Combo 7

July 3, 2024

1 Lema 13: Lema de minimización acotada

1.1 Enunciado

Sean $n, m \geq 0$. Sea $P : D_P \subseteq \omega \times \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow \omega$ un predicado Σ-p.r.. Entonces

(a) $M(P)$ es Σ-recursiva.

(b) Si hay una funcion Σ-p.r. $f : \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow \omega$ tal que

$$M(P)(\vec{x}, \vec{\alpha}) = \min_t P(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) \leq f(\vec{x}, \vec{\alpha}), \text{ para cada } (\vec{x}, \vec{\alpha}) \in D_{M(P)},$$

entonces $M(P)$ es Σ-p.r..

1.2 Demostración

(a) Sea $\bar{P} = P \cup C_0^{n+1,m}|_{(\omega^{n+1} \times \Sigma^{*m}) - D_P}$. Note que $\bar{P}$ es Σ-p.r., dado que:

- Como $D_P, \omega^{n+1} \times \Sigma^{*m}$ son Σ-p.r., $(\omega^{n+1} \times \Sigma^{*m}) - D_P$ es Σ-p.r. por Lema
- Como $C_0^{n+1,m}$ y $(\omega^{n+1} \times \Sigma^{*m}) - D_P$ son Σ-p.r., $C_0^{n+1,m}|_{(\omega^{n+1} \times \Sigma^{*m}) - D_P}$ es Σ-p.r. por lema de "clausura"
- La unión de dos funciones Σ-p.r. es Σ-p.r..

Veremos a continuacion que $M(P) = M(\bar{P})$. Notese que

$$\{t \in \omega : P(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) = 1\} = \{t \in \omega : \bar{P}(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) = 1\}$$

Esto claramente dice que $D_{M(P)} = D_{M(\bar{P})}$ y que $M(P)(\vec{x}, \vec{\alpha}) = M(\bar{P})(\vec{x}, \vec{\alpha})$, para cada $(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in D_{M(P)}$., por lo cual $M(P) = M(\bar{P})$.

Veremos entonces que $M(\bar{P})$ es Σ-recursiva. Sea k tal que $\bar{P} \in \mathrm{PR}_k^\Sigma$. Ya que $\bar{P}$ es Σ-total y $\bar{P} \in \mathrm{PR}_k^\Sigma \subseteq \mathrm{R}_k^\Sigma$, tenemos que $M(\bar{P}) \in \mathrm{R}_{k+1}^\Sigma$ y por lo tanto $M(\bar{P}) \in \mathrm{R}^\Sigma$.

(b) Ya que $M(P) = M(\bar{P})$, basta con probar que $M(\bar{P})$ es Σ-p.r. Primero veremos que $D_{M(\bar{P})}$ es un conjunto Σ-p.r.. Notese que

$$\chi_{D_{M(\bar{P})}}^{\omega^n \times \Sigma^{*m}} = \lambda \vec{x}\vec{\alpha} \left[(\exists t \in \omega)_{t \leq f(\vec{x},\vec{\alpha})} \; \bar{P}(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) \right]$$

lo cual nos dice que

$$\chi_{D_{M(\bar{P})}}^{\omega^n \times \Sigma^{*m}} = \lambda x\vec{x}\vec{\alpha} \left[(\exists t \in \omega)_{t \leq x} \; \bar{P}(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) \right] \circ \left[f, p_1^{n,m}, ..., p_{n+m}^{n,m} \right]$$

Pero el Lema de cuantificación acotada nos dice que $\lambda x\vec{x}\vec{\alpha} \left[(\exists t \in \omega)_{t \leq x} \; \bar{P}(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) \right]$ es Σ-p.r. por lo cual tenemos que $\chi_{D_{M(\bar{P})}}^{\omega^n \times \Sigma^{*m}}$ lo es.

Sea

$$P_1 = \lambda t\vec{x}\vec{\alpha} \left[\bar{P}(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) \wedge (\forall j \in \omega)_{j \leq t} \; j = t \vee \neg \bar{P}(j, \vec{x}, \vec{\alpha}) \right]$$

Note que P_1 es Σ-total. Ahora, P_1 es Σ-p.r dado que:

- La negación de un predicado Σ-p.r. es Σ-p.r.
- La conjunción de dos predicados Σ-p.r. con igual dominio es Σ-p.r.
- Sabemos que $\bar{P}$ es Σ-p.r.
- Por lema de cuantificación acotada y varias composiciones, $\lambda t\vec{x}\vec{\alpha}[(\forall j \in \omega)_{j \leq t} \; j = t]$ es Σ-p.r.

Ademas notese que para $(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in \omega^n \times \Sigma^{*m}$ se tiene que

$$P_1(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) = 1 \text{ si y solo si } (\vec{x}, \vec{\alpha}) \in D_{M(\bar{P})} \text{ y } t = M(\bar{P})(\vec{x}, \vec{\alpha})$$

Esto nos dice que

$$M(\bar{P}) = \left(\lambda \vec{x}\vec{\alpha} \left[\prod_{t=0}^{f(\vec{x},\vec{\alpha})} t^{P_1(t,\vec{x},\vec{\alpha})} \right] \right) |_{D_{M(\bar{P})}}$$

por lo cual para probar que $M(\bar{P})$ es Σ-p.r. solo nos resta probar que

$$F = \lambda \vec{x}\vec{\alpha} \left[\prod_{t=0}^{f(\vec{x},\vec{\alpha})} t^{P_1(t,\vec{x},\vec{\alpha})} \right]$$

lo es. Pero

$$F = \lambda xy\vec{x}\vec{\alpha} \left[\prod_{t=x}^{y} t^{P_1(t,\vec{x},\vec{\alpha})} \right] \circ \left[C_0^{n,m}, f, p_1^{n,m}, ..., p_{n+m}^{n,m} \right]$$

y por lo tanto el Lema de Iteración, tenemos que F es Σ-p.r..

2 Lema 14

2.1 Enunciado

Supongamos $f : D_f \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \to O$ es Σ-recursiva y $S \subseteq D_f$ es Σ-r.e., entonces $f|_S$ es Σ-recursiva.

2.2 Demostración

$S = \emptyset$ Entonces $f|_S = \emptyset$ y por lo tanto $f|_S$ es Σ-recursiva.

$S \neq \emptyset$ Haremos el caso $n = m = 1$ y $O = \Sigma^*$. Tenemos que hay una $F : \omega \to \omega \times \Sigma^*$ tal que $I_F = S$ y $F_{(1)}$, $F_{(2)}$ son Σ-recursivas. Ya que f, $F_{(1)}$ y $F_{(2)}$ son Σ-computables, hay macros

$$[\mathrm{W2} \leftarrow f(\mathrm{V1}, \mathrm{W1})]$$
$$\left[\mathrm{V2} \leftarrow F_{(1)}(\mathrm{V1})\right]$$
$$\left[\mathrm{W1} \leftarrow F_{(2)}(\mathrm{V1})\right]$$

Ya que los predicados $D = \lambda xy[x \neq y]$ y $D' = \lambda\alpha\beta[\alpha \neq \beta]$ son Σ-p.r., tenemos que son Σ-computables, por lo cual hay macros

$$[\mathrm{IF}\ D(\mathrm{V1}, \mathrm{V2})\ \mathrm{GOTO\ A1}]$$
$$[\mathrm{IF}\ D'(\mathrm{W1}, \mathrm{W2})\ \mathrm{GOTO\ A1}]$$

Para para hacer mas amigable la lectura los escribieremos de la siguiente manera

$$[\mathrm{IF\ V1} \neq \mathrm{V2\ GOTO\ A1}]$$
$$[\mathrm{IF\ W1} \neq \mathrm{W2\ GOTO\ A1}]$$

Sea $\mathcal{P}$ el siguiente programa

$$\begin{array}{ll}
\mathrm{L2} & [\mathrm{N2} \leftarrow F_{(1)}(\mathrm{N20})] \\
 & [\mathrm{P2} \leftarrow F_{(2)}(\mathrm{N20})] \\
 & [\mathrm{IF\ N1} \neq \mathrm{N2\ GOTO\ L1}] \\
 & [\mathrm{IF\ P1} \neq \mathrm{P2\ GOTO\ L1}] \\
 & [\mathrm{P1} \leftarrow f(\mathrm{N1}, \mathrm{P1})] \\
 & \mathrm{GOTO\ L3} \\
\mathrm{L1} & \mathrm{N20} \leftarrow \mathrm{N20} + 1 \\
 & \mathrm{GOTO\ L2} \\
\mathrm{L3} & \mathrm{SKIP}
\end{array}$$

Es facil ver que $\mathcal{P}$ computa a $f|_S$, dado que tenemos que ver que $f|_S = \Psi_{\mathcal{P}}^{1,1,*}$.