# Trabajo práctico N° 3

Abril 2025

Estudiante Emanuel Nicolás Herrador

## Ejercicio 1

Queremos ver si varios órdenes parciales son predominios o dominios. Recordemos que un predominio es un orden parcial tal que toda cadena interesante tiene supremo, y que un dominio es un predominio con mínimo.

Ahora, si vemos cada uno de los órdenes parciales, tenemos:

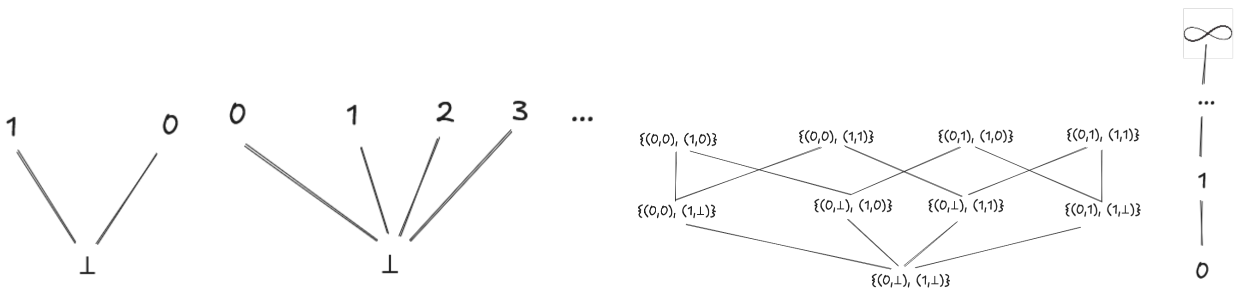
(a) $\langle\text{intexp}\rangle$ con el orden discreto: es predominio al no tener cadenas interesantes. No es dominio porque no tiene mínimo.

(b) $\langle\text{intexp}\rangle \to \mathbb{B}_\perp$: Veamos que $\mathbb{B}_\perp$ es un dominio dado que al ser orden llano no tiene cadenas interesantes y, además, tiene un mínimo. Como $\mathbb{B}_\perp$ es un dominio, entonces $\forall A,\ A \to \mathbb{B}_\perp$ es un dominio. Esto sucede porque para $f, g \in A \to \mathbb{B}_\perp,\ f \leq g \iff (\forall x,\ f(x) \leq g(x))$, por lo que los maximales son $f_0(x) = 0,\ f_1(x) = 1\ \forall x$ y el mínimo es $f_\perp(x) = \perp\ \forall x$.

(c) $\mathbb{B}_\perp \to \langle\text{intexp}\rangle$: Por $(a)$ sabemos que $\langle\text{intexp}\rangle$ es un predominio. Bajo la misma idea realizada con el dominio, podemos llegar a que $\forall A,\ A \to \langle\text{intexp}\rangle$ es un predominio pero no un dominio dado que no existe un mínimo.

## Ejercicio 2

Evito realizar el diagrama del dominio $(e)$ dado que es grande. Respecto a lo demás, tenemos:




(a) (b) (c) (d)

## Ejercicio 3

Tenemos que indicar el menor elemento para cada dominio de los ejercicios anteriores. Para ello, veamos que:

- Para $\langle\text{intexp}\rangle \to \mathbb{B}_\perp$ es $f(x) = \perp\ \forall x \in \langle\text{intexp}\rangle$.
- Para $\mathbb{B}_\perp$ es $\perp$.
- Para $\mathbb{N}_\perp$ es $\perp$.
- Para $\mathbb{B} \to \mathbb{B}_\perp$ es $f(x) = \perp\ \forall x \in \mathbb{B}$.
- Para $\mathbb{N}^\infty$ es 0.
- Para $\mathbb{N}^\infty \to \mathbb{N}^\infty$ es $f(x) = 0\ \forall x \in \mathbb{N}^\infty$.

## Ejercicio 4

Ahora, se pretende calcular el supremo de los siguientes conjuntos. Para mayor comodidad, veamos cada ítem por separado.

### Item A

Tenemos $\mathcal{A} = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ es par}\} \subseteq \mathbb{N}_\perp$. Claramente no tiene supremo porque no tiene cota suprerior. Esto se puede demostrar por absurdo, dado que sea $x \in \mathcal{A}$ el supruesto supremo, $x < x + 2$ y $x + 2 \in \mathcal{A}$.

### Item B

Tenemos $\mathcal{A} = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ es par}\} \subseteq \mathbb{N}^\infty$. La única cota suprerior de $\mathcal{A}$ es $\infty$, por lo que este elemento es claramente el supremo.

### Item C

Tenemos $\mathcal{A} = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ es primo}\} \subseteq \mathbb{N}^\infty$. De forma análoga a la anterior, el supremo es $\infty$.

### Item D

Tenemos $\mathcal{A} = \{V, F\} \subseteq \mathbb{B}_\perp$. No tiene supremo porque es un orden llano.

### Item E

Tenemos $\mathcal{F} = \{f_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{N} \to \mathbb{N}_\perp$ donde:

$$f_n x = \begin{cases} 1 & \text{si} x | n \\ \perp & \text{cc.} \end{cases}$$

Para ello, notemos que $\forall x, i \in \mathbb{N},\ f_i x \leq 1$. Una cota suprerior es, entonces, la función constante 1 ($C_1$) tal que $\forall x \in \mathbb{N}, C_1 x = 1$.

suprongamos, ahora, que $\exists g \in \mathbb{N} \to \mathbb{N}_\perp : g \leq C_1 \wedge (\forall f_i \in \mathcal{F},\ f_i \leq g)$. Como $g \leq C_1$, entonces $\exists x \in \mathbb{N} : g(x) = \perp$. Luego, no se cumple que $f_x \leq g$ dado que como $x|x$, entonces $f_x x = 1$ pero $gx = \perp$. Por ello, demostramos por absurdo que no existe otra función $g$ menor a $C_1$ que sea cota suprerior de $\mathcal{F}$.

Finalmente, se demuestra que $C_1$ es supremo de $\mathcal{F}$.

### Item F

Tenemos $\mathcal{F} = \{f_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{N} \to \mathbb{N}_\perp$ donde:

$$f_n x = \begin{cases} x & \text{si } |x - 10| < \log(n + 1) \\ \perp & \text{cc.} \end{cases}$$

Como $\forall x, i \in \mathbb{N},\ f_i x \leq x$, entonces una cota suprerior es la función identidad ($I$) tal que $I(x) = x\ \forall x \in \mathbb{N}$. suprongamos, ahora, que $\exists g \in \mathbb{N} \to \mathbb{N}_\perp : g \leq I \wedge (\forall f_i \in \mathcal{F},\ f_i \leq I)$. Como $g \leq I$, entonces $\exists x \in \mathbb{N} : g(x) = \perp$. Digamos $x \in \mathbb{N} : g(x) = \perp$. Luego, no se cumple que $f_{e^{|x-10|}} \leq g$ porque:

$$\begin{gathered} |x - 10| < \log(e^{|x-10|} + 1) \\ \Updownarrow \\ e^{|x-10|} < e^{\log(e^{|x-10|}+1)} \\ \Updownarrow \\ e^{|x-10|} < e^{|x-10|} + 1 \end{gathered}$$

lo que significa que $f_{e^{|x-10|}} x = x$. Finalmente, se llega a un absurdo que vino de suproner que existe una cota suprerior a $\mathcal{F}$ menor a $I$.

Por ello mismo, entonces, $I$ es el supremo de $\mathcal{F}$.

# Ejercicio 5

Recordemos las definiciones de cada propiedad de función. Sean $P, Q$ predominios, $f \in P \to Q$ es monótona si $\forall x, y \in P,\ (x \leq y \Rightarrow fx \leq fy)$. Decimos que $f$ es continua si para toda cadena $p_0 \leq p_1 \leq \ldots$ el supremo $\bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} f_{p_i}$ existe y $\bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} f_{p_i} = f\left(\bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} p_i\right)$.

Ahora, sean $D, D'$ dominios con mínimos $\perp, \perp'$, entonces $f \in D \to D'$ es estricta si $f\perp = \perp'$.

Teniendo esto en cuenta, veamos ejemplos para cada espacio de función:

(a) Considerando $\mathbb{B}_\perp \to \mathbb{B}_\perp$, al ser $\mathbb{B}_\perp$ finito, si $f$ es monótona entonces tiene que ser continua ya que al preservarse las cadenas y ser todas no interesantes, se preservan también los supremos. Respecto a una función continua y estricta, podemos considerar a $C_\perp$ dado que se mantiene el mínimo.

(b) Considerando $\mathbb{N}_\perp \to \mathbb{N}_\perp$, como se vio antes, sea $f$ una función monótona, como toda cadena de $\mathbb{N}_\perp$ es no interesante, se preservan también los supremos por lo que $f$ es también continua. Respecto a una función continua y estricta, podemos considerar a $C_\perp$ dado que se mantiene el mínimo.

(c) Considerando $\mathbb{N}^\infty \to \mathbb{N}_\perp$, una función monótona pero no continua es $f_1 = \{(0, \perp), (1, \perp), \ldots, (\infty, 0)\}$ dado que para la cadena $0 \leq 1 \leq \ldots$ tenemos que $\bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} fi = \perp \neq f\left(\bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} i\right) = f\infty = 0$. Respecto a una función continua y estricta, podemos considerar a $C_\perp$ dado que se mantiene el mínimo.

(d) Considerando $\mathbb{N}^\infty \to \mathbb{N}^\infty$, una función monótona pero no continua es $f_1 = \{(0, 0), (1, 0), \ldots, (\infty, 1)\}$ dado que para la cadena $0 \leq 1 \leq \ldots$ tenemos que $\bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} fi = 0 \neq f\left(\bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} i\right) = f\infty = 1$. Respecto a una función continua y estricta, podemos considerar a $C_0$ dado que se mantiene el mínimo.

# Ejercicio 6

Ahora, queremos caracterizar todas las funciones continuas en los espacios de funciones considerados en el ejercicio anterior. Para ello, veamos cada una por separado:

(a) Considerando $\mathbb{B}_\perp \to \mathbb{B}_\perp$, como todas las cadenas son no interesantes entonces toda función monótona mantiene el supremo. Luego, las funciones continuas son aquellas que mantienen el orden. Por ello, el conjunto es $\left(\bigcup_{x \in \mathbb{B}_\perp} C_x\right) \cup \{f : f\perp = \perp\}$.

(b) Considerando $\mathbb{N}_\perp \to \mathbb{N}_\perp$, al tener solo cadenas no interesantes, toda función monótona mantiene el supremo. Con ello, un análisis similar al anterior nos lleva a que el conjunto de funciones continuas es $\left(\bigsqcup_{x \in \mathbb{N}_\perp} C_x\right) \cup \{f : f\perp = \perp\}$.

(c) Considerando $\mathbb{N}^\infty \to \mathbb{N}_\perp$, la única cadena a tomar en cuenta para saber cuáles funciones monótonas no son continuas es $0 \leq 1 \leq \ldots$. Dada esa cadena, una función $f$ es continua si $\bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} fi = f\left(\bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} i\right) = f\infty$. Luego, entonces, el conjunto de funciones continuas es $\left(\bigcup_{x \in \mathbb{N}_\perp} C_x\right) \cup \{f : \exists x, y \in \mathbb{N} : (\forall k < x,\ fk = \perp) \wedge (\forall k \geq x,\ fk = y) \wedge f\infty = y\}$

(d) Considerando $\mathbb{N}^\infty \to \mathbb{N}^\infty$, del mismo modo que antes, la única cadena a considerar para ver qué funciones monótonas son no continuas es $0 \leq 1 \leq \ldots$. Por ello, buscamos que $f$ cumpla que sea monótona y $\bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} fi = f\left(\bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} i\right) = f\infty$. Luego, entonces, el conjunto de funciones continuas es $\left(\bigcup_{x \in \mathbb{N}^\infty} C_x\right) \cup \{f : f \text{ es monótona } \wedge \exists x \in \mathbb{N}^\infty : (\exists y \in \mathbb{N} : f(y) = x) \wedge (\forall y \leq x,\ f(y) \leq x) \wedge f\infty = x\}$

# Ejercicio 7

Si ahora queremos reducir los conjuntos caracterizados de funciones continuas en el ejercicio anterior, entonces tendremos para cada caso lo siguiente:

(a) $\{f : f\perp = \perp\}$.

(b) $\{f : f\bot = \bot\}$.

(c) $\{C_\bot\} \cup \{f : f0 = \bot \wedge \exists x, y \in \mathbb{N} : (\forall k < x,\ fk = \bot) \wedge (\forall k \geq x,\ fk = y) \wedge f\infty = y\}$.

(d) $\{C_\bot\} \cup \{f \text{ es monótona } \wedge \exists x \in \mathbb{N}^\infty : (\exists y \in \mathbb{N} : f(y) = x) \wedge (\forall y \leq x,\ f(y) \leq x) \wedge f\infty = x \wedge f0 = 0\}$.

# Ejercicio 8

Como se quiere caracterizar los puntos fijos y decidir cuál es el menor, recordemos primero al **Teorema del Menor Punto Fijo**. Este expresa que sea $D$ un dominio y $F \in D \to D$ continua, entonces $\bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} F^i\bot$ existe y es el menor punto fijo de $F$.

Ahora, veamos cada una de las funciones a considerar separadas por items.

## Item A

Consideramos $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $fn = n$. Claramente, $\mathbb{N}$ es el conjunto de puntos fijos dado que incluso $f$ se define de ese modo. Por ello, el menor punto fijo es 0.

## Item B

Consideramos $h : \mathbb{N}^\infty \to \mathbb{N}^\infty$ tal que $hn = n + 1$. Digamos que $x \in \mathbb{N}$, luego $hx = x + 1 \neq x$ por lo que no es punto fijo. El caso de $\infty$ es diferente dado que $\infty + 1 = \infty$, por lo que es el único punto fijo de $h$.

## Item C

Consideramos $g : \langle\text{intexp}\rangle \to \langle\text{intexp}\rangle$ tal que $ge = e$. Notemos que, de la misma forma que $(a)$, todo elemento de $\langle\text{intexp}\rangle$ un punto fijo. Lo que resta ver es cuál es el mínimo entre estos. Como no existe este mínimo dado que $\langle\text{intexp}\rangle$ es un orden discreto, entonces no existe un mínimo punto fijo.

## Item D

Consideramos $k : \mathbb{N}^\infty \to \mathbb{N}^\infty$ tal que:

$$kn = \begin{cases} n + 1 & \text{si } n < 8 \\ n & \text{cc.} \end{cases}$$

Claramente, entonces, los puntos fijos son caracterizados dentro de este conjunto: $\{x \in \mathbb{N} : x \geq 8\}$. Por ello, también, el menor punto fijo es 8.

# Ejercicio 9

Vamos a tomar cada función $F$ como un caso aparte para mayor comodidad a la hora de realizar la solución a este ejercicio.

## Item A

Consideramos $F \in (\mathbb{N} \to \mathbb{N}_\bot) \to (\mathbb{N} \to \mathbb{N}_\bot)$ tal que:

$$Ff = \begin{cases} f & \text{si } f \text{ es una función total} \\ \bot_{\mathbb{N} \to \mathbb{N}_\bot} & \text{cc.} \end{cases}$$

Por definición, $f$ es una función total si para todo elemento de $\mathbb{N}$ está definida. Es decir, básicamente es función total si su imagen no contiene a $\bot$.

Ahora, si consideramos la cadena de funciones $f_0 \leq f_1 \leq \dots$ donde:

$$f_i x = \begin{cases} x & \text{si } x \leq i \\ \bot & \text{cc.} \end{cases}$$

tenemos que $\bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} Ff_i = \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} \bot_{\mathbb{N} \to \mathbb{N}_\bot} = \bot_{\mathbb{N} \to \mathbb{N}_\bot}$ dado que $f_i$ es una función parcial. Sin embargo, $F\left(\bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} f_i\right) = FI = I$ donde $I$ es la función identidad. Por ello, entonces, al no ser igual el supremo tenemos que $F$ no es continua.

Como segunda parte, entonces, vamos a calcular $F^{(i)}\bot_{\mathbb{N}\to\mathbb{N}_\bot}$ para $i = 0, 1, 2$. Luego, veamos:

$$F^0\bot_{\mathbb{N}\to\mathbb{N}_\bot} = \bot_{\mathbb{N}\to\mathbb{N}_\bot}$$

$$\begin{aligned}
F^1\bot_{\mathbb{N}\to\mathbb{N}_\bot} &= F\bot_{\mathbb{N}\to\mathbb{N}_\bot} \\
&= \begin{cases} \bot_{\mathbb{N}\to\mathbb{N}_\bot} & \text{si es total} \\ \bot_{\mathbb{N}\to\mathbb{N}_\bot} & \text{cc.} \end{cases} \\
&= \bot_{\mathbb{N}\to\mathbb{N}_\bot}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F^2\bot_{\mathbb{N}\to\mathbb{N}_\bot} &= FF\bot_{\mathbb{N}\to\mathbb{N}_\bot} \\
&= F\bot_{\mathbb{N}\to\mathbb{N}_\bot} \\
&= \bot_{\mathbb{N}\to\mathbb{N}_\bot}
\end{aligned}$$

## Item B

Ahora, consideramos la función $F \in (\mathbb{N} \to \mathbb{N}_\bot) \to (\mathbb{N} \to \mathbb{N}_\bot)$ tal que:

$$Ffn = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ f(n-2) & \text{cc.} \end{cases}$$

Para ver que $F$ es continua, queremos demostrar que dada una cadena $f_0 \leq f_1 \leq \dots$ entonces $\bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} Ff_i = F\left(\bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} f_i\right)$.

Sin embargo, primero demostraremos que $F$ es monótona para que sea más sencillo hacer la demostración de continuidad. Para ello, consideremos $f, g \in \mathbb{N} \to \mathbb{N}_\bot : f \leq g$. Por definición, entonces, $\forall x \in \mathbb{N},\ fx \leq gx$. Luego, si $n = 0$ tenemos que $Ff0 = 0$ y que $Fg0 = 0$ por lo que se cumple la desigualdad en este caso. Ahora, si $n \neq 0$ tenemos que $Ffn = f(n-2)$ y que $Fgn = g(n-2)$. Como $f \leq g$, entonces $f(n-2) \leq g(n-2)$ por lo que se cumple para este otro caso. Finalmente, $F$ es monótona. ■

Respecto a la continuidad, vamos a demostrarlo según el valor de $n$. Digamos que $n = 0$, entonces:

$$\begin{aligned}
\left(\bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} Ff_i\right) 0 &= \bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} Ff_i 0 \\
&= \bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$F\left(\bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} f_i\right) 0 = 0$$

por lo que se cumple la igualdad en este caso.

Ahora, digamos $n \neq 0$:

$$\begin{aligned}
\left(\bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} Ff_i\right) n &= \bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} Ff_i n \\
&= \bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} f_i(n-2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F\left(\bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} f_i\right) n &= \left(\bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} f_i\right)(n-2) \\
&= \bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} f_i(n-2)
\end{aligned}$$

por lo que se cumple la igualdad aquí también.

Luego, entonces, se demuestra que dada una cadena entonces el supremo se conserva por lo que $F$ es continua. ■

Como segunda parte, ahora vamos a calcular $F^{(i)}\perp_{\mathbb{N}\to\mathbb{N}_\perp}$ para $i = 0, 1, 2$. Luego, veamos:

$$
\begin{aligned}
F^0\perp_{\mathbb{N}\to\mathbb{N}_\perp} n &= \perp_{\mathbb{N}\to\mathbb{N}_\perp} \\
\\
F^1\perp_{\mathbb{N}\to\mathbb{N}_\perp} n &= F\perp_{\mathbb{N}\to\mathbb{N}_\perp} n \\
&= \begin{cases} 0 & n = 0 \\ \perp_{\mathbb{N}\to\mathbb{N}_\perp} & \text{cc.} \end{cases} \\
\\
F^2\perp_{\mathbb{N}\to\mathbb{N}_\perp} n &= FF\perp_{\mathbb{N}\to\mathbb{N}_\perp} n \\
&= \begin{cases} 0 & n = 0 \\ F\perp_{\mathbb{N}\to\mathbb{N}_\perp}(n-2) & \text{cc.} \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & n = 0 \\ 0 & n-2 = 0 \\ \perp_{\mathbb{N}\to\mathbb{N}_\perp} & \text{cc.} \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & n \in \{0, 2\} \\ \perp_{\mathbb{N}\to\mathbb{N}_\perp} & \text{cc.} \end{cases}
\end{aligned}
$$

# Ejercicio 10

Queremos calcular la menor función $f \in \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_\perp$ que satisface

$$
fn = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ n * f(n-1) & n \neq 0 \end{cases}
$$

Para ello, deberemos usar el Teorema del Menor Punto Fijo para $F : (\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_\perp) \to (\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_\perp)$ tal que

$$
Ffn = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ n * f(n-1) & n \neq 0 \end{cases}
$$

por lo que voy a demostrar primero que $F$ es monótona y, luego, que es continua.

Vamos a demostrar que $F$ es monótona. Para ello, digamos $f, g \in \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_\perp : f \leq g$. Esto quiere decir que $\forall x \in \mathbb{Z},\ fx \leq gx$. Si $n = 0$, $Ff0 = 0 \leq Fg0 = 0$. Si $n \neq 0$, $Ffn = n * f(n-1) \leq Fgn = n * g(n-1)$ dado que $f(n-1) \leq g(n-1)$. Luego, entonces, $F$ es monótona. ■

Ahora, vamos a demostrar que $F$ es continua. Para ello, digamos que tenemos la cadena $f_0 \leq f_1 \leq \cdots \leq f_n \leq \ldots$ de $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_\perp$. Queremos ver que $\left(\bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} Ff_i\right) = F\left(\bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} f_i\right)$. Para ello, vamos a verlo para cada $n \in \mathbb{Z}$. Si $n = 0$:

$$
\begin{aligned}
\left(\bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} Ff_i\right) 0 &= \bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} Ff_i 0 \\
&= \bigsqcup_{i\in N} 1 \\
&= 1
\end{aligned}
$$

$$
F\left(\bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} f_i\right) 0 = 1
$$

entonces se cumple la igualdad. Ahora, si $n \neq 0$:

$$\begin{aligned}
\left(\bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} Ff_i\right) n &= \bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} Ff_i n \\
&= \bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} (n * f_i(n-2)) \\
&= n * \bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} f_i(n-2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F\left(\bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} f_i\right) n &= n * \left(\bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} f_i\right)(n-2) \\
&= n * \bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} f_i(n-2)
\end{aligned}$$

entonces se cumple la igualdad. Por ello, finalmente, se demuestra que $F$ es continua. ■

Finalmente, entonces, ya estamos habilitados para usar el Teorema del Menor Punto Fijo. Para ello, primero veamos algunos casos para $F^{(i)}\perp$:

$$F^0 \perp n = \perp$$

$$\begin{aligned}
F^1 \perp n &= F \perp n \\
&= \begin{cases} 1 & n = 0 \\ n * \perp(n-1) & \text{cc.} \end{cases} \\
&= \begin{cases} 1 & n = 0 \\ \perp & \text{cc.} \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F^2 \perp n &= F F \perp n \\
&= \begin{cases} 1 & n = 0 \\ n * F\perp(n-1) & \text{cc.} \end{cases} \\
&= \begin{cases} 1 & n = 0 \\ n * 1 & n - 1 = 0 \\ \perp & \text{cc.} \end{cases} \\
&= \begin{cases} 1 & n = 0 \\ n & n = 1 \\ \perp & \text{cc.} \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F^3 \perp n &= F F^2 \perp n \\
&= \begin{cases} 1 & n = 0 \\ n * F^2\perp(n-1) & \text{cc.} \end{cases} \\
&= \begin{cases} 1 & n = 0 \\ n & n - 1 = 0 \\ n * (n-1) & n - 1 = 1 \\ \perp & \text{cc.} \end{cases} \\
&= \begin{cases} 1 & n = 0 \\ n & n = 1 \\ n * (n-1) & n = 2 \\ \perp & \text{cc.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Observando esto, propongo que $F^{(i)}\bot$ es igual a:

$$F^{(i)}\bot n = \begin{cases} n! & 0 \leq n < i \\ \bot & \text{cc.} \end{cases}$$

Viendo que el caso base se cumple, suponemos la hipótesis para $k \in \mathbb{N}$ y queremos verlo para $k+1$ así lo demostramos por inducción:

$$\begin{aligned} F^{k+1}\bot n &= FF^k\bot n \\ &= \begin{cases} 1 & n = 0 \\ n * F^k\bot(n-1) & \text{cc.} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 & n = 0 \\ n * (n-1)! & 0 \leq n-1 < k \\ \bot & \text{cc.} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 & n = 0 \\ n! & 1 \leq n < k+1 \\ \bot & \text{cc.} \end{cases} \\ &= \begin{cases} n! & 0 \leq n < k+1 \\ \bot & \text{cc.} \end{cases} \end{aligned}$$

por lo que se demuestra por inducción esta forma para $F^{(i)}$. ■

Ahora, como el menor punto fijo es el supremo de esta cadena, tenemos que:

$$\left(\bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} F^i\bot\right) n = \begin{cases} n! & 0 \leq n \\ \bot & \text{cc.} \end{cases}$$

# Ejercicio 11

Si queremos caracterizar las funciones que satisfacen la ecuación dada por:

$$fn = \begin{cases} f(n-1) & n < 0 \\ 1 & n = 0 \\ n * f(n-1) & n > 0 \end{cases}$$

debemos tener en cuenta que si $n < 0$ entonces $fn = f(n-1) = f(n-2) = f(n-3) = \dots$ infinitamente. Además, es claro que para $n \geq 0$ llegamos al mismo resultado obtenido en el ejercicio 10. Finalmente, entonces, se cumple que las funciones que satisfacen esta ecuación son de la forma:

$$fn = \begin{cases} k & n < 0 \\ n! & n \geq 0 \end{cases}$$

para un $k \in \mathbb{Z}_\bot$.

Respecto a la comparación de esta ecuación con la del ejercicio 10, podemos ver que la del ejercicio anterior cumple la caracterización de este aunque no es la única.