Mit dem Sinus modellieren

Kirill Heitzler

27. Februar 2021

Inhaltsverzeichnis

1 Rückblick

1.1 Rechtwinkliges Dreieck - Beschriftung

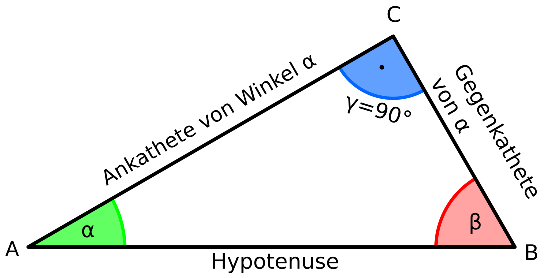


Abbildung 1: Rechtwinkliges Dreieck

Das Rechtwinklige Dreieck wird folgendermaßen wie in Abbildung 1 beschriftet.
Die Ecken werden mit den Buchstaben A, B, C gegen den Uhrzeigersinn bei A angefangen beschriftet.
Die Winkel α, β, γ werden in die Ecken der entsprechenden Buchstaben A, B, C gesetzt.
Die anliegende Kathete zu Winkel α wir „Ankathete von α" genannt und die Kathete gegenüber von Alpha wird „Gegenkathete von α" genannt.
Die Hypothenuse liegt gegenüber des Rechten Winkel γ.

1.2 Der Sinus

Definition: In einem rechtwinkligen Dreieck nennt man zu einem Winkel α des Dreiecks das Streckenverhältnis

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Hypothenuse}} \tag{1}$$

den **Sinus von** α

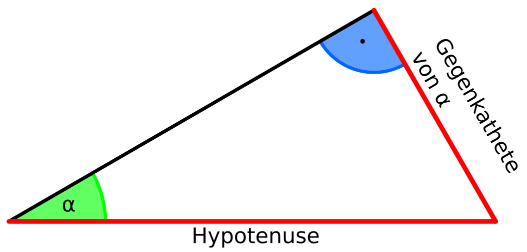


Abbildung 2: Rechtwinkliges Dreieck

1.3 Der Sinus - Beispiel Aufgabe

Gegenkathete von α mithilfe des Sinus berechnen:
Aufgabe: Berechne die Höhe des Freiburger Münsters. Das rechtwinklige Dreieck in Abbildung 3 besitzt einen rechten Winkel(90°), die Hyptenuse 164,05 Meter und die Winkelweite des Winkels α mit 45°. Berechne die Gegenkathete von α namen's x.

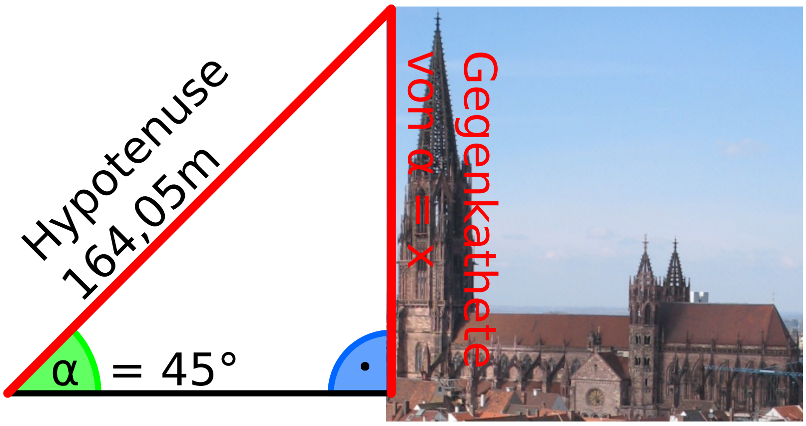


Abbildung 3: Rechtwinkliges Dreieck am MÃijnster

Rechnung:

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Hypothenuse}} \tag{1}$$

$$\sin(45) = \frac{x}{164,05m} \qquad | \cdot 164,05m \tag{2}$$

$$\sin(45) \cdot 164,05m = x \tag{3}$$

$$x \cong 116m \tag{4}$$

Antwort: Die Gegenkathete von α beträgt etwa 116 Meter, somit ist das Münster auch etwa 116 Meter groß.

1.4 Der Kosinus und der Tangens

Sinus von α:

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Hypothenuse}} \tag{1}$$

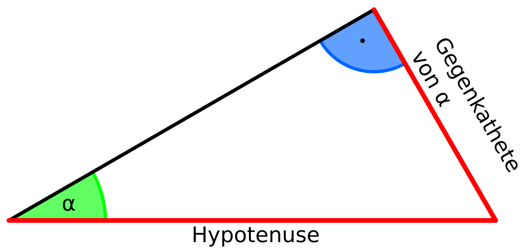


Abbildung 4: Rechtwinkliges Dreieck

Cosinus von α:

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{Ankathete von } \alpha}{\text{Hypothenuse}} \tag{1}$$

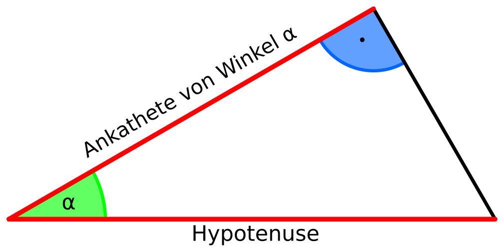


Abbildung 5: Rechtwinkliges Dreieck

Tangens von α:

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Ankathete von } \alpha} \tag{1}$$

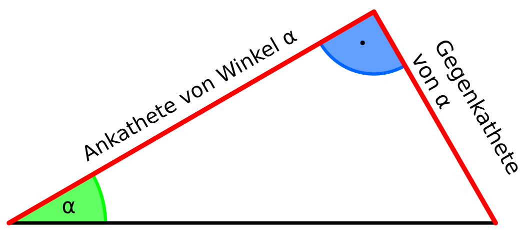


Abbildung 6: Rechtwinkliges Dreieck

2 Einheitskreis

2.1 Einheitskreis - Beispiel

Aufgaben-Text: Auf einem kresiförmigen Koordinatensystem eines Radarschirms Abbildung 7 wird die Lage von zwei Schiffen durch die Entfernung zum Hafen(0) und durch den Kurs gegenüber der x-Achse beschrieben.
Aufgabe: Ein Schiff **A** ist mit dem Kurs **30°** gegenüber der x-Achse **einen Kilometer** weit gefahren. Welche Koordinaten im **x-y-Kooradinatensystem** hat es?
Welche Koordinaten hat das Schiff **B**, das mit dem Kurs **75°** **einen Kilometer** weit gefahren ist?

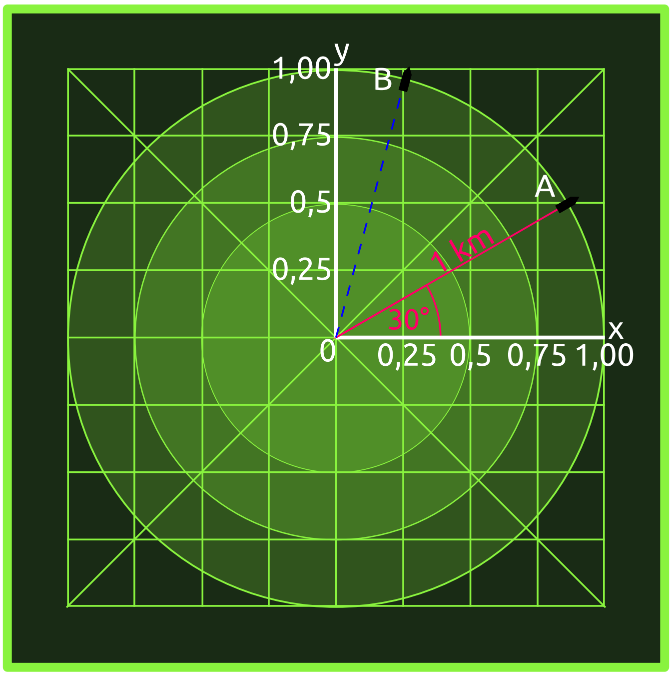


Abbildung 7: Radar

Lösung:

Das Schiff **A** mit dem Kurs **30°** befindet sich auf der x-Achse: etwa **0,86 Kilometer** und y-Achse: **0,5 Kilometer**. Also auf dem Punkt **A(0,86|0,5)**

Das Schiff **B** mit dem Kurs **75°** befindet sich auf der x-Achse: etwa **0,25 Kilometer** und y-Achse: **0,96 Kilometer**. Also auf dem Punkt **A(0,25|0,96)**

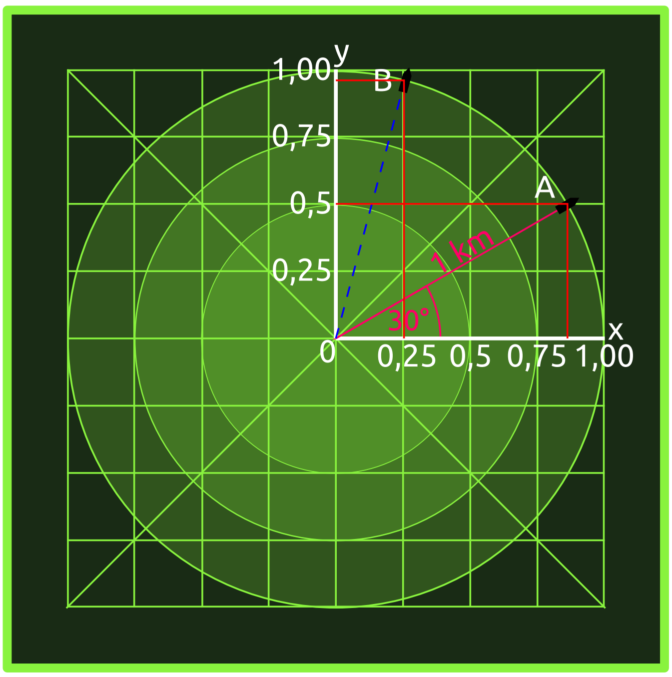


Abbildung 8: Radar Lösung

2.2 Der Sinus und Kosinus am Einheitskreis

Dreiecke mit der **Hypotenusenlänge 1** kann man in einem Koordinatensystem auf folgenden Weise darstellen:

1. Die Endpunkte der **Hypotenuse** sind der Ursprung O und ein Punkt **P**, der auf einem Kreis O mit dem **Radius 1** liegt. Diesen Kreis nennt man den **Einheitskreis**.

2. Die Ecke mit dem rechten Winkel liegt auf der **x-Achse senkrecht unter P**. Der Punkt P hat somit Koordinaten $\mathbf{P(cos(\alpha)|sin(\alpha))}$

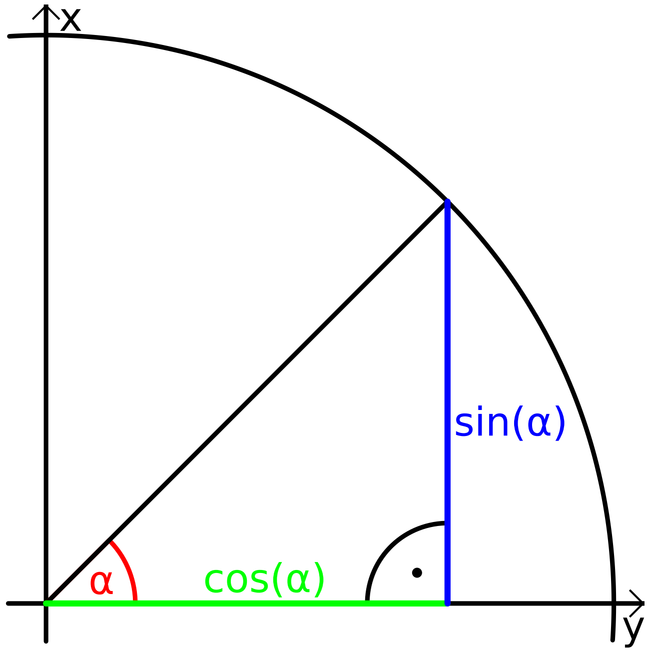
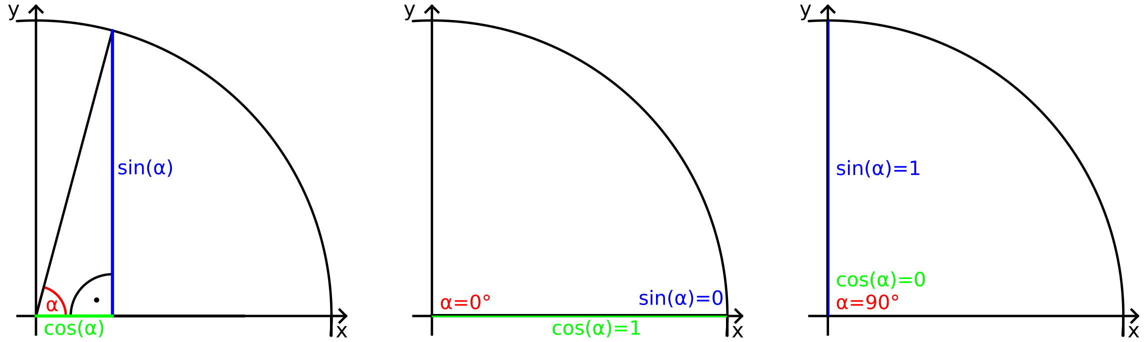


Abbildung 9: Sinus und Kosinus am Einheitskreis

2.3 Beziehungen zwischen Sinus, Kosinus und Tangens

1. Für $0° < \alpha < 90°$ nimmt $sin(\alpha)$ mit wachsendem α zu und $cos(\alpha)$ ab(Abbildung 10a). $sin(0°) = 0$, $cos(0°) = 1$ (Abbildung 10b), $sin(90°) = 1$, $cos(90°) = 0$ (Abbildung 10c).



(a) $0° < \alpha < 90°$ (b) $sin(0°) = 0, cos(0°) = 1$ (c) $sin(90°) = 1, cos(90°) = 1$

Abbildung 10: Beziehung 1

2. Wendet man auf das im Einheitskreis dargestellte Dreieck den Satz des Pythagoras an(Abbildung 11), so erhält man den für jede Winkelweite gültigen Zusammenhang
$sin^2(\alpha) + cos^2(\alpha) = 1$.
Beispiel:

$$\begin{aligned} sin^2(\alpha) + cos^2(\alpha) &= 1 && (1) \\ (sin(45))^2 + (cos(45))^2 &= 1 && (2) \\ (\frac{\sqrt{2}}{2})^2 + (\frac{\sqrt{2}}{2})^2 &= 1 && (3) \\ \frac{\sqrt{2^2}}{2^2} + \frac{\sqrt{2^2}}{2^2} &= 1 && (4) \\ \frac{2}{4} + \frac{2}{4} &= 1 && (5) \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} &= 1 && (6) \\ 0,5 + 0,5 &= 1 && (7) \end{aligned}$$

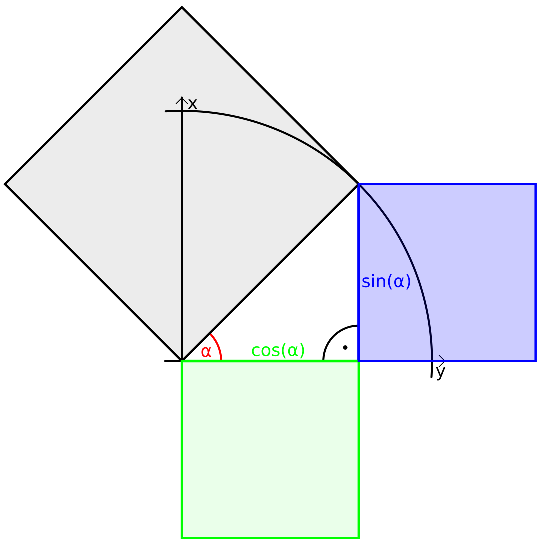


Abbildung 11: Einheitskreis Dreieck Satz des Pythagoras

3. In Abbildung 12 sieht man:
$sin(90° - \alpha) = x = cos(\alpha)$ und
$cos(90° - \alpha) = y = sin(\alpha)$
Beispiel:

$$\begin{aligned} sin(90° - \alpha) = x &= cos(\alpha) && (1) \\ sin(90° - 30°) = \frac{\sqrt{3}}{2} &= cos(30°) && (2) \end{aligned}$$

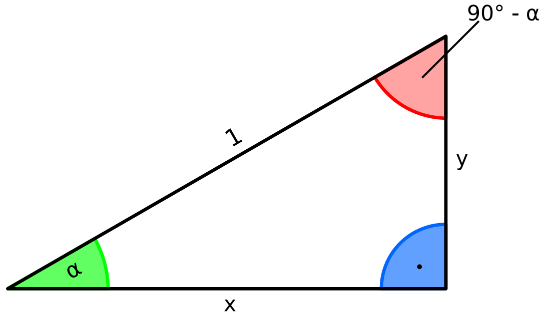


Abbildung 12: sin(90° - α); cos(90° - α)

4. Ebenfalls in Abbildung 12:
$tan(\alpha) = \frac{y}{x} = \frac{sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$.

2.4 Einheitskreis - Definition

Definition: Es gilt:

$sin^2(\alpha) + cos^2(\alpha) = 1$

$sin(90° - \alpha) = sin(\alpha)$

$tan(\alpha) = \frac{sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$, $\alpha \neq 90°$, weil: $tan(90) = \frac{sin(90)}{cos(90)} = \frac{1}{0} = \lightning$

2.5 Einheitskreis - Aufgabe

Aufgabe: $sin(\alpha) = 0,6$.

Bestimme:

a) $cos(\alpha)$ **b)** $tan(\alpha)$ **c)** $sin(90° - \alpha)$ **d)** $cos(90° - \alpha)$ **e)** $tan(90° - \alpha)$

a) Lösung:

$$\begin{aligned}
sin^2(\alpha) + cos^2(\alpha) &= 1 && (1)\\
0,6^2 + cos^2(\alpha) &= 1 && |-0,6^2 \quad (2)\\
cos^2(\alpha) &= 1 - 0,36 && |\sqrt{} \quad (3)\\
cos(\alpha) &= \sqrt{1 - 0,36} && (4)\\
cos(\alpha) &= \sqrt{0,64} && (5)\\
cos(\alpha) &= 0,8 && (6)
\end{aligned}$$

b) Lösung:

$$\begin{aligned}
tan(\alpha) &= \frac{sin(\alpha)}{cos(\alpha)} && (1)\\
tan(\alpha) &= \frac{0,6}{0,8} = \frac{6}{8} && (2)\\
tan(\alpha) &= \frac{3}{4} = 0,75 && (3)
\end{aligned}$$

c) Lösung:

$$sin(90 - \alpha) = cos(\alpha) = 0,8 \quad (1)$$

d) Lösung:

$$cos(90 - \alpha) = sin(\alpha) = 0,6 \quad (1)$$

e) Lösung:

$$\begin{aligned}
tan(90 - \alpha) &= \frac{sin(90 - \alpha)}{cos(90 - \alpha)} = \frac{0,8}{0,6} && (1)\\
tan(90 - \alpha) &= \frac{8}{6} = \frac{4}{3} && (2)
\end{aligned}$$