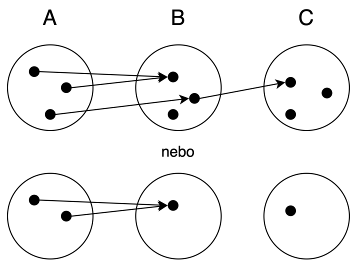
2022 - 0 (Řešeno společně na tabuli na poslední přednášce.)

1. Napište definici grupy.
2. Mějme zobrazení $f : A \to B$ a zobrazení $g : B \to C$. Dále máme zobrazení $h = g \circ f$ (g po f). Je-li h injekce, plyne z toho, že f a g jsou injekce?
3. Napište příklad vektorového prostoru, kde jsou jen 2 vektory.
4. Jakých hodnot může nabývat stopa reálné antisymetrické matice?
5. Napište definici vnitřního součinu na reálném vektorovém prostoru.
6. Uveďte zcela přesně podmínku, kdy je soustava lineárních rovnic řešitelná.

---

1. Grupa je množina s jednou operací, pro kterou platí
    1. asociativita
    2. existence neutrálního prvku
    3. pro všechny členy množiny existuje inverzní prvek
2. Neplyne.



3. Např. $\mathbb{F}_2$ s vektory $(0), (1)$.
4. Pokud je matice asymetrická, platí, že $a_{i,j} = -a_{j,i}$. Pro diagonálu tedy musí platit, že je nulová, protože $a = -a$. Stopa je tedy 0.
5. Pro $V \in \mathbb{R}$, $V \times V \to \mathbb{R}$ splňující
    - Aditivitu
    - Homogenitu
    - Symetrii
    - Pozitivní definitnost
6. Musí platit, že hodnost matice je stejná jako hodnot rozšířené matice.

2021 - 1

1. Navrhněte dva vektorové prostory z $\mathbb{R}^3$ tak aby platilo $\texttt{dim}V = \texttt{dim}W = \texttt{dim}(V + W)$.
2. Rozhodněte, zda matice definována jako $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ tvoří spolu s operací násobení grupu.
3. Definujte Dedekindův řez.
4. Definujte matici řádu 2 symetrické bilineární formy, která je negativně semidefinitní a zároveň není negativně definitní.
5. Platí, že stopa $A^T + B$ je rovná stopě $A + B^T$?
6. Napište všechny matice řádu $\mathbb{R}^{\nVdash}$ pro které platí, že jsou si zároveň inverzní maticí.

---

1. $V = (0, 0, 0), W = (0, 0, 0)$
2. Ne, chybí neutrální prvek.
3.
4.
5. Ano, transponování nemění prvky na diagonále.
6. $(-1), (1)$.

2021 - 2

1. Dokažte, že každá čtvercová matice je vyjádřitelná jako součet symetrické a antisymetrické matice.
2. Uveďte příklad na čtvercovou matici 3. řádu, která není diagonální a má jen 1 vlastní hodnotu, a to 0.
3. Dokažte, že jádro homomorfismu $\gamma : U \to V$ je podprostor U.
4. Dokažte, že relace Δ je ekvivalence pokud platí, že $x \Delta y \Leftrightarrow x \sim y \wedge y \sim x$ kde operace $\sim$ je reflexivní i tranzitivní.
5. Je $\mathbb{Z} \to \mathbb{F}_2^n$ surjektivní zobrazení?
6. Napište 3 různé lineární rovnice se 4 neznámými tak, aby soustava byla neřešitelná.

2021 - 3

1. Napište definici uspořádaného pole.
2. Napište definici lineární kombinace libovolných vektorů.
3. Napište důkaz toho, že jádro homomorfismu je triviální pokud je Homomorfizmus injektivní.
4. $\mathbb{Q}^*$ jsou nenulové racionální čísla s operací děleno. Jedná se o grupu?
5. Napište kolmý vektor na vektory $(2, -5, 1), (7, -12, 2)$.
6. Platí, že všechny antisymetrické matice 2. řádu mají jen imaginární vlastní hodnoty?
