Teorema MFMC

Probar que el valor de todo flujo es menor o igual que la capacidad de todo corte y que si f es un flujo, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. f es maximal.
2. Existe un corte S tal que $v(f) = cap(S)$. (y en este caso, S es minimal)
3. No existen f -caminos aumentantes.

Nota: puede usar sin necesidad de probarlo que si f es flujo y S es corte entonces $v(f) = f(S, \bar{S}) - f(\bar{S}, S)$

Primero, demostremos que:

$$v(f) \leq cap(S) \forall f \text{ flujo } \wedge S \text{ corte}$$

Para ello, nos vamos a fijar que:

$$\begin{aligned} v(f) &= f(S, \bar{S}) - f(\bar{S}, S) \\ &\leq f(S, \bar{S}) \\ &\leq cap(S) \text{ ya que } f(\overrightarrow{xy}) \leq c(\overrightarrow{xy}) \forall \overrightarrow{xy} \in E \end{aligned}$$

Demostrada esta primera parte, queda demostrar que los puntos de MFMC son equivalentes. Para hacer esto, vamos a ver que:

$$(2) \Rightarrow (1) \Rightarrow (3) \Rightarrow (2)$$

Veamos cada parte a continuación.

$(2) \Rightarrow (1)$

Quiere decir que:

$$\exists S \text{ corte} : v(f) = cap(S) \ (S \text{ es minimal}) \Rightarrow f \text{ es maximal}$$

Para demostrar esto, primero veamos que:

- Por la primer propiedad *demostrada*, sabemos que $v(g) \leq cap(T) \forall g \text{ flujo }, T \text{ corte}$
- Luego, esto significa que $v(g) \leq cap(S) = v(f) \forall g \text{ flujo}$, por lo que f es maximal
- Además, esto significa que $cap(S) = v(f) \leq cap(T) \forall T \text{ corte}$, por lo que S es minimal
  Por ello, entonces, se demuestra.

$(1) \Rightarrow (3)$

Quiere decir que:

$$f \text{ es maximal} \Rightarrow \text{No existen } f\text{-caminos aumentantes}$$

Para demostrar esto, vamos a ver la contra-recíproca:

$$\exists p \ f\text{-camino aumentante} \Rightarrow f \text{ no es maximal}$$

Como p es un f-camino aumentante, significa que puedo enviar $\epsilon > 0$ con un nuevo flujo por ese camino. Luego, tenemos un nuevo flujo g tal que $v(g) = v(f) + \epsilon$, con lo cual se demuestra ya que, claramente, f no es maximal.

$(3) \Rightarrow (2)$

Quiere decir que:

$$\text{No existen } f\text{-caminos aumentantes} \Rightarrow \exists S \text{ corte} : v(f) = cap(S) \text{ (S es minimal)}$$

Para ello, definamos el corte S de la siguiente manera:

$$S = \{s\} \cup \{x \in V : \exists p \ f\text{-camino aumentante entre } s \text{ y } x\}$$

Como no existen f-caminos aumentantes, $t \notin S$, por lo que, efectivamente, es un *corte*. Ahora, sabemos por la *propiedad de la Nota* que:

$$v(f) = f(S, \bar{S}) - f(\bar{S}, S)$$

Por ello, vamos a querer ver cada parte por separado:

- $f(S, \bar{S}) = \sum_{x,y} f(\overrightarrow{xy})[x \in S][y \notin S][\overrightarrow{xy} \in E]$
  - Veamos un lado $\overrightarrow{xy}$
  - Como x está en el corte pero y no, pero $\overrightarrow{xy}$ es una arista de G, significa que en la última iteración de EK, x *no* pudo agregar a y. ¿Por qué?
    - Notemos que $\overrightarrow{xy}$ es un lado forward ya que está en E
    - Luego, esto significa que si x no pudo agregar a y es porque estaba saturado
    - Por ello, entonces, $f(\overrightarrow{xy}) = c(\overrightarrow{xy}) \forall \overrightarrow{xy}$ que consideremos
  - Entonces, $f(S, \bar{S}) = \sum_{x,y} f(\overrightarrow{xy})[x \in S][y \notin S][\overrightarrow{xy} \in E] = \sum_{x,y} c(\overrightarrow{xy})[x \in S][y \notin S][\overrightarrow{xy} \in E] = c(S, \bar{S}) =$
- $f(\bar{S}, S) = \sum_{x,y} f(\overrightarrow{xy})[x \notin S][y \in S][\overrightarrow{xy} \in E]$
  - Veamos un lado $\overrightarrow{xy}$
  - Como y está en el corte pero x no, pero $\overrightarrow{xy}$ es una arista de G, significa que en la última iteración de EK, y *no* pudo agregar a x a la cola. ¿Por qué?
    - Notemos que $\overrightarrow{yx}$ es un lado backward ya que $\overrightarrow{xy}$ está en E (y nosotros siempre suponemos que en el Network $\overrightarrow{xy} \in E \Rightarrow \overrightarrow{yx} \notin E$ ya que, en caso que estén, se soluciona agregando un nodo intermedio para que cumpla la propiedad)

    - Luego, esto significa que si y no pudo agregar a x a la cola es porque $\overrightarrow{xy}$ estaba vacío (i.e., no podía devolver nada)
    - Por ello, entonces, $f(\overrightarrow{xy}) = 0 \forall \overrightarrow{xy}$ que consideremos
- Entonces,
  $f(\bar{S}, S) = \sum_{x,y} f(\overrightarrow{xy})[x \notin S][y \in S][\overrightarrow{xy} \in E] = \sum_{x,y} 0[x \notin S][y \in S][\overrightarrow{xy} \in E] = 0$

Luego, entonces, esto significa que

$$v(f) = cap(S) - 0 = cap(S)$$

con lo que queda demostrado.