Guía 1: Conceptos básicos

Conjuntos

General

- $R \to$ Conjunto de números reales
- $Z \to$ Conjunto de números enteros
- $N \to$ Conjunto de números naturales
- $\omega = N \cup \{0\}$, y $\forall x, y \in \omega$:
  - $x \dot{-} y = x - y$ si $x \geq y$ y 0 cc.
  - $x|y$ si $\exists z \in w$ tal que $y = x \cdot z$
  - Por convención nuestra, $0^0 = 1$
- $P(A) = \{S : S \subseteq A\} \to$ partes de A
- $|A| \to$ cardinalidad de A

Propiedades

- *Extensionalidad*: $A = B \Leftrightarrow \forall x, (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$
  - Es decir, $A = B$ si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$

Producto cartesiano

- Dados $A_1, .., A_n$ con $n \geq 2$, $A_1 \times .. \times A_n$ denota su producto cartesiano, es decir, al conjunto formado por todas las n-uplas $(a_1, .., a_n)$ con $a_i \in A_i$ para $i = 1, .., n$
- Si $A_1 = .. = A_n = A$, se denota A^n
- Denotamos con $\Diamond$ a la única 0-upla, por lo que definimos $A^0 = \{\Diamond\}$
- A^N denota al conjunto formado por todas las *infinituplas* $(a_1, a_2, ..)$ con $a_i \in A$ para todo $i \in N$

Alfabetos

- Un *alfabeto* es un conjunto finito de símbolos ($\emptyset$ es un alfabeto)
- Si Σ es un alfabeto, Σ^* denota al conjunto de todas las palabras finitas formadas por símbolos de Σ
  - La única palabra de longitud 0 es ε
  - Nótese que $\emptyset^* = \{\varepsilon\}$ y $\varepsilon \in \Sigma^* \forall \Sigma$
  - $\Sigma^+ = \Sigma^* - \{\varepsilon\}$
- $|\alpha|$ denota la longitud de la palabra α
  - Si $\alpha \in \Sigma^*$ y $\sigma \in \Sigma$, $|\alpha|_\sigma$ denota el número de veces que σ aparece en α

- Si $\alpha_1, .., \alpha_n \in \Sigma^*$, $\alpha_1 .. \alpha_n$ denota la concatenación de las palabras
  - Si $\alpha_1 = .. = \alpha_n = \alpha$, denotamos α^n
  - $\alpha^0 = \varepsilon$
- α es *subpalabra (propia)* de β si ($\alpha \notin \{\varepsilon, \beta\}$ y) $\exists \delta, \gamma \in \Sigma^*$ tal que $\beta = \delta\alpha\gamma$
  - β es *tramo inicial (propio)* de α si $\exists \gamma \in \Sigma^*$ tal que $\alpha = \beta\gamma$ (y $\beta \notin \{\varepsilon, \alpha\}$)
  - La definición de *tramo final (propio)* es análoga
- Dados $i \in \omega, \alpha \in \Sigma^*$, definimos $[\alpha_i] = \text{el i-ésimo símbolo de } \alpha$ si $1 \leq i \leq |\alpha|$ y ε cc.
- Dada $\gamma \in \Sigma^*$, definimos $\gamma^R = [\gamma_{|\gamma|}] .. [\gamma_1]$ si $|\gamma| \geq 1$ y ε cc. $\rightarrow$ *recíproca de* γ

Ocurrencias

- Dadas $\alpha, \beta \in \Sigma^*$ con $|\alpha|, |\beta| \geq 1$ e $i \in \{1, .., |\beta|\}$, decimos que α *ocurre* a partir de i en β si $\exists \delta, \gamma \in \Sigma^*$ tales que $\beta = \delta\alpha\gamma$ y $|\delta| = i - 1$
- **Reemplazos de ocurrencias**:
  - Cuando todas las ocurrencias de α en β son disjuntas entre sí, podemos aplicar los reemplazos
  - Notar que los reemplazos se hacen simultáneamente (de forma *atómica*) y no secuencialmente
  - Se pueden hacer reemplazos simultáneos de distintas palabras en una misma palabra dada (siempre y cuando se cumpla la condición de disyunción)

Matemática orientada a objetos

- Nuestras *categorías de objetos* son *disjuntas* entre sí y son las siguientes (no consideramos existencia de 1-uplas):
  - NÚMERO
  - CONJUNTO
  - PALABRA (*incluye a los símbolos*)
  - 0-UPLA
  - 2-UPLA
  - 3-UPLA
  - ...
  - INFINITUPLA
- Definimos Ti como la función que asigna a cada objeto de la categoría i su tipo

Función

- Definiciones:
  - Una función es un conjunto f de pares ordenados tales que si $(x, y), (x, z) \in f$, entonces $y = z$
    - *Notar que $\emptyset$ es una función*
  - Definimos

    - $D_f = Dom(f) = \text{dominio de } f = \{x : (x, y) \in f \text{ para algún } y\}$
    - $I_f = Im(f) = \text{imagen de } f = \{y : (x, y) \in f \text{ para algún } x\}$
  - Escribiremos $f : A \to B$ para denotar que f es una función con $D_f = A$ e $I_f \subseteq B$
  - Una función f se puede definir dando su *dominio* y su *regla de asignación*.
  - *Composición*: Dadas funciones f, g, definimos $f \circ g$ como

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g : g(x) \in D_f\}$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

    Notar que entonces $f \circ g = \{(u, v) : \exists z : (u, z) \in g \text{ y } (z, v) \in f\}$
- *"Agrupadas"*: Dadas funciones $f_1, .., f_n$ con $n \in N$, definimos $[f_1, .., f_n]$ como

$$D_{[f_1,..,f_n]} = D_{f_1} \cap .. \cap D_{f_n}$$

$$[f_1, .., f_n](x) = (f_1(x), .., f_n(x))$$

  Notar que $I_{[f_1,..,f_n]} \subseteq I_{f_1} \times .. \times I_{f_n}$ y $[f_1] = f_1$.
- Propiedades
  - *Igualdad de funciones*: $f = g \Leftrightarrow D_f = D_g \text{ y } \forall x \in D_f, f(x) = g(x)$
  - *Sobre composición de funciones*: $f \circ g \neq \emptyset \Leftrightarrow I_g \cap D_f \neq \emptyset$
  - *Inyectividad*: f es inyectiva si $\forall x, y \in D_f, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$
  - *Suryectividad*: Sea $f : A \to B$, f es suryectiva si $I_f = B$
  - *Biyectividad*: $f : A \to B$ es biyectiva si es inyectiva y suryectiva

    - Podemos definir la *inversa* de f como $f^{-1} : B \to A$ tal que $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$

    Notar que $f \circ f^{-1} = Id_B$ y $f^{-1} \circ f = Id_A$
  - *Condición de biyectividad*: Sean $f : A \to B$ y $g : B \to A$ tales que $f \circ g = Id_B$ y $g \circ f = Id_A$, entonces f, g son biyectivas, $f = g^{-1}$ y $g = f^{-1}$.
- Ejemplos
  - *Identidad*: $Id_A = \{(x, x) : x \in A\}$ para cualquier conjunto A

Funciones Σ-mixtas

Definiciones

- *Notación*: Sea Σ un alfabeto finito, y dados $n, m \in \omega$, usamos $\omega^n \times \Sigma^{*m}$ para abreviar a $\omega \times .. \times \omega \times \Sigma^* \times .. \times \Sigma^*$ (n veces ω y m veces Σ^*)
  - Casos a tener en cuenta:
    - Si $n = m = 0$, $\omega^n \times \Sigma^{*m} = \{\Diamond\}$
    - Si $n = 0$, $\omega^n \times \Sigma^{*m} = \Sigma^{*m}$
    - Si $m = 0$, $\omega^n \times \Sigma^{*m} = \omega^n$
  - Un elemento de $\omega^n \times \Sigma^{*m}$ es una $n + m$-upla $(x_1, .., x_n, \alpha_1, .., \alpha_m)$ con $x_i \in \omega$ y $\alpha_i \in \Sigma^*$ para todo i

- Para abreviar, escribiremos $(\vec{x}, \vec{\alpha})$ en lugar de $(x_1, .., x_n, \alpha_1, .., \alpha_m)$
- *Definición*: Sea Σ un alfabeto finito y sea f una función, diremos que es Σ-mixta si
  - (M1) $\exists n, m \geq 0 : D_f \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$
  - (M2) O bien $I_f \subseteq \omega$ o bien $I_f \subseteq \Sigma^*$
- Una función Σ-mixta es Σ-total si $\exists n, m \geq 0 : D_f = \omega^n \times \Sigma^{*m}$
- *Tipo*: Si f es Σ-mixta y $n, m \in \omega : D_f \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$:
  - Si $I_f \subseteq \omega$, decimos que f es de tipo $(n, m, \#)$
  - Si $I_f \subseteq \Sigma^*$, decimos que f es de tipo $(n, m, *)$
  - *Notar que si $f \neq \emptyset$, entonces hay únicos $n, m \in \omega$ y $s\in{#,}$* tales que f es de tipo (n, m, s).*

Propiedades

- Sean $\Sigma \subseteq \Gamma$ alfabetos finitos y f una función Σ-mixta, entonces f es Γ-mixta

Ejemplos

- *Suc*: Sucesor de un número:

$$Suc : \omega \to \omega$$
$$n \to n + 1$$

- *Pred*: Predecesor de un número:

$$Pred : N \to \omega$$
$$n \to n - 1$$

- *Derecha*: Sea Σ un alfabeto no vacío, entonces $\forall b \in \Sigma$ definimos

$$d_b : \Sigma^* \to \Sigma^*$$
$$\alpha \to \alpha b$$

- *Proyecciones*: Sea Σ un alfabeto, para $n, m \in \omega$ e $i : 1 \leq i \leq n$, definimos

$$p_i^{n,m} : \omega^n \times \Sigma^{*m} \to \omega$$
$$(\vec{x}, \vec{\alpha}) \to x_i$$

  Y para $i : n + 1 \leq i \leq n + m$, definimos

$$p_i^{n,m} : \omega^n \times \Sigma^{*m} \to \Sigma^*$$
$$(\vec{x}, \vec{\alpha}) \to \alpha_{i-n}$$

- *Constantes*: Sea Σ un alfabeto, para $n, m, k \in \omega$ y $\alpha \in \Sigma^*$ definimos

$$C_k^{n,m} : \omega^n \times \Sigma^{*m} \to \omega$$
$$(\vec{x}, \vec{\alpha}) \to k$$

y

$$C_\alpha^{n,m} : \omega^n \times \Sigma^{*m} \to \Sigma^*$$
$$(\vec{x}, \vec{\alpha}) \to \alpha$$

(Notar que $C_k^{0,0} : \{\Diamond\} \to \{k\}$ y $C_\alpha^{0,0} : \{\Diamond\} \to \{\alpha\}$)

- *Predicado*: Un predicado Σ-mixto es una función f tal que es Σ-mixta e $I_f \subseteq \{0, 1\}$

  Dados predicados $P : S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \to \{0, 1\}$ y $Q : S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \to \{0, 1\}$, con el mismo dominio, definimos nuevos predicados:
  - *Negación*:
  $$\neg P : S \to \{0, 1\}$$
  $$(\vec{x}, \vec{\alpha}) \to \begin{cases} 1 & \text{si } P(\vec{x}, \vec{\alpha}) = 0 \\ 0 & \text{si } P(\vec{x}, \vec{\alpha}) = 1 \end{cases}$$
  - *Conjunción*:
  $$P \wedge Q : S \to \{0, 1\}$$
  $$(\vec{x}, \vec{\alpha}) \to \begin{cases} 1 & \text{si } P(\vec{x}, \vec{\alpha}) = 1 \text{ y } Q(\vec{x}, \vec{\alpha}) = 1 \\ 0 & \text{cc.} \end{cases}$$
  - *Disyunción*:
  $$P \vee Q : S \to \{0, 1\}$$
  $$(\vec{x}, \vec{\alpha}) \to \begin{cases} 1 & \text{si } P(\vec{x}, \vec{\alpha}) = 1 \text{ o } Q(\vec{x}, \vec{\alpha}) = 1 \\ 0 & \text{cc.} \end{cases}$$

Conjuntos Σ-mixtos

- Un conjunto S es Σ-mixto si $\exists n, m \in \omega : S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$
  - *Notar que $\emptyset$ y $\{\Diamond\}$ son conjuntos Σ-mixtos, cualesquiera sea el alfabeto Σ*
- S es Σ-mixto $\Leftrightarrow S = D_f$ para alguna función Σ-mixta f
- Dado un conjunto Σ-mixto S y $n, m \in \omega : S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$, entonces S es de tipo (n, m)

  Notar que si $S \neq \emptyset$, entonces hay únicos $n, m \in \omega$ tales que S es de tipo (n, m).

Notación Lambda

- Una expresión es *lambdificable* con respecto a Σ si cumple las siguientes características:
  - Involucra variables numéricas (que se valuaran en números de ω), y variables alfabéticas (que se valuaran en palabras del alfabeto previamente fijado)
    - En cuanto a notación, las numéricas son con letras latinas minúsculas (x, y, z) y las alfabéticas con letras griegas minúsculas (α, β, γ)

- Para ciertas valuaciones de sus variables la expresión puede *no* estar definida (por ejemplo, $Pred(|\alpha|)$ para $\alpha = \varepsilon$)
- Sea E la expresión, los valores que asuma cuando hayan sido asignados los valores de ω a sus variables numéricas y valores de Σ^* a sus variables alfabéticas, deberán ser *siempre* elementos de $O \in \{\omega, \Sigma^*\}$ (es decir, no puede tomar valores mixtos)
- La expresión puede involucrar lenguaje coloquial castellano (i.e., no únicamente operaciones matemáticas). Por ejemplo, "el menor número primo que es mayor que x"
- A las *expresiones booleanas* (como $x = 0$), se les considerará que asumen valores de $\{0, 1\} \subseteq \omega$

- *Definición*: sea Σ un alfabeto finito fijo, E una expresión lambdificable respecto a Σ y $x_1, .., x_n, \alpha_1, .., \alpha_m$ variables distintas tales que las numéricas que ocurren en E están en $\{x_1, .., x_n\}$ y las alfabéticas en $\{\alpha_1, .., \alpha_m\}$, entonces $\lambda_{x_1..x_n\alpha_1..\alpha_m}[E]$ denota la función definida por:
  - $D_{\lambda_{x_1..x_n\alpha_1..\alpha_m}[E]} = \{(k_1, .., k_n, \beta_1, .., \beta_m) \in \omega^n \times \Sigma^{*m}$: E está definida cuando asignamos a cada x_i el valor k_i, y a cada α_i, el valor $\beta_i\}$
  - $\lambda_{x_1..x_n\alpha_1..\alpha_m}[E](k_1, .., k_n, \beta_1, .., \beta_m) =$ valor que asume o representa E cuando asignamos a cada x_i el valor k_i, y a cada α_i, el valor β_i

Propiedades

- $\lambda_{x_1..x_n\alpha_1..\alpha_m}[E]$ es Σ-mixta de tipo (n, m, s), donde $s \in \{\#, *\}$.
- Para $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$, $\chi_S^{\omega^n \times \Sigma^{*m}} = \lambda_{x_1..x_n\alpha_1..\alpha_m}[(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in S]$.