Combo 9

2 de julio de 2024

1. Lema 19: Lema de división por casos para funciones recursivas

1.1. Enunciado

Supongamos $f_i : D_{f_i} \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \to O$, $i = 1, ..., k$, son funciones Σ-recursivas tales que $D_{f_i} \cap D_{f_j} = \emptyset$ para $i \neq j$. Entonces la funcion $f_1 \cup ... \cup f_k$ es Σ-recursiva.

Nota: haga el caso $k = 2, n = m = 1, O = \omega$

1.2. Demostración

Probaremos el caso $k = 2$ y $O = \omega$. Ademas supondremos que $n = m = 1$. Sean $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ programas que computen las funciones f_1 y f_2, respectivamente. Para $i = 1, 2$, definamos

$$H_i = \lambda t x_1 \alpha_1 \left[Halt^{1,1}(t, x_1, \alpha_1, \mathcal{P}_i)\right]$$

Notar que $D_{H_i} = \omega^2 \times \Sigma^*$ y que H_i es Σ-mixta. Ademas sabemos que la funcion $Halt^{1,1}$ es $(\Sigma \cup \Sigma_p)$-p.r. por lo cual resulta facilmente que H_i es $(\Sigma \cup \Sigma_p)$-p.r.. Por el Teorema de Independencia del Alfabeto tenemos que H_i es Σ-p.r.. Entonces H_i es Σ-computable por lo cual tenemos que hay un macro:

$$[\text{IF } H_i(\text{V1}, \text{V2}, \text{W1}) \text{ GOTO A1}]$$

Para hacer mas intuitivo el uso de este macro lo escribiremos de la siguiente manera

$$\left[\text{IF } Halt^{1,1}(\text{V1}, \text{V2}, \text{W1}, \mathcal{P}_i) \text{ GOTO A1}\right]$$

Ya que cada f_i es Σ-recursiva, hay macros

$$[\text{V2} \leftarrow f_1(\text{V1}, \text{W1})]$$
$$[\text{V2} \leftarrow f_2(\text{V1}, \text{W1})]$$

Sea $\mathcal{P}$ el siguiente programa:

$$\begin{array}{ll}
\text{L1} & \text{N20} \leftarrow \text{N20} + 1 \\
 & \left[\text{IF } Halt^{1,1}(\text{N20}, \text{N1}, \text{P1}, \mathcal{P}_1) \text{ GOTO L2}\right] \\
 & \left[\text{IF } Halt^{1,1}(\text{N20}, \text{N1}, \text{P1}, \mathcal{P}_2) \text{ GOTO L3}\right] \\
 & \text{GOTO L1} \\
\text{L2} & [\text{N1} \leftarrow f_1(\text{N1}, \text{P1})] \\
 & \text{GOTO L4} \\
\text{L3} & [N1 \leftarrow f_2(\text{N1}, \text{P1})] \\
\text{L4} & \text{SKIP}
\end{array}$$

Luego, debemos demostrar que $\mathcal{P}$ computa la función $f_1 \cup f_2$. Para ello, hay que probar que $f_1 \cup f_2 = \Psi_{\mathcal{P}}^{1,1,\#}$, por lo que vemos que:

- $D_{f_1 \cup f_2} = D_{\Psi_{\mathcal{P}}^{1,1,\#}}$: Es fácil de ver que $D_{f_1 \cup f_2} = D_{f_1} \cup D_{f_2} = D_{\Psi_{\mathcal{P}}^{1,1,\#}}$, porque $\mathcal{P}$ solo se detiene si $\mathcal{P}_1$ o $\mathcal{P}_2$ se detienen en una cantidad finita de pasos partiendo del mismo estado inicial que $\mathcal{P}$.
- $\forall (x, \alpha) \in D_{f_1 \cup f_2}, (f_1 \cup f_2)(x, \alpha) = \Psi_{\mathcal{P}}^{1,1,\#}(x, \alpha)$: Notemos que $\mathcal{P}$ se detiene cuando $\mathcal{P}_1$ o $\mathcal{P}_2$ se detienen en una cantidad finita de pasos partiendo del mismo estado inicial que $\mathcal{P}$ (la cantidad de pasos está dada por el valor contenido en $N20$). Luego, como $D_{f_1} \cap D_{f_2} = \emptyset$, solo se puede detener uno de ellos, por lo que el valor que contiene $N1$ al detenerse $\mathcal{P}$ es $(f_1 \cup f_2)(x, \alpha)$ si $\mathcal{P}$ arranca con el estado inicial $||x, \alpha||$.

Finalmente, se cumple que $\mathcal{P}$ computa a $f_1 \cup f_2$, por lo que $f_1 \cup f_2$ es Σ-computable. Luego, por Teorema tenemos que es Σ-recursiva, por lo que se demuestra.

2. Lema 20

2.1. Enunciado

$Halt^{n,m}$ es $(\Sigma \cup \Sigma_p)$-p.r.

2.2. Demostración

Notar que $Halt^{n,m} = \lambda xy[x = y] \circ \left[i^{n,m}, \lambda\mathcal{P}[n(\mathcal{P}) + 1] \circ p_{1+n+m+1}^{1+n,m+1}\right]$. Como por lema sabemos que $\lambda\mathcal{P}\,[n(\mathcal{P})]$ es $(\Sigma \cup \Sigma_p)$-p.r., entonces como se obtiene por composiciones de funciones $(\Sigma \cup \Sigma_p)$-p.r., $Halt^{n,m}$ es $(\Sigma \cup \Sigma_p)$-p.r..

3. Proposición 21

3.1. Enunciado

$T^{n,m}$ es $(\Sigma \cup \Sigma_p)$-recursiva

3.2. Demostración

El Lema de minimización nos dice que: Sean $n, m \geq 0$. Sea $P : D_P \subseteq \omega \times \omega^n \times \Sigma^{*m} \to \omega$ un predicado Σ-p.r.. Entonces

(a) $M(P)$ es Σ-recursiva.

(b) Si hay una funcion Σ-p.r. $f : \omega^n \times \Sigma^{*m} \to \omega$ tal que

$$M(P)(\vec{x}, \vec{\alpha}) = \min_t P(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) \leq f(\vec{x}, \vec{\alpha}), \text{ para cada } (\vec{x}, \vec{\alpha}) \in D_{M(P)},$$

entonces $M(P)$ es Σ-p.r..

Luego, como $T^{n,m} = M(Halt^{n,m})$, por lo anterior tenemos que $T^{n,m}$ es $(\Sigma \cup \Sigma_p)$-recursiva.