2021 - 1

1. Vektorový podprostor W je podprostorem $\mathbb{R}^5$ a platí $\left\{ \begin{array}{l} w_1 + w_2 + w_3 = 3w_4 + 6w_5 \\ w_1 + w_3 + w_5 = -2w_4 \end{array} \right.$. Napište ortogonální bázi.

2. Řešte reálnou soustavu lineárních rovnic v $\mathbb{R}$: $\begin{array}{ccccccccc} 4a & + & b & + & 2c & + & d & = & -1 \\ 6a & + & 3b & + & 4c & + & 2d & = & -4 \\ 6a & + & 7b & - & c & - & d & = & 11 \\ 8a & + & 11b & + & 2c & + & 2d & = & -2 \end{array}.$

3. ρ prochází $[5, 0, 2], [6, -2, 4], [3, 8, 1]$, p prochází $D = [1, 1, 1]$ a je kolmá na ρ. E leží na p, vzdálenost od ρ je $12\sqrt{2}$. C, E prochází přímka q, určete odchylku p a q.

4. $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & a & 0 & 0 & a & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ a & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Pro jaké hodnoty a je matice M regulární?

5. Najděte matice homomorfismu $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\mathcal{B} = ((1,1,1),(i,i,0),(i,0,0))$, $\overline{\mathcal{B}} = ((1,1,i),(1,i,0),(1,0,0)$, $\varphi(z_1,z_2,z_3) = (z_1 - z_2, 0, iz_2 - z_3))$.

6. Vlastní vektory matice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ generují podprostor $V \subseteq \mathbb{R}^3$. Najděte bázi $W : W \oplus V = \mathbb{R}^3$.[1]

[1] $\oplus$ značí nulový průnik.

2021 - 2

1. V $\mathbb{R}^6$ máme vektorové pole V, W, kde $V = \{(a, b, a, 2a, 3a, 4a) | a, b \in \mathbb{R}\}$. W generuje $\overrightarrow{w_1} = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1)$, $\overrightarrow{w_2} = (0, 1, 0, 0, 0, 1)$, a $\overrightarrow{w_3} = (\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4})$. Najděte ortogonální bází $V + W$.

2. Pro jaké α je reálná matice M regulární? $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -8\alpha \\ 1 & \alpha^2 & 1 & \alpha^2 \\ 1 & \alpha & 1 & -\alpha \\ \alpha^4 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. V $\mathbb{C}$ řešte
$$\begin{array}{rcrcrcr} (1+i)a & + & (2+i)b & + & (3+i)c & = & -3i \\ (1+i)a & + & (1+2i)b & + & (1+3i)c & = & 1 \\ (3-2i)a & + & (1-3i)b & + & (2-i)c & = & 0 \end{array}$$

4. Najděte matici přechodu v $\mathbb{F}_7^3$ z báze $\beta = ((1,0,5),(1,0,4),(0,1,0))$ do báze $\gamma = ((1,0,2),(1,0,3),(0,4,4))$.

5. Přímka p prochází body $[1, 1, 0], [2, 3, 3]$. Přímka q prochází body $[4, 0, -1], [8, 2, 2]$. Ověřte, že nejsou mimoběžky.

6. Najděte vlastní vektor matice M, který neleží v žádné z souřadnicových (?) rovin. $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

2021 - 3

1. V, W jsou vektorové podprostory $\mathbb{R}^6$. V generuje $(1,2,3,-1,8,6),(1,8,5,-7,23,27),(2,-2,4,4,1,-9)$. W generuje $(-3,6,-5,-9,6,24),(1,-10,-1,11,-22,-36),(7,2,17,5,26,0)$. Najděte ortogonální bázi $V \cap W$.

2. V $\mathbb{R}$ řešte soustavu
$$\begin{array}{ccccccccc} 4a & + & b & + & c & + & d & = & -6 \\ 7a & + & 2b & - & 2c & - & d & = & 5 \\ 8a & - & 2b & + & 14c & + & 13d & = & 7 \\ 28a & + & b & + & c & + & 7d & = & -12 \end{array}$$

3. Mějme matici $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a\sqrt{3} \\ 1 & 1 & \sqrt{3}(1+a) & a\sqrt{3} \\ 1 & \sqrt{3}(2+a) & \sqrt{3}(1+a) & a\sqrt{3} \\ \sqrt{3}(3+a) & \sqrt{3}(2+a) & \sqrt{3}(1+a) & a\sqrt{3} \end{pmatrix}$. Vypočítejte $|A|$ pro $a = \frac{\sqrt{3}}{3}$ a $a = \frac{\sqrt{3}}{3} - 1$.

4. V $\mathbb{F}_1 1$ řešte $X * \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \\ 4 & 8 \\ 5 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 7 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$.

5. Vzájemná poloha roviny ρ a přímky p jsou $\rho : A = [3, 0, 2], B = [4, -1, 5], C = [5, -3, -1]$, $p : K = [2, -6, -64]$, $\overrightarrow{u} = (0, 15, 101)$. Pokud jsou rovnoběžné, určete průnik, jinak určete vzdálenost.

6. Najděte průměr vlastních hodnot matice $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$.

2021 - 4

1. V $\mathbb{R}^4$ jsou vektorové podprostory V, W, kde V generuje vektory $(1,1,-2,3),(4,-1,2,-2)$, a W generuje vektory $(3,2,-5,0),(1,-4,8,-11)$. Najděte ortogonální bázi $V+W$.

2. V $\mathbb{R}$ jsou dány následující rovnice. Spočtěte $b-c$.

$$\begin{array}{ccccccccc}
3a & + & 4b & + & 5c & + & 6d & = & 10 \\
3a & + & 5b & + & 7c & + & 9d & = & -33 \\
5a & + & 7b & + & 10c & + & 272d & = & 28 \\
5a & + & 9b & + & 13c & + & 276d & = & \frac{8}{3}
\end{array}$$

3. $U = M^4, V = M^3, U = \begin{pmatrix} 1 & 1+2\sqrt{7} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3-2\sqrt{7} & 3 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3+10\sqrt{7} & 1 \end{pmatrix}$

4. Přímka p prochází body $A = [7,2,2], B = [4,-1,1]$. Přímka q prochází body $C = [8,0,-1], D = [2,12,-3]$. Ověřte, že jde o různoběžky a spočtěte jejich ?.

5. V $\mathbb{F}_7$ je matice $S = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Spočtěte S^{12}.

6. $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Napište dva lineárně nezávislé vlastní vektory matice U s třetí souřadnicí rovnou 6.

2014 - 1

1. Napište obecnou rovnici přímky $p: x = 2 - t, y = 1 + 3t,\ t \in \mathbb{R}$.

2. Napište parametrické vyjádření přímky určené v $\mathbb{R}^3$ rovnicemi

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & z & = & 2 \\ 2x & + & y & - & z & = & 5 \end{array}$$

3. Nechť $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, $(r \cdot f)(x) = r \cdot f(x)$, pro každé $f, g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}, r, x \in \mathbb{R}$.
   (a) Ukažte, že $(V, +, \cdot)$ je vektorový prostor.
   (b) Rozhodněte, zda množina $U = \{f \in V | f(0) = f(1)\}$ je podprostorem $(V, +, \cdot)$.

4. Zjistěte, zda ve vektorovém prostoru $\mathbb{P}_3, +, \cdot$ vektory $\mathbf{u} = x^3 + x$, $\mathbf{v}x^2 + 1, \mathbf{w} = x^3 - x^2 + x + 1$
   (a) jsou lineárně nezávislé;
   (b) tvoří bázi.

5. Nechť A je diagonální matice řádu n. Formulujte pravidlo pro výpočet součinů $X \cdot A$, $A \cdot Y$, kde X, Y jsou libovolné matice typu $m \times n$, $n \times m$.

6. Vypočtěte determinant $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

2014 - 2

1. Pomocí inverzní matice určete matici X, pro kterou platí $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}$

2. Cramerovým pravidlem řešte následující systém lineárních rovnic:

$$\begin{array}{ccccccc} 5x & + & y & - & z & = & -7 \\ 2x & - & y & - & 2x & = & 6 \\ 3x & & & + & 2z & = & -7 \end{array}$$

3. Řešte systém lineárních rovnic, víte-li, že má řešení $[1, 8, 13, 0, -34]$:

$$\begin{array}{ccccccccccc} 6x_1 & + & 4x_2 & + & 5x_3 & + & 2x_4 & + & 3x_5 & = & 1 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & + & x_4 & + & 2x_5 & = & 3 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & & & = & -7 \\ 9x_1 & + & 6x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & + & 2x_5 & = & 2 \end{array}$$

4. Určete matici $\mathcal{P}_{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{B}}$, kde $\mathcal{B}$ a $\mathcal{D}$ jsou dané uspořádané báze vektorového prostoru V:

$$V = \mathbb{P}_2,\ \mathcal{B} = \{x, 1+x, x^2\},\ \mathcal{D} = \{2, x+3, x^2-1\}$$

5. Najděte charakteristický polynom, vlastní čísla a vlastní vektory matice $\begin{pmatrix} 7 & 0 & -4 \\ 0 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

2013 - 1

2012 - 1

2011 - 1

1. Zjistěte, zda ve vektorovém prostoru $\mathbb{V} = (\mathbb{R}^3, +)$ lze definovat skalární součin vztahem $\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle = 3u_1v_1 - u_2v_1 + 2u_2v_2 + u_1v_3 + u_3v_1 + u_3v_3$, kde $\underline{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\underline{v} = (v_1, v_2, v_3)$.

2. Jsou-li A, B regulární zaměnitelné (?) matice, ukažte, že jsou zaměnitelné také matice $A^{-1}, B, A, B^{-1}, A^{-1}, B^{-1}$.

3. Řešte systém lineárních rovnic $\begin{array}{ccccc} x & - & by & = & 1 \\ x & + & ay & = & 3 \end{array}$ v závislosti na parametrech $a, b \in \mathbb{R}$.

4. Zjistěte, zda přímky $p_1 : \left\{ \begin{array}{l} 2x + y - z = 0 \\ x - 3y + 2z - 14 = 0 \end{array} \right.$ a $p_2 : \left\{ \begin{array}{l} x + 5y - 6z + 34 = 0 \\ 6x - 2y - z - 9 = 0 \end{array} \right.$ jsou rovnoběžné nebo různoběžné[2].

[2]Na fotce se rovněž objevila i další nečitelná "-běžnost".

5. Ke kulové ploše $\mathcal{S} : x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 4z - 205 = 0$ veďte tečné roviny rovnoběžné s rovinou $\rho : 10x - 11y - 2z + 3 = 0$.

2009 - 1

1. Rozhodněte, zda $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$f dané vztahem $f(x) = [x + 1, x - 1]$ je injektivní, subjektivní nebo bijektivní.

2. Nechť A je čtvercová matice, $k \in \mathbb{R}, k \neq 0$ a nechť $A^2 = kA =$ kA. Ukažte, že matice A je regulární, právě když $A = k * I$.

3. Řešte rovnice v závislosti na parametru λ:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl}
2x_1 & + & 5x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & = & 2 \\
4x_1 & + & 6x_2 & + & 3x_3 & + & 5x_4 & = & 4 \\
4x_1 & + & 14x_2 & + & x_3 & + & 7x_4 & = & 4 \\
2x_1 & - & 3x_2 & + & 3x_3 & + & \lambda x_4 & = & 7
\end{array}$$

4. Najděte roviny symetrie různoběžných rovin $\rho_1 : 2x + 5y - 5z + 16 = 0$ a $\rho_2 : 2x - 7y - z + 8 = 0$.

5. Určete rovnici kuželové plochy $\mathcal{S}$ s vrcholem $V = [-1, 1, 8]$ a řídící křivkou $L : x^2 + y^2 - 4 = 0, z - 4 = 0$.

2009 - 2

1. Určete vlastní čísla a vlastní prostory matice $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 \\ -4 & -9 & -6 \\ 6 & 15 & 10 \end{pmatrix}$

2. Nechť A, B jsou diagonální matice téhož řádu. Ukažte, že AB je též diagonální a že matice A, B jsou zaměnitelné.

3. Řešte systém lineárních rovnic:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
3x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & + & 2x_4 & = & 2 \\
2x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & + & 5x_4 & = & 3 \\
9x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & - & 5x_4 & = & 1 \\
2x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & 5 \\
7x_1 & + & x_2 & + & 6x_3 & - & 1x_4 & = & 7
\end{array}$$

4. Určete rovnice dvou navzájem kolmých rovin δ_1, δ_2 procházejících přímkou $p : \left\{ \begin{array}{l} 3x + y - z - 4 = 0 \\ x - 2y + 4z - 2 = 0 \end{array} \right.$ z nichž první prochází bodem $A = [2, -3, 4]$.

5. Určete rovnice povrchových přímek hyperbolického paraboloidu $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} - z = 0$, které jsou rovnoběžné s rovinou $\delta : 3x + 2y - 4z = 0$. Určete také jejich průsečík a rovinu, která je jimi určena.

2008 - 1

2007 - 1

1. Je dáno zobrazení $f : Z \times N \to Q, f([m, n]) = \frac{m}{n}$. Určete, zda je dané zobrazení injekce, surjekce nebo bijekce.

2. Určete všechny matice X pro něž platí $AX = O = XA$, kde $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ -2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Řešte systém rovnic s parametrem a:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl}
x_1 & - & x_2 & - & x_3 & - & 3x_4 & = & 2 \\
4x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 7x_4 & = & 1 \\
x_1 & - & 3x_2 & - & 8x_3 & - & 22x_4 & = & 9 \\
x_1 & - & 3x_2 & + & 7x_3 & + & 17x_4 & = & a
\end{array}$$

4. Ukažte, že přímky $p : \left\{ \begin{array}{l} 3x + 2y - z + 1 = 0 \\ x + y - 3z + 3 = 0 \end{array} \right.$ a $q : \left\{ \begin{array}{l} 5x + y + 4z - 3 = 0 \\ 2x + y + 2z - 2 = 0 \end{array} \right.$ leží v téže rovině a napište její rovnici.

5. Najděte rovnici kulové plochy, která prochází body $A = [2, -4, 2], B = [-4, 8, 2], C = [5, -1, 14], D = [-7, -4, 5]$.

2007 - 2

1. Grupoid $(R, \cdot)$, kde $x \cdot y = (x+y)(1+xy)$, $x, y \in \mathbb{R}$. Ověřte jestli je asociativní, komutativní, jestli existuje jednička grupoidu. Jestliže ano, určete inverzní prvky.

2. Je dána matice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Vypočtěte matice $B = (I+A)(I-A)^{-1}$, $C = (I-A)^{-1}(I+A)$, pokud existují.

3. Čemu se musí rovnat λ, aby systém rovnic měl řešení? Určete všechna jeho řešení pro tuto hodnotu λ.

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & 4x_4 & = & 2 \\ x_1 & + & 7x_2 & - & 4x_3 & + & 11x_4 & = & \lambda \end{array}$$

4. Najděte přímku q, která je kolmým průmětem přímky $p : \left\{ \begin{array}{l} x = 2 + 7t \\ y = -1 - 4t \\ z = 1 - 6t \end{array} \right. , t \in \mathbb{R}$ na rovinu $\rho : x - 2y - z + 8 = 0$.

5. Najděte rovnice rotačních kuželových ploch, jejichž osa je osa z, jež procházejí bodem $M = [6, 8, -3]$ a tvořící přímky svírají s osou úhel $\frac{\pi}{4}$.