...NUEL
...OLAS
...RADOR

MyS

Práctico 2

Pág. 1

PRÁCTICO 2 - PROCESOS DE POISSON

1) Tenemos $\{N(t), t \geq 0\}$ proceso de Poisson homogéneo con $\lambda = 0,3$.

Por prop. de incrementos estacionarios, buscamos $P(N(14-10)=0) = P(N(4)=0) =$

$$\underset{\text{def.}}{=} e^{-4 \cdot 0,3} \cdot \frac{(4 \cdot 0,3)^0}{0!} \approx 0,3$$

2) Tenemos $\{N(t), t \geq 0\}$ proceso de Poisson homogéneo con $\lambda = 0,1$

a) $$P(N(2)=0) \underset{\text{prop.}}{=} e^{-2 \cdot 0,1} \cdot \frac{(2 \cdot 0,1)^0}{0!} \approx 0,82$$

b) $$P(N(3)=0 \mid N(2)=0) \underset{\substack{\text{equiv.}\\ \text{con distr.}\\ \text{tiempo entre}\\ \text{arribos}}}{=} P(X_1 > 3 \mid X_1 > 2) \underset{\substack{\text{prop.}\\ \text{Falta de memoria}\\ \text{de exp.}}}{=} P(X_1 > 1) \underset{\text{equiv.}}{=} P(N(1)=0) \underset{\text{prop.}}{=} e^{-1 \cdot 0,1} \approx 0,9$$

3) Tenemos $\{N(t), t \geq 0\}$ proceso de Poisson homogéneo con $\lambda = 15$ y donde el tiempo 0 significan las 8a.m.

a) $$P(N(5)-N(4) > 20) \underset{\substack{\text{incr.}\\ \text{estacionario}}}{=} P(N(1) > 20) = 1 - P(N(1) \leq 20) = 1 - \sum_{x=0}^{20} P(N(1)=x) \underset{\text{def.}}{=}$$

$$= 1 - \sum_{x=0}^{20} e^{-15} \cdot \frac{15^x}{x!} = 1 - e^{-15} \cdot \sum_{x=0}^{20} \frac{15^x}{x!}$$

b) $$P(N(5)=100 \mid N(4)-N(1)=80) = \frac{P(N(5)=100, N(4)-N(1)=80)}{P(N(4)-N(1)=80)} \underset{\substack{\text{equiv.}\\ \text{e incr.}\\ \text{estacionario}}}{=} \frac{\sum_{x=0}^{20} P(N(4)=80+x, N(5)-N(4)=20-x)}{P(N(3)=80)}$$

$$\underset{\substack{\text{incr.}\\ \text{ind.}}}{=} \frac{\sum_{x=0}^{20} P(N(4)=80+x)\, P(N(5)-N(4)=20-x)}{P(N(3)=80)} \underset{\substack{\text{incr.}\\ \text{estacionario}}}{=} \frac{\sum_{x=0}^{20} P(N(4)=80+x)\, P(N(1)=20-x)}{P(N(3)=80)} \overset{\text{def.}}{=}$$

$$= \frac{\sum_{x=0}^{20} e^{-4 \cdot 15} \cdot \frac{(4 \cdot 15)^{80+x}}{(80+x)!} \cdot e^{-15} \cdot \frac{15^{20-x}}{(20-x)!}}{e^{-3 \cdot 15} \cdot \frac{(3 \cdot 15)^{80}}{80!}} = 80! \cdot e^{-2 \cdot 15} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{80} \cdot 15^{20} \cdot \sum_{x=0}^{20} \frac{4^x}{(80+x)!\,(20-x)!}$$

(4) Tenemos $\{N(t), t \geq 0\}$ proceso de Poisson homogéneo con $\lambda = 2$ (expresado para 25h).

(a) $P(N(1)=1) \underset{\text{def.}}{=} e^{-2} \cdot 2 \approx 0{,}27$

(b) $P(N(2) \leq 2) = \sum_{x=0}^{2} P(N(2)=x) \underset{\text{def.}}{=} \sum_{x=0}^{2} e^{-2\cdot 2} \frac{(2\cdot 2)^x}{x!} = e^{-4} \cdot \sum_{x=0}^{2} \frac{4^x}{x!}$

(c) $P(N(5) \geq 10) = 1 - P(N(5) \leq 9) = 1 - \sum_{x=0}^{9} P(N(5)=x) \underset{\text{def.}}{=} 1 - \sum_{x=0}^{9} e^{-2\cdot 5} \frac{(2\cdot 5)^x}{x!} =$

$= 1 - e^{-10} \cdot \sum_{x=0}^{9} \frac{10^x}{x!}$

(5) (a) $\{s<t\}$

$P(N(s)=k \mid N(t)=n) \underset{\text{prop.}}{=} \frac{P(N(s)=k, N(t)=n)}{P(N(t)=n)} \underset{\text{equiv.}}{=} \frac{P(N(s)=k, N(t)-N(s)=n-k)}{P(N(t)=n)} =$

$\underset{\substack{\text{incr.}\\ \text{ind.}}}{=} \frac{P(N(s)=k) P(N(t)-N(s)=n-k)}{P(N(t)=n)} \underset{\substack{\text{incr.}\\ \text{estacionario}}}{=} \frac{P(N(s)=k)\, P(N(t-s)=n-k)}{P(N(t)=n)} \underset{\text{def.}}{=} \frac{e^{-\lambda s} \frac{(\lambda s)^k}{k!} e^{-\lambda(t-s)} \frac{[\lambda(t-s)]^{n-k}}{(n-k)!}}{e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}} =$

$= \binom{n}{k} \cdot \frac{\lambda^n s^k (t-s)^{n-k}}{\lambda^n \cdot t^n} = \binom{n}{k} \cdot \left(\frac{s}{t}\right)^k \cdot \left(\frac{t-s}{t}\right)^{n-k} \Rightarrow N(s)=k \mid N(t)=n \sim B\left(n, \frac{s}{t}\right)$

siempre que $s<t$.

(b) $\{s>t\}$

$P(N(s)=k \mid N(t)=n) \overset{\text{prop.}}{=} \frac{P(N(s)=k, N(t)=n)}{P(N(t)=n)} \overset{\text{equiv.}}{=} \frac{P(\overset{N(s)-N(t)}{}=k-n, N(t)=n)}{P(N(t)=n)} \overset{\substack{\text{incr.}\\ \text{ind.}}}{=}$

$= \frac{P(\overset{N(s)-N(t)}{}=k-n) \cdot P(N(t)=n)}{P(N(t)=n)} \overset{\substack{\text{incr.}\\ \text{estacionario}}}{=} P(N(s-t)=k-n)$

$\Downarrow$

$P(N(s)=k \mid N(t)=n) = P(N(s-t)=k-n)$ si $s>t$.

UEL
OLAS
DOR

MyS
Práctico 2
Pág. 2

6) Tenemos $\{N(t), t \geq 0\}$ proceso de Poisson homogéneo con intensidad λ en horas.

a) [redacted]

$$P(N(1/3)=2 \mid N(1)=2) \underset{\substack{\downarrow \\ (\text{ej. 5} \\ s<t)}}{=} \binom{2}{2} \cdot \frac{(1/3)^2 \cdot (1-1/3)^{2-2}}{1^2} = \frac{1}{9}$$

b) $$P(N(1/3) \geq 1 \mid N(1)=2) = 1 - P(N(1/3)=0 \mid N(1)=2) \underset{\substack{\downarrow \\ (\text{ej. 5} \\ s<t)}}{=} 1 - \binom{2}{0} \frac{(1/3)^0 \cdot (1-1/3)^{2-0}}{1^2} = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$$

7) Tenemos $\{N(t), t \geq 0\}$ proceso de Poisson homogéneo con intensidad $\lambda = 0{,}05$ por segundo.

a) $$P(N(s)=0) \overset{\text{def.}}{=} e^{-0{,}05 \cdot s} \frac{(0{,}05 \cdot s)^0}{0!} = e^{-0{,}05 \cdot s} = \begin{cases} 0{,}9 & \text{si } s=2 \\ 0{,}78 & \text{si } s=5 \\ 0{,}61 & \text{si } s=10 \\ 0{,}37 & \text{si } s=20 \end{cases}$$

b) Consideramos el refinamiento por prób. de ser atropellado. Luego, consideramos $\{M(t), t \geq 0\}$ proceso de Poisson homogéneo con $\lambda_M = 0{,}05 \cdot \frac{80}{100} = 0{,}04$.

Luego, buscamos $$P(M(s)=0) \overset{\text{def.}}{=} e^{-0{,}04 \cdot s} \frac{(0{,}04 \cdot s)^0}{0!} = e^{-0{,}04 \cdot s} = \begin{cases} 0{,}92 & \text{si } s=2 \\ 0{,}82 & \text{si } s=5 \\ 0{,}67 & \text{si } s=10 \\ 0{,}45 & \text{si } s=20 \end{cases}$$

(Mismo $\{N(t), t \geq 0\}$ que el ej. anterior)

8) a) $$P(N(s) \leq 1) = P(N(s)=0) + P(N(s)=1) \overset{\text{def.}}{=} e^{-0{,}05 \cdot s} + e^{-0{,}05 \cdot s} \cdot 0{,}05 \cdot s = e^{-0{,}05 \cdot s}(1 + 0{,}05 \cdot s) =$$

$$= \begin{cases} 0{,}97 & \text{si } s=5 \qquad 0{,}74 \quad \text{si } s=20 \\ 0{,}91 & \text{si } s=10 \qquad 0{,}56 \quad \text{si } s=30 \end{cases}$$

(b) (i) $P(N(s)=2 \mid N(s_1)=1) \underset{\substack{\downarrow \\ \left(\substack{ej.\,5 \\ s>s_1}\right)}}{=} P(N(s-s_1)=2-1) = P(N(s-s_1)=1) \underset{\substack{\downarrow \\ def.}}{=} e^{-0{,}05(s-s_1)} \dfrac{[0{,}05(s-s_1)]^1}{1!} =$

$= e^{-0{,}05\cdot(s-s_1)} \cdot 0{,}05 \cdot (s-s_1)$

(ii)

$$P(N(s)=2 \mid N(s_1)=1) = \begin{cases} 0{,}19 & \text{si } s=10,\ s_1=5 \\ 0{,}35 & \text{si } s=20,\ s_1=5 \\ 0{,}36 & \text{si } s=30,\ s_1=5 \end{cases}$$

(9) Tenemos los procesos de Poisson homogéneos $\{B(t), t\geq 0\}$, $\{M(t), t\geq 0\}$, $\{Y(t), t\geq 0\}$ con $\lambda_B = 1$, $\lambda_M = 2$, $\lambda_Y = 3$ en minutos.

(a) $P(\min\{X_1^B, X_1^M, X_1^Y\} = X_1^Y) \underset{\substack{\downarrow \\ prop.}}{=} \dfrac{\lambda_Y}{\lambda_B+\lambda_M+\lambda_Y} = 0{,}5$

(b) $P(\min\{X_1^B, X_1^Y\} = X_1^B) \overset{\substack{prop. \\ \uparrow}}{=} \dfrac{\lambda_B}{\lambda_B+\lambda_Y} = 0{,}25$

(c) Como B, M, Y son independientes, por prop. $\{N(t) = B(t)+M(t)+Y(t), t\geq 0\}$ es un proceso de Poisson homogéneo con $\lambda = \lambda_B+\lambda_M+\lambda_Y = 6$.

Luego, buscamos $E[X_1^N] \underset{\substack{\downarrow \\ X_1^N \sim \mathcal{E}(6) \\ \text{por prop.}}}{=} 1/6 \approx 0{,}17$.

(10) Tenemos los procesos de Poisson independientes $\{A(t), t\geq 0\}$, $\{C(t), t\geq 0\}$, $\{M(t), t\geq 0\}$ con $\lambda_A = 2$, $\lambda_C = 1$, $\lambda_M = 1/3$ por 10 minutos.

(a) Como son ind., buscamos $P(A(2)=2)\cdot P(C(2)=0)\cdot P(M(2)=1) \overset{\substack{def. \\ \uparrow}}{=} e^{-4}\dfrac{4^2}{2!}\cdot e^{-2}\cdot e^{-2/3}\cdot(2/3) =$

$\approx 0{,}007$

(b) Consideramos la superposición $\{N(t)=A(t)+C(t)+M(t), t\geq 0\}$ que por prop. es un proceso de Poisson homogéneo con $\lambda_N = 10/3$. A esta le aplicamos el refinamiento por tener el cambio exacto, obteniendo $\{N_2(t), t\geq 0\}$ proceso de Poisson homogéneo con $\lambda_{N_2} = \frac{10}{3}\cdot\frac{1}{4} = \frac{5}{6}$ por prop.

Luego, buscamos $P(N_2(1)=0) \overset{\text{def.}}{=} e^{-\frac{5}{6}} \approx 0{,}43$

(11) Por prop., tenemos entonces los procesos de Poisson homogéneos $\{N_1(t), t\geq 0\}$, $\{N_2(t), t\geq 0\}$, $\{N(t)=N_1(t)+N_2(t), t\geq 0\}$ con $\lambda_{N_1}=1, \lambda_{N_2}=2, \lambda_N=3$.

(a) $P(N(1)=2, N(2)=5) \underset{\text{equiv.}}{=} P(N(1)=2, N(2)-N(1)=3) \underset{\text{incr. ind.}}{=} P(N(1)=2)\cdot P(N(2)-N(1)=3) \underset{\text{incr. estacionario}}{=}$

$= P(N(1)=2)\cdot P(N(1)=3) \underset{\text{def.}}{=} e^{-3}\cdot\frac{3^2}{2!}\cdot e^{-3}\cdot\frac{3^3}{3!} \approx 0{,}05$

(b) $P(N_1(1)=1 \mid N(1)=2) = \frac{P(N_1(1)=1, N(1)=2)}{P(N(1)=2)} = \frac{P(N_1(1)=1, N_1(1)+N_2(1)=2)}{P(N(1)=2)} \overset{\text{equiv.}}{=} \frac{P(N_1(1)=1, N_2(1)=1)}{P(N(1)=2)} =$

$\overset{\text{incr. ind.}}{=} \frac{P(N_1(1)=1)\cdot P(N_2(1)=1)}{P(N(1)=2)} \overset{\text{def.}}{=} \frac{e^{-1}\cdot e^{-2}\cdot 2}{e^{-3}\cdot\frac{3^2}{2}} \approx 0{,}44$

(c) Consideremos los primeros 2 arribos de N_1 y los 3 primeros de N_2, y veamos cómo se distribuyen en N:

* La cnt. total de órdenes es de $\frac{5!}{2!\,3!} = 10$

* Los órdenes donde el 2do de N_1 está antes que el 3ero de N_2 son aquellos donde el 5to considerado es de N_2. Luego, la cnt. es $\frac{4!}{2!\,2!} = 6$

Por ello, la prob. es de $6/10 = 0{,}6$.

(12) Tenemos los procesos de Poisson homogéneos $\{E(t), t\geq 0\}$, $\{T(t), t\geq 0\}$, $\{N(t) = E(t)+T(t), t\geq 0\}$ con intensidades $\lambda_T = 3$, $\lambda_E = 4$ y, por prop. ya que E,T son ind., $\lambda_N = 7$ por minuto.

(a) $P(\min\{X_1^E, X_1^T\} = X_1^E) \overset{\text{prop.}}{=} \dfrac{\lambda_E}{\lambda_E+\lambda_T} = \dfrac{4}{7} \approx 0{,}57$

(b) Análogamente al (ej. 11c), llegamos a que la probabilidad es: $\dfrac{\frac{7!}{3!\,4!}}{\frac{8!}{3!\,5!}} = \dfrac{5}{8} \approx 0{,}63$

(c) $P(N(4)=20) \overset{\text{def.}}{=} e^{-7\cdot 4} \cdot \dfrac{(7\cdot 4)^{20}}{20!} \approx 0{,}025$

(13) Tenemos $\{N(t), t\geq 0\}$ proceso de Poisson homogéneo con $\lambda = 2$ por semana. Si lo refinamos por el consumo de alcohol (prob. de 0,75), por prop. tenemos el proceso de Poisson homogéneo $\{A(t), t\geq 0\}$ con $\lambda_A = 2\cdot 0{,}75 = 1{,}5$ por semana.

(a) $P(A(1)=3) \underset{\text{def.}}{=} e^{-1{,}5} \cdot \dfrac{1{,}5^3}{3!} \approx 0{,}13$

(b) $P(N(1/7)\geq 1) = 1 - P(N(1/7)=0) \overset{\text{def.}}{=} 1 - e^{-2/7} \approx 0{,}25$

(c) Considerando $\{\neg A(t), t\geq 0\}$ con $\lambda_{\neg A} = 2\cdot 0{,}25 = 0{,}5$ como el refinamento de $N(t)$ por el no consumo de alcohol, tenemos $P(A(4)\leq 2 \mid N(4)=6) = \dfrac{P(A(4)\leq 2, N(4)=6)}{P(N(4)=6)} \underset{\text{equiv}}{=}$

$$= \frac{P(A(4)\leq 2, A(4)+\neg A(4)=6)}{P(N(4)=6)} \underset{\text{equiv.}}{=} \frac{\sum_{x=0}^{2} P(A(4)=x, \neg A(4)=6-x)}{P(N(4)=6)} \underset{\substack{\text{como}\\ A,\neg A \text{ son}\\ \text{ind.}}}{=} \frac{\sum_{x=0}^{2} P(A(4)=x)P(\neg A(4)=6-x)}{P(N(4)=6)} =$$

$$\overset{\text{def.}}{=} \frac{\sum_{x=0}^{2} e^{-4\cdot 1{,}5} \cdot \frac{(4\cdot 1{,}5)^x}{x!} \cdot e^{-4\cdot 0{,}5} \cdot \frac{(4\cdot 0{,}5)^{6-x}}{(6-x)!}}{e^{-4\cdot 2} \cdot \frac{(4\cdot 2)^6}{6!}} = \frac{6!}{2^{12}} \cdot \sum_{x=0}^{2} \frac{0{,}75^x}{x!\,(6-x)!}$$

MyS
Práctico 2
Pág. 4

(14) Tenemos $\{N(t), t \geq 0\}$ proceso de Poisson no homogéneo con intensidad $\lambda(t) = 3 + \frac{4}{t+1}$ $(t>0)$ por hora.

(a) $P(N(1)=5) \overset{\text{def.}}{=} e^{-m(0,1)} \frac{m(0,1)^5}{5!} = e^{-5{,}77} \cdot \frac{5{,}77^5}{5!} \approx 0{,}17$

$$m(0,1) \underset{\text{def.}}{=} \int_0^1 \lambda(x)\,dx = \int_0^1 \left(3 + \frac{4}{x+1}\right) dx = \left[3x + 4\ln(x+1)\right]_0^1 \approx 5{,}77$$

(b) $P(N(2)-N(1)=5 \mid N(2)=8) = \frac{P(N(2)-N(1)=5,\ N(2)=8)}{P(N(2)=8)} \underset{\text{equiv.}}{=} \frac{P(N(2)-N(1)=5,\ N(1)=3)}{P(N(2)=8)} =$

$$\overset{\text{incr. ind.}}{=} \frac{P(N(2)-N(1)=5) \cdot P(N(1)=3)}{P(N(2)=8)} \overset{\text{def.}}{=} \frac{e^{-m(1,2)} \frac{m(1,2)^5}{5!} e^{-m(0,1)} \frac{m(0,1)^3}{3!}}{e^{-m(0,2)} \cdot \frac{m(0,2)^8}{8!}} = \frac{8!}{5!3!} \frac{m(1,2)^5 m(0,1)^3}{m(0,2)^8}$$

Luego, como $m(0,1) \approx 5{,}77$ por lo anterior, $m(1,2) = \left[3x+4\ln(x+1)\right]_1^2 \approx 4{,}62$ y $m(0,2) = \left[3x+4\ln(x+1)\right]_0^2 \approx 10{,}39$, tenemos $P(N(2)-N(1)=5 \mid N(2)=8) \approx 0{,}17$

(15) Tenemos $\{N(t), t \geq 0\}$ proceso de Poisson no homogéneo con intensidad

$$\lambda(t) = \begin{cases} t/2 & \text{para } 0<t<5 \\ \frac{t+5}{4} & \text{para } t \geq 5 \end{cases} \quad \text{por hora.}$$

(a) $P(N(4)=15) \overset{\text{def.}}{=} e^{-m(0,4)} \frac{m(0,4)^{15}}{15!} = e^{-4} \cdot \frac{4^{15}}{15!} \approx 0{,}00002$

$$m(0,4) = \int_0^4 \lambda(x)\,dx = \int_0^4 \frac{x}{2}\,dx = \frac{1}{4} \cdot \left[x^2\right]_0^4 = 4$$

(b) $P(N(5)-N(1)=15) \overset{\text{def.}}{=} e^{-m(1,5)} \frac{m(1,5)^{15}}{15!} = e^{-6} \cdot \frac{6^{15}}{15!} \approx 0{,}00089$

$$m(1,5) = \int_1^5 \lambda(x)\,dx = \int_1^5 \frac{x}{2}\,dx = \frac{1}{4} \cdot \left[x^2\right]_1^5 = 6$$

(c) $P(N(6)=16 \mid N(4)=15) = \dfrac{P(N(6)=16, N(4)=15)}{P(N(4)=15)} \overset{\text{equiv.}}{=} \dfrac{P(N(6)-N(4)=1, N(4)=15)}{P(N(4)=15)} \overset{\text{inc. ind.}}{=}$

$= \dfrac{P(N(6)-N(4)=1)\,P(N(4)=15)}{P(N(4)=15)} = P(N(6)-N(4)=1) \underset{\text{def.}}{=} e^{-m(4,6)}\, m(4,6)$

Como $m(4,6) = \int_4^6 \lambda(x)\,dx = \int_4^5 \frac{x}{2}\,dx + \int_5^6 \frac{x+5}{4}\,dx = \frac{1}{4}\cdot\left[x^2\right]_4^5 + \frac{1}{4}\cdot\left[\frac{x^2}{2}+5x\right]_5^6 = 4{,}875$, llegamos

a que $P(N(6)=16 \mid N(4)=15) = e^{-4{,}875}\cdot 4{,}875 \approx 0{,}037$

16