2014 - 1

1. Napište obecnou rovnici přímky $p : x = 2 - t, y = 1 + 3t,\ t \in \mathbb{R}$.

2. Napište parametrické vyjádření přímky určené v $\mathbb{R}^3$ rovnicemi

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & z & = & 2 \\ 2x & + & y & - & z & = & 5 \end{array}$$

3. Nechť $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, $(r \cdot f)(x) = r \cdot f(x)$, pro každé $f, g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}, r, x \in \mathbb{R}$.
   (a) Ukažte, že $(V, +, \cdot)$ je vektorový prostor.
   (b) Rozhodněte, zda množina $U = \{f \in V | f(0) = f(1)\}$ je podprostorem $(V, +, \cdot)$.

4. Zjistěte, zda ve vektorovém prostoru $\mathbb{P}_3, +, \cdot$ vektory $\mathbf{u} = x^3 + x$, $\mathbf{v}x^2 + 1, \mathbf{w} = x^3 - x^2 + x + 1$
   (a) jsou lineárně nezávislé;
   (b) tvoří bázi.

5. Nechť A je diagonální matice řádu n. Formulujte pravidlo pro výpočet součinů $X \cdot A$, $A \cdot Y$, kde X, Y jsou libovolné matice typu $m \times n$, $n \times m$.

6. Vypočtěte determinant $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

2014 - 2

1. Pomocí inverzní matice určete matici X, pro kterou platí $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}$

2. Cramerovým pravidlem řešte následující systém lineárních rovnic:

$$\begin{array}{ccccccc} 5x & + & y & - & z & = & -7 \\ 2x & - & y & - & 2x & = & 6 \\ 3x & & & + & 2z & = & -7 \end{array}$$

3. Řešte systém lineárních rovnic, víte-li, že má řešení $[1, 8, 13, 0, -34]$:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
6x_1 & + & 4x_2 & + & 5x_3 & + & 2x_4 & + & 3x_5 & = & 1 \\
3x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & + & x_4 & + & 2x_5 & = & 3 \\
3x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & & & = & -7 \\
9x_1 & + & 6x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & + & 2x_5 & = & 2
\end{array}$$

4. Určete matici $\mathcal{P}_{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{B}}$, kde $\mathcal{B}$ a $\mathcal{D}$ jsou dané uspořádané báze vektorového prostoru V:

$$V = \mathbb{P}_2,\ \mathcal{B} = \{x, 1 + x, x^2\},\ \mathcal{D} = \{2, x + 3, x^2 - 1\}$$

5. Najděte charakteristický polynom, vlastní čísla a vlastní vektory matice $\begin{pmatrix} 7 & 0 & -4 \\ 0 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

2011 - 1

1. Zjistěte, zda ve vektorovém prostoru $\mathbb{V} = (\mathbb{R}^3, +)$ lze definovat skalární součin vztahem $\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle = 3u_1v_1 - u_2v_1 + 2u_2v_2 + u_1v_3 + u_3v_1 + u_3v_3$, kde $\underline{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\underline{v} = (v_1, v_2, v_3)$.

2. Jsou-li A, B regulární zaměnitelné (?) matice, ukažte, že jsou zaměnitelné také matice $A^{-1}, B, A, B^{-1}, A^{-1}, B^{-1}$.

3. Řešte systém lineárních rovnic $\begin{array}{ccccc} x & - & by & = & 1 \\ x & + & ay & = & 3 \end{array}$ v závislosti na parametrech $a, b \in \mathbb{R}$.

4. Zjistěte, zda přímky $p_1 : \begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x - 3y + 2z - 14 = 0 \end{cases}$ a $p_2 : \begin{cases} x + 5y - 6z + 34 = 0 \\ 6x - 2y - z - 9 = 0 \end{cases}$ jsou rovnoběžné nebo různoběžné[1].

[1] Na fotce se rovněž objevila i další nečitelná "-běžnost".

5. Ke kulové ploše $\mathcal{S} : x^2+y^2+z^2-8x-4z-205=0$ veďte tečné roviny rovnoběžné s rovinou $\rho : 10x-11y-2z+3=0$.

2011 - 2

2009 - 1

1. Rozhodněte, zda $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$f dané vztahem $f(x) = [x + 1, x - 1]$ je injektivní, subjektivní nebo bijektivní.

2. Nechť A je čtvercová matice, $k \in \mathbb{R}, k \neq 0$ a nechť $A^2 = kA =$ kA. Ukažte, že matice A je regulární, právě když $A = k * I$.

3. Řešte rovnice v závislosti na parametru λ:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x_1 & + & 5x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & = & 2 \\ 4x_1 & + & 6x_2 & + & 3x_3 & + & 5x_4 & = & 4 \\ 4x_1 & + & 14x_2 & + & x_3 & + & 7x_4 & = & 4 \\ 2x_1 & - & 3x_2 & + & 3x_3 & + & \lambda x_4 & = & 7 \end{array}$$

4. Najděte roviny symetrie různoběžných rovin $\rho_1 : 2x + 5y - 5z + 16 = 0$ a $\rho_2 : 2x - 7y - z + 8 = 0$.

5. Určete rovnici kuželové plochy $\mathcal{S}$ s vrcholem $V = [-1, 1, 8]$ a řídící křivkou $L : x^2 + y^2 - 4 = 0, z - 4 = 0$.

2009 - 2

1. Určete vlastní čísla a vlastní prostory matice $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 \\ -4 & -9 & -6 \\ 6 & 15 & 10 \end{pmatrix}$

2. Nechť A, B jsou diagonální matice téhož řádu. Ukažte, že AB je též diagonální a že matice A, B jsou zaměnitelné.

3. Řešte systém lineárních rovnic:

$$\begin{array}{ccccccccc} 3x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & + & 2x_4 & = & 2 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & + & 5x_4 & = & 3 \\ 9x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & - & 5x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & 5 \\ 7x_1 & + & x_2 & + & 6x_3 & - & 1x_4 & = & 7 \end{array}$$

4. Určete rovnice dvou navzájem kolmých rovin δ_1, δ_2 procházejících přímkou $p : \left\{ \begin{array}{l} 3x + y - z - 4 = 0 \\ x - 2y + 4z - 2 = 0 \end{array} \right.$ z nichž první prochází bodem $A = [2, -3, 4]$.

5. Určete rovnice povrchových přímek hyperbolického paraboloidu $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} - z = 0$, které jsou rovnoběžné s rovinou $\delta : 3x + 2y - 4z = 0$. Určete také jejich průsečík a rovinu, která je jimi určena.

2008 - 1

2007 - 1

1. Je dáno zobrazení $f : Z \times N \to Q, f([m, n]) = \frac{m}{n}$. Určete, zda je dané zobrazení injekce, surjekce nebo bijekce.

2. Určete všechny matice X pro něž platí $AX = O = XA$, kde $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ -2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Řešte systém rovnic s parametrem a:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & - & x_2 & - & x_3 & - & 3x_4 & = & 2 \\ 4x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 7x_4 & = & 1 \\ x_1 & - & 3x_2 & - & 8x_3 & - & 22x_4 & = & 9 \\ x_1 & - & 3x_2 & + & 7x_3 & + & 17x_4 & = & a \end{array}$$

4. Ukažte, že přímky $p : \left\{ \begin{array}{l} 3x + 2y - z + 1 = 0 \\ x + y - 3z + 3 = 0 \end{array} \right.$ a $q : \left\{ \begin{array}{l} 5x + y + 4z - 3 = 0 \\ 2x + y + 2z - 2 = 0 \end{array} \right.$ leží v téže rovině a napište její rovnici.

5. Najděte rovnici kulové plochy, která prochází body $A = [2, -4, 2], B = [-4, 8, 2], C = [5, -1, 14], D = [-7, -4, 5]$.

2007 - 2

1. Grupoid $(R, \cdot)$, kde $x \cdot y = (x+y)(1+xy)$, $x, y \in \mathbb{R}$. Ověřte jestli je asociativní, komutativní, jestli existuje jednička grupoidu. Jestliže ano, určete inverzní prvky.

2. Je dána matice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Vypočtěte matice $B = (I+A)(I-A)^{-1}$, $C = (I-A)^{-1}(I+A)$, pokud existují.

3. Čemu se musí rovnat λ, aby systém rovnic měl řešení? Určete všechna jeho řešení pro tuto hodnotu λ.

$$\begin{array}{ccccccccc} 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & 4x_4 & = & 2 \\ x_1 & + & 7x_2 & - & 4x_3 & + & 11x_4 & = & \lambda \end{array}$$

4. Najděte přímku q, která je kolmým průmětem přímky $p : \begin{cases} x = 2 + 7t \\ y = -1 - 4t \\ z = 1 - 6t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ na rovinu $\rho : x - 2y - z + 8 = 0$.

5. Najděte rovnice rotačních kuželových ploch, jejichž osa je osa z, jež procházejí bodem $M = [6, 8, -3]$ a tvořící přímky svírají s osou úhel $\frac{\pi}{4}$.