Aqui daremos los *combos de definiciones y convenciones notacionales* y los *combos de teoremas* que se usaran en los examenes teoricos de las materias:
- Lenguajes formales y computabilidad
- Logica

# Combos de definiciones y convenciones notacionales de la materia Lenguajes formales y computabilidad

## Combo 1

1. Defina cuando un conjunto $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ es llamado $\Sigma$-recursivo (no hace falta que defina "funcion $\Sigma$-recursiva")
2. Defina $\langle s_1, s_2, ...\rangle$
3. Defina "$f$ es una funcion $\Sigma$-mixta"
4. Defina "familia $\Sigma$-indexada de funciones"
5. Defina $R(f, \mathcal{G})$

## Combo 2

Defina:

1. $d \overset{n}{\vdash} d'$ (no hace falta que defina $\vdash$)
2. $L(M)$
3. $H(M)$
4. "$f$ es una funcion de tipo $(n, m, s)$"
5. $(x)$
6. $(x)_i$

## Combo 3

1. Defina cuando un conjunto $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ es llamado $\Sigma$-recursivamente enumerable (no hace falta que defina "funcion $\Sigma$-recursiva")
2. Defina $s^{\leq}$
3. Defina $*^{\leq}$
4. Defina $\#^{\leq}$

## Combo 4

Defina cuando una funcion $f : D_f \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow \omega$ es llamada $\Sigma$-efectivamente computable y defina "el procedimiento $\mathbb{P}$ computa a la funcion $f$"

## Combo 5

Defina cuando un conjunto $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ es llamado $\Sigma$-efectivamente computable y defina: "el procedimiento efectivo $\mathbb{P}$ decide la pertenencia a $S$"

## Combo 6

Defina cuando un conjunto $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ es llamado $\Sigma$-efectivamente enumerable y defina: "el procedimiento efectivo $\mathbb{P}$ enumera a $S$"

## Combo 7

Defina cuando una funcion $f : D_f \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow \omega$ es llamada $\Sigma$-Turing computable y defina "la maquina de Turing $M$ computa a la funcion $f$"

## Combo 8

Defina:

1. $M(P)$
2. $Lt$
3. Conjunto rectangular
4. "$S$ es un conjunto de tipo $(n, m)$"

## Combo 9

Defina:

1. "$I$ es una instruccion de $\mathcal{S}^{\Sigma}$"
2. "$\mathcal{P}$ es un programa de $\mathcal{S}^{\Sigma}$"
3. $I_i^{\mathcal{P}}$
4. $n(\mathcal{P})$
5. $Bas$

## Combo 10

Defina relativo al lenguaje $\mathcal{S}^{\Sigma}$:

1. "estado"
2. "descripcion instantanea"
3. $S_{\mathcal{P}}$
4. "estado obtenido luego de $t$ pasos, partiendo del estado $(\vec{s},\vec{\sigma})$"
5. "$\mathcal{P}$ se detiene (luego de $t$ pasos), partiendo desde el estado $(\vec{s},\vec{\sigma})$"

## Combo 11

Defina:

1. $\Psi_{\mathcal{P}}^{n,m,\#}$
2. "$f$ es $\Sigma$-computable"
3. "$\mathcal{P}$ computa a $f$"
4. $M^{\leq}(P)$

## Combo 12

Defina cuando un conjunto $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ es llamado $\Sigma$-computable, cuando es llamado $\Sigma$-enumerable y defina "el programa $\mathcal{P}$ enumera a $S$"

## Combo 13

Defina:

1. $i^{n,m}$
2. $E_{\#}^{n,m}$
3. $E_{*}^{n,m}$
4. $E_{\#j}^{n,m}$
5. $E_{*j}^{n,m}$
6. $Halt^{n,m}$
7. $T^{n,m}$
8. $AutoHalt^{\Sigma}$
9. Los conjuntos $A$ y $N$

### Combo 14

Explique en forma detallada la notacion lambda

### Combo 15

Dada una funcion $f : D_f \subseteq \omega \times \Sigma^* \to \omega$, describa que tipo de objeto es y que propiedades debe tener el macro::

$$[\mathrm{V2} \leftarrow f(\mathrm{V1}, \mathrm{W1})]$$

### Combo 16

Dado un predicado $P : D_f \subseteq \omega \times \Sigma^* \to \omega$, describa que tipo de objeto es y que propiedades debe tener el macro:

$$[\mathrm{IF}\ P(\mathrm{V1}, \mathrm{W1})\ \mathrm{GOTO}\ \mathrm{A1}]$$

## Combos de teoremas de la materia Lenguajes formales y computabilidad

La siguiente lista contiene 9 combos de resultados de la teoria los cuales seran utilizados para la parte teorica del examen. Algunas observaciones:

1. Cuando el alumno desarrolle una prueba de un resultado perteneciente a un combo, podra utilizar un resultado previo sin necesidad de demostrarlo, salvo que justo el combo exija la prueba de dicho resultado. Esto implica, por ejemplo, que se pueden usar en cualquier combo que la funciones suma, producto, etc son $\Sigma$-p.r.

2. Cuando el alumno aplique algun resultado que no figura en los resultados del combo que esta desarrollando, debera referirse a el en forma descriptivamente clara, preferentemente enunciandolo. Por ejemplo, no vale poner "por Lema 13 de la Guia 5, tenemos que".

### Combo 1

**Proposition 1 (Caracterizacion de conjuntos p.r.)** *Un conjunto $S$ es $\Sigma$-p.r. sii $S$ es el dominio de alguna funcion $\Sigma$-p.r.*

(En la induccion de la prueba hacer solo el caso de la composicion)

**Theorem 2 (Neumann vence a Godel)** *Si $h$ es $\Sigma$-recursiva, entonces $h$ es $\Sigma$-computable*

(En la induccion de la prueba hacer solo el caso $h = R(f, \mathcal{G})$)

## Combo 2

**Lemma 3 (Lema de division por casos para funciones p.r.)** *Supongamos* $f_i : D_{f_i} \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \to \Sigma^*$, $i = 1, ..., k$, *son funciones* $\Sigma$*-p.r. tales que* $D_{f_i} \cap D_{f_j} = \emptyset$ *para* $i \neq j$. *Entonces* $f_1 \cup ... \cup f_k$ *es* $\Sigma$*-p.r.*

**Proposition 4 (Caracterizacion basica de conjuntos enumerables)** *Sea* $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ *un conjunto no vacio. Entonces son equivalentes:*

*(1)* $S$ *es* $\Sigma$*-enumerable*

*(2) Hay un programa* $\mathcal{P} \in \mathrm{Pro}^\Sigma$ *tal que:*

  *(a) Para cada* $x \in \omega$, *tenemos que* $\mathcal{P}$ *se detiene partiendo desde el estado* $\|x\|$ *y llega a un estado de la forma* $((x_1, ..., x_n, y_1, ...), (\alpha_1, ..., \alpha_m, \beta_1, ...))$, *donde* $(x_1, ..., x_n, \alpha_1, ..., \alpha_m) \in S$.

  *(b) Para cada* $(x_1, ...x_n, \alpha_1, ..., \alpha_m) \in S$ *hay un* $x \in \omega$ *tal que* $\mathcal{P}$ *se detiene partiendo desde el estado* $\|x\|$ *y llega a un estado de la forma* $((x_1, ..., x_n, y_1, ...), (\alpha_1, ..., \alpha_m, \beta_1, ...))$

(hacer el caso $n = 2$ y $m = 1$)

## Combo 3

**Theorem 5 (Godel vence a Neumann)** *Si* $f : D_f \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \to \Sigma^*$ *es* $\Sigma$*-computable, entonces* $f$ *es* $\Sigma$*-recursiva.*

**Theorem 6 (Caracterizacion de conjuntos efectivamente computables)** *Sea* $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$. *Son equivalentes*

*(a)* $S$ *es* $\Sigma$*-efectivamente computable*

*(b)* $S$ *y* $(\omega^n \times \Sigma^{*m}) - S$ *son* $\Sigma$*-efectivamente enumerables*

(Haga solo (b) implica (a). La prueba de este resultado esta al final de la Guia 3)

## Combo 4

**Proposition 7 (Caracterizacion basica de conjuntos enumerables)** *Sea* $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ *un conjunto no vacio. Entonces son equivalentes:*

*(1)* $S$ *es* $\Sigma$*-enumerable*

*(2) Hay un programa* $\mathcal{P} \in \mathrm{Pro}^\Sigma$ *tal que:*

  *(a) Para cada* $x \in \omega$, *tenemos que* $\mathcal{P}$ *se detiene partiendo desde el estado* $\|x\|$ *y llega a un estado de la forma* $((x_1, ..., x_n, y_1, ...), (\alpha_1, ..., \alpha_m, \beta_1, ...))$, *donde* $(x_1, ..., x_n, \alpha_1, ..., \alpha_m) \in S$.

*(b) Para cada $(x_1,...x_n,\alpha_1,...,\alpha_m) \in S$ hay un $x \in \omega$ tal que $\mathcal{P}$ se detiene partiendo desde el estado $\|x\|$ y llega a un estado de la forma $((x_1,...,x_n,y_1,...),(\alpha_1,...,\alpha_m,\beta_1,...))$*

(hacer el caso $n = 2$ y $m = 1$)

**Lemma 8 (Lema de la sumatoria)** *Sea $\Sigma$ un alfabeto finito. Si $f : \omega \times S_1 \times ... \times S_n \times L_1 \times ... \times L_m \to \omega$ es $\Sigma$-p.r., con $S_1,...,S_n \subseteq \omega$ y $L_1,...,L_m \subseteq \Sigma^*$ no vacios, entonces la funcion $\lambda xy\vec{x}\vec{\alpha}\left[\sum_{t=x}^{t=y} f(t,\vec{x},\vec{\alpha})\right]$ es $\Sigma$-p.r.*

## Combo 5

**Lemma 9** *Sean $S_1, S_2 \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ conjuntos $\Sigma$-efectivamente enumerables. Entonces $S_1 \cap S_2$ es $\Sigma$-efectivamente enumerable. (Es ejercicio de la guia 3 y en el apunte esta probado.)*

**Lemma 10 (Lema de cuantificacion acotada)** *Sea $\Sigma$ un alfabeto finito. Sea $P : S \times S_1 \times ... \times S_n \times L_1 \times ... \times L_m \to \omega$ un predicado $\Sigma$-p.r., con $S, S_1,...,S_n \subseteq \omega$ y $L_1,...,L_m \subseteq \Sigma^*$ no vacios. Supongamos $\bar{S} \subseteq S$ es $\Sigma$-p.r.. Entonces $\lambda x\vec{x}\vec{\alpha}\left[(\forall t \in \bar{S})_{t \leq x}\ P(t,\vec{x},\vec{\alpha})\right]$ es $\Sigma$-p.r.*

## Combo 6

**Lemma 11 (Efectivamente computable implica efectivamente enumerable)** *Si $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ es $\Sigma$-efectivamente computable entonces $S$ es $\Sigma$-efectivamente enumerable.*

**Theorem 12 (Caracterizacion de conjuntos r.e.)** *Dado $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$, son equivalentes*

*(1) $S$ es $\Sigma$-recursivamente enumerable*

*(2) $S = I_F$, para alguna $F : D_F \subseteq \omega^k \times \Sigma^{*l} \to \omega^n \times \Sigma^{*m}$ tal que cada $F_{(i)}$ es $\Sigma$-recursiva.*

*(3) $S = D_f$, para alguna funcion $\Sigma$-recursiva $f$*

(haga solo la prueba de (2)⇒(3), caso $k = l = 1$ y $n = m = 2$)

## Combo 7

**Lemma 13 (Lema de minimizacion acotada)** *Sean $n, m \geq 0$. Sea $P : D_P \subseteq \omega \times \omega^n \times \Sigma^{*m} \to \omega$ un predicado $\Sigma$-p.r.. Entonces*

*(a) $M(P)$ es $\Sigma$-recursiva.*

*(b) Si hay una funcion $\Sigma$-p.r. $f : \omega^n \times \Sigma^{*m} \to \omega$ tal que*

$$M(P)(\vec{x},\vec{\alpha}) = \min_t P(t,\vec{x},\vec{\alpha}) \leq f(\vec{x},\vec{\alpha}), \text{ para cada } (\vec{x},\vec{\alpha}) \in D_{M(P)},$$

*entonces $M(P)$ es $\Sigma$-p.r..*

**Lemma 14** *Supongamos $f : D_f \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \to O$ es $\Sigma$-recursiva y $S \subseteq D_f$ es $\Sigma$-r.e., entonces $f|_S$ es $\Sigma$-recursiva.*

## Combo 8

**Lemma 15** *Supongamos $\Sigma \supseteq \Sigma_p$. Entonces $AutoHalt^{\Sigma}$ no es $\Sigma$-recursivo.*

**Theorem 16** *Supongamos $\Sigma \supseteq \Sigma_p$. Entonces $AutoHalt^{\Sigma}$ no es $\Sigma$-efectivamente computable. Es decir no hay ningun procedimiento efectivo que decida si un programa de $\mathcal{S}^{\Sigma}$ termina partiendo de si mismo.*

**Lemma 17** *Supongamos que $\Sigma \supseteq \Sigma_p$. Entonces*

$$A = \left\{ \mathcal{P} \in \mathrm{Pro}^{\Sigma} : AutoHalt^{\Sigma}(\mathcal{P}) = 1 \right\}$$

*es $\Sigma$-r.e. y no es $\Sigma$-recursivo. Mas aun el conjunto*

$$N = \left\{ \mathcal{P} \in \mathrm{Pro}^{\Sigma} : AutoHalt^{\Sigma}(\mathcal{P}) = 0 \right\}$$

*no es $\Sigma$-r.e.*

**Theorem 18 (Neumann vence a Godel)** *Si $h$ es $\Sigma$-recursiva, entonces $h$ es $\Sigma$-computable*

(En la induccion de la prueba hacer solo el caso $h = M(P)$)

## Combo 9

**Lemma 19 (Lema de division por casos para funciones recursivas)** *Supongamos $f_i : D_{f_i} \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \to O$, $i = 1, ..., k$, son funciones $\Sigma$-recursivas tales que $D_{f_i} \cap D_{f_j} = \emptyset$ para $i \neq j$. Entonces la funcion $f_1 \cup ... \cup f_k$ es $\Sigma$-recursiva.*

(Haga el caso $k = 2$, $n = m = 1$ y $O = \omega$

**Lemma 20** *$Halt^{n,m}$ es $(\Sigma \cup \Sigma_p)$-p.r.*

**Proposition 21** *$T^{n,m}$ es $(\Sigma \cup \Sigma_p)$-recursiva*

# Combos de definiciones y convenciones notacionales de la materia Logica

## Combo 1

1. Defina $n(\mathbf{J})$ (para $\mathbf{J} \in Just^+$)
2. Defina "par adecuado de tipo $\tau$" (no hace falta que defina cuando $\mathbf{J} \in Just^+$ es balanceada)
3. Defina $Mod_T(\varphi)$
4. Dados $\varphi =_d \varphi(v_1, ..., v_n)$, $\mathbf{A}$ una estructura de tipo $\tau$ y $a_1, ..., a_n \in A$, defina que significa $\mathbf{A} \models \varphi[a_1, ..., a_n]$ (i.e. Convencion notacional 4)
5. Defina $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, ^c, 0, 1)/\theta$ ($\theta$ una congruencia del reticulado complementado $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, ^c, 0, 1)$)

## Combo 2

1. Defina $(\Sigma, \tau) \models \varphi$
2. Defina "Particion de $A$" y $R_{\mathcal{P}}$
3. Defina cuando "$\varphi_i$ esta bajo la hipotesis $\varphi_l$ en $(\varphi, \mathbf{J})$". (no hace falta que defina $\mathcal{B}^{\mathbf{J}}$)
4. Defina $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})/\theta$ ($\theta$ una congruencia del reticulado $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$). (No hace falta que defina el concepto de congruencia.)

## Combo 3

1. Dados $t =_d t(v_1, ..., v_n) \in T^\tau$, $\mathbf{A}$ una estructura de tipo $\tau$ y $a_1, ..., a_n \in A$, defina $t^{\mathbf{A}}[a_1, ..., a_n]$ (i.e. Convencion notacional 2)
2. Defina "$F$ es un homomorfismo de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, ^c, 0, 1)$ en $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}', ^{c'}, 0', 1')$"
3. Defina "filtro generado por $S$ en $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$"
4. Cuando $\mathbf{J} \in Just^+$ es balanceada (no hace falta que defina $\mathcal{B}^{\mathbf{J}}$)

## Combo 4

1. Defina "$(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, ^c, 0, 1)$ es un subreticulado complementado de $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}', ^{c'}, 0', 1')$"
2. Defina $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}]$ (version absoluta, no dependiente de una declaracion previa, i.e. $\vec{a} \in A^{\mathbf{N}}$. No hace falta definir $t^{\mathbf{A}}[\vec{a}]$)
3. Defina la relacion "*$v$ ocurre libremente en $\varphi$ a partir de $i$*"
4. Defina reticulado cuaterna

## Combo 5

Explique la notacion declaratoria para terminos con sus 3 convenciones notacionales (convenciones 1,2 y 5 de la Guia 10)

## Combo 6

Explique la notacion declaratoria para formulas con sus 3 convenciones notacionales (convenciones 3,4 y 6 de la Guia 10). Puede asumir la notacion declaratoria para terminos

## Combo 7

1. Defina recursivamente la relacion "*$v$ es sustituible por $w$ en $\varphi$*"
2. Defina cuando $\mathbf{J} \in Just^+$ es balanceada (no hace falta que defina $\mathcal{B}^{\mathbf{J}}$)
3. Defina "filtro de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$"
4. Defina "teoria consistente"

## Combo 8

1. Defina $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, ^c, 0, 1)/\theta$ ($\theta$ una congruencia del reticulado complementado $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, ^c, 0, 1)$)
2. Dados $\varphi =_d \varphi(v_1, ..., v_n)$, $\mathbf{A}$ una estructura de tipo $\tau$ y $a_1, ..., a_n \in A$, defina que significa $\mathbf{A} \models \varphi[a_1, ..., a_n]$ (i.e. Convencion notacional 4)
3. Dado un poset $(P, \leq)$, defina "$a$ es supremo de $S$ en $(P, \leq)$"
4. Defina "$i$ es anterior a $j$ en $(\varphi, \mathbf{J})$" (no hace falta que defina $\mathcal{B}^{\mathbf{J}}$)

## Combo 9

1. Defina "tesis del bloque $\langle i, j \rangle$ en $(\varphi, \mathbf{J})$"
2. Defina $\dashv\vdash_T$
3. Defina $\mathsf{s}^T$ (explique por que la definicion es inhambigua)
4. Defina $\mathcal{A}_T$
5. Defina "$S$ es un subuniverso del reticulado complementado $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, ^c, 0, 1)$"

## Combos de teoremas de la materia Logica

La siguiente lista contiene 8 combos de resultados de la teoria los cuales seran utilizados para la parte teorica del examen. Algunas observaciones:

1. Cuando el alumno desarrolle una prueba de un resultado perteneciente a un combo, podra utilizar un resultado previo sin necesidad de demostrarlo, salvo que justo el combo exija la prueba de dicho resultado. Cuando aplique algun resultado sin demostracion debera enunciarlo correctamente.

2. En general se puede dejar de hacer ciertos casos en las pruebas, por ser similares a otros ya hechos. El criterio para decidir esto se puede ver en las pruebas en las guias.

### Combo 1

**Theorem 22 (Teorema del Filtro Primo)** *Sea* $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ *un reticulado distributivo y* $F$ *un filtro. Supongamos* $x_0 \in L - F$*. Entonces hay un filtro primo* $P$ *tal que* $x_0 \notin P$ *y* $F \subseteq P$*.*

**Lemma 23 (Propiedades basicas de la consistencia)** *Sea* $(\Sigma, \tau)$ *una teoria.*

*(1) Si* $(\Sigma, \tau)$ *es inconsistente, entonces* $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$*, para toda sentencia* $\varphi$*.*

*(2) Si* $(\Sigma, \tau)$ *es consistente y* $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$*, entonces* $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau)$ *es consistente.*

*(3) Si* $(\Sigma, \tau) \nvdash \neg\varphi$*, entonces* $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau)$ *es consistente.*

### Combo 2

**Theorem 24 (Teorema de Dedekind)** *Sea* $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ *un reticulado. La relacion binaria definida por:*

$$x \leq y \text{ si y solo si } x \mathsf{\ s\ } y = y$$

*es un orden parcial sobre* $L$ *para el cual se cumple que:*

$$\sup(\{x, y\}) = x \mathsf{\ s\ } y$$
$$\inf(\{x, y\}) = x \mathsf{\ i\ } y$$

*cualesquiera sean* $x, y \in L$

**Lemma 25** *Supongamos que* $\vec{a}, \vec{b}$ *son asignaciones tales que si* $x_i \in Li(\varphi)$*, entonces* $a_i = b_i$*. Entonces* $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}]$ *sii* $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{b}]$

## Combo 3

**Theorem 26 (Lectura unica de terminos)** *Dado $t \in T^\tau$ se da una de las siguientes:*

*(1)* $t \in Var \cup \mathcal{C}$

*(2) Hay unicos* $n \geq 1,\ f \in \mathcal{F}_n,\ t_1, ..., t_n \in T^\tau$ *tales que* $t = f(t_1, ..., t_n)$.

**Lemma 27** *Supongamos que* $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ *es un isomorfismo. Sea* $\varphi \in F^\tau$. *Entonces*

$$\mathbf{A} \models \varphi[(a_1, a_2, ...)] \text{ sii } \mathbf{B} \models \varphi[(F(a_1), F(a_2), ...)]$$

*para cada* $(a_1, a_2, ...) \in A^{\mathbf{N}}$. *En particular* $\mathbf{A}$ *y* $\mathbf{B}$ *satisfacen las mismas sentencias de tipo* $\tau$.

**Theorem 28** *Sea* $T = (\Sigma, \tau)$ *una teoria. Entonces* $(S^\tau / \dashv\vdash_T, \mathsf{s}^T, \mathsf{i}^T, {}^{\mathsf{c}^T}, 0^T, 1^T)$ *es un algebra de Boole.*

Pruebe solo el item (6).

## Combo 4

**Lemma 29 (Propiedades basicas de la deduccion)** *Sea* $(\Sigma, \tau)$ *una teoria.*

*(1) (Uso de Teoremas). Si* $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi_1, ..., \varphi_n$ *y* $(\Sigma \cup \{\varphi_1, ..., \varphi_n\}, \tau) \vdash \varphi$, *entonces* $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$.

*(2) Supongamos* $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi_1, ..., \varphi_n$. *Si R es una regla distinta de GENERALIZACION y ELECCION y* $\varphi$ *se deduce de* $\varphi_1, ..., \varphi_n$ *por la regla R, entonces* $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$.

*(3)* $(\Sigma, \tau) \vdash (\varphi \to \psi)$ *si y solo si* $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau) \vdash \psi$.

**Theorem 30** *Sea* $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, ^{\mathbf{c}}, 0, 1)$ *un álgebra de Boole y sean* $a, b \in B$. *Se tiene que:*

*(1)* $(a \,\mathsf{i}\, b)^c = a^c \,\mathsf{s}\, b^c$

*(2)* $a \,\mathsf{i}\, b = 0$ *si y solo si* $b \leq a^c$

**Lemma 31** *Sean* $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ *y* $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}')$ *reticulados y sean* $(L, \leq)$ *y* $(L', \leq')$ *los posets asociados. Sea* $F : L \to L'$ *una funcion. Entonces F es un isomorfismo de* $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ *en* $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}')$ *si y solo si F es un isomorfismo de* $(L, \leq)$ *en* $(L', \leq')$

## Combo 5

**Theorem 32 (Teorema de Completitud)** *Sea* $T = (\Sigma, \tau)$ *una teoria de primer orden. Si* $T \models \varphi$, *entonces* $T \vdash \varphi$.

Haga solo el caso en que $\tau$ tiene una cantidad infinita de nombres de cte que no ocurren en las sentencias de $\Sigma$. En la exposicion de la prueba no es necesario que demuestre los items (1) y (5).

## Combo 6

**Theorem 33 (Teorema de Completitud)** *Sea $T = (\Sigma, \tau)$ una teoria de primer orden. Si $T \models \varphi$, entonces $T \vdash \varphi$.*

Haga solo el caso en que $\tau$ tiene una cantidad infinita de nombres de cte que no ocurren en las sentencias de $\Sigma$. En la exposicion de la prueba no es necesario que demuestre los items: (1), (2), (3) y (4)

## Combo 7

**Lemma 34 (Propiedades basicas de la deduccion)** *Sea $(\Sigma, \tau)$ una teoria.*

*(1) (Uso de Teoremas) Si $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi_1, ..., \varphi_n$ y $(\Sigma \cup \{\varphi_1, ..., \varphi_n\}, \tau) \vdash \varphi$, entonces $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$.*

*(2) Supongamos $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi_1, ..., \varphi_n$. Si $R$ es una regla distinta de GENERALIZACION y ELECCION y $\varphi$ se deduce de $\varphi_1, ..., \varphi_n$ por la regla $R$, entonces $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$.*

*(3) $(\Sigma, \tau) \vdash (\varphi \to \psi)$ si y solo si $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau) \vdash \psi$.*

**Lemma 35** *Sea $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ un reticulado y sea $\theta$ una congruencia de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$. Entonces:*

*(1) $(L/\theta, \tilde{\mathsf{s}}, \tilde{\imath})$ es un reticulado.*

*(2) El orden parcial $\tilde{\leq}$ asociado al reticulado $(L/\theta, \tilde{\mathsf{s}}, \tilde{\imath})$ cumple*

$$x/\theta \tilde{\leq} y/\theta \text{ sii } y\theta(x \mathsf{ s } y)$$

**Lemma 36** *Sean $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ y $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}')$ reticulados y sean $(L, \leq)$ y $(L', \leq')$ los posets asociados. Sea $F : L \to L'$ una funcion. Entonces $F$ es un isomorfismo de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ en $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}')$ si y solo si $F$ es un isomorfismo de $(L, \leq)$ en $(L', \leq')$*

## Combo 8

**Lemma 37** *Supongamos que $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ es un isomorfismo. Sea $\varphi =_d \varphi(v_1, ..., v_n) \in F^\tau$. Entonces*

$$\mathbf{A} \models \varphi[a_1, a_2, ..., a_n] \text{ sii } \mathbf{B} \models \varphi[F(a_1), F(a_2), ..., F(a_n)]$$

*para cada $a_1, a_2, ..., a_n \in A$.*

**Lemma 38** *Sean $(P, \leq)$ y $(P', \leq')$ posets. Supongamos $F$ es un isomorfismo de $(P, \leq)$ en $(P', \leq')$.*

*(a) Para cada $S \subseteq P$ y cada $a \in P$, se tiene que $a$ es cota superior (resp. inferior) de $S$ si y solo si $F(a)$ es cota superior (resp. inferior) de $F(S)$.*

*(b) Para cada $S \subseteq P$, se tiene que existe $\sup(S)$ si y solo si existe $\sup(F(S))$ y en el caso de que existan tales elementos se tiene que $F(\sup(S)) = \sup(F(S))$.*