Guía 6: Paradigma de Godel (Parte 2)

Continuación de Σ-p.r.

Sumatoria, productoria y concatenatoria de funciones Σ-p.r.

- *Definiciones*: Sea Σ un alfabeto finito y $f : \omega \times S_1 \times \ldots \times S_n \times L_1 \times \ldots \times L_m \to \omega$ con $S_i \subseteq \omega$ y $L_i \subseteq \Sigma^*$ no vacíos, entonces $\forall x, y \in \omega, (\vec{x}, \vec{\alpha}) \in S_1 \times \ldots \times S_n \times L_1 \times \ldots \times L_m$ definimos:

$$\sum_{t=x}^{t=y} f(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) = \begin{cases} 0 & \text{si } x > y \\ f(x, \vec{x}, \vec{\alpha}) + f(x+1, \vec{x}, \vec{\alpha}) + \ldots + f(y, \vec{x}, \vec{\alpha}) & \text{si } x \leq y \end{cases}$$

$$\prod_{t=x}^{t=y} f(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > y \\ f(x, \vec{x}, \vec{\alpha}) \cdot f(x+1, \vec{x}, \vec{\alpha}) \cdot \ldots \cdot f(y, \vec{x}, \vec{\alpha}) & \text{si } x \leq y \end{cases}$$

  Y, en forma similar, cuando $I_f \subseteq \Sigma^*$, definimos:

$$\subset_{t=x}^{t=y} f(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) = \begin{cases} \varepsilon & \text{si } x > y \\ f(x, \vec{x}, \vec{\alpha}) f(x+1, \vec{x}, \vec{\alpha}) \ldots f(y, \vec{x}, \vec{\alpha}) & \text{si } x \leq y \end{cases}$$

  todas con dominio $\omega \times \omega \times S_1 \times \ldots \times S_n \times L_1 \times \ldots \times L_m$.
- *Lemas*: Sea Σ un alfabeto finito
  - Si $f : \omega \times S_1 \times \ldots \times S_n \times L_1 \times \ldots \times L_m \to \omega$ es Σ-p.r. con $S_i \subseteq \omega$ y $L_i \subseteq \Sigma^*$ no vacíos, entonces $\lambda xy\vec{x}\vec{\alpha}[\sum_{t=x}^{t=y} f(t, \vec{x}, \vec{\alpha})]$ y $\lambda xy\vec{x}\vec{\alpha}[\prod_{t=x}^{t=y} f(t, \vec{x}, \vec{\alpha})]$ son Σ-p.r.
  - Si $f : \omega \times S_1 \times \ldots \times S_n \times L_1 \times \ldots \times L_m \to \Sigma^*$ es Σ-p.r. con $S_i \subseteq \omega$ y $L_i \subseteq \Sigma^*$ no vacíos, entonces $\lambda xy\vec{x}\vec{\alpha}[\subset_{t=x}^{t=y} f(t, \vec{x}, \vec{\alpha})]$ es Σ-p.r.

Cuantificación acotada de predicados Σ-p.r. con dominio rectangular

- *Definiciones*:
  - *Variable numérica*: Sea $P : S \times S_1 \times \ldots \times S_n \times L_1 \times \ldots \times L_m \to \omega$ un predicado con $S, S_i \subseteq \omega$ y $L_i \subseteq \Sigma^*$ no vacíos, y $\bar{S} \subseteq S$, entonces definimos:

$$\lambda x\vec{x}\vec{\alpha}[(\forall t \in \bar{S})_{t \leq x} P(t, \vec{x}, \vec{\alpha})] = \begin{cases} 1 & \text{si } P(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) = 1 \ \forall t \leq x \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$\lambda x\vec{x}\vec{\alpha}[(\exists t \in \bar{S})_{t \leq x} P(t, \vec{x}, \vec{\alpha})] = \begin{cases} 1 & \text{si } P(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) = 1 \text{ para algún } t \leq x \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

    Ambos con dominios $\omega \times S_1 \times \ldots \times S_n \times L_1 \times \ldots \times L_m$.
    - Cabe destacar que $\lambda x\vec{x}\vec{\alpha}[(\exists t \in \bar{S})_{t \leq x} P(t, \vec{x}, \vec{\alpha})] = \neg\lambda x\vec{x}\vec{\alpha}[(\forall t \in \bar{S})_{t \leq x} \neg P(t, \vec{x}, \vec{\alpha})]$.

- *Variable alfabética*: De forma similar, sea $P : S_1 \times \ldots \times S_n \times L_1 \times \ldots \times L_m \times L \to \omega$ un predicado con $S_i \subseteq \omega$ y $L, L_i \subseteq \Sigma^*$ no vacíos, y $\bar{L} \subseteq L$, entonces definimos

$$\lambda x\vec{x}\vec{\alpha}[(\forall \alpha \in \bar{L})_{|\alpha| \leq x} P(\vec{x}, \vec{\alpha}, \alpha)] = \begin{cases} 1 & \text{si } P(\vec{x}, \vec{\alpha}, \alpha) = 1 \; \forall \alpha \in \{\beta \in \bar{L} : |\beta| \leq x\} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$
$$\lambda x\vec{x}\vec{\alpha}[(\exists \alpha \in \bar{L})_{|\alpha| \leq x} P(\vec{x}, \vec{\alpha}, \alpha)] = \begin{cases} 1 & \text{si } \exists \alpha \in \{\beta \in \bar{L} : |\beta| \leq x\} : P(\vec{x}, \vec{\alpha}, \alpha) = 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

  Ambos con dominios $\omega \times S_1 \times \ldots \times S_n \times L_1 \times \ldots \times L_m$.
    - Cabe destacar que $\lambda x\vec{x}\vec{\alpha}[(\exists \alpha \in \bar{L})_{|\alpha| \leq x} P(\vec{x}, \vec{\alpha}, \alpha)] = \neg \lambda x\vec{x}\vec{\alpha}[(\forall \alpha \in \bar{L})_{|\alpha| \leq x} \neg P(\vec{x}, \vec{\alpha}, \alpha)]$.
- *Lemas*: Sea Σ un alfabeto finito
  - Si $P : S \times S_1 \times \ldots \times S_n \times L_1 \times \ldots \times L_m \to \omega$ es un predicado Σ-p.r. con $S, S_i \subseteq \omega$ y $L_i \subseteq \Sigma^*$ no vacíos, y $\bar{S} \subseteq S$ un conjunto Σ-p.r., entonces $\lambda x\vec{x}\vec{\alpha}[(\forall t \in \bar{S})_{t \leq x} P(t, \vec{x}, \vec{\alpha})]$ y $\lambda x\vec{x}\vec{\alpha}[(\exists t \in \bar{S})_{t \leq x} P(t, \vec{x}, \vec{\alpha})]$ son predicados Σ-p.r.
  - Si $P : S_1 \times \ldots \times S_n \times L_1 \times \ldots \times L_m \times L \to \omega$ es un predicado Σ-p.r. con $S_i \subseteq \omega$ y $L, L_i \subseteq \Sigma^*$ no vacíos, y $\bar{L} \subseteq L$ un conjunto Σ-p.r., entonces $\lambda x\vec{x}\vec{\alpha}[(\forall \alpha \in \bar{L})_{|\alpha| \leq x} P(\vec{x}, \vec{\alpha}, \alpha)]$ y $\lambda x\vec{x}\vec{\alpha}[(\exists \alpha \in \bar{L})_{|\alpha| \leq x} P(\vec{x}, \vec{\alpha}, \alpha)]$ son predicados Σ-p.r.
- *Idea*: En muchos casos de predicados obtenidos por cuantificación a partir de otros predicados, la variable cuantificada tiene una cota natural en términos de las otras variables y entonces componiendo adecuadamente se lo puede presentar como un caso de cuantificación acotada.

Minimización y funciones Σ-recursivas

Definición de función Σ-recursiva

- *Definición*: Con el nuevo constructor (que se define más abajo), podemos definir los conjuntos $R_0^\Sigma \subseteq R_1^\Sigma \subseteq R_2^\Sigma \subseteq \ldots \subseteq R^\Sigma$ de la siguiente manera:

$$R_0^\Sigma = PR_0^\Sigma$$

$$\begin{aligned} R_{k+1}^\Sigma = R_k^\Sigma \cup \{f \circ [f_1, .., f_r] : f, f_i \in R_k^\Sigma, r \geq 1]\} \\ \cup \{R(f, \mathcal{G}) : f, \mathcal{G}_a \in R_k^\Sigma \forall a \in \Sigma\} \cup \{R(f, g) : f, g \in R_k^\Sigma\} \\ \cup \{M(P) : P \text{ es } \Sigma\text{-total y } P \in R_k^\Sigma\} \end{aligned}$$

$$R^\Sigma = \bigcup_{k \in \omega} R_k^\Sigma$$

  Con ello, diremos que una función f es Σ-recursiva si $f \in R^\Sigma$.
  \- *Notar que $PR_k^\Sigma \subseteq R_k^\Sigma \forall k \in \omega$, por lo que $PR^\Sigma \subseteq R^\Sigma$*
- *Proposiciones*:
  - Si $f \in R^\Sigma$, entonces f es Σ-efectivamente computable.
  - Sea Σ un alfabeto finito, entonces no toda función Σ-recursiva es Σ-p.r. Es decir, $PR^\Sigma \subseteq R^\Sigma$ y $PR^\Sigma \neq R^\Sigma$.

Minimización de variable numérica

- *Definición*: Sea Σ un alfabeto finito y sea $P : D_P \subseteq \omega \times \omega^n \times \Sigma^{*m} \to \omega$ un predicado, dado $(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in \omega^n \times \Sigma^{*m}$, cuando exista al menos un $t \in \omega$ tal que $P(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) = 1$, usaremos $\min_t P(t, \vec{x}, \vec{\alpha})$ para denotar al menor de tales t's. Con ello, definimos:

  $$M(P) = \lambda \vec{x} \vec{\alpha} [\min_t P(t, \vec{x}, \vec{\alpha})]$$

  El cual cumple que:

  $$D_{M(P)} = \{(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in \omega^n \times \Sigma^{*m} : (\exists t \in \omega) P(t, \vec{x}, \vec{\alpha})\}$$
  $$M(P)(\vec{x}, \vec{\alpha}) = \min_t P(t, \vec{x}, \vec{\alpha}), \forall (\vec{x}, \vec{\alpha}) \in D_{M(P)}$$

  Y diremos que $M(P)$ se obtiene por *minimización de variable numérica* a partir de P.
- *Regla U*: Si tenemos una función $f : D_f \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \to \omega$ y buscamos un predicado P tal que $f = M(P)$, muchas veces es útil tratar de diseñar P de modo que para cada $(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in D_f$ se cumpla que $f(\vec{x}, \vec{\alpha}) =$ único $t \in \omega$ tal que $P(t, \vec{x}, \vec{\alpha})$.
- *Lemas*:
  - Si $P : D_P \subseteq \omega \times \omega^n \times \Sigma^{*m} \to \omega$ es un predicado Σ-efectivamente computable y D_P es Σ-efectivamente computable, entonces $M(P)$ es Σ-efectivamente computable.
  - *Minimización acotada de variable numérica de predicados Σ-p.r.*: Sean $n, m \geq 0$ y $P : D_P \subseteq \omega \times \omega^n \times \Sigma^{*m} \to \omega$ un predicado Σ-p.r., entonces
    - $M(P)$ es Σ-recursiva
    - Si hay una función Σ-p.r. $f : \omega^n \times \Sigma^{*m} \to \omega$ tal que $M(P)(\vec{x}, \vec{\alpha}) = \min_t P(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) \leq f(\vec{x}, \vec{\alpha}) \forall (\vec{x}, \vec{\alpha}) \in D_{M(P)}$, entonces $M(P)$ es Σ-p.r.
- *Ejemplos*: Sea Σ un alfabeto finito, entonces
  - $Q : \omega \times N \to \omega$ con $(x, y) \to$ (cociente de la división de x por y), es Σ-p.r.
  - $R : \omega \times N \to \omega$ con $(x, y) \to$ (resto de la división de x por y), es Σ-p.r.
  - $M = \lambda xy[mcd(x, y)]$ es Σ-p.r.
  - $G = \lambda xy[mcm(x, y)]$ es Σ-p.r.
  - $pr : N \to \omega$ con $n \to$ (el n-ésimo número primo), es Σ-p.r.
  - $\lambda xi[(x)_i]$ es Σ-p.r.
  - Lt es Σ-p.r.

Minimización de variable alfabética

- *Definición*: Sea $\Sigma \neq \emptyset$ un alfabeto con $\leq$ un orden total sobre este, y sea $P : D_P \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \times \Sigma^* \to \omega$ un predicado, dado $(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in \omega^n \times \Sigma^{*m}$, cuando exista al menos un $\alpha \in \Sigma^*$ tal que $P(\vec{x}, \vec{\alpha}, \alpha) = 1$, usaremos $\min_\alpha^{\leq} P(\vec{x}, \vec{\alpha}, \alpha)$ para denotar al menor de tales α's. Con ello, definimos:

$$M^{\leq}(P) = \lambda\vec{x}\vec{\alpha}[min_{\alpha}^{\leq} P(\vec{x}, \vec{\alpha}, \alpha)]$$

El cual cumple que:

$$D_{M^{\leq}(P)} = \{(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in \omega^n \times \Sigma^{*m} : (\exists \alpha \in \Sigma^*) P(\vec{x}, \vec{\alpha}, \alpha) = 1\}$$

$$M^{\leq}(P)(\vec{x}, \vec{\alpha}) = min_{\alpha}^{\leq} P(\vec{x}, \vec{\alpha}, \alpha), \forall (\vec{x}, \vec{\alpha}) \in D_{M^{\leq}(P)}$$

Y diremos que $M^{\leq}(P)$ se obtiene por *minimización de variable alfabética* a partir de P.

- *Lemas*:
  - *Minimización acotada de variable alfabética de predicados Σ-p.r.*: Sea $\Sigma \neq \emptyset$ un alfabeto, $\leq$ un orden total sobre Σ y $n, m \geq 0$ tales que $P : D_P \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \times \Sigma^* \to \omega$ es un predicado Σ-p.r., entonces:
    - $M^{\leq}(P)$ es Σ-recursiva
    - Si existe una función Σ-p.r. $f : \omega^n \times \Sigma^{*m} \to \omega$ tal que $|M^{\leq}(P)(\vec{x}, \vec{\alpha})| = |min_{\alpha}^{\leq} P(\vec{x}, \vec{\alpha}, \alpha)| \leq f(\vec{x}, \vec{\alpha}) \forall (\vec{x}, \vec{\alpha}) \in D_{M^{\leq}(P)}$, entonces $M^{\leq}(P)$ es Σ-p.r.

Conjuntos Σ-recursivamente enumerables

- *Definición*: Diremos que un conjunto $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ es Σ-recursivamente enumerable cuando sea vacío o haya una función $F : \omega \to \omega^n \times \Sigma^{*m}$ tal que $I_F = S$ y $F_{(i)}$ sea Σ-recursiva $\forall i \in \{1, \ldots, n+m\}$.

Conjuntos Σ-recursivos

- *Definición*: Un conjunto $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ es Σ-recursivo si su función característica $\chi_S^{\omega^n \times \Sigma^{*m}}$ es Σ-recursiva.
- *Lemas*: Sea Σ un alfabeto finito
  - Si $P : S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \to \omega$ y $Q : S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \to \omega$ son predicados Σ-r., entonces $P \wedge Q$, $P \vee Q$ y $\neg P$ son predicados Σ-r también.
  - Si $S_1, S_2 \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ son conjuntos Σ-r., entonces $S_1 \cup S_2$, $S_1 \cap S_2$ y $S_1 - S_2$ son conjuntos Σ-r también.

Independencia del alfabeto

- *Teorema*: Sean Σ y Γ dos alfabetos finitos cualesquiera:
  - Sea f una función Σ-mixta y Γ-mixta, entonces f es Σ-(r./p.r.) $\Leftrightarrow$ f es Γ-(r./p.r.).
  - Sea S un conjunto Σ-mixto y Γ-mixto, entonces S es Σ-(r./p.r./r.e.) $\Leftrightarrow$ S es Γ-(r./p.r./r.e.).