Las distancias de EK no disminuyen en pasos sucesivos

Probar que si, dados vértices x, z y flujo f definimos a la distancia entre x y z relativa a f como la *longitud del menor* f-camino aumentante entre x y z, si es que existe tal camino, o ∞ si no existe o 0 si $x = z$, denotándola por $d_f(x, z)$, y definimos $d_k(x) = d_{f_k}(s, x)$ donde f_k es el k-ésimo flujo en una corrida de Edmonds-Karp, entonces $d_k(x) \leq d_{k+1}(x)$.

Demostración

- Se considera que $[3.2.1]$ significa *"se define esta propiedad o definición bajo este número o tag (para ser usado después)"*, mientras que $(3.2.1)$ hace referencia a que se usa tal propiedad o definición.
- Además, se considera que $(3.2.\{1,4\})$ es lo mismo que decir $(3.2.1), (3.2.4)$

---

0. Estructura

- 1 Suposición
  - $\overrightarrow{xy} \in E \Rightarrow \overrightarrow{yx} \notin E$
- 2 Re-definición de d_k
  - $d_k(x) = \text{longitud del menor } f_k\text{-camino aumentante entre } s \text{ y } x \text{ (o } \infty \text{ si no hay)}$
- 3 Definición de fFF vecino de x
  - y es fFF vecino de x si no está saturado ($\overrightarrow{xy}$ *forward*) o no está vacío ($\overleftarrow{yx}$ backward) el lado que los une (dependiendo del caso)
- 4 Si y es un f_kFF vecino de x, entonces $d_k(y) \leq d_k(x) + 1$
  - Separar en dos casos en función de la *existencia* de un f_k-camino aumentante entre s y x
- 5 Prueba por contradicción (suponiendo $\exists k, x : d_{k+1}(x) < d_k(x)$)
  - 5.1. Definición y propiedades de A, x_{min} e y_{min}
    - $A = \{x \in V : d_{k+1}(x) < d_k(x)\}$
      - Por suposición de (5), $A \neq \emptyset$
      - $s \notin A$
    - $x_{min} \in A : d_{k+1}(x_{min}) = Min\ \{d_{k+1}(x) : x \in A\}$
      - $d_{k+1}(x_{min}) < d_k(x_{min})$

- $y : d_{k+1}(y) < d_{k+1}(x_{min}) \Rightarrow y \notin A \Rightarrow d_k(y) \leq d_{k+1}(y)$
- $\exists C$ f_{k+1}-camino aumentante entre s y x_{min} de menor longitud tal que $\exists y \in V : y$ es el vértice inmediatamente anterior a x_{min}
- y_{min} definido como el vértice inmediatamente anterior a x_{min} en C
- 5.2. Relaciones entre x_{min} e y_{min}
  - x_{min} es $f_{k+1}FF$ vecino de y_{min} por C
  - x_{min} no es f_kFF vecino de y_{min}
    - Usamos $d_{k+1}(x_{min}) = d_{k+1}(y_{min}) + 1$ y que $d_k(y_{min}) \leq d_{k+1}(y_{min})$ para llegar a que $d_k(x_{min}) > d_k(y_{min}) + 1$ y no cumpla con la propiedad de fFF vecino y d_k.
- 5.3. Relación entre f_k y f_{k+1}
  - Para que pase (5.2), el f_k-camino aumentante usado por EK para construir f_{k+1} debe pasar primero por x_{min} y después por y_{min}
    - Vemos los dos casos *disjuntos* (por suposición (1)): $\overrightarrow{x_{min}y_{min}} \in E$ (en f_k-camino se envía flujo por la *forward*) o $\overrightarrow{y_{min}x_{min}} \in E$ (en f_k-camino se devuelve flujo por la *backward*)
  - Como el f_k-camino lo crea EK y este usa BFS, es de longitud mínima. Luego, por definición de d_k, tenemos que $d_k(y_{min}) = d_k(x_{min}) + 1$
- 5.4. Contradicción
  - Tenemos que $d_k(x_{min}) > d_k(y_{min})$ y que $d_k(y_{min}) = d_k(x_{min}) + 1$
- 6 Conclusión
  - Hubo absurdo que vino de suponer (5)

1. Suposición

- $\overrightarrow{xy} \in E \Rightarrow \overrightarrow{yx} \notin E$
  - No se restrictiva ya que si se tienen los dos lados, se considera el Network equivalente (en problema MFMC) obtenido al agregar
    - Nodo z
    - Lados $\overrightarrow{xz}, \overrightarrow{zy}, \overrightarrow{yx}$, los dos primeros con la capacidad de $\overrightarrow{xy}$, mientras que el último con la de $\overrightarrow{yx}$

2. Re-definición de d_k

- A fines prácticos y para mayor claridad a la hora de demostrar el problema, puede observarse en base a la definición que $d_k(x) = \text{longitud del menor } f_k\text{-camino aumentante entre } s \text{ y } x \text{ (o } \infty \text{ si no hay)}$

3. Definición de fFF vecino de x

- Dado un flujo f y un vértice x, diremos que un vértice y es un vecino fFF de x si pasa alguna de las siguientes condiciones:
  - $\overrightarrow{xy} \in E \wedge f(\overrightarrow{xy}) < c(\overrightarrow{xy})$ (i.e., *forward*)
  - o $\overrightarrow{yx} \in E \wedge f(\overrightarrow{yx}) > 0$ (i.e., *backward*)

4. Si y es un f_kFF vecino de x, entonces $d_k(y) \leq d_k(x) + 1$

- Tenemos dos opciones posibles
  - **No existe** f_k-camino aumentante entre s y x
    - $\Rightarrow d_k(x) = \infty$ por (2)
    - Luego, es obvio que $d_k(y) \leq \infty$ por (2)
  - **Sí existe** algún f_k-camino aumentante entre s y x
    - Tomamos el camino C_1 de longitud mínima $\Rightarrow len(C_1) = d_k(x)$
    - Como y es f_kFF vecino de x, entonces consideramos el camino C_2 que consiste de agregar y al final de $C_1 \Rightarrow$ es un f_k-camino aumentante entre s e y $\wedge len(C_2) = len(C_1) + 1 = d_k(x) + 1$
    - Como C_2 es un f_k-camino aumentante entre s e y, entonces por (2), como se considera el de longitud mínima, tenemos que $d_k(y) \leq len(C_2) \Rightarrow d_k(y) \leq d_k(x) + 1$
- Luego, se prueba la propiedad para los dos casos

5. Prueba por contradicción (suponiendo $\exists k, x : d_{k+1}(x) < d_k(x)$)

5.1. Definición y propiedades de A, x_{min} e y_{min}

- Definimos $A = \{x \in V : d_{k+1}(x) < d_k(x)\}$
  - Por suposición de (5), A tiene al menos un elemento $\Rightarrow A \neq \emptyset$ $[5.1.1]$
  - $d_k(s) = 0 \forall k$ por definición en $(2) \Rightarrow 0 \not< 0 \Rightarrow^{defA} s \notin A$ $[5.1.2]$
- Definimos $x_{min} \in A : d_{k+1}(x_{min}) = Min\ \{d_{k+1}(x) : x \in A\}$
  - $d_{k+1}(x_{min}) <^{\text{defA}} d_k(x_{min})$ $[5.1.3]$
  - Si tenemos $y : d_{k+1}(y) < d_{k+1}(x_{min}) \Rightarrow y \notin A \Rightarrow d_k(y) \leq d_{k+1}(y)$ $[5.1.4]$
    - Ya que por definición, x_{min} es de la menor distancia dentro de los de A
  - Sea C un f_{k+1}-camino aumentante entre s y x_{min} de menor longitud, entonces $\exists y \in V : y$ es el vértice inmediatamente anterior a x_{min} $[5.1.5]$
    - *Existe* el f_{k+1}-camino aumentante entre s y x_{min} por definición de d_k dado que $d_{k+1}(x_{min}) \neq \infty$ porque $d_{k+1}(x_{min}) <^{(5.1.3)} d_k(x_{min}) \leq^{(2)} \infty$
    - *Existe* el y ya que $x_{min} \neq s$, porque por $(5.1.2)$, $s \notin A$; y por definición de $x_{min}, x_{min} \in A$
- Definimos y_{min} como el vértice inmediatamente anterior a x_{min} en el camino C definido en $(5.1.5)$

5.2. Relaciones entre x_{min} e y_{min}

- x_{min} es $f_{k+1}FF$ vecino de y_{min} $[5.2.1]$
  - Por definición de fFF vecino y dado que forman parte de C
- x_{min} no es f_kFF vecino de y_{min} $[5.2.2]$
  - Como C es de longitud mínima y, en base a la definición de d_k, tenemos que $d_{k+1}(x_{min}) = d_{k+1}(y_{min}) + 1$
  - Luego, como $d_{k+1}(y_{min}) < d_{k+1}(x_{min})$, por $(5.1.4)$ tenemos que $y_{min} \notin A$ y que $d_k(y_{min}) \leq d_{k+1}(y_{min})$
  - Luego, entonces, tenemos que

$$\begin{aligned} d_k(x_{min}) &> d_{k+1}(x_{min}) \text{ por def. de } x \\ &= d_{k+1}(y_{min}) + 1 \text{ por lo visto antes} \\ &\geq d_k(y_{min}) + 1 \text{ ya que } y_{min} \notin A \\ \\ &\Rightarrow d_k(x_{min}) > d_k(y_{min}) + 1 \ [5.2.3] \end{aligned}$$

    - Como (4) no se cumple, por contra-recíproca, tenemos que x_{min} **no** es f_kFF vecino de y_{min}

5.3. Relación entre f_k y f_{k+1}

- Para que pueda pasar $(5.2.\{1,2\})$, el f_k-camino aumentante usado por EK para construir f_{k+1} debe pasar primero por x_{min} y luego por y_{min}
  - Para probarlo, debemos ver los dos casos posibles (disjuntos) en base a la *suposición del Network* (1):
    - $\overrightarrow{x_{min}y_{min}} \in E$
      - $(5.2.1) \Rightarrow f_{k+1}(\overrightarrow{x_{min}y_{min}}) > 0$
      - $(5.2.2) \Rightarrow f_k(\overrightarrow{x_{min}y_{min}}) = 0$
      - Luego, como $f_{k+1}(\overrightarrow{x_{min}y_{min}}) > f_k(\overrightarrow{x_{min}y_{min}})$, *enviamos* flujo por $\overrightarrow{x_{min}y_{min}}$, por lo que en el camino debe estar primero x_{min} y después y_{min} (ya que se usa de forma *forward*)
    - $\overrightarrow{y_{min}x_{min}} \in E$
      - $(5.2.1) \Rightarrow f_{k+1}(\overrightarrow{y_{min}x_{min}}) < c(\overrightarrow{y_{min}x_{min}})$
      - $(5.2.2) \Rightarrow f_k(\overrightarrow{y_{min}x_{min}}) = c(\overrightarrow{y_{min}x_{min}})$
      - Luego, como $f_{k+1}(\overrightarrow{y_{min}x_{min}}) < f_k(\overrightarrow{y_{min}x_{min}})$, *devolvemos* flujo usando la *backward* $\overrightarrow{x_{min}y_{min}}$. Por ello, entonces, debe estar primero x_{min} y después y_{min}
  - Luego, en ambos casos, se cumple la propiedad
- Dado, esto, sabemos entonces que para pasar de f_k a f_{k+1}, usamos un f_k-camino aumentante de la forma $s..x_{min}y_{min}..t$
  - Como es usado por EK y este usa BFS, este camino es de longitud mínima. Luego, $d_k(y_{min}) = d_k(x_{min}) + 1$ $[5.3.1]$

5.4. Contradicción

- Por $(5.2.3)$ tenemos que $d_k(x_{min}) > d_k(y_{min}) + 1$; mientras que por $(5.3.1)$ tenemos que $d_k(y_{min}) = d_k(x_{min}) + 1$
- Luego, esto significa que $d_k(x_{min}) > d_k(y_{min}) + 1 = d_k(x_{min}) + 2 \Rightarrow d_k(x_{min}) > d_k(x_{min}) + 2 \Rightarrow 0 > 2$, por lo que llegamos a un absurdo que vino de la suposición de (5)

6. Conclusión

- Dado que se llegó a un absurdo desde la suposición de (5), entonces $\nexists x \in V : d_{k+1}(x) < d_k(x) \Rightarrow \forall x \in V, d_{k+1}(x) \geq d_k(x)$ $\blacksquare$