Guía 2: Codificación de infinituplas de números y biyección entre ω y Σ^*

Codificación de infinituplas de números

Definiciones

- *De infinituplas*:
  - $\omega^N = \{(s_1, s_2, \dots) : s_i \in \omega \forall i \in N\}$
  - $\omega^{[N]} = \{(s_1, s_2, \dots) \in \omega^N : (\exists n \in N : s_i = 0 \forall i \geq n)\}$
    - Es decir, tiene una cantidad finita de coordenadas no nulas
- *De números*:
  - pr: Definimos

$$pr : N \to \omega$$

$$n \to n\text{-ésimo número primo}$$

  - Si $p, p_1, .., p_n$ son números primos (con $n \geq 1$) y $p | p_1 .. p_n \Rightarrow \exists i : p = p_i$
- *Codificación* (Teorema Fundamental de la Aritmética reversionado):
  $\forall x \in N, \exists!(s_1, s_2, \dots) \in \omega^{[N]} : x = \prod_{i=1}^{\infty} pr(i)^{s_i}$
- *Notación*:
  - Dada una infinitupla $(s_1, s_2, \dots) \in \omega^{[N]}$, usaremos $\langle s_1, s_2, \dots \rangle$ para denotar al número $x = \prod_{i=1}^{\infty} pr(i)^{s_i}$
  - Dado $x \in N$, usaremos (x) para denotar a la única infinitupla $(s_1, s_2, \dots) \in \omega^{[N]}$ tal que $x = \langle s_1, s_2, \dots \rangle = \prod_{i=1}^{\infty} pr(i)^{s_i}$
  - Para cada $i \in N$, usaremos $(x)_i$ para denotar a s_i de dicha infinitupla

Consecuencias de la codificación

- *Por la notación*:
  - $(x) = ((x)_1, (x)_2, \dots)$
  - $(x)_i$ es el exponente de $pr(i)$ en la única factorización prima de x
  - $\langle (x)_1, (x)_2, \dots \rangle = x \forall x \in N$
  - $\forall (s_1, s_2, \dots) \in \omega^{[N]}, (\langle s_1, s_2, \dots \rangle) = (s_1, s_2, \dots)$
- Si $x, y \in N$, entonces:
  - $(x)_i \leq x \forall i \in N$
  - $(x.y)_i = (x)_i + (y)_i \forall i \in N$
  - $x | y \Leftrightarrow \forall i \in N, (x)_i \leq (y)_i$
- Las funciones:

$$N \to \omega^{[N]}$$

$$x \to (x)$$

y

$$\omega^{[N]} \to N$$
$$(s_1, s_2, \dots) \to \langle s_1, s_2, \dots \rangle$$

son biyectivas, una inversa de la otra

- Dados $x, i \in N$, $(x)_i = \max\{t \in N : pr(i)^t | x\}$
- *Mayor factor primo*: Sea

$$Lt : N \to \omega$$
$$x \to \begin{cases} \max\{i \in N : (x)_i \neq 0\} & \text{si } x \neq 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

entonces se cumple que:
  - $Lt(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$
  - $x = \prod_{i=1}^{Lt(x)} pr(i)^{(x)_i}$

Órdenes totales

Repaso de conceptos

- *Relación binaria*: sea A un conjunto, una relación binaria en A es un subconjunto de A^2
  - *Notación*: si R es una relación binaria en A, escribimos aRb para denotar que $(a, b) \in R$
  - Si R es una relación binaria sobre A y $A \subseteq B$, entonces R es una relación binaria sobre B
- *Orden parcial*: una relación binaria R sobre A es un *orden parcial sobre* A ($\leq$) si cumple
  - *Reflexividad*: $\forall x \in A, xRx$
  - *Transitividad*: $\forall x, y, z \in A, xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$
  - *Antisimetría*: $\forall x, y \in A, xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y$
- *Orden total*: un orden total sobre A es un orden parcial $\leq$ sobre A que cumple que $\forall a, b \in A, a \leq b \vee b \leq a$
- *I-ésimo elemento de A*: si A es un conjunto finito y no vacío, y $\leq$ es un orden total sobre A, sea:

$$f : \{1, 2, \dots, |A|\} \to A$$
$$f(1) = \text{menor elemento de } A$$
$$f(i+1) = \text{menor elemento de } A - \{f(1), f(2), \dots, f(i)\}$$

Órdenes naturales sobre Σ^*

Num

- Llamaremos *numerales* a los siguientes símbolos: $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$
- Consideraremos Num como el alfabeto de numerales (notar que $Num \cap \omega = \emptyset$)
- Las palabras de Num^* denotarán (en notación decimal) a los números de ω (notar que $Num^* \cap \omega = \emptyset$)
- La representación decimal de números de ω mediante palabras de Num^* *no nos da una biyección* entre Num^* y ω ya que hay palabras que representan al mismo número (por ejemplo, 016 y 16)

$\widetilde{Num}$

- Definimos $\widetilde{Num} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, d\}$ donde d denota al número 10
- Los números de ω se representarán mediante la siguiente lista infinita de palabras de $\widetilde{Num}^*$: $1, 2, 3, .., 9, d, 11, 12, .., 19, 1d, 21, .., 29, 2d, .., 9d, d1, d2, .., dd, 111, ..$
  - *Siguiente*: la siguiente a una palabra α de la lista anterior se obtiene aplicando lo siguiente:
    1. Si $\alpha = d^n$ con $n \geq 0$, entonces el siguiente de α es 1^{n+1}
    2. Si α no es de la forma d^n con $n \geq 0$, entonces el siguiente de α se obtiene así:
       - Buscar de derecha a izquierda el primer símbolo no igual a d
       - Reemplazar dicho símbolo por su siguiente en la lista $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, d$
       - Reemplazar por el símbolo 1 a todos los símbolos iguales a d que ocurrían a la derecha del símbolo reemplazado
  - *Propiedades*:
    - (S) Toda palabra de $\widetilde{Num}^*$ aparece en la lista descripta
    - (I) Ninguna palabra de $\widetilde{Num}^*$ aparece más de una vez en la lista descripta
    - *Para la demo*:
      - Consideremos la lista representada por $B_0; B_1; B_2; \dots$ donde B_i es la parte de la lista en la cual las palabras tienen longitud exactamente i
      - Si $B_n = \alpha_1, .., \alpha_k$, entonces $a_1 = 1^n$ y $a_k = d^n$
      - Si d^n ocurre en B_n, lo hace en la última posición
      - Sea $\sigma \in \widetilde{Num}$ y $\alpha \neq d^n \in \widetilde{Num}^*$, entonces el siguiente de $\sigma\alpha$ es $\sigma\beta$ donde β es el siguiente de α
      - Si $B_n = \alpha_1, .., \alpha_k$, entonces $B_{n+1} = 1\alpha_1, .., 1\alpha_k, 2\alpha_1, .., 2\alpha_k, .., d\alpha_1, .., d\alpha_k$
      - B_n es una lista sin repeticiones de todas las palabras de longitud n de $\widetilde{Num}^*$
        - De esta, claramente se deduce (S) y (I)
- Dada la función

$$* : \omega \rightarrow \widetilde{Num}^*$$

$$n \rightarrow (n+1)\text{-ésima palabra de la lista descripta}$$

por (S) sabemos que es sobreyectiva, y por (I) que es inyectiva. Luego, esta es una **biyección** con inversa:

$$\# : \widetilde{Num}^* \rightarrow \omega$$

$$\alpha \rightarrow \text{posición de } \alpha \text{ en la lista descripta} - 1$$

- Si $\alpha = s_1 s_2 .. s_k$ con $k \geq 1$ y $s_i \in \widetilde{Num} \forall i \in \{1, 2, .., k\}$, entonces $\#(\alpha) = \sum_{i=1}^{k} \#(s_i) \times 10^{k-i}$

Caso general

- Sea Σ un alfabeto no vacío y supongamos $\leq$ es un orden total sobre Σ, y sea $\Sigma = \{a_1, .., a_n\}$ con $a_1 < a_2 <..< a_n$, podemos considerar la siguiente lista de palabras de Σ^*:

  $$\varepsilon, a_1, .., a_n$$

  $$a_1 a_1, .., a_1 a_n, a_2 a_1, .., a_2 a_n, .., a_n a_1, .., a_n a_n$$

  $$\ldots$$

  la cual enumera sin repeticiones todas las palabras de Σ^* (i.e., produce una **biyección** entre ω y Σ^*)
  - La lista se define formalmente con la función *siguiente* $s^{\leq} : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$

    $$s^{\leq}((a_n)^m) = (a_1)^{m+1} \forall m \geq 0$$

    $$s^{\leq}(\alpha a_i (a_n)^m) = \alpha a_{i+1} (a_1)^m \forall \alpha \in \Sigma^*, i \in \{1, 2, .., n-1\}, m \geq 0$$

    - *Propiedades*:
      - $\varepsilon \neq s^{\leq}(\alpha) \forall \alpha \in \Sigma^*$
      - $\alpha \neq \varepsilon \Rightarrow \exists \beta \in \Sigma^* : s^{\leq}(\beta) = \alpha$
    - Luego, la lista puede ser descripta como:

      $$\varepsilon, s^{\leq}(\varepsilon), s^{\leq}(s^{\leq}(\varepsilon)), s^{\leq}(s^{\leq}(s^{\leq}(\varepsilon))), ..$$

      y se puede demostrar que:
      - (S) Toda palabra de Σ^* aparece en la lista descripta
      - (I) Ninguna palabra de Σ^* aparece más de una vez en la lista descripta
- Para esta **biyección**, definimos $*^{\leq} : \omega \rightarrow \Sigma^*$ como la función que asigna a cada $n \in \omega$ la $n+1$-ésima palabra de la lista descripta, y $\#^{\leq} : \Sigma^* \rightarrow \omega$ como la función que asigna a cada $\alpha \in \Sigma^*$ la posición de α en la lista descripta menos uno (las dos son *inversas* una de la otra). Es decir:

  $$*^{\leq} : \omega \rightarrow \Sigma^*$$

  $$*^{\leq}(0) = \varepsilon$$

  $$*^{\leq}(n+1) = s^{\leq}(*^{\leq}(n))$$

$$- - -$$

$$\#^{\leq} : \Sigma^* \to \omega$$

$$\epsilon \to 0$$

$$a_{i_k} \ldots a_{i_0} \to \sum_{j=0}^{k} i_j n^j$$

- Sea $n \geq 1$, entonces $\forall x \geq 1, x = \sum_{j=0}^{k} i_j n^j$ con $k \geq 0, 1 \leq i_j \leq n \forall j \in \{0, 1, .., k\}$

Extensión del orden total de Σ a Σ^*

- $\alpha \leq \beta \Leftrightarrow \#^{\leq}(\alpha) \leq \#^{\leq}(\beta)$ y $\leq$ es un orden total sobre Σ^*
- $S \neq \emptyset \subseteq \Sigma^* \Rightarrow \exists \alpha \in S : \alpha \leq \beta \forall \beta \in S$