Práctico 3. Números Aleatorios y Método de Monte Carlo

My S
Práctico 3
Pág. 1

2) a) Queremos ver $P(X \geq 1)$. Para ello, vamos a ir haciendo observaciones:

(1): $P(X\geq 1) = P(U<1/2, W_1+W_2 \geq 1) + P(U \geq 1/2, W_1+W_2+W_3 \geq 1) \overset{\text{ind.}}{=}$

$$= P(U<1/2)\, P(W_1+W_2 \geq 1) + P(U\geq 1/2)\, P(W_1+W_2+W_3 \geq 1)$$

(2): $P(U<1/2) = 1/2$ y $P(U \geq 1/2) = 1/2$

(3): $P(W_1+W_2+W_3 \geq 1) = 1 - P(W_1+W_2+W_3 < 1)$ y $P(W_1+W_2 \geq 1) = 1 - P(W_1+W_2<1)$

(4): $$P(W_1+W_2 \leq 1) \underset{\text{def.}}{=} \int_{-\infty}^{1} f_{W_1+W_2}(x)\,dx \underset{\text{ind.}}{=} \int_0^1 f_{W_1} * f_{W_2}(x)\,dx \underset{\text{def. conv.}}{=} \int_0^1 \int_{-\infty}^{\infty} f_{W_1}(y) f_{W_2}(x-y)\,dy\,dx =$$

$$\overset{\text{def.}}{=} \int_0^1 \int_0^x dy\,dx = \int_0^1 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

(5): $$P(W_1+W_2+W_3 \leq 1) = P(W_1 + (W_2+W_3) \leq 1) \overset{\text{análogo (4)}}{=} \int_0^1 \int_{-\infty}^{\infty} f_{W_1}(y) f_{W_2+W_3}(x-y)\,dy\,dx \overset{\text{ind}}{=}$$

$$= \int_0^1 \int_0^x f_{W_1}(y) \cdot f_{W_2} * f_{W_3}(x-y)\,dy\,dx \overset{\text{def.}}{=} \int_0^1 \int_0^x f_{W_1}(y) \int_{-\infty}^{\infty} f_{W_2}(z) f_{W_3}((x-y)-z)\,dz\,dy\,dx =$$

$$= \int_0^1 \int_0^x f_{W_1}(y) \int_0^{x-y} f_{W_2}(z) f_{W_3}((x-y)-z)\,dz\,dy\,dx \overset{\text{def.}}{=} \int_0^1 \int_0^x \int_0^{x-y} dz\,dy\,dx = \int_0^1 \int_0^x (x-y)\,dy\,dx =$$

$$= \int_0^1 \left[xy - \frac{y^2}{2}\right]_0^x dx = \int_0^1 \frac{x^2}{2}\,dx = \left[\frac{x^3}{6}\right]_0^1 = \frac{1}{6}$$

Luego, tenemos que $P(X \geq 1) = \frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{6}\right) = \frac{2}{3} = 0,\overset{\frown}{6}$

3) a) De forma análoga a (ej. 2) buscamos $P(X \leq 2)$ y tenemos:

(1): $P(X\leq 2) = P(U<1/3)\, P(W_1+W_2 \leq 2) + P(U \geq 1/3)\, P(W_1+W_2+W_3 \leq 2)$

(2): $P(U<1/3) = 1/3$ y $P(U \geq 1/3) = 2/3$

(3): $P(W_1+W_2 \leq 2) = 1$ ya que $W_1, W_2 \in [0,1] \Rightarrow W_1+W_2 \in [0,2]$

(4): $P(W_1+W_2+W_3 \leq 2) = P(-(W_1+W_2+W_3) \geq -2) = P(3-(W_1+W_2+W_3) \geq 1) =$

$= P\left((1-W_1)+(1-W_2)+(1-W_3)\geq 1\right)$. Ahora, sean $X_i = 1-W_i$ para $i=1,2,3$, podemos ver que $X_i \sim U(0,1)$, por lo que tenemos $P(X_1+X_2+X_3\geq 1)$ que por (ej. 2) sabemos que es $5/6$.

Luego, $P(X\leq e) = \frac{1}{3}\cdot 1 + \frac{2}{3}\cdot\frac{5}{6} = \frac{8}{9} = 0,\overset{\frown}{8}$

(4) Consideramos C_i al evento de ir a la i-ésima caja y a X_i a la v.a. del tiempo a esperar para esa caja, donde $i=1,2,3$ y se cumple que:

* $P(C_1)=0,4$, $P(C_2)=0,32$, $P(C_3)=0,28$
* $X_1\sim\mathcal{E}(1/3)$, $X_2\sim\mathcal{E}(1/4)$, $X_3\sim\mathcal{E}(1/5)$

(a) $P(C_1, X_1\leq 4)+P(C_2,X_2\leq 4)+P(C_3,X_3\leq 4) \overset{\text{ind.}}{=} \sum_{i=1}^{3} P(C_i)P(X_i\leq 4) \overset{\text{def.}}{=}$

$= 0,4\cdot\int_0^4 \frac{1}{3}e^{-1/3 x}dx + 0,32\int_0^4\frac{1}{4}e^{-1/4 x}dx + 0,28\int_0^4\frac{1}{5}e^{-1/5 x}dx =$

$= 0,4\cdot\left[-e^{-1/3 x}\right]_0^4 + 0,32\cdot\left[-e^{-1/4 x}\right]_0^4 + 0,28\cdot\left[-e^{-1/5x}\right]_0^4 \approx 0,4\cdot 0,74 + 0,32\cdot 0,63 + 0,28\cdot 0,55 =$

$= 0,6516$

(b) Sea X la v.a. que representa el tiempo de todas las cajas, tenemos:

$P(C_i\mid X\geq 4) \underset{\text{Bayes}}{=} P(X\geq 4\mid C_i)\cdot\frac{P(C_i)}{P(X\geq 4)} = P(X\geq 4\mid C_i)\cdot\frac{P(C_i)}{1-P(X\leq 4)} \overset{\text{def.}}{=} \int_4^\infty \lambda_i e^{-\lambda_i x}dx\cdot\frac{P(C_i)}{1-P(X\leq 4)} =$

$= \left[-e^{-\lambda_i x}\right]_4^\infty\cdot\frac{P(C_i)}{1-P(X\leq 4)} = e^{-4\lambda_i}\cdot\frac{P(C_i)}{1-P(X\leq 4)} \underset{\text{result. ant.}}{\approx} e^{-4\lambda_i}\cdot\frac{P(C_i)}{1-0,6516} = e^{-4\lambda_i}\cdot\frac{P(C_i)}{0,3484}$

Luego, entonces:

$$P(C_i\mid X\geq 4)\approx\begin{cases}0,3026 & \text{si } i=1\\ 0,3379 & \text{si } i=2\\ 0,3611 & \text{si } i=3\end{cases}$$

M y S

Práctico 3

Pág (2)

(5) (a) $\displaystyle\int_0^1 (1-x^2)^{3/2}\,dx = \left[\frac{1}{8}\left(3\operatorname{arcsen}(x) + x\sqrt{1-x^2}\,(5-2x^2)\right)\right]_0^1 = \frac{3\pi}{16} \approx 0{,}589$

(b) $\displaystyle\int_2^3 \frac{x}{x^2-1}\,dx = \left[\frac{1}{2}\log(x^2-1)\right]_2^3 = \frac{1}{2}\log\left(\frac{8}{3}\right) \approx 0{,}49$

(c) $\displaystyle\int_0^\infty x(1+x^2)^{-2}\,dx = \left[-\frac{1}{2(x^2+1)}\right]_0^\infty = \frac{1}{2} = 0{,}5$

(d) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi} \approx 1{,}77$

(e) $\displaystyle\int_0^1\int_0^1 e^{(x+y)^2}\,dx\,dy \approx 4{,}8991$

(f) $\displaystyle\int_0^\infty\int_0^x e^{-(x+y)}\,dy\,dx = \frac{1}{2} = 0{,}5$

(7) (b) $E[N] = e$

(9) (a) Digamos que N_i representa la v.a. de la i-ésima tirada. Luego, buscamos saber:

$$\left[1-P(2\leq N_0\leq 5)\right]\cdot P(N_1\geq 4) + P(2\leq N_0\leq 5)\cdot P(N_1+N_2\geq 7) =$$

$$= \left(1-\frac{4}{6}\right)\cdot\frac{3}{6} + \frac{4}{6}\cdot\frac{\frac{6\cdot 7}{2}}{6^2} = \frac{5}{9} = 0{,}\widehat{5}.$$