Combo 4

2 de julio de 2024

1. Proposición 7: Caracterización básica de conjuntos enumerables

1.1. Enunciado

Sea $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ un conjunto no vacio. Entonces son equivalentes:

(1) S es Σ-enumerable

(2) Hay un programa $\mathcal{P} \in \text{Pro}^\Sigma$ tal que:

a) Para cada $x \in \omega$, tenemos que $\mathcal{P}$ se detiene partiendo desde el estado $\|x\|$ y llega a un estado de la forma $((x_1, ..., x_n, y_1, ...), (\alpha_1, ..., \alpha_m, \beta_1, ...))$, donde $(x_1, ..., x_n, \alpha_1, ..., \alpha_m) \in S$.

b) Para cada $(x_1, ...x_n, \alpha_1, ..., \alpha_m) \in S$ hay un $x \in \omega$ tal que $\mathcal{P}$ se detiene partiendo desde el estado $\|x\|$ y llega a un estado de la forma $((x_1, ..., x_n, y_1, ...), (\alpha_1, ..., \alpha_m, \beta_1, ...))$

Nota: hacer el caso $n = 2$ y $m = 1$.

1.2. Demostración

Queremos demostrar la proposición anterior para $S \subseteq \omega^2 \times \Sigma^*$. Luego, entonces podemos ver los dos casos:

- (1) $\Rightarrow$ (2): Ya que S es no vacio, por definición tenemos que hay una $F : \omega \to \omega^2 \times \Sigma^*$ tal que $I_F = S$ y $F_{(i)}$ es Σ-computable, para cada $i \in \{1, ..., 3\}$. Por la Proposición de existencia de macros de asignación, tenemos que existen macros:

$$\left[\text{V2} \leftarrow F_{(1)}(\text{V1})\right]$$
$$\left[\text{V2} \leftarrow F_{(2)}(\text{V1})\right]$$
$$\left[\text{W1} \leftarrow F_{(3)}(\text{V1})\right]$$

Sea $\mathcal{P}$ el siguiente programa:

$$[\mathrm{P1} \leftarrow F_{(3)}(\mathrm{N1})]$$
$$[\mathrm{N2} \leftarrow F_{(2)}(\mathrm{N1})]$$
$$[\mathrm{N1} \leftarrow F_{(1)}(\mathrm{N1})]$$

donde se supone que las expansiones de los macros usados son hechas usando variables auxiliares no pertenecientes a la lista $\mathrm{N1}, \mathrm{N2}, \mathrm{P1}$, y que los labels auxiliares usados en dichas expansiones son todos distintos. Luego, tenemos que corroborar que $\mathcal{P}$ cumple las propiedades (a) y (b):

(a) Dado $x \in \omega$, $\mathcal{P}$ se detiene partiendo desde el estado $||x||$ y llega a un estado de la forma $((F_{(1)}(x), F_{(2)}(x), y_1, ...), (F_{(3)}(x), \beta_1, ...))$. Por propiedad, sabemos que $F(x) = (F_{(1)}(x), F_{(2)}(x), F_{(3)}(x))$ y, como $I_F = S$, entonces $(F_{(1)}(x), F_{(2)}(x), F_{(3)}(x)) \in S$, por lo que se cumple la propiedad.

(b) Dado $(x_1, x_2, \alpha_1) \in S$, como $I_F = S$, entonces $(x_1, x_2, \alpha_1) \in I_F$. Luego, esto significa que $\exists x \in \omega : F(x) = (x_1, x_2, \alpha_1)$, por lo que $F_{(1)}(x) = x_1, F_{(2)}(x) = x_2, F_{(3)}(x) = \alpha_1$ y se puede ver fácilmente que $\mathcal{P}$ partiendo desde $||x||$, se detiene y llega a un estado de la forma $((F_{(1)}(x), F_{(2)}(x), y_1, ...), (F_{(3)}(x), \beta_1, ...)) = ((x_1, x_2, y_1, ...), (\alpha_1, \beta_1, ...))$. Luego, se cumple la propiedad

Finalmente, se demuestra este caso.

- $(2) \Rightarrow (1)$: Supongamos $\mathcal{P} \in \mathrm{Pro}^{\Sigma}$ cumple (a) y (b) de (2). Sean

$$\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}\mathrm{N1} \leftarrow \mathrm{N1}$$
$$\mathcal{P}_2 = \mathcal{P}\mathrm{N1} \leftarrow \mathrm{N2}$$
$$\mathcal{P}_3 = \mathcal{P}\mathrm{P1} \leftarrow \mathrm{P1}$$

Definamos

$$F_1 = \Psi_{\mathcal{P}_1}^{1,0,\#}$$
$$F_2 = \Psi_{\mathcal{P}_2}^{1,0,\#}$$
$$F_3 = \Psi_{\mathcal{P}_3}^{1,0,*}$$

Nótese que cada F_i es Σ-computable y tiene dominio igual a ω. Sea $F = [F_1, F_2, F_3]$, tenemos por definición que $D_F = \omega$ y, ya que $F_{(i)} = F_i$, para cada $i = 1, 2, 3$, tenemos que cada $F_{(i)}$ es Σ-computable. Luego, solo falta ver que $I_F = S$, por lo que consideraremos:

  - $I_F \subseteq S$: Sea $(x_1, x_2, \alpha_1) \in I_F$, entonces sabemos que $(x_1, x_2, \alpha_1) = \left(\Psi_{\mathcal{P}_1}^{1,0,\#}, \Psi_{\mathcal{P}_2}^{1,0,\#}, \Psi_{\mathcal{P}_3}^{1,0,*}\right)$. Luego, por cómo están definidos los programas $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3$, esto significa que $\exists x \in \omega : \mathcal{P}$ se detiene partiendo de $||x||$ y llega a un estado de la forma $((x_1, x_2, y_1, ...), (\alpha_1, \beta_1, ...))$. Ahora, como $\mathcal{P}$ cumple (a), tenemos que $(x_1, x_2, \alpha_1) \in S$. Luego, se demuestra este caso.

- $I_F \supseteq S$: Sea $(x_1, x_2, \alpha_1) \in S$, por (b) tenemos que $\exists x \in \omega : \mathcal{P}$ se detiene partiendo del estado $||x||$ y llega a un estado de la forma $((x_1, x_2, y_1, ...), (\alpha_1, \beta_1, ...))$. Luego, por cómo están definidos los programas $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3$, tenemos que $(x_1, x_2, \alpha_1) = F(x)$, por lo que $(x_1, x_2, \alpha_1) \in I_F$. Luego, se demuestra este caso.

Finalmente, dado que vimos que $I_F \subseteq S$ y $I_F \supseteq S$, tenemos que $I_F = S$, por lo que se demuestra este caso.

Luego, entonces, como se demostró tanto (1) $\Rightarrow$ (2) como (2) $\Rightarrow$ (1), se demuestra la proposición anterior para $n = 2, m = 1$ $\blacksquare$.

2. Lema 8: Lema de la sumatoria

2.1. Enunciado

Sea Σ un alfabeto finito. Si $f : \omega \times S_1 \times ... \times S_n \times L_1 \times ... \times L_m \to \omega$ es Σ-p.r., con $S_1, ..., S_n \subseteq \omega$ y $L_1, ..., L_m \subseteq \Sigma^*$ no vacios, entonces la función $\lambda xy\vec{x}\vec{\alpha}\left[\sum_{t=x}^{t=y} f(t, \vec{x}, \vec{\alpha})\right]$es Σ-p.r.

2.2. Demostración

Sea $G = \lambda tx\vec{x}\vec{\alpha}\left[\sum_{i=x}^{i=t} f(i, \vec{x}, \vec{\alpha})\right]$. Ya que

$$\lambda xy\vec{x}\vec{\alpha}\left[\sum_{i=x}^{i=y} f(i, \vec{x}, \vec{\alpha})\right] = G \circ \left[p_2^{n+2,m}, p_1^{n+2,m}, p_3^{n+2,m}, ..., p_{n+m+2}^{n+2,m}\right]$$

basta con probar que G es Σ-p.r.. Primero note que

$$G(0, x, \vec{x}, \vec{\alpha}) = \begin{cases} 0 & \text{si } x > 0 \\ f(0, \vec{x}, \vec{\alpha}) & \text{si } x = 0 \end{cases}$$
$$G(t+1, x, \vec{x}, \vec{\alpha}) = \begin{cases} 0 & \text{si } x > t+1 \\ G(t, x, \vec{x}, \vec{\alpha}) + f(t+1, \vec{x}, \vec{\alpha}) & \text{si } x \leq t+1 \end{cases}$$

O sea que si definimos

$$\begin{array}{rcl} h : \omega \times S_1 \times ... \times S_n \times L_1 \times ... \times L_m & \to & \omega \\ (x, \vec{x}, \vec{\alpha}) & \to & \begin{cases} 0 & \text{si } x > 0 \\ f(0, \vec{x}, \vec{\alpha}) & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} g : \omega^3 \times S_1 \times ... \times S_n \times L_1 \times ... \times L_m & \to & \omega \\ (A, t, x, \vec{x}, \vec{\alpha}) & \to & \begin{cases} 0 & \text{si } x > t+1 \\ A + f(t+1, \vec{x}, \vec{\alpha}) & \text{si } x \leq t+1 \end{cases} \end{array}$$

tenemos que $G = R(h, g)$. Es decir que solo nos falta probar que h y g son Σ-p.r.. Sean

$$\begin{aligned}
D_1 &= \{(x, \vec{x}, \vec{\alpha}) \in \omega \times S_1 \times ... \times S_n \times L_1 \times ... \times L_m : x > 0\} \\
D_2 &= \{(x, \vec{x}, \vec{\alpha}) \in \omega \times S_1 \times ... \times S_n \times L_1 \times ... \times L_m : x = 0\} \\
H_1 &= \left\{(z, t, x, \vec{x}, \vec{\alpha}) \in \omega^3 \times S_1 \times ... \times S_n \times L_1 \times ... \times L_m : x > t+1\right\} \\
H_2 &= \left\{(z, t, x, \vec{x}, \vec{\alpha}) \in \omega^3 \times S_1 \times ... \times S_n \times L_1 \times ... \times L_m : x \leq t+1\right\}.
\end{aligned}$$

Notese que

$$\begin{aligned}
h &= C_0^{n+1,m}|_{D_1} \cup \lambda x\vec{x}\vec{\alpha}\left[f(0, \vec{x}, \vec{\alpha})\right]|_{D_2} \\
g &= C_0^{n+3,m}|_{H_1} \cup \lambda Atx\vec{x}\vec{\alpha}\left[A + f(t+1, \vec{x}, \vec{\alpha})\right])|_{H_2}
\end{aligned}$$

Ya que f es Σ-p.r. y

$$\lambda x\vec{x}\vec{\alpha}\left[f(0, \vec{x}, \vec{\alpha})\right] = f \circ \left[C_0^{n+1,m}, p_2^{n+1,m}, p_3^{n+1,m}, ..., p_{n+1+m}^{n+1,m}\right]$$

$$\lambda Atx\vec{x}\vec{\alpha}\left[A + f(t+1, \vec{x}, \vec{\alpha})\right]) = \lambda xy[x+y] \circ \left[p_1^{n+3,m}, f \circ \left[Suc \circ p_2^{n+3,m}, p_4^{n+3,m}, ..., p_{n+3+m}^{n+3,m}\right]\right]$$

tenemos que $\lambda x\vec{x}\vec{\alpha}\left[f(0, \vec{x}, \vec{\alpha})\right]$ y $\lambda Atx\vec{x}\vec{\alpha}\left[A + f(t+1, \vec{x}, \vec{\alpha})\right])$ son Σ-p.r..O sea que solo nos falta ver que los conjuntos D_1, D_2, H_1, H_2 son Σ-p.r.:

- D_1: Debemos ver que $\chi_{D_1}^{\omega^{1+n} \times \Sigma^{*m}}$ es Σ-p.r.. Como f es Σ-p.r., $R = D_f = \omega \times S_1 \times ... \times S_n \times L_1 \times ... \times L_m$ es Σ-p.r., Ahora, como $\chi_{D_1}^{\omega^{1+n} \times \Sigma^{*m}} = \left(\chi_R^{\omega^{1+n} \times \Sigma^{*m}} \wedge \lambda x\vec{x}\vec{\alpha}\left[x > 0\right]\right)$, llegamos a que $\chi_{D_1}^{\omega^{1+n} \times \Sigma^{*m}}$ es Σ-p.r. por ser conjunción de dos predicados Σ-p.r.
- D_2: Totalmente análogo al caso anterior pero con el predicado $\lambda x\vec{x}\vec{\alpha}\left[x = 0\right]$.
- H_1: Debemos ver que $\chi_{H_1}^{\omega^{3+n} \times \Sigma^{*m}}$ es Σ-p.r.. Como f es Σ-p.r., $D_f = \omega \times S_1 \times ... \times S_n \times L_1 \times ... \times L_m$ es Σ-p.r., lo que nos dice que $S_1, ..., S_n, L_1, ..., L_m$ son Σ-p.r. y, por lo tanto, $R = \omega^3 \times S_1 \times ... \times S_n \times L_1 \times ... \times L_m$ es Σ-p.r. Ahora, como $\chi_{H_1}^{\omega^{3+n} \times \Sigma^{*m}} = (\chi_R^{\omega^{3+n} \times \Sigma^{*m}} \wedge \lambda ztx\vec{x}\vec{\alpha}\left[x > t+1\right])$, llegamos a que $\chi_{H_1}^{\omega^{3+n} \times \Sigma^{*m}}$ es Σ-p.r. por ser conjunción de dos predicados Σ-p.r.
- H_2: Totalmente análogo al caso anterior pero con el predicado $\lambda ztx\vec{x}\vec{\alpha}\left[x \leq t+1\right]$.

Finalmente, entonces, se demuestra que h, g son Σ-p.r., por lo que $G = R(h, g)$ es Σ-p.r.. Esto último implica que $\lambda xy\vec{x}\vec{\alpha}\left[\sum_{i=x}^{i=y} f(i, \vec{x}, \vec{\alpha})\right] = G \circ \left[p_2^{n+2,m}, p_1^{n+2,m}, p_3^{n+2,m}, ..., p_{n+m+2}^{n+2,m}\right]$ es Σ-p.r., por lo que se demuestra. ■