

Mit dem Sinus modellieren

Kirill Heitzler

18. Januar 2021

Inhaltsverzeichnis

1 Rückblick

1.1 Rechtwinkliges Dreieck - Beschriftung

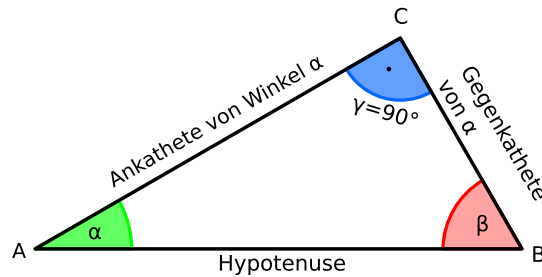


Abbildung 1: Rechtwinkliges Dreieck

Das Rechtwinklige Dreieck wird folgendermaßen wie in ?? beschriftet.

Die Ecken werden mit den Buchstaben A, B, C gegen den Uhrzeigersinn bei A angefangen beschriftet.

Die Winkel α , β , γ werden in die Ecken der entsprechenden Buchstaben A, B, C gesetzt.

Die anliegende Kathete zu Winkel α wird 'Ankathete von α ' genannt und die Kathete gegenüber von Alpha wird 'Gegenkathete von α ' genannt.

Die Hypotenuse liegt gegenüber des Rechten Winkel γ .

1.2 Der Sinus

Definition: In einem rechtwinkligen Dreieck nennt man zu einem Winkel α des Dreiecks das Streckenverhältnis

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}} \quad (1)$$

den **Sinus von α**

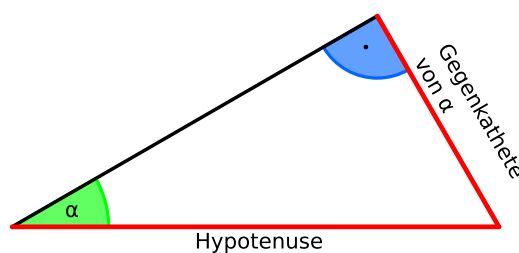


Abbildung 2: Rechtwinkliges Dreieck

1.3 Der Sinus - Beispiel Aufgabe

Gegenkathete von α mithilfe des Sinus berechnen:

Aufgabe: Berechne die Höhe des Freiburger Münsters. Das rechtwinklige Dreieck in ?? besitzt einen rechten Winkel (90°), die Hypotenuse 164,05 Meter und die Winkelweite des Winkels α mit 45° . Berechne die Gegenkathete von α nennen's x . **Rechnung:**

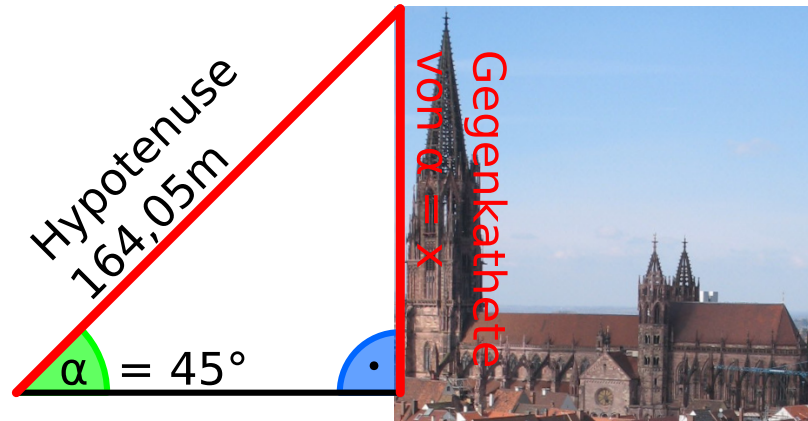


Abbildung 3: Rechtwinkliges Dreieck am Münster

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Hypothenuse}} \quad (1)$$

$$\sin(45) = \frac{x}{164,05m} \quad | \cdot 164,05m \quad (2)$$

$$\sin(45) \cdot 164,05m = x \quad (3)$$

$$x \cong 116m \quad (4)$$

Antwort: Die Gegenkathete von α beträgt etwa 116 Meter, somit ist das Münster auch etwa 116 Meter groß.

1.4 Der Kosinus und der Tangens

Sinus von α :

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}} \quad (1)$$

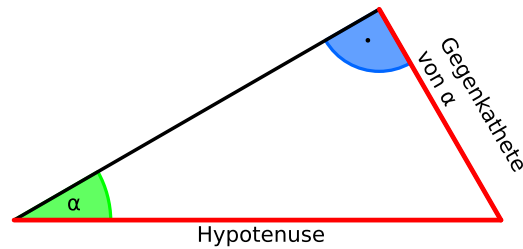


Abbildung 4: Rechtwinkliges Dreieck

Cosinus von α :

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{Ankathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}} \quad (1)$$

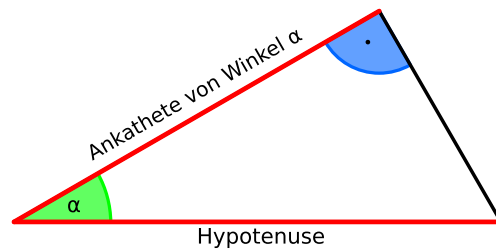


Abbildung 5: Rechtwinkliges Dreieck

Tangens von α :

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Ankathete von } \alpha} \quad (1)$$

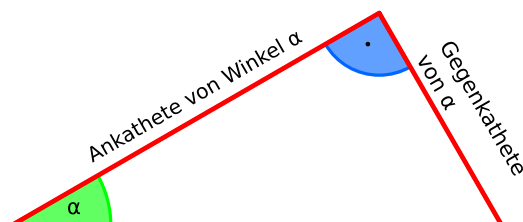


Abbildung 6: Rechtwinkliges Dreieck

2 Einheitskreis

2.1 Einheitskreis - Beispiel

Aufgaben-Text: Auf einem kresiförmigen Koordinatensystem eines Radarschirms ?? wird die Lage von zwei Schiffen durch die Entfernung zum Hafen(0) und durch den Kurs gegenüber der x-Achse beschrieben.

Aufgabe: Ein Schiff **A** ist mit dem Kurs **30°** gegenüber der x-Achse **einen Kilometer** weit gefahren. Welche Koordinaten im **x-y-Kooradinatensystem** hat es? Welche Koordinaten hat das Schiff **B**, das mit dem Kurs **75°** textbfeinen Kilometer weit gefahren ist?

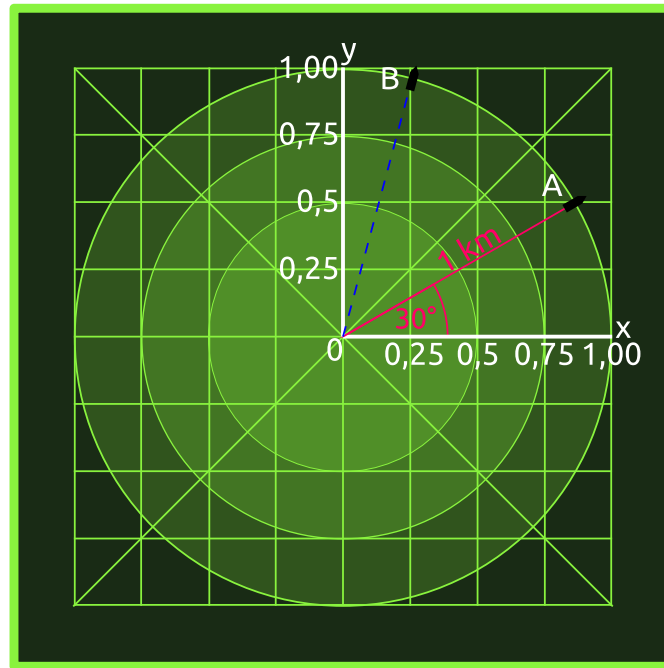


Abbildung 7: Radar

Lösung:

Das Schiff **A** mit dem Kurs **30°** befindet sich auf der x-Achse: etwa **0,86 Kilometer** und y-Achse: **0,5 Kilometer**. Also auf dem Punkt **A(0,86|0,5)**

Das Schiff **B** mit dem Kurs **75°** befindet sich auf der x-Achse: etwa **0,25 Kilometer** und y-Achse: **0,96 Kilometer**. Also auf dem Punkt **A(0,25|0,96)**

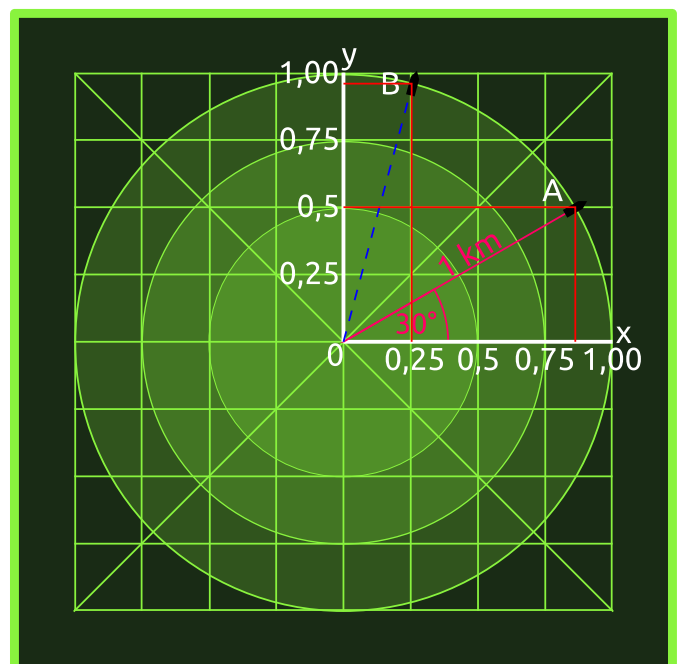


Abbildung 8: Radar Lösung

2.2 Der Sinus und Kosinus am Einheitskreis

Dreiecke mit der **Hypotenusenlänge 1** kann man in einem Koordinatensystem auf folgenden Weise darstellen:

1. Die Endpunkte der **Hypotenuse** sind der Ursprung O und ein Punkt P , der auf einem Kreis O mit dem **Radius 1** liegt. Diesen Kreis nennt man den **Einheitskreis**.
2. Die Ecke mit dem rechten Winkel liegt auf der **x-Achse senkrecht unter P** . Der Punkt P hat somit Koordinaten $P(\cos(\alpha)|\sin(\alpha))$

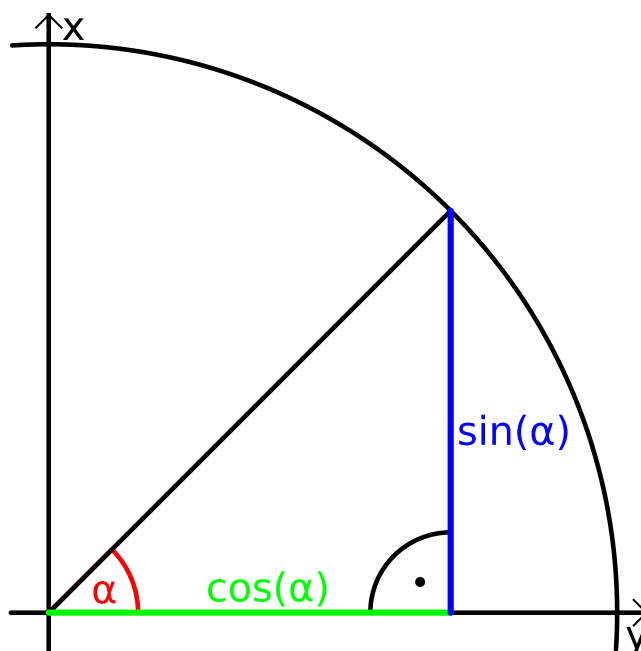


Abbildung 9: Sinus und Kosinus am Einheitskreis

2.3 Beziehungen zwischen Sinus, Kosinus und Tangens

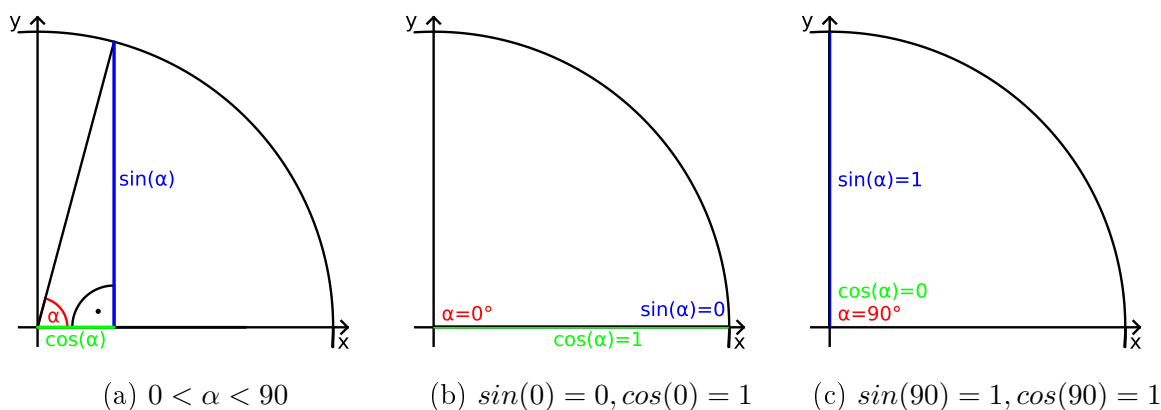


Abbildung 10: Beziehung 1

1. Für $0 < \alpha < 90$ nimmt $\sin(\alpha)$ mit wachsendem α zu und $\cos(\alpha)$ ab(?).
 $\sin(0) = 0, \cos(0) = 1$ (?), $\sin(90) = 1, \cos(90) = 0$ (?).

2. Wendet man auf das im Einheitskreis dargestellte Dreieck den Satz des Pythagoras an(?), so erhält man den für jede Winkelweite gültigen Zusammenhang

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1.$$

Beispiel:

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1 \quad (1)$$

$$(\sin(45))^2 + (\cos(45))^2 = 1 \quad (2)$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1 \quad (3)$$

$$\frac{\sqrt{2^2}}{2^2} + \frac{\sqrt{2^2}}{2^2} = 1 \quad (4)$$

$$\frac{2}{4} + \frac{2}{4} = 1 \quad (5)$$

$$0,5 + 0,5 = 1 \quad (6)$$

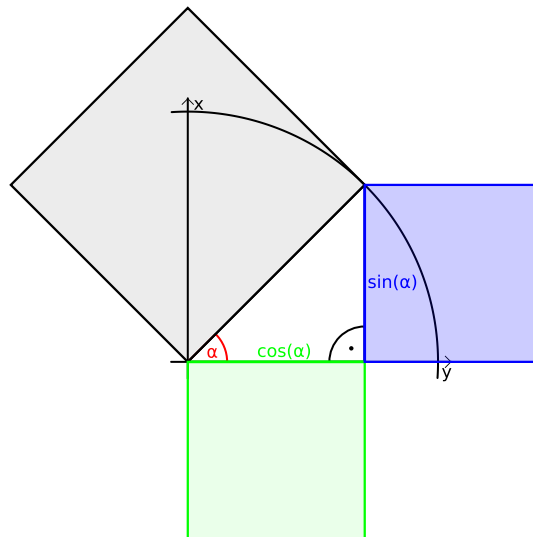


Abbildung 11: Einheitskreis Dreieck Satz des Pythagoras

3. In ?? sieht man:

$$\sin(90 - \alpha) = x = \cos(\alpha) \text{ und}$$

$$\cos(90 - \alpha) = y = \sin(\alpha)$$

Beispiel:

$$\sin(90 - \alpha) = x = \cos(\alpha) \quad (1)$$

$$\sin(90 - 30) = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos(30) \quad (2)$$

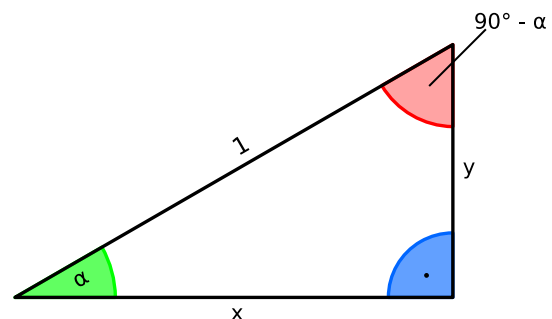


Abbildung 12: $\sin(90^\circ - \alpha)$, $\cos(90^\circ - \alpha)$

4. Ebenfalls in ??:

$$\tan(\alpha) = \frac{y}{x} = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}.$$

2.4 Einheitskreis - Definition

Definition: Es gilt:

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$$

$$\sin(90 - \alpha) = \cos(\alpha)$$

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}, \alpha \neq 90, \text{ weil: } \tan(90) = \frac{\sin(90)}{\cos(90)} = \frac{1}{0} = !.$$

2.5 Einheitskreis - Aufgabe

Aufgabe: $\sin(\alpha) = 0,6$.

Bestimme:

a)	b)	c)	d)	e)
$\cos(\alpha)$	$\tan(\alpha)$	$\sin(90 - \alpha)$	$\cos(90 - \alpha)$	$\tan(90 - \alpha)$

a) - Lösung:

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1 \quad (1)$$

$$0,6^2 + \cos^2(\alpha) = 1 \quad | -0,6^2 \quad (2)$$

$$\cos^2(\alpha) = 1 - 0,36 \quad | \sqrt{\quad} \quad (3)$$

$$\cos(\alpha) = \sqrt{1 - 0,36} \quad (4)$$

$$\cos(\alpha) = \sqrt{0,64} \quad (5)$$

$$\cos(\alpha) = 0,8 \quad (6)$$

b) - Lösung:

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} \quad (1)$$

$$\tan(\alpha) = \frac{0,6}{0,8} = \frac{6}{8} \quad (2)$$

$$\tan(\alpha) = \frac{3}{4} = 0,75 \quad (3)$$

c) - Lösung:

$$\sin(90 - \alpha) = \cos(\alpha) = 0,8 \quad (1)$$

d) - Lösung:

$$\cos(90 - \alpha) = \sin(\alpha) = 0,6 \quad (1)$$

e) - Lösung:

$$\tan(90 - \alpha) = \frac{\sin(90 - \alpha)}{\cos(90 - \alpha)} = \frac{0,8}{0,6} \quad (1)$$

$$\tan(90 - \alpha) = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \quad (2)$$

3 Mit dem Sinus modellieren

3.1 Mit dem Sinus modellieren - Beispiel

Aufgabe:



Abbildung 13: Schaufelraddampfer

Bei einem Schaufelraddampfer dreht sich das Rad mit einem Durchmesser von 2 Meter einmal vollständig in 60 Sekunden(?). In welcher Höhe über dem Wasserspiegel liegt der rot markierte Punkt A?

Erstelle eine Wertetabelle in 5 Sekunden Schritten.

Lösung:

Zeit t (in s)	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
Winkel α	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°	360°
Höhe h (in m)	0	0,5	0,87	1	0,87	0,5	0	-0,5	-0,87	-1	-0,87	-0,5	0

3.2 Winkel α mit $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$

Am Einheitskreis entspricht $\sin(\alpha)$ der y-Koordinate des Punktes P(?).

$\sin(40) \approx 0,64$

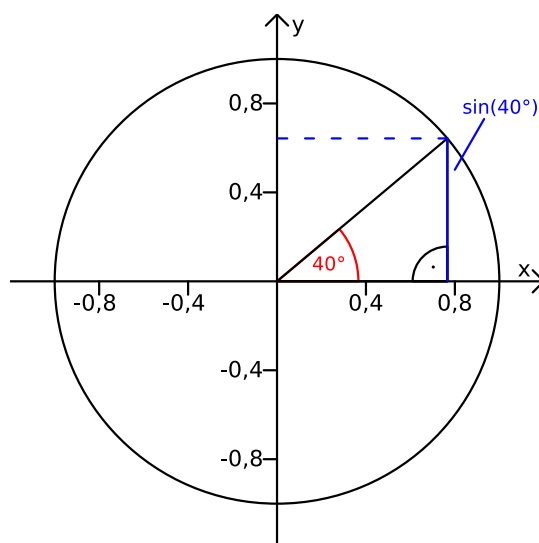


Abbildung 14: Winkel α mit $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$

3.3 Erweiterter Winkel α mit $90^\circ < \alpha \leq 360^\circ$

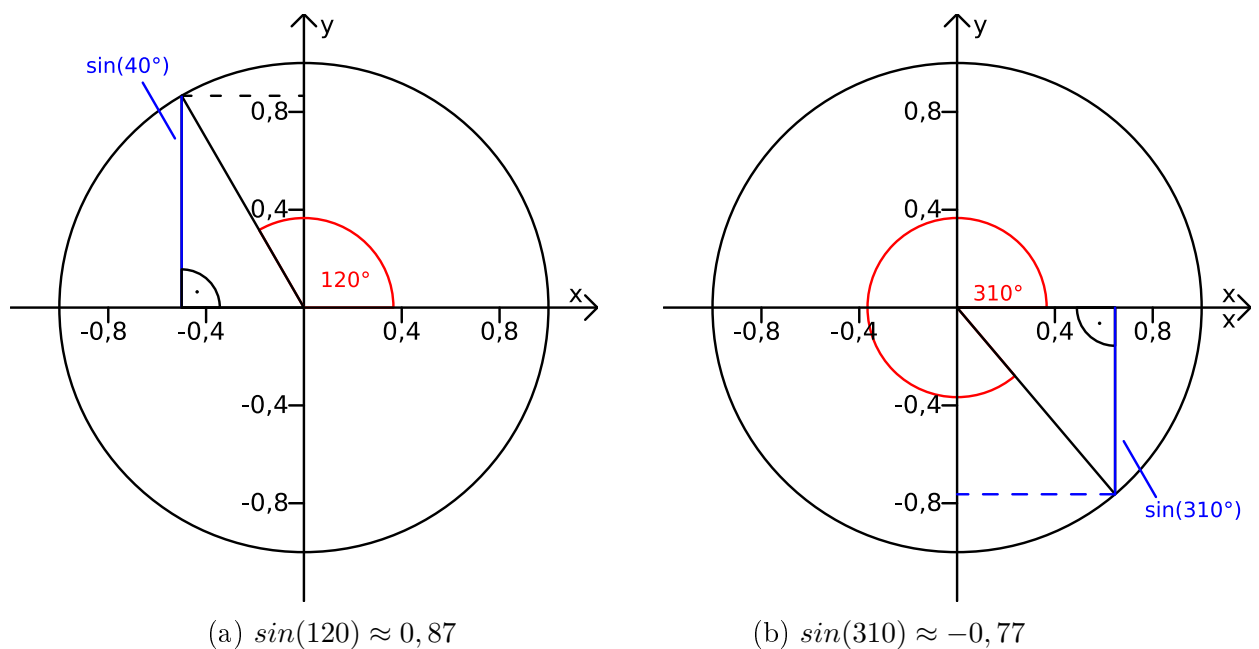


Abbildung 15: Erweiterter Winkel α mit $90^\circ < \alpha \leq 360^\circ$

Wird α über 90° vergrößert, wird der Sinuswert von α ebenso als y-Koordinate des Punktes P festgelegt(??).

3.4 Funktion f mit $f(\alpha)$

Ordnet man jedem Winkel α mit $0^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$ seinen Sinuswert zu, so erhält man eine Funktion f mit $f(\alpha) = \sin(\alpha)$.

Man kann mithilfe des Graphen von f(??) zu gegebenem Winkel den Sinuswert näherungsweise ablesen oder näherungsweise Winkel mit vorgegebenem Sinuswert ermitteln.

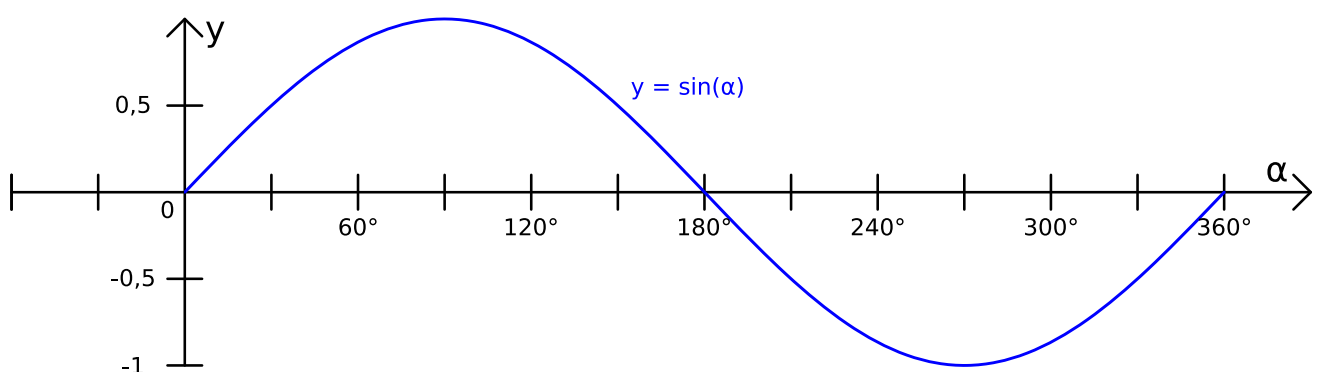


Abbildung 16: $f(\alpha) = \sin(\alpha)$

3.5 Sinusfunktion im Gradmaß - Definition

Die Funktion f mit $f(\alpha) = \sin(\alpha)$ heißt **Sinusfunktion im Gradmaß**.

3.6 Graph einer Sinusfunktion zeichnen

Zeit t (in s)	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
Winkel α	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°	360°
Höhe h (in m)	0	0,5	0,87	1	0,87	0,5	0	-0,5	-0,87	-1	-0,87	-0,5	0

Grafik

3.7 Einen Zeitlichen Vorgang modellieren

3.8 Erweiterter Winkel α mit $90^\circ < \alpha \leq 360^\circ$ - Aufgabe

Aufgabe:

text

a) text

b) text

Lösung:

Lösung - a) text

Lösung - b) text

4 Zusammenfassung

5 Anwendungsbeispiele / Weiter Anwendungen

6 Quellen

- Freiburger Münster - <https://freiburg-schwarzwald.de/fotos06feb/freiburg12-060227.jpg>
- Vector Boot - <https://www.vecteezy.com/vector-art/170704-flat-ship-vectors>
- Lambacher Schweizer 9(S. 90 - 104) - Mathematik Buch