Resultados básicos presentados en el paradigma recursivo

Lema de división por casos para funciones Σ-recursivas

- *Lema*: Si $f_i : D_{f_i} \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \to O$ (con $O \in \{\omega, \Sigma^*\}$) para $i = 1, .., k$ son funciones Σ-recursivas tales que $D_{f_i} \neq D_{f_j}$ para $i \neq j$, entonces la función $f_1 \cup .. \cup f_k$ es Σ-recursiva.
- *Lema*: Si $P : D_P \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \to \omega$ es un predicado Σ-recursivo y D_P es Σ-recursivo, entonces $M(P)$ es Σ-recursivo.
  - *No se cumple la recíproca*

Lema de restricción de funciones Σ-recursivas

- *Lema*: Si $f : D_f \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \to O$ es una función Σ-recursiva y $S \subseteq D_f$ es Σ-recursivo enumerable, entonces la función $f|_S$ es Σ-recursiva.

Conjuntos Σ-recursivamente enumerables y Σ-recursivos

- *Lema*: Si $S_1, S_2 \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ son Σ-recursivos, entonces $S_1 \cup S_2$, $S_1 \cap S_2$ y $S_1 - S_2$ son Σ-recursivos.
- *Lema*: Sea Σ un alfabeto finito, se tiene que
  - Si $S_1, S_2 \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ son Σ-recursivamente enumerables, entonces $S_1 \cup S_2$ y $S_1 \cap S_2$ son Σ-recursivamente enumerables.
  - Si $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ es Σ-recursivo, entonces S es Σ-recursivamente enumerable.
- *Lema*: Sea $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$, si S y $(\omega^n \times \Sigma^{*m}) - S$ son Σ-recursivamente enumerables, entonces S es Σ-recursivo.
  - Notar que no todo conjunto Σ-recursivamente enumerable es Σ-recursivo.
- *Teorema*: Dado $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:
  - S es Σ-recursivamente enumerable.
  - $S = I_F$ para alguna $F : D_F \subseteq \omega^k \times \Sigma^{*l} \to \omega^n \times \Sigma^{*m}$ tal que cada $F_{(i)}$ es Σ-recursiva.
  - $S = D_f$ para alguna función Σ-recursiva f.
  - $S = \emptyset$ o $S = I_F$ para alguna $F : \omega \to \omega^n \times \Sigma^{*m}$ tal que cada $F_{(i)}$ es Σ-p.r.

El halting problem y los conjuntos A y N

- *Definición*: Cuando $\Sigma \supseteq \Sigma_p$, podemos definir $AutoHalt^{\Sigma} = \lambda\mathcal{P}[(\exists t \in \omega) Halt^{0,1}(t, \mathcal{P}, \mathcal{P})]$

- Notar que $D_{AutoHalt^{\Sigma}} = Pro^{\Sigma}$ y que $\forall \mathcal{P} \in Pro^{\Sigma}, AutoHalt^{\Sigma}(\mathcal{P}) = 1$ sii $\mathcal{P}$ se detiene partiendo del estado $||\mathcal{P}||$.

- *Lema*: Supongamos $\Sigma \supseteq \Sigma_p$. Entonces $AutoHalt^{\Sigma}$ no es Σ-recursivo.
- *Teorema*: Supongamos $\Sigma \supseteq \Sigma_p$. Entonces $AutoHalt^{\Sigma}$ no es Σ-efectivamente computable. Es decir, no hay ningún procedimiento efectivo que decida si un programa de $\mathcal{S}^{\Sigma}$ termina partiendo de si mismo.
- *Lema*: Supongamos $\Sigma \supseteq \Sigma_p$. Entonces $A = \{\mathcal{P} \in Pro^{\Sigma} : AutoHalt^{\Sigma}(\mathcal{P}) = 1\}$ es Σ-recursivamente enumerable pero no es Σ-recursivo. Mas aún, el conjunto $N = \{\mathcal{P} \in Pro^{\Sigma} : AutoHalt^{\Sigma}(\mathcal{P}) = 0\}$ no es Σ-recursivamente enumerable.
- *Proposición*: Supongamos $\Sigma \supseteq \Sigma_p$. Entonces A es Σ-efectivamente enumerable y no Σ -efectivamente computable. El conjunto N no es Σ-efectivamente enumerable.
  - Es decir, A puede ser enumerado por un procedimiento efectivo pero no hay ningún procedimiento efectivo que decida la pertenencia a A.
  - No hay ningún procedimiento efectivo que enumere N. Por ello, si un procedimiento efectivo da como salida siempre elementos de N, entonces hay una cantidad infinita de elementos de N los cuales nunca da como salida
- *Proposición*: Supongamos $\Sigma \supseteq \Sigma_p$. Entonces, sea $P = C_1^{0,1}|_A \circ \lambda t\alpha[\alpha^{1 \dot{-} t}\mathrm{SKIP}^t]|_{\omega \times Pro^{\Sigma}}$ es Σ-recursivo pero $M(P)$ no es Σ-efectivamente computable (y por lo tanto no es Σ-recursiva).