Propiedad de la matriz de chequeo H

Probar que si H es matriz de chequeo de C, entonces

$$\delta(C) = Min\ \{j : \exists \text{ un conjunto de } j \text{ columnas LD de } H\}$$

(LD es "linealmente dependiente")

Para probarlo, vamos a hacer las siguientes consideraciones:

- $s = Min\ \{j : \exists \text{ un conjunto de } j \text{ columnas LD de } H\}$
- La j-ésima columna de H se va a denotar como H^j

Por definición de s, existe un conjunto LD de columnas de H: $\{H^{j_1}, H^{j_2}, .., H^{j_s}\}$. Por definición de LD, esto quiere decir que $\exists c_1, .., c_s$ no todos nulos tales que $\sum_{i=1}^{s} c_i H^{j_i} = 0$.

Luego, la prueba se va a dividir en los dos casos a demostrar: $\delta(C) \leq s$ y $s \leq \delta(C)$.

$\delta(C) \leq s$

Sea $w = \sum_{i=1}^{s} c_i e_{j_i}$, como no todos los c_j son nulos, entonces $w \neq 0$.
Ahora, veamos que

$$\begin{aligned} Hw^t &= H(\sum_{i=1}^{s} c_i e_{j_i})^t \\ &= \sum_{i=1}^{s} c_i H e_{j_i}^t \\ &= \sum_{i=1}^{s} c_i H^{j_i} \\ &= 0 \text{ por lo visto antes} \end{aligned}$$

Luego, esto quiere decir que $w \in C$ ya que $C = Nu(H)$.

Ahora, como tenemos que $w \in C$ y $|w| = s$, entonces como

$$\delta(C) = \ Min\{|v| : v \in C, v \neq 0\}$$

se cumple que $\delta(C) \leq |w| = s$ quedando probada esta parte.

$s \leq \delta(C)$

Sea $v \in C$ tal que $\delta(C) = |v|$, entonces $\exists a_1, .., a_{\delta(C)} : v = \sum_{i=1}^{\delta(C)} e_{a_i}$.
Como $v \in C$, entonces $Hv^t = 0$

Por el mismo cálculo que hicimos en la sección anterior, llegamos a que $\sum_{i=1}^{\delta(C)} H^{a_i} = Hv^t = 0$, con lo cual significa que $\{H^{a_i}\}_{i=1}^{\delta(C)}$ es un conjunto LD de columnas de H
Por ello mismo, entonces, $s = Min\ \{j : \exists \text{ un conjunto de } j \text{ columnas LD de } H \leq \delta(C)$

Conclusión

Como $\delta(C) \leq s$ y $s \leq \delta(C)$, entonces $s = \delta(C)$. Luego, por definición de s, tenemos que:

$$\delta(C) = Min\ \{j : \exists \text{ un conjunto de } j \text{ columnas LD de } H\}$$

con lo cual queda demostrado.