Capítulo 9

Cadenas de Markov

9.1. Introducción

Dado un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathbb{P})$ y un conjunto de números T, $T \subset \mathbb{R}$, un proceso estocástico X en Ω es una función

$$X : T \times \Omega \mapsto \mathbb{R}.$$

Así, para cada $t \in T$, $X(t, \cdot)$ es una variable aleatoria, y para cada $\omega \in \Omega$, $X(\cdot, \omega)$ es una función.

Si T es un subconjunto de los números enteros u otro subconjunto discreto, se dice que es un proceso estocástico **discreto**, y de lo contrario es un proceso estocástico **continuo**. La variable $t \in T$ suele ser una variable temporal o una variable espacial.

Ejemplo 9.1. Supongamos que una moneda se arroja infinitas veces, y denotemos con C y X el resultado de **cara** y **cruz**, respectivamente. Las tiradas son independientes y la probabilidad de obtener una cara la denotamos con p. Consideramos Ω el conjunto de todos los resultados posibles. Así un elemento $\omega \in \Omega$ es una sucesión infinita de caras y cruces:

$$\omega = \omega_1\omega_2\omega_3\omega_4 \dots \omega_n \dots \qquad \omega_i = C \text{ o } \omega_i = X, \quad i \geq 1.$$

Ahora consideramos un juego en el que comenzamos con un número positivo en $t = 0$, digamos $X_0 = 12$, y en cada tiempo $t = 1, 2, 3, \dots$ se arroja la moneda y si sale C se multiplica al número por 2 y si sale cruz se divide por 2. Llamamos X_1, X_2, X_3. … a los sucesivos resultados.

En este caso, el proceso estocástico está dado por una función X que depende de las tiradas de moneda $\omega \in \Omega$ y de cada tiempo t. Así, si $\omega = CXX \dots$, entonces $X_0 = 12$, $X_1 = 24$, $X_2 = 12$ y $X_3 = 6$. Es decir, obtenemos una función de $T = \{0, 1, 2, 3, \dots\} \mapsto \mathbb{R}$. Por otro lado, si fijamos $t = 2$, entonces X_2 resulta una variable aleatoria que depende de las tiradas de moneda, en este caso sólo de las dos primeras tiradas de moneda:

$$X_2(\omega) = \begin{cases} 48 & \text{si } \omega = CC\omega_3\omega_4\dots \\ 12 & \text{si } \omega = CX\omega_3\omega_4\dots \text{ o } \omega = XC\omega_3\omega_4\dots. \\ 3 & \text{si } \omega = XX\omega_3\omega_4\dots \end{cases}$$

Notemos que si p es la probabilidad de que la moneda salga cara y las tiradas son independientes, entonces X_2 tiene distribución binomial con parámetros $(2, p)$. A su vez, X_1 es Bernoulli y $X_3 \sim Bin(3, p)$.

$$\begin{aligned} P(X_2 = 48) &= P(\omega = CC\omega_3\omega_4\dots) = p^2 \\ P(X_3 = 6) &= P(\omega = CXX\dots) + P(\omega = XCX\dots) + P(\omega = XXC\dots) = \binom{3}{1} p\,(1-p)^2 \\ P(X_3 = 96) &= P(\omega = CCC\omega_4\dots) = p^3. \end{aligned}$$

Esto es, en cada tiempo t se tiene que X_t es una variable aleatoria con una cierta distribución. En particular, el estado inicial X_0 podría haberse elegido igual a 12 con probabilidad 1 o también podría ser una variable aleatoria con cierta distribución.

El **conjunto de estados** de un proceso estocástico X está dado por todos los valores que puede tomar el proceso. Esto es:

$$S = \{X(t,\omega) \mid t \in I,\ \omega \in \Omega\}.$$

En el Ejemplo 9.1, el conjunto de estados es infinito y discreto, y está dado por todos los valores posibles de X_t: $S = \{1.5, 3, 6, 12, 24, 48, 96, \dots\}$.

Según si el conjunto de estados es continuo o discreto y si T es discreto o continuo, los procesos estocásticos reciben diferentes nombres.

- Una **cadena** es un proceso estocástico donde T es discreto y S es discreto. Es el caso del Ejemplo 9.1.
- Un **proceso puntual** es un proceso con T continuo y S discreto. Un caso particular son los Procesos de Poisson.
- Si T es discreto y S es continuo se tiene una **sucesión de variables faleatorias continuas**. Por ejemplo, podría medirse cada día la temperatura media en un cierto punto geográfico.
- Si T es continuo y S es continuo se trata de un **Proceso continuo**. Un ejemplo son los movimientos brownianos que modelan el comportamiento aleatorio de una partícula que se desplaza sobre un fluido. En este caso T es una variable espacial.

En estas notas nos centraremos en cadenas, y particularmente las llamadas cadenas de Markov.

9.2. Cadenas de Markov

9.2.1. Propiedad de Markov

Un proceso estocástico tiene la **Propiedad de Markov** si, dado el estado presente los estados futuros no dependen del pasado. El enunciado formal de esta propiedad para un proceso estocástico general requiere definir conceptos que no son objeto de este curso. Pero podemos dar una definición más concreta para el caso de un proceso estocástico discreto.

Definición 9.1. Dado el proceso estocástico discreto

$$X_0, X_1, X_2, \dots, X_n, \dots,$$

donde X_i indica el estado del sistema en el tiempo i, el proceso cumple la **propiedad de Markov** si

$$P\left(X_{n+1} \leq x \mid X_n, X_{n-1}, \dots, X_0\right) = P\left(X_{n+1} \leq x \mid X_n\right).$$

También se dice que X es un **proceso de Markov** o **proceso Markoviano**.

Un proceso de Markov con un conjunto discreto de estados S es una **cadena de Markov**. En este caso la propiedad de Markov se puede escribir también como:

$$P\left(X_{n+1} = j \mid X_n = x_n, X_{n-1} = x_{n-1}, \dots, X_0 = x_0\right) = P\left(X_{n+1} = j \mid X_n = x_n\right), \quad (9.1)$$

para cada j, x_0, x_1,..., $x_n \in S$.

Ejemplo 9.2. El proceso estocástico del Ejemplo 9.1 es una cadena de Markov. Por ejemplo, dados los valores de X_0, X_1 y X_2, el valor de X_3 sólo depende de X_2:

$$\begin{aligned} P(X_3 = j \mid X_2, X_1, X_0) &= P(X_2 \cdot 2 = j \mid X_2, X_1, X_0) + P(X_2 \cdot \frac{1}{2} = j \mid X_2, X_1, X_0) \\ &= P(X_3 = j \mid X_2). \end{aligned}$$

9.2.2. Probabilidades de transición

Dada una cadena de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ con conjunto de estados $S = \{0, 1, 2, \dots\}$, se llaman **probabilidades de transición** a los números:

$$P(X_{n+1} = j \mid X_n = i), \qquad i, j \in S, \quad n = 0,\, 1\, 2\, \dots.$$

Una cadena de Markov se dice **homogénea** si sus probabilidades de transición no dependen del tiempo n. Consideraremos sólo este tipo de cadenas de Markov y usaremos la notación:

$$p_{ij} = P(X_{n+1} = j \mid X_n = i), \qquad i, j \in S,$$

Así p_{ij} es la probabilidad de transición en un paso desde el estado i al estado j. Las probabilidades de transición verifican las siguientes propiedades:

- $p_{ij} \geq 0$, para todo $i, j \in S$.
- $\sum_{j \in S} p_{ij} = 1$, para todo $i \in S$.

La **distribución inicial** de la cadena $(X_n)_{n \geq 0}$ es la función

$$\pi(j) = P(X_0 = j), \quad j \in S.$$

La función π verifica las siguientes propiedades:

- $\pi(j) \geq 0$, para todo $j \in S$.
- $\sum_{j \in S} \pi(j) = 1$.

Así, dada la distribución inicial y las probabilidades de transición, la cadena de Markov queda unívocamente determinada. En particular, la distribución conjunta de X_0, X_1,..., X_n viene dada por:

$$P(X_0 = x_0, X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) = \pi(x_0) p_{x_0 x_1} p_{x_1 x_2} \ldots p_{x_{n-1} x_n}.$$

La **matriz de transición** de una cadena de Markov homogénea con un número finito de estados $S = \{0, 1, 2, \ldots, N\}$ es la matriz $(N+1) \times (N+1)$ definida por:

$$Q = (p_{ij}) = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & \cdots \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & \cdots \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}.$$

De las propiedades de las probabilidades de transición puede verse que esta matriz Q tiene las siguientes propiedades:

- Sus elementos p_{ij} cumplen $0 \leq p_{ij} \leq 1$.
- Los elementos de una fila suman 1.

La matriz de transición permite también calcular la probabilidad de pasar de un estado a otro en más de un paso.

Teorema 9.1 (Ecuaciones de Chapman Kolmogorov)**.** Sea $Q = (p_{ij})$ la matriz de transición de una cadena de Markov. Entonces la matriz Q^n contiene las probabilidades de transición en n etapas. Esto es

$$(Q^n)_{ij} = P(X_{t+n} = j \mid X_t = i) = P(X_n = j \mid X_0 = i).$$

Demostración. Demostraremos este hecho por inducción. Para $n = 1$ el resultado se deduce de la definición de Q. Para $n = 2$, notemos que

$$\begin{aligned}
P(X_2 = j \mid X_0 = i) &= \sum_{k\in S} P(X_2 = j, X_1 = k \mid X_0 = i) \\
&= \sum_{k\in S} P(X_2 = j \mid X_1 = k,\ X_0 = i)P(X_1 = k \mid X_0 = i) \\
&= \sum_{k\in S} P(X_2 = j \mid X_1 = k)P(X_1 = k \mid X_0 = i) \\
&= \sum_{k\in S} p_{ik} \cdot p_{kj} = Q^2_{ij}
\end{aligned}$$

Supongamos que se cumple para $k = n$ que Q^n contiene las probabilidades de transición en n pasos. Denotaremos con $q^{(n)}_{ij}$ para indicar la entrada matricial (i, j) de Q^n. Entonces:

$$\begin{aligned}
P(X_{n+1} = j \mid X_0 = i) &= \sum_{k\in S} P(X_{n+1} = j, X_n = k \mid X_0 = i) \\
&= \sum_{k\in S} P(X_{n+1} = j \mid X_n = k,\ X_0 = i)P(X_n = k \mid X_0 = i) \\
&= \sum_{k\in S} P(X_{n+1} = j \mid X_n = k)P(X_1 = k \mid X_0 = i) \\
&= \sum_{k\in S} p^{(n)}_{ik} \cdot p_{kj} = Q^{n+1}_{ij}
\end{aligned}$$

□

Notación: Seguiremos utilizando la notación $p^{(n)}_{ij}$ para indicar la entrada matricial (i, j) de Q^n.

Ejemplo 9.3. Supongamos que una máquina puede tener dos estados: en condiciones de operar (estado 0) y descompuesta (estado 1). Las probabilidades de transición están dadas por:

$$p_{01} = P(0, 1) = P(X_{n+1} = 1 \mid X_n = 0) = 0.15$$

$$p_{10} = P(1, 0) = P(X_{n+1} = 0 \mid X_n = 1) = 0.75.$$

Luego la matriz de transición es:

$$Q = \begin{pmatrix} 0.85 & 0.15 \\ 0.75 & 0.25 \end{pmatrix}$$

Así, si el estado inicial es 0, la máquina tiene una probabilidad del 15 % de romperse y un 85 % de permanecer operativa. Si la máquina está rota tiene un 25 % de permanecer rota y un 75 % de ser reparada.

Las matrices Q, Q^2, Q^3 y Q^4 están dadas por:

$$Q = \begin{pmatrix} 0.85 & 0.15 \\ 0.75 & 0.25 \end{pmatrix} \qquad Q^2 = \begin{pmatrix} 0.835 & 0.165 \\ 0.825 & 0.175 \end{pmatrix}$$

$$Q^3 = \begin{pmatrix} 0.8335 & 0.1665 \\ 0.8325 & 0.1675 \end{pmatrix} \qquad Q^4 = \begin{pmatrix} 0.83335 & 0.16665 \\ 0.83325 & 0.16675 \end{pmatrix}.$$

Observemos que si la máquina está inicialmente descompuesta ($X_0 = 1$), entonces en el paso 4 tendremos:

$$P(X_4 = 1, X_0 = 1) = P(X_4 = 1 \mid X_0 = 1)P(X_0 = 1) = 0.16674 \cdot 1 \sim 17\,\%.$$

En esta cadena, la máquina tiende a tener una probabilidad del 83 % de estar reparada y un 17 % de romperse, independientemente del estado inicial.

Para tener una expresión exacta de las probabilidades $p_{ij}^{(n)}$ puede utilizarse la propiedad de los autovalores de la matriz Q cuando ésta es diagonalizable. En este ejemplo la matriz Q tiene dos autovalores: 1 y 0.1. Esto indica que para cada par i, j existen números a, $b \in \mathbb{R}$ tales que:

$$p_{ij}^{(n)} = a \cdot 1^n + b \cdot (0.1)^n.$$

Dado que Q^0 es la matriz identidad y $Q^1 = Q$, reemplazamos los valores conocidos para $n = 0$ y $n = 1$ para obtener a y b.

En este caso tendremos por ejemplo que:

$$\begin{cases} p_{00}^0 = 1 = a + b \\ p_{00}^1 = 0.85 = a + b \cdot 0.1 \end{cases}$$

cuya solución es $a = \frac{5}{6}$, $b = \frac{1}{6}$. De esta manera tenemos que

$$p_{00}^{(n)} = \frac{5}{6} + \frac{1}{6} \cdot (0.1)^n, \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Ejemplo 9.4. El país de Oz está bendecido por muchas bondades, pero no por el buen tiempo. Nunca hay dos días soleados seguidos. Cada día que hay sol, es igualmente probable que al día siguiente llueva o nieve. Si llueve o nieva, al día siguiente sigue igual o cambia el clima con igual probabilidad, y en caso que cambie el clima sólo la mitad de las veces sigue un día soleado.

Con esta información podemos construir una cadena de Markov con estados L, N y S según sea un día de lluvia, de nieve o de sol respectivamente. La matriz de transición resulta:

	L	N	S
L	0.5	0.25	0.25
N	0.25	0.5	0.25
S	0.5	0.5	0

o específicamente $Q = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 0.5 & 0.25 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \end{pmatrix}.$

9.2.3. Diagrama de transición

Dada una cadena de Markov con un conjunto finito de estados, el **diagrama de transición** de la cadena es un grafo dirigido cuyos nodos(vértices) son los estados de la cadena y cuyos arcos(aristas) se etiquetan con la probabilidad de transición entre los estados que ellos unen. Si $p_{ij} = 0$ entonces no existe arco del nodo i al nodo j.

La Figura 9.1 muestra el diagrama de transición para el Ejemplo 9.3: Para el Ejemplo 9.4

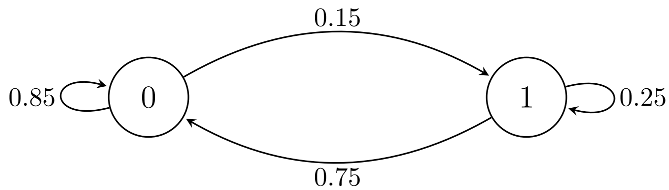


Figura 9.1: Diagrama de transición

el diagrama de transición es como en la Figura 9.2.

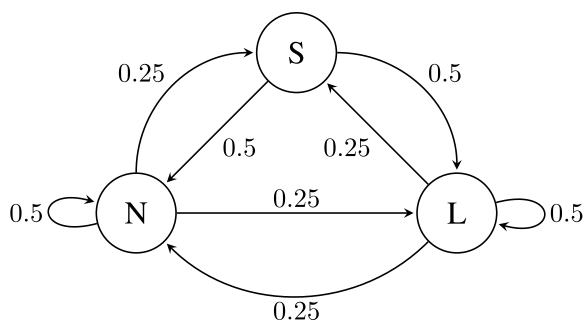


Figura 9.2: Diagrama: el clima en el país de Oz

9.2.4. Estructura de clases

Dada una cadena de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$, diremos que el estado j es **accesible** desde i, o que puede ser alcanzado desde i, si hay una probabilidad positiva de que la cadena iniciada en i llegue al estado j. Esto es:

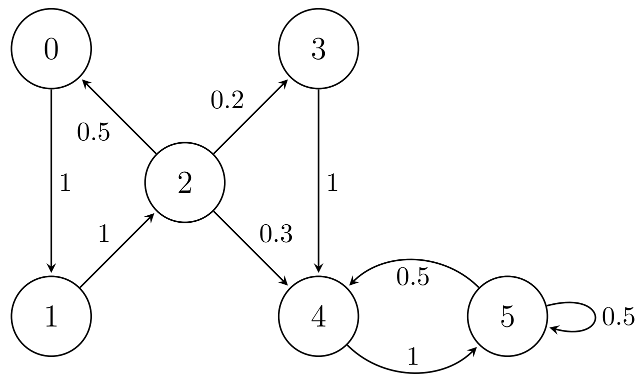
$$P(X_n = j \text{ para algún } n \geq 0 \mid X_0 = i) = p_{ij}^{(n)} > 0.$$

Decimos que dos estados i y j se **comunican** entre sí si j es accesible desde i e i es accesible desde j. Esta relación divide al espacio de estados S en distintas clases comunicantes.

Un subconjunto C no vacío de estados de una cadena de Markov se dice **cerrado**, si y sólo si para todo $i \in C$ y $j \notin C$, j no es alcanzable desde i. Así, una cadena que alcanza un estado en C siempre permanecerá en C.

Definición 9.2. Un subconjunto cerrado $C \subseteq S$ se dice que es **irreducible** si y sólo sí no contiene ningún subconjunto propio cerrado. Una cadena de Markov se dice irreducible si su espacio de estados S es irreducible.

Ejemplo 9.5. Consideremos una cadena de Markov con estados $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ con el siguiente diagrama de transición:



Existen tres clases comunicantes: $\{0, 1, 2\}$, $\{3\}$ y $\{4, 5\}$, y sólo la clase $\{4, 5\}$ es un subconjunto cerrado. El conjunto $\{3, 4, 5\}$ también es un conjunto cerrado, que no es irreducible porque contiene a $\{4, 5\}$.

9.2.5. Clasificación de estados

Dada una cadena de Markov, denotaremos con ν_{ij} a la probabilidad de que la cadena de Markov que comienza en i llegue al estado j en un tiempo positivo.

$$\nu_{ij} = P(X_n = j, \text{ algún } n \geq 1 \mid X_0 = i).$$

Decimos que existe un camino de i a j si $\nu_{ij} > 0$. Si $\nu_{ij} = 1$ significa que partiendo del estado i cualquier camino pasa por el estado j. Mientras que si $\nu_{ij} < 1$ entonces hay al menos un camino que parte de i y desde el cual no es posible llegar a j. A partir de esta notación, definimos los siguientes tipos de estados.

- j es un **estado recurrente** si $\nu_{jj} = 1$.
- j es un **estado transitorio** si no es recurrente.
- j es un **estado absorbente** si $p_{jj} = 1$

Un estado absorbente es un estado recurrente. En un diagrama de transición un estado absorbente es como en la Figura 9.3.

En el Ejemplo 9.5, el estado 3 es absorbente y los demás son estados transitorios. Notemos que si un estado es recurrente, entonces todos los caminos que salen de él vuelven en un tiempo finito.

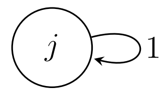


Figura 9.3: Estado absorbente

Definición 9.3. Una cadena de Markov se dice **recurrente** si todos sus estados son recurrentes, y se dice **transitoria** si todos sus estados son transitorios.

Si una cadena de Markov tiene un número finito de estados entonces no puede ser transitoria. Debe tener algún estado recurrente.

Proposición 9.1. Si i es un estado recurrente y existe un camino de i a j, entonces j es recurrente y $\nu_{ij} = \nu_{ji} = 1$.

Demostración. Supongamos por el absurdo que j es transitorio. Entonces existe un camino C que sale de j y no vuelve a j. Pero si j es alcanzable desde i e i es recurrente, entonces no sería posible volver a i pasando por este camino, lo cual es absurdo. Luego j es recurrente. □

Los estados recurrentes se clasifican además en estados recurrentes positivos y recurrentes nulos. Los primeros son aquellos cuyo tiempo medio hasta retornar al estado es finito, en caso contrario se dicen recurrentes nulos. En el caso de cadenas con un número finito de estados sólo pueden darse estados recurrentes positivos.

Ejemplo 9.6. Dada la siguiente matriz de transición:

	0	1	2	3	4	5
0	1	0	0	0	0	0
1	$1/4$	$1/2$	$1/4$	0	0	0
2	0	$1/5$	$2/5$	$1/5$	0	$1/5$
3	0	0	0	$1/6$	$1/3$	$1/2$
4	0	0	0	$1/2$	0	$1/2$
5	0	0	0	$1/4$	0	$3/4$

calcular sus estados recurrentes y transitorios.

Su diagrama de transición se representa en la Figura 9.4.

Tenemos que:

- 0 es un estado absorbente.
- 1 y 2 son estados transitorios, ya que existen caminos que salen de ellos y no es posible volver a ellos.
- 0, 3, 4 y 5 son estados recurrentes.

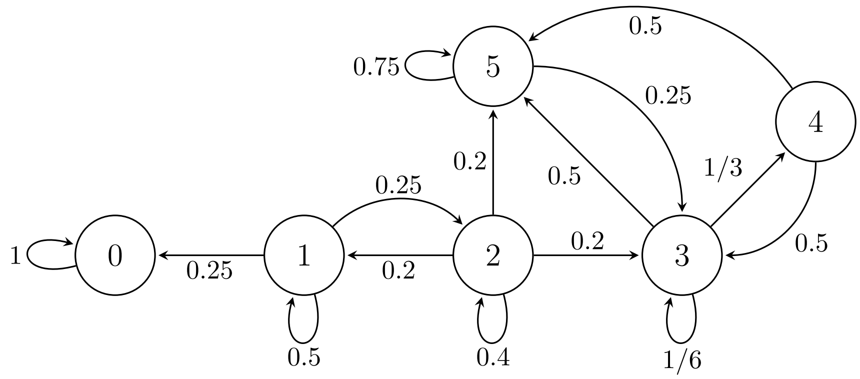


Figura 9.4: Diagrama de transición

Para cada estado j consideramos el conjunto $C_i = \{i\} \cup \{j \mid \nu_{ij} > 0\}$. Esto es, C_i son todos los estados accesibles desde i. Cada conjunto C_i es un conjunto cerrado. En particular:

- $C_0 = \{0\}$.
- $C_3 = \{3, 4, 5\} = C_4 = C_5$
- $C_0 \cup C_3 = \{0, 3, 4, 5\}$
- $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} = C_2 = C_1$.

De estos cuatro conjuntos cerrados, C_0 y C_3 son además irreducibles.

9.2.6. Cadenas periódicas

Si i es un estado recurrente de una cadena significa que existe un $n > 1$ tal que $P(X_n = i \mid X_0 = i) > 0$. Es claro que si esta probabilidad es positiva para valores positivos n y m, también lo es para cualquier combinación $h \cdot m + l \cdot n$, con h y l enteros no negativos. En particular, el **período** del estado i se define como

$$k = MCD\{n > 0 : \; P(X_n = i \mid X_0 = i) > 0\}$$

donde MCD indica el máximo común divisor. Si $k = 1$ el estado se dice **aperiódico**. Si $k > 1$ el estado se dice **periódico** de período k.

En la Figura 9.5 del estado 0 es posible retornar al mismo estado en tres pasos ($X_0 = 0, X_1 = 1, X_2 = 2, X_3 = 0$), o en 5 pasos: ($X_0 = 0, X_1 = 1, X_2 = 2, X_3 = 3, X_4 = 4, X_5 = 5$). Luego, como $MCD(3, 5) = 1$ el estado es aperiódico. En la segunda cadena todos los estados tienen período 3.

Se puede probar que en una cadena irreducible, o todos los estados tienen un mismo período k o bien todos son aperiódicos. En el primer caso se dice que la cadena es **periódica** de período k y de lo contrario es **aperiódica**.

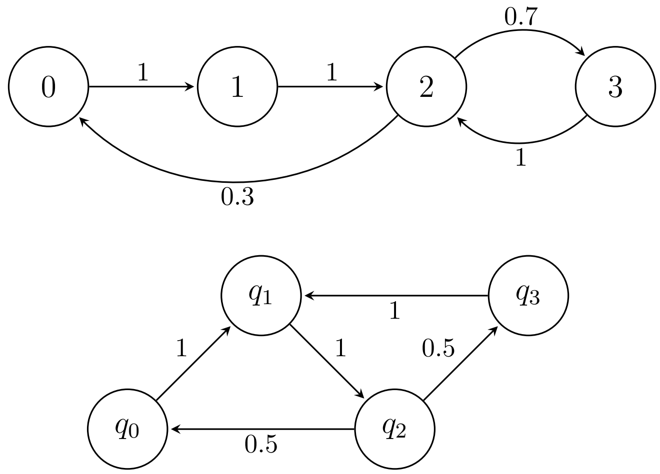


Figura 9.5: Períodos en una cadena de Markov

Observamos que si la cadena es finita, entonces si es irreducible también es recurrente. Sin embargo si la cadena es infinita podría ser irreducible, aperiódica y transitoria.

9.2.7. Tiempos de alcance y probabilidades de absorción

Consideremos una cadena de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ con espacio de estados S y probabilidades de transición p_{ij}. El **tiempo mínimo de alcance** de un subconjunto A de S es la variable aleatoria H^A dada por:

$$H^A = \text{ínf}\{n \geq 0 \mid X_n \in A\},$$

donde acordamos que el ínfimo del conjunto vacío $\emptyset$ es ∞. La probabilidad de alcanzar A desde el estado i se define como:

$$h_i^A = P(H^A < \infty \mid X_0 = i).$$

Si A es un conjunto cerrado, entonces h_i^A se dice una **probabilidad de absorción**. Si $A = \{j\}$, entonces $h_i^{\{j\}}$ es la suma de las probabilidades de que en el n-ésimo paso se alcance por primera vez el valor j:

$$h_i^{\{j\}} = \sum_{n\geq 0} P(H^A = n \mid X_0 = i).$$

El **tiempo medio de alcance** del conjunto A desde el estado i se define como la esperanza condicional:

$$k_i^A = E[H^A \mid X_0 = i] = \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot P(H^A = n \mid X_0 = i), & \text{si } P(H^A = \infty \mid X_0 = i) = 0 \\ \infty & \text{si } P(H^A = \infty \mid X_0 = i) > 0 \end{cases}$$

Notemos que h_i y k_i están definidas por una suma infinita, en la cual se consideran todas las cadenas iniciadas en i y que eventualmente llegan al conjunto A. Esto hace que pueda resultar complejo su cálculo. Una forma alternativa de calcular la probabilidad de alcance y el tiempo medio es a través de un sistema de ecuaciones. Enunciaremos los teoremas que quedarán sin demostración: En primer lugar, si S es el conjunto de estados entonces llamaremos **vector de probabilidades de alcance** y **vector de tiempos medios de alcance** a los conjuntos

$$h^A = \{h_i^A \mid i \in S\} \qquad \text{y} \qquad k^A = \{k_i^A \mid i \in S\}.$$

Teorema 9.2. El vector de probabilidades de alcance h^A es la solución mínima no negativa del sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} h_i^A = 1 & i \in A \\ h_i^A = \sum_{j \in S} p_{ij} h_j^A & i \notin A. \end{cases}.$$

Teorema 9.3. El vector de tiempos medios de alcance h^A es la solución mínima no negativa del sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} k_i^A = 0 & i \in A \\ k_i^A = 1 + \sum_{j \in S} p_{ij} k_j^A & i \notin A. \end{cases}.$$

9.2.8. Tiempo medio de retorno

Dada una cadena de Markov (X_n) y j un estado recurrente de la cadena, el tiempo medio de retorno se define como el valor esperado del tiempo de alcance del estado j sobre todos los caminos de al menos un paso. Es decir, dado el conjunto:

$$R^{(j)} = \text{ínf}\{n \geq 1 \mid X_n = j\},$$

se pretende determinar $r_j = E[R^{(j)} \mid X_0 = j]$. Este valor esperado está definido entonces por:

$$r_j = \sum_{n=1}^{\infty} n\, P(R^{(j)} = n).$$

También puede determinarse a partir de las probabilidades de alcance desde cada uno de los estados, viendo que cada camino de j a j de longitud mayor o igual a 1, tiene una longitud 1 más la longitud de un camino que comienza en el estado adoptado por X_1. Así, denotando con $k_i^{(j)}$ al tiempo esperado de alcance desde el estado i al estado j, tenemos que el tiempo medio de retorno al estado j es:

$$r_j = 1 + \sum_{i \in S} p_{ji} k_i^{(j)}.$$

9.2.9. Distribución estacionaria

Dada una cadena de Markov con probabilidades de transición Q, decimos que π es una **distribución estacionaria** si se cumple que

$$\pi Q = Q.$$

No todas las cadenas de Markov tienen distribución estacionaria. Por ejemplo, una cadena infinita con estados $\{0, 1, 2, \dots\}$ donde $p_{i,i+1} = 1$ para todo i no lo tiene. Otras cadenas de Markov tienen más de una distribución estacionaria, por ejemplo si Q es la matriz identidad. En el caso de cadenas finitas siempre existe al menos una. En una cadena de Markov X_0, X_1, X_2, ..., cada X_t es una variable aleatoria con una cierta distribución. Para ciertas cadenas de Markov ocurre que para valores grandes de t estas distribuciones convergen a una distribución dada.

Por otra parte hemos visto que en ciertos casos ocurre que

$$\lim_{ij} q_{ij}^{(n)} = p_j,$$

es decir que las probabilidades de transición en n pasos del estado i al estado j no dependen de i. En este caso y si los valores p_j determinan una distribución de probabilidad, se puede probar que estas probabilidades límite constituyen también una distribución estacionaria.

Definición 9.4. Una cadena de Markov es **ergódica** si es irreducible, aperiódica y recurrente.

En el caso de cadenas de Markov finitas, si es irreducible también es recurrente. Por lo cual una cadena ergódica es una cadena irreducible y aperiódica.

Teorema 9.4. Si X es una cadena de Markov ergódica, entonces para todo estado $j \in S$ existe el límite

$$\lim_{n \to \infty} p_{ij}^{(n)} = p_j. \tag{9.2}$$

En términos de la matriz de transición, significa que las filas de la matriz Q^n tienden todas a un mismo vector.

Definición 9.5. Se dice que una cadena de Markov **alcanza** una distribución estacionaria si existe el límite en (9.2) y además

$$\sum_{j \in S} p_j = 1.$$

Si bien este límite existe, puede ocurrir que el límite sea 0 para todo j por lo cual no converge a un vector de probabilidad o distribución estacionaria. Esto puede ocurrir en particular si la cadena es infinita. El siguiente Teorema da condiciones suficientes para que una cadena de Markov alcance una distribución estacionaria. Si $S = \{0, 1, 2, \dots, N\}$ y π es la distribución estacionaria, denotamos $q_j = \pi(j)$.

Teorema 9.5. Si X es una cadena de Markov finita y ergódica, entonces la distribución estacionaria existe y viene dada por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} q_j &= \sum_{i=0}^{N} q_i\, p_{ij}, \qquad j = 0, 1, \ldots, N && (9.3) \\ \sum_{i=0}^{N} q_i &= 1. && (9.4) \end{aligned}$$

El Teorema 9.5 no sólo da condiciones suficientes para la existencia de la distribución estacionaria sino que además da un método para hallarla. La ecuación (9.3) dice que el vector q de probabilidades satisface:

$$q \cdot Q = q,$$

y la ecuación (9.4) indica que la suma de los elementos del vector es 1. En particular es suficiente con resolver (9.3) y luego normalizar el vector para que la suma de sus componentes sea 1.

Observemos que si se cumple (9.3) entonces también es cierto que

$$\sum_{i=0}^{N} q_i p_{ij} = \sum_{i=0}^{N} q_j p_{ji}, \qquad 0 \leq j \leq N. \tag{9.5}$$

puesto que la segunda sumatoria es igual a q_j. Las ecuaciones (9.5) se llaman también **ecuaciones de equilibrio**. Esto no implica necesariamente que $q_j p_{ji} = q_i p_{ij}$, pero si esto ocurre se dice que la cadena de Markov es **reversible**.

Ejemplo 9.7. En el Ejemplo 9.4 la cadena de Markov es ergódica y finita, luego alcanza una distribución estacionaria. Para determinarla resolvemos:

$$(p_0, p_1, p_2) \begin{pmatrix} 0.5 & 0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 0.5 & 0.25 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \end{pmatrix} = (p_0, p_1, p_2).$$

Así resultan las ecuaciones:

$$\begin{cases} 0.5\, p_0 + 0.25\, p_1 + 0.5\, p_2 & = p_0 \\ 0.25\, p_0 + 0.5\, p_1 + 0.5\, p_2 & = p_1 \\ 0.25\, p_0 + 0.25\, p_1 & = p_2. \end{cases}$$

La solución a este sistema es

$$(p_0, p_1, p_2) = \left(\frac{2}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5} \right).$$

Esto significa en particular que en un período prolongado, el 40 % de los días lloverá, otro 40 % caerá nieve y sólo el 20 % de los días habrá sol.

Ejemplo 9.8. Determinar si existe la distribución estacionaria para la cadena de Markov con estados $S = \{0, 1, 2\}$ y matriz de transición:

$$Q = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0.6 & 0 & 0.4 \\ 0 & 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}.$$

El diagrama de transición en la Figura 9.6 permite analizar con mayor facilidad si la cadena es o no ergódica:

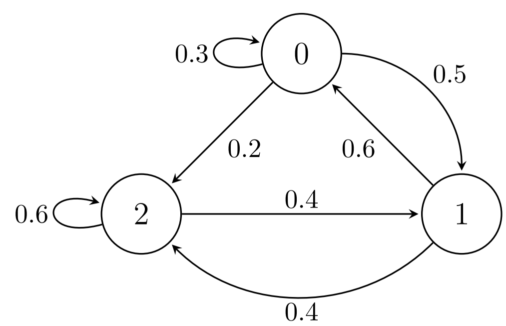


Figura 9.6: Diagrama de transición

Dado que es ergódica y finita, sabemos que existe una distribución estacionaria, y es solución de $pQ = p$. Buscamos primero una solución $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$ a este sistema:

$$\begin{cases} 0.3\lambda_0 + 0.6\lambda_1 & = \lambda_0 \\ 0.5\lambda_0 + 0.4\lambda_2 & = \lambda_1 \\ 0.2\lambda_0 + 0.4\lambda_1 + 0.6\lambda_2 & = \lambda_2. \end{cases}$$

Para resolverla podemos suponer primero $\lambda_0 = 1$, hallar la solución y luego normalizar para obtener el vector de probabilidad (p_0, p_1, p_2). Así tenemos de la primer ecuación que:

$$0.6\lambda_1 = 0.7, \qquad \text{luego} \qquad \lambda_1 = \frac{7}{6}.$$

Ahora de la segunda ecuación obtenemos:

$$0.4\lambda_2 = \frac{7}{6} - \frac{1}{2} = \frac{3}{6}, \qquad \text{luego} \qquad \lambda_2 = \frac{10}{6}.$$

Esto significa que el vector de probabilidad correspondiente a la distribución estacionaria es de la forma:

$$(k, \frac{7}{6}\,k, \frac{10}{6}\,k)$$

y la suma de sus componentes es 1. Luego $k = \frac{6}{23}$ y la distribución estacionaria está dada por

$$(p_0, p_1, p_2) = \left(\frac{6}{23}, \frac{7}{23}, \frac{10}{23} \right).$$

Ejemplo 9.9. Consideremos una cadena de Markov con dos estados $S = \{0, 1\}$ y probabilidades de transición dadas por la matriz

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Notemos que el vector de probabilidad $(p_0, p_1) = (0.5, 0.5)$ cumple las ecuaciones de equilibrio: $p \cdot Q = p$. Sin embargo no es una distribución estacionaria puesto que no existe el límite $\lim_{n\to\infty} q_{ij}^{(n)}$. En efecto, $Q^n = Id$ si n es par y $Q^n = Q$ si n es impar, por lo que $q_{ij}^{(n)}$ es una sucesión que alterna indefinidamente ceros y unos.