Trabajo práctico N° 8

Mayo 2025

Estudiante Emanuel Nicolás Herrador

Ejercicio 1

Veamos la semántica denotacional en D_∞ para cada uno de los términos separados en items.

Item A

Queremos ver la semántica de $M = \lambda f.\lambda x.\ f(fx)$. Veamos que:

$$\begin{aligned}
[\![M]\!]\,\eta &= [\![\lambda f.\lambda x.\ f(fx)]\!]\,\eta \\
&= \psi(\lambda c.\ [\![\lambda x.\ f(fx)]\!]\,[\eta \mid f : c]) \\
&= \psi(\lambda c.\ \psi(\lambda d.\ [\![f(fx)]\!]\,[\eta \mid f : c \mid x : d])) \\
&= \psi(\lambda c.\ \psi(\lambda d.\ \varphi([\![f]\!]\,[\eta \mid f : c \mid x : d])([\![fx]\!]\,[\eta \mid f : c \mid x : d]))) \\
&= \psi(\lambda c.\ \psi(\lambda d.\ \varphi c([\![fx]\!]\,[\eta \mid f : c \mid x : d]))) \\
&= \psi(\lambda c.\ \psi(\lambda d.\ \varphi c(\varphi([\![f]\!]\,[\eta \mid f : c \mid x : d])([\![x]\!]\,[\eta \mid f : c \mid x : d])))) \\
&= \psi(\lambda c.\ \psi(\lambda d.\ \varphi c(\varphi cd)))
\end{aligned}$$

Item B

Se pretende ver la semántica de $N = \lambda z.\lambda y.\ z$. Veamos que:

$$\begin{aligned}
[\![N]\!]\,\eta &= [\![\lambda z.\lambda y.\ z]\!]\,\eta \\
&= \psi(\lambda c.\ [\![\lambda y.\ z]\!]\,[\eta \mid z : c]) \\
&= \psi(\lambda c.\ \psi(\lambda d.\ [\![z]\!]\,[\eta \mid z : c \mid y : d])) \\
&= \psi(\lambda c.\ \psi(\lambda d.\ c))
\end{aligned}$$

Item C

Ahora queremos ver la semántica de MN. Para ello, veamos que:

$$\begin{aligned}
[\![MN]\!]\,\eta &= \varphi([\![M]\!]\,\eta)([\![N]\!]\,\eta) \\
&= \varphi\ (\psi(\lambda c.\ \psi(\lambda d.\ \varphi c(\varphi cd))))\ (\psi(\lambda e.\ \psi(\lambda f.\ e))) \\
&= (\lambda c.\ \psi(\lambda d.\ \varphi c(\varphi cd)))(\psi(\lambda e.\ \psi(\lambda f.\ e))) \\
&= \psi(\lambda d.\ \varphi\ (\psi(\lambda e.\ \psi(\lambda f.\ e)))\ (\varphi\ (\psi(\lambda e.\ \psi(\lambda f.\ e)))\ d)) \\
&= \psi(\lambda d.\ (\lambda e.\ \psi(\lambda f.\ e))\ ((\lambda e.\ \psi(\lambda f.\ e))\ d)) \\
&= \psi(\lambda d.\ (\lambda e.\ \psi(\lambda f.\ e))\ (\psi(\lambda f.\ d))) \\
&= \psi(\lambda d.\ \psi(\lambda f.\ \psi(\lambda f'.\ d)))
\end{aligned}$$

Ejercicio 2

Los enuncio pero no los voy a demostrar.

Teorema (Renombre). *Si $v' \notin FVe - \{v\}$, entonces $[\![\lambda v'.\ (e/v \to v')]\!] = [\![\lambda v.\ e]\!]$.*

Teorema (Coincidencia). *Si $\eta w = \eta' w$ para todo $w \in FVe$, entonces $[\![e]\!]\,\eta = [\![e]\!]\,\eta'$.*

Teorema (Corrección de la regla β). $[\![(\lambda v.\ e)e']\!] = [\![e/v \to e']\!]$.

Teorema (Corrección de la regla η). *Si $v \notin FVe$, entonces $[\![\lambda v.\ ev]\!] = [\![e]\!]$.*

Ejercicio 3

El objetivo es dar un término cerrado M cuya denotación en la semántica normal sea:

(a) Distinto a $\perp$ pero que para todos N y η, $[\![MN]\!]\,\eta = \perp$:

Podemos tomar $M = \lambda v.\ (\Delta\Delta)$ porque $[\![M]\!]\,\eta \neq \perp$ y:

$$\begin{aligned}
[\![MN]\!]\,\eta &= \varphi_{\perp\!\!\perp}\ ([\![M]\!]\,\eta)\ ([\![N]\!]\,\eta) \\
&= \varphi_{\perp\!\!\perp}\ ([\![\lambda v.\ (\Delta\Delta)]\!]\,\eta)\ ([\![N]\!]\,\eta) \\
&= \varphi_{\perp\!\!\perp}\ (\iota_\perp \psi(\lambda d.\ [\![\Delta\Delta]\!]\,[\eta \mid v : d]))\ ([\![N]\!]\,\eta) \\
&= \varphi_{\perp\!\!\perp}\ (\iota_\perp \psi(\lambda d.\ \perp))\ ([\![N]\!]\,\eta) \\
&= (\lambda d.\ \perp)\ ([\![N]\!]\,\eta) \\
&= \perp
\end{aligned}$$

(b) Distinto a $\perp$ y $[\![M(\Delta\Delta)]\!]\,\eta \neq \perp$:

Podemos tomar $M = \lambda x.\lambda y.\ y$ porque $[\![M]\!]\,\eta \neq \perp$ y:

$$\begin{aligned}
[\![M(\Delta\Delta)]\!]\,\eta &= \varphi_{\perp\!\!\perp}\ ([\![M]\!]\,\eta)\ ([\![\Delta\Delta]\!]\,\eta) \\
&= \varphi_{\perp\!\!\perp}\ ([\![\lambda x.\lambda y.\ y]\!]\,\eta)\ \perp \\
&= \varphi_{\perp\!\!\perp}\ (\iota_\perp \psi(\lambda d.\ [\![\lambda y.\ y]\!]\,[\eta \mid x : d]))\ \perp \\
&= \varphi_{\perp\!\!\perp}\ (\iota_\perp \psi(\lambda d.\ \iota_\perp \psi(\lambda e.\ [\![y]\!]\,[\eta \mid x : d \mid y : e])))\ \perp \\
&= \varphi_{\perp\!\!\perp}\ (\iota_\perp \psi(\lambda d.\ \iota_\perp \psi(\lambda e.\ e)))\ \perp \\
&= (\lambda d.\ \iota_\perp \psi(\lambda e.\ e))\ \perp \\
&= \iota_\perp \psi(\lambda e.\ e) \\
&\neq \perp
\end{aligned}$$

Ejercicio 4

La semántica eager de $[\![M(\Delta\Delta)]\!]\,\eta$ dado en $(3b)$ es $\perp$ porque en el orden eager siempre se evalúan también los argumentos. Motivo de ello, como $[\![\Delta\Delta]\!]\,\eta = \perp$, la semántica de la aplicación también es $\perp$.

Se puede ver por la definición porque en eager la aplicación se define como $[\![e_0 e_1]\!]\,\eta = \varphi_{\perp\!\!\perp}\ ([\![e_0]\!]\,\eta)_{\perp\!\!\perp}\ ([\![e_1]\!]\,\eta)$. Luego, si $[\![e_1]\!]\,\eta = \perp$, por el segundo $_{\perp\!\!\perp}$ todo es $\perp$.

Ejercicio 5

Si consideramos la semántica denotacional normal del cálculo lambda, entonces tenemos que:

(a) *Teorema de sustitución*: Vale.

(b) *Corrección de la regla β*: Vale.

(c) *Corrección de la regla η*: No vale por el caso $[\![\lambda v.\ (\Delta\Delta)v]\!]\,\eta \neq \perp = [\![\Delta\Delta]\!]\,\eta$.

Ejercicio 6

Si consideramos la semántica denotacional eager del cálculo lambda, entonces tenemos que:

(a) *Teorema de sustitución*: No vale porque $[\![\delta w]\!]\,\eta \in V_\perp$ y $\eta' w \in V$ por lo que son incomparables.

(b) *Corrección de la regla β*: No vale por el caso $[\![(\lambda v.\lambda x.\ x)(\Delta\Delta)]\!]\,\eta = \perp \neq [\![\lambda x.\ x]\!]$.

(c) *Corrección de la regla η*: No vale por mismo caso que con orden normal.

Ejercicio 7

Teorema (TS para Eager). *Si $[\![\delta w]\!]\,\eta = \iota_\perp(\eta' w)$ para toda $w \in FV e$, entonces $[\![e/d]\!]\,\eta = [\![e]\!]\,\eta'$.*

Ejercicio 8

Se pretende ver cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles falsas, justificando el porqué.

En el caso de los items (a) a (d), estos son imprecisos porque los entornos son distintos.

Respecto al item (e), no se define un isomorfismo en normal con $\varphi_{\perp\!\!\perp}$ y $\iota_\perp\psi$ porque $\forall f \in [D \to D],\ \iota_\perp\psi f \neq \perp_D$ por lo que la segunda no es suryectiva.

Por último, respecto al item (f), este es falso porque:

$$\begin{aligned} \varphi_{\perp\!\!\perp} &\in V_\perp \to [V \to V_\perp] \\ \iota_\perp \circ \psi &\in [V \to V_\perp] \to V_\perp \\ \varphi_{\perp\!\!\perp} \circ (\iota_\perp \circ \psi) &\in V_\perp \to V_\perp \end{aligned}$$

Luego, los dominios son distintos por lo que no se cumple.