Guia 2 de Logica

August 29, 2024

Nota: Los ejercicios que tienen una S son para una ”Segunda pasada” es decir ya sea son mas anecdoticos y menos importantes tematicamente, o son de completar pruebas y tienen que ver mas con la parte teorica, o son mas dificiles y conviene encararlos despues de una primera pasada por la guia (asi uno comienza a pensarlos con un poco mas de madurez sobre el tema).

Ordenes parciales

En esta guia y en las proximas cuatro estudiaremos varias clases de estructuras algebraicas en las cuales hay un orden parcial involucrado. Esto tendra una triple utilidad. Por un lado algunos de los resultados probados sobre algebras de Boole seran utilizados mas adelante para la prueba del teorema de completitud de la logica de primer orden. Tambien el estudio de estos temas servira para volvernos algebristas maduros (lo mas que se pueda) ya que esto sera util a la hora de hacer logica matematica. La logica matematica es *matematica aplicada* al estudio de los matematicos, su lenguaje y sus metodos de demostracion, y que mas comodo para hacer logica matematica que contar con un matematico dentro de uno mismo para estudiarlo!

Finalmente cabe destacar que los resultados cubiertos en estas primeras 6 guias son importantes en si mismos fuera de su vinculacion con la logica y tienen interesantes aplicaciones en otras disciplinas y ramas de la matematica.

Una relacion binaria R sobre un conjunto A sera llamada un *orden parcial sobre* A si es reflexiva, transitiva y antisimetrica respecto de A. Algunos ejemplos:

(E1) Sea $R = \{(r,t) \in \mathbf{R}^2 : r \leq t\}$. Entonces R es un orden parcial sobre $\mathbf{R}$, llamado el orden usual de $\mathbf{R}$

(E2) Sea $R = \{(1,2),(1,3),(1,1),(2,2),(3,3)\}$. Entonces R es un orden parcial sobre $\{1,2,3\}$

(E3) Sea $R = \{(S,T) \in \mathcal{P}(\omega)^2 : S \subseteq T\}$. Entonces R es un orden parcial sobre $\mathcal{P}(\omega)$

(E4) Sea $R = \{(x,y) \in \omega^2 : x \leq y\}$. Entonces R es un orden parcial sobre ω.

(E5) Sea $R = \{(1,1)\}$. Entonces R es un orden parcial sobre $\{1\}$.

(E6) $\{(a,b) : a = b\}$ es un orden parcial sobre A, cualesquiera sea el conjunto A

(E7) Si $S \subseteq \mathbf{N}$, entonces $R = \{(x,y) \in S^2 : x|y\}$ es un orden parcial sobre S.

Ejercicio 1: V o F o I, justifique

(a) $\{1 \leq 2 \leq 3\}$ es un orden parcial sobre $\{1,2,3\}$

(b) Las relaciones dadas en (E1) y (E4) son distintas

(c) La relacion dada en (E4) es un orden parcial sobre $\mathbf{R}$

(d) Si $\leq$ es un orden parcial sobre A, entonces hay $a, b \in A$ tales que no se da que $a \leq b$

(e) Si $\leq$ es un orden parcial sobre A y $e \in \leq$ entonces $Ti(e) = 2-$UPLA

(f) $R = \{(x,y) \in \mathbf{Z}^2 : x|y\}$ es un orden parcial sobre $\mathbf{Z}$

Muchas veces denotaremos con $\leq$ a una relacion binaria que sea un orden parcial. Esto hace mas intuitiva nuestra escritura pero siempre hay que tener en cuenta que $\leq$ en estos casos esta denotando cierto conjunto de pares ordenados previamente definido.

Usaremos la siguiente

Convencion notacional (A) Si hemos denotado con $\leq$ a cierto orden parcial sobre un conjunto A, entonces

- Denotaremos con $<$ a la relacion binaria $\{(a,b) \in A^2 : a \leq b \text{ y } a \neq b\}$. Es decir que $< = \{(a,b) \in A^2 : a \leq b \text{ y } a \neq b\}$. Cuando se de $a < b$ diremos que *a es menor que b* o que *b es mayor que a* (*respecto de* $\leq$)
- Denotaremos con $\prec$ a la relacion binaria

$$\{(a,b) \in A^2 : a < b \text{ y no existe } z \text{ tal que } a < z < b\}$$

Cuando se de $a \prec b$ diremos que *a es cubierto por b* o que *b cubre a* (*respecto de* $\leq$)

(B) El mismo tipo de convencion notacional se hara cuando denotemos con $\leq'$ (o $\tilde{\leq}$, $\bar{\leq}$, $\leq_1$, $\leq_2$, etc) a un orden parcial sobre A. Es decir tendremos dos relaciones binarias nuevas tacitamente definidas, a saber:

$$<' = \{(a,b) \in A^2 : a \leq' b \text{ y } a \neq b\}$$
$$\prec' = \{(a,b) \in A^2 : a <' b \text{ y no existe } z \text{ tal que } a <' z <' b\}$$

Algunos ejemplos:

(E1) Si $A = \mathbf{R}$ y $\leq\, = \{(r,t) \in \mathbf{R}^2 : r = t\}$, entonces $<\, = \emptyset$

(E2) Si $A = \{1,2,3,4\}$ y $\leq\, = \{(1,2),(2,3),(1,3),(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$, entonces $<\, = \{(1,2),(2,3),(1,3)\}$ y $\prec\, = \{(1,2),(2,3)\}$. En particular tenemos que $1 \prec 2$, $1 < 3$ pero no se da que $1 \prec 3$.

(E3) Si $A = \mathbf{R}$ y $\leq$ es el orden usual de $\mathbf{R}$, entonces $\prec\, = \emptyset$

(E4) Si $A = \mathcal{P}(\omega)$ y $\leq\, = \{(S,T) \in \mathcal{P}(\omega)^2 : S \subseteq T\}$, entonces $<\, = \{(S,T) \in \mathcal{P}(\omega)^2 : S \subsetneq T\}$ y ademas se tiene que $S \prec T$ sii hay un $n \in T - S$ tal que $T = S \cup \{n\}$ (justifique)

Ordenes totales: Sea A un conjunto cualquiera. Por un *orden total sobre* A entenderemos un orden parcial $\leq$ sobre A el cual cumple:

(C) $x \leq y$ o $y \leq x$, cualesquiera sean $x, y \in A$

Es decir que ciertos ordenes parciales son llamados ordenes totales. Dejamos al lector decidir cuales de los ejemplos anteriores son ordenes totales

Un *conjunto parcialmente ordenado o poset* es un par $(P, \leq)$ donde P es un conjunto no vacio cualquiera y $\leq$ es un orden parcial sobre P. Dado un poset $(P, \leq)$, el conjunto P sera llamado el *universo* de $(P, \leq)$. Algunos ejemplos:

(E1) $(\mathbf{R}, \leq)$ es un poset, donde $\leq$ es el orden usual de los numeros relales

(E2) $(\{1,2,3\}, \{(1,2),(1,3),(1,1),(2,2),(3,3)\})$ es un poset

(E3) $(\mathcal{P}(\omega), \leq)$ es un poset, donde $\leq\, = \{(S,T) \in \mathcal{P}(\omega)^2 : S \subseteq T\}$

(E4) $(\{1\}, \{(1,1)\})$ es un poset

(E5) $(\mathbf{N}, \leq)$ es un poset, donde $\leq\, = \{(x,y) \in \mathbf{N}^2 : x|y\}$

Un *conjunto totalmente ordenado* es un par $(P, \leq)$ donde P es un conjunto no vacio cualquiera y $\leq$ es un orden total sobre P. Por supuesto todo conjunto totalmente ordenado es un poset.

Ejercicio 2: V o F o I, justifique

(a) $(\emptyset, \emptyset)$ es un poset
(b) $(\{\emptyset\}, \{(\emptyset, \emptyset)\})$ es un poset
(c) $(\{1,2\}, \{1 < 2\})$ es un poset
(d) $[\{1,2\}, \{(1,1),(2,2)\}]$ es un poset
(e) Si A es no vacio, entonces $(A, A \times A)$ es un poset
(f) $(\{1\}, \{(1,1)\})$ es un conjunto totalmente ordenado
(g) Si A es no vacio, entonces $(A, A \times A)$ es un conjuno totalmente ordenado

Diagramas de Hasse

Dado un poset $(P, \leq)$, con P un conjunto finito, podemos realizar un diagrama llamado *diagrama de Hasse,* siguiendo las siguientes instrucciones:

(1) Asociar en forma inyectiva, a cada $a \in P$ un punto p_a del plano

(2) Trazar un segmento de recta uniendo los puntos p_a y p_b, cada vez que $a \prec b$

(3) Realizar lo indicado en los puntos (1) y (2) en tal forma que

  (i) Si $a \prec b$, entonces p_a esta por debajo de p_b

  (ii) Si un punto p_a ocurre en un segmento del diagrama entonces lo hace en alguno de sus extremos.

La relacion de orden $\leq$ puede ser facilmente obtenida a partir del diagrama, a saber, $a \leq b$ sucedera si y solo si $p_a = p_b$ o hay una sucesion de segmentos ascendentes desde p_a hasta p_b.

Ejercicio 3: Dar todos los posets con universo igual a $\{2, 3, 4\}$

Ejercicio 3,3: Sea $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$ y sea $R = \{(x, y) \in S^2 : x|y\}$. Haga el digrama de Hasse del poset (S, R)

Ejercicio 3,6: Sea $S = \{x \in \mathbf{N} : x|60\}$ y sea $R = \{(x, y) \in S^2 : x|y\}$. Haga el digrama de Hasse del poset (S, R)

Ejercicio 4: De una prueba perfecta del siguiente enunciado: Sea $(P, \leq)$ un poset. Se tiene que si $x \leq y$ y $x \not\prec y$, entonces $x = y$, cualesquiera sean $x, y \in P$

Ejercicio 4,3: De una prueba perfecta del siguiente enunciado: Sea $(P, \leq)$ un poset. Supongamos que $|P| \geq 2$. Entonces hay $a, b \in P$ tales que $a \nleq b$

Ejercicio 5: V o F o I, justifique

(a) Si $(P, \leq)$ es un poset, entonces para cada $a, b \in P$ tenemos que $a \not\prec b$ si y solo si $b \leq a$

(b) Si $(P, \leq)$ es un poset, entonces para cada $a, b \in P$ tenemos que $a \nleq b$ si y solo si $b \leq a$ y $a \neq b$

(c) Si $(P, \leq)$ es un poset, entonces para cada $a, b \in P$ tenemos que $b \leq a$ implica que $a \not\prec b$

(d) Si $(P, \leq)$ es un poset, entonces si $a < b$, hay un $z \in P$ tal que $a \prec z \leq b$

(e) Si $(P, \leq)$ es un poset, entonces $a \not\prec b$ sii ya sea $b \leq a$ o existe un $z \in P$ tal que $a < z < b$

(f) (S) Supongamos todos los elementos de P son conjuntos y sea $\leq = \{(A,B) \in P^2 : A \subseteq B\}$. Si $A, B \in P$ son tales que B cubre a A en $(P, \leq)$, entonces hay un $b \in B - A$ tal que $B = A \cup \{b\}$

(g) Si $(P, \leq)$ es un conjunto totalmente ordenado, entonces para cada $a, b \in P$ tenemos que $a \not\leq b$ si y solo si $b \leq a$

(h) Si $(P, \leq)$ es un poset, entonces para cada $a \in P$ hay un $b \in P$ tal que $a \prec b$

(i) Si $(P, \leq)$ es un poset, entonces para cada $a \in P$ hay a lo sumo un $b \in P$ tal que $a \prec b$

Dado un poset $(P, \leq)$ y $a, b \in P$ diremos que b *tapa* a $b \in P$ o que a es *tapado* por b cuando se de que $a < b$ y $b \leq c$, para cada $c \in P$ tal que $a \leq c$.

Ejercicio 5,5: Pruebe que si b tapa a a, entonces b cubre a a pero que la resiproca no es cierta.

Elementos maximales, maximos, minimales y minimos

Sea $(P, \leq)$ un poset. Diremos que $a \in P$ es un elemento *maximo de* $(P, \leq)$ si $b \leq a$, para todo $b \in P$. En forma analoga se define el concepto de elemento *minimo*. Algunos ejemplos:

(E1) 1 es un elemento maximo del poset $(\{1,2\}, \{(1,1),(2,2),(2,1)\})$ y 2 un elemento minimo de $(\{1,2\}, \{(1,1),(2,2),(2,1)\})$.

(E2) Sea $\leq$ el orden usual de los numeros reales. El poset $(\mathbf{R}, \leq)$ no tiene elemento maximo ni minimo.

(E3) El poset $\mathbf{P} = (\{1,2,3\}, \{(1,2),(1,3),(1,1),(2,2),(3,3)\})$ no tiene elemento maximo. 1 es un elemento minimo de $\mathbf{P}$.

(E4) 1 es un elemento maximo del poset $(\{1\}, \{(1,1)\})$. Tambien 1 es un elemento minimo de $(\{1\}, \{(1,1)\})$.

Como lo muestra el ejemplo (E2), no siempre hay elementos maximos o minimos en un poset.

Ejercicio 6: Sea $(P, \leq)$ un poset. Entonces $(P, \leq)$ tiene a lo sumo un elemento maximo

En caso de existir el maximo (resp. minimo) sera denotado con 1 (resp. 0). Tambien diremos que $(P, \leq)$ *tiene un* 1 (resp. 0) para expresar que $(P, \leq)$ tiene un elemento maximo (resp. minimo).

Sea $(P, \leq)$ un poset. Diremos que $a \in P$ es un elemento *maximal de* $(P, \leq)$ si no existe un $b \in P$ tal que $a < b$. En forma analoga se define el concepto de elemento *minimal*. Algunos ejemplos:

(E1) Sea $\leq$ el orden usual de los numeros reales. El poset $(\mathbf{R}, \leq)$ no tiene elementos maximales ni minimales.

(E2) Sea $\mathbf{P} = (\{1,2,3\}, \{(1,2),(1,3),(1,1),(2,2),(3,3)\})$. El unico elemento minimal de $\mathbf{P}$ es 1. Los elementos 2 y 3 son los unicos maximales de $\mathbf{P}$.

(E3) Sea $\mathbf{P} = (\{1,2\}, \{(1,1),(2,2)\})$. 1 y 2 son elementos maximales de $\mathbf{P}$. 1 y 2 son elementos minimales de $\mathbf{P}$.

Como lo muestra el ejemplo (E1), no siempre hay elementos maximales o minimales en un poset.

Ejercicio 6,3: Sea $S = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15\}$ y sea $R = \{(x,y) \in S^2 : x|y\}$. Encuentre los elementos maximales y minimales de (S, R)

Ejercicio 6,6: Encuentre los elementos maximales de $(\mathcal{P}(\omega) - \{\omega\}, \leq)$, donde $\leq\, = \{(S,T) \in (\mathcal{P}(\omega) - \{\omega\})^2 : S \subseteq T\}$.

Ejercicio 7: Todo elemento maximo (resp. minimo) de $(P, \leq)$ es un elemento maximal (resp. minimal) de $(P, \leq)$

Ejercicio 8: V o F o I, justifique

(a) Si $(P, \leq)$ es un poset y $a \in P$ no es un elemento maximo de $(P, \leq)$, entonces $a < b$, para algun $b \in P$

(b) Si $(P, \leq)$ es un poset sin elementos maximales, entonces P es infinito

Supremos

Sea $(P, \leq)$ un poset. Dado $S \subseteq P$, diremos que un elemento $a \in P$ es *cota superior de S en $(P, \leq)$* cuando $b \leq a$, para todo $b \in S$. Notese que todo elemento de P es cota superior de $\emptyset$ en $(P, \leq)$. Un elemento $a \in P$ sera llamado *supremo de S en $(P, \leq)$* cuando se den las siguientes dos propiedades

(1) a es a cota superior de S en $(P, \leq)$

(2) Para cada $b \in P$, si b es una cota superior de S en $(P, \leq)$, entonces $a \leq b$.

Algunos ejemplos:

(E1) Si $S = \{x, y\}$ y se da que $x \leq y$, entonces y es supremo de S en $(P, \leq)$

(E2) Consideremos el poset $(\mathbf{R}, \leq)$, donde $\leq$ es el orden usual de los numeros reales. Notese que ningun elemento de $\mathbf{R}$ es cota superior de ω en $(\mathbf{R}, \leq)$. O sea que ningun elemento de $\mathbf{R}$ es supremo de ω en $(\mathbf{R}, \leq)$. Sea

$$\begin{aligned} S &= \{-1/n : n \in \mathbf{N}\} \\ &= \{-1, -1/2, -1/3, ...\} \end{aligned}$$

Es facil ver que 0 es supremo de S en $(\mathbf{R}, \leq)$.

(E3) Consideremos el poset $(\mathcal{P}(\omega), \leq)$, donde $\leq = \{(A, B) \in \mathcal{P}(\omega)^2 : A \subseteq B\}$. Sean $A, B \in \mathcal{P}(\omega)$. Es facil ver que $A \cup B$ es supremo de $\{A, B\}$ en $(\mathcal{P}(\omega), \leq)$

Como lo muestra el ejemplo (E1) no siempre existe un supremo de S en $(P, \leq)$.

Ejercicio 9: Si a es supremo de S en $(P, \leq)$ y a' es supremo de S en $(P, \leq)$, entonces $a = a'$

El ejercicio anterior nos permite hablar de EL supremo de S en $(P, \leq)$, cuando exista. Denotaremos con $\sup(S)$ al supremo de S en $(P, \leq)$, en caso de que exista. A veces para hacer mas dinamicos los enunciados en lugar de escribir z es supremo de S en $(P, \leq)$ escribiremos $z = \sup(S)$ o $\sup(S) = z$.

Notese que (E1) nos muestra que no siempre el supremo de un conjunto pertenece al conjunto.

Ejercicio 10: Sea $(P, \leq)$ un poset.

(a) Si $a \leq b$ entonces $\sup\{a, b\} = b$

(b) Encuentre $\{a \in P : a$ es cota superior de $\emptyset$ en $(P, \leq)\}$

(c) En caso de existir, el supremo del conjunto $\emptyset$ en $(P, \leq)$ es un elemento minimo de $(P, \leq)$.

Ejercicio 11: Dar un ejemplo de un poset finito en el cual haya elementos distintos x_1, x_2, x_3 tales que se den simultaneamente las siguientes tres condiciones

(a) $\{x_1, x_2, x_3\}$ es una anticadena, es decir $x_i \not\leq x_j$, cada vez que $i \neq j$

(b) no existen $\sup\{x_1, x_2\}$, $\sup\{x_1, x_3\}$ y $\sup\{x_2, x_3\}$

(c) existe $\sup\{x_1, x_2, x_3\}$

Ejercicio 12: Si $(P, \leq)$ es un poset y $a = \sup(S)$, entonces $a = \sup(S \cup \{a\})$

Ejercicio 13: Sea $(P, \leq)$ un poset y sea $a \in P$. Entonces a es un elemento maximo de $(P, \leq)$ sii $a = \sup(P)$

Ejercicio 14: V o F o I, justificar

(a) Si $(P, \leq)$ es un poset y $S \subseteq P$, entonces $a = \sup(S)$ en $(P, \leq)$ sii $a \in S$ y $b \leq a$, para todo $b \in S$

(b) Sea $(P, \leq)$ un poset y sean $S \subseteq P$ y $a \in P$ una cota superior de S. Si a no es el supremo de S en $(P, \leq)$ entonces hay alguna cota superior b de S tal que $b < a$

Ejercicio 14,5: Sea $(P, \leq)$ un poset, sea $S \subseteq P$ y sea $b \in P$. Si $a = \sup(S)$ y existe $\sup(\{a, b\})$, entonces $\sup(S \cup \{b\}) = \sup(\{a, b\})$.

Recordemos que dados $x, y \in \mathbf{N}$ decimos que x *es multiplo de* y cuando y divide a x. Ademas, por definicion, el *minimo comun multiplo de* x *e* y es el menor elemento del conjunto $\{z \in \mathbf{N} : z$ es multiplo de x y de $y\}$. El minimo comun multiplo de x e y se denota con $mcm(x, y)$. Una propiedad importante es la siguiente:

(*) Si z es multiplo de x y de y, entonces $mcm(x, y)|z$, es decir no solo $mcm(x, y)$ es menor o igual a cada multiplo comun de x e y, sino que $mcm(x, y)$ divide a cada multiplo comun de x e y

Un ejemplo importante de existencia de supremos es el siguiente:

(E4) Consideremos el poset $(\mathbf{N}, D)$, donde $D = \{(x, y) \in \mathbf{N}^2 : x|y\}$. Dados $x, y \in \mathbf{N}$, se tiene que $mcm(x, y)$ es el supremo de $\{x, y\}$ en $(\mathbf{N}, D)$. Es claro que $mcm(x, y)$ es cota superior de $\{x, y\}$ en $(\mathbf{N}, D)$. Ademas la propiedad (*) nos asegura que la propiedad (2) de la definicion de supremo se cumple. No es obvio que se cumple (2) de la definicion de supremo? Por que es necesario aplicar la propiedad (*)?

Infimos

Sea $(P, \leq)$ un poset. Dado $S \subseteq P$, diremos que un elemento $a \in P$ es *cota inferior de* S *en* $(P, \leq)$, cuando $a \leq b$, para cada $b \in S$. Notese que todo elemento de P es cota inferior de $\emptyset$ en $(P, \leq)$. Un elemento $a \in P$ sera llamado *infimo de* S *en* $(P, \leq)$ cuando se den las siguientes dos propiedades

(1) a es a cota inferior de S en $(P, \leq)$

(2) Para cada $b \in P$, si b es una cota inferior de S en $(P, \leq)$, entonces $b \leq a$.

Algunos ejemplos:

(E1) Si $S = \{x, y\}$ y se da que $x \leq y$, entonces x es infimo de S en $(P, \leq)$

(E2) Consideremos el poset $(\mathbf{R}, \leq)$, donde $\leq$ es el orden usual de los numeros reales. Notese que ningun elemento de $\mathbf{R}$ es cota inferior de $\mathbf{Z}$ en $(\mathbf{R}, \leq)$. O sea que ningun elemento de $\mathbf{R}$ es infimo de $\mathbf{Z}$ en $(\mathbf{R}, \leq)$. Sea

$$\begin{aligned} S &= \{1/n : n \in \mathbf{N}\} \\ &= \{1, 1/2, 1/3, ...\} \end{aligned}$$

Es facil ver que 0 es infimo de S en $(\mathbf{R}, \leq)$.

(E3) Consideremos el poset $(\mathcal{P}(\omega), \leq)$, donde $\leq = \{(A, B) \in \mathcal{P}(\omega)^2 : A \subseteq B\}$. Sean $A, B \in \mathcal{P}(\omega)$. Es facil ver que $A \cap B$ es infimo de $\{A, B\}$ en $(\mathcal{P}(\omega), \leq)$.

Como lo muestra el ejemplo (E1) no siempre existe un infimo de S en $(P, \leq)$.

Ejercicio 15: Si a es infimo de S en $(P, \leq)$ y a' es infimo de S en $(P, \leq)$, entonces $a = a'$

El ejercicio anterior nos permite hablar de EL infimo de S en $(P, \leq)$, cuando exista. Denotaremos con $\inf(S)$ al infimo de S en $(P, \leq)$, en caso de que exista. A veces para hacer mas dinamicos los enunciados en lugar de escribir z es infimo de S en $(P, \leq)$ escribiremos $z = \inf(S)$ o $\inf(S) = z$.

Notese que (E1) nos muestra que no siempre el infimo de un conjunto pertenece al conjunto.

Ejercicio 16: Sea $(P, \leq)$ un poset.

(a) Si $a \leq b$ entonces $\inf\{a, b\} = a$

(b) Encuentre $\{a \in P : a$ es cota inferior de $\emptyset$ en $(P, \leq)\}$

(c) En caso de existir, el infimo del conjunto $\emptyset$ en $(P, \leq)$ es un elemento maximo de $(P, \leq)$.

Ejercicio 17: Sea $P = \{0\} \cup \{x \in \mathbf{R} : 1 < x \leq 5\}$. Sea $\tilde{\leq} = \{(x, y) \in P^2 : x \leq y\}$. Sea $S = \{x \in \mathbf{Q} : 1 < x \leq 5\}$. Tiene infimo S en el poset $(P, \tilde{\leq})$? Tiene infimo en $(P, \tilde{\leq})$ el conjunto $\{x \in \mathbf{Q} : 2 < x \leq 5\}$?

Ejercicio 18: (S) V o F, Justificar. Sea $D((x_0, y_0), r) = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq r^2\}$. Sea $P = \{\emptyset\} \cup \{D((x_0, y_0), r) : x_0, y_0 \in \mathbf{R}, r > 0\}$. En el poset $(P, \subseteq)$ siempre existe $\inf\{D_1, D_2\}$, cualesquiera sean $D_1, D_2 \in P$. (Ver video en granlogico resolviendo este ejercicio.)

Recordemos que dados $x, y \in \mathbf{N}$, por definicion, el *maximo comun divisor de x e y* es el mayor elemento del conjunto $\{z \in \mathbf{N} : z|x$ y $z|y\}$. El maximo comun divisor de x e y se denota con $mcd(x, y)$. Una propiedad importante es la siguiente:

(**) Si $z|x$ y $z|y$, entonces $z|mcd(x, y)$, es decir no solo $mcd(x, y)$ es mayor o igual a cada divisor comun de x e y, sino que $mcd(x, y)$ es divisible por cada divisor comun de x e y

Un ejemplo importante de existencia de infimos es el siguiente:

(E4) Consideremos el poset $(\mathbf{N}, D)$, donde $D = \{(x,y) \in \mathbf{N}^2 : x|y\}$. Dados $x, y \in \mathbf{N}$, se tiene que $mcd(x,y)$ es el infimo de $\{x,y\}$ en $(\mathbf{N}, D)$. Es claro que $mcd(x,y)$ es cota inferior de $\{x,y\}$ en $(\mathbf{N}, D)$. Ademas la propiedad (**) nos asegura que la propiedad (2) de la definicion de infimo se cumple. No es obvio que se cumple (2) de la definicion de infimo? Por que es necesario aplicar la propiedad (**)?

Homomorfismos de posets

Sean $(P, \leq)$ y $(P', \leq')$ posets. Una funcion $F : P \to P'$ sera llamada un *homomorfismo de* $(P, \leq)$ *en* $(P', \leq')$ si para todo $x, y \in P$ se cumple que $x \leq y$ implica $F(x) \leq' F(y)$. Escribiremos $F : (P, \leq) \to (P', \leq')$ para expresar que F es un homomorfismo de $(P, \leq)$ en $(P', \leq')$. Algunos ejemplos:

(E1) $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dada por $F(r) = 3.r$ es un homomorfismo de $(\mathbf{R}, \leq)$ en $(\mathbf{R}, \leq)$

(E2) Sea $\leq = \{(n,m) \in \omega^2 : n = m\}$ y sea $(P', \leq')$ un poset cualquiera. Entonces cualquier funcion $F : \omega \to P'$ es un homomorfismo de $(\omega, \leq)$ en $(P', \leq')$ (glup!)

(E3) Consideremos el poset $(\mathcal{P}(\omega), \leq)$, donde $\leq = \{(A,B) \in \mathcal{P}(\omega)^2 : A \subseteq B\}$ y el poset $(\mathcal{P}(\{1,2,3,4\}), \leq')$, donde $\leq' = \{(A,B) \in \mathcal{P}(\{1,2,3,4\})^2 : A \subseteq B\}$. Entonces $F : \mathcal{P}(\omega) \to \mathcal{P}(1,2,3,4)$ dada por $F(A) = A \cap \{1,2,3,4\}$ es un homomorfismo de $(\mathcal{P}(\omega), \leq)$ en $(\mathcal{P}(\{1,2,3,4\}), \leq')$

Una funcion $F : P \to P'$ sera llamada un *isomorfismo de* $(P, \leq)$ *en* $(P', \leq')$ si F es biyectiva, F es un homomorfismo de $(P, \leq)$ en $(P', \leq')$ y F^{-1} es un homomorfismo de $(P', \leq')$ en $(P, \leq)$. Escribiremos $(P, \leq) \cong (P', \leq')$ cuando exista un isomorfismo de $(P, \leq)$ en $(P', \leq')$ y en tal caso diremos que $(P, \leq)$ y $(P', \leq')$ son *isomorfos*. Ejemplos:

(E4) $F : \omega \to \mathbf{N}$ dada por $F(x) = x + 1$ es un isomorfismo de $(\omega, \leq)$ en $(\mathbf{N}, \leq')$, donde $\leq$ es el orden usual de ω y $\leq'$ es el orden usual de $\mathbf{N}$

(E5) Consideremos los posets $(\mathcal{P}(\{1,2\}), \leq)$, donde $\leq = \{(A,B) \in \mathcal{P}(\{1,2\})^2 : A \subseteq B\}$ y $(\{1,2,3,6\}), \leq')$, donde $\leq' = \{(x,y) \in \{1,2,3,6\}^2 : x|y\}$. Entonces la funcion $\{(\emptyset, 1), (\{2\}, 2), (\{3\}, 3), (\{1,2\}, 6)\}$ es un isomorfismo de $(\mathcal{P}(\{1,2\}), \leq)$, en $(\{1,2,3,6\}), \leq')$. Se le ocurre otro isomorfismo de $(\mathcal{P}(\{1,2\}), \leq)$, en $(\{1,2,3,6\}), \leq')$.

Ejercicio 18,5: Refute con un contraejemplo la aparentemente verdadera propiedad:

- Si F es un homomorfismo de $(P, \leq)$ en $(P', \leq')$, entonces no se cumple que

$$x < y \text{ implica } F(x) <' F(y), \text{ cualesquiera sean } x, y \in P$$

Ejercicio 19: Encuentre un homomorfismo F de $(P, \leq)$ en $(P', \leq')$ el cual sea biyectivo pero que no sea un isomorfismo de $(P, \leq)$ en $(P', \leq')$

El siguiente lema aporta evidencia al hecho de que los isomorfismos preservan todas las propiedades matematicas.

Lemma 1 *Sean $(P, \leq)$ y $(P', \leq')$ posets. Supongamos F es un isomorfismo de $(P, \leq)$ en $(P', \leq')$.*

(a) Para $x, y \in P$, tenemos que $x < y$ si y solo si $F(x) <' F(y)$.

(b) Para cada $x \in P$, se tiene que x es maximo (resp. minimo) de $(P, \leq)$ si y solo si $F(x)$ es maximo (resp. minimo) de $(P', \leq')$.

(c) Para cada $x \in P$, se tiene que x es maximal (resp. minimal) en $(P, \leq)$ si y solo si $F(x)$ es maximal (resp. minimal) en $(P', \leq')$.

(d) Para $x, y, z \in P$, tenemos que $z = \sup\{x, y\}$ si y solo si $F(z) = \sup\{F(x), F(y)\}$

(e) Para $x, y, z \in P$, tenemos que $z = \inf\{x, y\}$ si y solo si $F(z) = \inf\{F(x), F(y)\}$

(f) Para $x, y \in P$, tenemos que $x \prec y$ si y solo si $F(x) \prec' F(y)$.

Proof. (b) Sea $a \in P$ un elemento fijo. Supongamos $a \in P$ es maximo de $(P, \leq)$. Probaremos que $F(a)$ es maximo de $(P', \leq')$. Sea b un elemento fijo pero arbitrario de P'. Probaremos que $b \leq' F(a)$. Sea $d \in P$ tal que $F(d) = b$ (tal d existe y que F es sobreyectiva). Ya que a es maximo de $(P, \leq)$ tenemos que $d \leq a$. Ya que F es un homomorfismo tenemos que $F(d) \leq' F(a)$ por lo cual $b \leq' F(a)$ ya que $F(d) = b$. Ya que b era arbitrario hemos probado que $x \leq' F(a)$ para cada $x \in P'$, lo cual por definicion nos dice que $F(a)$ es maximo de $(P', \leq')$. Supongamos ahora que $F(a)$ es maximo de $(P', \leq')$. Probaremos que a es maximo de $(P, \leq)$. Sea b un elemento fijo pero arbitrario de P. Probaremos que $b \leq a$. Ya que $F(a)$ es maximo de $(P', \leq')$ tenemos que $F(b) \leq' F(a)$. Ya que F^{-1} es un homomorfismo tenemos que $F^{-1}(F(b)) \leq F^{-1}(F(a))$, por lo cual $b \leq a$. Ya que b era arbitrario hemos probado que $x \leq a$ para cada $x \in P$, lo cual por definicion nos dice que a es maximo de $(P, \leq)$.

Ya que a era fijo pero arbitrario hemos probado que cualquiera sea $x \in P$, se tiene que x es maximo de $(P, \leq)$ si y solo si $F(x)$ es maximo de $(P', \leq')$. ■

Notese que en la prueba de (b) del lema anterior se uso tacitamente la siguiente propiedad que es obvia pero clave en la demostracion:

- Si F es una funcion y $b \in \mathrm{Im}(F)$, entonces $b = F(d)$, para algun $d \in D_F$

Esto da lugar a la siguiente regla la cual es muy util a la hora de hacer pruebas:

Regla Pertenecer a la Imagen

Si ud en el desarrollo de una prueba conoce que un elemento b esta en la imagen de una funcion F, entonces escriba al elemento b en la forma $F(a)$, donde a denota algun elemento fijo del dominio de F

Muchas veces tener presente dicha regla es la diferencia a que a uno le salga o no una prueba determinada.

Ejercicio 20: Hacer las pruebas de (a),(c), (d), (e) y (f) del lema anterior (la prueba de (f) esta en video en granlogico)

Notese que (f) nos garantiza que si dos posets finitos son isomorfos, entonces pueden representarse con el mismo diagrama de Hasse.

Un poset $(P, \leq)$ sera llamado *denso* cuando cumpla:

- Si $a, b \in P$ son tales que $a < b$, entonces hay un $c \in P$ tal que $a < c$ y $c < b$

Ejercicio 21: Pruebe que si $(P, \leq)$ y $(P', \leq')$ son isomorfos, entonces

El isomorfismo mantiene la cantidad de maximales y minimales

(a) Si $(P, \leq)$ tiene exactamente tres elementos maximales, entonces tambien $(P', \leq')$ tiene exactamente tres elementos maximales

(b) Si $(P, \leq)$ es denso, entonces $(P', \leq')$ es denso

(c) Si cada elemento en $(P, \leq)$ es cubierto por exactamente dos elementos, entonces cada elemento en $(P', \leq')$ es cubierto por exactamente dos elementos (Hint: primero escriba mas formalmente que significa que un elemento a sea cubierto en un poset $(P, \leq)$ por exactamente dos elementos)

Ejercicio 21,3: Sea $F : (P, \leq) \to (P', \leq')$ un isomorfismo de posets. Pruebe que cualesquiera sean $x, y \in P$, tenemos que x es tapado por y si y solo si $F(x)$ es tapado por $F(y)$ (antes del Ejercicio 5,5 esta la definicion de "es tapado por")

Ejercicio 21,5: Sea $F : (P, \leq) \to (P', \leq')$ un homomorfismo de posets. Supongamos que F es suryectiva. Entonces

(a) Si $(P, \leq)$ es un conjunto totalmente ordenado, $(P', \leq')$ tambien lo es

(b) Si $(P, \leq)$ tiene un elemento maximo, $(P', \leq')$ tiene un elemento maximo

Ejercicio 22: V o F o I, justifique

(a) Si $(P, \leq)$ y $(P, \leq')$ son posets finitos isomorfos, entonces $\leq = \leq'$

(b) Si $(P, \leq)$ es un poset tal que toda funcion $F : P \to P$ es un homomorfismo de $(P, \leq)$ en $(P, \leq)$, entonces $|P| = 1$

(c) Si $F : (P, \leq) \to (P', \leq')$ un homomorfismo de posets y $(P', \leq')$ tiene un elemento maximo, entonces $(P, \leq)$ tiene un elemento maximo