Mit dem Sinus modellieren

Kirill Heitzler

16. Januar 2021

Inhaltsverzeichnis

1 Rückblick

1.1 Rechtwinkliges Dreieck - Beschriftung

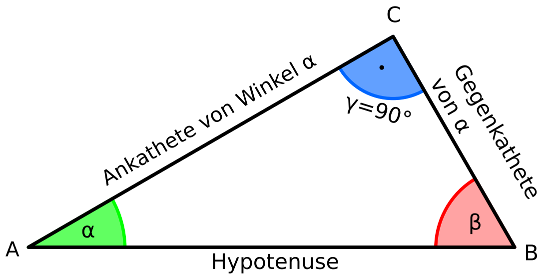


Abbildung 1: Rechtwinkliges Dreieck

Das Rechtwinklige Dreieck wird folgendermaßen wie in Abbildung 1 beschriftet.
Die Ecken werden mit den Buchstaben A, B, C gegen den Uhrzeigersinn bei A angefangen beschriftet.
Die Winkel α, β, γ werden in die Ecken der entsprechenden Buchstaben A, B, C gesetzt.
Die anliegende Kathete zu Winkel α wir 'Ankathete von α' genannt und die Kathete gegenüber von Alpha wird 'Gegenkathete von α'´ genannt.
Die Hypothenuse liegt gegenüber des Rechten Winkel γ.

1.2 Der Sinus

Definition: In einem rechtwinkligen Dreieck nennt man zu einem Winkel α des Dreiecks das Streckenverhältnis

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Hypothenuse}} \tag{1}$$

den **Sinus von** α

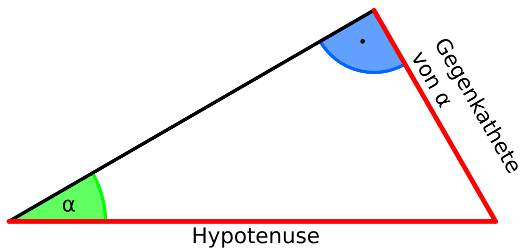


Abbildung 2: Rechtwinkliges Dreieck

1.3 Der Sinus - Beispiel Aufgabe

Gegenkathete von α mithilfe des Sinus berechnen:
Aufgabe: Berechne die Höhe des Freiburger Münsters. Das rechtwinklige Dreieck in Abbildung 3 besitzt einen rechten Winkel(90°), die Hyptenuse 164,05 Meter und die Winkelweite des Winkels α mit 45°. Berechne die Gegenkathete von α namen's x. **Rechnung:**

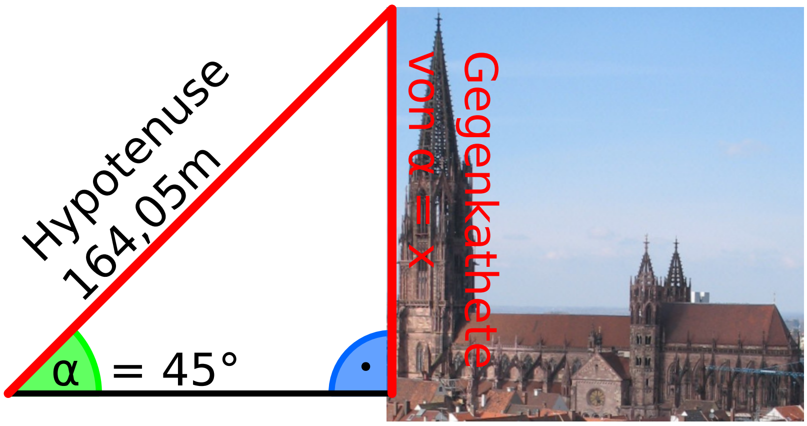


Abbildung 3: Rechtwinkliges Dreieck am Münster

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Hypothenuse}} \tag{1}$$

$$\sin(45) = \frac{x}{164,05m} \qquad | \cdot 164,05m \tag{2}$$

$$\sin(45) \cdot 164,05m = x \tag{3}$$

$$x \cong 116m \tag{4}$$

Antwort: Die Gegenkathete von α beträgt etwa 116 Meter, somit ist das Münster auch etwa 116 Meter groß.

1.4 Der Kosinus und der Tangens

Sinus von α:

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Hypothenuse}} \tag{1}$$

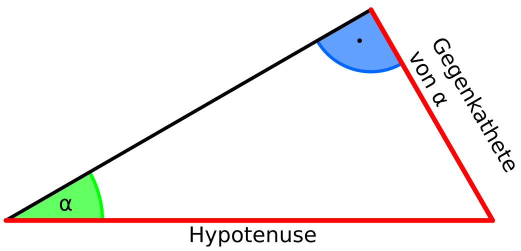


Abbildung 4: Rechtwinkliges Dreieck

Cosinus von α:

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{Ankathete von } \alpha}{\text{Hypothenuse}} \tag{1}$$

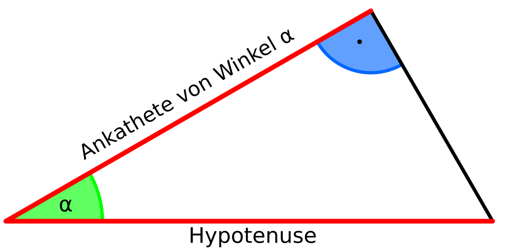


Abbildung 5: Rechtwinkliges Dreieck

Tangens von α:

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Ankathete von } \alpha} \tag{1}$$

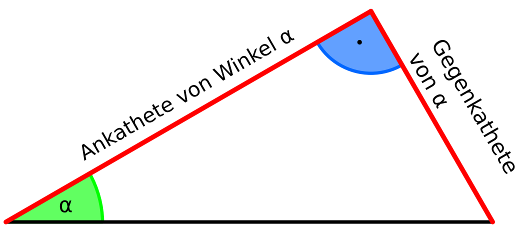


Abbildung 6: Rechtwinkliges Dreieck

2 Einheitskreis

2.1 Einheitskreis - Beispiel

Aufgaben-Text: Auf einem kresiförmigen Koordinatensystem eines Radarschirms Abbildung 7 wird die Lage von zwei Schiffen durch die Entfernung zum Hafen(0) und durch den Kurs gegenüber der x-Achse beschrieben.
Aufgabe: Ein Schiff **A** ist mit dem Kurs **30°** gegenüber der x-Achse **einen Kilometer** weit gefahren. Welche Koordinaten im **x-y-Kooradinatensystem** hat es? Welche Koordinaten hat das Schiff **B**, das mit dem Kurs **75°** textbfeinen Kilometer weit gefahren ist?

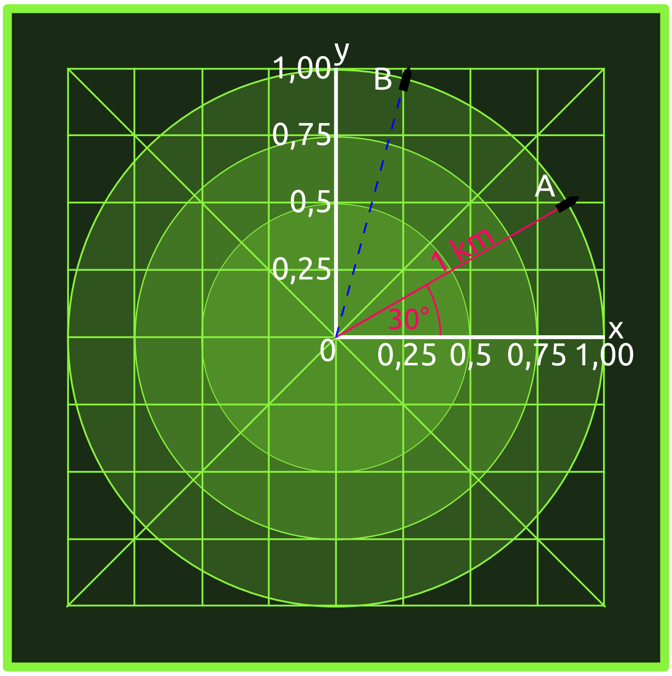


Abbildung 7: Radar

Lösung:

Das Schiff **A** mit dem Kurs **30°** befindet sich auf der x-Achse: etwa **0,86 Kilometer** und y-Achse: **0,5 Kilometer**. Also auf dem Punkt **A(0,86|0,5)**

Das Schiff **B** mit dem Kurs **75°** befindet sich auf der x-Achse: etwa **0,25 Kilometer** und y-Achse: **0,96 Kilometer**. Also auf dem Punkt **A(0,25|0,96)**

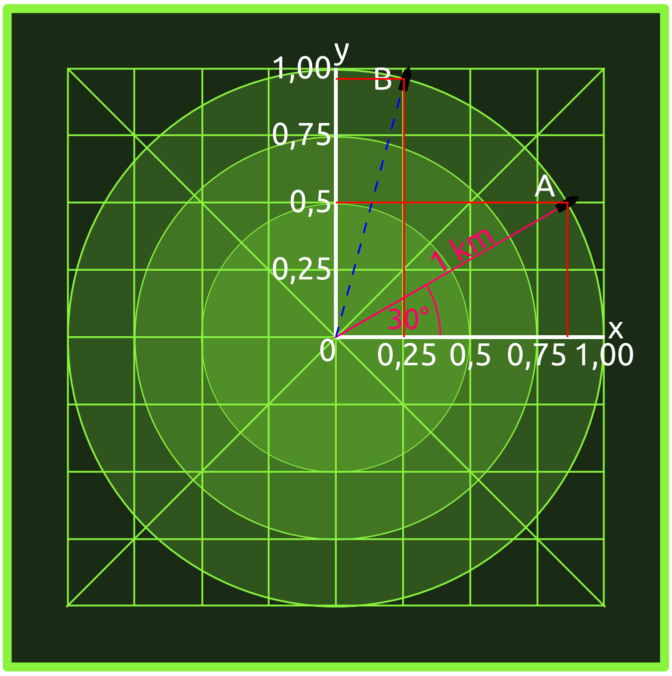


Abbildung 8: Radar Lösung

2.2 Der Sinus und Kosinus am Einheitskreis

Dreiecke mit der **Hypotenusenlänge 1** kann man in einem Koordinatensystem auf folgenden Weise darstellen:

1. Die Endpunkte der **Hypotenuse** sind der Ursprung O und ein Punkt **P**, der auf einem Kreis O mit dem **Radius 1** liegt. Diesen Kreis nennt man den **Einheitskreis**.

2. Die Ecke mit dem rechten Winkel liegt auf der **x-Achse senkrecht unter P**. Der Punkt P hat somit Koordinaten $\mathbf{P(cos(}\alpha\mathbf{)|sin(}\alpha\mathbf{))}$

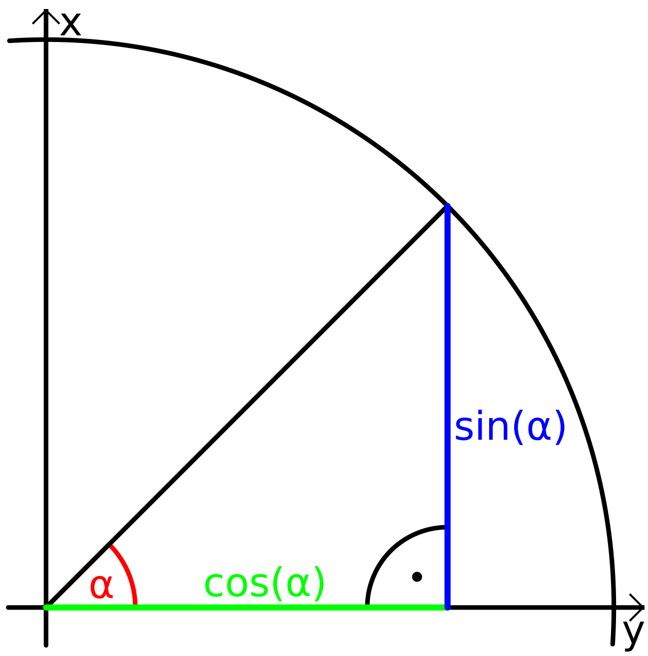
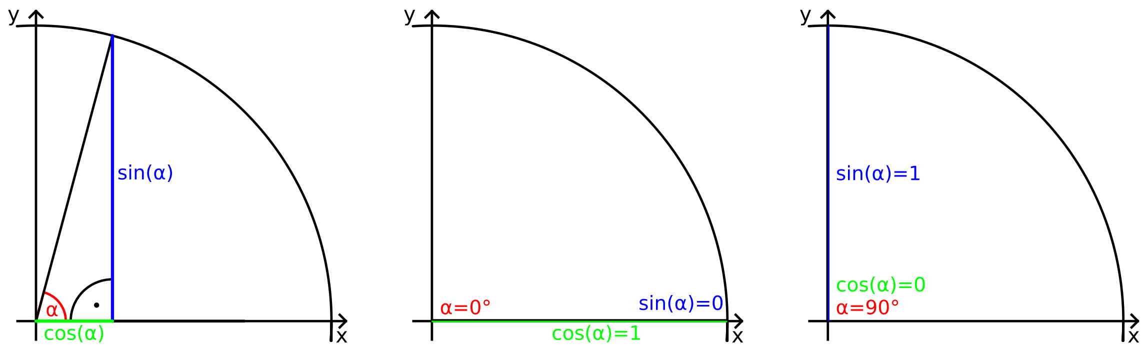


Abbildung 9: Sinus und Kosinus am Einheitskreis

2.3 Beziehungen zwischen Sinus, Kosinus und Tangens



(a) $0 < \alpha < 90$ (b) $sin(0) = 0, cos(0) = 1$ (c) $sin(90) = 1, cos(90) = 1$

Abbildung 10: Beziehung 1

1. Für $0 < \alpha < 90$ nimmt $sin(\alpha)$ mit wachsendem α zu und $cos(\alpha)$ ab(Abbildung 10a). $sin(0) = 0, cos(0) = 1$ (Abbildung 10b), $sin(90) = 1, cos(90) = 0$ (Abbildung 10c).

2. Wendet man auf das im Einheitskreis dargestellte Dreieck den Satz des Pythagoras an(Abbildung 11), so erhält man den für jede Winkelweite gültigen Zusammenhang
$sin^2(\alpha) + cos^2(\alpha) = 1$.

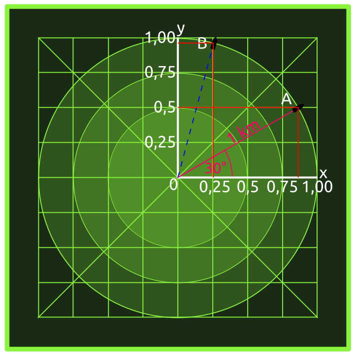


Abbildung 11: Einheitskreis Dreieck Satz des Pythagoras

3. In Abbildung 12 sieht man:
$sin(90 - \alpha) = x = cos(\alpha)$ und
$cos(90 - \alpha) = y = sin(\alpha)$

4. Ebenfalls in Abbildung 12:
$tan(\alpha) = \frac{y}{x} = \frac{sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$.

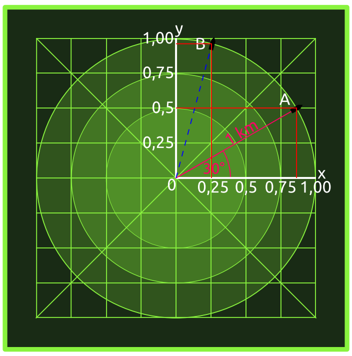


Abbildung 12: sin(90° - α), cos(90° - α)

2.4 Einheitskreis - Definition

Definition: Es gilt:

$sin^2(\alpha) + cos^2(\alpha) = 1$

$sin(90 - \alpha) = sin(\alpha)$

$tan(\alpha) = \frac{sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$,$\alpha \neq 90$, weil: $tan(90) = \frac{sin(90)}{cos(90)} = \frac{1}{0} =!$.

2.5 Einheitskreis - Aufgabe

3 Mit dem Sinus modellieren

3.1 Mit dem Sinus modellieren - Beispiel

3.2 Mit dem Sinus modellieren - Wertetabelle

3.3 Mit dem Sinus modellieren - Zeichnung

3.4 Mit dem Sinus modellieren - Winkel α mit 0°...$<$

3.5 Mit dem Sinus modellieren - Zeichnung

3.6 Mit dem Sinus modellieren - Zeichnung

3.7 Sinusfunktion im Gradmaß - Definition

3.8 Mit dem Sinus modellieren - Aufgabe

4 Zusammenfassung

5 Anwendungsbeispiele / Weiter Anwendungen

6 Quellen

Freiburger Münster - `https://freiburg-schwarzwald.de/fotos06feb/freiburg12-060227.jpg`