

2021 - 0 (Řešeno společně na tabuli na poslední přednášce.)

1. V  $\mathbb{R}^6$  jsou vektorové podprostory  $V, W$ .  $V : v_1 = v_2 = v_3 = v_4$ ,  $W : w_1 + w_2 + w_3 = w_4 + 3w_5 + 5w_6$ . Najděte ortonormální bázi  $V \cap W$ .

2. V  $\mathbb{R}$  :

$$\begin{array}{cccccccl} 3a & + & 4b & + & 5c & + & 6d & = & 1 \\ 2a & + & 5b & + & 7c & + & 9d & = & 2 \\ 7a & + & 7b & + & \frac{29}{3}c & + & 2d & = & 2 \\ 5a & + & 9b & + & 14c & + & 6d & = & 3 \end{array} \text{ Najděte } a - b.$$

3.  $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & i & 1 \\ 2 & 4i & i & i & 0 \\ 0 & 1 & w & 2i & 0 \\ 1 & 0 & 1 & i & 0 \\ 7 & 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}$ .  $|U| = -5i$ , spočtěte  $u$ .

4. Homomorfizmus  $\gamma : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ .  $\gamma((v_1, v_2, v_3, v_4)) = (v_1 + v_2 + v_3, 8v_3 + 9v_4)$ .

$B = ((1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 0), (1, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 0))$ ,  $\overline{B} = ((2, 11), (1, 0))$ . Najděte matici homomorfismu v bázích  $B, \overline{B}$ .

5. V  $\mathbb{F}_{14}$  řešte  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \times X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ .

6. Určete a načrtněte  $4x^2 + 4z^2 + 36x - 44z + 202 = 0$ .

1. Vektorový podprostor  $W$  je podprostorem  $\mathbb{R}^5$  a platí  $\begin{cases} w_1 + w_2 + w_3 = 3w_4 + 6w_5 \\ w_1 + w_3 + w_5 = -2w_4 \end{cases}$ . Napište ortogonální bázi.

2. Řešte reálnou soustavu lineárních rovnic v  $\mathbb{R}$ :
- $$\begin{array}{ccccccccc} 4a & + & b & + & 2c & + & d & = & -1 \\ 6a & + & 3b & + & 4c & + & 2d & = & -4 \\ 6a & + & 7b & - & c & - & d & = & 11 \\ 8a & + & 11b & + & 2c & + & 2d & = & -2 \end{array}$$

3.  $\rho$  prochází  $[5, 0, 2], [6, -2, 4], [3, 8, 1]$ ,  $p$  prochází  $D = [1, 1, 1]$  a je kolmá na  $\rho$ .  $E$  leží na  $p$ , vzdálenost od  $\rho$  je  $12\sqrt{2}$ .  $C, E$  prochází přímka  $q$ , určete odchylku  $p$  a  $q$ .

4. Nad  $\mathbb{F}_3$  máme matici  $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & a & 0 & 0 & a & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ a & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Pro jaké hodnoty  $a$  je matice  $M$  regulární?

5. Najděte matice homomorfismu  $\mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ ,  $\mathcal{B} = ((1, 1, 1), (i, i, 0), (i, 0, 0))$ ,  $\overline{\mathcal{B}} = ((1, 1, i), (1, i, 0), (1, 0, 0))$ ,  $\varphi(z_1, z_2, z_3) = (z_1 - z_2, 0, iz_2 - z_3)$ .

6. Vlastní vektory matice  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$  generují podprostor  $V \subseteq \mathbb{R}^3$ . Najděte bázi  $W : W \oplus V = \mathbb{R}^3$ .<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup> $\oplus$  značí nulový průnik.

1. V  $\mathbb{R}^6$  máme vektorové pole  $V, W$ , kde  $V = \{(a, b, a, 2a, 3a, 4a) | a, b \in \mathbb{R}\}$ .  $W$  generuje  $\vec{w}_1 = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1)$ ,  $\vec{w}_2 = (0, 1, 0, 0, 0, 1)$ , a  $\vec{w}_3 = (\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4})$ . Najděte ortogonální bázi  $V + W$ .

2. Pro jaké  $\alpha$  je reálná matice  $M$  regulární? 
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -8\alpha \\ 1 & \alpha^2 & 1 & \alpha^2 \\ 1 & \alpha & 1 & -\alpha \\ \alpha^4 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{rclclclcl}
 & (1+i)a & + & (2+i)b & + & (3+i)c & = & -3i \\
 3. \text{ V } \mathbb{C} \text{ řešte } & (1+i)a & + & (1+2i)b & + & (1+3i)c & = & 1 \\
 & (3-2i)a & + & (1-3i)b & + & (2-i)c & = & 0
 \end{array}$$

4. Najděte matici přechodu v  $\mathbb{F}_7^3$  z báze  $\beta = ((1, 0, 5), (1, 0, 4), (0, 1, 0))$  do báze  $\gamma = ((1, 0, 2), (1, 0, 3), (0, 4, 4))$ .



5. Přímka  $p$  prochází body  $[1, 1, 0]$ ,  $[2, 3, 3]$ . Přímka  $q$  prochází body  $[4, 0, -1]$ ,  $[8, 2, 2]$ . Ověřte, že nejsou mimoběžky.

6. Najděte vlastní vektor matice  $M$ , který neleží v žádné z souřadnicových (?) rovin.  $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ .

1.  $V, W$  jsou vektorové podprostory  $\mathbb{R}^6$ .  $V$  generuje  $(1, 2, 3, -1, 8, 6), (1, 8, 5, -7, 23, 27), (2, -2, 4, 4, 1, -9)$ .  $W$  generuje  $(-3, 6, -5, -9, 6, 24), (1, -10, -1, 11, -22, -36), (7, 2, 17, 5, 26, 0)$ . Najděte ortogonální bázi  $V \cap W$ .

2. V  $\mathbb{R}$  řešte soustavu
- $$\begin{array}{rcccccccl} 4a & + & b & + & c & + & d & = & -6 \\ 7a & + & 2b & - & 2c & - & d & = & 5 \\ 8a & - & 2b & + & 14c & + & 13d & = & 7 \\ 28a & + & b & + & c & + & 7d & = & -12 \end{array}$$

3. Mějme matici  $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a\sqrt{3} \\ 1 & 1 & \sqrt{3}(1+a) & a\sqrt{3} \\ 1 & \sqrt{3}(2+a) & \sqrt{3}(1+a) & a\sqrt{3} \\ \sqrt{3}(3+a) & \sqrt{3}(2+a) & \sqrt{3}(1+a) & a\sqrt{3} \end{pmatrix}$ . Vypočítejte  $|M|$  pro  $a = \frac{\sqrt{3}}{3}$  a  $a = \frac{\sqrt{3}}{3} - 1$ .

4. V  $\mathbb{F}_{11}$  řešte  $X * \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \\ 4 & 8 \\ 5 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 7 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$ .

5. Vzájemná poloha roviny  $\rho$  a přímky  $p$  jsou  $\rho : A = [3, 0, 2], B = [4, -1, 5], C = [5, -3, -1], p : K = [2, -6, -64], \vec{u} = (0, 15, 101)$ . Pokud jsou rovnoběžné, určete průnik, jinak určete vzdálenost.

6. Najděte průměr vlastních hodnot matice  $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ .

1. V  $\mathbb{R}^4$  jsou vektorové podprostory  $V, W$ , kde  $V$  generuje vektory  $(1, 1, -2, 3), (4, -1, 2, -2)$ , a  $W$  generuje vektory  $(3, 2, -5, 0), (1, -4, 8, -11)$ . Najděte ortogonální bázi  $V + W$ .

2. V  $\mathbb{R}$  jsou dány následující rovnice. Spočtěte  $b - c$ .

$$\begin{array}{rcccccccl} 3a & + & 4b & + & 5c & + & 6d & = & 10 \\ 3a & + & 5b & + & 7c & + & 9d & = & -33 \\ 5a & + & 7b & + & 10c & + & 272d & = & 28 \\ 5a & + & 9b & + & 13c & + & 276d & = & \frac{8}{3} \end{array}$$

$$3. \ U = M^4, V = M^3, U = \begin{pmatrix} 1 & 1+2\sqrt{7} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3-2\sqrt{7} & 3 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3+10\sqrt{7} & 1 \end{pmatrix}$$

4. Přímka  $p$  prochází body  $A = [7, 2, 2], B = [4, -1, 1]$ . Přímka  $q$  prochází body  $C = [8, 0, -1], D = [2, 12, -3]$ . Ověřte, že jde o různoběžky a spočtěte jejich ?.

5. V  $\mathbb{F}_7$  je matice  $S = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ . Spočítejte  $S^{12}$ .

6.  $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Napište dva lineárně nezávislé vlastní vektory matice  $U$  s třetí souřadnicí rovnou 6.

1. Napište obecnou rovnici přímky  $p : x = 2 - t, y = 1 + 3t, t \in \mathbb{R}$ .

2. Napište parametrické vyjádření přímky určené v  $\mathbb{R}^3$  rovnicemi

$$\begin{array}{rcccccl} x & - & 2y & + & z & = & 2 \\ 2x & + & y & - & z & = & 5 \end{array}$$



3. Necht'  $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ,  $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ ,  $(r \cdot f)(x) = r \cdot f(x)$ , pro každé  $f, g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ,  $r, x \in \mathbb{R}$ .

(a) Ukažte, že  $(V, +, \cdot)$  je vektorový prostor.

(b) Rozhodněte, zda množina  $U = \{f \in V \mid f(0) = f(1)\}$  je podprostorem  $(V, +, \cdot)$ .

4. Zjistěte, zda ve vektorovém prostoru  $\mathbb{P}_3, +, \cdot$  vektory  $\mathbf{u} = x^3 + x$ ,  $\mathbf{v}x^2 + 1$ ,  $\mathbf{w} = x^3 - x^2 + x + 1$

(a) jsou lineárně nezávislé;

(b) tvoří bázi.

5. Necht'  $A$  je diagonální matice řádu  $n$ . Formulujte pravidlo pro výpočet součinů  $X \cdot A$ ,  $A \cdot Y$ , kde  $X, Y$  jsou libovolné matice typu  $m \times n$ ,  $n \times m$ .

6. Vypočtete determinant  $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

1. Pomocí inverzní matice určete matici  $X$ , pro kterou platí  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}$

2. Cramerovým pravidlem řešte následující systém lineárních rovnic:

$$\begin{array}{rrrrrr} 5x & + & y & - & z & = & -7 \\ 2x & - & y & - & 2x & = & 6 \\ 3x & & & + & 2z & = & -7 \end{array}$$

3. Řešte systém lineárních rovnic, víte-li, že má řešení  $[1, 8, 13, 0, -34]$ :

$$\begin{array}{rrrrrrrrcl} 6x_1 & + & 4x_2 & + & 5x_3 & + & 2x_4 & + & 3x_5 & = & 1 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & + & x_4 & + & 2x_5 & = & 3 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & & & = & -7 \\ 9x_1 & + & 6x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & + & 2x_5 & = & 2 \end{array}$$

4. Určete matici  $\mathcal{P}_{\mathcal{D} \leftarrow \mathcal{B}}$ , kde  $\mathcal{B}$  a  $\mathcal{D}$  jsou dané uspořádané báze vektorového prostoru  $V$ :

$$V = \mathbb{P}_2, \mathcal{B} = \{x, 1+x, x^2\}, \mathcal{D} = \{2, x+3, x^2-1\}$$

5. Najděte charakteristický polynom, vlastní čísla a vlastní vektory matice  $\begin{pmatrix} 7 & 0 & -4 \\ 0 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & -2 \end{pmatrix}$





1. Zjistěte, zda ve vektorovém prostoru  $\mathbb{V} = (\mathbb{R}^3, +)$  lze definovat skalární součin vztahem  $\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle = 3u_1v_1 - u_2v_1 + 2u_2v_2 + u_1v_3 + u_3v_1 + u_3v_3$ , kde  $\underline{u} = (u_1, u_2, u_3)$ ,  $\underline{v} = (v_1, v_2, v_3)$ .

2. Jsou-li  $A, B$  regulární zaměnitelné (?) matice, ukažte, že jsou zaměnitelné také matice  $A^{-1}, B, A, B^{-1}, A^{-1}, B^{-1}$ .



3. Řešte systém lineárních rovnic  $\begin{matrix} x & - & by & = & 1 \\ x & + & ay & = & 3 \end{matrix}$  v závislosti na parametrech  $a, b \in \mathbb{R}$ .

4. Zjistěte, zda přímky  $p_1 : \begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x - 3y + 2z - 14 = 0 \end{cases}$  a  $p_2 : \begin{cases} x + 5y - 6z + 34 = 0 \\ 6x - 2y - z - 9 = 0 \end{cases}$  jsou rovnoběžné nebo různoběžné<sup>2</sup>.

---

<sup>2</sup>Na fotce se rovněž objevila i další nečitelná "běžnost".

5. Ke kulové ploše  $\mathcal{S} : x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 4z - 205 = 0$  ved'te tečné roviny rovnoběžné s rovinou  $\rho : 10x - 11y - 2z + 3 = 0$ .



1. Rozhodněte, zda  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  dané vztahem  $f(x) = [x + 1, x - 1]$  je injektivní, surjektivní nebo bijektivní.
2. Nechť  $A$  je čtvercová matice,  $k \in \mathbb{R}, k \neq 0$  a nechť  $A^2 = kA = kA$ . Ukažte, že matice  $A$  je regulární, právě když  $A = k \cdot I$ .

3. Řešte rovnice v závislosti na parametru  $\lambda$ :

$$\begin{array}{ccccccccc} 2x_1 & + & 5x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & = & 2 \\ 4x_1 & + & 6x_2 & + & 3x_3 & + & 5x_4 & = & 4 \\ 4x_1 & + & 14x_2 & + & x_3 & + & 7x_4 & = & 4 \\ 2x_1 & - & 3x_2 & + & 3x_3 & + & \lambda x_4 & = & 7 \end{array}$$

4. Najděte roviny symetrie různoběžných rovin  $\rho_1 : 2x + 5y - 5z + 16 = 0$  a  $\rho_2 : 2x - 7y - z + 8 = 0$ .

5. Určete rovnici kuželové plochy  $\mathcal{S}$  s vrcholem  $V = [-1, 1, 8]$  a řídící křivkou  $L : x^2 + y^2 - 4 = 0, z - 4 = 0$ .

1. Určete vlastní čísla a vlastní prostory matice  $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 \\ -4 & -9 & -6 \\ 6 & 15 & 10 \end{pmatrix}$

2. Necht'  $A, B$  jsou diagonální matice téhož řádu. Ukažte, že  $AB$  je též diagonální a že matice  $A, B$  jsou zaměnitelné.

3. Řešte systém lineárních rovnic:

$$\begin{array}{rrrrrr} 3x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & + & 2x_4 & = & 2 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & + & 5x_4 & = & 3 \\ 9x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & - & 5x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & 5 \\ 7x_1 & + & x_2 & + & 6x_3 & - & 1x_4 & = & 7 \end{array}$$

4. Určete rovnice dvou navzájem kolmých rovin  $\delta_1, \delta_2$  procházejících přímkou  $p : \begin{cases} 3x + y - z - 4 = 0 \\ x - 2y + 4z - 2 = 0 \end{cases}$  z nichž první prochází bodem  $A = [2, -3, 4]$ .



5. Určete rovnice povrchových přímek hyperbolického paraboloidu  $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} - z = 0$ , které jsou rovnoběžné s rovinou  $\delta : 3x + 2y - 4z = 0$ . Určete také jejich průsečík a rovinu, která je jimi určena.



1. Je dáno zobrazení  $f : Z \times N \rightarrow Q, f([m, n]) = \frac{m}{n}$ . Určete, zda je dané zobrazení injekce, surjekce nebo bijekce.

2. Určete všechny matice  $X$  pro něž platí  $AX = O = XA$ , kde  $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ -2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ .

3. Řešte systém rovnic s parametrem  $a$ :

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & - & x_2 & - & x_3 & - & 3x_4 & = & 2 \\ 4x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 7x_4 & = & 1 \\ x_1 & - & 3x_2 & - & 8x_3 & - & 22x_4 & = & 9 \\ x_1 & - & 3x_2 & + & 7x_3 & + & 17x_4 & = & a \end{array}$$

4. Ukažte, že přímky  $p : \begin{cases} 3x + 2y - z + 1 = 0 \\ x + y - 3z + 3 = 0 \end{cases}$  a  $q : \begin{cases} 5x + y + 4z - 3 = 0 \\ 2x + y + 2z - 2 = 0 \end{cases}$  leží v téže rovině a napište její rovnici.

5. Najděte rovnici kulové plochy, která prochází body  $A = [2, -4, 2]$ ,  $B = [-4, 8, 2]$ ,  $C = [5, -1, 14]$ ,  $D = [-7, -4, 5]$ .

1. Grupoid  $(R, \cdot)$ , kde  $x \cdot y = (x + y)(1 + xy)$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$ . Ověřte jestli je asociativní, komutativní, jestli existuje jednička grupoidu. Jestliže ano, určete inverzní prvky.

2. Je dána matice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ . Vypočtěte matice  $B = (I + A)(I - A)^{-1}$ ,  $C = (I - A)^{-1}(I + A)$ , pokud existují.

3. Čemu se musí rovnat  $\lambda$ , aby systém rovnic měl řešení? Určete všechna jeho řešení pro tuto hodnotu  $\lambda$ .

$$\begin{array}{ccccccccc} 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & 4x_4 & = & 2 \\ x_1 & + & 7x_2 & - & 4x_3 & + & 11x_4 & = & \lambda \end{array}$$

4. Najděte přímku  $q$ , která je kolmým průmětem přímky  $p : \begin{cases} x = 2 + 7t \\ y = -1 - 4t \\ z = 1 - 6t \end{cases}$ ,  $t \in \mathbb{R}$  na rovinu  $\rho : x - 2y - z + 8 = 0$ .

5. Najděte rovnice rotačních kuželových ploch, jejichž osa je osa  $z$ , jež procházejí bodem  $M = [6, 8, -3]$  a tvořící přímky svírají s osou úhel  $\frac{\pi}{4}$ .