Trabajo práctico N° 6

Mayo 2025

Estudiante Emanuel Nicolás Herrador

Ejercicio 1

En este ejercicio se pretende dar un programa para cada posible comportamiento en LIS con fallas y output. Veamos cada caso posible de forma separada.

Respecto a un programa con *cantidad finita de output y luego divergencia*, podemos considerar:

$$\textbf{while true do skip}$$

Un programa con *cantidad finita de output y luego falla* puede ser:

$$\textbf{fail}$$

Un programa con *cantidad finita de output y luego terminación* puede ser:

$$\textbf{skip}$$

Y, finalmente, un programa con *cantidad infinita de output* puede ser:

$$\textbf{while true do } !1$$

Ejercicio 2

Dado el programa $\textbf{while x} > 0 \textbf{ do !x}; c$ se pretende calcular la semántica denotacional para cada uno de los casos dependiendo el programa c. Se verá cada uno por separado.

Item A

Consideramos $c \equiv \textbf{if x} > 0 \textbf{ then skip else fail}$. Luego, el programa a considerar es:

$$\textbf{while x} > 0 \textbf{ do } (\textbf{!x}; \textbf{if x} > 0 \textbf{ then skip else fail})$$

En base a eso, veamos la semántica del programa. Sea w la semántica del while, entonces:

$$\begin{aligned}
&[\![\textbf{while x} > 0 \textbf{ do } (\textbf{!x}; \textbf{if x} > 0 \textbf{ then skip else fail})]\!]\,\sigma = \\
&= w\sigma \\
&= \begin{cases} w_*([\![\textbf{!x}; \textbf{if x} > 0 \textbf{ then skip else fail}]\!]\,\sigma) & \text{si } [\![\mathbf{x} > 0]\!]\,\sigma \\ \langle\sigma\rangle & \text{si } \neg\,[\![\mathbf{x} > 0]\!]\,\sigma \end{cases} \\
&= \begin{cases} w_*([\![\textbf{if x} > 0 \textbf{ then skip else fail}]\!]_*\,([\![\textbf{!x}]\!]\,\sigma)) & \text{si } \sigma\mathbf{x} > 0 \\ \langle\sigma\rangle & \text{si } \sigma\mathbf{x} \leq 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} w_*([\![\textbf{if x} > 0 \textbf{ then skip else fail}]\!]\,\langle\sigma\mathbf{x},\ \sigma\rangle) & \text{si } \sigma\mathbf{x} > 0 \\ \langle\sigma\rangle & \text{si } \sigma\mathbf{x} \leq 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \langle\sigma\mathbf{x},\ w_*([\![\textbf{if x} > 0 \textbf{ then skip else fail}]\!]\,\sigma)\rangle & \text{si } \sigma\mathbf{x} > 0 \\ \langle\sigma\rangle & \text{si } \sigma\mathbf{x} \leq 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \langle\sigma\mathbf{x},\ w_*([\![\textbf{skip}]\!]\,\sigma)\rangle & \text{si } \sigma\mathbf{x} > 0 \\ \langle\sigma\rangle & \text{si } \sigma\mathbf{x} \leq 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \langle\sigma\mathbf{x}, w\sigma\rangle & \text{si } \sigma\mathbf{x} > 0 \\ \langle\sigma\rangle & \text{si } \sigma\mathbf{x} \leq 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \langle\sigma\mathbf{x}\rangle \ \texttt{++}\ w\sigma & \text{si } \sigma\mathbf{x} > 0 \\ \langle\sigma\rangle & \text{si } \sigma\mathbf{x} \leq 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Ahora, para calcular w vamos a considerar $F \in (\Sigma \to \Omega) \to (\Sigma \to \Omega)$ tal que:

$$Fw\sigma = \begin{cases} \langle \sigma\mathbf{x} \rangle \ \text{++} \ w\sigma & \text{si } \sigma\mathbf{x} > 0 \\ \langle \sigma \rangle & \text{si } \sigma\mathbf{x} \leq 0 \end{cases}$$

Sabemos que como w es un while, entonces F es una función continua. Ahora, para calcular la semántica del while podemos usar TMPF de modo que $w = \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} F^i \bot_{\Sigma \to \Omega}$. Para ello, entonces, se propone la siguiente caracterización para $F^i \bot_{\Sigma \to \Omega}$ con $i \geq 1$:

$$F^i \bot_{\Sigma \to \Omega} = \sigma \mapsto \begin{cases} \langle \overbrace{\sigma\mathbf{x}, \ldots, \sigma\mathbf{x}}^{i \text{ veces}} \rangle & \text{si } \sigma\mathbf{x} > 0 \\ \langle \sigma \rangle & \text{si } \sigma\mathbf{x} \leq 0 \end{cases}$$

Para demostrarlo, vamos a hacer inducción en i. Veamos primero el caso base $i = 1$:

$$\begin{aligned} F^1 \bot_{\Sigma \to \Omega} &= \sigma \mapsto \begin{cases} \langle \sigma\mathbf{x} \rangle \ \text{++} \ \bot_{\Sigma \to \Omega}\sigma & \text{si } \sigma\mathbf{x} > 0 \\ \langle \sigma \rangle & \text{si } \sigma\mathbf{x} \leq 0 \end{cases} \\ &= \sigma \mapsto \begin{cases} \langle \sigma\mathbf{x} \rangle & \text{si } \sigma\mathbf{x} > 0 \\ \langle \sigma \rangle & \text{si } \sigma\mathbf{x} \leq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

por lo que se cumple. Ahora, como HI suponemos que la caracterización vale para $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ y queremos ver $k+1$:

$$\begin{aligned} F^{k+1} \bot_{\Sigma \to \Omega} &= \sigma \mapsto \begin{cases} \langle \sigma\mathbf{x} \rangle \ \text{++} \ F^k \bot_{\Sigma \to \Omega}\sigma & \text{si } \sigma\mathbf{x} > 0 \\ \langle \sigma \rangle & \text{si } \sigma\mathbf{x} \leq 0 \end{cases} \\ &= \sigma \mapsto \begin{cases} \langle \sigma\mathbf{x} \rangle \ \text{++} \ \langle \overbrace{\sigma\mathbf{x}, \ldots, \sigma\mathbf{x}}^{k \text{ veces}} \rangle & \text{si } \sigma\mathbf{x} > 0 \\ \langle \sigma \rangle & \text{si } \sigma\mathbf{x} \leq 0 \end{cases} \\ &= \sigma \mapsto \begin{cases} \langle \overbrace{\sigma\mathbf{x}, \ldots, \sigma\mathbf{x}}^{k+1 \text{ veces}} \rangle & \text{si } \sigma\mathbf{x} > 0 \\ \langle \sigma \rangle & \text{si } \sigma\mathbf{x} \leq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Luego, entonces, por TMPF queda claro que la semántica del while es:

$$w = \sigma \mapsto \begin{cases} \langle \overbrace{\sigma\mathbf{x}, \ldots, \sigma\mathbf{x}, \ldots}^{\text{infinitas veces}} \rangle & \text{si } \sigma\mathbf{x} > 0 \\ \langle \sigma \rangle & \text{si } \sigma\mathbf{x} \leq 0 \end{cases}$$

Item B

Ahora consideramos $c \equiv \textbf{if x} > 0 \textbf{ then fail else skip}$. Por ello, el programa a considerar es:

$$\textbf{while x} > 0 \textbf{ do } (!x; \textbf{if x} > 0 \textbf{ then fail else skip})$$

En base a eso, veamos la semántica del programa. Sea w la semántica del while, entonces:

$$\begin{aligned} &[\![\textbf{while x} > 0 \textbf{ do } (!x; \textbf{if x} > 0 \textbf{ then fail else skip})]\!]\, \sigma = \\ &= w\sigma \\ &= \begin{cases} w_*([\![!x; \textbf{if x} > 0 \textbf{ then fail else skip}]\!]\, \sigma) & \text{si } [\![\mathbf{x} > 0]\!]\, \sigma \\ \langle \sigma \rangle & \text{si } \neg [\![\mathbf{x} > 0]\!]\, \sigma \end{cases} \\ &= \begin{cases} w_*([\![\textbf{if x} > 0 \textbf{ then fail else skip}]\!]_* ([\![!x]\!]\, \sigma)) & \text{si } \sigma\mathbf{x} > 0 \\ \langle \sigma \rangle & \text{si } \sigma\mathbf{x} \leq 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} w_*([\![\textbf{if x} > 0 \textbf{ then fail else skip}]\!]) \langle \sigma\mathbf{x}, \sigma \rangle & \text{si } \sigma\mathbf{x} > 0 \\ \langle \sigma \rangle & \text{si } \sigma\mathbf{x} \leq 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \langle \sigma\mathbf{x} \rangle \ \text{++} \ w_*([\![\textbf{if x} > 0 \textbf{ then fail else skip}]\!]\, \sigma) & \text{si } \sigma\mathbf{x} > 0 \\ \langle \sigma \rangle & \text{si } \sigma\mathbf{x} \leq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$= \begin{cases} \langle \sigma\mathbf{x} \rangle \ \mathbin{+\!\!+}\ w_*([\![\mathbf{fail}]\!]\,\sigma) & \text{si } \sigma\mathbf{x} > 0 \\ \langle \sigma \rangle & \text{si } \sigma\mathbf{x} \leq 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \langle \sigma\mathbf{x} \rangle \ \mathbin{+\!\!+}\ w_*\langle \mathbf{abort}, \sigma \rangle & \text{si } \sigma\mathbf{x} > 0 \\ \langle \sigma \rangle & \text{si } \sigma\mathbf{x} \leq 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \langle \sigma\mathbf{x}, \langle \mathbf{abort}, \sigma \rangle \rangle & \text{si } \sigma\mathbf{x} > 0 \\ \langle \sigma \rangle & \text{si } \sigma\mathbf{x} \leq 0 \end{cases}$$

En base a esto, entonces, la semántica del while está dada por:

$$w = \sigma \mapsto \begin{cases} \langle \sigma\mathbf{x}, \langle \mathbf{abort}, \sigma \rangle \rangle & \text{si } \sigma\mathbf{x} > 0 \\ \langle \sigma \rangle & \text{si } \sigma\mathbf{x} \leq 0 \end{cases}$$