Guia 4 de Logica

August 29, 2024

Nota: Los ejercicios que tienen una S son para una "Segunda pasada" es decir ya sea son mas anecdoticos y menos importantes tematicamente, o son de completar pruebas y tienen que ver mas con la parte teorica, o son mas dificiles y conviene encararlos despues de una primera pasada por la guia (asi uno comienza a pensarlos con un poco mas de madurez sobre el tema).

Reticulados terna

De la diversas propiedades de las operaciones s e i de un reticulado par $(L, \leq)$ distinguiremos las siguientes:

(I1) $x \mathsf{~s~} x = x \mathsf{~i~} x = x$, cualesquiera sea $x \in L$

(I2) $x \mathsf{~s~} y = y \mathsf{~s~} x$, cualesquiera sean $x, y \in L$

(I3) $x \mathsf{~i~} y = y \mathsf{~i~} x$, cualesquiera sean $x, y \in L$

(I4) $(x \mathsf{~s~} y) \mathsf{~s~} z = x \mathsf{~s~} (y \mathsf{~s~} z)$, cualesquiera sean $x, y, z \in L$

(I5) $(x \mathsf{~i~} y) \mathsf{~i~} z = x \mathsf{~i~} (y \mathsf{~i~} z)$, cualesquiera sean $x, y, z \in L$

(I6) $x \mathsf{~s~} (x \mathsf{~i~} y) = x$, cualesquiera sean $x, y \in L$

(I7) $x \mathsf{~i~} (x \mathsf{~s~} y) = x$, cualesquiera sean $x, y \in L$

Podemos abstraernos y pensar que s e i son dos operaciones binarias cualesquiera sobre un conjunto L arbitrario y estudiar cuando se satisfacen y cuando no dichas propiedades. Algunos ejemplos

(E1) Si tomamos $L = \mathbf{R}$ y

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{s} : \mathbf{R}^2 & \to & \mathbf{R} \\ (a,b) & \to & a+b \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rcl} \mathsf{i} : \mathbf{R}^2 & \to & \mathbf{R} \\ (a,b) & \to & a.b \end{array}$$

entonces se cumplen (I2), (I3), (I4) e (I5), pero (I1), (I6) e (I7) no se cumplen.

(E2) Si tomamos $L = \{1,2\}$ y

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{s}:\{1,2\}^2 & \to & \{1,2\} \\ (1,1) & \to & 1 \\ (1,2) & \to & 2 \\ (2,1) & \to & 1 \\ (2,2) & \to & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \mathsf{i}:\{1,2\}^2 & \to & \{1,2\} \\ (1,1) & \to & 1 \\ (1,2) & \to & 1 \\ (2,1) & \to & 1 \\ (2,2) & \to & 1 \end{array}$$

entonces se cumplen (I3), (I4) e (I5), pero (I1), (I2), (I6) e (I7) no se cumplen.

(E3) Si tomamos $L = \mathbf{N}$ y

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{s}:\mathbf{N}^2 & \to & \mathbf{N} \\ (a,b) & \to & \max\{a,b\} \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \mathsf{i}:\mathbf{N}^2 & \to & \mathbf{N} \\ (a,b) & \to & \text{maximo comun divisor de } a \text{ y } b \end{array}$$

entonces se cumplen (I1), (I2), (I3), (I4), (I5) e (I6), pero (I7) no se cumple.

Pero, por supuesto que si s e i son las operaciones supremo e infimo dadas por algun orden parcial $\leq$ sobre L el cual hace de $(L, \leq)$ un reticulado par, entonces las propiedades (I1),...,(I7) se cumplen y esto esta probado en la ultima serie de lemas de la Guia 3.

El ultimo ejemplo nos permite ver una sutileza. Notese que en este ejemplo s es la operacion supremo del reticulado par $(\mathbf{N}, \leq)$, donde $\leq$ es el orden usual de los naturales, e i es la operacion infimo del reticulado par $(\mathbf{N}, |)$, donde $|$ es el orden de la divisibilidad de los naturales. Sin envargo (I7) falla y esto se debe a que s e i son supremo e infimo pero respecto de distintos ordenes parciales.

Ejercicio 1: Para cada uno de los siguientes ejemplos diga cuales de las propiedades (I1),...,(I7) se cumplen y cuales no.

(a) Sea $L = \mathbf{R}$ y

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{s}:\mathbf{R}^2 & \to & \mathbf{R} \\ (a,b) & \to & \lfloor a+b \rfloor \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \mathsf{i}:\mathbf{R}^2 & \to & \mathbf{R} \\ (a,b) & \to & \min\{a,b\} \end{array}$$

(Denotamos con $\lfloor r \rfloor$ a la parte entera de un numero real r.)

(b) Sea $L = \{0,1\}$ y

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{s}:\{0,1\}^2 & \to & \{0,1\} \\ (x,y) & \to & \text{resto de dividir } x+y \text{ por } 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{i}:\{0,1\}^2 & \to & \{0,1\} \\ (x,y) & \to & \text{resto de dividir } x.y \text{ por } 2 \end{array}$$

La discusion anterior motiva la siguiente definicion:

Por un *reticulado terna* entenderemos una terna $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ tal que L es un conjunto no vacio y s e i son dos operaciones binarias sobre L para las cuales se cumplen (I1),...,(I7). Si $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ es un reticulado terna, llamaremos a L el *universo* de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$.

Tal como lo vimos recien, las ternas dadas por los tres ejemplos anteriores no son reticulados terna ya que no cumplen alguna de las identidades (I1),...,(I7), y si tomamos un reticulado par $(L, \leq)$, entonces la terna $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$, con s e i definidas como supremo e infimo, es un reticulado terna. El siguiente teorema muestra que todo reticulado terna $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ se obtiene de esta forma.

Theorem 1 (Dedekind) *Sea $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ un reticulado terna. La relacion binaria sobre L definida por:*

$$x \leq y \textit{ si y solo si } x \mathsf{s} y = y$$

es un orden parcial sobre L para el cual se cumple que:

$$\sup(\{x, y\}) = x \mathsf{s} y$$
$$\inf(\{x, y\}) = x \mathsf{i} y$$

cualesquiera sean $x, y \in L$.

Proof. Dejamos como ejercicio para el lector probar que $\leq$ es reflexiva y antisimetrica con respecto a L. Veamos que $\leq$ es transitiva con respecto a L. Supongamos que $x \leq y$ e $y \leq z$. Es decir que por definicion de $\leq$ tenemos que

$$x \mathsf{s} y = y$$
$$y \mathsf{s} z = z$$

Entonces

$$x \mathsf{s} z = x \mathsf{s} (y \mathsf{s} z) = (x \mathsf{s} y) \mathsf{s} z = y \mathsf{s} z = z$$

por lo cual $x \leq z$. O sea que ya sabemos que $(L, \leq)$ es un poset. Veamos ahora que $\sup(\{x, y\}) = x \mathsf{s} y$. Primero debemos ver que $x \mathsf{s} y$ es una cota superior del conjunto $\{x, y\}$, es decir

$$x \leq x \mathsf{s} y$$
$$y \leq x \mathsf{s} y$$

Por la definicion de $\leq$ debemos probar que

$$x \mathsf{s} (x \mathsf{s} y) = x \mathsf{s} y$$
$$y \mathsf{s} (x \mathsf{s} y) = x \mathsf{s} y$$

Estas igualdades se pueden probar usando (I1), (I2) y (I4). Dejamos al lector hacerlo como ejercicio.

Nos falta ver entonces que $x \mathsf{s} y$ es menor o igual que cualquier cota superior de $\{x, y\}$. Supongamos $x, y \leq z$. Es decir que por definicion de $\leq$ tenemos que

$$x \mathsf{s} z = z$$
$$y \mathsf{s} z = z$$

Pero entonces

$$(x \mathsf{s} y) \mathsf{s} z = x \mathsf{s} (y \mathsf{s} z) = x \mathsf{s} z = z$$

por lo que $x \mathsf{s} y \leq z$. Es decir que $x \mathsf{s} y$ es la menor cota superior.

Para probar que $\inf(\{x, y\}) = x \mathsf{i} y$, probaremos que para todo $u, v \in L$,

$$u \leq v \text{ si y solo si } u \mathsf{i} v = u$$

lo cual le permitira al lector aplicar un razonamiento similar al usado en la prueba de que $\sup(\{x, y\}) = x \mathsf{s} y$. Supongamos que $u \leq v$. Por definicion tenemos que $u \mathsf{s} v = v$. Entonces

$$u \mathsf{i} v = u \mathsf{i} (u \mathsf{s} v)$$

Pero por (I7) tenemos que $u \mathsf{i} (u \mathsf{s} v) = u$, lo cual implica $u \mathsf{i} v = u$. Reciprocamente si $u \mathsf{i} v = u$, entonces

$$\begin{aligned} u \mathsf{s} v &= (u \mathsf{i} v) \mathsf{s} v \\ &= v \mathsf{s} (u \mathsf{i} v) \text{ (por (I2))} \\ &= v \mathsf{s} (v \mathsf{i} u) \text{ (por (I3))} \\ &= v \text{ (por (I6))} \end{aligned}$$

lo cual nos dice que $u \leq v$. ∎

Ejercicio 2: Complete la prueba del teorema anterior demostrando que $\leq$ es reflexiva y antisimetrica con respecto a L y que $\inf(\{x, y\}) = x \mathsf{i} y$.

Ejercicio 2,5: (S) Defina una funcion $\mathcal{F}$ de $\{(L, \leq) : (L, \leq)$ es un reticulado par$\}$ en $\{(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}) : (L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ es un reticulado terna$\}$ la cual sea biyectiva

Refleccion Informatica

Como vimos recien a nivel de informacion es lo mismo tener un reticulado par que un reticulado terna. Es decir, los dos conceptos pueden considerarse dos formas distintas de presentar la misma informacion. Muchas veces esta informacion es mas facil de dar dando el poset ya que simplemente podemos dar su diagrama de Hasse y esto en general es una forma economica de dar las operaciones s e i.

Recordemos que algo similar sucedia con los conceptos equivalentes de relacion de equivalencia y particion (Guia 1).

Ejercicio 3: Use el Ejercicio 2,5 para calcular el cardinal del conjunto

$$\{(\{1, 2, 3\}, \mathsf{s}, \mathsf{i}) : (\{1, 2, 3\}, \mathsf{s}, \mathsf{i}) \text{ es un reticulado terna}\}$$

El orden asociado a un reticulado terna

Como vimos el Teorema de Dedekind nos dice que un reticulado terna $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ es un objeto geometrico ya que si definimos

$$\leq = \{(x, y) : x \mathsf{\ s\ } y = y\}$$

entonces $\leq$ es un orden parcial sobre L y las operaciones s e i resultan ser supremo e infimo respecto de este orden parcial. Llamaremos a $\leq = \{(x, y) : x \mathsf{\ s\ } y = y\}$ el *orden parcial asociado a* $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ y $(L \leq)$ sera llamado el *poset asociado a* $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$. Notese que tambien tenemos que $\leq = \{(x, y) : x \mathsf{\ i\ } y = x\}$ (¿por que?). Muchos conceptos definidos para posets ahora pueden aplicarse cuando tenemos un reticulado terna $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$. Por ejemplo, si decimos que $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ tiene elemento maximo, esto significara que el poset $(L, \leq)$ tiene elemento maximo. Otro ejemplo, si decimos que en $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ se da que el supremo de un conjunto S es a, nos estaremos refiriendo a que en su poset asociado $(L, \leq)$ se da que el supremo de S es a.

Ejercicio 4: Si $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ es un reticulado terna, entonces $(L, \mathsf{i}, \mathsf{s})$ es un reticulado terna. Que relacion hay entre los ordenes parciales asociados?

Ejercicio 5: V o F o I, justifique

(a) Si $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ es un reticulado terna y $t \in \mathsf{s}$, entonces $Ti(t) = 3-$UPLA

(b) Si $(L, \mathsf{s}, \mathsf{s})$ es un reticulado terna, entonces L tiene exactamente 1 elemento

(c) Si $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ es un reticulado terna, entonces siempre se da que $\mathsf{i} \leq \mathsf{s}$

(d) Si $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ es un reticulado terna, entonces $\mathsf{s}(x, y, z) = \mathsf{s}(y, z, x)$, cualesquiera sean $x, y, x \in L$

Notacion

Para hacer mas dinamica la notacion asumiremos las siguientes convenciones

Convencion notacional 1: Si L es un conjunto no vacio cuyos elementos son conjuntos y L cumple la siguiente condicion

- Si $A, B \in L$, entonces $A \cup B, A \cap B \in L$

entonces ciertas veces usaremos $\cup$ (resp. $\cap$) para denotar la operacion binaria sobre L dada por la union (resp. la interceccion). Es decir $\cup$ e $\cap$ denotaran las funciones

$$\begin{array}{rcl} L^2 & \rightarrow & L \\ (A, B) & \rightarrow & A \cup B \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rcl} L^2 & \rightarrow & L \\ (A, B) & \rightarrow & A \cap B \end{array}$$

Convencion notacional 2: Si L es un conjunto no vacio cuyos elementos son numeros reales entonces ciertas veces usaremos max y min para denotar las operaciones binarias sobre L dadas por

$$\begin{array}{rcl} L^2 & \rightarrow & L \\ (a,b) & \rightarrow & \max(a,b) \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} L^2 & \rightarrow & L \\ (a,b) & \rightarrow & \min(a,b) \end{array}$$

Convencion notacional 3: Si L es un conjunto no vacio cuyos elementos son numeros naturales y L cumple la siguiente condicion

- Si $a, b \in L$, entonces $mcm(a,b), mcd(a,b) \in L$

entonces ciertas veces usaremos mcm y mcd para denotar las operaciones binarias sobre L dadas por

$$\begin{array}{rcl} L^2 & \rightarrow & L \\ (a,b) & \rightarrow & mcm(a,b) \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} L^2 & \rightarrow & L \\ (a,b) & \rightarrow & mcd(a,b) \end{array}$$

Convencion notacional 4: Si P es un conjunto no vacio contenido en $\mathbf{N}$, entonces escribiremos $(P, |)$ para denotar al poset $(P, \{(x,y) \in P^2 : x|y\})$. Similarmente si P es un conjunto cuyos elementos son conjuntos, entonces escribiremos $(P, \subseteq)$ para denotar al poset $(P, \{(A,B) \in P^2 : A \subseteq B\})$

En virtud de las convenciones notacionales anteriores notese que por ejemplo

1. $(\mathbf{R}, \max, \min)$
2. $([0,1], \max, \min)$
3. $(\mathcal{P}(\mathbf{N}), \cup, \cap)$
4. $(\{A \subseteq \mathbf{N} : A \text{ es finito}\}, \cup, \cap)$
5. $(\mathbf{N}, mcm, mcd)$
6. $(\{1,2,3,6,12\}, mcm, mcd)$

denotan reticulados terna pero deberia quedar claro que en los primeros dos ejemplos max denota dos distintas operaciones. Analogamente sucede con min, $\cup$, $\cap$, mcm y mcd.

Similarmente

1. $(\mathbf{N}, |)$
2. $(\{1,2,3,6,7\}, |)$
3. $(\{\{1\}, \{1,7\}, \{1,2,3\}, \{16,99,65\}\}, \subseteq)$
4. $(\{A \subseteq \mathbf{N} : A \text{ es finito}\}, \subseteq)$

denotan posets pero deberia quedar claro que en los primeros dos ejemplos $|$ denota dos distintos ordenes parciales. Analogamente sucede con $\subseteq$

Estas ambiguedades no nos traeran problemas si estamos atentos al contexto.

Reticulados terna distributivos

Un reticulado terna $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ se llamara *distributivo* cuando cumpla la siguiente identidad

Dis$_1$ $x \mathsf{ i } (y \mathsf{ s } z) = (x \mathsf{ i } y) \mathsf{ s } (x \mathsf{ i } z)$, cualesquiera sean $x, y, z \in L$

Ejercicio 6: Pruebe que los siguientes reticulados terna son distributivos

(a) $(\mathbf{R}, \max, \min)$

(b) $(\mathcal{P}(\mathbf{N}), \cup, \cap)$

Ejercicio 7: (Diamante) Consideremos el poset $(\{1, 2, 3, 5, 30\}, |)$. Es facil ver que es un reticulado par por lo cual $(\{1, 2, 3, 5, 30\}, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ es un reticulado terna, donde s e i son las operaciones binarias definidas usando supremos e infimos en $(\{1, 2, 3, 5, 30\}, |)$. Pruebe que $(\{1, 2, 3, 5, 30\}, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ no es distributivo

Ejercicio 8: (Cubo opaco) Sea $L = \mathcal{P}(\{1, 2, 3\}) - \{\{1, 2\}\}$

(a) Haga un diagrama de Hasse del poset $(L, \subseteq)$

(b) Por que se le llama cubo opaco?

(c) Haga (sobre el diagrama de Hasse) una serie de computos ordenados de manera que al concluir este seguro de que $(L, \subseteq)$ es un reticulado par

(d) Sean

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{s} : L^2 & \rightarrow & L \\ (a, b) & \rightarrow & \sup\{a, b\} \text{ en } (L, \subseteq) \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \mathsf{i} : L^2 & \rightarrow & L \\ (a, b) & \rightarrow & \inf\{a, b\} \text{ en } (L, \subseteq) \end{array}$$

Es distributivo el reticulado terna $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$? Son las operaciones s e i las restricciones a L^2 de las operaciones $\cup$ e $\cap$ de $\mathcal{P}(\{1, 2, 3\})$?

Subreticulados terna

Si f es una operacion n-aria sobre A y $S \subseteq A$, entonces diremos que S es *cerrado bajo* f cuando se de que $f(a_1, ..., a_n) \in S$, cada ves que $a_1, ..., a_n \in S$. Notese que si $n = 0$, entonces S es cerrado bajo f si y solo si $f(\lozenge) \in S$.

Dados reticulados terna $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ y $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}')$ diremos que $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ *es un subreticulado terna de* $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}')$ si se dan las siguientes condiciones

(1) $L \subseteq L'$

(2) L es cerrado bajo las operaciones s' e i'

(3) $\mathsf{s} = \mathsf{s}'|_{L \times L}$ y $\mathsf{i} = \mathsf{i}'|_{L \times L}$

Sea $(L,\mathsf{s},\mathsf{i})$ un reticulado terna. Un conjunto $S \subseteq L$ es llamado *subuniverso* de $(L,\mathsf{s},\mathsf{i})$ si es no vacio y cerrado bajo las operaciones s e i. Es importante notar que si bien los conceptos de subreticulado terna y subuniverso estan muy relacionados, se trata de conceptos diferentes ya que los subreticulados terna de $(L,\mathsf{s},\mathsf{i})$ son ternas y los subuniversos de $(L,\mathsf{s},\mathsf{i})$ son conjuntos, por lo cual no son ternas.

Es facil de chequear que si S es un subuniverso de $(L,\mathsf{s},\mathsf{i})$, entonces $(S,\mathsf{s}|_{S\times S},\mathsf{i}|_{S\times S})$ es un subreticulado terna de $(L,\mathsf{s},\mathsf{i})$ y que todo subreticulado terna de $(L,\mathsf{s},\mathsf{i})$ se obtiene en esta forma. Es decir, hay una biyeccion entre el conjunto de los subreticulados terna de $(L,\mathsf{s},\mathsf{i})$ y el conjunto de los subuniversos de $(L,\mathsf{s},\mathsf{i})$ (cual es?). Dicho de manera mas rapida: los subuniversos de $(L,\mathsf{s},\mathsf{i})$ son ni mas ni menos que los universos de los subreticulados terna de $(L,\mathsf{s},\mathsf{i})$.

Ejercicio 9: Encuentre todos los subuniversos del reticulado terna:

(a) $(\mathcal{P}(\{1,2\}),\cup,\cap)$
(b) $(\{1,2,3,6,12\},mcm,mcd)$
(c) $(\mathbf{R},\max,\min)$

Para el caso b. dar todos los subreticulados terna. Cuantos hay?

Ejercicio 9,5: Describa como son los subuniversos de $(\mathcal{P}(\mathbf{N}),\cup,\cap)$ que poseen exactamente tres elementos. Y los que poseen exactamente cuatro elementos?

Ejercicio 9,7: Encuentre todos los subuniversos de 4 o mas elementos del reticulado terna $(\{1,2,3,4,6,12\},mcm,mcd)$

Ejercicio 10: V o F o I, justifique

(a) $(\{2,6,12\},\max,\min)$ es subreticulado terna de $(\{1,2,3,6,12\},mcm,mcd)$
(b) Sean s e i las operaciones binarias sobre $\{1,2,3,12\}$ definidas usando supremos e infimos en $(\{1,2,3,12\},|)$. Entonces $(\{1,2,3,12\},\mathsf{s},\mathsf{i})$ es subreticulado terna de $(\{1,2,3,6,12\},mcm,mcd)$
(c) Si $(L,\mathsf{s},\mathsf{i})$ un reticulado terna y S es un subuniverso de $(L,\mathsf{s},\mathsf{i})$, entonces $Ti(S) = 3-$UPLA
(d) Si $(L,\mathsf{s},\mathsf{i})$ es un reticulado terna y S_1, S_2 son subuniversos de $(L,\mathsf{s},\mathsf{i})$ y $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$, entonces $S_1 \cap S_2$ es un subuniverso de $(L,\mathsf{s},\mathsf{i})$
(e) Si $(L,\mathsf{s},\mathsf{i})$ es un reticulado terna y S_1, S_2 son subuniversos de $(L,\mathsf{s},\mathsf{i})$, entonces $S_1 \cup S_2$ es un subuniverso de $(L,\mathsf{s},\mathsf{i})$
(f) Si $(L,\mathsf{s},\mathsf{i})$ es un subreticulado terna de $(L',\mathsf{s}',\mathsf{i}')$, entonces $Ti(e) = Ti(e')$ cada vez que $e \in L$ y $e' \in L'$
(g) Si $(L,\mathsf{s},\mathsf{i})$ es un subreticulado terna de $(L',\mathsf{s}',\mathsf{i}')$ y $(L,\mathsf{s},\mathsf{i})$ es distributivo, entonces $(L',\mathsf{s}',\mathsf{i}')$ es distributivo
(h) Si $(S_1,\mathsf{s}_1,\mathsf{i}_1)$ y $(S_2,\mathsf{s}_2,\mathsf{i}_2)$ son subreticulados terna de $(L,\mathsf{s},\mathsf{i})$, entonces $(S_1,\mathsf{s}_1,\mathsf{i}_1) \cap (S_2,\mathsf{s}_2,\mathsf{i}_2)$ es subreticulado terna de $(L,\mathsf{s},\mathsf{i})$

(i) Sea $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ un reticulado terna y sea $\leq$ su orden asociado. Sea $S \subseteq L$ no vacio. Supongamos que $(S, \leq \cap S^2)$ es un reticulado par. Sean $\hat{\mathsf{s}}, \hat{\imath}$ las operaciones supremo e infimo de $(S, \leq \cap S^2)$. Entonces $(S, \hat{\mathsf{s}}, \hat{\imath})$ es un subreticulado terna de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$

Homomorfismos de reticulados terna

Sean $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ y $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}')$ reticulados terna. Una funcion $F : L \to L'$ sera llamada un *homomorfismo de* $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ *en* $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}')$ si para todo $x, y \in L$ se cumple que

$$F(x \mathrel{\mathsf{s}} y) = F(x) \mathrel{\mathsf{s}'} F(y)$$
$$F(x \mathrel{\mathsf{i}} y) = F(x) \mathrel{\mathsf{i}'} F(y).$$

Un homomorfismo de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ en $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}')$ sera llamado *isomorfismo de* $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ *en* $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}')$ cuando sea biyectivo y su inversa sea tambien un homomorfismo. Escribiremos $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}) \cong (L', \mathsf{s}', \mathsf{i}')$ cuando exista un isomorfismo de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ en $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}')$. Escribiremos "Sea $F : (L, \mathsf{s}, \mathsf{i}) \to (L', \mathsf{s}', \mathsf{i}')$ un homomorfismo" para expresar que F es un homomorfismo de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ en $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}')$. No hay que confundirse al leer esta notacion y pensar que F es una funcion cuyo dominio es $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$, lo cual por otra parte no tiene sentido ya que el dominio de una funcion nunca puede ser una 3-upla!

Lemma 2 *Si* $F : (L, \mathsf{s}, \mathsf{i}) \to (L', \mathsf{s}', \mathsf{i}')$ *es un homomorfismo biyectivo, entonces* F *es un isomorfismo*

Ejercicio 11: Pruebe el lema anterior

Lemma 3 *Sean* $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ *y* $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}')$ *reticulados terna y sea* $F : (L, \mathsf{s}, \mathsf{i}) \to (L', \mathsf{s}', \mathsf{i}')$ *un homomorfismo. Entonces* I_F *es un subuniverso de* $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}')$. *Es decir que* F *es tambien un homomorfismo de* $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ *en* $(I_F, \mathsf{s}'|_{I_F \times I_F}, \mathsf{i}'|_{I_F \times I_F})$

Proof. Ya que L es no vacio tenemos que I_F tambien es no vacio. Sean $a, b \in I_F$. Sean $x, y \in L$ tales que $F(x) = a$ y $F(y) = b$. Se tiene que

$$a \mathrel{\mathsf{s}'} b = F(x) \mathrel{\mathsf{s}'} F(y) = F(x \mathrel{\mathsf{s}} y) \in I_F$$
$$a \mathrel{\mathsf{i}'} b = F(x) \mathrel{\mathsf{i}'} F(y) = F(x \mathrel{\mathsf{i}} y) \in I_F$$

por lo cual I_F es cerrada bajo s' e i'. ■

Lemma 4 *Sean* $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ *y* $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}')$ *reticulados terna y sean* $(L, \leq)$ *y* $(L', \leq')$ *los posets asociados. Sea* $F : L \to L'$ *una funcion. Entonces* F *es un isomorfismo de* $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ *en* $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}')$ *si y solo si* F *es un isomorfismo de* $(L, \leq)$ *en* $(L', \leq')$.

Proof. ($\Rightarrow$) Supongamos F es un isomorfismo de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ en $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}')$. Sean $x, y \in L$, tales que $x \leq y$. Tenemos que $y = x \mathsf{\ s\ } y$ por lo cual $F(y) = F(x \mathsf{\ s\ } y) = F(x) \mathsf{\ s}'\ F(y)$, produciendo $F(x) \leq' F(y)$. En forma similar se puede ver que F^{-1} es tambien un homomorfismo de $(L', \leq')$ en $(L, \leq)$ ■

Ejercicio 12: Pruebe ($\Leftarrow$) del lema anterior. (Hint: puede usar el lema que esta despues del Ejercicio 19 de la Guia 2)

Ejercicio 12,3: Si $F : (L, \mathsf{s}, \mathsf{i}) \to (L', \mathsf{s}', \mathsf{i}')$ es un homomorfismo suryectivo y $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ es distributivo, entonces $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}')$ es distributivo. En particular si $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}) \cong (L', \mathsf{s}', \mathsf{i}')$, entonces o ambos son distributivos o ambos son no distributivos.

Ejercicio 12,6: Sea $F : (L, \mathsf{s}, \mathsf{i}) \to (L', \mathsf{s}', \mathsf{i}')$ un homomorfismo suryectivo y a un elemento maximo de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$. Entonces $F(a)$ es un elemento maximo de $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}')$. Es cierto que si $F(a)$ es un elemento maximo de $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}')$, entonces a es un elemento maximo de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$?

Ejercicio 13: ¿Puede haber un isomorfismo entre algun par de reticulados terna de la siguiente lista?

(a) $(\mathbf{R}, \max, \min)$
(b) $([0, 1], \max, \min)$
(c) $(\mathcal{P}(\mathbf{N}), \cup, \cap)$
(d) $(\{A \subseteq \mathbf{N} : A \text{ es finito}\}, \cup, \cap)$
(e) $(\mathbf{N}, mcm, mcd)$

Congruencias de reticulados terna

Sea $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ un reticulado terna. Una *congruencia sobre* $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ sera una relacion de equivalencia θ sobre L la cual cumpla:

(1) $x\theta x'$ y $y\theta y'$ implica $(x \mathsf{\ s\ } y)\theta(x' \mathsf{\ s\ } y')$ y $(x \mathsf{\ i\ } y)\theta(x' \mathsf{\ i\ } y')$

Gracias a esta condicion podemos definir en forma inambigua sobre L/θ dos operaciones binarias $\tilde{\mathsf{s}}$ e $\tilde{\imath}$, de la siguiente manera:

$$x/\theta \mathrel{\tilde{\mathsf{s}}} y/\theta = (x \mathsf{\ s\ } y)/\theta$$
$$x/\theta \mathrel{\tilde{\imath}} y/\theta = (x \mathsf{\ i\ } y)/\theta$$

Ejercicio 14: Explique porque (1) nos garantiza que la definicion de $\tilde{\mathsf{s}}$ e $\tilde{\imath}$ es inambigua

Veamos algunos ejemplos:

(E1) Consideremos el reticulado $(\{1,2,3,4,5,6\}, \max, \min)$. O sea que aqui $L = \{1,2,3,4,5,6\}$, s es la operacion max sobre L y i es la operacion min sobre L. Sea θ la relacion de equivalencia sobre $\{1,2,3,4,5,6\}$ dada por la particion $\{\{1,2\},\{3\},\{4,5\}\}$. Se puede chequear que θ es una congruencia, es decir satisface (1) de arriba. Notese que

$$\begin{aligned} L/\theta &= \{\{1,2\},\{3\},\{4,5\}\} \\ \tilde{\mathsf{s}} &= \widetilde{\max} : L/\theta \times L/\theta \to L/\theta \\ \tilde{\imath} &= \widetilde{\min} : L/\theta \times L/\theta \to L/\theta \end{aligned}$$

Por ejemplo tenemos que

$$\{1,2\} \ \widetilde{\max} \ \{3\} = \{3\}$$

ya que $\{1,2\} \ \widetilde{\max} \ \{3\} = 1/\theta \ \widetilde{\max} \ 3/\theta = (1 \max 3)/\theta = 3/\theta = \{3\}$ (escribimos $1 \max 3$ en lugar de $\max(1,3)$). Similarmente tenemos que

$$\begin{aligned} \{4,5\} \ \widetilde{\max} \ \{3\} &= \{4,5\} \\ \{1,2\} \ \widetilde{\min} \ \{4,5\} &= \{1,2\} \end{aligned}$$

(E2) Consideremos el reticulado terna $(\{1,2,3,6\}, mcm, mcd)$ (o sea el rombo) y sea θ la relacion de equivalencia dada por la particion $\{\{1,2\},\{3\},\{6\}\}$ (haga un dibujo). Entonces θ no es una congruencia sobre $(\{1,2,3,6\}, mcm, mcd)$. Esto es ya que si tomamos

$$\begin{aligned} x &= 1 \\ x' &= 2 \\ y &= 3 \\ y' &= 3 \end{aligned}$$

no se cumple la implicacion de (1) de la definicion de congruencia.

La terna $(L/\theta, \tilde{\mathsf{s}}, \tilde{\imath})$ es llamada el *cociente de* $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ *sobre* θ y la denotaremos con $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})/\theta$.

Lemma 5 *Sea* $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ *un reticulado terna y sea* θ *una congruencia de* $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$. *Entonces* $(L/\theta, \tilde{\mathsf{s}}, \tilde{\imath})$ *es un reticulado terna.*

Proof. Veamos que la estructura $(L/\theta, \tilde{\mathsf{s}}, \tilde{\imath})$ cumple (I4). Sean x/θ, y/θ, z/θ elementos cualesquiera de L/θ. Tenemos que

$$\begin{array}{rcl} (x/\theta \ \tilde{\mathsf{s}} \ y/\theta) \ \tilde{\mathsf{s}} \ z/\theta & = & (x \ \mathsf{s} \ y)/\theta \ \tilde{\mathsf{s}} \ z/\theta \\ & = & ((x \ \mathsf{s} \ y) \ \mathsf{s} \ z)/\theta \\ & = & (x \ \mathsf{s} \ (y \ \mathsf{s} \ z))/\theta \\ & = & x/\theta \ \tilde{\mathsf{s}} \ (y \ \mathsf{s} \ z)/\theta \\ & = & x/\theta \ \tilde{\mathsf{s}} \ (y/\theta \ \tilde{\mathsf{s}} \ z/\theta) \end{array}$$

En forma similar se puede ver que la estructura $(L/\theta, \tilde{\mathsf{s}}, \tilde{\imath})$ cumple el resto de las identidades que definen reticulado terna. $\blacksquare$

Denotaremos con $\tilde{\leq}$ al orden parcial asociado al reticulado terna $(L/\theta, \tilde{\mathsf{s}}, \tilde{\imath})$.

Lemma 6 *Sea* $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ *un reticulado terna y sea* θ *una congruencia de* $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$. *Entonces:*

$$x/\theta \tilde{\leq} y/\theta \text{ sii } y\theta(x \mathsf{ s } y)$$

cualesquiera sean $x, y \in L$.

Proof. Por definicion de $\tilde{\leq}$ tenemos que $x/\theta \tilde{\leq} y/\theta$ sii $y/\theta = x/\theta \,\tilde{\mathsf{s}}\, y/\theta$. Pero $x/\theta \,\tilde{\mathsf{s}}\, y/\theta = (x \mathsf{ s } y)/\theta$ (por definicion de $\tilde{\mathsf{s}}$) por lo cual tenemos que $x/\theta \tilde{\leq} y/\theta$ sii $y/\theta = (x \mathsf{ s } y)/\theta$. $\blacksquare$

Ejercicio 15: Dar todas las congruencias del reticulado terna $(\mathcal{P}(\{a, b\}), \cup, \cap)$. En cada caso de explicitamente el reticulado terna cociente y diga a quien es isomorfo

Ejercicio 15,5: Sea $L = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$.

(a) Haga un diagrama de Hasse de (L, mcm, mcd)

(b) Definamos para $x \in \mathbf{N}$,

$$(x)_2 = \max_t \left(3^t \text{ divide a } x\right).$$

(el "sub 2" es porque 3 es el segundo primo). Sea $\theta = \{(x, y) \in L^2 : (x)_2 = (y)_2\}$. Convensase que θ es una congruencia sobre (L, mcm, mcd) (no hace falta que lo pruebe).

(c) Dar explicitamente $(L, mcm, mcd)/\theta$.

(d) Dar explicitamente (i.e. dar el conjunto de pares) el orden parcial $\tilde{\leq}$ asociado al reticulado terna $(L, mcm, mcd)/\theta$

(e) De un isomorfismo de $(L, mcm, mcd)/\theta$ en $(\{0, 1, 2\}, \max, \min)$

(f) Dar una congruencia δ tal que $(L, mcm, mcd)/\delta$ sea isomorfo a $(\mathcal{P}(\{a, b\}), \cup, \cap)$

Ejercicio 16: Sea $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ un reticulado terna en el cual hay un elemento maximo 1. Entonces si θ es una congruencia sobre $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$, $1/\theta$ es un elemento maximo de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})/\theta$

Ejercicio 17: Sea $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ un reticulado terna en el cual hay un elemento maximo 1 y un elemento minimo 0. Sea θ un congruencia sobre $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$. Si $(0, 1) \in \theta$, entonces $\theta = L \times L$.

El siguiente lema nos da una forma natural de encontrar congruencias

Lemma 7 *Si* $F : (L, \mathsf{s}, \mathsf{i}) \to (L', \mathsf{s}', \mathsf{i}')$ *es un homomorfismo, entonces* $\ker F$ *es una congruencia sobre* $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$*.*

Ejercicio 18: Pruebe el lema anterior

Lemma 8 *Sea* $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ *un reticulado terna y sea* θ *una congruencia sobre* $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$*. Entonces* π_θ *es un homomorfismo de* $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ *en* $(L/\theta, \tilde{\mathsf{s}}, \tilde{\imath})$*. Ademas* $\ker \pi_\theta = \theta$*.*

Proof. Sean $x, y \in L$. Tenemos que

$$\pi_\theta(x \mathsf{~s~} y) = (x \mathsf{~s~} y)/\theta = x/\theta \mathrel{\tilde{\mathsf{s}}} y/\theta = \pi_\theta(x) \mathrel{\tilde{\mathsf{s}}} \pi_\theta(y)$$

por lo cual π_θ preserva la operacion supremo. Para la operacion infimo es similar. ■

Ejercicio 19: Dar todas las congruencias del reticulado terna $(\{1, 2, 3, 6, 12\}, mcm, mcd)$ (Ver video con la solucion en granlogico)

Ejercicio 20: Dar todas las congruencias del diamante (ver el Ejercicio 7)

Ejercicio 21: Sea θ una congruencia del reticulado terna $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$. Pruebe que

(a) si $c \in L/\theta$, entonces c es un subuniverso de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$

(b) si $c \in L/\theta$, entonces c es un subconjunto convexo de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$, es decir para cualesquiera $x, y, z \in L$, si se da que $x, y \in c$ y $x \leq z \leq y$, entonces $z \in c$

(Hay video en granlogico con la resolucion)

Ejercicio 22: V o F o I, justifique

(a) (S) Sea $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ un reticulado terna, sea S un subuniverso de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ y sea θ.una congruencia de $(S, \mathsf{s}|_{S\times S}, \mathsf{i}|_{S\times S})$. Hay una congruencia δ de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ tal que $\theta = \delta \cap (S \times S)$

(b) Sea $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ un reticulado terna distributivo, y sea θ una congruencia de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$. Entonces $(L/\theta, \tilde{\mathsf{s}}, \tilde{\imath})$ es distributivo.

(c) Sea $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ un reticulado terna y sea θ es una congruencia sobre $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$. Si $u \in L$ es tal que u/θ es un elemento maximo de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})/\theta$, entonces u es un elemento maximo de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$

Ejercicio 23: (S) Sea $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ un reticulado terna, θ una congruencia de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ y $\leq$ el orden inducido por s. Sea $(L/\theta, \tilde{\mathsf{s}}, \tilde{\imath})$ el reticulado terna cociente, y sea $\tilde{\leq}$ el orden inducido por $\tilde{\mathsf{s}}$. Demostrar que dados $c, c' \in L/\theta$ se cumple que $c \tilde{\leq} c'$ sii existen $x \in c$ y $y \in c'$ tales que $x \leq y$.