2-COLOR es polinomial

$2 - COLOR$ es **polinomial**

Para ello, la forma de demostrarlo va a ser dar un algoritmo determinístico polinomial, probar su correctitud y probar que su complejidad es polinomial.

Como el problema es independiente para nodos de *diferentes* componentes conexas, para mayor simplicidad en la demostración y dado que se consideran como problemas distintos (i.e., se corre el mismo algoritmo y no dependen los coloreos de las componentes), vamos a tomar que tenemos sólo una componente conexa.

Dicho esto, el algoritmo que vamos a tomar es el siguiente:

- Empezamos en el nodo r (cualquiera)
- Aplicamos BFS y en cada paso, digamos que estamos en z, nos guardamos la distancia entre r y z
  - Sea p el nodo que pone a z en la cola, entonces $dist(z) = dist(p) + 1$ y, además, $dist(r) = 0$
- Luego, el coloreo va a ser el siguiente:

$$c(x) = dist(x)\ mod\ 2$$

- Realizado el coloreo, vamos a chequear para saber si la respuesta es correcta. Para ello, volvemos a recorrer los nodos y para cada uno verificamos los colores de los vecinos.
  - Si en algún caso un nodo x tiene el mismo color que un vecino, la respuesta es NO
  - Caso contrario, si todos los nodos tienen vecinos de colores distintos, la respuesta es $SÍ$

Dado este algoritmo, podemos ver claramente que es polinomial ya que se aplica BFS que es $O(n + m)$ con operaciones $O(1)$ (guardar la distancia) y luego para crear el coloreo se recorren los nodos una sola vez, por lo que es $O(n)$ (al igual que el chequeo para dar la respuesta).
En resumidas cuentas, la complejidad será $O(n + m) * O(1) + O(n) + O(n) = O(m)$, por lo que **es polinomial**.

Ahora solo falta ver si es correcto:

- Si la respuesta que recibimos es **SÍ**, entonces es trivial ver que es correcto el programa ya que, por como lo construimos, él mismo chequea la condición de que c sea un coloreo propio
- Si la respuesta es **NO**, entonces debemos chequear que, efectivamente, no exista un coloreo con dos colores para ese grafo.
  - Digamos que los nodos vecinos con mismo color son x, y y tienen como *lowest common ancestor (LCA)* a z en el árbol BFS (es decir, z es el nodo más lejos de la *root* r que es ancestro en común de x, y)
    - Como $dist(x)\ mod\ 2 = dist(y)\ mod\ 2$, entonces el lado xy no está en el árbol BFS ya que, sino, por cómo se definen las distancias, tendríamos que los módulos serían distintos (porque la diferencia entre ellos sería 1)
    - Por ello, como xy no está en el árbol BFS, tenemos que considerar el ciclo $x..z..yx$.
    - Veamos el tamaño del ciclo

      $$\begin{aligned} tamCiclo &= [dist(x) - dist(z)] + [dist(y) - dist(z)] + 1 \\ &= [dist(x) + dist(y)] - 2 \times dist(z) + 1 \\ &\equiv [2 \times dist(x) - 2 \times dist(z) + 1]\ mod\ 2 \text{ ya que } dist(x) \equiv dist(y)\ mod\ 2 \\ &\equiv 1\ mod\ 2 \end{aligned}$$

      Por lo que es claro que el tamaño del ciclo es impar.
  - Dado esto, como el hecho de que la respuesta **NO** implique que el grafo tiene un ciclo impar, y esto último implica que no es 2-coloreable, entonces se chequea su correctitud para este caso.

Luego, entonces, como se chequea su correctitud y que es polinomial, se demuestra que $2-COLOR$ es polinomial.