

Guía 1: Conceptos básicos

Conjuntos

General

- $R \rightarrow$ Conjunto de números reales
- $Z \rightarrow$ Conjunto de números enteros
- $N \rightarrow$ Conjunto de números naturales
- $\omega = N \cup \{0\}$, y $\forall x, y \in \omega$:
 - $x - y = x - y$ si $x \geq y$ y 0 cc.
 - $x|y$ si $\exists z \in \omega$ tal que $y = x \cdot z$
 - Por convención nuestra, $0^0 = 1$
- $P(A) = \{S : S \subseteq A\} \rightarrow$ partes de A
- $|A| \rightarrow$ cardinalidad de A

Propiedades

- **Extensionalidad:** $A = B \Leftrightarrow \forall x, (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$
 - Es decir, $A = B$ si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$

Producto cartesiano

- Dados A_1, \dots, A_n con $n \geq 2$, $A_1 \times \dots \times A_n$ denota su producto cartesiano, es decir, al conjunto formado por todas las n -uplas (a_1, \dots, a_n) con $a_i \in A_i$ para $i = 1, \dots, n$
- Si $A_1 = \dots = A_n = A$, se denota A^n
- Denotamos con \diamond a la única 0-upla, por lo que definimos $A^0 = \{\diamond\}$
- A^N denota al conjunto formado por todas las *infinituplas* (a_1, a_2, \dots) con $a_i \in A$ para todo $i \in N$

Alfabetos

- Un *alfabeto* es un conjunto finito de símbolos (\emptyset es un alfabeto)
- Si Σ es un alfabeto, Σ^* denota al conjunto de todas las palabras finitas formadas por símbolos de Σ
 - La única palabra de longitud 0 es ε
 - Nótese que $\emptyset^* = \{\varepsilon\}$ y $\varepsilon \in \Sigma^* \forall \Sigma$
 - $\Sigma^+ = \Sigma^* - \{\varepsilon\}$
- $|\alpha|$ denota la longitud de la palabra α
 - Si $\alpha \in \Sigma^*$ y $\sigma \in \Sigma$, $|\alpha|_\sigma$ denota el número de veces que σ aparece en α

- Si $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \Sigma^*$, $\alpha_1 \cdot \dots \cdot \alpha_n$ denota la concatenación de las palabras
 - Si $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = \alpha$, denotamos α^n
 - $\alpha^0 = \varepsilon$
- α es *subpalabra (propia)* de β si $(\alpha \notin \{\varepsilon, \beta\} \text{ y } \exists \delta, \gamma \in \Sigma^* \text{ tal que } \beta = \delta\alpha\gamma)$
 - β es *tramo inicial (propio)* de α si $\exists \gamma \in \Sigma^* \text{ tal que } \alpha = \beta\gamma$ (y $\beta \notin \{\varepsilon, \alpha\}$)
 - La definición de *tramo final (propio)* es análoga
- Dados $i \in \omega$, $\alpha \in \Sigma^*$, definimos $[\alpha_i] =$ el i -ésimo símbolo de α si $1 \leq i \leq |\alpha|$ y ε cc.
- Dada $\gamma \in \Sigma^*$, definimos $\gamma^R = [\gamma_{|\gamma|}] \cdot \dots \cdot [\gamma_1]$ si $|\gamma| \geq 1$ y ε cc. \rightarrow *recíproca de γ*

Ocurrencias

- Dadas $\alpha, \beta \in \Sigma^*$ con $|\alpha|, |\beta| \geq 1$ e $i \in \{1, \dots, |\beta|\}$, decimos que α *ocurre* a partir de i en β si $\exists \delta, \gamma \in \Sigma^*$ tales que $\beta = \delta\alpha\gamma$ y $|\delta| = i - 1$
- **Reemplazos de ocurrencias:**
 - Cuando todas las ocurrencias de α en β son disjuntas entre sí, podemos aplicar los reemplazos
 - Notar que los reemplazos se hacen simultáneamente (de forma *atómica*) y no secuencialmente
 - Se pueden hacer reemplazos simultáneos de distintas palabras en una misma palabra dada (siempre y cuando se cumpla la condición de disyunción)

Matemática orientada a objetos

- Nuestras *categorías de objetos* son *disjuntas* entre sí y son las siguientes (no consideramos existencia de 1-uplas):
 - NÚMERO
 - CONJUNTO
 - PALABRA (*incluye a los símbolos*)
 - 0-UPLA
 - 2-UPLA
 - 3-UPLA
 - ...
 - INFINITUPLA
- Definimos Ti como la función que asigna a cada objeto de la categoría i su tipo

Función

- Definiciones:
 - Una función es un conjunto f de pares ordenados tales que si $(x, y), (x, z) \in f$, entonces $y = z$
 - *Notar que \emptyset es una función*
 - Definimos

- $D_f = \text{Dom}(f) = \text{dominio de } f = \{x : (x, y) \in f \text{ para algún } y\}$
- $I_f = \text{Im}(f) = \text{imagen de } f = \{y : (x, y) \in f \text{ para algún } x\}$
- Escribiremos $f : A \rightarrow B$ para denotar que f es una función con $D_f = A$ e $I_f \subseteq B$
- Una función f se puede definir dando su *dominio* y su *regla de asignación*.
- **Composición:** Dadas funciones f, g , definimos $f \circ g$ como

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g : g(x) \in D_f\}$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

Notar que entonces $f \circ g = \{(u, v) : \exists z : (u, z) \in g \text{ y } (z, v) \in f\}$

- **"Agrupadas":** Dadas funciones f_1, \dots, f_n con $n \in \mathbb{N}$, definimos $[f_1, \dots, f_n]$ como

$$D_{[f_1, \dots, f_n]} = D_{f_1} \cap \dots \cap D_{f_n}$$

$$[f_1, \dots, f_n](x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$$

Notar que $I_{[f_1, \dots, f_n]} \subseteq I_{f_1} \times \dots \times I_{f_n}$ y $[f_1] = f_1$.

- **Propiedades**
 - **Igualdad de funciones:** $f = g \Leftrightarrow D_f = D_g \text{ y } \forall x \in D_f, f(x) = g(x)$
 - **Sobre composición de funciones:** $f \circ g \neq \emptyset \Leftrightarrow I_g \cap D_f \neq \emptyset$
 - **Inyectividad:** f es inyectiva si $\forall x, y \in D_f, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$
 - **Surjectividad:** Sea $f : A \rightarrow B$, f es suryectiva si $I_f = B$
 - **Biyectividad:** $f : A \rightarrow B$ es biyectiva si es inyectiva y suryectiva
 - Podemos definir la *inversa* de f como $f^{-1} : B \rightarrow A$ tal que $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$

Notar que $f \circ f^{-1} = \text{Id}_B$ y $f^{-1} \circ f = \text{Id}_A$

- **Condición de biyectividad:** Sean $f : A \rightarrow B$ y $g : B \rightarrow A$ tales que $f \circ g = \text{Id}_B$ y $g \circ f = \text{Id}_A$, entonces f, g son biyectivas, $f = g^{-1}$ y $g = f^{-1}$.
- **Ejemplos**
 - **Identidad:** $\text{Id}_A = \{(x, x) : x \in A\}$ para cualquier conjunto A

Funciones Σ -mixtas

Definiciones

- **Notación:** Sea Σ un alfabeto finito, y dados $n, m \in \omega$, usamos $\omega^n \times \Sigma^{*m}$ para abreviar a $\omega \times \dots \times \omega \times \Sigma^* \times \dots \times \Sigma^*$ (n veces ω y m veces Σ^*)
- **Casos a tener en cuenta:**
 - Si $n = m = 0$, $\omega^n \times \Sigma^{*m} = \{\diamond\}$
 - Si $n = 0$, $\omega^n \times \Sigma^{*m} = \Sigma^{*m}$
 - Si $m = 0$, $\omega^n \times \Sigma^{*m} = \omega^n$

- Un elemento de $\omega^n \times \Sigma^{*m}$ es una $n + m$ -upla $(x_1, \dots, x_n, \alpha_1, \dots, \alpha_m)$ con $x_i \in \omega$ y $\alpha_i \in \Sigma^*$ para todo i
 - Para abreviar, escribiremos $(\vec{x}, \vec{\alpha})$ en lugar de $(x_1, \dots, x_n, \alpha_1, \dots, \alpha_m)$
- **Definición:** Sea Σ un alfabeto finito y sea f una función, diremos que es Σ -mixta si
 - (M1) $\exists n, m \geq 0 : D_f \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$
 - (M2) O bien $I_f \subseteq \omega$ o bien $I_f \subseteq \Sigma^*$
- Una función Σ -mixta es Σ -total si $\exists n, m \geq 0 : D_f = \omega^n \times \Sigma^{*m}$
- **Tipo:** Si f es Σ -mixta y $n, m \in \omega : D_f \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$:
 - Si $I_f \subseteq \omega$, decimos que f es de tipo $(n, m, \#)$
 - Si $I_f \subseteq \Sigma^*$, decimos que f es de tipo $(n, m, *)$
 - *Notar que si $f \neq \emptyset$, entonces hay únicos $n, m \in \omega$ y $s \in \Sigma^*$ tales que f es de tipo (n, m, s) .*

Propiedades

- Sean $\Sigma \subseteq \Gamma$ alfabetos finitos y f una función Σ -mixta, entonces f es Γ -mixta

Ejemplos

- **Suc:** Sucesor de un número:

$$\begin{aligned} \text{Suc} : \omega &\rightarrow \omega \\ n &\rightarrow n + 1 \end{aligned}$$

- **Pred:** Predecesor de un número:

$$\begin{aligned} \text{Pred} : N &\rightarrow \omega \\ n &\rightarrow n - 1 \end{aligned}$$

- **Derecha:** Sea Σ un alfabeto no vacío, entonces $\forall b \in \Sigma$ definimos

$$\begin{aligned} d_b : \Sigma^* &\rightarrow \Sigma^* \\ \alpha &\rightarrow \alpha b \end{aligned}$$

- **Proyecciones:** Sea Σ un alfabeto, para $n, m \in \omega$ e $i : 1 \leq i \leq n$, definimos

$$\begin{aligned} p_i^{n,m} : \omega^n \times \Sigma^{*m} &\rightarrow \omega \\ (\vec{x}, \vec{\alpha}) &\rightarrow x_i \end{aligned}$$

Y para $i : n + 1 \leq i \leq n + m$, definimos

$$\begin{aligned} p_i^{n,m} : \omega^n \times \Sigma^{*m} &\rightarrow \Sigma^* \\ (\vec{x}, \vec{\alpha}) &\rightarrow \alpha_{i-n} \end{aligned}$$

- **Constantes:** Sea Σ un alfabeto, para $n, m, k \in \omega$ y $\alpha \in \Sigma^*$ definimos

$$C_k^{n,m} : \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow \omega$$

$$(\vec{x}, \vec{\alpha}) \rightarrow k$$

y

$$C_{\alpha}^{n,m} : \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow \Sigma^*$$

$$(\vec{x}, \vec{\alpha}) \rightarrow \alpha$$

(Notar que $C_k^{0,0} : \{\diamond\} \rightarrow \{k\}$ y $C_{\alpha}^{0,0} : \{\diamond\} \rightarrow \{\alpha\}$)

- **Predicado:** Un predicado Σ -mixto es una función f tal que es Σ -mixta e $I_f \subseteq \{0, 1\}$

Dados predicados $P : S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow \{0, 1\}$ y $Q : S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow \{0, 1\}$, con el mismo dominio, definimos nuevos predicados:

- **Negación:**

$$\neg P : S \rightarrow \{0, 1\}$$

$$(\vec{x}, \vec{\alpha}) \rightarrow \begin{cases} 1 & \text{si } P(\vec{x}, \vec{\alpha}) = 0 \\ 0 & \text{si } P(\vec{x}, \vec{\alpha}) = 1 \end{cases}$$

- **Conjunción:**

$$P \wedge Q : S \rightarrow \{0, 1\}$$

$$(\vec{x}, \vec{\alpha}) \rightarrow \begin{cases} 1 & \text{si } P(\vec{x}, \vec{\alpha}) = 1 \text{ y } Q(\vec{x}, \vec{\alpha}) = 1 \\ 0 & \text{cc.} \end{cases}$$

- **Disyunción:**

$$P \vee Q : S \rightarrow \{0, 1\}$$

$$(\vec{x}, \vec{\alpha}) \rightarrow \begin{cases} 1 & \text{si } P(\vec{x}, \vec{\alpha}) = 1 \text{ o } Q(\vec{x}, \vec{\alpha}) = 1 \\ 0 & \text{cc.} \end{cases}$$

Conjuntos Σ -mixtos

- Un conjunto S es Σ -mixto si $\exists n, m \in \omega : S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$
 - *Notar que \emptyset y $\{\diamond\}$ son conjuntos Σ -mixtos, cualesquiera sea el alfabeto Σ*
- S es Σ -mixto $\Leftrightarrow S = D_f$ para alguna función Σ -mixta f
- Dado un conjunto Σ -mixto S y $n, m \in \omega : S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$, entonces S es de tipo (n, m)

Notar que si $S \neq \emptyset$, entonces hay únicos $n, m \in \omega$ tales que S es de tipo (n, m) .

Notación Lambda

- Una expresión es *lambdificable* con respecto a Σ si cumple las siguientes características:
 - Involucra variables numéricas (que se valuaran en números de ω), y variables alfabéticas (que se valuaran en palabras del alfabeto previamente fijado)

- En cuanto a notación, las numéricas son con letras latinas minúsculas (x, y, z) y las alfabéticas con letras griegas minúsculas (α, β, γ)
- Para ciertas valuaciones de sus variables la expresión puede *no* estar definida (por ejemplo, $Pred(|\alpha|)$ para $\alpha = \varepsilon$)
- Sea E la expresión, los valores que asuma cuando hayan sido asignados los valores de ω a sus variables numéricas y valores de Σ^* a sus variables alfabéticas, deberán ser *siempre* elementos de $O \in \{\omega, \Sigma^*\}$ (es decir, no puede tomar valores mixtos)
- La expresión puede involucrar lenguaje coloquial castellano (i.e., no únicamente operaciones matemáticas). Por ejemplo, "el menor número primo que es mayor que x "
- A las *expresiones booleanas* (como $x = 0$), se les considerará que asumen valores de $\{0, 1\} \subseteq \omega$
- **Definición:** sea Σ un alfabeto finito fijo, E una expresión lambdificable respecto a Σ y $x_1, \dots, x_n, \alpha_1, \dots, \alpha_m$ variables distintas tales que las numéricas que ocurren en E están en $\{x_1, \dots, x_n\}$ y las alfabéticas en $\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$, entonces $\lambda_{x_1 \dots x_n \alpha_1 \dots \alpha_m}[E]$ denota la función definida por:
 - $D_{\lambda_{x_1 \dots x_n \alpha_1 \dots \alpha_m}[E]} = \{(k_1, \dots, k_n, \beta_1, \dots, \beta_m) \in \omega^n \times \Sigma^{*m} : E \text{ está definida cuando asignamos a cada } x_i \text{ el valor } k_i, \text{ y a cada } \alpha_i, \text{ el valor } \beta_i\}$
 - $\lambda_{x_1 \dots x_n \alpha_1 \dots \alpha_m}[E](k_1, \dots, k_n, \beta_1, \dots, \beta_m) = \text{valor que asume o representa } E \text{ cuando asignamos a cada } x_i \text{ el valor } k_i, \text{ y a cada } \alpha_i, \text{ el valor } \beta_i$

Propiedades

- $\lambda_{x_1 \dots x_n \alpha_1 \dots \alpha_m}[E]$ es Σ -mixta de tipo (n, m, s) , donde $s \in \{\#, *\}$.
- Para $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$, $\chi_S^{\omega^n \times \Sigma^{*m}} = \lambda_{x_1 \dots x_n \alpha_1 \dots \alpha_m}[(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in S]$.