

Mit dem Sinus modellieren

Kirill Heitzler

7. April 2021

Inhaltsverzeichnis

1	Grundlagen	3
1.1	Rechtwinkliges Dreieck - Beschriftung	3
1.2	Der Sinus	3
1.3	Sinus - Beispiel	4
1.4	Der Kosinus und der Tangens	5
2	Einheitskreis	6
2.1	Beispiel	6
2.2	Der Sinus und Kosinus am Einheitskreis	7
2.3	Beziehungen zwischen Sinus, Kosinus und Tangens	7
2.4	Einheitskreis - Definition	9
2.5	Einheitskreis - Aufgabe	9
3	Mit dem Sinus modellieren	10
3.1	Mit dem Sinus modellieren - Beispiel	10
3.2	Winkel α mit $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$	10
3.3	Erweiterter Winkel α mit $90^\circ < \alpha \leq 360^\circ$	11
3.4	Erweiterter Winkel α mit $90^\circ < \alpha \leq 360^\circ$ - Aufgabe	11
3.5	Funktion f mit $f(\alpha)$	12
3.6	Sinusfunktion im Gradmaß - Definition	12
3.7	Graph einer Sinusfunktion zeichnen	13
3.8	Einen Zeitlichen Vorgang modellieren	13
4	Anwendung	14
5	Zusammenfassung	15
6	Quellen	16

1 Grundlagen

1.1 Rechtwinkliges Dreieck - Beschriftung

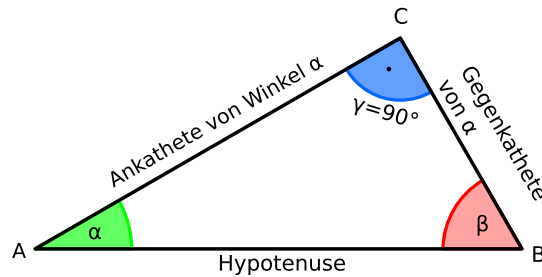


Abbildung 1: Rechtwinkliges Dreieck

Das Rechtwinklige Dreieck wird folgendermaßen wie in Abbildung 1 beschriftet.

Die Ecken werden mit den Buchstaben A, B, C gegen den Uhrzeigersinn bei A angefangen beschriftet.

Die Winkel α , β , γ werden in die Ecken der entsprechenden Buchstaben A, B, C gesetzt.

Die anliegende Kathete zu Winkel α wird „Ankathete von α “ genannt und die Kathete gegenüber von α wird „Gegenkathete von α “ genannt.

Die Hypotenuse liegt gegenüber des rechten Winkels γ .

1.2 Der Sinus

Definition: In einem rechtwinkligen Dreieck (Abbildung 2) nennt man zu einem Winkel α des Dreiecks das Streckenverhältnis

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}}$$

den **Sinus von α** .

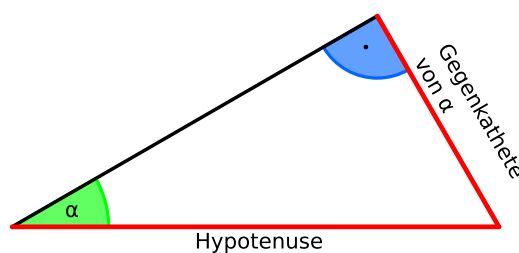


Abbildung 2: Rechtwinkliges Dreieck

1.3 Sinus - Beispiel

Gegenkathete von α mithilfe des Sinus berechnen:

Aufgabe: Berechne die Höhe des Freiburger Münsters. Das rechtwinklige Dreieck in Abbildung 3 besitzt einen rechten Winkel (90°), die Hypotenuse 164,05 Meter und die Winkelweite des Winkels α mit 45° . Berechne die Gegenkathete von α namens x .

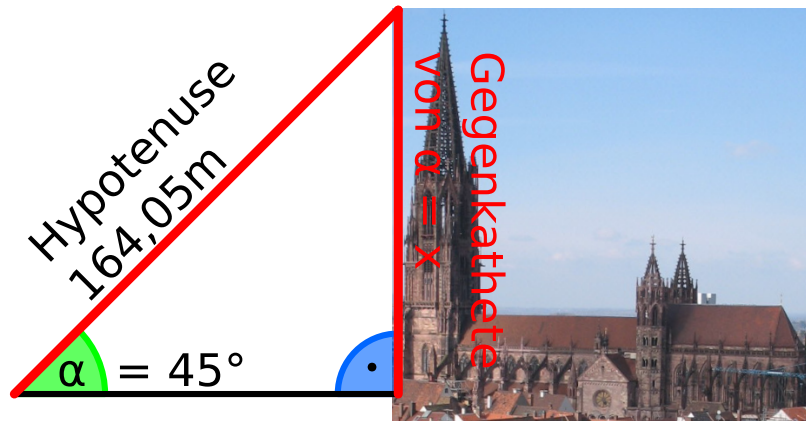


Abbildung 3: Rechtwinkliges Dreieck am Münster

Rechnung:

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}} \quad (1)$$

$$\sin(45^\circ) = \frac{x}{164,05m} \quad | \cdot 164,05m \quad (2)$$

$$\sin(45^\circ) \cdot 164,05m = x \quad (3)$$

$$x \cong 116m \quad (4)$$

Antwort: Die Gegenkathete von α beträgt etwa 116 Meter, somit ist das Münster auch etwa 116 Meter groß.

1.4 Der Kosinus und der Tangens

Sinus von α :

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}}$$

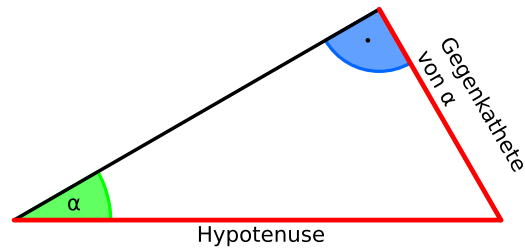


Abbildung 4: Rechtwinkliges Dreieck

Cosinus von α :

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{Ankathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}}$$

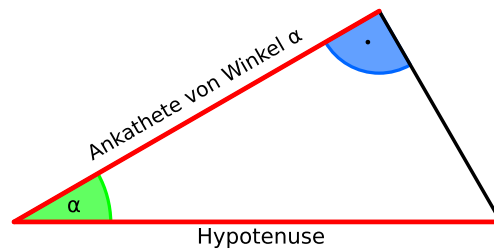


Abbildung 5: Rechtwinkliges Dreieck

Tangens von α :

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Ankathete von } \alpha}$$

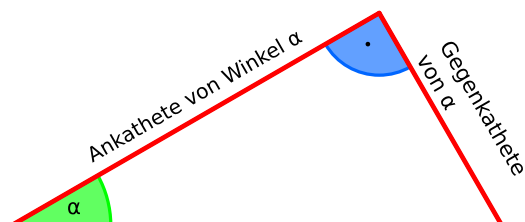


Abbildung 6: Rechtwinkliges Dreieck

2 Einheitskreis

2.1 Beispiel

Aufgaben-Text: Auf einem Koordinatensystem eines Radarschirms (Abbildung 7) wird die Lage von zwei Schiffen durch die Entfernung zum Hafen(0) und durch den Kurs gegenüber der x-Achse beschrieben.

Aufgabe: Ein Schiff **A** ist mit dem Kurs 30° gegenüber der x-Achse **einen Kilometer** weit gefahren. Welche Koordinaten im **x-y-Koordinatensystem** hat es?

Welche Koordinaten hat das Schiff **B**, das mit dem Kurs 75° **einen Kilometer** weit gefahren ist?

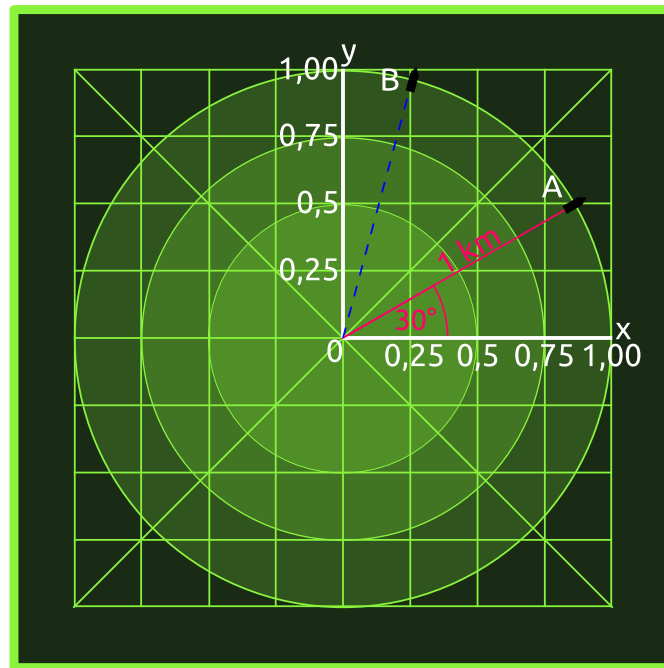
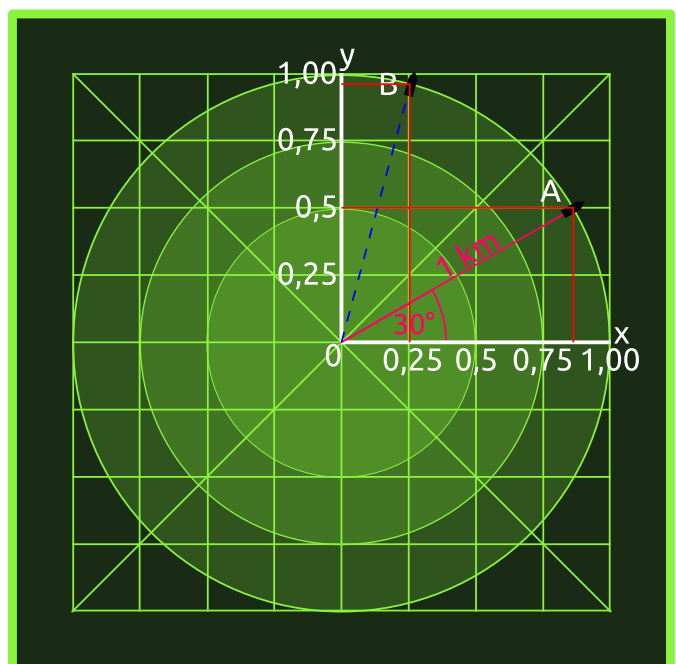


Abbildung 7: Radar

Lösung:

Das Schiff **A** mit dem Kurs 30° befindet sich auf der x-Achse: etwa **0,86 Kilometer** und y-Achse: **0,5 Kilometer**. Also auf dem Punkt **A(0,86|0,5)**

Das Schiff **B** mit dem Kurs 75° befindet sich auf der x-Achse: etwa **0,25 Kilometer** und y-Achse: **0,96 Kilometer**. Also auf dem Punkt **A(0,25|0,96)**



2.2 Der Sinus und Kosinus am Einheitskreis

Dreiecke mit der **Hypotenusenlänge 1** kann man in einem Koordinatensystem auf folgenden Weise darstellen:

1. Die Endpunkte der **Hypotenuse** sind der Ursprung O und ein Punkt P , der auf einem Kreis um O mit dem **Radius 1** liegt. Diesen Kreis nennt man den **Einheitskreis**.

2. Die Ecke mit dem rechten Winkel liegt auf der **x-Achse senkrecht unter P** . Der Punkt P hat somit Koordinaten $P(\cos(\alpha)|\sin(\alpha))$

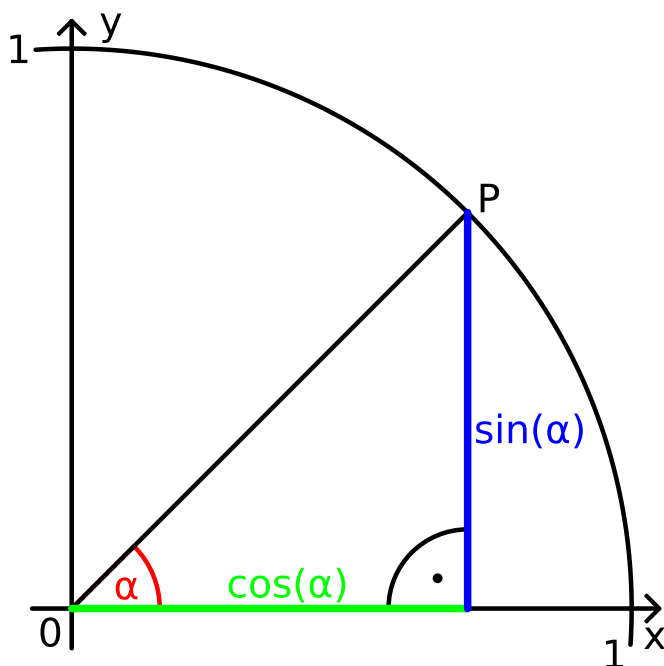
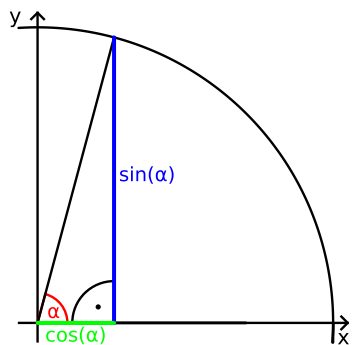


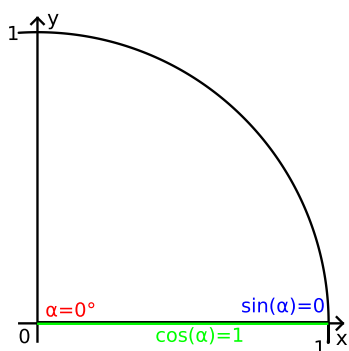
Abbildung 9: Sinus und Kosinus am Einheitskreis

2.3 Beziehungen zwischen Sinus, Kosinus und Tangens

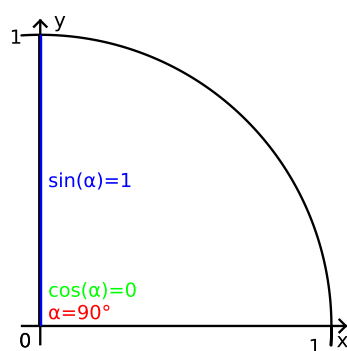
1. Für $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ nimmt $\sin(\alpha)$ mit wachsendem α zu und $\cos(\alpha)$ ab (Abbildung 10a). $\sin(0^\circ) = 0$, $\cos(0^\circ) = 1$ (Abbildung 10b), $\sin(90^\circ) = 1$, $\cos(90^\circ) = 0$ (Abbildung 10c).



(a) $0^\circ < \alpha < 90^\circ$



(b) $\sin(0^\circ) = 0$, $\cos(0^\circ) = 1$



(c) $\sin(90^\circ) = 1$, $\cos(90^\circ) = 0$

Abbildung 10: Beziehung 1

2. Wendet man auf das im Einheitskreis dargestellte Dreieck den Satz des Pythagoras an (Abbildung 11), so erhält man den für jede Winkelweite gültigen Zusammenhang

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1.$$

Beispiel:

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1 \quad (1)$$

$$(\sin(45))^2 + (\cos(45))^2 = 1 \quad (2)$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1 \quad (3)$$

$$\frac{\sqrt{2}^2}{2^2} + \frac{\sqrt{2}^2}{2^2} = 1 \quad (4)$$

$$\frac{2}{4} + \frac{2}{4} = 1 \quad (5)$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \quad (6)$$

$$0,5 + 0,5 = 1 \quad (7)$$

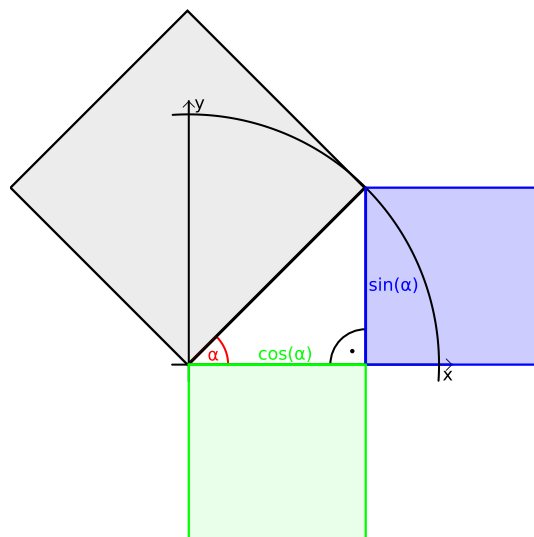


Abbildung 11: Einheitskreis Dreieck Satz des Pythagoras

3. In Abbildung 12 sieht man:

$$\sin(90^\circ - \alpha) = x = \cos(\alpha) \text{ und}$$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = y = \sin(\alpha)$$

Beispiel:

$$\sin(90^\circ - \alpha) = x = \cos(\alpha) \quad (1)$$

$$\sin(90^\circ - 30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos(30^\circ) \quad (2)$$

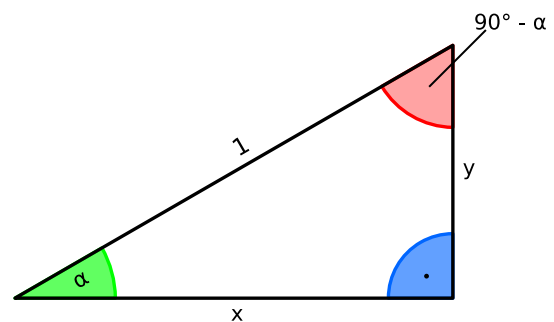


Abbildung 12: $\sin(90^\circ - \alpha)$; $\cos(90^\circ - \alpha)$

4. Ebenfalls in Abbildung 12:

$$\tan(\alpha) = \frac{y}{x} = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}.$$

2.4 Einheitskreis - Definition

Definition: Es gilt:

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$$

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos(\alpha)$$

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}, \alpha \neq 90^\circ, \text{ weil: } \tan(90) = \frac{\sin(90)}{\cos(90)} = \frac{1}{0} = \text{!}$$

2.5 Einheitskreis - Aufgabe

Aufgabe: $\sin(\alpha) = 0,6$.

Bestimme:

$$\text{a) } \cos(\alpha) \quad \text{b) } \tan(\alpha) \quad \text{c) } \sin(90^\circ - \alpha) \quad \text{d) } \cos(90^\circ - \alpha) \quad \text{e) } \tan(90^\circ - \alpha)$$

a) Lösung:

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1 \quad (1)$$

$$0,6^2 + \cos^2(\alpha) = 1 \quad | -0,6^2 \quad (2)$$

$$\cos^2(\alpha) = 1 - 0,36 \quad | \sqrt{\quad} \quad (3)$$

$$\cos(\alpha) = \sqrt{1 - 0,36} \quad (4)$$

$$\cos(\alpha) = \sqrt{0,64} \quad (5)$$

$$\cos(\alpha) = 0,8 \quad (6)$$

b) Lösung:

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} \quad (1)$$

$$\tan(\alpha) = \frac{0,6}{0,8} = \frac{6}{8} \quad (2)$$

$$\tan(\alpha) = \frac{3}{4} = 0,75 \quad (3)$$

c) Lösung:

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos(\alpha) = 0,8 \quad (1)$$

d) Lösung:

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin(\alpha) = 0,6 \quad (1)$$

e) Lösung:

$$\tan(90^\circ - \alpha) = \frac{\sin(90^\circ - \alpha)}{\cos(90^\circ - \alpha)} = \frac{0,8}{0,6} \quad (1)$$

$$\tan(90^\circ - \alpha) = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \quad (2)$$

3 Mit dem Sinus modellieren

3.1 Mit dem Sinus modellieren - Beispiel

Aufgabe:

Bei einem Schaufelraddampfer dreht sich das Rad mit dem Durchmesser 2 Meter einmal vollständig in 60 Sekunden (Abbildung 13). In welcher Höhe über dem Wasserspiegel liegt der rot markierte Punkt A?

Erstelle eine Wertetabelle in 5 Sekunden-Schritten.



Abbildung 13: Schaufelraddampfer

Lösung:

Zeit t (in s)	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
Winkel α	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°	360°
Höhe h (in m)	0	0,5	0,87	1	0,87	0,5	0	-0,5	-0,87	-1	-0,87	-0,5	0

3.2 Winkel α mit $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$

Am Einheitskreis entspricht $\sin(\alpha)$ der y-Koordinate des Punktes P (Abbildung 14).

$\sin(40^\circ) \approx 0,64$

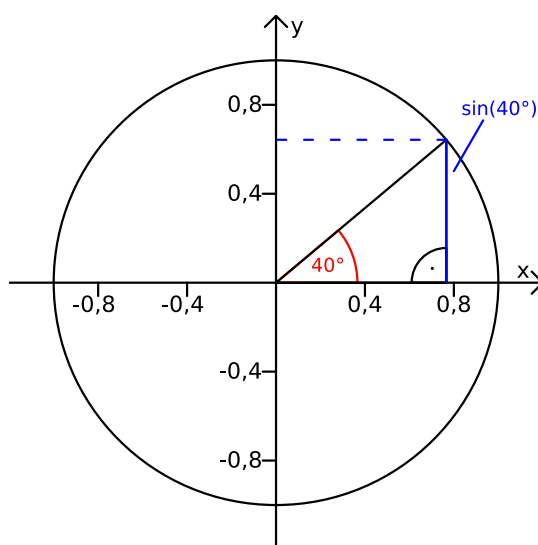


Abbildung 14: Winkel α mit $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$

3.3 Erweiterter Winkel α mit $90^\circ < \alpha \leq 360^\circ$

Wird α über 90° vergrößert, wird der Sinuswert von α ebenso als y-Koordinate des Punktes P festgelegt (Abbildung 15).

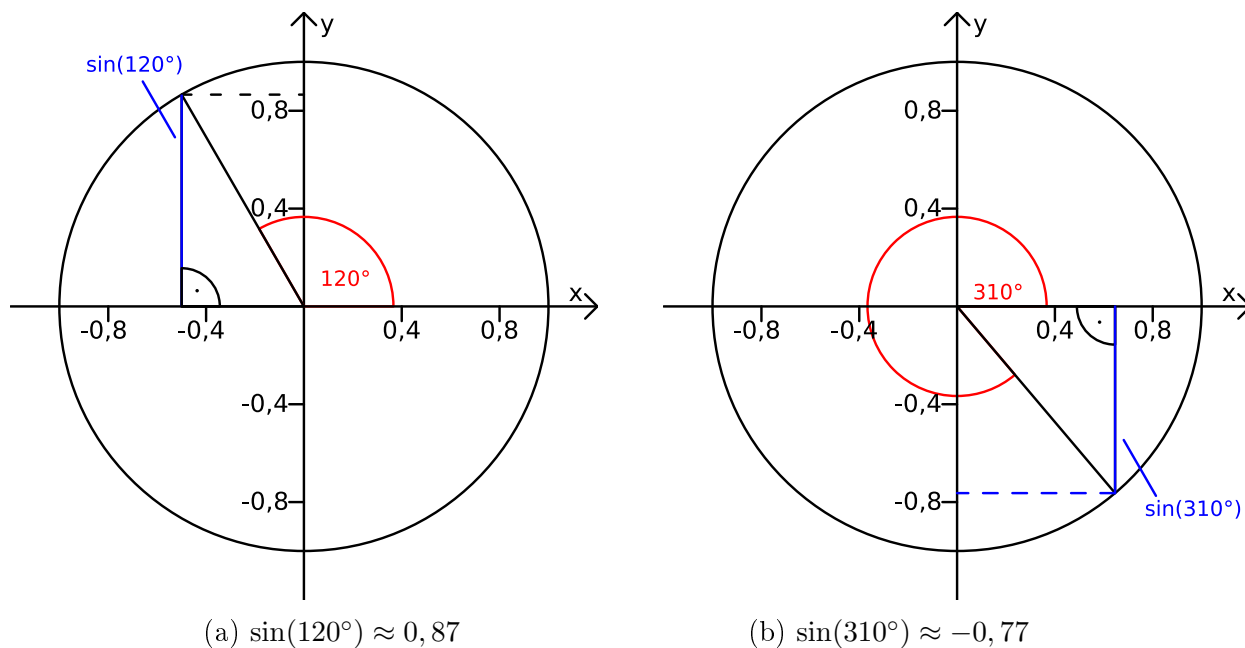


Abbildung 15: Erweiterter Winkel α mit $90^\circ < \alpha \leq 360^\circ$

3.4 Erweiterter Winkel α mit $90^\circ < \alpha \leq 360^\circ$ - Aufgabe

Aufgabe:

Ein Punkt P bewegt sich auf dem Einheitskreis (Abbildung 16) gegen den Uhrzeigersinn. Für $\alpha = 0^\circ$ befindet er sich im Punkt (1|0).

- Gib die x- und y-Koordinaten des Punktes P für $\alpha = 140^\circ$ und für $\alpha = 310^\circ$ an.
- Bestimme zwei verschiedene Werte für α , sodass seine y-Koordinate 0,8 beträgt.

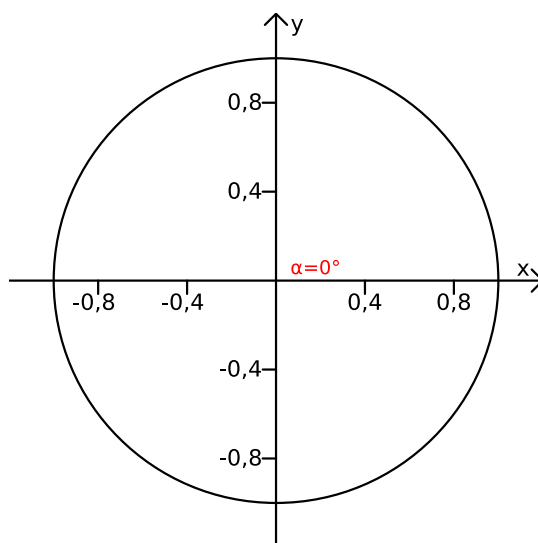


Abbildung 16: $\alpha = 0^\circ$

Lösung a)

Für $\alpha = 140^\circ$: Punkt $(-0,77|0,64)$

$$\sin(\alpha) = y \quad (1)$$

$$\sin(140^\circ) \approx 0,64 \quad (2)$$

$$\cos(\alpha) = x \quad (3)$$

$$\cos(140^\circ) \approx -0,77 \quad (4)$$

Für $\alpha = 310^\circ$: Punkt $(0,64|-0,77)$

$$\sin(\alpha) = y \quad (1)$$

$$\sin(310^\circ) \approx -0,77 \quad (2)$$

$$\cos(\alpha) = x \quad (3)$$

$$\cos(310^\circ) \approx 0,64 \quad (4)$$

Lösung b)

Für α_1 : $\sin(53,1^\circ) \approx 0,8$

$$\sin^{-1}(0,8) \approx 53,1^\circ \quad (1)$$

Für α_2 : $\sin(126,9^\circ) \approx 0,8$

$$\sin^{-1}(0,8) \approx 53,1^\circ \quad (1)$$

$$180^\circ - 53,1^\circ = 126,9^\circ \quad (2)$$

3.5 Funktion f mit $f(\alpha)$

Ordnet man jedem Winkel α mit $0^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$ seinen Sinuswert zu, so erhält man eine Funktion f mit $f(\alpha) = \sin(\alpha)$.

Man kann mithilfe des Graphen von f (Abbildung 17) zu gegebenem Winkel den Sinuswert näherungsweise ablesen oder näherungsweise Winkel mit vorgegebenem Sinuswert ermitteln.

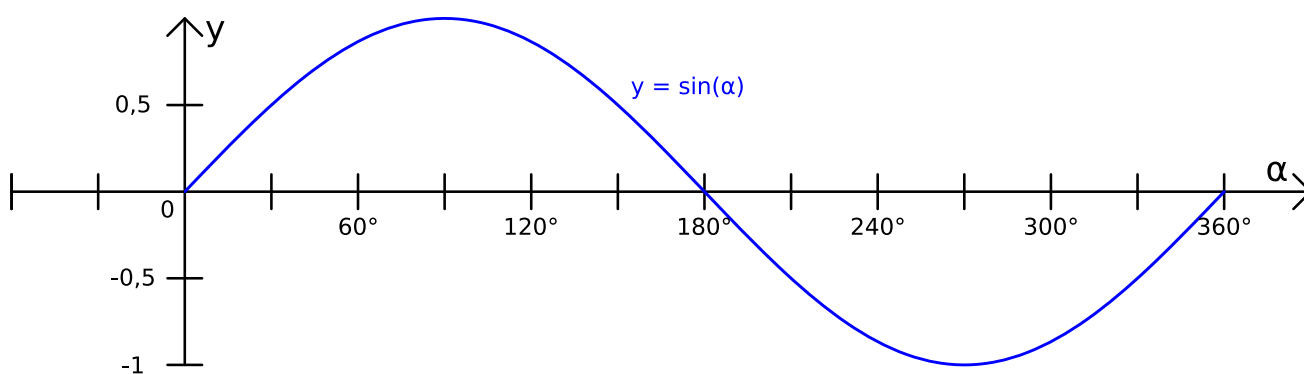


Abbildung 17: $f(\alpha) = \sin(\alpha)$

3.6 Sinusfunktion im Gradmaß - Definition

Die Funktion f mit $f(\alpha) = \sin(\alpha)$ heißt **Sinusfunktion im Gradmaß**.

3.7 Graph einer Sinusfunktion zeichnen

Zeit t (in s)	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
Winkel α	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°	360°
Höhe h (in m)	0	0,5	0,87	1	0,87	0,5	0	-0,5	-0,87	-1	-0,87	-0,5	0

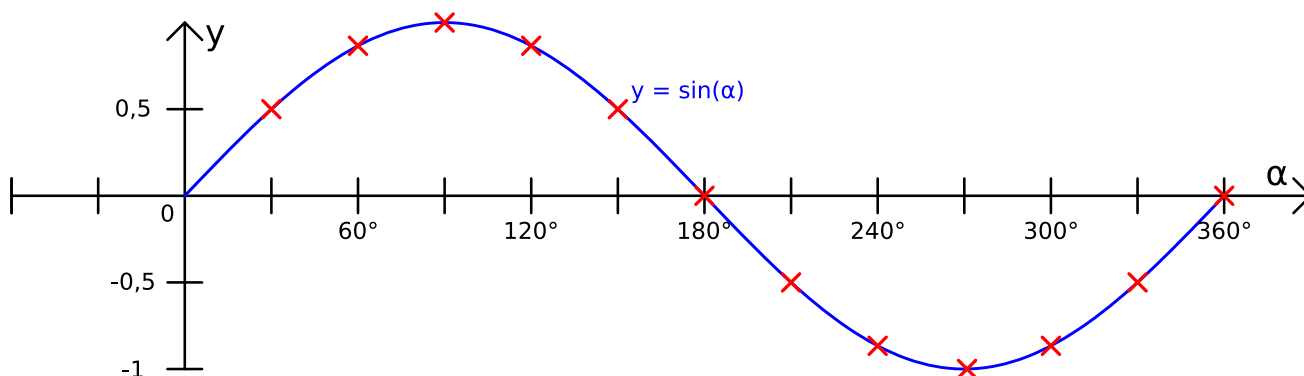


Abbildung 18: Sinuswelle Zeichnen

3.8 Einen Zeitlichen Vorgang modellieren

In einem Hafenbecken schwankt der Wasserstand periodisch um seinen Durchschnittswert (Abbildung 19)

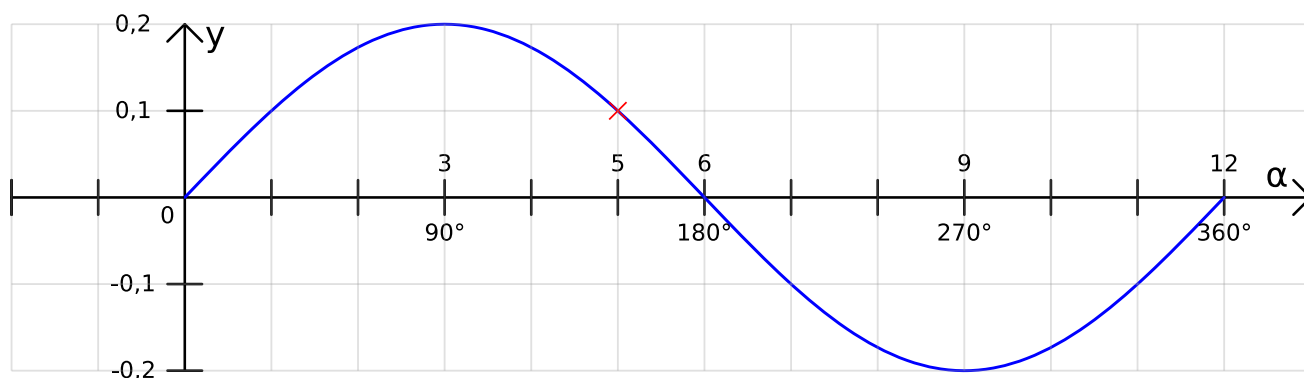


Abbildung 19: Wasserstand

Aufgabe:

- Erläutere, wie man zu einem gegebenen Zeitpunkt t die Winkelweite α erhält und umgekehrt. Bestimme für $t = 5$ (t in h) den zugehörigen Winkel.
- Mit welcher Funktion kann man zu einem gegebenen Winkel α den Wasserstand berechnen? Berechne den Wasserstand 5 Stunden nach Beobachtungsbeginn.

Lösung a)

$$12h \cong 360^\circ \quad | : 12 \quad (1)$$

$$1h \cong 30^\circ \quad (2)$$

12h in Abbildung 17 entsprechen 360° , also entspricht 1h dem Winkel 30° .

Daraus folgt $\alpha = t \cdot 30^\circ$ und $t = \frac{\alpha}{30^\circ}$ (t in h). Für $t = 5$ erhält man $\alpha = 5 \cdot 30^\circ = 150^\circ$

$$\alpha = t \cdot 30^\circ$$

$$t = \frac{\alpha}{30^\circ}$$

$$\alpha = 5 \cdot 30^\circ \quad (1)$$

$$= 150^\circ \quad (2)$$

Lösung b)

Da der Wasserstand zwischen -0,2 und 0,2 um den Durchschnittswert pendelt (Abbildung 19), gilt:

$$f(\alpha) = 0,2 \cdot \sin(\alpha)$$

Für $t = 5$:

$$\alpha = 5 \cdot 30^\circ \quad (1)$$

$$= 150^\circ \quad (2)$$

$$f(150^\circ) = 0,2 \cdot \sin(150^\circ) \quad (3)$$

$$= 0,1 \quad (4)$$

Nach 5 Stunden liegt der Wasserstand 10cm über dem Durchschnittswert.

4 Anwendung

Auch wenn es uns nicht oft auffällt, viele technische Geräte bzw. Mechanismen verwenden die trigonometrischen Funktionen Sinus und Kosinus. Genauso wie viele mathematische Verfahren. Ein paar Beispiele:

- GPS - Global Positioning System (Positionsbestimmung mit Hilfe von Satelliten)
- Computergrafiken in 3D und 2D
- drehendes Objekt im Computerspiel
- Spracherkennung
- Landvermessungen
- Fourier Transformation (z. B. Anwendung beim Spektroskop für Chemiker)
- Astronomen nutzten Spektroskope, um chemische Zusammensetzungen von weit entfernten Planeten zu bestimmen
- FFT - Fast Fourier Transformation für Bildkompression, Audioverarbeitung, mp3-Algorithmus, seismische Datenverarbeitung etc.

5 Zusammenfassung

6 Quellen

- Freiburger Münster - <https://freiburg-schwarzwald.de/fotos06feb/freiburg12-060227.jpg>
- Vector Boot - <https://www.vecteezy.com/vector-art/170704-flat-ship-vectors>
- Lambacher Schweizer 9(S. 90 - 104) - Mathematik Buch
- Sinus und Kosinus im Alltag - <https://www.matheretter.de/wiki/sinus-kosinus-alltag>