# 数理逻辑

2013年5月28日 23:17

一、逻辑

命题的相关概念：真值（悖论拥有特殊之处）、原子命题、复合命题、前件（条件语句中的如果部分——导致后件的语句）、后件（条件语句中的就部分——前件导致的语句）

所有的逻辑运算符：非（一元）、合取/与（二元）、析取/或（二元）、条件（二元）、双条件（二元）、与非（二元）、或非（二元）、异或（二元）、同或（二元）

逻辑运算符的优先级：() / 非 / 合取析取 / 条件双条件

命题的判别标准：可以唯一判别真假的陈述语句称为命题

三、条件语句的通俗表示方法：如果...就...

四、命题公式

复合命题在各原子命题真值无法确定情况下的复合表达式

五、等价命题

永真/假式：在各原子命题真值变化下永为真/假

两大德摩根定律：

非 （A 合取 B） = （非A） 析取 （非B）

非 （A 析取 B） = （非A） 合取 （非B）

六、合取、析取范式

基本合取/析取式：两原子命题之间的合取析取

主析取范式：p,q,r...为按顺序排列的原子命题

m_i1 析取 m_i2 析取 m_i3 ...

m_ik表示一组特定真值组合下的顺序合取范式，ik的值则是这个组合下顺序真值组成的二进制数转化成的十进制数

要求：对m_ik对应的任一组合，一个原子命题取真值0，则加非表示，取1则不加非，且在这个组合下，原复合命题真值为1

主合取范式：

M_i1 合取 M_i2 合取 M_i3 ...

M_ik表示一组特定真值组合下的顺序合取范式，ik的值则是这个组合下顺序真值组成的二进制数转化成的十进制数

要求：对M_ik对应的任一组合，一个原子命题取真值1，则加非表示，取0则不加非，且在这个组合下，原复合命题真值为0

七、功能完备组

由逻辑运算符组成的一个完备组，这个完备组满足仅通过里面的运算符就能构造满足任意真值表的命题公式

{非、合取、析取}、{非、合取}、{非、析取}、{与非}、{或非}

八、证明原理

条件为A_1,A_2,A_3...A_n,需要证明的结论为B，那么这个证明的本质就是证明：

"A_1合取A_2合取...A_n 条件 B" 为永真式

九、条件为A_1,A_2,A_3...A_n,需要证明的结论为B，通过证明原理来证明

1、真值表："A_1合取A_2合取...A_n 条件 B" 关于各个原子命题的真值若全为真，则为永真式，B成立

2、建立有效步骤证明（只能使用下列原子证明步骤，中间可使用等价变换）：

假设推理：A A->B so B

附加：A so A析取B

化简：A合取B so A

合取：A B so A合取B

拒取式：A->B 非B so 非A

析取三段论：A析取B 非A so B

假言三段论：A->B B->C so A->C

分解规则：A析取B 非A析取C so B析取C

条件证明：A->C B->C so (A析取B)->C

构造性两难：A->B C->D A析取C so B析取D

破坏性两难：A->B C->D 非B析取非D so 非A析取非C

逻辑运算符与四则运算符有很多相似的地方，特别是数字电路中直接把与运算等同于乘，把或运算等同于加，但实际上两种运算的本质完全不同，很多情况都会出现差异，所以最好把逻辑运算符写成四则运算符

关于语言与数学逻辑的关系

不同的语言标准在进行转换时容易出现原子命题的不统一

He is negative（原子）-----他是消极的（原子）

He is positive（原子）-----他是不消极的（非原子）

因此实际上这个问题上不用深究，其也是基于主观的

将语句转换为谓词公式

小孩都是调皮的，设论域为人类

令P(x)：x为小孩 H(x)：x是调皮的

任意（x(P(x) 条件 H(x))）

有的小孩是调皮的，设论域为人类

存在（x(P(x) 合取 H(x))）

即"存在接合取、任意接条件"

符号与名称对比

十、谓词逻辑

原子命题可分为个体词、谓词、量词等非命题成分：

个体词可理解为对象，它包括个体常元（一般用a,b,c...表示）和个体变元（一般用x,y,z...表示）

谓词指个体词之间的关系，它包括谓词常元（直接表示关系，如x=y）和谓词变元（用F(),G()...表示关系），谓词不同于函数，函数对多个个体词进行处理，且函数变元在离散中一般表示为小写f(),g()…，函数常元则直接写出，如x+y

量词在命题中形容数量，分全称量词（所有）和存在量词（至少一个）

当引入谓词逻辑后，就可以把命题当成命题函数处理，这时就引入论域（可以理解为定义域），若非对个体词有个体域的说明，则对所有个体词采用全总个体域

命题的符号化结果为谓词公式，谓词公式可包含原子公式（包含谓词的最小项）、联结词、量词等

辖域是运算符的作用范围，在谓词逻辑中指量词的作用范围，在作用范围内个体词（这时称为约束变元）的取值是受量词控制的，且在这个范围内，相同个体词同时取相同值，而没有量词约束的个体词称为自由变元，且一个谓词公式中所有相同（相同指相同辖域内标识符号相同）的自由变元同时取相同值

一个谓词公式是重言式——当在论域中全取真；一个谓词公式是矛盾式——当在论域中全取假；当在论域中可真可假，则为可满足式；

十一、等价公式基本公式

1、非（任意x W） 恒等 存在x 非W
  非（存在x W） 恒等 任意x 非W
2、任意x（P(x)条件Q(x)） 恒等 任意x（非P(x)析取Q(x)）
  存在x H(x) 合取 非（存在x H(x)） 恒等 永假
3、任意x A(x) 恒等 A(a_1)合取A(a_2)…
  存在x A(x) 恒等 A(a_1)析取A(a_2)…
4、任意x(A(x)析取B) 恒等 任意x A(x)析取B
  任意x(A(x)合取B) 恒等 任意x A(x)合取B
  任意x(A(x)条件B) 恒等 任意x A(x)条件B
  任意x（B条件A(x)） 恒等 B 条件 任意x A(x)
  存在x（A(x)析取B） 恒等 存在x A(x) 析取 B
  存在x（A(x)合取B） 恒等 存在x A(x) 合取 B
  存在x（A(x)条件B） 恒等 存在x A(x) 条件 B
  存在x（B 条件 A(x)） 恒等 B 条件 存在x A(x)
5、存在x（A(x) 析取 B(x)） 恒等 存在x A(x) 析取 存在x B(x)
  任意x（A(x) 合取 B(x)） 恒等 任意x A(x) 合取 任意x B(x)
6、任意x 任意y W 恒等 任意y 任意x W
  存在x 存在y W 恒等 存在y 存在x W

十二、前束范式

根据规则“相同辖域内相同标识符才是本质相同的个体词”改名（结果是保证一个标识符表示一个本质个体词）---->根据基本公式推导证明使得所有量词均在式子最前面

前束合取/析取范式：在保证前束范式的同时类似于主合取/析取范式

十三、谓词逻辑和普通逻辑之间的转换

全称量词消去（UI）：任意xP(x)，若在论域中对任何数都满足，则可消去量词变为P(a)
存在量词消去（EI）：存在xP(x)，若在论域中存在a使得P(x)满足，则可消去量词变为P(a)
全称量词产生（UG）：P(a)，a为覆盖论域中的任何数，则可产生全称量词变为 任意xP(x)
存在量词产生（EG）：P(a)，a为取论域中的部分数，则可产生存在量词变为 存在xP(x)

十四、集合

单元集：集合中只有一个元素
文氏图：用图形表示集合
基数：抽象理解为元素的个数（无限集相关概念见实变）
幂集：一个集合所有的子集组成的集合成为该集合的幂集

十五、集合运算

交、并、差、对称差（全集减去两者的交集）、补
从属关系表

| | |
|---|---|
| 非 | [math not supported] |
| 合取 | [math not supported] |
| 析取 | [math not supported] |
| 条件 | [math not supported] |
| 双条件 | [math not supported] |
| 与非 | [math not supported] |
| 或非 | [math not supported] |
| 异或 | [math not supported] |
| 同或 | [math not supported] （带点运算） |
| 属于 | ∊ |
| 并 | [math not supported] |
| 交 | [math not supported] |
| 对称差 | [math not supported] |
| 非（集合） | [math not supported] [math not supported] |
| 基数 | [math not supported] [math not supported] |
| 永真 | T |
| 永假 | F |
| 主析取范式 | m_i1 析取 m_i2 析取 m_i3 … |
| 主合取范式 | M_i1 合取 M_i2 合取 M_i3 … |
| 谓词变元表示 | F(),G()… |
| 函数变元表示 | f(),g()… |
| 全称量词 | [math not supported] |
| 存在量词 | [math not supported] |
| 论域常见表示 | D |
| 辖域常见表示 | W |
| 笛卡尔乘积（叉乘） | [math not supported] |
| 复合 | [math not supported] |
| 布尔积 | [math not supported] （多元带点运算） |
| 对集合A的幂集 | P(S) |
| 偏序的小于等于 | [math not supported] |

| A B C | B并C | A交(B并C) | A交B | (A交B)并(A交C) | A-B |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 0 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 0 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 1 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 1 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 0 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 0 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 1 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 1 1 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |

十六、容斥原理

一种计数方式，其基本思想为：先不考虑重叠的情况，把包含于某内容中的所有对象的数目先计算出来，然后再把计数时重复计算的数目排斥出去

十七、关系

笛卡尔乘积（叉乘）

A={a_1,a_2,a_3…} B={b_1,b_2,b_3…}

AxB={(a,b):a属于A,b属于B}——构成一系列的序偶（有序队）

关系即由定义在集合之间（可以自己与自己）的一个逻辑表达式而确定的A*B的一个子集，则A*B可以定义2^(IAI*IBI)个关系

R为定义在自集合A*A中的一个关系，若对任意a属于A，有(a,a)属于R，则称R为自反的，若对任意a属于A，有(a,a)不属于R，则称R为反自反的

R为定义在A*A中的一个关系，若对任意a属于A，b属于A，当(a,b)属于R时，(b,a)也属于R，则称R为对称的；如果以上结论只在a=b的时候成立，则称R为反对称的

R为定义在A*A中的一个关系，若对任意a属于A，b属于A，c属于A，当(a,b)(b,c)属于A时，(a,c)属于A，则称R是可传递的

R是定义在A*B中的一个关系，S是定义在B*C中的一个关系，R与S的复合可表示为：

R复合S={(a,c)Ia属于A 合取 c属于C 合取 存在b（b属于B 合取 (a,b)属于R 合取 (b,c)属于S）}

十八、关系的矩阵表示

A含有m个元素a_1~a_m，B含有n个元素b_1~b_n，R是定义在A*B上的关系，则R的矩阵表示：

{h_ij}_m*n　(a_i,b_j)属于R，则h_ij=1，否则为0

A1、A2、B是三个定义的关系，以下为三者的矩阵表示方法

A1={a1_ij}_k*l　A2={a2_ij}_k*l　B={b_ij}_l*m

A1合取（交）A2 = {a1_ij合取a2_ij}_k*l

A1析取（并）A2 = {a1_ij析取a2_ij}_k*l

A1-A2 = {a1_ij减运算a2_ij}_k*l

A1布尔积B = {c_ij}_k*m

c_ij = （a1_i1合取b_1j） 析取 （a1_i2合取b_2j） … 析取（a1_il合取b_lj）

注：实际上，布尔积的值就等于复合运算，但在含义上可能有所区别

十九、关系的闭包

通过向R中添加二元有序对来改变R，使得新的R'满足以下三个条件的时候就称为自反/对称/传递闭包

1）R'是自反/对称/传递的

2）R属于R'

3）对A上任意包含R的自反/对称/传递关系R''，有R'属于R''

自反/对称/传递闭包分别记为r(R)/s(R)/t(R)

计算传递闭包的算法1

```
A=R的初始关系矩阵M
B=A
For i=2:n
    A=A布尔积M
    B=B析取A
最终结果B即为R'的关系矩阵
```

计算传递闭包的算法2（Warshall's算法）

```
W=R的初始关系矩阵M
For k=1:n
    For i=1:n
        For j=1:n
            w_ij=w_ij析取（w_ik合取w_kj）
最终结果W即为R'
```

二十、等价关系

对给定集合满足自反、对称、传递三个条件的关系称为等价关系

{(1,2),(2,1),(1,1),(2,2)}对{1,2}满足等价关系，但对{1,2,3}就不行

A={a_1~a_n}，任意一个等价关系的矩阵n*n均可表示为

任取n个元素中的k(1<=k<=n)个，i_1~i_k，则i_1~i_k的行列交点均为1（则有k*k个1），其余均为0，此时表示的关系是对i_1~i_k构成集合的等价关系；若要对A表示等价关系，对任意0<=j<=n，a_jj=1

等价类：通过定义的一种等价关系取出一类性质相同的元素，则互斥的几种关系可完全分离A中的元素

划分：一个集合A可以划分成多个不交子集的并，每种划分都可以构成一个等价关系（但这个等价关系不一定对A），其构造方式就是："对划分的每个子集构造有向完全图关系并加上自反关系，然后将每个子集构造的关系进行并即得到最后构造的关系"。不同的划分构成不同的等价关系，所有的划分构成的所有的等价关系就是集合中等价关系的总体

二十一、偏序关系

A为一个元素集合，R为定义在A上的关系，如果这个关系满足自反、反对称、传递三个条件，则称R为偏序（同时把R关系称为小于等于），称(A,R)为偏序集

当A中的两元素的两种关系至少一个在偏序R中，则称它们对关系R为可比较的，若均不在R中，则称它们为不可比较的

R为A中的偏序，若任意两个元素均为可比较的，则称R为全序，对应(A,R)称为全序集（也称为链）

哈斯图即表示偏序的图，R偏序图的规则

(a,b)属于R，则画存在高度差的直线，下端点表示a，上端点表示b；

(a,b)属于R，(b,c)属于R，且(a,c)属于R，在前一条规则完成后，去掉(a,c)这条线；

极大元：

以偏序的小于等于关系（即(a,b)属于R == a小于等于b）做基础，若A中一元素s，对任意元素b_i属于A，(s,b_i)不属于R，即不存在b_i，使s小于等于b_i，则称s为极大元

极小元：

以偏序的小于等于关系（即(a,b)属于R == a小于等于b）做基础，若A中一元素s，对任意元素b_i属于A，(b_i,s)不属于R，即不存在b_i，使b_i小于等于s，则称s为极小元

最大元

以偏序的小于等于关系（即(a,b)属于R == a小于等于b）做基础，若A中一元素s，对任意元素b_i属于A，(b_i,s)属于R，即对任意b_i，b_i小于等于s，则称s为最大元

最小元

以偏序的小于等于关系（即(a,b)属于R == a小于等于b）做基础，若A中一元素s，对任意元素b_i属于A，(s,b_i)属于R，即对任意b_i，s小于等于b_i，则称s为最小元

注：极大元、极小元一定存在，且可能存在多个，而最大元、最小元不一定存在，若存在则只存在一个

良序性：

一个集合的每一个非空子集都有最小元，则该集合具有良序性

良序集：

若具有良序性的(A,R)为良序集

字典序：

A={a_1,a_2,...,a_n}，字典序为一个序列S，S的每个元素也为一个序列S_i{s_i1,s_i2,...,s_in}——A中元素的一种排列，其中

S有n!个元素，即将A全排列，对任意1<=i<j<=n，按字符串的比较方式S_i小于等于S_j

S_1满足对任意1<=j<k<=n，s_ik小于等于（定义于(A,R)上）s_ik，即从小到大排列

S_1满足对任意1<=j<k<=n，s_ij大于（定义于(A,R)上）s_ik，即从大到小排列

上界：

对A中给定的一个元素子集B，B的上界即A中同时大于等于B中每个元素的元素集合

最小上界：上界中的最小元

下界：

对A中给定的一个元素子集B，B的下界即A中同时小于等于B中每个元素的元素集合

最大下界：下界中的最大元

格：

对于A中给定的任意两个元素，均含有最小上界和最大下界，则称(A,R)为格