Mit dem Sinus modellieren

Kirill Heitzler

7. März 2021

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen

1.1 Rechtwinkliges Dreieck - Beschriftung

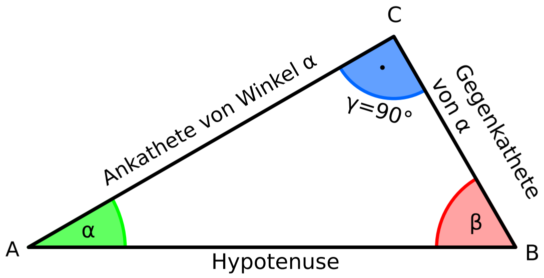


Abbildung 1: Rechtwinkliges Dreieck

Das Rechtwinklige Dreieck wird folgendermaßen wie in Abbildung 1 beschriftet.
Die Ecken werden mit den Buchstaben A, B, C gegen den Uhrzeigersinn bei A angefangen beschriftet.
Die Winkel α, β, γ werden in die Ecken der entsprechenden Buchstaben A, B, C gesetzt.
Die anliegende Kathete zu Winkel α wird „Ankathete von α“ genannt und die Kathete gegenüber von α wird „Gegenkathete von α“ genannt.
Die Hypotenuse liegt gegenüber des rechten Winkels γ.

1.2 Der Sinus

Definition: In einem rechtwinkligen Dreieck (Abbildung 2) nennt man zu einem Winkel α des Dreiecks das Streckenverhältnis

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}}$$

den **Sinus von** α.

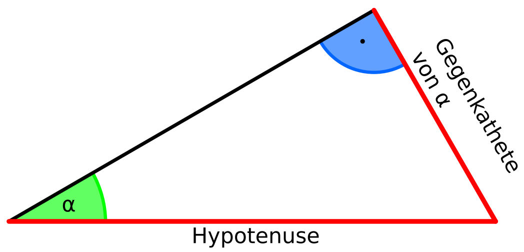


Abbildung 2: Rechtwinkliges Dreieck

1.3 Sinus - Beispiel

Gegenkathete von α mithilfe des Sinus berechnen:
Aufgabe: Berechne die Höhe des Freiburger Münsters. Das rechtwinklige Dreieck in Abbildung 3 besitzt einen rechten Winkel (90°), die Hypotenuse 164,05 Meter und die Winkelweite des Winkels α mit 45°. Berechne die Gegenkathete von α namens x.

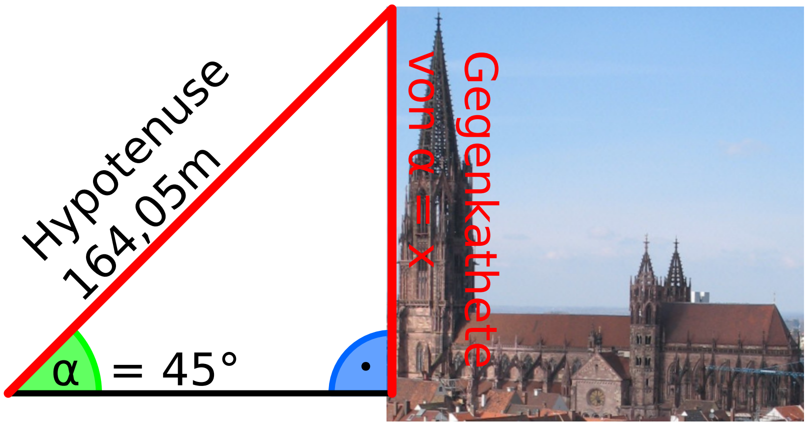


Abbildung 3: Rechtwinkliges Dreieck am Münster

Rechnung:

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}} \tag{1}$$

$$\sin(45°) = \frac{x}{164,05m} \qquad | \cdot 164,05m \tag{2}$$

$$\sin(45°) \cdot 164,05m = x \tag{3}$$

$$x \cong 116m \tag{1}$$

Antwort: Die Gegenkathete von α beträgt etwa 116 Meter, somit ist das Münster auch etwa 116 Meter groß.

1.4 Der Kosinus und der Tangens

Sinus von α:

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}}$$

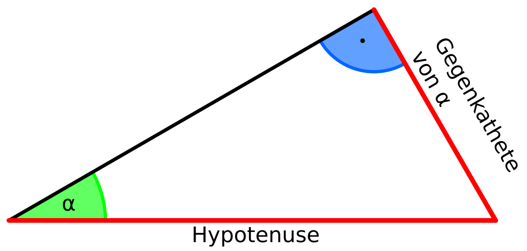


Abbildung 4: Rechtwinkliges Dreieck

Cosinus von α:

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{Ankathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}}$$

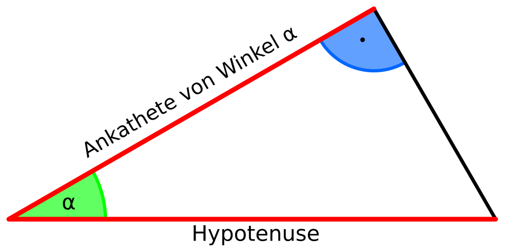


Abbildung 5: Rechtwinkliges Dreieck

Tangens von α:

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Ankathete von } \alpha}$$

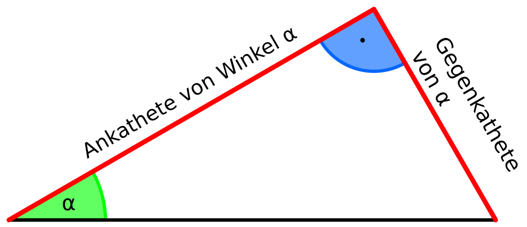


Abbildung 6: Rechtwinkliges Dreieck

2 Einheitskreis

2.1 Beispiel

Aufgaben-Text: Auf einem Koordinatensystem eines Radarschirms (Abbildung 7) wird die Lage von zwei Schiffen durch die Entfernung zum Hafen(0) und durch den Kurs gegenüber der x-Achse beschrieben.
Aufgabe: Ein Schiff **A** ist mit dem Kurs **30°** gegenüber der x-Achse **einen Kilometer** weit gefahren. Welche Koordinaten im **x-y-Kooradinatensystem** hat es?
Welche Koordinaten hat das Schiff **B**, das mit dem Kurs **75° einen Kilometer** weit gefahren ist?

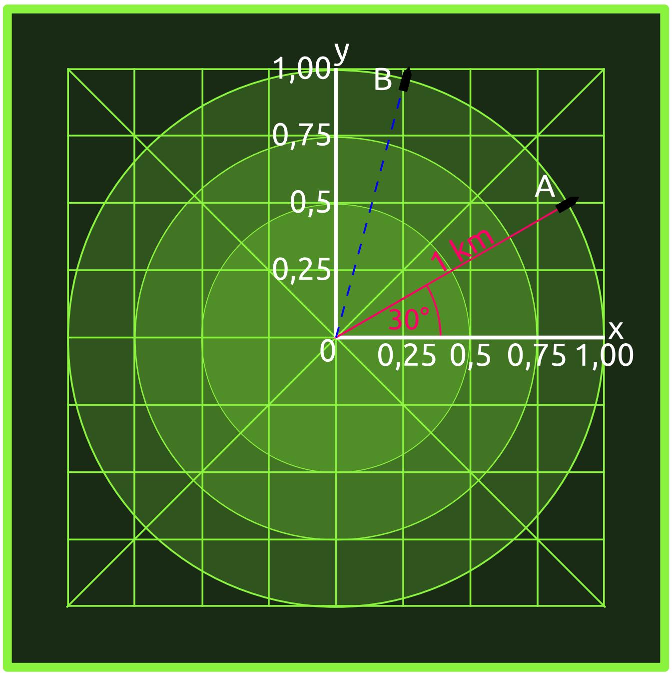


Abbildung 7: Radar

Lösung:

Das Schiff **A** mit dem Kurs **30°** befindet sich auf der x-Achse: etwa **0,86 Kilometer** und y-Achse: **0,5 Kilometer**. Also auf dem Punkt **A(0,86|0,5)**

Das Schiff **B** mit dem Kurs **75°** befindet sich auf der x-Achse: etwa **0,25 Kilometer** und y-Achse: **0,96 Kilometer**. Also auf dem Punkt **A(0,25|0,96)**

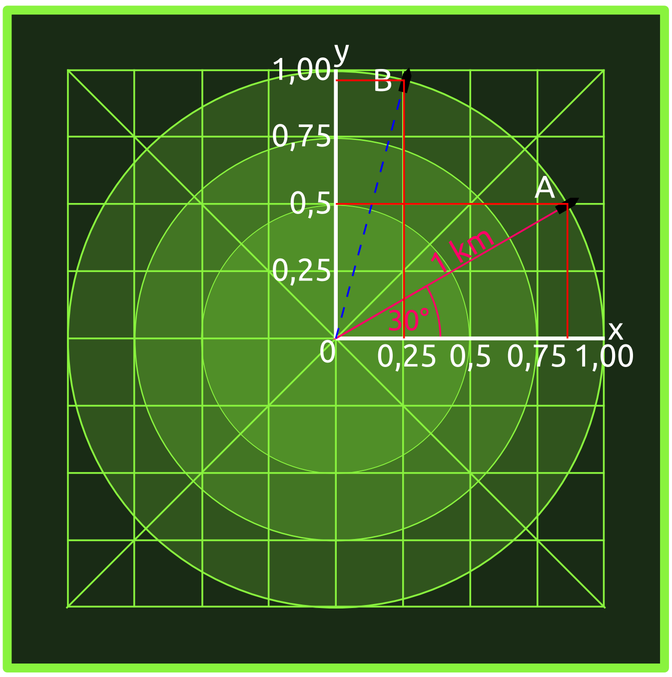


Abbildung 8: Radar Lösung

2.2 Der Sinus und Kosinus am Einheitskreis

Dreiecke mit der **Hypotenusenlänge 1** kann man in einem Koordinatensystem auf folgenden Weise darstellen:

1. Die Endpunkte der **Hypotenuse** sind der Ursprung O und ein Punkt **P**, der auf einem Kreis um O mit dem **Radius 1** liegt. Diesen Kreis nennt man den **Einheitskreis**.

2. Die Ecke mit dem rechten Winkel liegt auf der **x-Achse senkrecht unter P**. Der Punkt P hat somit Koordinaten **P**$(\cos(\alpha)|\sin(\alpha))$

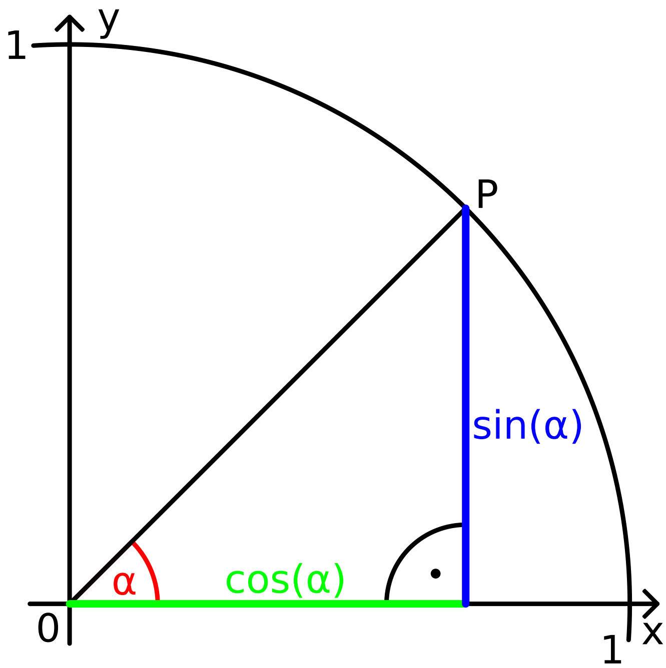
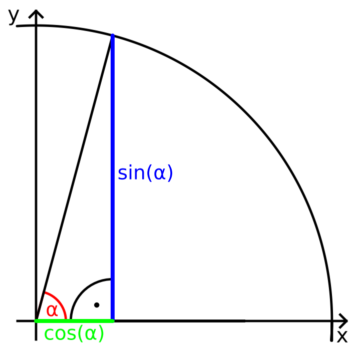


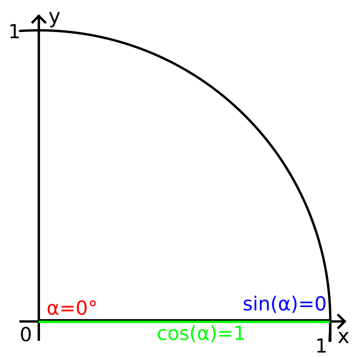
Abbildung 9: Sinus und Kosinus am Einheitskreis

2.3 Beziehungen zwischen Sinus, Kosinus und Tangens

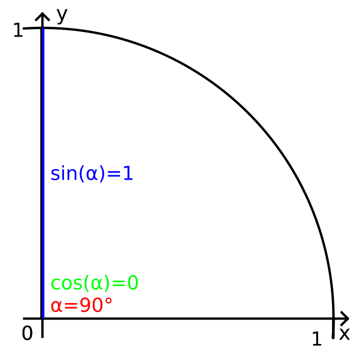
1. Für $0° < \alpha < 90°$ nimmt $\sin(\alpha)$ mit wachsendem α zu und $\cos(\alpha)$ ab(Abbildung 10a). $\sin(0°) = 0$, $\cos(0°) = 1$ (Abbildung 10b), $\sin(90°) = 1$, $\cos(90°) = 0$ (Abbildung 10c).



(a) $0° < \alpha < 90°$



(b) $\sin(0°) = 0$, $\cos(0°) = 1$



(c) $\sin(90°) = 1$, $\cos(90°) = 1$

Abbildung 10: Beziehung 1

2. Wendet man auf das im Einheitskreis dargestellte Dreieck den Satz des Pythagoras an(Abbildung 11), so erhält man den für jede Winkelweite gültigen Zusammenhang
$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$.
Beispiel:

$$
\begin{aligned}
\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) &= 1 && (1)\\
(\sin(45))^2 + (\cos(45))^2 &= 1 && (2)\\
\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 &= 1 && (3)\\
\frac{\sqrt{2^2}}{2^2} + \frac{\sqrt{2^2}}{2^2} &= 1 && (4)\\
\frac{2}{4} + \frac{2}{4} &= 1 && (5)\\
\frac{1}{2} + \frac{1}{2} &= 1 && (6)\\
0,5 + 0,5 &= 1 && (7)
\end{aligned}
$$

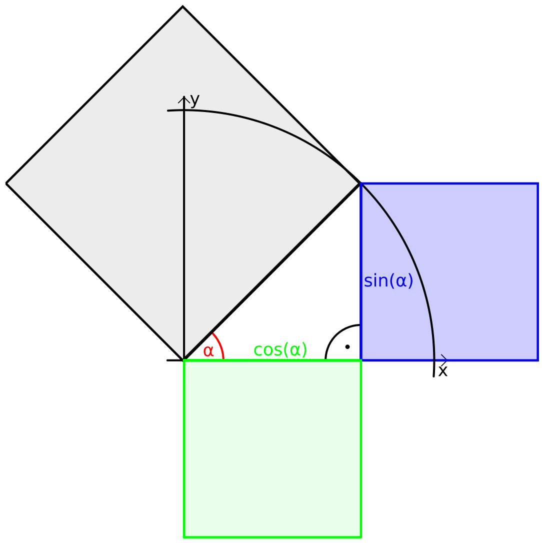


Abbildung 11: Einheitskreis Dreieck Satz des Pythagoras

3. In Abbildung 12 sieht man:
$\sin(90° - \alpha) = x = \cos(\alpha)$ und
$\cos(90° - \alpha) = y = \sin(\alpha)$
Beispiel:

$$
\begin{aligned}
\sin(90° - \alpha) = x &= \cos(\alpha) && (1)\\
\sin(90° - 30°) = \frac{\sqrt{3}}{2} &= \cos(30°) && (2)
\end{aligned}
$$

4. Ebenfalls in Abbildung 12:
$tan(\alpha) = \frac{y}{x} = \frac{sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$.

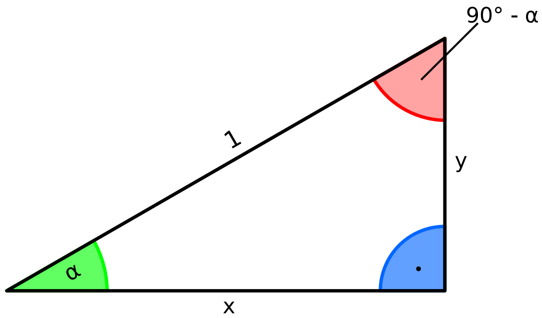


Abbildung 12: sin(90° - α); cos(90° - α)

2.4 Einheitskreis - Definition

Definition: Es gilt:

$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$

$\sin(90° - \alpha) = \cos(\alpha)$

$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$, $\alpha \neq 90°$, weil: $\tan(90) = \frac{\sin(90)}{\cos(90)} = \frac{1}{0} = ↯$

2.5 Einheitskreis - Aufgabe

Aufgabe: $\sin(\alpha) = 0,6$.

Bestimme:

a) $\cos(\alpha)$ **b)** $\tan(\alpha)$ **c)** $\sin(90° - \alpha)$ **d)** $\cos(90° - \alpha)$ **e)** $\tan(90° - \alpha)$

a) Lösung:

$$\begin{aligned}
\sin^2(\alpha) + cos^2(\alpha) &= 1 && && (1)\\
0,6^2 + cos^2(\alpha) &= 1 && |-0,6^2 && (2)\\
\cos^2(\alpha) &= 1 - 0,36 && |\surd && (3)\\
\cos(\alpha) &= \sqrt{1-0,36} && && (4)\\
\cos(\alpha) &= \sqrt{0,64} && && (5)\\
\cos(\alpha) &= 0,8 && && (6)
\end{aligned}$$

b) Lösung:

$$\begin{aligned}
\tan(\alpha) &= \frac{sin(\alpha)}{cos(\alpha)} && (1)\\
\tan(\alpha) &= \frac{0,6}{0,8} = \frac{6}{8} && (2)\\
\tan(\alpha) &= \frac{3}{4} = 0,75 && (3)
\end{aligned}$$

c) Lösung:

$$sin(90° - \alpha) = cos(\alpha) = 0,8 \qquad (1)$$

d) Lösung:

$$cos(90° - \alpha) = sin(\alpha) = 0,6 \qquad (1)$$

e) Lösung:

$$\begin{aligned}
tan(90° - \alpha) &= \frac{sin(90° - \alpha)}{cos(90° - \alpha)} = \frac{0,8}{0,6} && (1)\\
tan(90° - \alpha) &= \frac{8}{6} = \frac{4}{3} && (2)
\end{aligned}$$

3 Mit dem Sinus modellieren

3.1 Mit dem Sinus modellieren - Beispiel

Aufgabe:
Bei einem Shaufelraddampfer dreht sich das Rad mit dem Durchmesser 2 Meter einmal vollständig in 60 Sekunden(Abbildung 13). In welcher Höhe über dem Wasserspiegel liegt der rot markierte Punkt A?
Erstelle eine Wertetabelle in 5 Sekunden-Schritten.

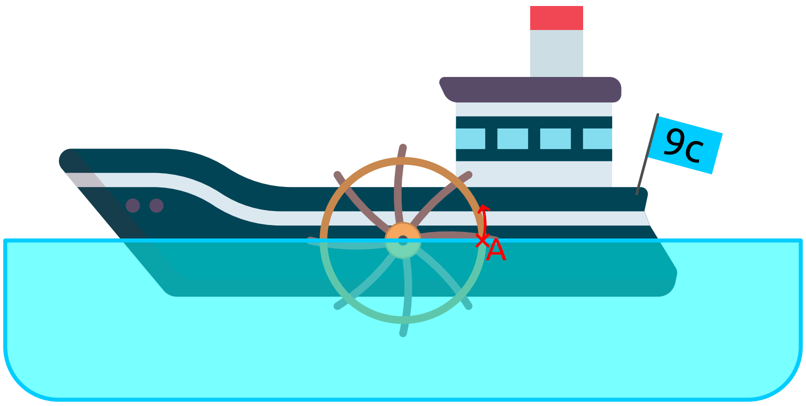


Abbildung 13: Schaufelraddampfer

Lösung:

Zeit t (in s)	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
Winkel α	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°	360°
Höhe h (in m)	0	0,5	0,87	1	0,87	0,5	0	-0,5	-0,87	-1	-0,87	-0,5	0

3.2 Winkel α mit $0° \leq \alpha \leq 90°$

Am Einheitskreis entspricht $\sin(\alpha)$ der y-Koordinate des Punktes P(Abbildung 14).
$\sin(40°) \approx 0,64$

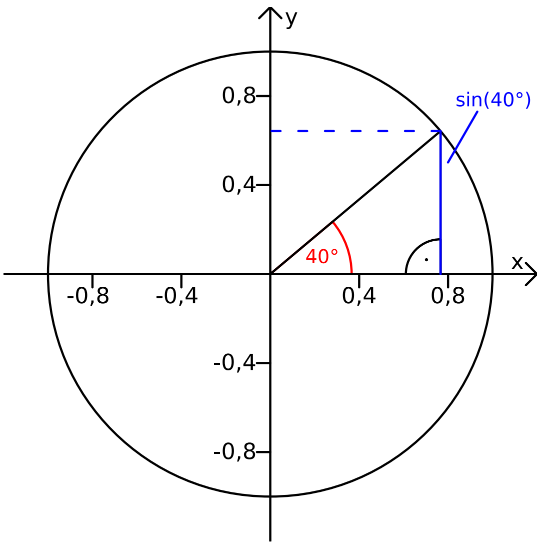
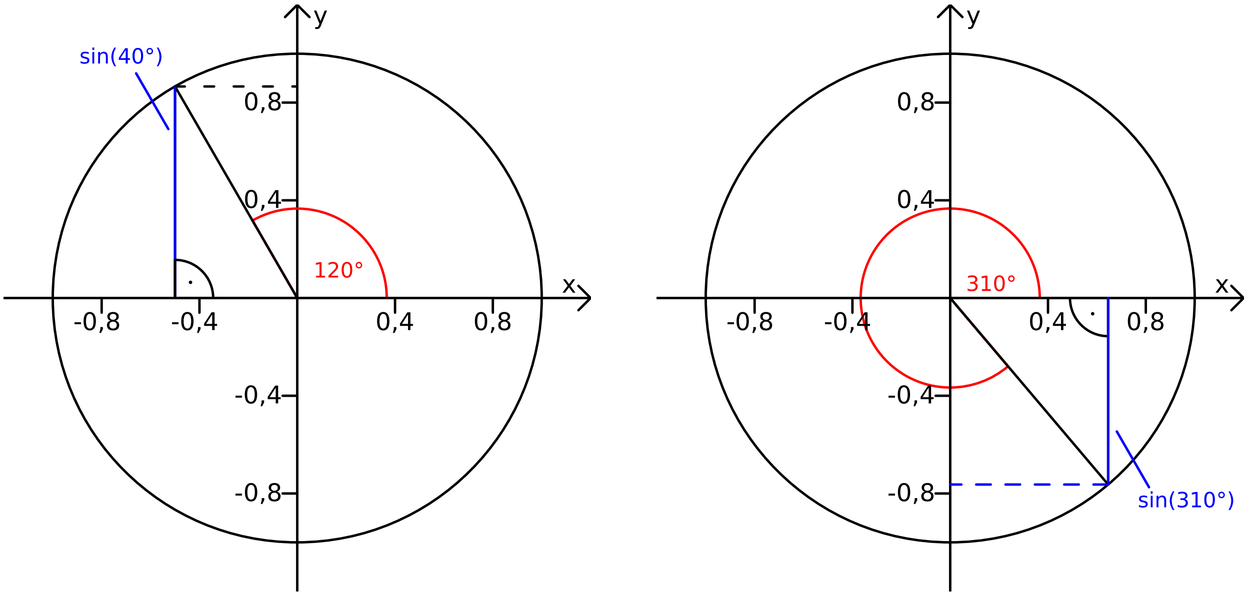


Abbildung 14: Winkel α mit $0° \leq \alpha \leq 90°$

3.3 Erweiterter Winkel α mit $90° < \alpha \leq 360°$

Wird α über 90° vergrößert, wird der Sinuswert von α ebenso als y-Koordinate des Punktes P festgelegt(Abbildung 15).



(a) $\sin(120°) \approx 0,87$ (b) $\sin(310°) \approx -0,77$

Abbildung 15: Erweiterter Winkel α mit $90° < \alpha \leq 360°$

3.4 Erweiterter Winkel α mit $90° < \alpha \leq 360°$ - Aufgabe

Aufgabe:
Ein Punkt P bewegt sich auf dem Einheitskreis(Abbildung 16) gegen den Uhrzeigersinn. Für $\alpha = 0°$ befindet er sich im Punkt(1|0)

a) Gib die x- und y-Koordinaten des Punktes P für $\alpha = 140°$ und für $\alpha = 310°$ an.

b) Bestimme zwei verschiedene Werte für α, sodass seine y-Koordinate 0,8 beträgt.

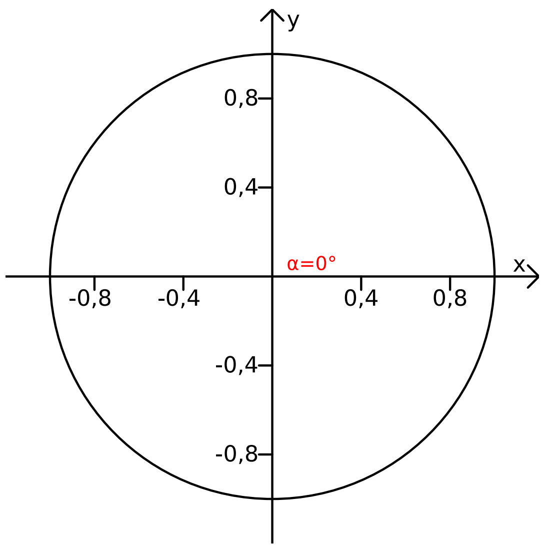


Abbildung 16: $\alpha = 0°$

Lösung a)
Für $\alpha = 140°$: Punkt (-0,77|0,64)

$$\begin{aligned} \sin(\alpha) &= y && (1) \\ \sin(140°) &\approx 0,64 && (2) \\ \cos(\alpha) &= x && (3) \\ \cos(140°) &\approx -0,77 && (4) \end{aligned}$$

Für $\alpha = 310°$: Punkt (0,64|-0,77)

$$\begin{aligned} \sin(\alpha) &= y && (1) \\ \sin(140°) &\approx -0,77 && (2) \\ \cos(\alpha) &= x && (3) \\ \cos(140°) &\approx 0,64 && (4) \end{aligned}$$

Lösung b)
Für α_1: $sin(53,1°) \approx 0,8$

$$\sin^{-1}(0,8) \approx 53,1° \qquad (1)$$

Für α_2: $\sin(126,9°) \approx 0,8$

$$\begin{aligned} \sin^{-1}(0,8) &\approx 53,1° && (1) \\ 53,1° - 180° &= 126,9° && (2) \end{aligned}$$

3.5 Funktion f mit f(α)

Ordnet man jedem Winkel α mit $0° \leq \alpha \leq 360°$ seinen Sinuswert zu, so erhält man eine Funktion f mit f(α) = sin(α).
Man kann mithilfe des Graphen von f (Abbildung 17) zu gegebenem Winkel den Sinuswert näherungsweise ablesen oder näherungsweise Winkel mit vorgegebenem Sinuswert ermitteln.

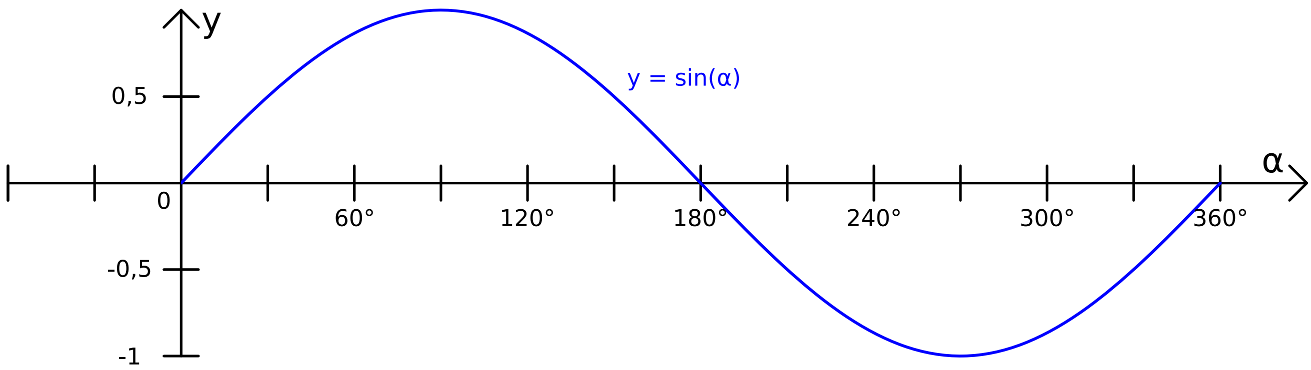


Abbildung 17: $f(\alpha) = \sin(\alpha)$

3.6 Sinusfunktion im Gradmaß - Definition

Die Funktion f mit f(α) = sin(α) heißt **Sinusfunktion im Gradmaß**.

3.7 Graph einer Sinusfunktion zeichnen

Zeit t (in s)	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
Winkel α	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270◦	300°	330°	360°
HÃűhe h (in m)	0	0,5	0,87	1	0,87	0,5	0	-0,5	-0,87	-1	-0,87	-0,5	0

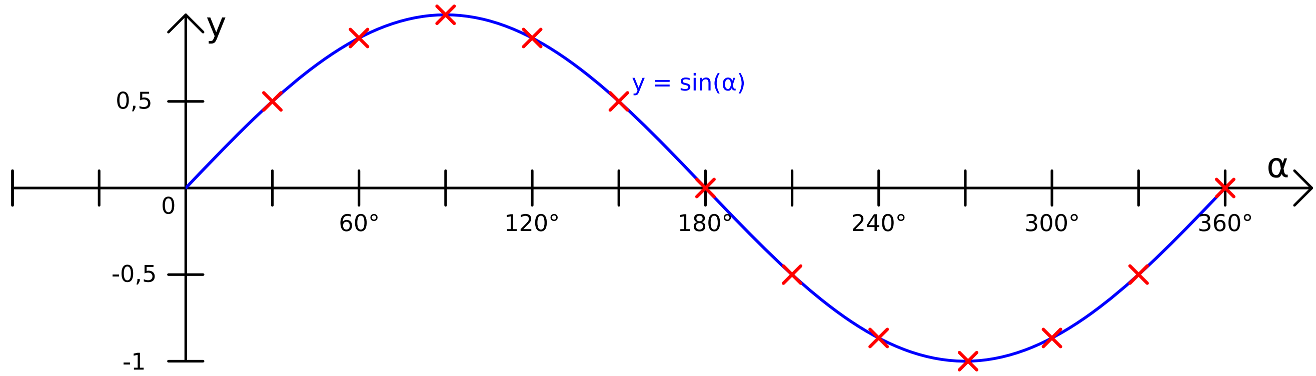


Abbildung 18: Sinuswelle Zeichnen

3.8 Einen Zeitlichen Vorgang modellieren

In einem Hafenbecken schwankt der Wasserstand periodisch um seinen Durchschnittswert (Abbildung 19)

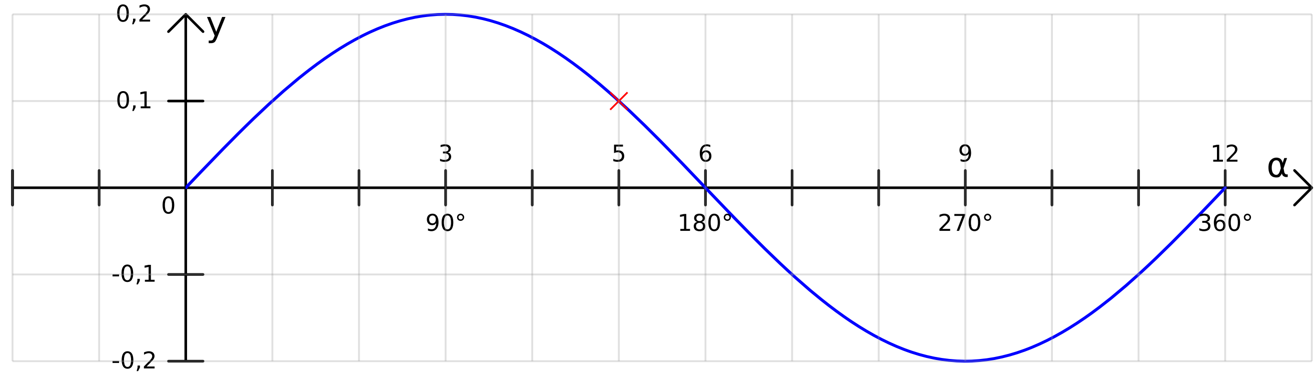


Abbildung 19: Wasserstand

Aufgabe:
a) Erläutere, wie man zu einem gegebenenen Zeitpunkt t die Winkelweite α erhält und umgekehrt. Bestimme für $t = 5$ (t in h) den zugehörigen Winkel.
b) Mit welcher Funktion kann man zu einem gegebenen Winkel α den Wasserstand berechnen? Berechne den Wasserstand 5 Stunden nach Beobachtungsbeginn.

Lösung a)

$$
\begin{aligned}
12h &\mathrel{\widehat{=}} 360^\circ && |:12 && (1)\\
1h &\mathrel{\widehat{=}} 30^\circ && && (2)
\end{aligned}
$$

12h in Abbildung 17 entsprechen 360°, also entspricht 1h dem Winkel 30°.
Daraus Folgt $\alpha = t \cdot 30^\circ$ und $t = \frac{\alpha}{30^\circ}$ (t in h). Für t = 5 erhält man $\alpha = 5 \cdot 30^\circ = 150^\circ$

$$
\begin{aligned}
\alpha &= t \cdot 30^\circ\\
t &= \frac{\alpha}{30^\circ}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\alpha &= 5 \cdot 30^\circ && (1)\\
&= 150^\circ && (2)
\end{aligned}
$$

Lösung b)
Da der Wasserstand zwischen -0,2 und 0,2 um den Durchschnittswert pendelt (Abbildung 19), gilt:

$$f(\alpha) = 0,2 \cdot sin(\alpha)$$

Für t = 5:

$$
\begin{aligned}
\alpha &= 5 \cdot 30^\circ && (1)\\
&= 150^\circ && (2)\\
f(150^\circ) &= 0,2 \cdot \sin(150^\circ) && (3)\\
&= 0,1 && (4)
\end{aligned}
$$

Nach 5 Stunden liegt der Wasserstand 10cm über dem Durchscnittswert.

4 Anwendung

Auch wenn es uns nicht oft auffällt, viele technische Geräte bzw. Mechanismen verwenden die trigonometrischen Funktionen Sinus und Kosinus. Genauso wie viele mathematische Verfahren. Ein paar Beispiele:

- GPS - Global Positioning System (Positionsbestimmung mit Hilfe von Satelliten)
- Computergrafiken in 3D und 2D
- drehendes Objekt im Computerspiel
- Spracherkennung
- Landvermessungen
- Fourier Transformation (z. B. Anwendung beim Spektroskop für Chemiker)
- Astronomen nutzten Spektroskope, um chemische Zusammensetzungen von weit entfernten Planeten zu bestimmen
- FFT - Fast Fourier Transformation für Bildkompression, Audioverarbeitung, mp3-Algorithmus, seismische Datenverarbeitung etc.

5 Zusammenfassung

6 Quellen

- Freiburger Münster - https://freiburg-schwarzwald.de/fotos06feb/freiburg12-060227.jpg
- Vector Boot - https://www.vecteezy.com/vector-art/170704-flat-ship-vectors
- Lambacher Sweizer 9(S. 90 - 104) - Mathematik Buch
- Sinus und Kosinus im Alltag - https://www.matheretter.de/wiki/sinus-kosinus-alltag