Mit dem Sinus modellieren

Kirill Heitzler

2. März 2021

Inhaltsverzeichnis

1 Rückblick **3**
1.1 Rechtwinkliges Dreieck - Beschriftung 3
1.2 Der Sinus 3
1.3 Der Sinus - Beispiel Aufgabe 4
1.4 Der Kosinus und der Tangens 5

2 Einheitskreis **6**
2.1 Einheitskreis - Beispiel 6
2.2 Der Sinus und Kosinus am Einheitskreis 7
2.3 Beziehungen zwischen Sinus, Kosinus und Tangens 7
2.4 Einheitskreis - Definition 9
2.5 Einheitskreis - Aufgabe 9

3 Mit dem Sinus modellieren **10**
3.1 Mit dem Sinus modellieren - Beispiel 10
3.2 Winkel α mit $0° \leq \alpha \leq 90°$ 10
3.3 Erweiterter Winkel α mit $90° < \alpha \leq 360°$ 11
3.4 Erweiterter Winkel α mit $90° < \alpha \leq 360°$ - Aufgabe 11
3.5 Funktion f mit f(α) 12
3.6 Sinusfunktion im Gradmaß - Definition 12
3.7 Graph einer Sinusfunktion zeichnen 13
3.8 Einen Zeitlichen Vorgang modellieren 13

4 Anwendung **15**

5 Zusammenfassung **16**

6 Quellen **17**

1 Rückblick

1.1 Rechtwinkliges Dreieck - Beschriftung

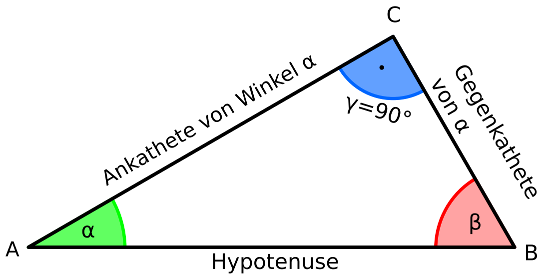


Abbildung 1: Rechtwinkliges Dreieck

Das Rechtwinklige Dreieck wird folgendermaßen wie in Abbildung 1 beschriftet.
Die Ecken werden mit den Buchstaben A, B, C gegen den Uhrzeigersinn bei A angefangen beschriftet.
Die Winkel α, β, γ werden in die Ecken der entsprechenden Buchstaben A, B, C gesetzt.
Die anliegende Kathete zu Winkel α wir „Ankathete von α“ genannt und die Kathete gegenüber von Alpha wird „Gegenkathete von α“ genannt.
Die Hypothenuse liegt gegenüber des Rechten Winkel γ.

1.2 Der Sinus

Definition: In einem rechtwinkligen Dreieck nennt man zu einem Winkel α des Dreiecks das Streckenverhältnis

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Hypothenuse}} \tag{1}$$

den **Sinus von** α

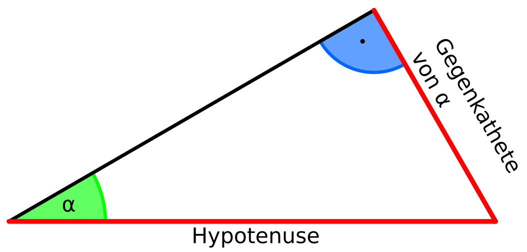


Abbildung 2: Rechtwinkliges Dreieck

1.3 Der Sinus - Beispiel Aufgabe

Gegenkathete von α mithilfe des Sinus berechnen:
Aufgabe: Berechne die Höhe des Freiburger Münsters. Das rechtwinklige Dreieck in Abbildung 3 besitzt einen rechten Winkel(90°), die Hyptenuse 164,05 Meter und die Winkelweite des Winkels α mit 45°. Berechne die Gegenkathete von α namen's x.

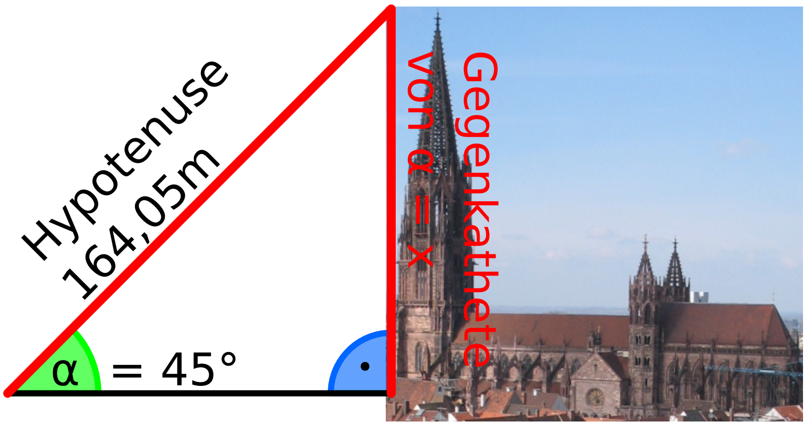


Abbildung 3: Rechtwinkliges Dreieck am MÃijnster

Rechnung:

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Hypothenuse}} \tag{1}$$

$$\sin(45°) = \frac{x}{164,05m} \qquad | \cdot 164,05m \tag{2}$$

$$\sin(45°) \cdot 164,05m = x \tag{3}$$

$$x \cong 116m \tag{4}$$

Antwort: Die Gegenkathete von α beträgt etwa 116 Meter, somit ist das Münster auch etwa 116 Meter groß.

1.4 Der Kosinus und der Tangens

Sinus von α:

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Hypothenuse}} \tag{1}$$

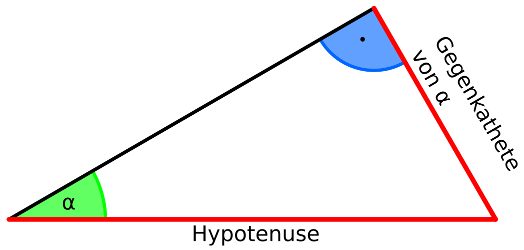


Abbildung 4: Rechtwinkliges Dreieck

Cosinus von α:

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{Ankathete von } \alpha}{\text{Hypothenuse}} \tag{1}$$

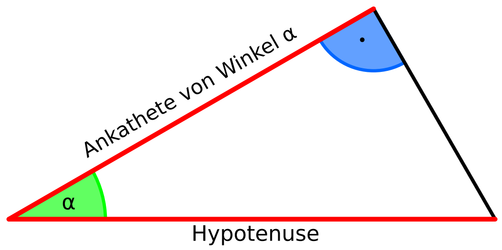


Abbildung 5: Rechtwinkliges Dreieck

Tangens von α:

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Ankathete von } \alpha} \tag{1}$$

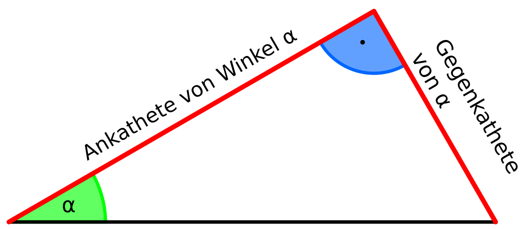


Abbildung 6: Rechtwinkliges Dreieck

2 Einheitskreis

2.1 Einheitskreis - Beispiel

Aufgaben-Text: Auf einem kresiförmigen Koordinatensystem eines Radarschirms Abbildung 7 wird die Lage von zwei Schiffen durch die Entfernung zum Hafen(0) und durch den Kurs gegenüber der x-Achse beschrieben.
Aufgabe: Ein Schiff **A** ist mit dem Kurs **30°** gegenüber der x-Achse **einen Kilometer** weit gefahren. Welche Koordinaten im **x-y-Kooradinatensystem** hat es?
Welche Koordinaten hat das Schiff **B**, das mit dem Kurs **75°** **einen Kilometer** weit gefahren ist?

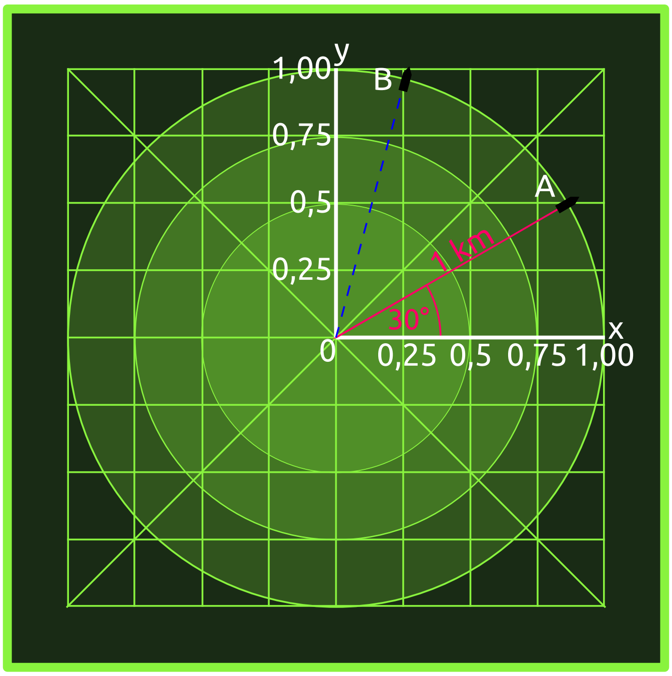


Abbildung 7: Radar

Lösung:

Das Schiff **A** mit dem Kurs **30°** befindet sich auf der x-Achse: etwa **0,86 Kilometer** und y-Achse: **0,5 Kilometer**. Also auf dem Punkt **A(0,86|0,5)**

Das Schiff **B** mit dem Kurs **75°** befindet sich auf der x-Achse: etwa **0,25 Kilometer** und y-Achse: **0,96 Kilometer**. Also auf dem Punkt **A(0,25|0,96)**

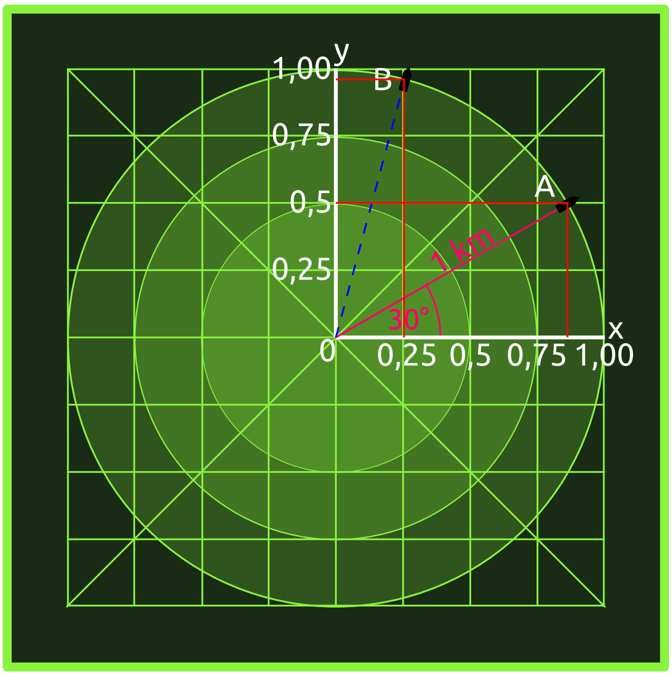


Abbildung 8: Radar Lösung

2.2 Der Sinus und Kosinus am Einheitskreis

Dreiecke mit der **Hypotenusenlänge 1** kann man in einem Koordinatensystem auf folgenden Weise darstellen:

1. Die Endpunkte der **Hypotenuse** sind der Ursprung O und ein Punkt **P**, der auf einem Kreis O mit dem **Radius 1** liegt. Diesen Kreis nennt man den **Einheitskreis**.

2. Die Ecke mit dem rechten Winkel liegt auf der **x-Achse senkrecht unter P**. Der Punkt P hat somit Koordinaten $\mathbf{P(cos(\alpha)|sin(\alpha))}$

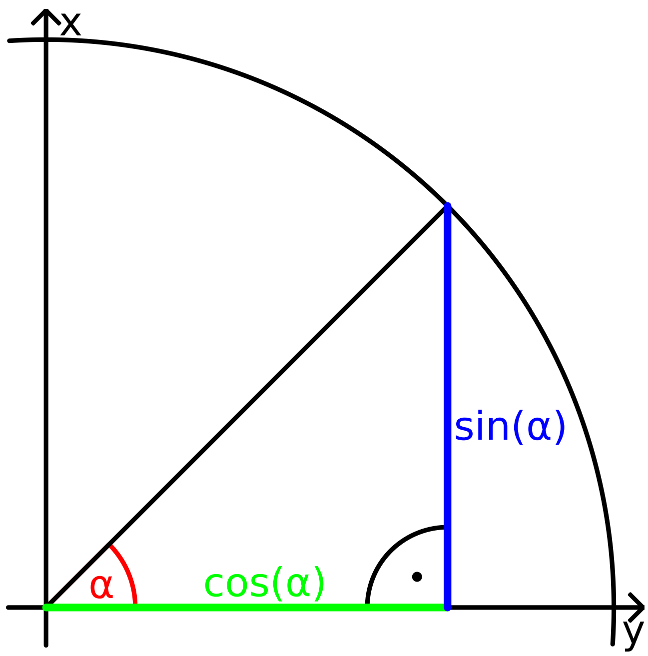
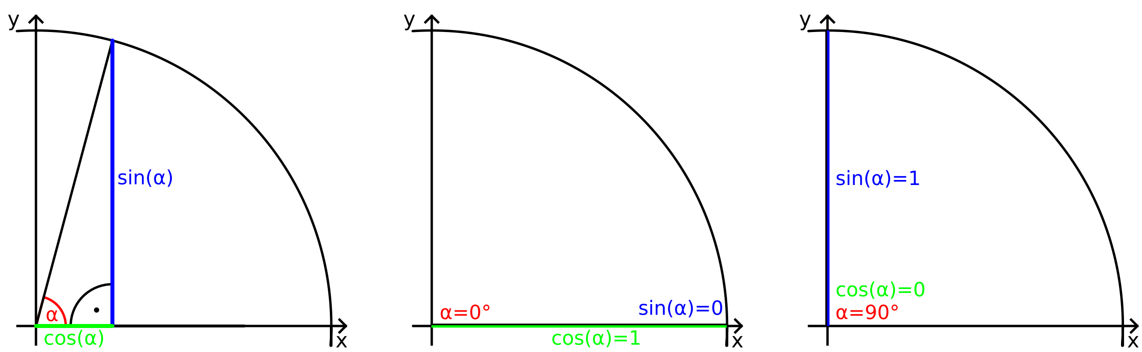


Abbildung 9: Sinus und Kosinus am Einheitskreis

2.3 Beziehungen zwischen Sinus, Kosinus und Tangens

1. Für $0° < \alpha < 90°$ nimmt $sin(\alpha)$ mit wachsendem α zu und $cos(\alpha)$ ab(Abbildung 10a). $sin(0°) = 0$, $cos(0°) = 1$ (Abbildung 10b), $sin(90°) = 1$, $cos(90°) = 0$ (Abbildung 10c).



(a) $0° < \alpha < 90°$ (b) $sin(0°) = 0$, $cos(0°) = 1$ (c) $sin(90°) = 1$, $cos(90°) = 1$

Abbildung 10: Beziehung 1

2. Wendet man auf das im Einheitskreis dargestellte Dreieck den Satz des Pythagoras an(Abbildung 11), so erhält man den für jede Winkelweite gültigen Zusammenhang
$sin^2(\alpha) + cos^2(\alpha) = 1$.
Beispiel:

$$\begin{aligned} sin^2(\alpha) + cos^2(\alpha) &= 1 && (1)\\ (sin(45))^2 + (cos(45))^2 &= 1 && (2)\\ (\frac{\sqrt{2}}{2})^2 + (\frac{\sqrt{2}}{2})^2 &= 1 && (3)\\ \frac{\sqrt{2^2}}{2^2} + \frac{\sqrt{2^2}}{2^2} &= 1 && (4)\\ \frac{2}{4} + \frac{2}{4} &= 1 && (5)\\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} &= 1 && (6)\\ 0,5 + 0,5 &= 1 && (7) \end{aligned}$$

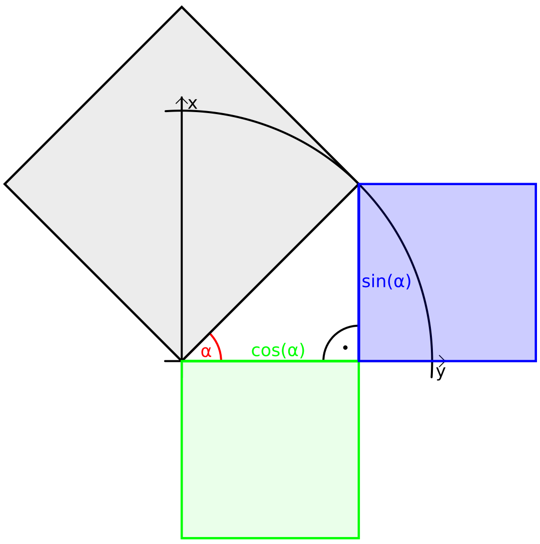


Abbildung 11: Einheitskreis Dreieck Satz des Pythagoras

3. In Abbildung 12 sieht man:
$sin(90° - \alpha) = x = cos(\alpha)$ und
$cos(90° - \alpha) = y = sin(\alpha)$
Beispiel:

$$\begin{aligned} sin(90° - \alpha) = x & \quad = cos(\alpha) && (1)\\ sin(90° - 30°) = \frac{\sqrt{3}}{2} & \quad = cos(30°) && (2) \end{aligned}$$

4. Ebenfalls in Abbildung 12:
$tan(\alpha) = \frac{y}{x} = \frac{sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$.

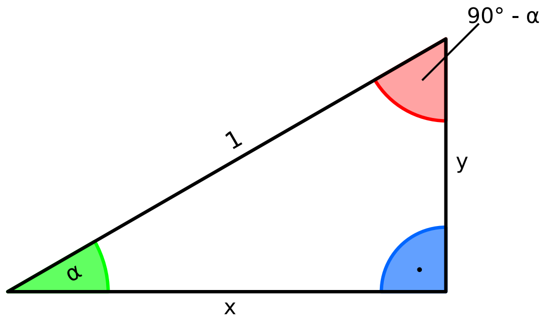


Abbildung 12: sin(90° - α); cos(90° - α)

2.4 Einheitskreis - Definition

Definition: Es gilt:

$sin^2(\alpha) + cos^2(\alpha) = 1$

$sin(90° - \alpha) = sin(\alpha)$

$tan(\alpha) = \frac{sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$, $\alpha \neq 90°$, weil: $tan(90) = \frac{sin(90)}{cos(90)} = \frac{1}{0} = \lightning$

2.5 Einheitskreis - Aufgabe

Aufgabe: $sin(\alpha) = 0,6$.

Bestimme:

a) $cos(\alpha)$ **b)** $tan(\alpha)$ **c)** $sin(90° - \alpha)$ **d)** $cos(90° - \alpha)$ **e)** $tan(90° - \alpha)$

a) Lösung:

$$\begin{aligned} sin^2(\alpha) + cos^2(\alpha) &= 1 && (1)\\ 0,6^2 + cos^2(\alpha) &= 1 && \quad | - 0,6^2 \quad (2)\\ cos^2(\alpha) &= 1 - 0,36 && \quad |\sqrt{} \quad (3)\\ cos(\alpha) &= \sqrt{1 - 0,36} && (4)\\ cos(\alpha) &= \sqrt{0,64} && (5)\\ cos(\alpha) &= 0,8 && (6) \end{aligned}$$

b) Lösung:

$$\begin{aligned} tan(\alpha) &= \frac{sin(\alpha)}{cos(\alpha)} && (1)\\ tan(\alpha) &= \frac{0,6}{0,8} = \frac{6}{8} && (2)\\ tan(\alpha) &= \frac{3}{4} = 0,75 && (3) \end{aligned}$$

c) Lösung:

$$sin(90° - \alpha) = cos(\alpha) = 0,8 \qquad (1)$$

d) Lösung:

$$cos(90° - \alpha) = sin(\alpha) = 0,6 \qquad (1)$$

e) Lösung:

$$\begin{aligned} tan(90° - \alpha) &= \frac{sin(90° - \alpha)}{cos(90° - \alpha)} = \frac{0,8}{0,6} && (1)\\ tan(90° - \alpha) &= \frac{8}{6} = \frac{4}{3} && (2) \end{aligned}$$

3 Mit dem Sinus modellieren

3.1 Mit dem Sinus modellieren - Beispiel

Aufgabe:
Bei einem Shaufelraddampfer dreht sich das Rad mit einem Durchmsser von 2 Meter einmal vollständig in 60 Sekunden(Abbildung 13). In welcher Höhe über dem Wasserspiegel liegt der rot markierte Punkt A?
Erstelle eine Wertetabelle in 5 Sekunden Schritten.

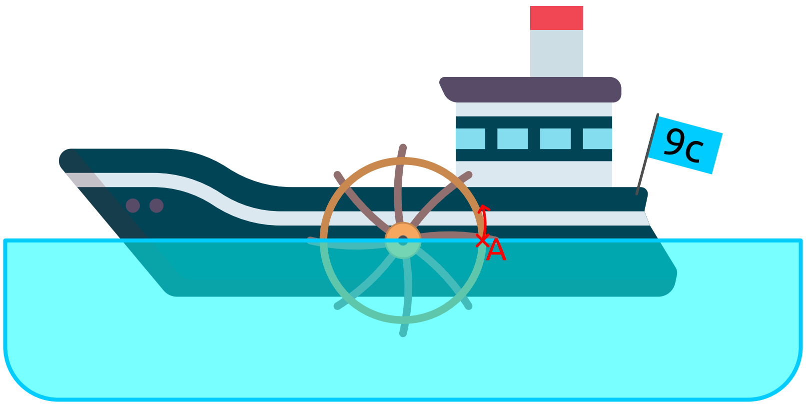


Abbildung 13: Schaufelraddampfer

Lösung:

Zeit t (in s)	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
Winkel α	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°	360°
HÃűhe h (in m)	0	0,5	0,87	1	0,87	0,5	0	-0,5	-0,87	-1	-0,87	-0,5	0

3.2 Winkel α mit $0° \leq \alpha \leq 90°$

Am Einheitskreis entspricht sin(α) der y-Koordinate des Punktes P(Abbildung 14).
$sin(40°) \approx 0,64$

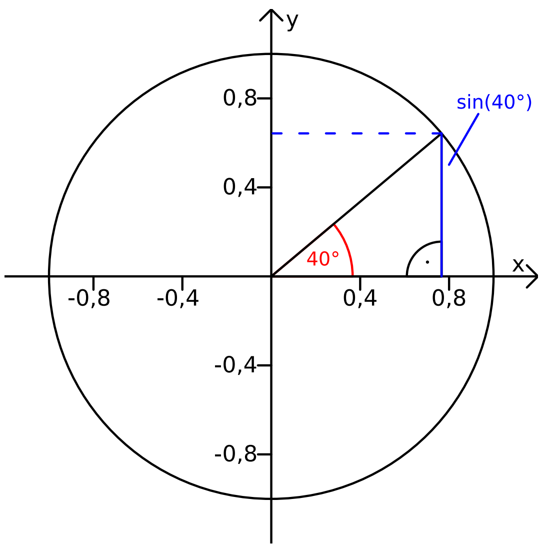
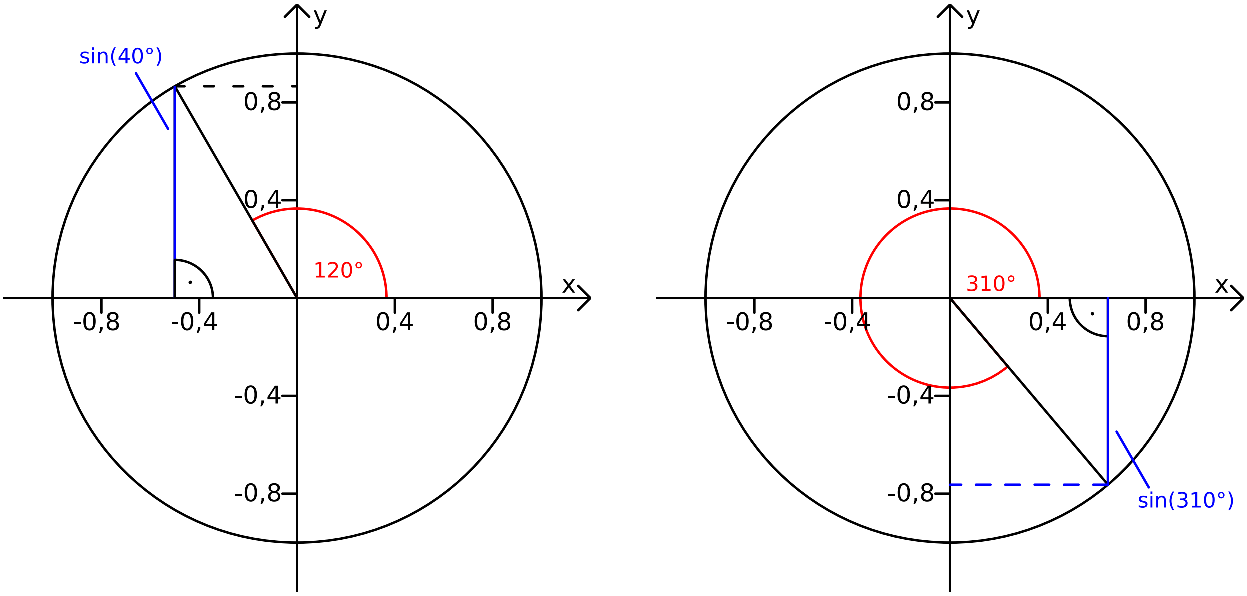


Abbildung 14: Winkel α mit $0° \leq \alpha \leq 90°$

3.3 Erweiterter Winkel α mit $90° < \alpha \leq 360°$

Wird α über 90° vergrößert, wird der Sinuswert von α ebenso als y-Koordinate des Punktes P festgelegt(Abbildung 15).



(a) $sin(120°) \approx 0,87$ (b) $sin(310°) \approx -0,77$

Abbildung 15: Erweiterter Winkel α mit $90° < \alpha \leq 360°$

3.4 Erweiterter Winkel α mit $90° < \alpha \leq 360°$ - Aufgabe

Aufgabe:
Ein Punkt P bewegt sich auf dem Einheitskreis(Abbildung 16) gegen den Uhrzeigersinn. Für $\alpha = 0°$ befindet er sich im Punkt(1|0)
a) Gib die x- und y-Koordinaten des Punktes P für $\alpha = 140°$ und für $\alpha = 310°$ an.
b) Bestimme zwei verschiedene Werte für α, sodass seine y-Koordinate 0,8 beträgt.

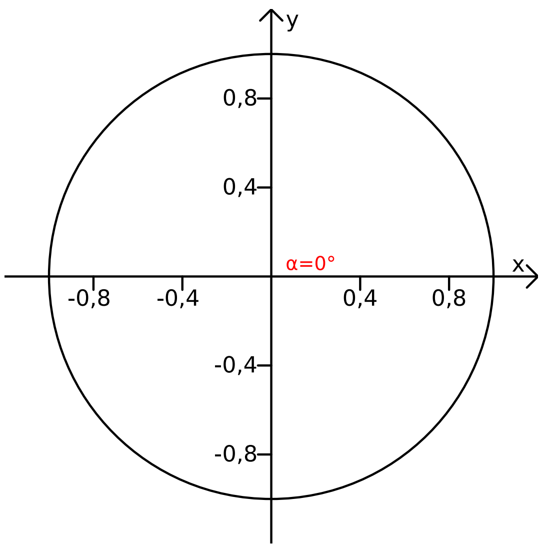


Abbildung 16: $\alpha = 0°$

Lösung a)
Für $\alpha = 140°$: Punkt (-0,77|0,64)

$$sin(\alpha) = y \quad (1)$$
$$sin(140°) \approx 0,64 \quad (2)$$
$$cos(\alpha) = x \quad (3)$$
$$cos(140°) \approx -0,77 \quad (4)$$

Für $\alpha = 310°$: Punkt (0,64|-0,77)

$$sin(\alpha) = y \quad (1)$$
$$sin(140°) \approx -0,77 \quad (2)$$
$$cos(\alpha) = x \quad (3)$$
$$cos(140°) \approx 0,64 \quad (4)$$

Lüsung b)
Für α_1: $sin(53,1°) \approx 0,8$

$$sin^{-1}(0,8) \approx 53,1° \quad (1)$$
$$\quad (5)$$

Für α_2: $sin(126,9°) \approx 0,8$

$$sin^{-1}(0,8) \approx 53,1° \quad (1)$$
$$53,1° - 180° = 126,9° \quad (2)$$

3.5 Funktion f mit f(α)

Ordnet man jedem Winkel α mit $0° \leq \alpha \leq 360°$ seinen Sinuswert zu, so erhält man eine Funktion f mit f(α) = sin(α).
Man kann mithilfe des Graphen von f(Abbildung 17) zu gegebenem Winkel den Sinuswert näherungsweise ablesen oder näherungsweise Winkel mit vorgegebenem Sinuswert ermitteln.

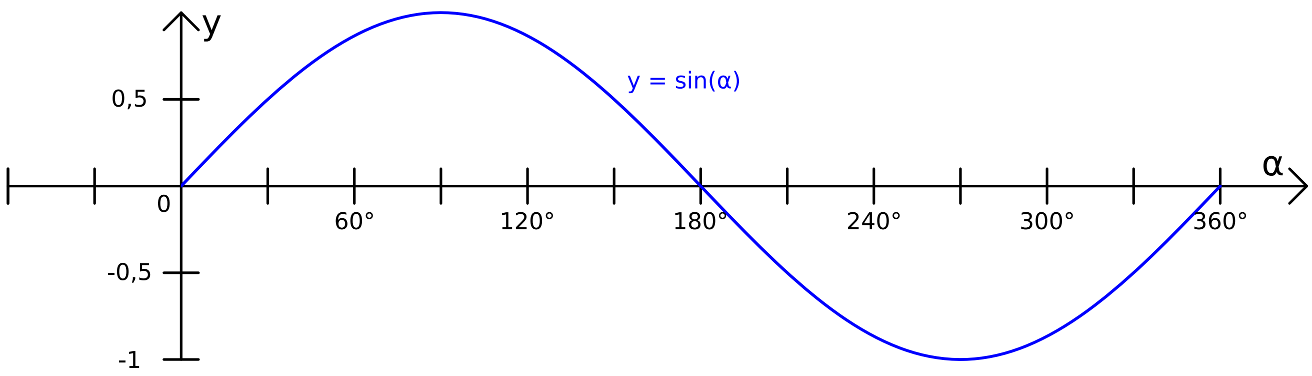


Abbildung 17: $f(\alpha) = sin(\alpha)$

3.6 Sinusfunktion im Gradmaß - Definition

Die Funktion f mit f(α) = sin(α) heißt **Sinusfunktion im Gradmaß**.

3.7 Graph einer Sinusfunktion zeichnen

Zeit t (in s)	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
Winkel α	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270○	300°	330°	360°
HÃűhe h (in m)	0	0,5	0,87	1	0,87	0,5	0	-0,5	-0,87	-1	-0,87	-0,5	0

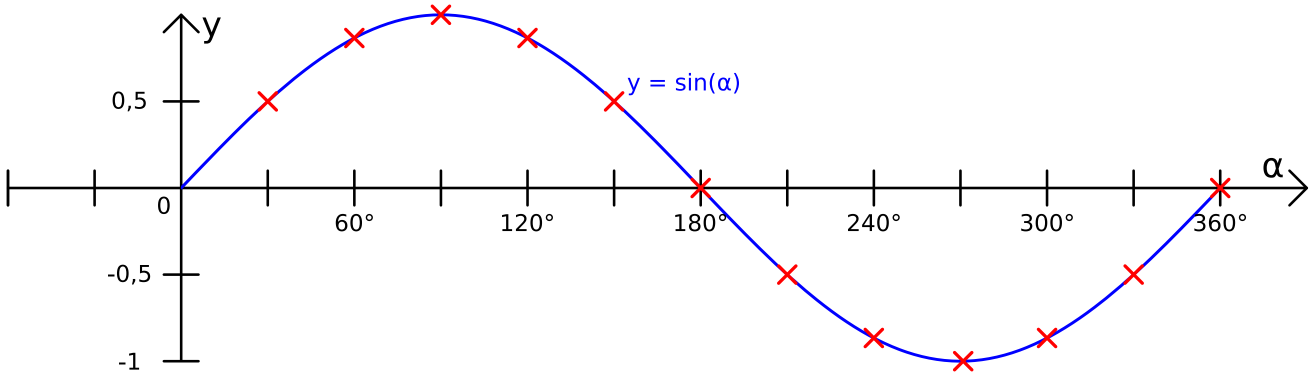


Abbildung 18: Sinuswelle Zeichnen

3.8 Einen Zeitlichen Vorgang modellieren

In einem Hafenbecken schwankt der Wasserstand periodisch um seinen Durchscnittswert(Abbildung 19)

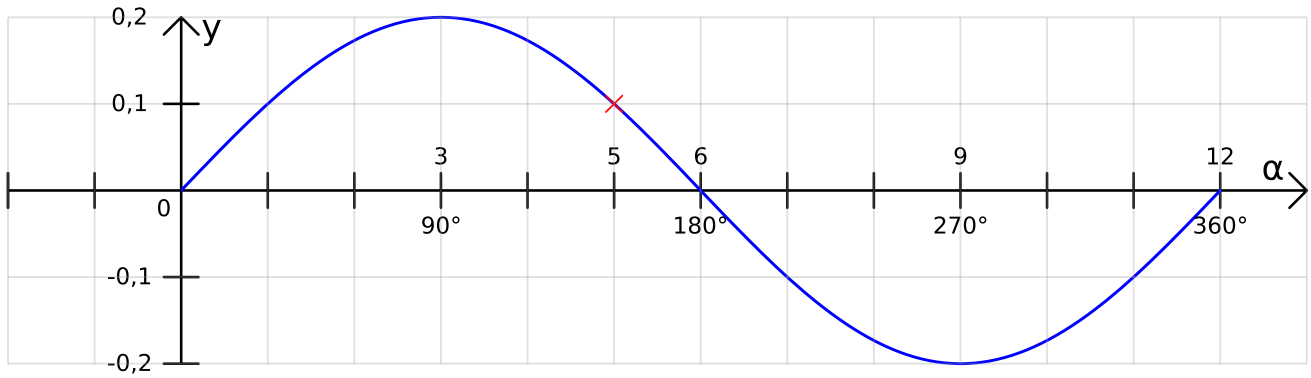


Abbildung 19: Wasserstand

Aufgabe:
a) Erläutere, wie man zu einem gegebenen Zeitpunkt t die Winkelweite α erhält und umgekehrt. Bestimme für $t = 5$ (t in h) den zugehörigen Winkel.
b) Mit welcher Funktion kann man zu einem gegebenen Winkel α den Wasserstand berechnen? Berechne den Wasserstand 5 Stunden nach Beobachtungsbeginn.

Lösung a)

$$12h \mathrel{\widehat{=}} 360° \qquad | : 12 \tag{1}$$
$$1h \mathrel{\widehat{=}} 30° \tag{2}$$

12h in Abbildung 17 entsprechen 360°, also entspricht 1h dem Winkel 30°.
Daraus Folgt $\alpha = t \cdot 30°$ und $t = \frac{\alpha}{30°}$ (t in h). Für t = 5 erhält man $\alpha = 5 \cdot 30° = 150°$

$$\alpha = t \cdot 30°$$
$$t = \frac{\alpha}{30°}$$

$$\alpha = 5 \cdot 30° \tag{1}$$
$$= 150° \tag{2}$$

Lösung b)
Da der Wasserstand zwischen -0,2 und 0,2 um den Durchscnittswert pendelt(Abbildung 19), gilt:

$$f(\alpha) = 0,2 \cdot sin(\alpha)$$

Für t = 5:

$$\alpha = 5 \cdot 30° \tag{1}$$
$$= 150° \tag{2}$$
$$f(150°) = 0,2 \cdot sin(150°) \tag{3}$$
$$= 0,1 \tag{4}$$

Nach 5 Stunden liegt der Wasserstand 10cm über dem Durchscnittswert.

4 Anwendung

Auch wenn es uns nicht oft auffällt, viele technische Geräte bzw. Mechanismen verwenden die trigonometrischen Funktionen Sinus und Kosinus. Genauso wie viele mathematische Verfahren.
Ein paar Beispiele:

- GPS - Global Positioning System (Positionsbestimmung mit Hilfe von Satelliten)
- Computergrafiken in 3D und 2D
- drehendes Objekt im Computerspiel
- Spracherkennung
- Landvermessungen
- Fourier Transformation (z. B. Anwendung beim Spektroskop für Chemiker)
- Astronomen nutzten Spektroskope, um chemische Zusammensetzungen von weit entfernten Planeten zu bestimmen
- FFT - Fast Fourier Transformation für Bildkompression, Audioverarbeitung, mp3-Algorithmus, seismische Datenverarbeitung etc.

5 Zusammenfassung

6 Quellen

- Freiburger Münster - https://freiburg-schwarzwald.de/fotos06feb/freiburg12-060227.jpg
- Vector Boot - https://www.vecteezy.com/vector-art/170704-flat-ship-vectors
- Lambacher Sweizer 9(S. 90 - 104) - Mathematik Buch
- Sinus und Kosinus im Alltag - https://www.matheretter.de/wiki/sinus-kosinus-alltag