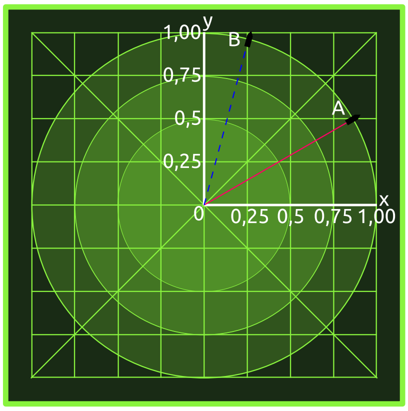
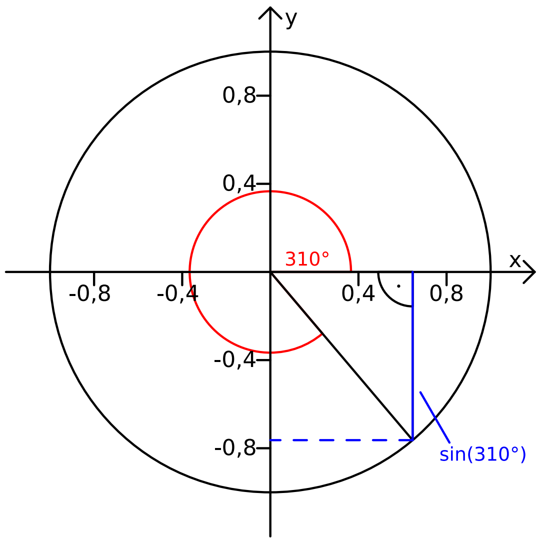
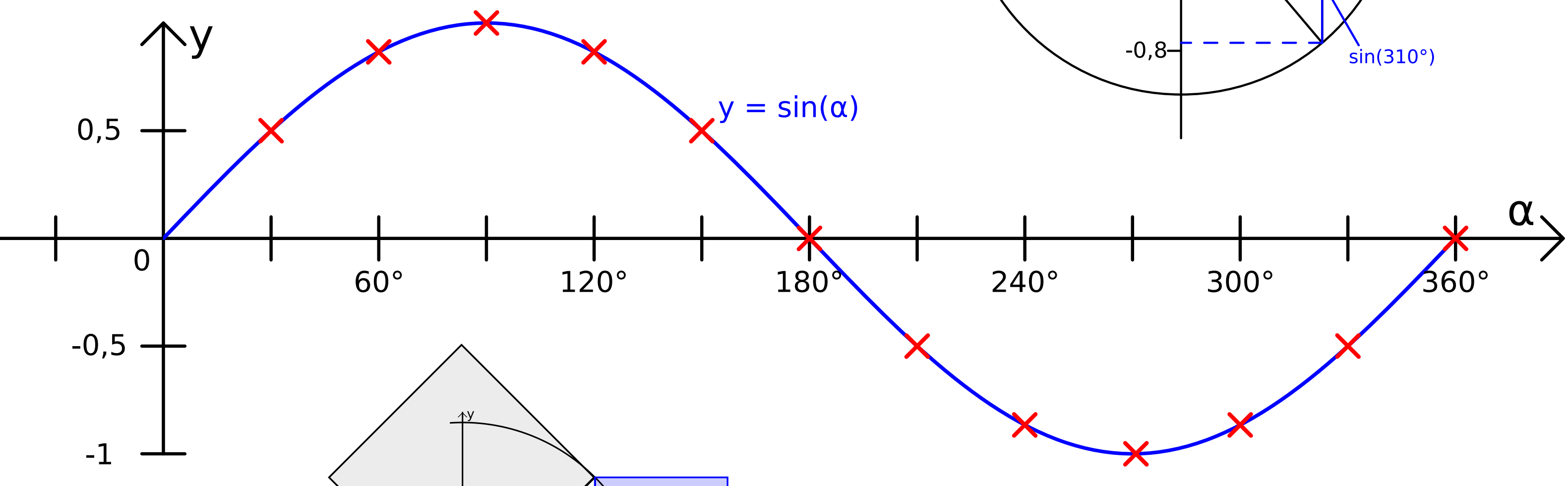
# Mit dem Sinus modellieren

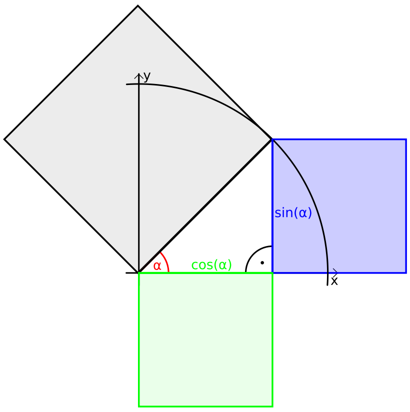
Kirill Heitzler

29. April 2021



# Inhaltsverzeichnis

# 1 Grundlagen

## 1.1 Rechtwinkliges Dreieck - Beschriftung

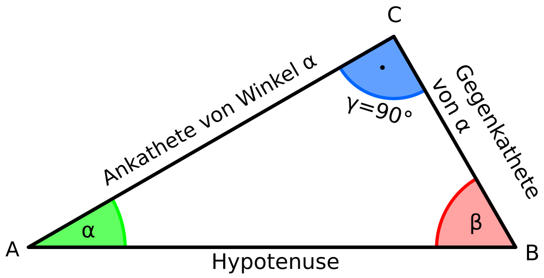



Abbildung 1: Rechtwinkliges Dreieck

Das Rechtwinklige Dreieck wird folgendermaßen wie in Abbildung 1 beschriftet.
Die Ecken werden mit den Buchstaben A, B, C gegen den Uhrzeigersinn bei A angefangen beschriftet.
Die Winkel $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ werden in die Ecken der entsprechenden Buchstaben A, B, C gesetzt.
Die anliegende Kathete zu Winkel $\alpha$ wird „Ankathete von $\alpha$" genannt und die Kathete gegenüber von $\alpha$ wird „Gegenkathete von $\alpha$" genannt.
Die Hypotenuse liegt gegenüber des rechten Winkels $\gamma$.

## 1.2 Der Sinus

**Definition:** In einem rechtwinkligen Dreieck (Abbildung 2) nennt man zu einem Winkel $\alpha$ des Dreiecks das Streckenverhältnis

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}}$$

den **Sinus von** $\alpha$.

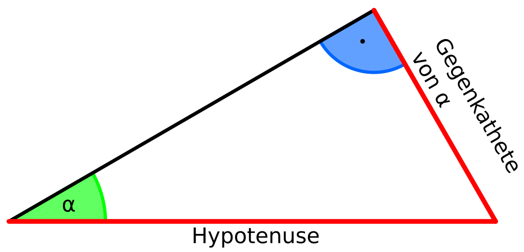



Abbildung 2: Rechtwinkliges Dreieck

### 1.3 Sinus - Beispiel

**Gegenkathete von $\alpha$ mithilfe des Sinus berechnen**:
**Aufgabe:** Berechne die Höhe des Freiburger Münsters. Das rechtwinklige Dreieck in Abbildung 3 besitzt einen rechten Winkel (90°), die Hypotenuse 164,05 Meter und die Winkelweite des Winkels $\alpha$ mit 45°. Berechne die Gegenkathete von $\alpha$ namens x.

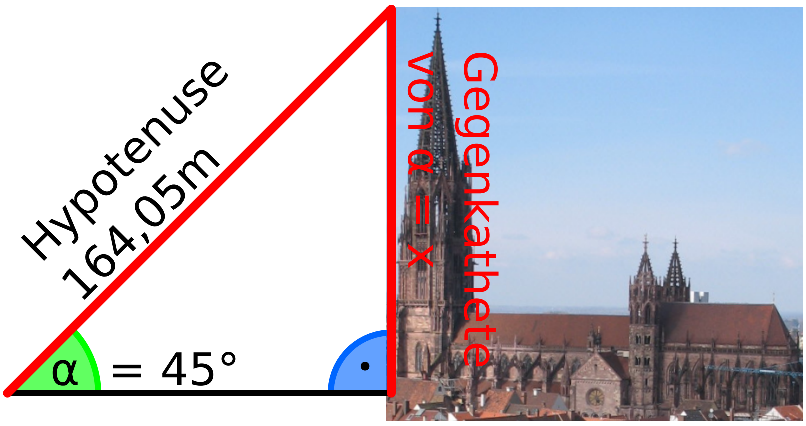



Abbildung 3: Rechtwinkliges Dreieck am Münster

**Rechnung:**

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}} \tag{1}$$

$$\sin(45°) = \frac{x}{164,05m} \qquad | \cdot 164,05m \tag{2}$$

$$\sin(45°) \cdot 164,05m = x \tag{3}$$

$$x \cong 116m \tag{4}$$

**Antwort:** Die Gegenkathete von $\alpha$ beträgt etwa 116 Meter, somit ist das Münster auch etwa 116 Meter groß.

## 1.4 Der Kosinus und der Tangens

**Sinus von $\alpha$:**

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}}$$

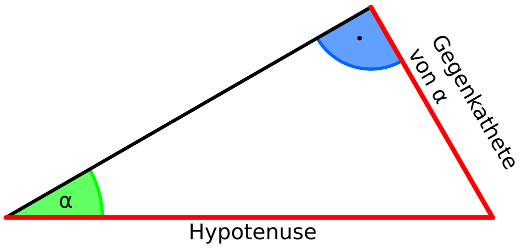



Abbildung 4: Rechtwinkliges Dreieck

**Cosinus von $\alpha$:**

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{Ankathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}}$$

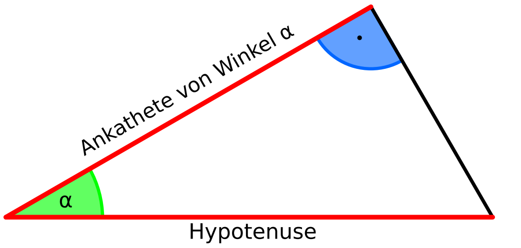



Abbildung 5: Rechtwinkliges Dreieck

**Tangens von $\alpha$:**

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Ankathete von } \alpha}$$

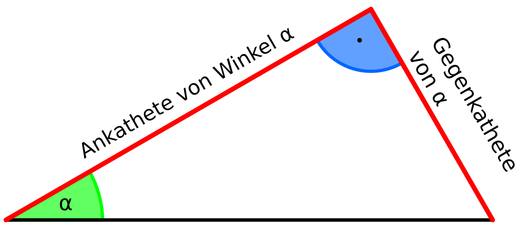



Abbildung 6: Rechtwinkliges Dreieck

## 2 Einheitskreis

### 2.1 Beispiel

**Aufgaben-Text:** Auf einem Koordinatensystem eines Radarschirms (Abbildung 7) wird die Lage von zwei Schiffen durch die Entfernung zum Hafen(0) und durch den Kurs gegenüber der x-Achse beschrieben.
**Aufgabe:** Ein Schiff **A** ist mit dem Kurs **30°** gegenüber der x-Achse **einen Kilometer** weit gefahren. Welche Koordinaten im **x-y-Koordinatensystem** hat es?
Welche Koordinaten hat das Schiff **B**, das mit dem Kurs **75°** **einen Kilometer** weit gefahren ist?

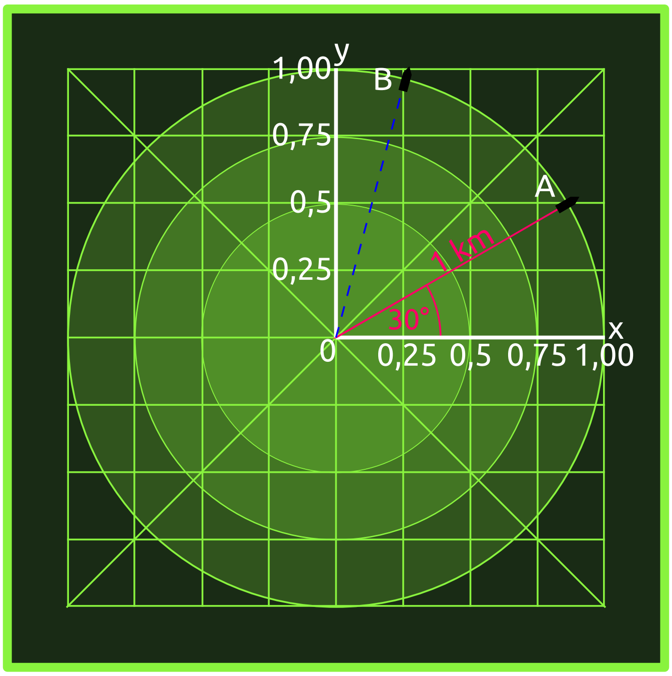



Abbildung 7: Radar

**Lösung:**

Das Schiff **A** mit dem Kurs **30°** befindet sich auf der x-Achse: etwa **0,86 Kilometer** und y-Achse: **0,5 Kilometer**. Also auf dem Punkt **A(0,86|0,5)**

Das Schiff **B** mit dem Kurs **75°** befindet sich auf der x-Achse: etwa **0,25 Kilometer** und y-Achse: **0,96 Kilometer**. Also auf dem Punkt **A(0,25|0,96)**

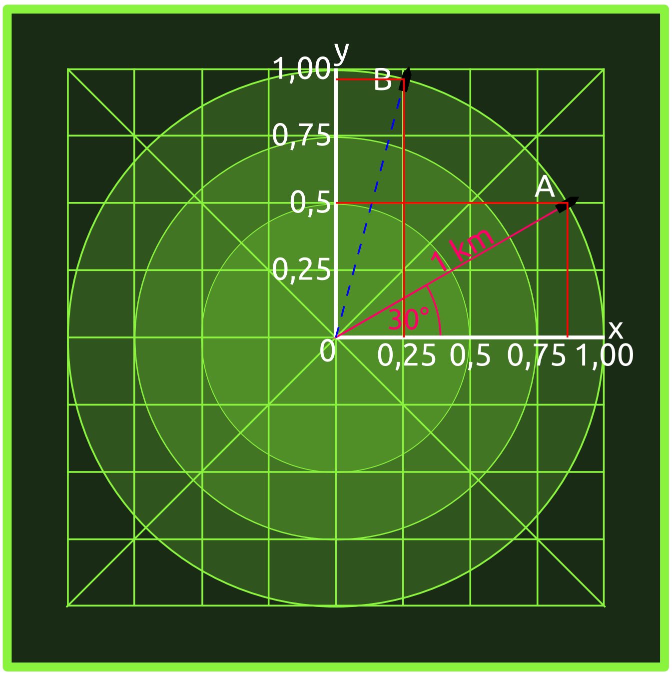



Abbildung 8: Radar Lösung

## 2.2 Der Sinus und Kosinus am Einheitskreis

Dreiecke mit der **Hypotenusenlänge 1** kann man in einem Koordinatensystem auf folgenden Weise darstellen:

**1.** Die Endpunkte der **Hypotenuse** sind der Ursprung O und ein Punkt **P**, der auf einem Kreis um O mit dem **Radius 1** liegt. Diesen Kreis nennt man den **Einheitskreis**.

**2.** Die Ecke mit dem rechten Winkel liegt auf der **x-Achse senkrecht unter P**. Der Punkt P hat somit Koordinaten **P**$(\cos(\alpha)|\sin(\alpha))$

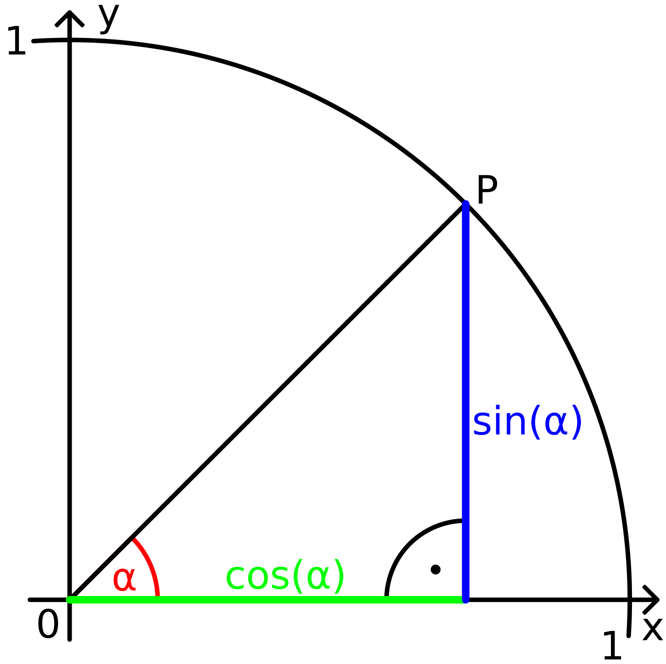
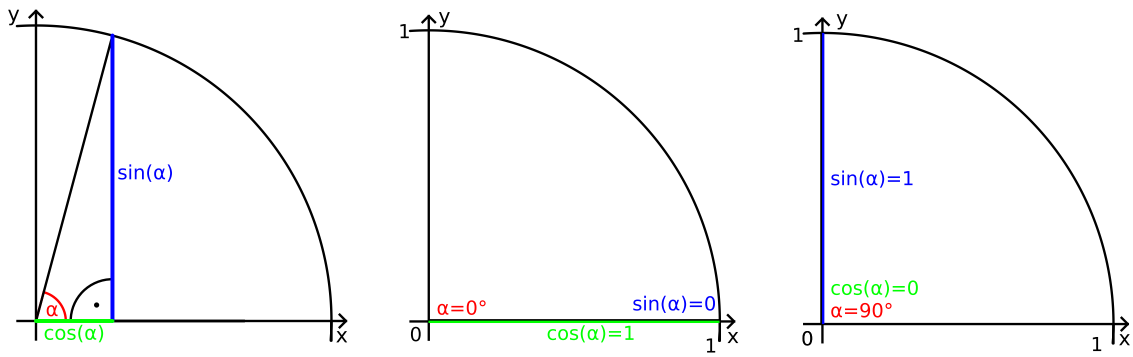



Abbildung 9: Sinus und Kosinus am Einheitskreis

## 2.3 Beziehungen zwischen Sinus, Kosinus und Tangens

**1.** Für $0° < \alpha < 90°$ nimmt $\sin(\alpha)$ mit wachsendem $\alpha$ zu und $\cos(\alpha)$ ab(Abbildung 10a). $\sin(0°) = 0$, $\cos(0°) = 1$ (Abbildung 10b), $\sin(90°) = 1$, $\cos(90°) = 0$ (Abbildung 10c).




(a) $0° < \alpha < 90°$ (b) $\sin(0°) = 0$, $\cos(0°) = 1$ (c) $\sin(90°) = 1$, $\cos(90°) = 1$

Abbildung 10: Beziehung 1

**2.** Wendet man auf das im Einheitskreis dargestellte Dreieck den Satz des Pythagoras an(Abbildung 11), so erhält man den für jede Winkelweite gültigen Zusammenhang
$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$.
Beispiel:

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1 \tag{1}$$
$$(\sin(45))^2 + (\cos(45))^2 = 1 \tag{2}$$
$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1 \tag{3}$$
$$\frac{\sqrt{2^2}}{2^2} + \frac{\sqrt{2^2}}{2^2} = 1 \tag{4}$$
$$\frac{2}{4} + \frac{2}{4} = 1 \tag{5}$$
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \tag{6}$$
$$0,5 + 0,5 = 1 \tag{7}$$

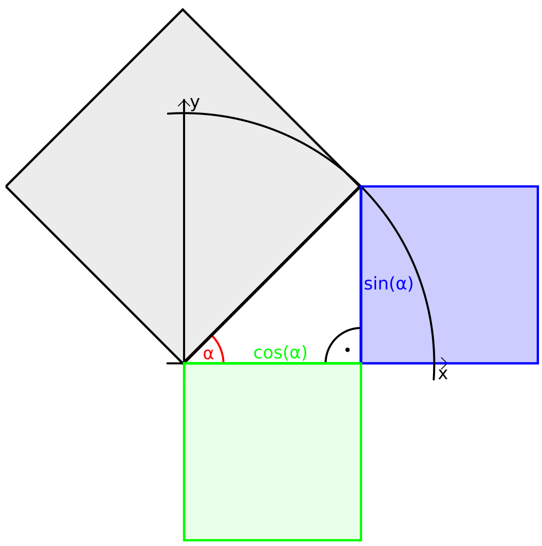



Abbildung 11: Einheitskreis Dreieck Satz des Pythagoras

**3.** In Abbildung 12 sieht man:
$\sin(90° - \alpha) = x = \cos(\alpha)$ und
$\cos(90° - \alpha) = y = \sin(\alpha)$
**Beispiel:**

$$\sin(90° - \alpha) = x \quad = \cos(\alpha) \tag{1}$$
$$\sin(90° - 30°) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad = \cos(30°) \tag{2}$$

**4.** Ebenfalls in Abbildung 12:
$tan(\alpha) = \frac{y}{x} = \frac{sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$.

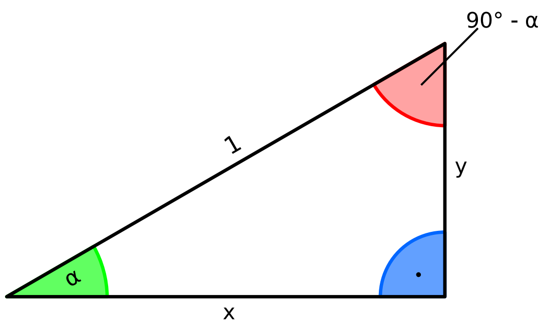



Abbildung 12: sin(90° - $\alpha$); cos(90° - $\alpha$)

## 2.4 Einheitskreis - Definition

**Definition:** Es gilt:

$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$

$\sin(90° - \alpha) = \cos(\alpha)$

$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$, $\alpha \neq 90°$, weil: $\tan(90) = \frac{\sin(90)}{\cos(90)} = \frac{1}{0} = ϟ$

## 2.5 Einheitskreis - Aufgabe

**Aufgabe:** $\sin(\alpha) = 0,6$.

**Bestimme:**

**a)** $\cos(\alpha)$ **b)** $\tan(\alpha)$ **c)** $\sin(90° - \alpha)$ **d)** $\cos(90° - \alpha)$ **e)** $\tan(90° - \alpha)$

**a) Lösung:**

$$\begin{aligned} \sin^2(\alpha) + cos^2(\alpha) &= 1 && (1)\\ 0,6^2 + cos^2(\alpha) &= 1 \qquad | - 0,6^2 && (2)\\ \cos^2(\alpha) &= 1 - 0,36 \qquad |\sqrt{} && (3)\\ \cos(\alpha) &= \sqrt{1 - 0,36} && (4)\\ \cos(\alpha) &= \sqrt{0,64} && (5)\\ \cos(\alpha) &= 0,8 && (6) \end{aligned}$$

**b) Lösung:**

$$\begin{aligned} \tan(\alpha) &= \frac{sin(\alpha)}{cos(\alpha)} && (1)\\ \tan(\alpha) &= \frac{0,6}{0,8} = \frac{6}{8} && (2)\\ \tan(\alpha) &= \frac{3}{4} = 0,75 && (3) \end{aligned}$$

**c) Lösung:**

$$sin(90° - \alpha) = cos(\alpha) = 0,8 \qquad (1)$$

**d) Lösung:**

$$cos(90° - \alpha) = sin(\alpha) = 0,6 \qquad (1)$$

**e) Lösung:**

$$\begin{aligned} tan(90° - \alpha) &= \frac{sin(90° - \alpha)}{cos(90° - \alpha)} = \frac{0,8}{0,6} && (1)\\ tan(90° - \alpha) &= \frac{8}{6} = \frac{4}{3} && (2) \end{aligned}$$

# 3 Mit dem Sinus modellieren

## 3.1 Mit dem Sinus modellieren - Beispiel

**Aufgabe:**
Bei einem Schaufelraddampfer dreht sich das Rad mit dem Durchmesser 2 Meter einmal vollständig in 60 Sekunden(Abbildung 13). In welcher Höhe über dem Wasserspiegel liegt der rot markierte Punkt A?
Erstelle eine Wertetabelle in 5 Sekunden-Schritten.

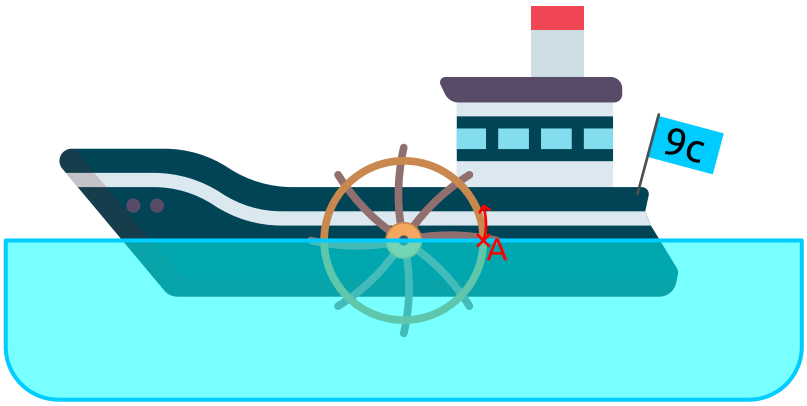



Abbildung 13: Schaufelraddampfer

**Lösung:**

| Zeit t (in s) | 0 | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 | 50 | 55 | 60 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Winkel $\alpha$ | 0° | 30° | 60° | 90° | 120° | 150° | 180° | 210° | 240° | 270° | 300° | 330° | 360° |
| Höhe h (in m) | 0 | 0,5 | 0,87 | 1 | 0,87 | 0,5 | 0 | -0,5 | -0,87 | -1 | -0,87 | -0,5 | 0 |

## 3.2 Winkel $\alpha$ mit $0° \leq \alpha \leq 90°$

Am Einheitskreis entspricht $\sin(\alpha)$ der y-Koordinate des Punktes P(Abbildung 20).
$\sin(40°) \approx 0,64$

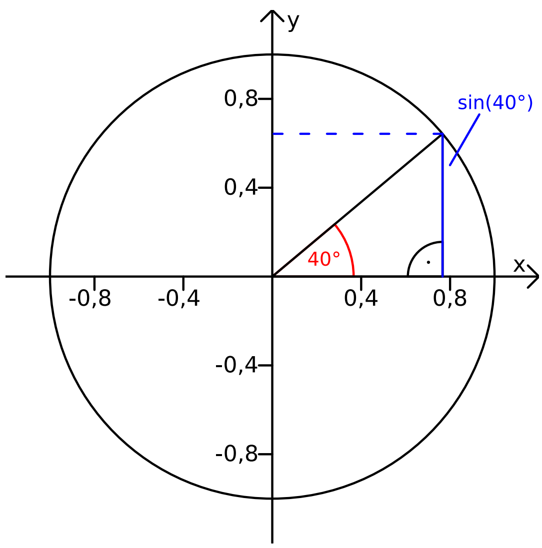
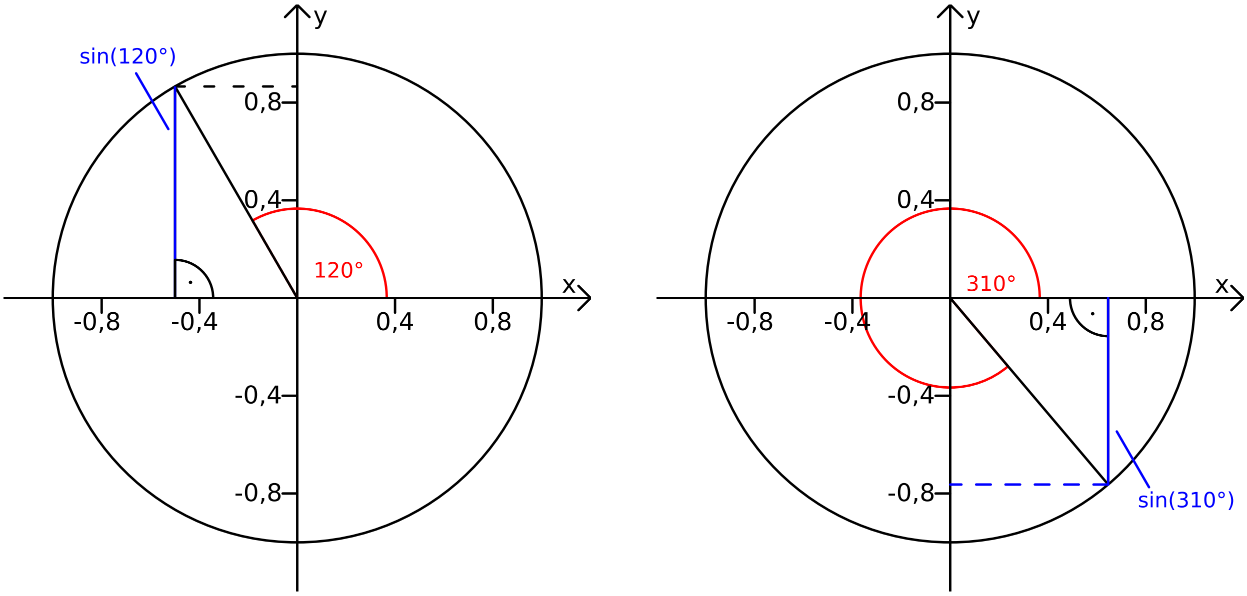



Abbildung 14: Winkel $\alpha$ mit $0° \leq \alpha \leq 90°$

## 3.3 Erweiterter Winkel $\alpha$ mit $90° < \alpha \leq 360°$

Wird $\alpha$ über 90° vergrößert, wird der Sinuswert von $\alpha$ ebenso als y-Koordinate des Punktes P festgelegt(Abbildung 15).




(a) $\sin(120°) \approx 0,87$ (b) $\sin(310°) \approx -0,77$

Abbildung 15: Erweiterter Winkel $\alpha$ mit $90° < \alpha \leq 360°$

## 3.4 Erweiterter Winkel $\alpha$ mit $90° < \alpha \leq 360°$ - Aufgabe

**Aufgabe:**
Ein Punkt P bewegt sich auf dem Einheitskreis(Abbildung 16) gegen den Uhrzeigersinn. Für $\alpha = 0°$ befindet er sich im Punkt(1|0)
**a)** Gib die x- und y-Koordinaten des Punktes P für $\alpha = 140°$ und für $\alpha = 310°$ an.
**b)** Bestimme zwei verschiedene Werte für $\alpha$, sodass seine y-Koordinate 0,8 beträgt.

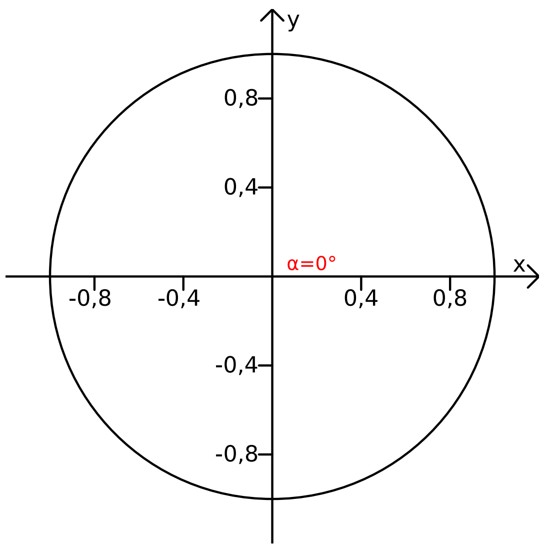



Abbildung 16: $\alpha = 0°$

**Lösung a)**
Für $\alpha = 140°$: Punkt (-0,77|0,64)

$$\sin(\alpha) = y \quad (1)$$
$$\sin(140°) \approx 0,64 \quad (2)$$
$$\cos(\alpha) = x \quad (3)$$
$$\cos(140°) \approx -0,77 \quad (4)$$

Für $\alpha = 310°$: Punkt (0,64|-0,77)

$$\sin(\alpha) = y \quad (1)$$
$$\sin(310°) \approx -0,77 \quad (2)$$
$$\cos(\alpha) = x \quad (3)$$
$$\cos(310°) \approx 0,64 \quad (4)$$

**Lösung b)**
Für $\alpha_1$: $sin(53,1°) \approx 0,8$

$$\sin^{-1}(0,8) \approx 53,1° \quad (1)$$

Für $\alpha_2$: $\sin(126,9°) \approx 0,8$

$$\sin^{-1}(0,8) \approx 53,1° \quad (1)$$
$$180° - 53,1° = 126,9° \quad (2)$$

## 3.5 Funktion f mit f($\alpha$)

Ordnet man jedem Winkel $\alpha$ mit $0° \leq \alpha \leq 360°$ seinen Sinuswert zu, so erhält man eine Funktion f mit $f(\alpha) = \sin(\alpha)$.
Man kann mithilfe des Graphen von f (Abbildung 17) zu gegebenem Winkel den Sinuswert näherungsweise ablesen oder näherungsweise Winkel mit vorgegebenem Sinuswert ermitteln.

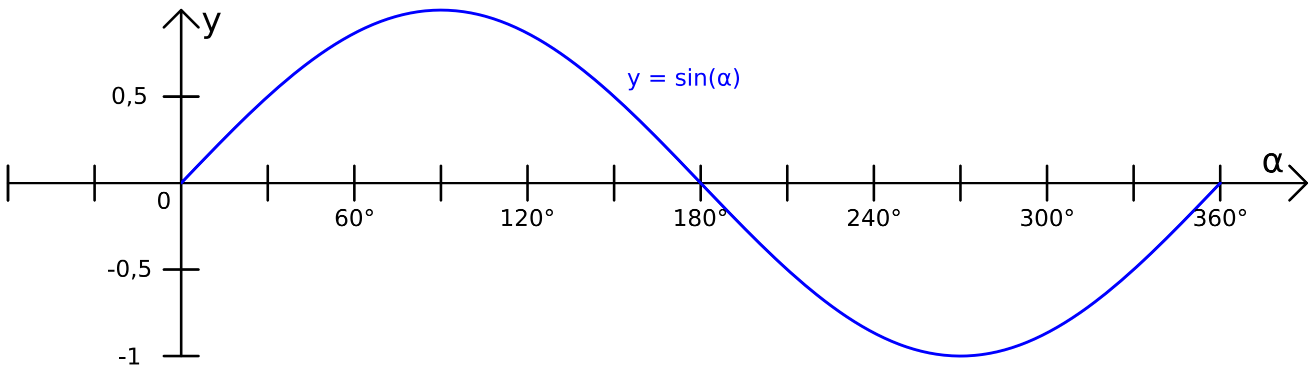



Abbildung 17: $f(\alpha) = \sin(\alpha)$

## 3.6 Sinusfunktion im Gradmaß - Definition

Die Funktion f mit $f(\alpha) = \sin(\alpha)$ heißt **Sinusfunktion im Gradmaß**.

## 3.7 Graph einer Sinusfunktion zeichnen

| Zeit t (in s) | 0 | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 | 50 | 55 | 60 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Winkel $\alpha$ | 0° | 30° | 60° | 90° | 120° | 150° | 180° | 210° | 240° | 270○ | 300° | 330° | 360° |
| Höhe h (in m) | 0 | 0,5 | 0,87 | 1 | 0,87 | 0,5 | 0 | -0,5 | -0,87 | -1 | -0,87 | -0,5 | 0 |

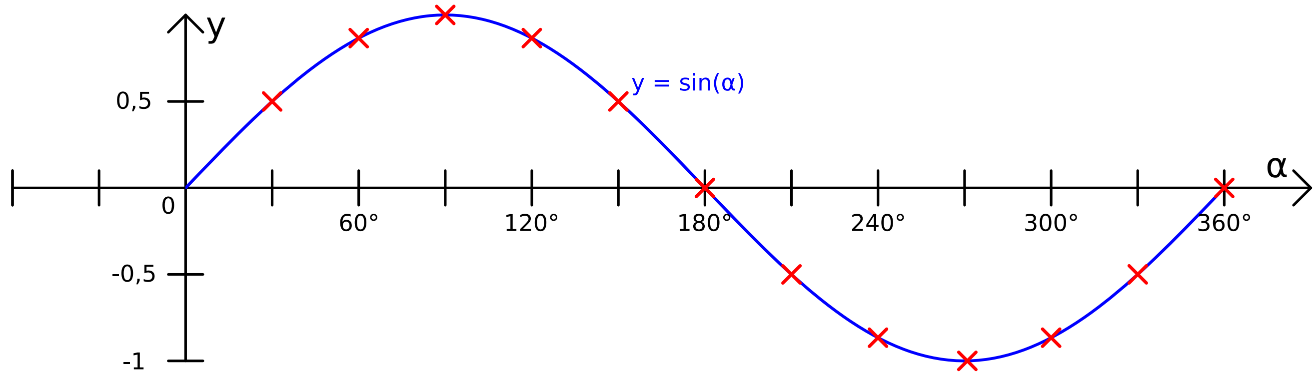



Abbildung 18: Sinuswelle Zeichnen

## 3.8 Einen Zeitlichen Vorgang modellieren

In einem Hafenbecken schwankt der Wasserstand periodisch um seinen Durchschnittswert (Abbildung 19)

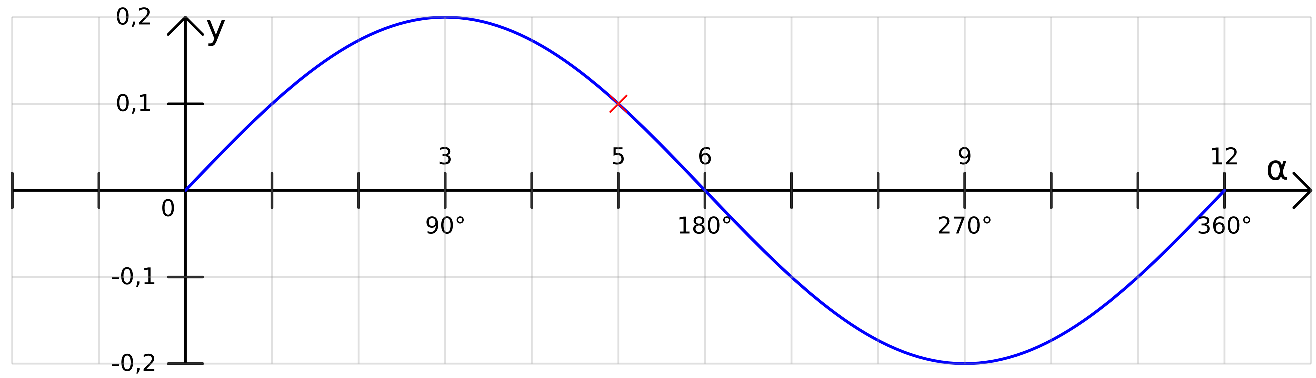



Abbildung 19: Wasserstand

**Aufgabe:**
**a)** Erläutere, wie man zu einem gegebenen Zeitpunkt t die Winkelweite $\alpha$ erhält und umgekehrt. Bestimme für $t = 5$ (t in h) den zugehörigen Winkel.
**b)** Mit welcher Funktion kann man zu einem gegebenen Winkel $\alpha$ den Wasserstand berechnen? Berechne den Wasserstand 5 Stunden nach Beobachtungsbeginn.

**Lösung a)**

$$12h \mathrel{\widehat{=}} 360° \qquad | : 12 \tag{1}$$
$$1h \mathrel{\widehat{=}} 30° \tag{2}$$

12h in Abbildung 17 entsprechen 360°, also entspricht 1h dem Winkel 30°. Daraus Folgt $\alpha = t \cdot 30°$ (t in h). Für t = 5 erhält man $\alpha = 5 \cdot 30° = 150°$

$$\alpha = t \cdot 30°$$

$$\alpha = 5 \cdot 30° \tag{1}$$
$$= 150° \tag{2}$$

**Lösung b)**
Da der Wasserstand zwischen -0,2 und 0,2 um den Durchschnittswert pendelt (Abbildung 19), gilt:

$$f(\alpha) = 0,2 \cdot sin(\alpha)$$

Für t = 5:

$$\alpha = 5 \cdot 30° \tag{1}$$
$$= 150° \tag{2}$$
$$f(150°) = 0,2 \cdot \sin(150°) \tag{3}$$
$$= 0,1 \tag{4}$$

Nach 5 Stunden liegt der Wasserstand 10cm über dem Durchschnittswert.

# 4 Anwendung

Auch wenn es uns nicht oft auffällt, viele technische Geräte bzw. Mechanismen verwenden die trigonometrischen Funktionen Sinus und Kosinus. Genauso wie viele mathematische Verfahren. Ein paar Beispiele:

- Oszilloskop (elektronisches Messgerät, das elektrische Spannungen in einen Verlaufsgraphen darstellt)
- GPS - Global Positioning System (Positionsbestimmung mit Hilfe von Satelliten)
- Computergrafiken in 3D und 2D
- Landvermessungen
- Fourier Transformation (z. B. Anwendung beim Spektroskop für Chemiker)
- Astronomen nutzten Spektroskope, um chemische Zusammensetzungen von weit entfernten Planeten zu bestimmen

# 5 Zusammenfassung

## 5.1 Einheitskreis - Zusammenfassung

Die Endpunkte eines Dreieckecks mit der Hypotenusenlänge 1 bilden den Ursprung 0 und einen Punkt P, der auf einem Kreis um 0 mit dem Radius 1 liegt und den Einheitskreis bildet.

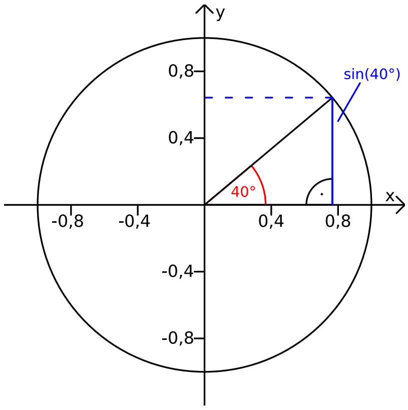



Abbildung 20: Einheitskreis

Die Gegenkathete lässt sich mit $\sin(\alpha)$ und die Ankathete mit $\cos(\alpha)$ berechnen.

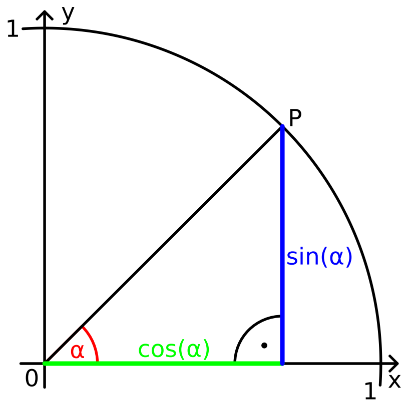



Abbildung 21: Sinus und Kosinus am Einheitskreis

## 5.2 Mit dem Sinus Modellieren - Zusammenfassung

Ordnet man jedem Winkel $\alpha$ mit $0° \leq \alpha \leq 360°$ seinen Sinuswert zu, so erhält man die Sinusfunktion im Gradmaß $f$ mit $f(\alpha) = sin(\alpha)$. Trägt man die Werte der Sinusfunktion im Gradmaß in ein entsprechendes Koordinatensystem erhält man den Grafphen von $f$ (Abbildung 22).

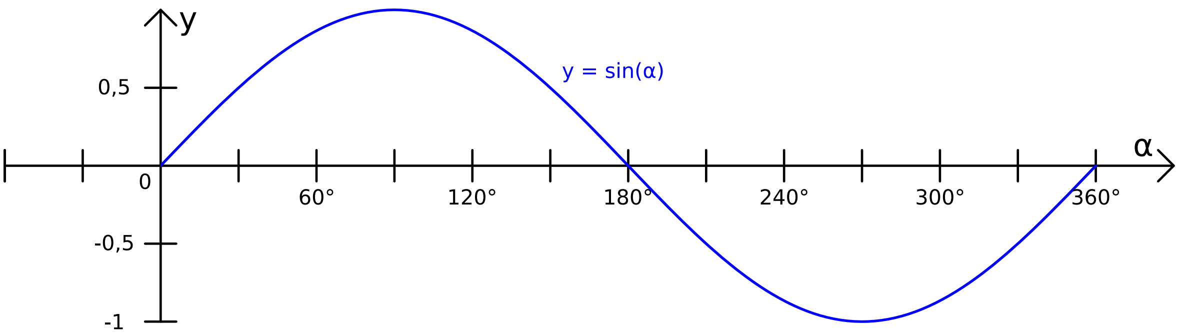



Abbildung 22: $f(\alpha) = \sin(\alpha)$

# 6 Quellen


- Freiburger Münster - https://freiburg-schwarzwald.de/fotos06feb/freiburg12-060227.jpg
- Vector Boot - https://www.vecteezy.com/vector-art/170704-flat-ship-vectors
- Lambacher Sweizer 9(S. 90 - 104) - Mathematik Buch
- Sinus und Kosinus im Alltag - https://www.matheretter.de/wiki/sinus-kosinus-alltag