Coloreo de aristas en bipartito

Probar que si G es bipartito, entonces $\chi'(G) = \Delta$

Primero, supongamos que G es *regular* y lo demostremos por inducción en Δ (sabemos que no puede ser menor ya que, por definición, los lados que salen del mismo nodo deben tener distinto color y en G hay nodos con grado Δ):

- Caso base: $\Delta = 1$
  - G es una colección de lados disjuntos, por lo que se pueden colorear todos con 1 color
- HI: Supongamos que $\Delta(G) > 1$ y que el teorema vale para grafos bipartitos regulares con $\Delta = \Delta(G) - 1$
- Paso inductivo:
  - Usando el *teorema de König*, como G es bipartito regular, sabemos que tiene un *matching perfecto*
  - Supongamos que tenemos el grafo G' consistente en eliminar las aristas del matching perfecto de G. Luego, esto significa que los grados de todos los vértices disminuye en 1, por lo que $\Delta(G') = \Delta(G) - 1$
  - Ahora, por HI, sabemos que los lados de G' se pueden colorear con $\Delta(G')$ colores
  - Ahora, si consideramos G, el coloreo va a ser el mismo de G' más un nuevo color (el mismo) para las aristas que no comparten G y G' (i.e., las que sacamos antes). Por ello, entonces, se colorea con $\Delta(G') + 1 = \Delta(G)$ colores, cumpliendo la propiedad.

Ahora, como lo demostramos para el caso *regular*, tenemos que ver ahora que todo grafo bipartito G puede incluirse en un grafo bipartito H regular tal que $\Delta(G) = \Delta(H)$, por lo que $\chi'(G) \leq \chi'(H) = \Delta(H) = \Delta(G) \Rightarrow \chi'(G) = \Delta(G)$

Para ello, dado el G vamos a considerar el grafo bipartito H dado por:

- Sean X', Y' "copias" de X, Y respectivamente (decimos que $x' \in X'$ es copia de $x \in X$), entonces tomamos que
  - H tiene partes $X_2 = X \cup Y', Y_2 = Y \cup X'$
  - Las aristas son, sea $\Delta = \Delta(G)$, $E_2 = E \cup \{x'y' : xy \in E\} \cup \{xx' : d(x) < \Delta\} \cup \{yy' : d(y) < \Delta\}$
- Luego, es claro que el grado de cualquier vértice z con $d(z) = \Delta$ no cambia, y el grado del correspondiente z' es también Δ

- Similarmente, para los otros vértices, el grado sube exactamente en 1, pues existe un lado extra zz'

Con esta idea, podemos aplicar varias veces la construcción hasta llegar a que H es bipartito **regular** (cuando todos los nodos tengan el mismo delta) y se va a poder usar la propiedad vista antes.