Combo 8

2 de julio de 2024

1. Lema 15

1.1. Enunciado

Supongamos $\Sigma \supseteq \Sigma_p$. Entonces $AutoHalt^{\Sigma}$ no es Σ-recursivo.

1.2. Demostración

Supongamos $AutoHalt^{\Sigma}$ es Σ-recursivo y por lo tanto Σ-computable. Por la proposicion de existencia de macros tenemos que hay un macro

$$\left[\text{IF } AutoHalt^{\Sigma}(\text{W1}) \text{ GOTO A1}\right]$$

Sea $\mathcal{P}_0$ el siguiente programa de $\mathcal{S}^{\Sigma}$

$$\text{L1 } \left[\text{IF } AutoHalt^{\Sigma}(\text{P1}) \text{ GOTO L1}\right]$$

Note que

- $\mathcal{P}_0$ termina partiendo desde $\|\mathcal{P}_0\|$ sii $AutoHalt^{\Sigma}(\mathcal{P}_0) = 0$,

lo cual produce una contradiccion.

2. Teorema 16

2.1. Enunciado

Supongamos $\Sigma \supseteq \Sigma_p$. Entonces $AutoHalt^{\Sigma}$ no es Σ-efectivamente computable. Es decir no hay ningun procedimiento efectivo que decida si un programa de $\mathcal{S}^{\Sigma}$ termina partiendo de si mismo.

2.2. Demostración

Si $AutoHalt^{\Sigma}$ fuera Σ-efectivamente computable, la Tesis de Church nos diria que es Σ-recursivo, contradiciendo el lema anterior.

3. Lema 17

3.1. Enunciado

Supongamos que $\Sigma \supseteq \Sigma_p$. Entonces

$$A = \left\{\mathcal{P} \in \mathrm{Pro}^\Sigma : AutoHalt^\Sigma(\mathcal{P}) = 1\right\}$$

es Σ-r.e. y no es Σ-recursivo. Mas aun el conjunto

$$N = \left\{\mathcal{P} \in \mathrm{Pro}^\Sigma : AutoHalt^\Sigma(\mathcal{P}) = 0\right\}$$

no es Σ-r.e.

3.2. Demostración

Sea $P = \lambda t\mathcal{P}\left[Halt^{0,1}(t,\mathcal{P},\mathcal{P})\right]$. Note que P es Σ-p.r. por lo que $M(P)$ es Σ-r.. Ademas note que $D_{M(P)} = A$, lo cual implica que A es Σ-r.e..

Supongamos ahora que N es Σ-r.e.. Entonces la funcion $C_0^{0,1}|_N$ es Σ-recursiva ya que $C_0^{0,1}$ lo es. Ademas ya que A es Σ-r.e. tenemos que $C_1^{0,1}|_A$ es Σ-recursiva. Ya que

$$AutoHalt^\Sigma = C_1^{0,1}|_A \cup C_0^{0,1}|_N$$

el lema de division por casos nos dice que $AutoHalt^\Sigma$ es Σ-recursivo, contradiciendo el primer lema de este combo. Esto prueba que N no es Σ-r.e..

Finalmente supongamos A es Σ-recursivo. Entonces el conjunto

$$N = (\Sigma^* - A) \cap \mathrm{Pro}^\Sigma$$

deberia serlo, lo cual es absurdo. Hemos probado entonces que A no es Σ-recursivo.

4. Teorema 18: Neumann vence a Godel

4.1. Enunciado

Si h es Σ-recursiva, entonces h es Σ-computable.

Nota: en la inducción de la prueba, hacer solo el caso $h = M(P)$

4.2. Demostración

Probaremos por induccion en k que

(*) Si $h \in \mathrm{R}_k^\Sigma$, entonces h es Σ-computable.

El caso $k = 0$ es trivial porque son funciones ya conocidas.
Supongamos (*) vale para k, veremos que vale para $k+1$. Sea $h \in \mathrm{R}^{\Sigma}_{k+1} - \mathrm{R}^{\Sigma}_{k}$.
Hay varios casos, pero sólo nos concentraremos en esta demo en $h = M(P)$.
Supongamos $h = M(P)$, con $P : \omega \times \omega^n \times \Sigma^{*m} \to \omega$, un predicado perteneciente a R^{Σ}_{k}. Por hipotesis inductiva, P es Σ-computable y por lo tanto tenemos un macro

$$\left[\mathrm{IF}\ P(\mathrm{V}1, ..., \mathrm{V}\overline{n+1}, \mathrm{W}1, ..., \mathrm{W}\bar{m})\ \mathrm{GOTO\ A1}\right]$$

lo cual nos permite realizar el siguiente programa $\mathcal{P}$

$$\begin{array}{ll}
\mathrm{L2} & \left[\mathrm{IF}\ P(\mathrm{N}\overline{n+1}, \mathrm{N}1, ..., \mathrm{N}\bar{n}, \mathrm{P}1, ..., \mathrm{P}\bar{m})\ \mathrm{GOTO\ L1}\right] \\
 & \mathrm{N}\overline{n+1} \leftarrow \mathrm{N}\overline{n+1} + 1 \\
 & \mathrm{GOTO\ L2} \\
\mathrm{L1} & \mathrm{N}1 \leftarrow \mathrm{N}\overline{n+1}
\end{array}$$

Luego, tenemos que comprobar que este programa computa h. Para ello, tenemos que demostrar que $h = \Psi^{n,m,\#}_{\mathcal{P}}$, lo cual es sencillo de ver dado que $\mathcal{P}$ se detiene siempre y con el menor valor $x \in \omega$ en N1 tal que $P(x, x_1, ..., x_n, \alpha_1, ..., \alpha_m) = 1$, donde $(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in h$ y es la entrada para $\mathcal{P}$.

Finalmente, se demuestra que $\mathcal{P}$ computa a h, por lo que h es Σ-computable.