Guía 1: ejercicios

Ejercicio 1

Item A

Verdadero. Para ello, veamos cada afirmación:

- $R = \emptyset$ es una relación binaria sobre X: sí, dado que $\emptyset \subseteq X^2$
- R es transitiva, simétrica y antisimétrica respecto a X: sí, dado que al ser vacío, no hay relaciones entre los elementos de X, por lo que no hay elementos que no cumplan con las propiedades.

Item B

Falso. Se puede ver por contraejemplo considerando $X = \{1, 2, 3\}$ y $R = \{(1, 2), (2, 1), (1, 3)\}$. Luego, es claro que:

- No es antisimétrica, dado que $1R2 \wedge 2R1$ pero $1 \neq 2$
- No es simétrica, dado que $1R3 \nRightarrow 3R1$

Item C

Verdadero. Se puede notar dado que si $R = A^2$, entonces:

- Es reflexiva porque $\forall x \in A, (x, x) \in R$
- Es transitiva porque, en particular, $(x, y) \in R \forall x, y \in A$
- Es simétrica porque, en particular, $(x, y) \in R \forall x, y \in A$

Luego, entonces, por definición, es una relación de equivalencia.

Item D

Falso. Dado que si $A \neq \emptyset$, entonces no cumple con la reflexividad.

Item E

Verdadero. Es trivial de ver.

Item F

Falso. Lo veamos por contraejemplo. Por (c) sabemos que $R = \mathbb{N}^2$ es una relación de equivalencia sobre $\mathbb{N}$. Luego, R **no** es una relación de equivalencia sobre $\mathbb{N} - \{1\}$, porque no es una relación binaria sobre $\mathbb{N} - \{1\}$, dado que $\mathbb{N}^2 \not\subseteq (\mathbb{N} - \{1\})^2$.

Ejercicio 2

Sea R una relación de equivalencia sobre A y sea $a \in A$, entonces tenemos que $a/R = \{b \in A : aRb\}$ por definición. Luego, como R es una relación de equivalencia, por definición es reflexiva, por lo que se cumple aRa. Finalmente, y en base a la definición de a/R, tenemos que $a \in a/R$. $\blacksquare$

Ejercicio 3

Sea R una relación de equivalencia sobre A y sean $a, b \in A$, vamos a ver los dos casos del sí y solo sí:

- $aRb \Rightarrow a/R = b/R$: si aRb, entonces $\forall x \in b/R$ se cumple bRx, por lo que por transitividad aRx; lo que significa que $x \in a/R$. Luego, por reflexividad sabemos que bRa, por lo que de forma análoga sale que $\forall x \in a/R, x \in b/R$. Finalmente, esto significa que $a/R = b/R$. $\blacksquare$
- $aRb \Leftarrow a/R = b/R$: por (2), sabemos que $b \in b/R$. Luego, como $a/R = b/R, b \in a/R$, por lo que por definición de a/R, aRb. $\blacksquare$

Finalmente, entonces, se demuestra que $aRb \iff a/R = b/R$.

Ejercicio 4

Sea R una relación de equivalencia sobre A y sean $a, b \in A$, veamos los dos casos:

- Supongamos que $a/R \neq b/R$, entonces por (3) tenemos que *no se cumple* aRb. Luego, queda claro que $\nexists x \in A : x \in a/R \wedge x \in b/R$, dado que eso significaría que aRx y bRx, por lo que por simetría tendríamos xRb y, por transitividad, aRb llegando a un absurdo. Luego, entonces, si no se cumple la igualdad entre a/R y b/R, entonces estos no comparten ningún elemento. Es decir, $a/R \cap b/R = \emptyset$.
- Supongamos que $a/R \cap b/R \neq \emptyset$, entonces $\exists x \in A : x \in a/R \wedge x \in b/R$. Luego, por lo mismo que antes, esto significaría aRb, por lo que por (3) se cumple que $a/R = b/R$.

Finalmente, entonces, esto significa que se cumple siempre que $a/R \cap b/R = \emptyset \vee a/R = b/R$. $\blacksquare$

Ejercicio 5

Si consideramos $R = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : 5|x - y\}$, entonces $\mathbb{Z}/R$ tiene 5 clases de equivalencia que son los 5 conjuntos de números separados según su resto en la división por 5.

Es decir,
$\mathbb{Z}/R = \{\{5k : k \in \mathbb{Z}\}, \{5k + 1 : k \in \mathbb{Z}\}, \{5k + 2 : k \in \mathbb{Z}\}, \{5k + 3 : k \in \mathbb{Z}\}, \{5k + 4 : k \in \mathbb{Z}\}\}$.

Ejercicio 6

Sea $R = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 : x, y \leq 6\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 : x, y > 6\}$, entonces podemos ver que:

- Es una relación binaria sobre $\mathbb{N}$, dado que $R \subseteq \mathbb{N}^2$
- Es reflexiva porque $\forall x \in \mathbb{N} : x \leq 6, (x, x) \in R$ y $\forall y \in \mathbb{N} : y > 6, (y, y) \in R$, lo cual significa que $\forall z \in \mathbb{N}, (z, z) \in R$
- Es transitiva porque si $\exists x, y, z \in \mathbb{N} : xRy \wedge yRz$, entonces o bien $x, y, z \leq 6$, o bien $x, y, z > 6$, lo que significa que, en ambos casos, se cumple xRz
- Es simétrica porque si $\exists x, y \in \mathbb{N} : xRy$, entonces o bien $x, y \leq 6$, o bien $x, y > 6$, lo que significa que, en ambos casos, se cumple yRx

Luego, demostramos que R es una relación de equivalencia sobre $\mathbb{N}$. $\blacksquare$

Respecto a $\mathbb{N}/R$, es sencillo notar que tiene 2 clases de equivalencias, dado que $\mathbb{N}/R = \{\{x \in \mathbb{N} : x \leq 6\}, \{x \in \mathbb{N} : x > 6\}\}$.

Ejercicio 7

Item A

Verdadero. Sea R una relación de equivalencia sobre $A \neq \emptyset$, entonces veamos que:

$$|A/R| = 1 \iff \forall a, b \in A, a/R = b/R \overset{(3)}{\iff} \forall a, b \in A, aRb \iff R = A^2$$

Por lo que se demuestra que $|A/R| = 1 \iff R = A^2$. $\blacksquare$

Item B

Falso. Si R es una relación de equivalencia sobre A, entonces $A/R = \{a/R : a \in A\}$

Item C

Falso. Sea R una relación de equivalencia sobre $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, entonces $|\{i/R : i \in A\}| = |A/R|$. Luego, si $R = A^2$, por (a) tenemos que $|A/R| = 1 \neq 5$.

Item D

Falso. Sea $R = \{(x, y) \in A^2 : x = y\} = \{(x, x) : x \in A\}$ una relación de equivalencia sobre A , entonces tenemos que $a/A = \{a\} \forall a \in A$. Luego, esto significa que $A/R = \{a/A : a \in A\} = \{\{a\} : a \in A\} \neq A$. ■

Item E

Falso. Digamos $R = \mathbb{N}^2$ una relación de equivalencia sobre $\mathbb{N}$ y $C = \{1\} \subseteq \mathbb{N}$. Luego, es claro que $C \nsubseteq A/R$ dado que $A/R = \{\{x : x \in \mathbb{N}\}\}$.

Ejercicio 8

Item A

Sea R una relación de equivalencia sobre A, entonces veamos que:

$$
\begin{aligned}
ker(\pi_R) &\overset{\text{def. } ker}{=} \{(a, b) \in A : \pi_R(a) = \pi_R(b)\} \\
&\overset{\text{def. } \pi_R}{=} \{(a, b) \in A : a/R = b/R\} \\
&\overset{(3)}{=} \{(a, b) \in A : aRb\} \\
&= R
\end{aligned}
$$

por lo que se demuestra que $ker(\pi_R) = R$. ■

Item B

Sea R una relación de equivalencia sobre A, entonces veamos que:

$$
\begin{aligned}
\pi_R \text{ es inyectiva} &\overset{\text{def.}}{\iff} \forall x, y \in A, (\pi_R(x) = \pi_R(y) \Rightarrow x = y) \\
&\overset{\text{def. } \pi_R}{\iff} \forall x, y \in A, (x/R = y/R \Rightarrow x = y) \\
&\overset{(3)}{\iff} \forall x, y \in A, (xRy \Rightarrow x = y) \\
&\iff \nexists x, y \in A : (xRy \land x \neq y) \\
&\iff R = \{(x, x) : x \in A\} = \{(x, y) \in A^2 : x = y\}
\end{aligned}
$$

por lo que se demuestra que π_R es inyectiva si y solo si $R = \{(x, y) \in A^2 : x = y\}$. ■

Ejercicio 9

Sean $\mathcal{P}$ una partición de A y $a \in A$, por definición sabemos que $\exists S \in \mathcal{P} : a \in S$ y que $\forall S' \neq S \in \mathcal{P}, S \cap S' = \emptyset$, por lo que, entonces $a \notin S'$. Luego, se demuestra que S es único. ■

Ejercicio 10

Item A

Sea $\mathcal{P}$ una partición de A, definimos $R_{\mathcal{P}} = \{(a,b) \in A^2 : a, b \in S \text{ para algún } S \in \mathcal{P}\}$. Luego, notemos que:

- Es una relación binaria sobre A, dado que $R_{\mathcal{P}} \subseteq A^2$
- Es reflexiva porque $\forall x \in A, xR_{\mathcal{P}}x$, dado que $x \in S$ para algún $S \in \mathcal{P}$
- Es transitiva porque $\forall x, y, z \in A : xR_{\mathcal{P}}y \wedge yR_{\mathcal{P}}z$ tenemos que $x, y \in S$ y $y, z \in S$ para algún $S \in \mathcal{P}$. Luego, como $x, z \in S$, entonces $xR_{\mathcal{P}}z$
- Es simétrica porque $\forall x, y \in A : xR_{\mathcal{P}}y$ implica que $x, y \in S$ para algún $S \in \mathcal{P}$, por lo que $y, x \in S$ y, por lo tanto, $yR_{\mathcal{P}}x$

Finalmente, entonces, se demuestra que $R_{\mathcal{P}}$ es una relación de equivalencia sobre A. ■

Item B

Sea R una relación de equivalencia sobre A, entonces notemos para $A/R = \{a/R : a \in A\}$ que:

- $\forall a \in A, a/R \subseteq A$ (por def.) y $a/R \neq \emptyset$ (dado que $a \in a/R$)
- $\forall a, b \in A : a/R \neq b/R, a/R \cap b/R = \emptyset$ por (4)
- $\bigcup_{a \in A} a/R = A$

Finalmente, entonces, por definición, se demuestra que A/R es una partición de A. ■

Ejercicio 11

Item A

Impreciso. $\mathcal{P}$ si es una partición de X, entonces no es una relación binaria sobre X y, menos, una relación de equivalencia. Luego, $x/\mathcal{P}$ no tiene sentido.

Item B

Impreciso. No tiene sentido lo escrito. En particular, una partición de X es un conjunto de conjuntos de elementos de X.

Item C

Falso. $\{1,3\},\{2,4\},\{5,6\}$ **no** es una partición de $\{1,2,3,4,5,6\}$ porque no es un conjunto. Para que lo sea, debería ser $\{\{1,3\},\{2,4\},\{5,6\}\}$.

Item D

Verdadero. Porque X es un conjunto de elementos de X y $\mathcal{P}$ es un conjunto de conjuntos de elementos de X.

Item E

Verdadero. Bajo el mismo criterio que (d), dado que A/R con R relación de equivalencia, es una partición de A.

Item F

Verdadero. Esto se nota por que al ser biyección, se necesita que tanto A y A/R tengan la misma cardinalidad. Luego, A/R tiene que ser de la forma $\{\{a : a \in A\}\}$, lo que significa que $R = \{(x,x) : x \in A\}$.

Ejercicio 12

Item A

Falso. Porque la partición que se hace con $\mathbb{Z}/R$ con $R = \{(x,y) \in \mathbb{Z} : 2|x-y\}$ es la de números impares por un lado y números pares por el otro. Es decir, $\mathbb{Z}/R = \{\{2k : k \in \mathbb{Z}\}, \{2k+1 : k \in \mathbb{Z}\}\}$. Luego, tendríamos, por ejemplo, que $1 = f(0/R) = f(2/R) = \frac{1}{5}$, lo cual es absurdo.

Item B

Impreciso. Porque no es una función, dado que si la consideramos como f en el caso de (a), entonces $0 = f(0/R) = f(2/0) = 2$, lo cual es absurdo.

Ejercicio 13

Si tenemos $F : \mathbb{N} \to \{0,1,2,3\}$ dada por $F(n) = n \mod 4$, entonces notemos que $ker(F) = \{(x,y) \in \mathbb{N}^2 : x \mod 4 = y \mod 4\}$, por lo que para $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $n/ker(F) = \{x \in \mathbb{N} : x \mod 4 = n \mod 4\}$ (es decir, es el conjunto de números con mismo resto módulo 4 que n).

Teniendo esto en mente, si consideramos $f : A/ker(F) \to \mathbb{N}$ como $f(n/ker(F)) = F(n)$, tenemos que esta es una función dado que la invariante de cada grupo de la partición es, justamente, su resto módulo 4. ■

Respecto a las preguntas de inyectividad o suryectividad, tenemos para f que:

- Es inyectiva porque si $\exists n, m \in \mathbb{N} : f(n/ker(F)) = f(m/ker(F))$, entonces $F(n) = F(m)$, por lo que $n \mod 4 = m \mod 4$, lo que significa que $n/ker(F) = m/ker(F)$
- No es suryectiva porque $Im(f) = \{0, 1, 2, 3\} \neq \mathbb{N}$

Ejercicio 14

Item A

Sea $F : A \to B$ una función sobreyectiva, entonces veamos que $ker(F)$ es una relación de equivalencia sobre A respecto a los valores de $Im(F) = B$ (al ser sobreyectiva). Es decir, $ker(F) = \{(a, b) \in A^2 : F(a) = F(b)\}$.

Ahora, esto significa que $a/ker(F) = \{x \in A : F(x) = F(a)\}$, por lo que si consideramos $f : A/ker(F) \to B$ como $f(a/ker(F)) = F(a)$, tenemos que es una función porque la invariante de cada grupo de la partición $A/ker(F)$ es, justamente, el valor de F en ese grupo. ■

Item B

Ahora, si queremos ver si f es biyectiva, notemos que, a diferencia del ejercicicio (13), acá definimos $f : A/ker(F) \to B$. Luego, teniendo esto en cuenta, veamos que:

- Es inyectiva porque si $\exists a, b \in A : f(a/ker(F)) = f(b/ker(F))$, entonces $F(a) = F(b)$, por lo que $a/ker(F) = b/ker(F)$ dado que cada grupo de $A/ker(F)$ tiene un único valor de F
- Es sobreyectiva porque $Im(f) = Im(F) = B$, dado que F es sobreyectiva

Con ello, entonces, se demuestra que f es biyectiva. ■