Combo 3

July 3, 2024

1 Teorema 5: Godel vence a Neumann

1.1 Enunciado

Si $f : D_f \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \to \Sigma^*$ es Σ-computable, entonces f es Σ-recursiva.

1.2 Demostración

Sea $\mathcal{P}_0$ un programa que compute a f. Primero veremos que f es $(\Sigma \cup \Sigma_p)$-recursiva. Note que

$$f = E_{*1}^{n,m} \circ \left[T^{n,m} \circ \left[p_1^{n,m}, ..., p_{n+m}^{n,m}, C_{\mathcal{P}_0}^{n,m} \right], p_1^{n,m}, ..., p_{n+m}^{n,m}, C_{\mathcal{P}_0}^{n,m} \right]$$

donde cabe destacar que $p_1^{n,m}, ..., p_{n+m}^{n,m}$ son las proyecciones respecto del alfabeto $\Sigma \cup \Sigma_p$, es decir que tienen dominio $\omega^n \times (\Sigma \cup \Sigma_p)^{*m}$. Esto nos dice que f es $(\Sigma \cup \Sigma_p)$-recursiva. O sea que el Teorema de Independencia del Alfabeto nos dice que f es Σ-recursiva ya que f es Σ-mixta y $(\Sigma \cup \Sigma_p)$-mixta.

2 Teorema 6: Caracterización de conjuntos efectivamente computables

2.1 Enunciado

Sea $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$. Son equivalentes

(a) S es Σ-efectivamente computable

(b) S y $(\omega^n \times \Sigma^{*m}) - S$ son Σ-efectivamente enumerables

Nota: haga solo $(b) \Rightarrow (a)$. La prueba de este resultado está al final de la Guía 3.

2.2 Demostración de $(b) \Rightarrow (a)$

$(b) \Rightarrow (a)$. Si $S = \emptyset$ o $S = \omega^n \times \Sigma^{*m}$ es claro que se cumple (a). O sea que podemos suponer que S no es ni $\omega^n \times \Sigma^{*m}$ ni el conjunto vacio. Sea $\mathbb{P}_1$ un procedimiento efectivo que enumere a S y sea $\mathbb{P}_2$ un procedimiento efectivo que enumere a $(\omega^n \times \Sigma^{*m}) - S$ (como S y $\omega^n \times \Sigma^{*m}$ son Σ-efectivamente computables, entonces su diferencia lo es). Es facil ver que el siguiente procedimiento computa el predicado $\chi_S^{\omega^n \times \Sigma^{*m}}$:

Etapa1 Darle a la variable T el valor 0.

Etapa2 Realizar $\mathbb{P}_1$ con el valor de T como entrada para obtener de salida la upla $(\vec{y}, \vec{\beta})$.

Etapa3 Realizar $\mathbb{P}_2$ con el valor de T como entrada para obtener de salida la upla $(\vec{z}, \vec{\gamma})$.

Etapa4 Si $(\vec{y}, \vec{\beta}) = (\vec{x}, \vec{\alpha})$, entonces detenerse y dar como dato de salida el valor 1. Si $(\vec{z}, \vec{\gamma}) = (\vec{x}, \vec{\alpha})$, entonces detenerse y dar como dato de salida el valor 0. Si no suceden ninguna de las dos posibilidades antes mencionadas, aumentar en 1 el valor de la variable T y dirigirse a la Etapa 2.