Mit dem Sinus modellieren

Kirill Heitzler

20. März 2021

Grundlagen

Rechtwinkliges Dreieck - Beschriftung

Ecken

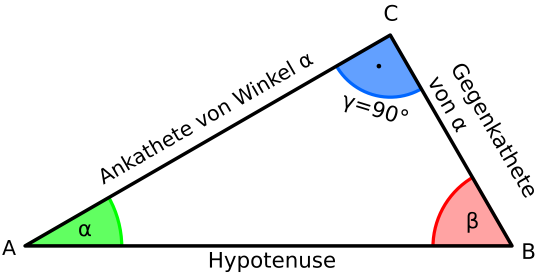

Abbildung 1: Rechtwinkliges Dreieck

Ecken

- Gegen den Uhrzeigersinn

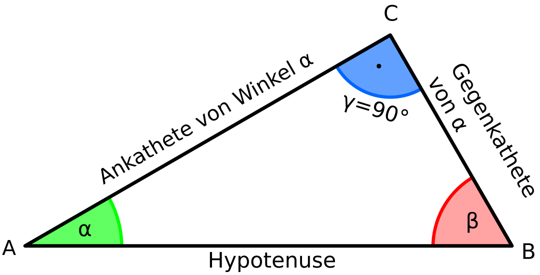

Abbildung 1: Rechtwinkliges Dreieck

Ecken

- Gegen den Uhrzeigersinn
- A

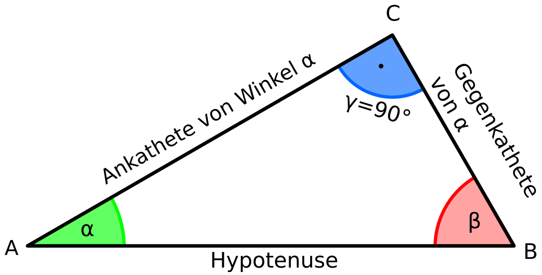

Abbildung 1: Rechtwinkliges Dreieck

Ecken

- Gegen den Uhrzeigersinn
- A
- B

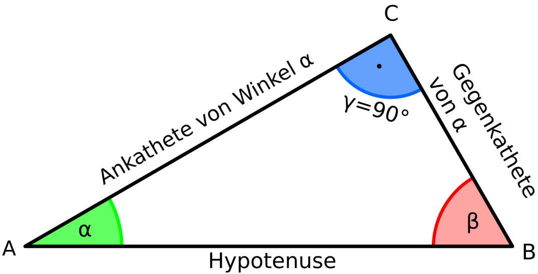

Abbildung 1: Rechtwinkliges Dreieck

Ecken

- Gegen den Uhrzeigersinn
- A
- B
- C

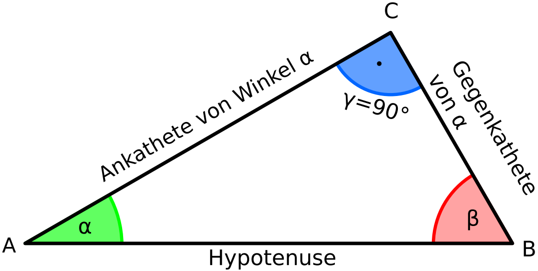

Abbildung 1: Rechtwinkliges Dreieck

Ecken

Die Ecken werden mit den Buchstaben A, B, C gegen den Uhrzeigersinn bei A angefangen beschriftet.

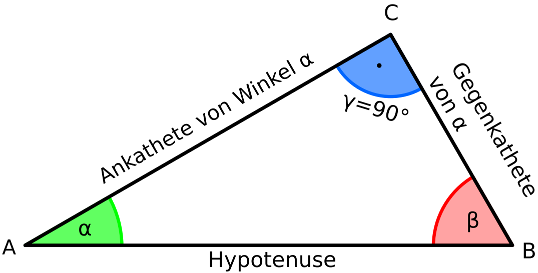

Abbildung 1: Rechtwinkliges Dreieck

Winkel

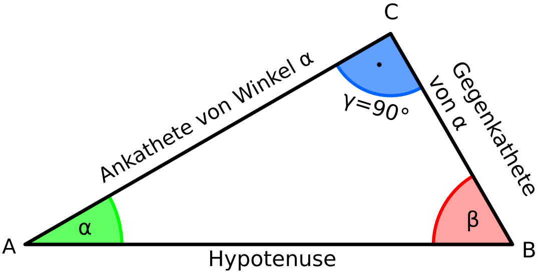

Abbildung 2: Rechtwinkliges Dreieck

Winkel

- α

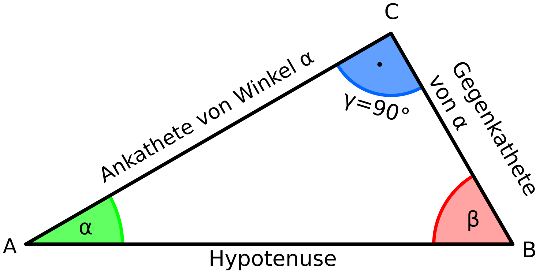

Abbildung 2: Rechtwinkliges Dreieck

Winkel

- α
- β

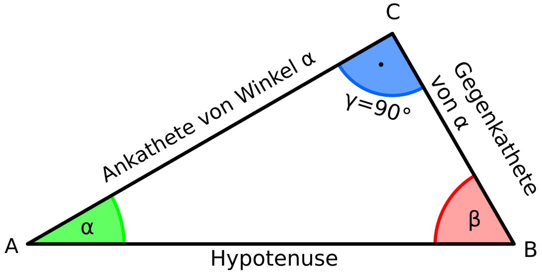

Abbildung 2: Rechtwinkliges Dreieck

Winkel

- α
- β
- γ

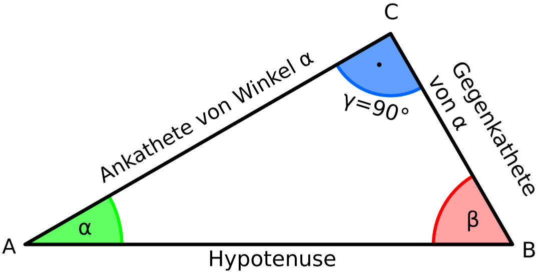

Abbildung 2: Rechtwinkliges Dreieck

Winkel

Die Winkel α, β, γ werden in die Ecken der entsprechenden Buchstaben A, B, C gesetzt.

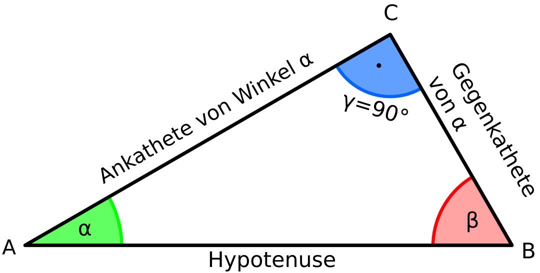

Abbildung 2: Rechtwinkliges Dreieck

Katheten

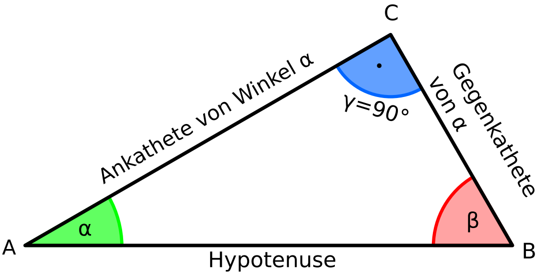

Abbildung 3: Rechtwinkliges Dreieck

Katheten

- „Ankathete von α“

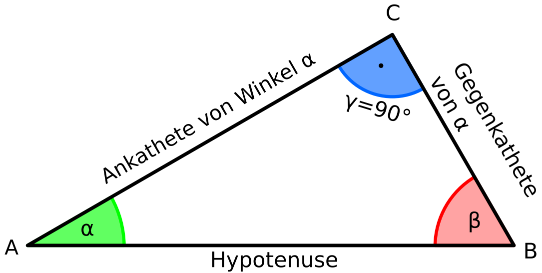

Abbildung 3: Rechtwinkliges Dreieck

Katheten

- „Ankathete von α“
- „Gegenkathete von α“

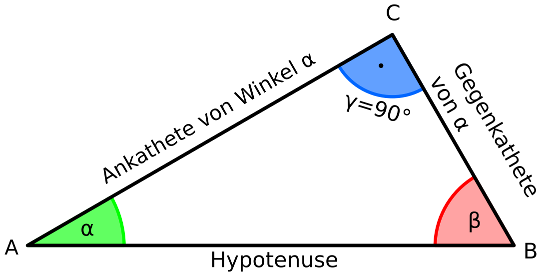

Abbildung 3: Rechtwinkliges Dreieck

Katheten

Die anliegende Kathete zu Winkel α wird „Ankathete von α“ genannt und die Kathete gegenüber von α wird „Gegenkathete von α“ genannt.

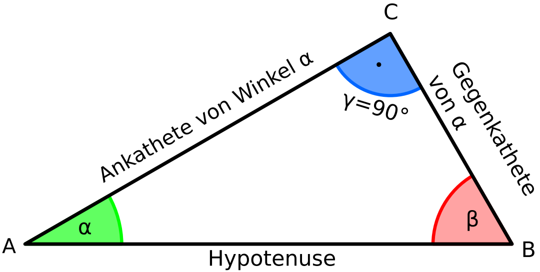

Abbildung 3: Rechtwinkliges Dreieck

Hypotenuse

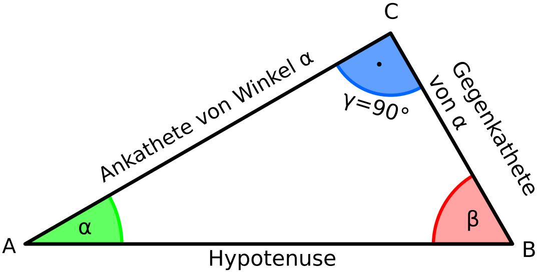

Abbildung 4: Rechtwinkliges Dreieck

Hypotenuse

- „Hypotenuse“

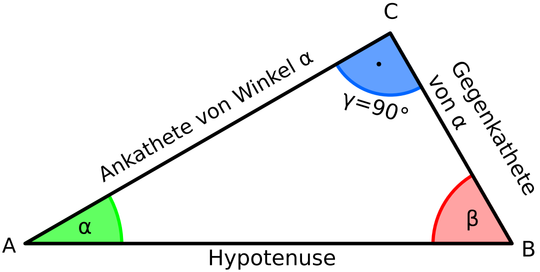

Abbildung 4: Rechtwinkliges Dreieck

Hypotenuse

Die Hypotenuse liegt gegenüber des rechten Winkels γ.

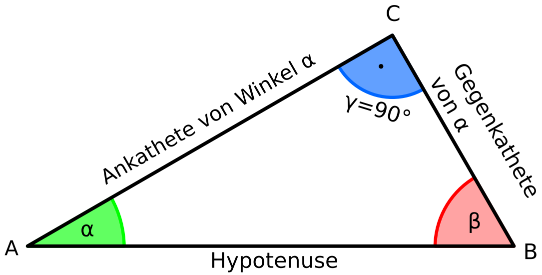

Abbildung 4: Rechtwinkliges Dreieck

Der Sinus

Definition

In einem rechtwinkligen Dreieck (Abbildung 16) nennt man zu einem Winkel α des Dreiecks das Streckenverhältnis

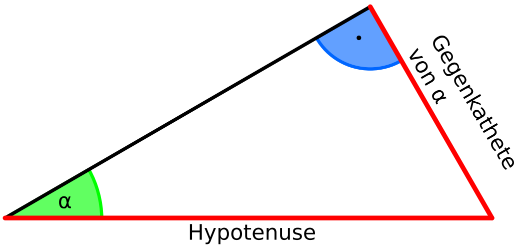

Abbildung 5: Rechtwinkliges Dreieck

Definition

In einem rechtwinkligen Dreieck (Abbildung 16) nennt man zu einem Winkel α des Dreiecks das Streckenverhältnis

$$\sin(\alpha) =$$

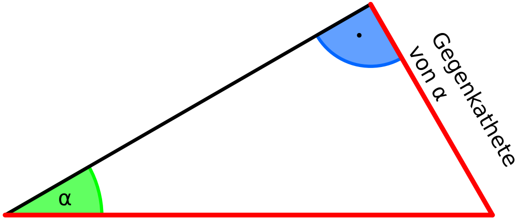

Abbildung 5: Rechtwinkliges Dreieck

Definition

In einem rechtwinkligen Dreieck (Abbildung 16) nennt man zu einem Winkel α des Dreiecks das Streckenverhältnis

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{}$$

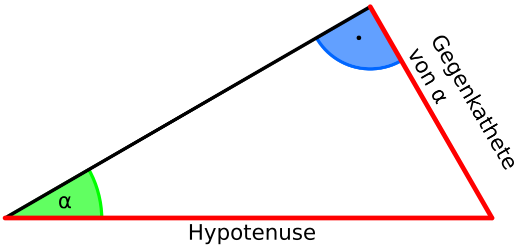

Abbildung 5: Rechtwinkliges Dreieck

Definition

In einem rechtwinkligen Dreieck (Abbildung 16) nennt man zu einem Winkel α des Dreiecks das Streckenverhältnis

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}}$$

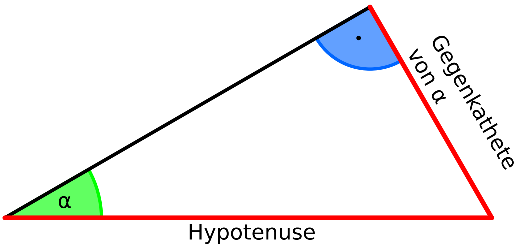

Abbildung 5: Rechtwinkliges Dreieck

Definition

In einem rechtwinkligen Dreieck (Abbildung 16) nennt man zu einem Winkel α des Dreiecks das Streckenverhältnis

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}}$$

den **Sinus von** α.

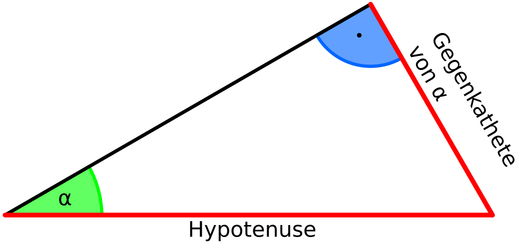

Abbildung 5: Rechtwinkliges Dreieck

Sinus - Beispiel
Gegenkathete von α mithilfe des Sinus berechnen

Aufgabe

Berechne die Höhe des Freiburger Münsters. Das rechtwinklige Dreieck in Abbildung 6 besitzt einen rechten Winkel (90°), die Hypotenuse 164,05 Meter und die Winkelweite des Winkels α mit 45°. Berechne die Gegenkathete von α namens x.

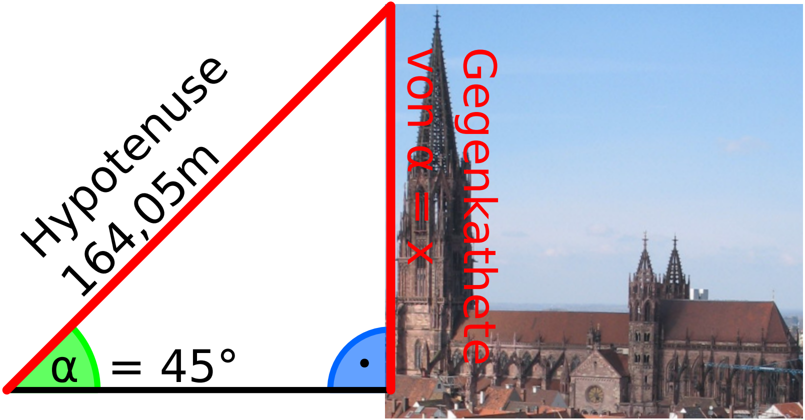

Abbildung 6: Rechtwinkliges Dreieck am Münster

Rechnung

- $\alpha = 45°$

Rechnung

- $\alpha = 45°$
- $\text{Hypotenuse} = 164,05m$

Rechnung

- $\alpha = 45°$
- Hypotenuse $= 164,05m$
- Gegenkathete von $\alpha = x$

Rechnung

- $\alpha = 45°$
- Hypotenuse $= 164,05m$
- Gegenkathete von $\alpha = x$

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}} \tag{1}$$

Rechnung

- $\alpha = 45^\circ$
- Hypotenuse $= 164,05m$
- Gegenkathete von $\alpha = x$

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}} \tag{1}$$

$$\sin(45^\circ) =$$

Rechnung

- $\alpha = 45°$
- Hypotenuse $= 164,05m$
- Gegenkathete von $\alpha = x$

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}} \tag{1}$$
$$\sin(45°) = \frac{x}{}$$

Rechnung

- $\alpha = 45°$
- Hypotenuse $= 164,05m$
- Gegenkathete von $\alpha = x$

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}} \tag{1}$$
$$\sin(45°) = \frac{x}{164,05m}$$

Rechnung

- $\alpha = 45°$
- Hypotenuse $= 164,05m$
- Gegenkathete von $\alpha = x$

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}} \tag{1}$$

$$\sin(45°) = \frac{x}{164,05m} \qquad | \cdot 164,05m \tag{2}$$

Rechnung

- $\alpha = 45^\circ$
- Hypotenuse $= 164,05m$
- Gegenkathete von $\alpha = x$

$$
\begin{aligned}
\sin(\alpha) &= \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}} && (1)\\
\sin(45^\circ) &= \frac{x}{164,05m} \qquad\qquad \mid \cdot 164,05m && (2)\\
\sin(45^\circ) \cdot 164,05m &=
\end{aligned}
$$

Rechnung

- $\alpha = 45°$
- Hypotenuse $= 164,05m$
- Gegenkathete von $\alpha = x$

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}} \tag{1}$$

$$\sin(45°) = \frac{x}{164,05m} \qquad \mid \cdot 164,05m \tag{2}$$

$$\sin(45°) \cdot 164,05m = x \tag{3}$$

Rechnung

- $\alpha = 45°$
- Hypotenuse $= 164,05m$
- Gegenkathete von $\alpha = x$

$$
\begin{align}
\sin(\alpha) &= \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}} \tag{1}\\
\sin(45°) &= \frac{x}{164,05m} \qquad \mid \cdot 164,05m \tag{2}\\
\sin(45°) \cdot 164,05m &= x \tag{3}\\
x &\cong
\end{align}
$$

Rechnung

- $\alpha = 45°$
- Hypotenuse $= 164,05m$
- Gegenkathete von $\alpha = x$

$$
\begin{aligned}
\sin(\alpha) &= \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}} && (1)\\
\sin(45°) &= \frac{x}{164,05m} \qquad \mid \cdot 164,05m && (2)\\
\sin(45°) \cdot 164,05m &= x && (3)\\
x &\cong 116m && (4)
\end{aligned}
$$

Antwort

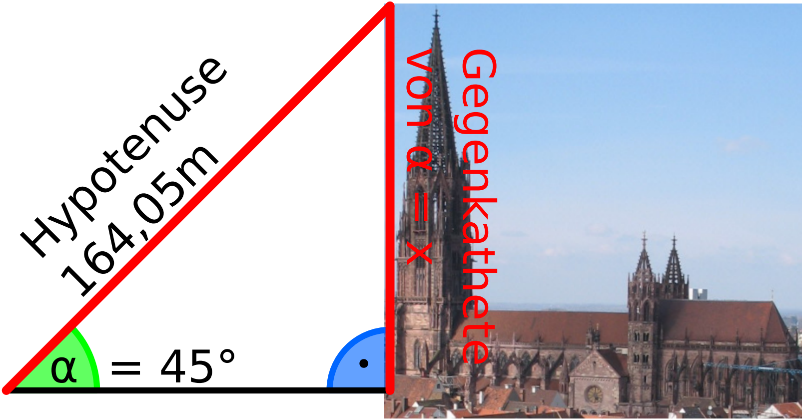

Abbildung 7: Rechtwinkliges Dreieck am Münster

Antwort

Die Gegenkathete von α beträgt etwa 116 Meter, somit ist das Münster auch etwa 116 Meter groß.

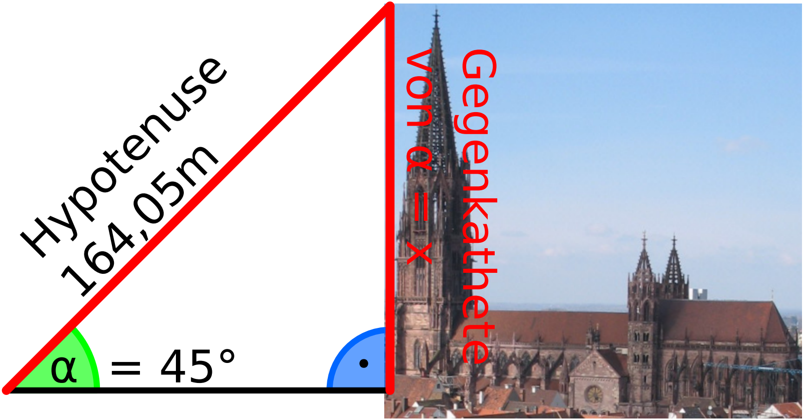

Abbildung 7: Rechtwinkliges Dreieck am Münster

Der Kosinus und der Tangens

Sinus von α

$$\sin(\alpha) =$$

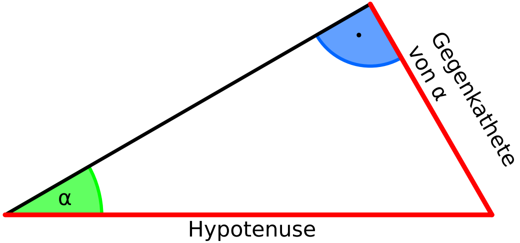

Abbildung 8: Rechtwinkliges Dreieck

Sinus von α

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{}$$

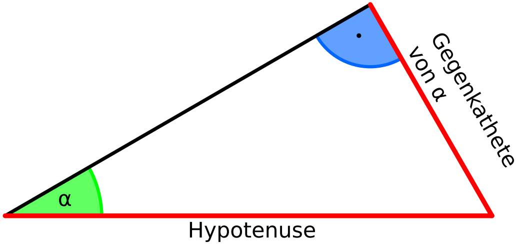

Abbildung 8: Rechtwinkliges Dreieck

Sinus von α

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}}$$

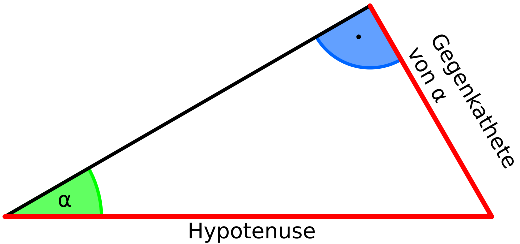

Abbildung 8: Rechtwinkliges Dreieck

Cosinus von α

$$\cos(\alpha) =$$

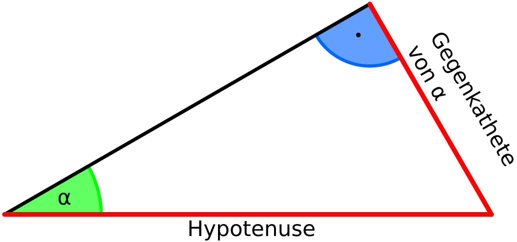

Abbildung 9: Rechtwinkliges Dreieck

Cosinus von α

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{Ankathete von } \alpha}{}$$

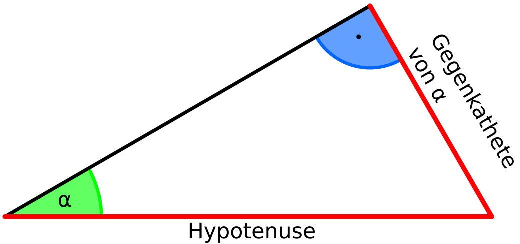

Abbildung 9: Rechtwinkliges Dreieck

Cosinus von α

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{Ankathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}}$$

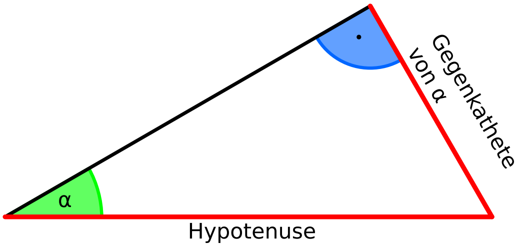

Abbildung 9: Rechtwinkliges Dreieck

Tangens von α

$$\tan(\alpha) =$$

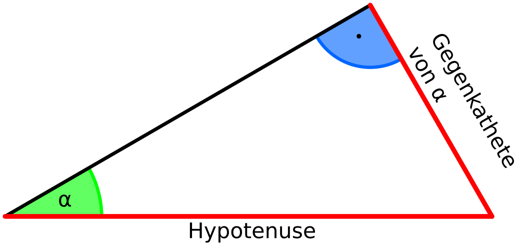

Abbildung 10: Rechtwinkliges Dreieck

Tangens von α

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{}$$

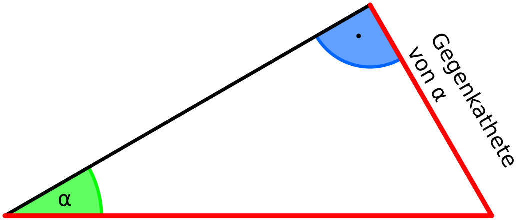

Abbildung 10: Rechtwinkliges Dreieck

Tangens von α

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Ankathete von } \alpha}$$

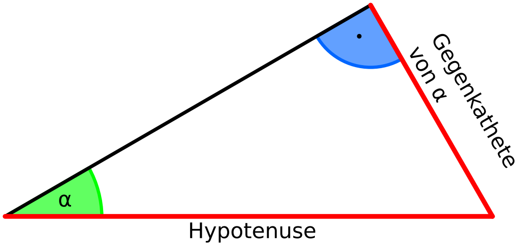

Abbildung 10: Rechtwinkliges Dreieck

Einheitskreis

Einheitskreis - Beispiel

Aufgaben-Text

Auf einem Koordinatensystem eines Radarschirms (Abbildung 11) wird die Lage von zwei Schiffen durch die Entfernung zum Hafen(0) und durch den Kurs gegenüber der x-Achse beschrieben.

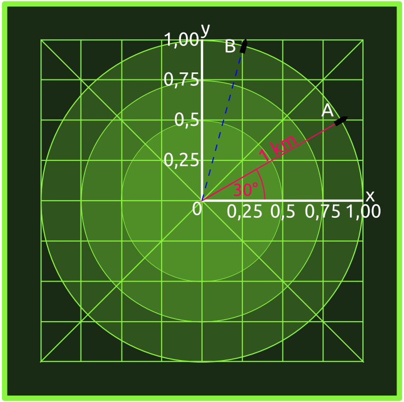

Abbildung 11: Radar

Aufgaben A

Ein Schiff **A** ist mit dem Kurs **30**° gegenüber der x-Achse **einen Kilometer** weit gefahren. Welche Koordinaten im **x-y-Kooradinatensystem** hat es?

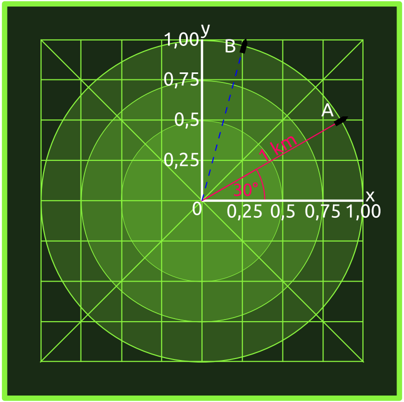

Abbildung 12: Radar

Lösung A

Schätzungen?

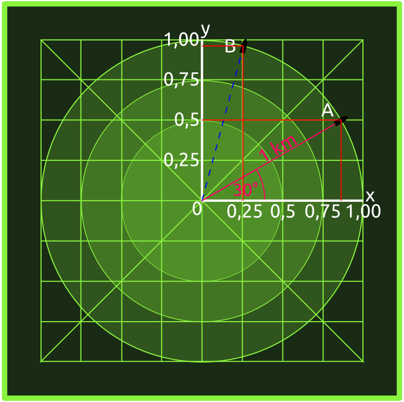

Abbildung 13: Radar Lösung

Lösung A

Das Schiff **A** mit dem Kurs **30**° befindet sich auf der x-Achse: etwa **0,86 Kilometer** und y-Achse: **0,5 Kilometer**. Also auf dem Punkt **A(0,86|0,5)**

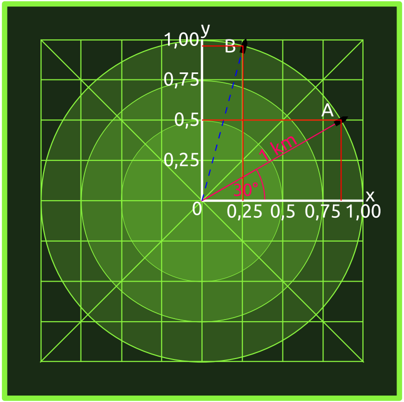

Abbildung 13: Radar Lösung

Aufgaben B

Welche Koordinaten hat das Schiff **B**, das mit dem Kurs **75°** **einen Kilometer** weit gefahren ist?

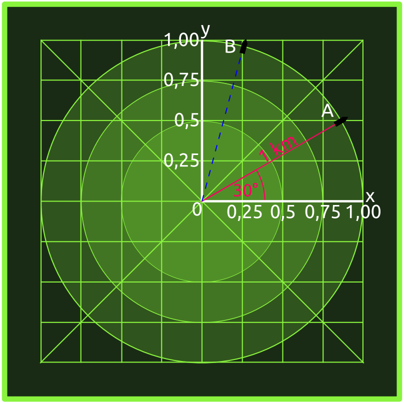

Abbildung 14: Radar

Lösung B

Schätzungen?

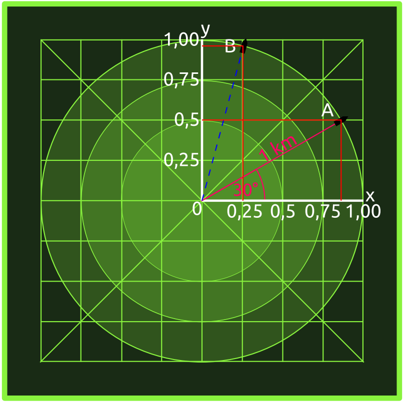

Abbildung 15: Radar Lösung

Lösung B

Das Schiff **B** mit dem Kurs **75**° befindet sich auf der x-Achse: etwa **0,25 Kilometer** und y-Achse: **0,96 Kilometer**. Also auf dem Punkt **A(0,25|0,96)**

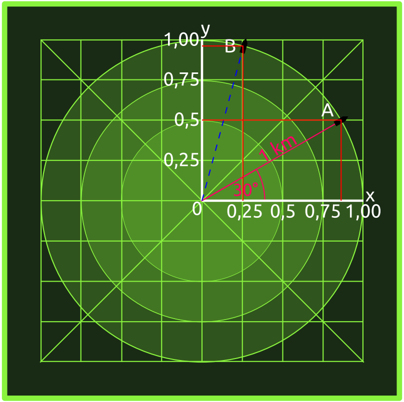

Abbildung 15: Radar Lösung

Der Sinus und Kosinus am Einheitskreis

Dreieck mit Hypotenusenlänge 1

Dreiecke mit der **Hypotenusenlänge 1** kann man in einem Koordinatensystem auf folgenden Weise darstellen:

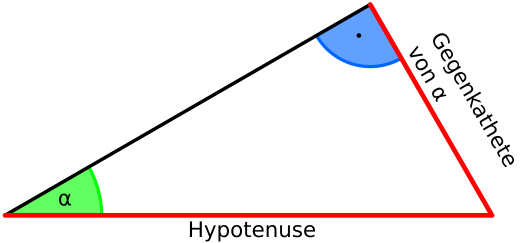

Abbildung 16: Dreieck mit Hypotenusenlänge 1

Die Endpunkte der **Hypotenuse** sind der Ursprung O und ein Punkt **P**, der auf einem Kreis um O mit dem **Radius 1** liegt. Diesen Kreis nennt man den **Einheitskreis**.

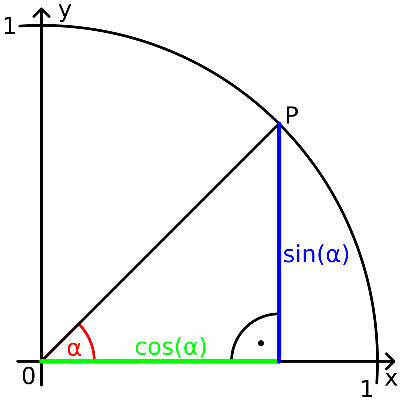

Abbildung 17: Sinus und Kosinus am Einheitskreis

Die Ecke mit dem rechten Winkel liegt auf der **x-Achse senkrecht unter P**. Der Punkt P hat somit Koordinaten **P(cos(α)|sin(α))**

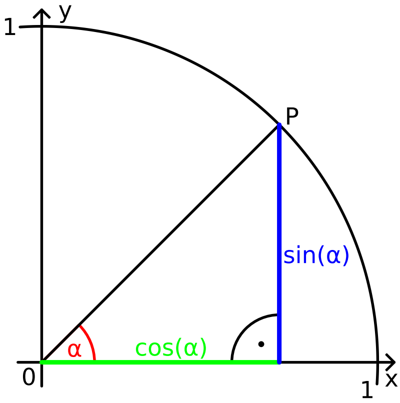

Abbildung 18: Sinus und Kosinus am Einheitskreis

Beziehungen zwischen Sinus, Kosinus und Tangens

Für $0° < \alpha < 90°$ nimmt $\sin(\alpha)$ mit wachsendem α zu und $\cos(\alpha)$ ab(Abbildung 19). ,

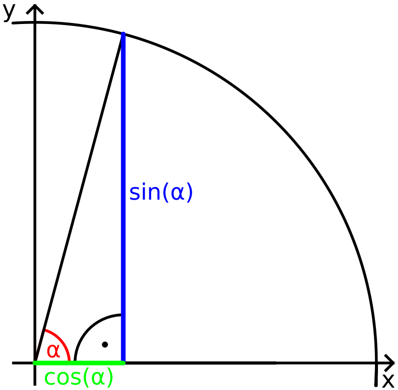

Abbildung 19: $0° < \alpha < 90°$

Für $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ nimmt $\sin(\alpha)$ mit wachsendem α zu und $\cos(\alpha)$ ab(Abbildung 19). $\sin(0^\circ) = 0$, $\cos(0^\circ) = 1$ (Abbildung **??**),

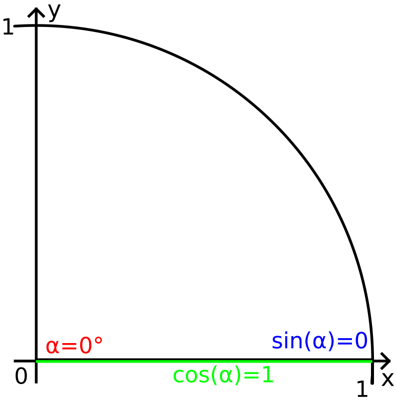

Abbildung 19: $\sin(0^\circ) = 0$, $\cos(0^\circ) = 1$

1

Für $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ nimmt $\sin(\alpha)$ mit wachsendem α zu und $\cos(\alpha)$ ab(Abbildung 19). $\sin(0^\circ) = 0$, $\cos(0^\circ) = 1$ (Abbildung **??**), $\sin(90^\circ) = 1$, $\cos(90^\circ) = 0$ (Abbildung **??**).

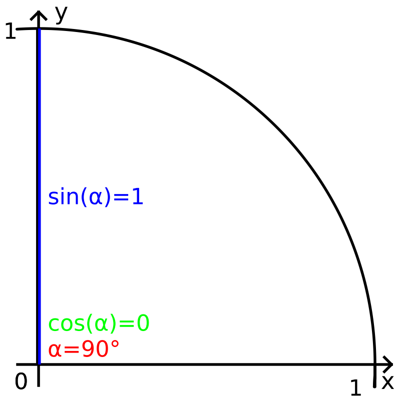

Abbildung 19: $\sin(90^\circ) = 1$, $\cos(90^\circ) = 1$

Wendet man auf das im Einheitskreis dargestellte Dreieck den Satz des Pythagoras an(20), so erhält man den für jede Winkelweite gültigen Zusammenhang
$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$.

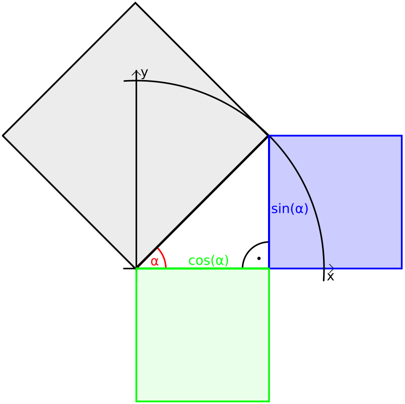

Abbildung 20: Einheitskreis Dreieck Satz des Pythagoras

Beispiel

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1 \tag{1}$$

Beispiel

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1 \tag{1}$$

$$(\sin(45))^2 +$$

Beispiel

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1 \tag{1}$$

$$(\sin(45))^2 + (\cos(45))^2 = 1 \tag{2}$$

Beispiel

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1 \quad (1)$$

$$(\sin(45))^2 + (\cos(45))^2 = 1 \quad (2)$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 +$$

Beispiel

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1 \tag{1}$$

$$(\sin(45))^2 + (\cos(45))^2 = 1 \tag{2}$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

Beispiel

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1 \tag{1}$$

$$(\sin(45))^2 + (\cos(45))^2 = 1 \tag{2}$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1 \tag{3}$$

Beispiel

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1 \qquad (1)$$

$$(\sin(45))^2 + (\cos(45))^2 = 1 \qquad (2)$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1 \qquad (3)$$

$$\frac{\sqrt{2^2}}{2^2} +$$

Beispiel

$$
\begin{align}
\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) &= 1 \tag{1}\\
(\sin(45))^2 + (\cos(45))^2 &= 1 \tag{2}\\
\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 &= 1 \tag{3}\\
\frac{\sqrt{2^2}}{2^2} + \frac{\sqrt{2^2}}{2^2} & \notag
\end{align}
$$

Beispiel

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1 \tag{1}$$

$$(\sin(45))^2 + (\cos(45))^2 = 1 \tag{2}$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1 \tag{3}$$

$$\frac{\sqrt{2^2}}{2^2} + \frac{\sqrt{2^2}}{2^2} = 1 \tag{4}$$

Beispiel

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1 \tag{1}$$
$$(\sin(45))^2 + (\cos(45))^2 = 1 \tag{2}$$
$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1 \tag{3}$$
$$\frac{\sqrt{2^2}}{2^2} + \frac{\sqrt{2^2}}{2^2} = 1 \tag{4}$$
$$\frac{2}{4} + \frac{2}{4} = 1 \tag{5}$$

Beispiel

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1 \tag{1}$$

$$(\sin(45))^2 + (\cos(45))^2 = 1 \tag{2}$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1 \tag{3}$$

$$\frac{\sqrt{2^2}}{2^2} + \frac{\sqrt{2^2}}{2^2} = 1 \tag{4}$$

$$\frac{2}{4} + \frac{2}{4} = 1 \tag{5}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \tag{6}$$

Beispiel

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1 \tag{1}$$

$$(\sin(45))^2 + (\cos(45))^2 = 1 \tag{2}$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1 \tag{3}$$

$$\frac{\sqrt{2^2}}{2^2} + \frac{\sqrt{2^2}}{2^2} = 1 \tag{4}$$

$$\frac{2}{4} + \frac{2}{4} = 1 \tag{5}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \tag{6}$$

$$0,5 + 0,5 = 1 \tag{7}$$

In Abbildung 21 sieht man:
$\sin(90^\circ - \alpha) = x = \cos(\alpha)$ und $\cos(90^\circ - \alpha) = y = \sin(\alpha)$

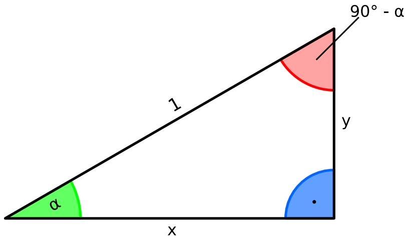

Abbildung 21: $\sin(90^\circ$ - $\alpha)$; $\cos(90^\circ$ - $\alpha)$

Beispiel

$$\sin(90^\circ - \alpha) = x \qquad = \cos(\alpha) \tag{1}$$

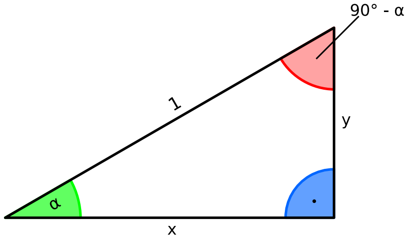

Abbildung 22: $\sin(90^\circ$ - $\alpha)$; $\cos(90^\circ$ - $\alpha)$

Beispiel

$$\sin(90^\circ - \alpha) = x \qquad = \cos(\alpha) \qquad (1)$$

$$\sin(90^\circ - 30^\circ) =$$

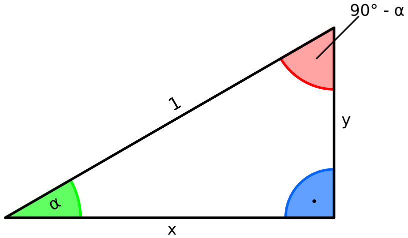

Abbildung 22: $\sin(90^\circ$ - $\alpha)$; $\cos(90^\circ$ - $\alpha)$

Beispiel

$$\sin(90^\circ - \alpha) = x \qquad = \cos(\alpha) \tag{1}$$

$$\sin(90^\circ - 30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad =$$

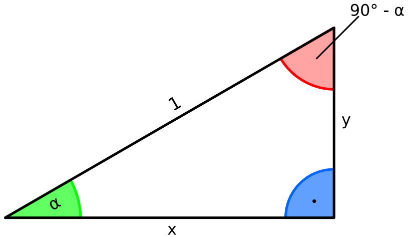

Abbildung 22: sin(90° - α); cos(90° - α)

Beispiel

$$\sin(90^\circ - \alpha) = x = \cos(\alpha) \qquad (1)$$

$$\sin(90^\circ - 30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos(30^\circ) \qquad (2)$$

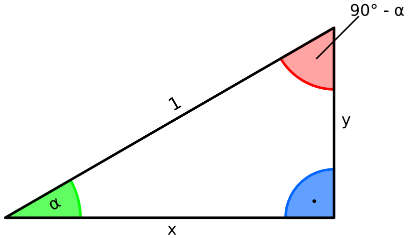

Abbildung 22: sin(90° - α); cos(90° - α)

Ebenfalls in Abbildung 23:

$$\tan(\alpha) = \tag{1}$$

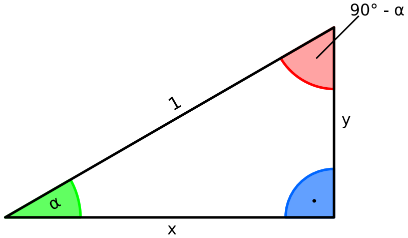

Abbildung 23: sin(90° - α); cos(90° - α)

Ebenfalls in Abbildung 23:

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{} = \qquad (1)$$

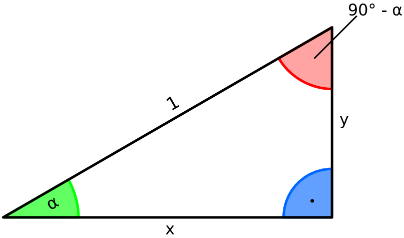

Abbildung 23: sin(90° - α); cos(90° - α)

Ebenfalls in Abbildung 23:

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Ankathete von } \alpha} = \qquad (1)$$

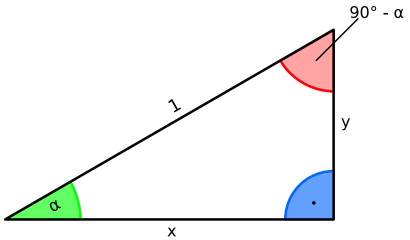

Abbildung 23: sin(90° - α); cos(90° - α)

Ebenfalls in Abbildung 23:

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Ankathete von } \alpha} = \frac{y}{x} = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} \tag{1}$$

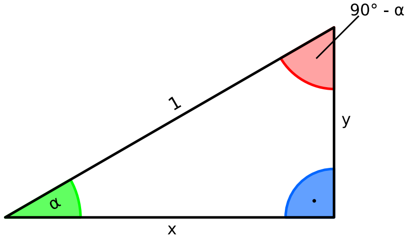

Abbildung 23: sin(90° - α); cos(90° - α)

Einheitskreis - Definition

Definition

Es gelten folgende Zusammenhänge:

Definition

Es gelten folgende Zusammenhänge:

- $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$

Definition

Es gelten folgende Zusammenhänge:

- $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$
- $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos(\alpha)$

Definition

Es gelten folgende Zusammenhänge:

- $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$
- $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos(\alpha)$
- $\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$, $\alpha \neq 90^\circ$, weil: $\tan(90) = \frac{\sin(90)}{\cos(90)} = \frac{1}{0} = \lightning$