Teorema de König

Enunciar y probar el **teorema del matrimonio de König**

El *Teorema de König* nos dice que *todo grafo bipartito regular tiene un matching perfecto*.

Para demostrarlo, vamos a definir, dado $W \subseteq V$, el conjunto $E_W = \{zw \in E : w \in W\}$
Ahora, veamos dos casos, suponiendo que G tiene partes X, Y:

- Si $W \subseteq X$, tenemos que

$$\begin{aligned}|E_W| &= |\{zw \in E : w \in W\}| \\ &= \sum_{w \in W} |z : zw \in E| \text{ ya que } z \in Y \\ &= \sum_{w \in W} d(w) \\ &= \sum_{w \in W} \Delta \text{ ya que G es regular} \\ &= \Delta \times |W|\end{aligned}$$

  - De forma análoga, llegamos a que si $W \subseteq Y$, entonces $|E_W| = \Delta \times |W|$

Dadas las propiedades anteriores, ahora veamos que:

- $|E_X| = \Delta \times |X| = |E|$ ya que G es bipartito
- $|E_Y| = \Delta \times |Y| = |E|$ ya que G es bipartito
- Luego, $\Delta \times |X| = |E| = \Delta \times |Y|$, por lo que $|X| = |Y|$

Por ello, como $|X| = |Y|$, basta con probar que existe un matching completo sobre X para demostrar que existe un matching perfecto. Aquí es donde vamos a usar el **Teorema de Hall**.

- Sea $S \subseteq X$ y $l \in E_S$, entonces $\exists x \in S, y \in Y : l = xy$.
- Luego, $y \in \Gamma(x) \subseteq \Gamma(S) \Rightarrow l \in E_{\Gamma(S)}$
- Como l era cualquier elemento de E_S, entonces $E_S \subseteq E_{\Gamma(S)}$, por lo que $|E_S| \leq |E_{\Gamma(S)}|$
- En base a las propiedades anteriores, llegamos a que
  - $S \subseteq X \Rightarrow |E_S| = \Delta \times |S|$
  - $\Gamma(S) \subseteq Y \Rightarrow |E_{\Gamma(S)}| = \Delta \times |\Gamma(S)|$

- Luego, tenemos que

$$\begin{gathered}|E_S| \leq |E_{\Gamma(S)}| \\ \Delta \times |S| \leq \Delta \times |\Gamma(S)| \\ |S| \leq |\Gamma(S)|\end{gathered}$$

Por ello, entonces, llegamos a que para cualquier $S \subseteq X$ se cumple que $|S| \leq |\Gamma(S)|$, entonces por el *Teorema de Hall*, G es completo sobre X.