T. D. n° 1
Régression linéaire

Résumé

Ce document est le TD n° 1 du module Modèle pour la datascience. Il reprend rapidement des éléments du cours et propose une mise en pratique interactive de la régression linéaire.

1 Prédire des films appréciés

La démarche basée sur les fréquences est extrêmement séduisante par sa simplicité. Un simple comptage permet de produire les probabilités conditionnelles et d'en déduire les règles d'associations. Toutefois, elle n'est pas viable en situation réelle. Pas assez précise et statique, on préfère la technique de la régression est généralement utilisée pour construire des modèles prédicatifs. La régression est un ensemble de méthodes statistiques très utilisées pour analyser la relation d'une variable par rapport à une ou plusieurs autres. En apprentissage automatique, on distingue les problèmes de régression des problèmes de classification. Ainsi, on considère que les problèmes de prédiction d'une variable quantitative sont des problèmes de régression tandis que les problèmes de prédiction d'une variable qualitative sont des problèmes de classification. Certaines méthodes, comme la régression logistique, sont à la fois des méthodes de régression au sens où il s'agit de prédire la probabilité d'appartenir à chacune des classes et des méthodes de classification. Les applications sont nombreuses, certains touchent directement à la vie quotidienne :

- déterminer la viabilité d'un client sollicitant un crédit à partir de ses caractéristiques (ex : age, type d'emploi, niveau de revenu, autres crédits en cours, etc.).
- quantifier le risque de survenue d'un sinistre pour une personne sollicitant un contrat d'assurance.
- discerner les facteurs de risque de survenue d'une maladie cardio-vasculaire chez des patients (ex. l'âge, le sexe, le tabac, l'alcool, regarder les matches de l'équipe de France de foot, etc.).
- pour une enseigne de grande distribution, cibler les clients qui peuvent être intéressés par tel ou tel type de produit.

Vous souhaitez prédire les notes de films d'un utilisateur, à partir de la base de données d'une plateforme publique (type *Allociné*), produisant une notes moyenne, pour chaque film, à partir de toutes les notes données par l'ensemble des visiteurs de la plateforme. Le package *ggplot2* est le package qui va nous servir à faire les graphiques pour ce TD. Les graphiques issus de ce package ont un meilleur rendu : meilleure gestion de l'espace, des couleurs, légende insérée automatiquement. De plus, il est possible d'ajouter plus d'informations sur le graphique.

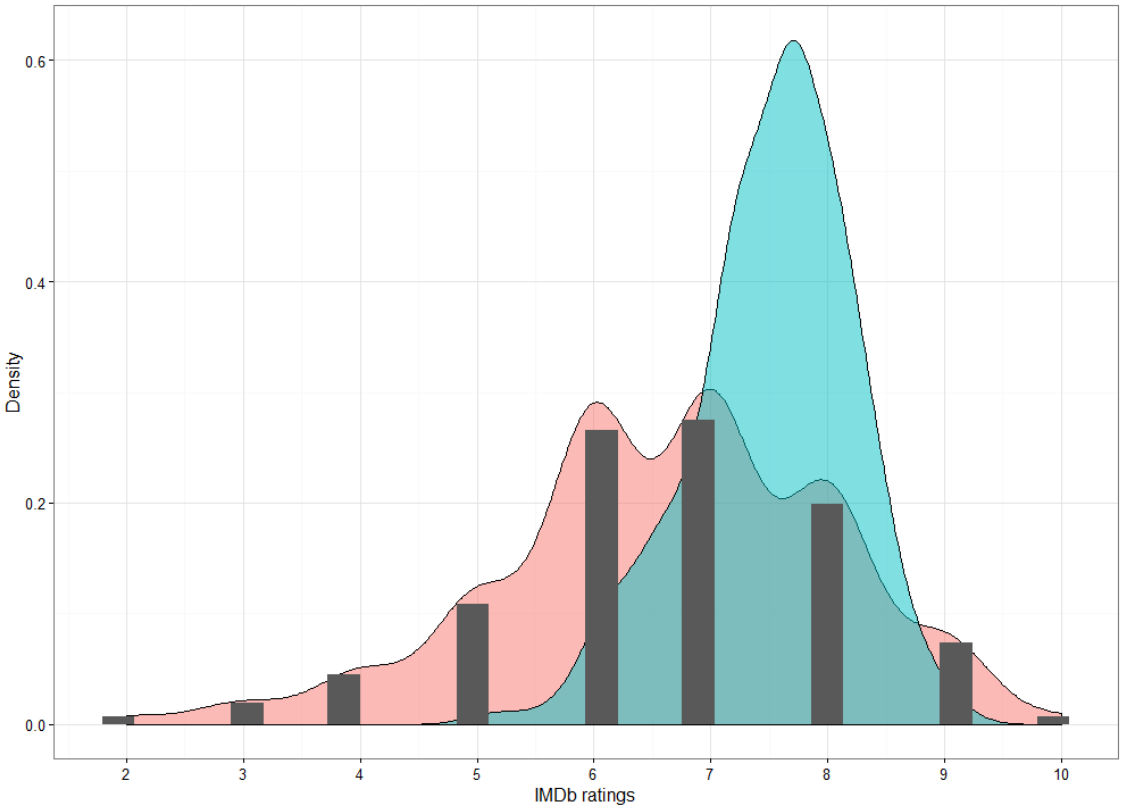
Commencez par charger votre jeu de données *MyData* : les données pour cet exercice, qui provient du site IMDb `http://www.imdb.com/`, sont les notes pour 442 films enregistrés. IMDb conserve les notes moyennes de film, construites par tous les utilisateurs dans un tableau qui contient des informations sur le titre du film, le réalisateur, sa durée, son année de sortie, le genre, la note moyenne (celle d'IMDb), et quelques autres variables moins intéressantes. Le fichier *Mydata.csv* contient ces informations ainsi que la note donnée par l'utilisateur qu'on souhaite observer. On souhaite en effet, prédire les notes que donnera cet utilisateur à des films, en se basant sur les notes que les autres ont déjà donné. La variable *IMDb.rating* correspond à la moyenne générale du film. La variable *You.rating* correspond à la note qu'a donnée notre utilisateur.

```
d <-read.csv("C:/Users/claey/Documents/cour/My TD/TD 6/MyData.csv",
    sep = ",")
```

La variable de résultat que vous voulez prédire est la note qui vas donnée par votre utilisateur (*You.rated*) pour chaque film. IMDb vous permet de noter des films de un à dix étoiles. Les demi-points et autres fractions ne sont pas autorisés. La note n'est donc évidemment pas une variable continue mais nous la traiterons comme telle pour ce TD. La Figure 1 illustre la distribution de fréquences (barres noires), la densité des scores de l'utilisateur (zone rouge) et de la densité des scores moyens d'IMDb (en bleu) pour les 442 observations dans les données.

```
#Figure 1
> p1 <-ggplot(d, aes(x=mine))+
  geom_density(alpha=0.5,aes(x=mine, y = ..density..,fill='blue'))+
  geom_density(alpha=0.5,aes(x=imdb, y = ..density..,fill='red'))+
  geom_histogram(aes(y=..count../sum(..count..)))+
  scale_x_continuous('IMDb ratings',breaks=seq(2,10,1))+
  scale_y_continuous('Density')+
  theme_bw()+theme(legend.position="none")
> p1
```

FIGURE 1 – Densité des scores



À vous !

a) Où se situe la moyenne des deux courbes ?

b) Estimez visuellement l'écart-type moyen.

c) Que pouvez-vous dire sur les notes de l'utilisateur (en bleu) ?

d) Que pouvez-vous dire sur les notes de IMDb (en rouge) ?

e) Essayez de justifier la différence entre des deux courbes.

1.1 Régression linéaire ordinaire

Vous allez commencer avec un modèle de régression linéaire ordinaire qui sera votre point de départ pour l'analyse. Ses résultats vous serviront de référence. Voici les estimations que *lm()* prévoit sur les notes de l'utilisateur à partir des scores moyens d'IMDb :

```
> summary(m1<-lm(mine~imdb, data=d))

Call:
lm(formula = mine ~ imdb, data = d)

Residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max
```

```
-5.2066 -0.7224  0.1808  0.7934  2.9871

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  -0.6387     0.6669  -0.958    0.339
imdb          0.9686     0.0884  10.957   <2e-16 ***
---
Signif. codes:  0    ***    0.001    **    0.01    *    0.05    .
       0.1         1

Residual standard error: 1.254 on 420 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.2223,    Adjusted R-squared:  0.2205
F-statistic: 120.1 on 1 and 420 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

À vous !

a) Définissez les caractéristiques de la fonction *lm()*.

b) Sur quelle base avez-vous entraîné votre modèle ?

c) Quelles variables utilisez-vous pour construire votre modèle ?

d) Quelle a été l'erreur maximale du modèle ?

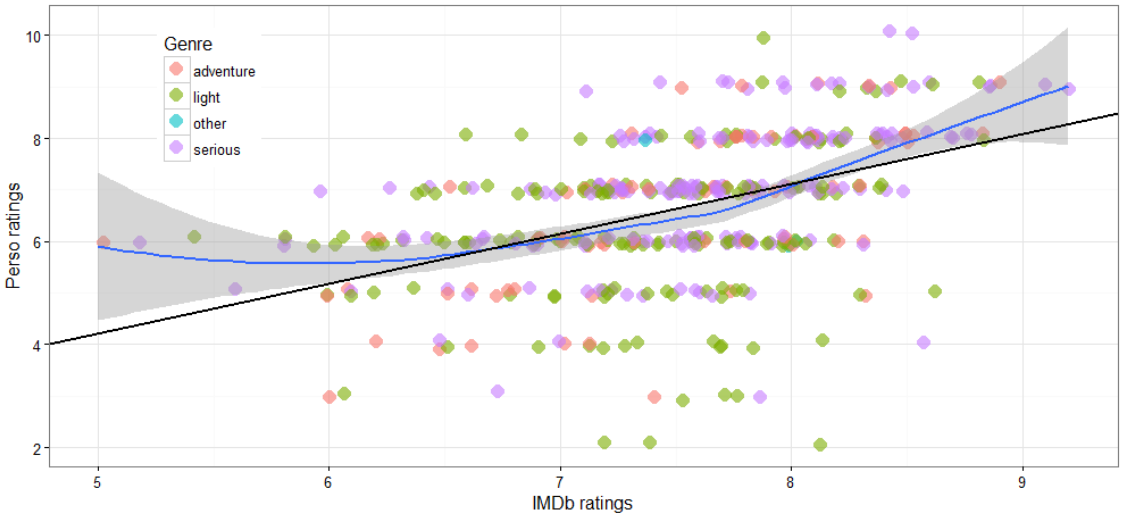
e) Commentez la qualité du modèle .

1.2 Corrélation

On décide d'afficher la relation entre les notes générales d'IMDb et celles de l'utilisateur.

```
#Figure 2
> p2 <- ggplot(d, aes(imdb, mine))+
  geom_point(position=position_jitter(width=0.1,height=.25),shape
     =16, size=4,alpha=0.6,
              aes(colour = new.genre, ))+
  stat_smooth(se = TRUE)+
  scale_x_continuous('IMDb ratings')+
  scale_y_continuous('Perso ratings')+
  theme_bw()+
  scale_colour_discrete(name="Genre")+
  scale_size_continuous(guide=FALSE)+
  theme(legend.position=c(0.15, 0.80))+
  geom_abline(size=1, aes(intercept=-0.6387, slope=0.9686))

> p2
```

FIGURE 2 – Regression linéaire



La ligne noire est la droite de la régression, la bleu montre un lissage de *loess* non-paramétrique qui suggère une certaine non-linéarité dans la relation que vous allez explorer plus tard.

À vous !

a) Testez si les variables *you.rating* et *imdb.rating* sont corrélées.

b) Cherchez l'utilité de la fonction *aes()*.

c) Sur quel genre de films peut-on dire que l'utilisateur est difficile ?

1.3 Erreur quadratique moyenne

L'erreur quadratique moyenne (MSE) est très utile pour comparer plusieurs estimateurs, notamment lorsque l'un d'eux est biaisé. Si les deux estimateurs à comparer sont sans biais, l'estimateur le plus efficace est simplement celui qui a la variance la plus petite. On peut effectivement exprimer l'erreur quadratique moyenne en fonction du biais de l'estimateur :

$$MSE(\hat{\theta}|\theta) = Biais^2(\hat{\theta}) + Var(\hat{\theta})$$

```
> sqrt(mean(residuals(m1)^2))
[1] 1.251231
```

À vous !

a) Comparez cette valeur avec celle que vous aviez avec la fonction *lm()*.

b) Quelle est l'utilité d'observer le MSE par rapport à la variance ?

1.4 Limites de prédiction

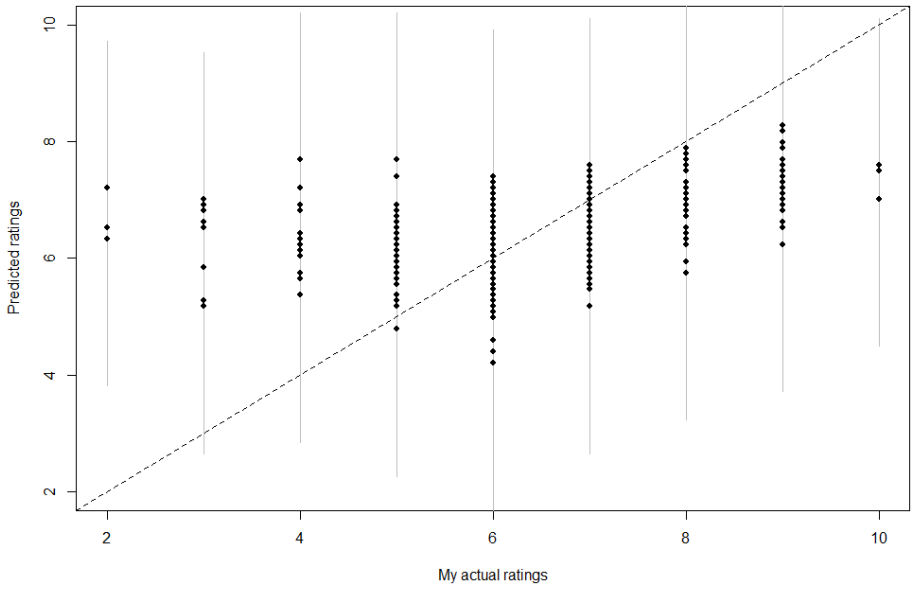
La fonction suivante vous permet de calculer les limites d'un objet de prédiction (*preds*) contenant des valeurs ajustées, l'erreur standard, et une estimation du niveau d'ensemble du bruit. Comme les données viennent de deux sources (indépendantes) , cette fonction combine les écarts-types par "ajout en quadrature". Plus simplement, en régression linéaire il existe deux types d'intervalles de confiance que vous pouvez utiliser pour la prédiction :

- Construire une intervalle de confiance autour de la moyenne conditionnelle donnée pour une valeur de X.
- Construire une intervalle de confiance pour les valeurs réalisées Y pour une valeur X donnée.

La fonction *predlims()* calcule un intervalle de prédiction approximatif en prenant l'écart-type estimé (à partir de l'erreur standard de la moyenne conditionnelle), et le multipliant par 2.

```
predlims <- function(preds,sigma) {
  prediction.sd <- sqrt(preds$se.fit^2+sigma^2)
  upper <- preds$fit+2*prediction.sd
  lower <- preds$fit-2*prediction.sd
  lims <- cbind(lower=lower,upper=upper)
  return(lims)
}

> preds.lm <- predict(m1,se.fit=TRUE)
> predlims.lm <- predlims(preds.lm,sigma=summary(m1)$sigma)
> mean(d$mine <= predlims.lm[,"upper"]
     & d$mine >= predlims.lm[,"lower"])
[1] 0.957346

#Figure 3.
> plot(d$mine,preds.lm$fit,type="n", xlim=c(2,10), ylim=c(2,10),
     xlab="My actual ratings",ylab="Predicted ratings", main="")
> segments(d$mine,predlims.lm[,"lower"],
         d$mine,predlims.lm[,"upper"], col="grey")
> abline(a=0,b=1,lty="dashed")
> points(d$mine,preds.lm$fit,pch=16,cex=0.8)
```

FIGURE 3 – Intervalles de confiance des prédictions



À vous !

a) Qu'est-ce que la probabilité de couverture ? Quelle est sa valeur pour notre modèle ?

b) Rappelez la valeur du coefficient de partition d'IMDb que vous aviez obtenu plus tôt.

c) Que cela suppose-t-il ?

d) Que constatez-vous pour les bonne notes ? Pour les mauvaises notes ?

e) Concluez sur les cas où le modèle est "bon" et les cas où il est "mauvais".

1.5 Densité des notes

Il est possible d'observer la densité des notes distribuées par l'utilisateur. On observe les notes données par l'utilisateur à travers deux sous-ensembles : les films centrés dans l'écart type moyen des notes d'IMDb, et ceux dans les bornes externes.

```
> d1<-subset(d, d$imdb>6.49 & d$imdb<7.5)
> d2<-subset(d, d$imdb>7.51 & d$imdb<8.5)
```

```
#Figure 4
> p4<-ggplot (NULL, aes(mine))+
  geom_density(data = d1, fill='blue', alpha=0.4,aes(x=mine, y = ..
     density..))+
  geom_density(data = d2, fill='red', alpha=0.4,aes(x=mine, y = ..
     density..))+
```

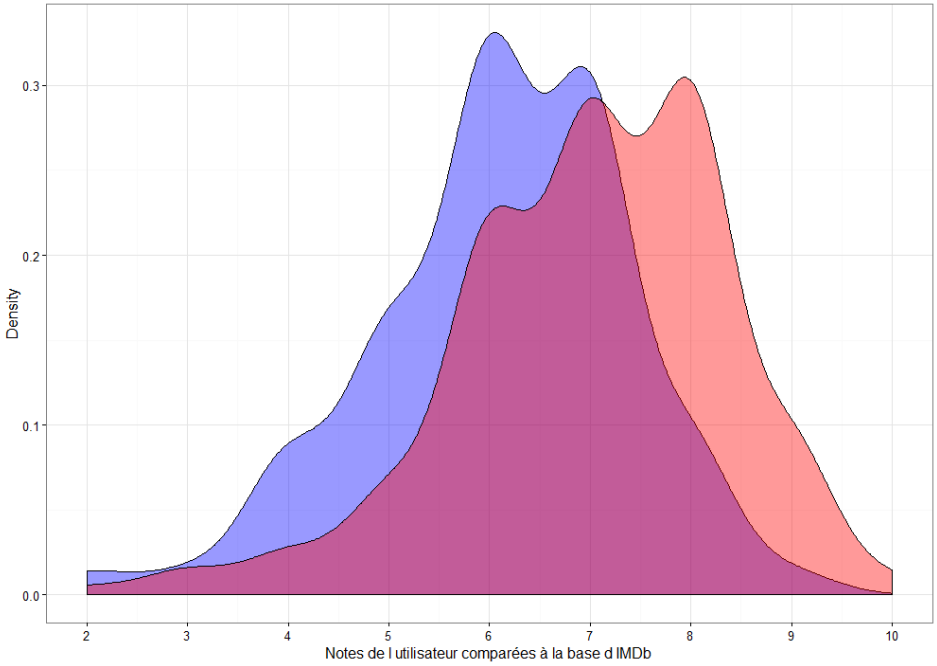
```
  scale_x_continuous('Notes de l utilisateur comparees a la base d
     IMDb (blue: 6.5-7.5, red:7.5-8.5)', breaks=seq(2,10,1))+
  scale_y_continuous('Density')+
  theme_bw()+theme(legend.position="none")
> p4
```

À vous !

a) Comparez les différents pics de fonction de densité pour les deux courbes.

b) Concluez sur ce graphique. Notre utilisateur est-il un cinéphile ?

FIGURE 4 – Notes données par l'utilisateur pour deux sous-ensembles de films



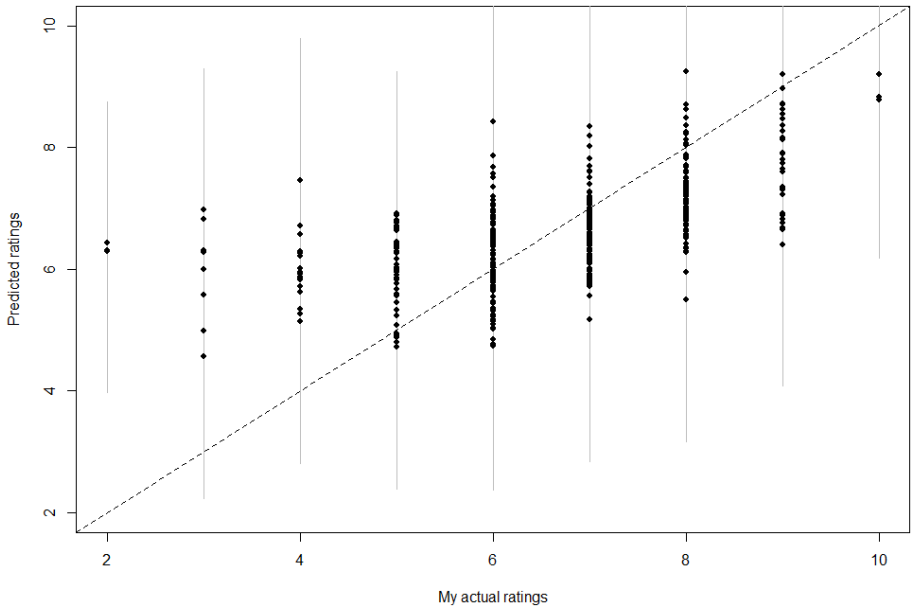
1.6 Ajout des prédicateurs

Nous allons ajouter d'autres variables pour voir comment améliorer le modèle. On voit souvent, lorsqu'un film sort, que le fait d'ajouter un réalisateur connu donne un effet de levier (on dit aussi qu'un réalisateur est *"bankable"*). De la même façon, certains types de films (comédie, action,...) sont plus facilement populaires que d'autres.

```
> #Linear model 2
> summary(m2<-lm(mine~imdb+d$comedy +d$romance+d$mystery+d$Stanley.
   Kubrick..+d$Lars.Von.Trier..+d$Darren.Aronofsky..+year.c, data=d
   ))

Call:
lm(formula = mine ~ imdb + d$comedy + d$romance + d$mystery +
```

```
    d$Stanley.Kubrick.. + d$Lars.Von.Trier.. + d$Darren.Aronofsky..
        +
    year.c, data = d)

Residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max
-4.4265 -0.6212  0.1631  0.7760  2.5917

Coefficients:
                       Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)            1.074930   0.651223   1.651 0.099574 .
imdb                   0.727829   0.087238   8.343 1.10e-15 ***
d$comedy              -0.598040   0.133533  -4.479 9.74e-06 ***
d$romance             -0.411929   0.141274  -2.916 0.003741 **
d$mystery              0.315991   0.185906   1.700 0.089933 .
d$Stanley.Kubrick..    1.066991   0.450826   2.367 0.018406 *
d$Lars.Von.Trier..     2.117281   0.582790   3.633 0.000315 ***
d$Darren.Aronofsky..   1.357664   0.584179   2.324 0.020607 *
year.c                 0.016578   0.003693   4.488 9.32e-06 ***
---
Signif. codes:  0    ***    0.001    **    0.01    *    0.05    .
       0.1         1

Residual standard error: 1.156 on 413 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.3508,    Adjusted R-squared:  0.3382
F-statistic: 27.89 on 8 and 413 DF,  p-value: < 2.2e-16

> sqrt(mean(residuals(m2)^2)) #root mean squared error: 1.14
[1] 1.14322
>
> preds.lm <- predict(m2,se.fit=TRUE)
> predlims.lm <- predlims(preds.lm,sigma=summary(m2)$sigma)
> mean(d$mine <= predlims.lm[,"upper"]
+      & d$mine >= predlims.lm[,"lower"]) #coverage of the
   prediction 96%
[1] 0.9597156


> #Figure 5.
> plot(d$mine,preds.lm$fit,type="n", xlim=c(2,10), ylim=c(2,10),
+      xlab="My actual ratings",ylab="Predicted ratings", main="")
> segments(d$mine,predlims.lm[,"lower"],
+          d$mine,predlims.lm[,"upper"], col="grey")
> abline(a=0,b=1,lty="dashed")
> points(d$mine,preds.lm$fit,pch=16,cex=0.8)
```

FIGURE 5 – Prédiction des notes de l'utilisateur



À vous !

a) Comparez par rapport à l'erreur quadratique moyenne du premier modèle.

b) Qu'a-t-on changé par rapport au premier modèle ?

c) Pourquoi, selon vous, le modèle est il potentiellement meilleur ? Regardez s'il est précisément meilleur sur un type de film particulier.

d) Que pouvez-vous en conclure ?

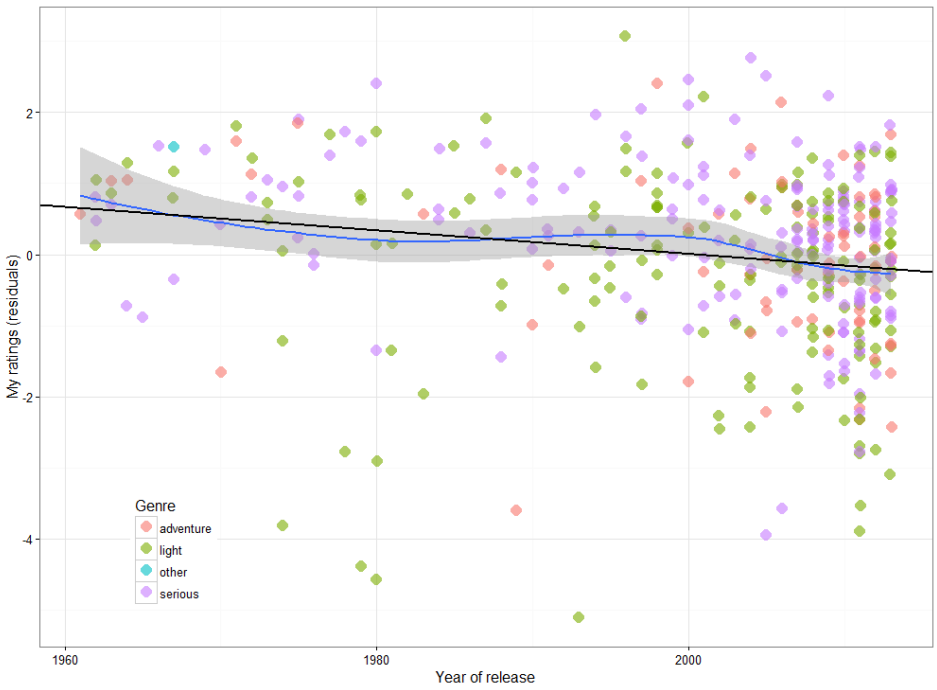
1.7 Année de sortie

On sélectionne les films à partir de 1960. La dernière variable dans la régression ci-dessous est alors l'année de sortie du film.

```
> d.60<-subset(d, Year>1960)
> d.60$r<-residuals(lm(d.60$mine~d.60$imdb))

#Figure 6.
p6 <- ggplot(d.60, aes(Year, r))+
  geom_point(position=position_jitter(width=0.1,height=.25),shape
     =16, size=4,alpha=0.6,
              aes(colour = new.genre, ))+
  stat_smooth()+
  scale_x_continuous('Year of release')+
  scale_y_continuous('My ratings (residuals)')+
  theme_bw()+
  scale_colour_discrete(name="Genre")+
  scale_size_continuous(guide=FALSE)+
```

```
  theme(legend.position=c(0.15, 0.15))+
  geom_abline(size=1, aes(intercept=33.33, slope=-0.016659))

p6
```

FIGURE 6 – Prédiction des notes de l'utilisateur



À vous !

a) Affichez un *summary()* de la fonction *lm()* sur *d.60$r*, selon sa variable *Year*

b) Un film ancien est-il généralement mieux noté ? Pourquoi selon vous ?

c) Commentez les résidus de la régression pour le sous-ensemble de films après 1960.

d) Commentez la figure 6.

e) Quelle recommandation pourriez-vous donner pour améliorer la prédiction ?