Combo 2

July 3, 2024

1 Lema 3: Lema de división por casos para funciones p.r.

1.1 Enunciado

Sean $O \in \{\omega, \Sigma^*\}$ y $n, m \in \omega$. Supongamos $f_i : D_{f_i} \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \to \Sigma^*$, $i = 1, ..., k$, son funciones Σ-p.r. tales que $D_{f_i} \cap D_{f_j} = \emptyset$ para $i \neq j$. Entonces $f_1 \cup ... \cup f_k$ es Σ-p.r..

1.2 Demostración

Supongamos $O = \Sigma^*$ y $k = 2$. Sean

$$\bar{f}_i : \omega^n \times \Sigma^{*m} \to \Sigma^*, i = 1, 2,$$

funciones Σ-p.r. tales que $\bar{f}_i|_{D_{f_i}} = f_i$, $i = 1, 2$ (Lema de Extensión de Funciones). Por Lema sabemos que si S es dominio de una función Σ-pr., entonces S es Σ-p.r.. Luego, los conjuntos D_{f_1} y D_{f_2} son Σ-p.r. y por lo tanto lo es $D_{f_1} \cup D_{f_2}$. Ya que

$$f_1 \cup f_2 = \left(\lambda\alpha\beta\,[\alpha\beta] \circ \left[\lambda x\alpha\,[\alpha^x] \circ \left[\chi^{\omega^n \times \Sigma^{*m}}_{D_{f_1}}, \bar{f}_1\right], \lambda x\alpha\,[\alpha^x] \circ \left[\chi^{\omega^n \times \Sigma^{*m}}_{D_{f_2}}, \bar{f}_2\right]\right]\right)|_{D_{f_1} \cup D_{f_2}}$$

tenemos que $f_1 \cup f_2$ es Σ-p.r..

El caso $k > 2$ puede probarse de forma totamente análoga por induccion ya que

$$f_1 \cup ... \cup f_k = (f_1 \cup ... \cup f_{k-1}) \cup f_k.$$

se puede considerar como unión de dos funciones y recaemos a la misma solución anterior.

2 Proposición 4: Caracterización básica de conjuntos enumerables

2.1 Enunciado

Sea $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ un conjunto no vacio. Entonces son equivalentes:

(1) S es Σ-enumerable

(2) Hay un programa $\mathcal{P} \in \text{Pro}^{\Sigma}$ tal que:

   (a) Para cada $x \in \omega$, tenemos que $\mathcal{P}$ se detiene partiendo desde el estado $\|x\|$ y llega a un estado de la forma $((x_1, ..., x_n, y_1, ...), (\alpha_1, ..., \alpha_m, \beta_1, ...))$, donde $(x_1, ..., x_n, \alpha_1, ..., \alpha_m) \in S$.

   (b) Para cada $(x_1, ...x_n, \alpha_1, ..., \alpha_m) \in S$ hay un $x \in \omega$ tal que $\mathcal{P}$ se detiene partiendo desde el estado $\|x\|$ y llega a un estado de la forma $((x_1, ..., x_n, y_1, ...), (\alpha_1, ..., \alpha_m, \beta_1, ...))$

Nota: hacer el caso $n = 2, m = 1$.

2.2 Demostración para el caso $n = 2, m = 1$

(1) $\Rightarrow$ (2). Ya que S es no vacio, por definicion tenemos que hay una $F : \omega \to \omega^2 \times \Sigma^*$ tal que $I_F = S$ y $F_{(i)}$ es Σ-computable, para cada $i \in \{1, 2, 3\}$. Por la Proposicion de existencia de macros, tenemos que existen macros:

$$\left[\text{V2} \leftarrow F_{(1)}(\text{V1})\right]$$
$$\left[\text{V2} \leftarrow F_{(2)}(\text{V1})\right]$$
$$\left[\text{W1} \leftarrow F_{(3)}(\text{V1})\right]$$

Sea $\mathcal{P}$ el siguiente programa:

$$\left[\text{P1} \leftarrow F_{(3)}(\text{N1})\right]$$
$$\left[\text{N2} \leftarrow F_{(2)}(\text{N1})\right]$$
$$\left[\text{N1} \leftarrow F_{(1)}(\text{N1})\right]$$

donde se supone que las expansiones de los macros usados son hechas usando variables auxiliares no pertenecientes a la lista $\text{N1}, \text{N2}, \text{P1}$ (por supuesto, dada la fortaleza de nuestros macros se puede usar una misma variable auxiliar para dos distintas expansiones), y tambien se supone que los labels auxiliares usados en dichas expansiones son todos distintos, es decir no usamos el mismo label auxiliar en dos expansiones distintas. Luego, tenemos que corroborar que $\mathcal{P}$ cumple las propiedades (a) y (b), lo cual es trivial de ver.

(2) $\Rightarrow$ (1). Supongamos $\mathcal{P} \in \text{Pro}^{\Sigma}$ cumple a y b de (2). Sean

$$\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}\text{N1} \leftarrow \text{N1}$$
$$\mathcal{P}_2 = \mathcal{P}\text{N1} \leftarrow \text{N2}$$
$$\mathcal{P}_3 = \mathcal{P}\text{P1} \leftarrow \text{P1}$$

Definamos

$$F_1 = \Psi^{1,0,\#}_{\mathcal{P}_1}$$
$$F_2 = \Psi^{1,0,\#}_{\mathcal{P}_2}$$
$$F_3 = \Psi^{1,0,*}_{\mathcal{P}_3}$$

Notese que cada F_i es Σ-computable y tiene dominio igual a ω. Sea $F = [F_1, F_2, F_3]$. Tenemos por definicion que $D_F = \omega$ y ya que $F_{(i)} = F_i$, para cada $i = 1, 2, 3$ tenemos que cada $F_{(i)}$ es Σ-computable. Luego, solo queda verificar que $I_F = S$, lo cual es trivial por cómo está definido $\mathcal{P}$.