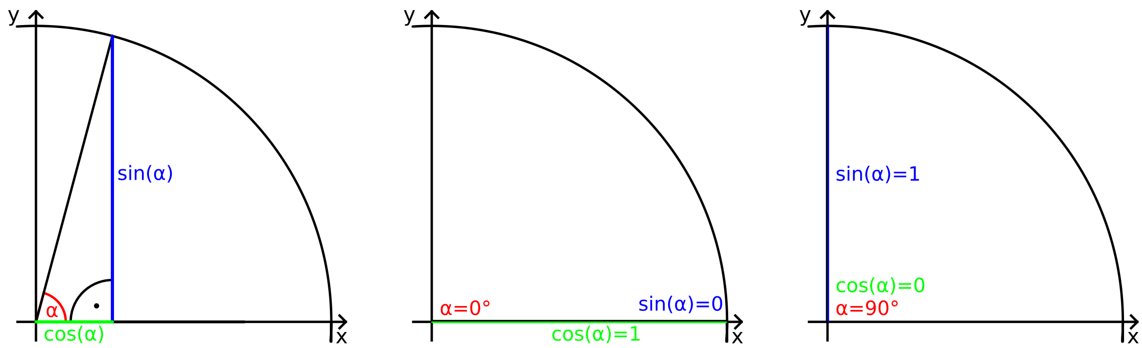


Abbildung 9: Sinus und Kosinus am Einheitskreis

2.3 Beziehungen zwischen Sinus, Kosinus und Tangens



(a) $0 < \alpha < 90$ (b) $sin(0) = 0, cos(0) = 1$ (c) $sin(90) = 1, cos(90) = 1$

Abbildung 10: Beziehung 1

1. Für $0 < \alpha < 90$ nimmt $sin(\alpha)$ mit wachsendem α zu und $cos(\alpha)$ ab(Abbildung 10a). $sin(0) = 0, cos(0) = 1$ (Abbildung 10b), $sin(90) = 1, cos(90) = 0$ (Abbildung 10c).

2. Wendet man auf das im Einheitskreis dargestellte Dreieck den Satz des Pythagoras an(Abbildung 11), so erhält man den für jede Winkelweite gültigen Zusammenhang
$sin^2(\alpha) + cos^2(\alpha) = 1$.
Beispiel:

$$\begin{aligned}
sin^2(\alpha) + cos^2(\alpha) &= 1 && (1)\\
(sin(45))^2 + (cos(45)^2) &= 1 && (2)\\
(\frac{\sqrt{2}}{2})^2 + (\frac{\sqrt{2}}{2})^2 &= 1 && (3)\\
\frac{\sqrt{2^2}}{2^2}) + \frac{\sqrt{2^2}}{2^2} &= 1 && (4)\\
\frac{2}{4} + \frac{2}{4} &= 1 && (5)\\
0,5 + 0,5 &= 1 && (6)
\end{aligned}$$

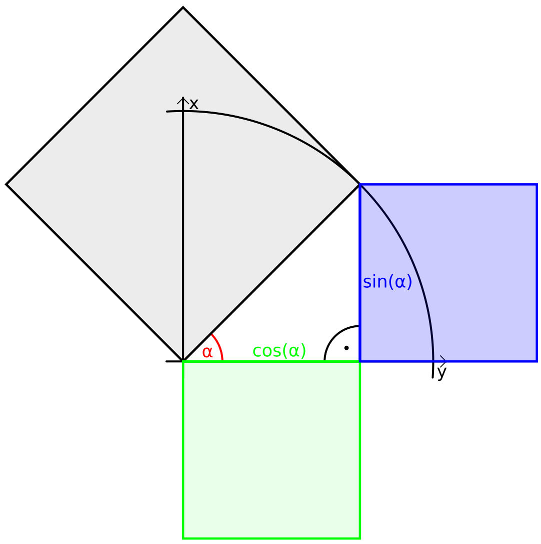


Abbildung 11: Einheitskreis Dreieck Satz des Pythagoras

3. In Abbildung 12 sieht man:
$sin(90 - \alpha) = x = cos(\alpha)$ und
$cos(90 - \alpha) = y = sin(\alpha)$
Beispiel:

$$\begin{aligned}
sin(90 - \alpha) = x &= cos(\alpha) && (1)\\
sin(90 - 30) = \frac{\sqrt{3}}{2} &= cos(30) && (2)
\end{aligned}$$

4. Ebenfalls in Abbildung 12:
$tan(\alpha) = \frac{y}{x} = \frac{sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$.

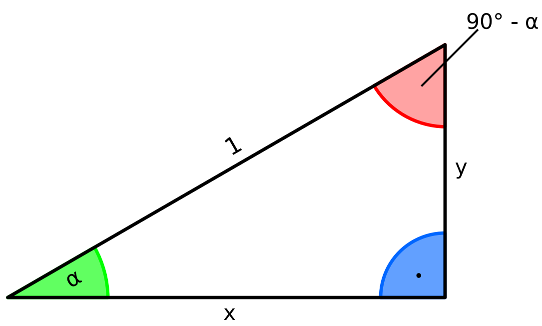


Abbildung 12: sin(90° - α), cos(90° - α)

2.4 Einheitskreis - Definition

Definition: Es gilt:

$sin^2(\alpha) + cos^2(\alpha) = 1$

$sin(90 - \alpha) = sin(\alpha)$

$tan(\alpha) = \frac{sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$, $\alpha \neq 90$, weil: $tan(90) = \frac{sin(90)}{cos(90)} = \frac{1}{0} =!$.

2.5 Einheitskreis - Aufgabe

Aufgabe: $sin(\alpha) = 0,6$.
Bestimme:

a)	*b)*	*c)*	*d)*	*e)*
$cos(\alpha)$	$tan(\alpha)$	$sin(90 - \alpha)$	$cos(90 - \alpha)$	$tan(90 - \alpha)$

a) - Lösung:

$$\begin{aligned}
sin^2(\alpha) + cos^2(\alpha) &= 1 && (1)\\
0,6^2 + cos^2(\alpha) &= 1 && \mid -0,6^2 \quad (2)\\
cos^2(\alpha) &= 1 - 0,36 && \mid\sqrt{} \quad (3)\\
cos(\alpha) &= \sqrt{1 - 0,36} && (4)\\
cos(\alpha) &= \sqrt{0,64} && (5)\\
cos(\alpha) &= 0,8 && (6)
\end{aligned}$$

b) - Lösung:

$$\begin{aligned}
tan(\alpha) &= \frac{sin(\alpha)}{cos(\alpha)} && (1)\\
tan(\alpha) &= \frac{0,6}{0,8} = \frac{6}{8} && (2)\\
tan(\alpha) &= \frac{3}{4} = 0,75 && (3)
\end{aligned}$$

c) - Lösung:

$$sin(90 - \alpha) = cos(\alpha) = 0,8 \quad (1)$$

d) - Lösung:

$$cos(90 - \alpha) = sin(\alpha) = 0,6 \quad (1)$$

e) - Lösung:

$$\begin{aligned}
tan(90 - \alpha) &= \frac{sin(90 - \alpha)}{cos(90 - \alpha)} = \frac{0,8}{0,6} && (1)\\
tan(90 - \alpha) &= \frac{8}{6} = \frac{4}{3} && (2)
\end{aligned}$$

3 Mit dem Sinus modellieren

3.1 Mit dem Sinus modellieren - Beispiel

Aufgabe:

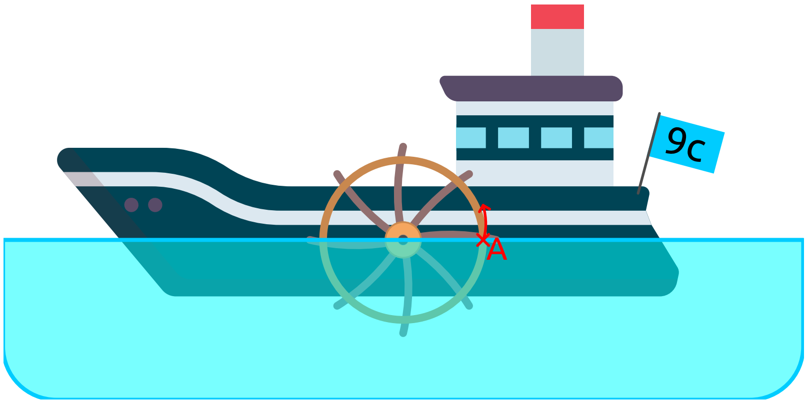


Abbildung 13: Schaufelraddampfer

Bei einem Shaufelraddampfer dreht sich das Rad mit einem Durchmsser von 2 Meter einmal vollständig in 60 Sekunden(Abbildung 13). In welcher Höhe über dem Wasserspiegel liegt der rot markierte Punkt A?
Erstelle eine Wertetabelle in 5 Sekunden Schritten.
Lösung:

Zeit t (in s)	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
Winkel α	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°	360°
Höhe h (in m)	0	0,5	0,87	1	0,87	0,5	0	-0,5	-0,87	-1	-0,87	-0,5	0

3.2 Winkel α mit $0° \leq \alpha \leq 90°$

Am Einheitskreis entspricht $\sin(\alpha)$ der y-Koordinate des Punktes P(Abbildung 14).
$sin(40) \approx 0,64$

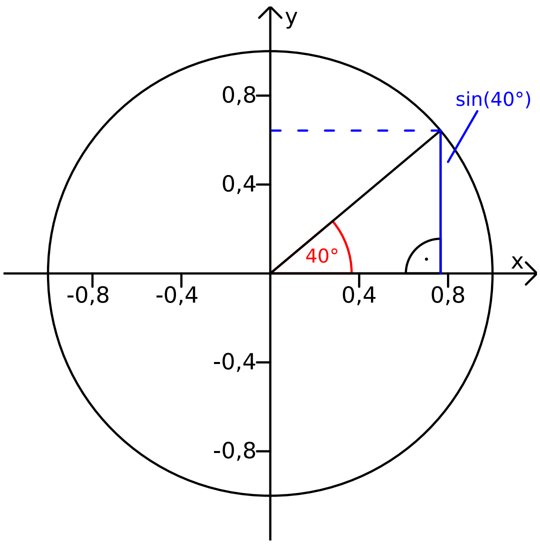
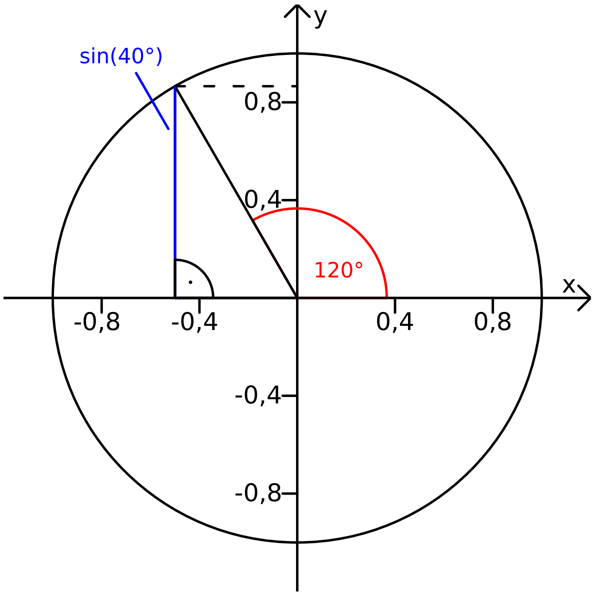
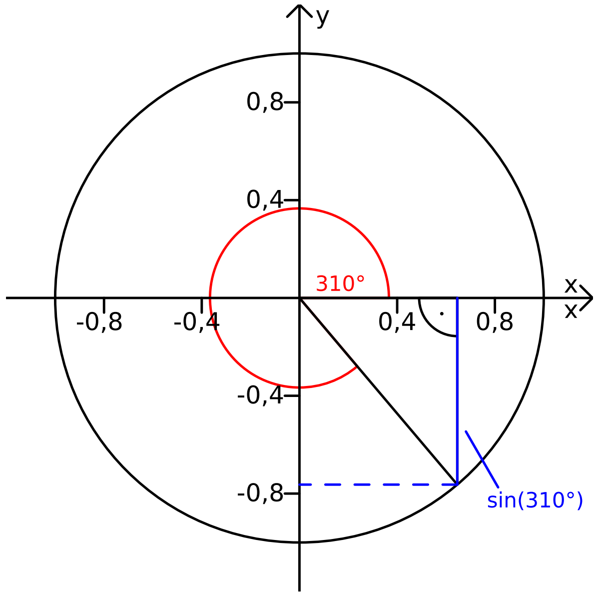


Abbildung 14: Winkel α mit $0° \leq \alpha \leq 90°$

3.3 Erweiterter Winkel α mit $90° < \alpha \leq 360°$



(a) $sin(120) \approx 0,87$



(b) $sin(310) \approx -0,77$

Abbildung 15: Erweiterter Winkel α mit $90° < \alpha \leq 360°$

Wird α über 90° vergrößert, wird der Sinuswert von α ebenso als y-Koordinate des Punktes P festgelegt(Abbildung 15).

3.4 Funktion f mit f(α)

Ordnet man jedem Winkel α mit $0° \leq \alpha \leq 360°$ seinen Sinuswert zu, so erhält man eine Funktion f mit f(α) = sin(α).
Man kann mithilfe des Graphen von f(Abbildung 16) zu gegebenem Winkel den Sinuswert näherungsweise ablesen oder näherungsweise Winkel mit vorgegebenem Sinuswert ermitteln.

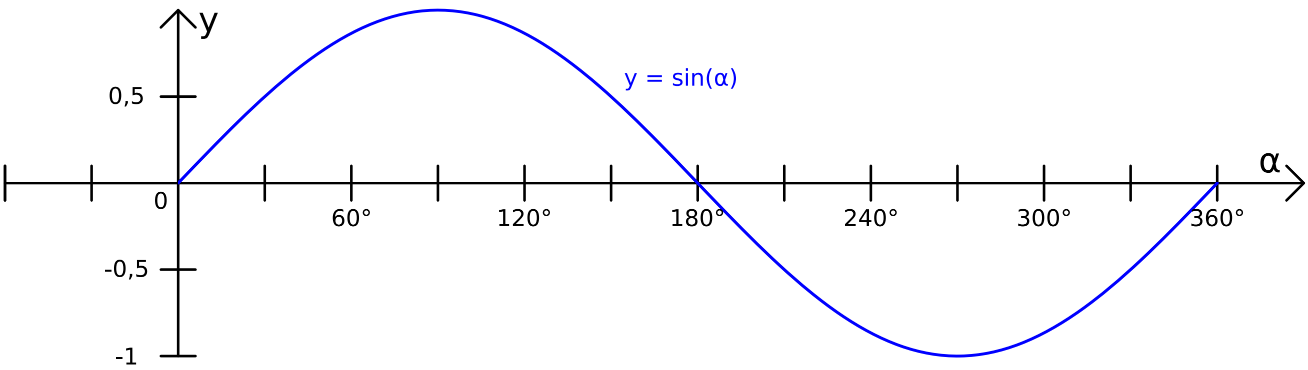


Abbildung 16: $f(\alpha) = sin(\alpha)$

3.5 Sinusfunktion im Gradmaß - Definition

Die Funktion f mit f(α) = sin(α) heißt **Sinusfunktion im Gradmaß**.

3.6 Graph einer Sinusfunktion zeichnen

Zeit t (in s)	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
Winkel α	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°	360°
Höhe h (in m)	0	0,5	0,87	1	0,87	0,5	0	-0,5	-0,87	-1	-0,87	-0,5	0

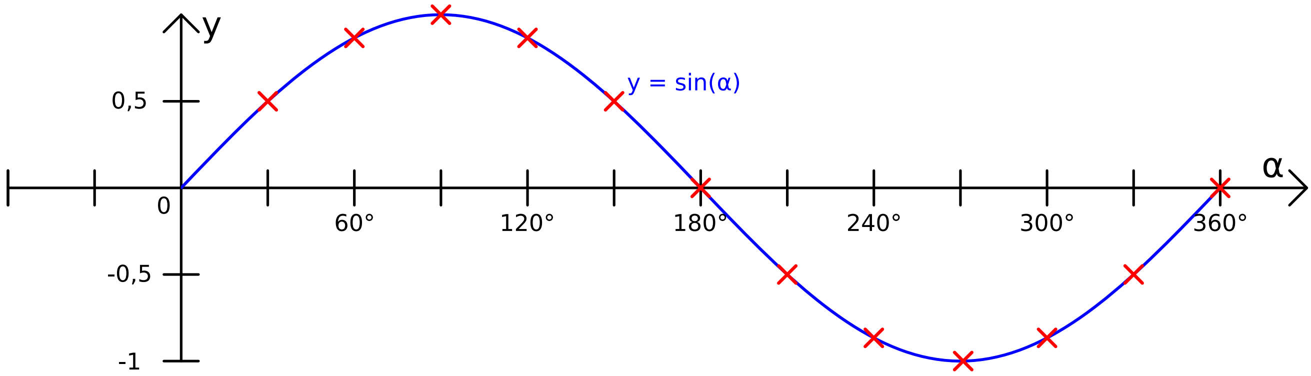


Abbildung 17: Sinuswelle Zeichnen

3.7 Einen Zeitlichen Vorgang modellieren

3.8 Erweiterter Winkel α mit 90° $< \alpha \leq$ 360° - Aufgabe

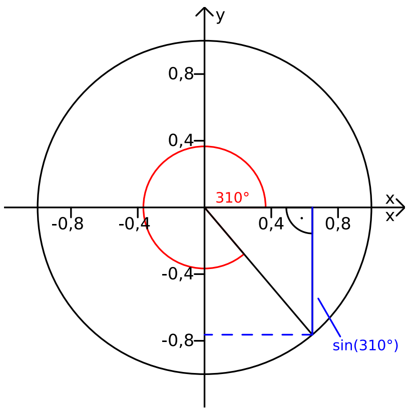


Abbildung 18: $\alpha = 0$

Aufgabe:
Ein Punkt P bewegt sich auf dem Einheitskreis(Abbildung 17) gegen den Uhrzeigersinn. Für α = 0° befindet er sich im Punkt(1|0)
a) Gib die y-Koordinate des Punktes P für α = 140° und für α = 310° an.
b)Bestimme zwei verschiedene Werte für α, sodass seine y-Koordinate 0,8 beträgt.
Lösung:
Lösung - a)
Für α = 140°:

$$sin(\alpha) = y \tag{1}$$
$$sin(140) \approx 0,64 \tag{2}$$
$$cos(\alpha) = x \tag{3}$$
$$cos(140) \approx -0,77 \tag{4}$$

Punkt (-0,77|0,64)
Für $\alpha = 310°$:

$$sin(\alpha) = y \tag{1}$$
$$sin(140) \approx -0,77 \tag{2}$$
$$cos(\alpha) = x \tag{3}$$
$$cos(140) \approx 0,64 \tag{4}$$

Punkt (0,64|-0,77)

Lösung - b)text

4 Zusammenfassung

5 Anwendungsbeispiele / Weiter Anwendungen

6 Quellen

- Freiburger Münster - https://freiburg-schwarzwald.de/fotos06feb/freiburg12-060227.jpg
- Vector Boot - https://www.vecteezy.com/vector-art/170704-flat-ship-vectors
- Lambacher Sweizer 9(S. 90 - 104) - Mathematik Buch