Guía 3: Procedimientos efectivos

Procedimientos efectivos

- Un procedimiento P es *procedimiento efectivo* si posee las siguientes características:
  - El ejecutante de P es una persona que trabajará con papel y lápiz (ambos recursos disponibles en forma ilimitada)
  - Cada paso o tarea que P encomiende a realizar debe ser simple y fácil de hacer en forma *efectiva* por cualquier persona
  - El procedimiento P comienza a funcionar siempre a partir de cierto dato de entrada y una vez que haya comenzado:
    - O bien se detiene y da cierto dato de salida (estos forman su *conjunto de salida*)
    - O bien nunca se detiene
  - $\exists n, m \in \omega$ y un alfabeto Σ tales que el conjunto de datos de entrada de P es $\omega^n \times \Sigma^{*m}$.

Función Σ-efectivamente computable

- Una función Σ-mixta $f : D_f \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \to O$ (para $O \in \{\omega, \Sigma^*\}$) es Σ-efectivamente computable si hay un procedimiento P tal que:
  - El conjunto de datos de entrada de P es $\omega^n \times \Sigma^{*m}$
  - El conjunto de datos de salida está contenido en O
  - Si $(\vec{x}, \vec{a}) \in D_f$, entonces P se detiene partiendo de $(\vec{x}, \vec{a})$ y da como salida $f(\vec{x}, \vec{a})$
  - Si $(\vec{x}, \vec{a}) \notin D_f$, entonces P no se detiene partiendo de $(\vec{x}, \vec{a})$
    En estos casos diremos que P computa a f
- *Propiedades:*
  - $\emptyset$ es Σ-efectivamente computable $\forall \Sigma$
  - Sean $f, f_1, .., f_n$ con $n \geq 1$ funciones Σ-efectivamente computables tales que $\exists k : D_f \subseteq \omega^k \times \Sigma^{*(n-k)} \wedge I_{f_i} \subseteq \omega \forall i \in \{1, .., k\} \wedge I_{f_i} \subseteq \Sigma^* \forall i \in \{k+1, .., n\}$, entonces $f \circ [f_1, .., f_n]$ es Σ-efectivamente computable.

Conjunto Σ-efectivamente computable

- Un conjunto $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ es Σ-efectivamente computable cuando la función $\chi_S^{\omega^n \times \Sigma^{*m}}$ es Σ-efectivamente computable.
  - Es decir, S es Σ-efectivamente computable si existe un procedimiento P tal que:
    - El conjunto de datos de entrada de P es $\omega^n \times \Sigma^{*m}$, siempre termina y da como dato de salida un elemento de $\{0, 1\}$

- Dado $(\vec{x}, \vec{a}) \in \omega^n \times \Sigma^{*m}$, P se detiene partiendo de $(\vec{x}, \vec{a})$ y da como salida 1 si $(\vec{x}, \vec{a}) \in S$ y 0 en caso contrario.
- *Propiedades*:
  - $\emptyset$ es Σ-efectivamente computable $\forall\Sigma$
  - Sean $S_1, S_2 \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ conjuntos Σ-efectivamente computables, entonces $S_1 \cup S_2$, $S_1 \cap S_2$ y $(\omega^n \times \Sigma^{*m}) - S_1$ son Σ-efectivamente computables.

Conjunto Σ-efectivamente enumerable

- *Consideraciones*: Sean $k, l, m, n \in \omega$ con $n + m \geq 1$ y $F : D_F \subseteq \omega^k \times \Sigma^{*l} \to \omega^n \times \Sigma^{*m}$, entonces denotaremos con $F_{(i)}$ a la función $p_i^{n,m} \circ F$.
  - Notar que:
    - $Im_{F_{(i)}} \subseteq \omega \forall i \in \{1, .., n\}$ e $Im_{F_{(i)}} \subseteq \Sigma^* \forall i \in \{n+1, .., n+m\}$
    - $F_{(i)}$ es Σ-mixta $\forall i \in \{1, .., n+m\}$
    - $F = [F_{(1)}, .., F_{(n+m)}]$
- *Definiciones y resultados*:
  - Un conjunto $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ es Σ-efectivamente enumerable si es vacío o $\exists F : \omega \to \omega^n \times \Sigma^{*m}$ tal que $Im_F = S$ y $F_{(i)}$ es Σ-efectivamente computable $\forall i \in \{1, .., n+m\}$
  - $S \neq \emptyset \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ es Σ-efectivamente enumerable $\Leftrightarrow$ hay un procedimiento efectivo P tal que:
    - El conjunto de datos de entrada de P es ω
    - P se detiene para cada $x \in \omega$
    - El conjunto de datos de salida de P es igual a S
      En este caso, P enumera a S
  - S es Σ-efectivamente enumerable $\Leftrightarrow$ es vacío o hay un procedimiento efectivo que lo enumera.
- *Notar* que $\emptyset$ y $\{\Diamond\}$ son Σ-efectivamente enumerables $\forall\Sigma$.
- *Propiedades*:
  - Sean $S_1, S_2 \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ conjuntos Σ-efectivamente enumerables, entonces $S_1 \cup S_2$, $S_1 \cap S_2$ son Σ-efectivamente enumerables.
  - Si $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ es Σ-efectivamente computable, entonces S es Σ-efectivamente enumerable.