

Guia 2 de Logica

August 11, 2024

Nota: Los ejercicios que tienen una S son para una "Segunda pasada" es decir ya sea son mas anecdoticos y menos importantes tematicamente, o son de completar pruebas y tienen que ver mas con la parte teorica, o son mas dificiles y conviene encararlos despues de una primera pasada por la guia (asi uno comienza a pensarlos con un poco mas de madurez sobre el tema).

Ordenes parciales

En esta guia y en las proximas tres estudiaremos varias clases de estructuras algebraicas en las cuales hay un orden parcial involucrado. Esto tendra una triple utilidad. Por un lado algunos de los resultados probados sobre algebras de Boole (por ejemplo el teorema de Rasiova y Sikorski) seran utilizados mas adelante para la prueba del teorema de completitud de la logica de primer orden. Tambien el estudio de estos temas servira para volvernos algebristas maduros (lo mas que se pueda) ya que esto sera util a la hora de hacer logica matematica. La logica matematica es *matematica aplicada* al estudio de los matematicos, su lenguaje y sus metodos de demostracion, y que mas comodo para hacer logica matematica que contar con un matematico dentro de uno mismo para estudiarlo!

Finalmente cabe destacar que los resultados cubiertos en estas 4 guias son importantes en si mismos fuera de su vinculacion con la logica y tienen fuertes aplicaciones en otras disciplinas y ramas de la matematica.

Una relacion binaria R sobre un conjunto A sera llamada un *orden parcial sobre A* si es reflexiva, transitiva y antisimetrica respecto de A . Algunos ejemplos:

- (E1) Sea $R = \{(r, t) \in \mathbf{R}^2 : r \leq t\}$. Entonces R es un orden parcial sobre \mathbf{R} , llamado el orden usual de \mathbf{R} .
- (E2) Sea $R = \{(1, 2), (1, 3), (1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$. Entonces R es un orden parcial sobre $\{1, 2, 3\}$.
- (E3) Sea $R = \{(S, T) \in \mathcal{P}(\omega)^2 : S \subseteq T\}$. Entonces R es un orden parcial sobre $\mathcal{P}(\omega)$.
- (E4) Sea $R = \{(x, y) \in \omega^2 : x \leq y\}$. Entonces R es un orden parcial sobre ω .

- (E5) Sea $R = \{(1, 1)\}$. Entonces R es un orden parcial sobre $\{1\}$.
- (E6) $\{(a, b) : a = b\}$ es un orden parcial sobre A , cualesquiera sea el conjunto A
- (E7) Si $S \subseteq \mathbf{N}$, entonces $R = \{(x, y) \in S^2 : x|y\}$ es un orden parcial sobre S .

Ejercicio 1: V o F o I, justifique

- (a) $\{1 \leq 2 \leq 3\}$ es un orden parcial sobre $\{1, 2, 3\}$
- (b) Las relaciones dadas en (E1) y (E4) son distintas
- (c) La relacion dada en (E4) es un orden parcial sobre \mathbf{R}
- (d) Si \leq es un orden parcial sobre A , entonces hay $a, b \in A$ tales que no se da que $a \leq b$
- (e) Si \leq es un orden parcial sobre A y $e \in \leq$ entonces $Ti(e) = 2\text{-UPLA}$
- (f) $R = \{(x, y) \in \mathbf{Z}^2 : x|y\}$ es un orden parcial sobre \mathbf{Z}

Muchas veces denotaremos con \leq a una relacion binaria que sea un orden parcial. Esto hace mas intuitiva nuestra escritura pero siempre hay que tener en cuenta que \leq en estos casos esta denotando cierto conjunto de pares ordenados previamente definido.

Usaremos la siguiente

Convencion notacional (A) Si hemos denotado con \leq a cierto orden parcial sobre un conjunto A , entonces

- Denotaremos con $<$ a la relacion binaria $\{(a, b) \in A^2 : a \leq b \text{ y } a \neq b\}$. Es decir que $< = \{(a, b) \in A^2 : a \leq b \text{ y } a \neq b\}$. Cuando se de $a < b$ diremos que a es menor que b o que b es mayor que a (respecto de \leq)
- Denotaremos con \prec a la relacion binaria

$$\{(a, b) \in A^2 : a < b \text{ y no existe } z \text{ tal que } a < z < b\}$$

Cuando se de $a \prec b$ diremos que a es cubierto por b o que b cubre a a (respecto de \leq)

(B) El mismo tipo de convencion notacional se hara cuando denotemos con \leq' (o \leq_1, \leq_2 , etc) a un orden parcial sobre A . Es decir tendremos dos relaciones binarias nuevas tacitamente definidas, a saber:

$$<' = \{(a, b) \in A^2 : a \leq' b \text{ y } a \neq b\}$$

$$\prec' = \{(a, b) \in A^2 : a <' b \text{ y no existe } z \text{ tal que } a <' z <' b\}$$

Algunos ejemplos:

- (E1) Si $A = \mathbf{R}$ y $\leq = \{(r, t) \in \mathbf{R}^2 : r = t\}$, entonces $< = \emptyset$
- (E2) Si $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $\leq = \{(1, 2), (2, 3), (1, 3), (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$, entonces $< = \{(1, 2), (2, 3), (1, 3)\}$ y $\prec = \{(1, 2), (2, 3)\}$. En particular tenemos que $1 \prec 2$, $1 < 3$ pero no se da que $1 \prec 3$.
- (E3) Si $A = \mathbf{R}$ y \leq es el orden usual de \mathbf{R} , entonces $\prec = \emptyset$
- (E4) Si $A = \mathcal{P}(\omega)$ y $\leq = \{(S, T) \in \mathcal{P}(\omega)^2 : S \subseteq T\}$, entonces $< = \{(S, T) \in \mathcal{P}(\omega)^2 : S \subsetneq T\}$ y además se tiene que $S \prec T$ si hay un $n \in T - S$ tal que $T = S \cup \{n\}$ (justifique)

Ordenes totales: Sea A un conjunto cualquiera. Por un *orden total sobre* A entenderemos un orden parcial \leq sobre A el cual cumple:

- (C) $x \leq y$ o $y \leq x$, cualesquiera sean $x, y \in A$

Es decir que ciertos ordenes parciales son llamados ordenes totales. Dejamos al lector decidir cuales de los ejemplos anteriores son ordenes totales

Un *conjunto parcialmente ordenado* o *poset* es un par (P, \leq) donde P es un conjunto no vacío cualquiera y \leq es un orden parcial sobre P . Dado un poset (P, \leq) , el conjunto P será llamado el *universo* de (P, \leq) . Algunos ejemplos:

- (E1) (\mathbf{R}, \leq) es un poset, donde \leq es el orden usual de los números reales
- (E2) $(\{1, 2, 3\}, \{(1, 2), (1, 3), (1, 1), (2, 2), (3, 3)\})$ es un poset
- (E3) $(\mathcal{P}(\omega), \leq)$ es un poset, donde $\leq = \{(S, T) \in \mathcal{P}(\omega)^2 : S \subseteq T\}$
- (E4) $(\{1\}, \{(1, 1)\})$ es un poset
- (E5) (\mathbf{N}, \leq) es un poset, donde $\leq = \{(x, y) \in \mathbf{N}^2 : x|y\}$

Un *conjunto totalmente ordenado* es un par (P, \leq) donde P es un conjunto no vacío cualquiera y \leq es un orden total sobre P . Por supuesto todo conjunto totalmente ordenado es un poset.

Ejercicio 2: V o F o I, justifique

- (a) (\emptyset, \emptyset) es un poset
- (b) $(\{\emptyset\}, \{(\emptyset, \emptyset)\})$ es un poset
- (c) $(\{1, 2\}, \{1 < 2\})$ es un poset
- (d) $(\{1, 2\}, \{(1, 1), (2, 2)\})$ es un poset
- (e) Si A es no vacío, entonces $(A, A \times A)$ es un poset
- (f) $(\{1\}, \{(1, 1)\})$ es un conjunto totalmente ordenado
- (g) Si A es no vacío, entonces $(A, A \times A)$ es un conjunto totalmente ordenado

Diagramas de Hasse

Dado un poset (P, \leq) , con P un conjunto finito, podemos realizar un diagrama llamado *diagrama de Hasse*, siguiendo las siguientes instrucciones:

- (1) Asociar en forma inyectiva, a cada $a \in P$ un punto p_a del plano
- (2) Trazar un segmento de recta uniendo los puntos p_a y p_b , cada vez que $a \prec b$
- (3) Realizar lo indicado en los puntos (1) y (2) en tal forma que
 - (i) Si $a \prec b$, entonces p_a esta por debajo de p_b
 - (ii) Si un punto p_a ocurre en un segmento del diagrama entonces lo hace en alguno de sus extremos.

La relacion de orden \leq puede ser facilmente obtenida a partir del diagrama, a saber, $a \leq b$ sucedera si y solo si $p_a = p_b$ o hay una sucesion de segmentos ascendentes desde p_a hasta p_b .

Ejercicio 3: Dar todos los posets con universo igual a $\{2, 3, 4\}$

Ejercicio 3,3: Sea $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$ y sea $R = \{(x, y) \in S^2 : x|y\}$. Haga el digrama de Hasse del poset (S, R)

Ejercicio 3,6: Sea $S = \{x \in \mathbf{N} : x|60\}$ y sea $R = \{(x, y) \in S^2 : x|y\}$. Haga el digrama de Hasse del poset (S, R)

Ejercicio 4: De una prueba perfecta del siguiente enunciado: Sea (P, \leq) un poset. Se tiene que si $x \leq y$ y $x \not\leq y$, entonces $x = y$, cualesquiera sean $x, y \in P$

Ejercicio 4,3: De una prueba perfecta del siguiente enunciado: Sea (P, \leq) un poset. Supongamos que $|P| \geq 2$. Entonces hay $a, b \in P$ tales que $a \not\leq b$

Ejercicio 5: V o F o I, justifique

- (a) Si (P, \leq) es un poset, entonces para cada $a, b \in P$ tenemos que $a \not\leq b$ si y solo si $b \leq a$
- (b) Si (P, \leq) es un poset, entonces para cada $a, b \in P$ tenemos que $a \not\leq b$ si y solo si $b \leq a$ y $a \neq b$
- (c) Si (P, \leq) es un poset, entonces para cada $a, b \in P$ tenemos que $b \leq a$ implica que $a \not\leq b$
- (d) Si (P, \leq) es un poset, entonces si $a < b$, hay un $z \in P$ tal que $a \prec z \leq b$
- (e) Si (P, \leq) es un poset, entonces $a \not\leq b$ sii ya sea $b \leq a$ o existe un $z \in P$ tal que $a < z < b$

- (f) (S) Supongamos todos los elementos de P son conjuntos y sea $\leq = \{(A, B) \in P^2 : A \subseteq B\}$. Si $A, B \in P$ son tales que B cubre a A en (P, \leq) , entonces hay un $b \in B - A$ tal que $B = A \cup \{b\}$
- (g) Si (P, \leq) es un conjunto totalmente ordenado, entonces para cada $a, b \in P$ tenemos que $a \not\prec b$ si y solo si $b \leq a$
- (h) Si (P, \leq) es un poset, entonces para cada $a \in P$ hay un $b \in P$ tal que $a \prec b$
- (i) Si (P, \leq) es un poset, entonces para cada $a \in P$ hay a lo sumo un $b \in P$ tal que $a \prec b$

Dado un poset (P, \leq) y $a, b \in P$ diremos que b *tapa* a $a \in P$ o que a es *tapado* por b cuando se de que $a < b$ y $b \leq c$, para cada $c \in P$ tal que $a \leq c$.

Ejercicio 5,5: Pruebe que si b tapa a a , entonces b cubre a a pero que la reciproca no es cierta.

Elementos maximales, maximos, minimales y minimos

Sea (P, \leq) un poset. Diremos que $a \in P$ es un elemento *maximo de* (P, \leq) si $b \leq a$, para todo $b \in P$. En forma analoga se define el concepto de elemento *minimo*. Algunos ejemplos:

- (E1) 1 es un elemento maximo del poset $(\{1, 2\}, \{(1, 1), (2, 2), (2, 1)\})$ y 2 un elemento minimo de $(\{1, 2\}, \{(1, 1), (2, 2), (2, 1)\})$.
- (E2) Sea \leq el orden usual de los numeros reales. El poset (\mathbf{R}, \leq) no tiene elemento maximo ni minimo.
- (E3) El poset $\mathbf{P} = (\{1, 2, 3\}, \{(1, 2), (1, 3), (1, 1), (2, 2), (3, 3)\})$ no tiene elemento maximo. 1 es un elemento minimo de \mathbf{P} .
- (E4) 1 es un elemento maximo del poset $(\{1\}, \{(1, 1)\})$. Tambien 1 es un elemento minimo de $(\{1\}, \{(1, 1)\})$.

Como lo muestra el ejemplo (E2), no siempre hay elementos maximos o minimos en un poset.

Ejercicio 6: Sea (P, \leq) un poset. Entonces (P, \leq) tiene a lo sumo un elemento maximo

En caso de existir el maximo (resp. minimo) sera denotado con 1 (resp. 0). Tambien diremos que (P, \leq) *tiene un* 1 (resp. 0) para expresar que (P, \leq) tiene un elemento maximo (resp. minimo).

Sea (P, \leq) un poset. Diremos que $a \in P$ es un elemento *maximal de* (P, \leq) si no existe un $b \in P$ tal que $a < b$. En forma analoga se define el concepto de elemento *minimal*. Algunos ejemplos:

- (E1) Sea \leq el orden usual de los números reales. El poset (\mathbf{R}, \leq) no tiene elementos maximales ni minimales.
- (E2) Sea $\mathbf{P} = (\{1, 2, 3\}, \{(1, 2), (1, 3), (1, 1), (2, 2), (3, 3)\})$. El único elemento minimal de \mathbf{P} es 1. Los elementos 2 y 3 son los únicos maximales de \mathbf{P} .
- (E3) Sea $\mathbf{P} = (\{1, 2\}, \{(1, 1), (2, 2)\})$. 1 y 2 son elementos maximales de \mathbf{P} . 1 y 2 son elementos minimales de \mathbf{P} .

Como lo muestra el ejemplo (E1), no siempre hay elementos maximales o minimales en un poset.

Ejercicio 6,3: Sea $S = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$ y sea $R = \{(x, y) \in S^2 : x|y\}$. Encuentre los elementos maximales y minimales de (S, R)

Ejercicio 6,6: Encuentre los elementos maximales de $(\mathcal{P}(\omega) - \{\omega\}, \leq)$, donde $\leq = \{(S, T) \in (\mathcal{P}(\omega) - \{\omega\})^2 : S \subseteq T\}$.

Ejercicio 7: Todo elemento máximo (resp. mínimo) de (P, \leq) es un elemento maximal (resp. minimal) de (P, \leq)

Ejercicio 8: V o F o I, justifique

- (a) Si (P, \leq) es un poset y $a \in P$ no es un elemento máximo de (P, \leq) , entonces $a < b$, para algún $b \in P$
- (b) Si (P, \leq) es un poset sin elementos maximales, entonces P es infinito

Supremos

Sea (P, \leq) un poset. Dado $S \subseteq P$, diremos que un elemento $a \in P$ es *cota superior de S en (P, \leq)* cuando $b \leq a$, para todo $b \in S$. Notese que todo elemento de P es cota superior de \emptyset en (P, \leq) . Un elemento $a \in P$ será llamado *supremo de S en (P, \leq)* cuando se den las siguientes dos propiedades

- (1) a es a cota superior de S en (P, \leq)
- (2) Para cada $b \in P$, si b es una cota superior de S en (P, \leq) , entonces $a \leq b$.

Algunos ejemplos:

- (E1) Si $S = \{x, y\}$ y se da que $x \leq y$, entonces y es supremo de S en (P, \leq)
- (E2) Consideremos el poset (\mathbf{R}, \leq) , donde \leq es el orden usual de los números reales. Notese que ningún elemento de \mathbf{R} es cota superior de ω en (\mathbf{R}, \leq) . O sea que ningún elemento de \mathbf{R} es supremo de ω en (\mathbf{R}, \leq) . Sea

$$\begin{aligned} S &= \{-1/n : n \in \mathbf{N}\} \\ &= \{-1, -1/2, -1/3, \dots\} \end{aligned}$$

Es fácil ver que 0 es supremo de S en (\mathbf{R}, \leq) .

(E3) Consideremos el poset $(\mathcal{P}(\omega), \leq)$, donde $\leq = \{(A, B) \in \mathcal{P}(\omega)^2 : A \subseteq B\}$. Sean $A, B \in \mathcal{P}(\omega)$. Es facil ver que $A \cup B$ es supremo de $\{A, B\}$ en $(\mathcal{P}(\omega), \leq)$

Como lo muestra el ejemplo (E1) no siempre existe un supremo de S en (P, \leq) .

Ejercicio 9: Si a es supremo de S en (P, \leq) y a' es supremo de S en (P, \leq) , entonces $a = a'$

El ejercicio anterior nos permite hablar de EL supremo de S en (P, \leq) , cuando exista. Denotaremos con $\sup(S)$ al supremo de S en (P, \leq) , en caso de que exista. A veces para hacer mas dinamicos los enunciados en lugar de escribir z es supremo de S en (P, \leq) escribiremos $z = \sup(S)$ o $\sup(S) = z$.

Notese que (E1) nos muestra que no siempre el supremo de un conjunto pertenece al conjunto.

Ejercicio 10: Sea (P, \leq) un poset.

- (a) Si $a \leq b$ entonces $\sup\{a, b\} = b$
- (b) Encuentre $\{a \in P : a \text{ es cota superior de } \emptyset \text{ en } (P, \leq)\}$
- (c) En caso de existir, el supremo del conjunto \emptyset en (P, \leq) es un elemento minimo de (P, \leq) .

Ejercicio 11: Dar un ejemplo de un poset finito en el cual haya elementos distintos x_1, x_2, x_3 tales que se den simultaneamente las siguientes tres condiciones

- (a) $\{x_1, x_2, x_3\}$ es una anticadena, es decir $x_i \not\leq x_j$, cada vez que $i \neq j$
- (b) no existen $\sup\{x_1, x_2\}$, $\sup\{x_1, x_3\}$ y $\sup\{x_2, x_3\}$
- (c) existe $\sup\{x_1, x_2, x_3\}$

Ejercicio 12: Si (P, \leq) es un poset y $a = \sup(S)$, entonces $a = \sup(S \cup \{a\})$

Ejercicio 13: Sea (P, \leq) un poset y sea $a \in P$. Entonces a es un elemento maximo de (P, \leq) sii $a = \sup(P)$

Ejercicio 14: V o F o I, justificar

- (a) Si (P, \leq) es un poset y $S \subseteq P$, entonces $a = \sup(S)$ en (P, \leq) sii $a \in S$ y $b \leq a$, para todo $b \in S$
- (b) Sea (P, \leq) un poset y sean $S \subseteq P$ y $a \in P$ una cota superior de S . Si a no es el supremo de S en (P, \leq) entonces hay alguna cota superior b de S tal que $b < a$

Ejercicio 14,5: Sea (P, \leq) un poset, sea $S \subseteq P$ y sea $b \in P$. Si $a = \sup(S)$ y existe $\sup(\{a, b\})$, entonces $\sup(S \cup \{b\}) = \sup(\{a, b\})$.

Recordemos que dados $x, y \in \mathbf{N}$ decimos que x es *multiplo de* y cuando y divide a x . Ademas, por definicion, el *minimo comun multiplo de* x e y es el menor elemento del conjunto $\{z \in \mathbf{N} : z \text{ es multiplo de } x \text{ y de } y\}$. El minimo comun multiplo de x e y se denota con $mcm(x, y)$. Una propiedad importante es la siguiente:

- (*) Si z es multiplo de x y de y , entonces $mcm(x, y) | z$, es decir no solo $mcm(x, y)$ es menor o igual a cada multiplo comun de x e y , sino que $mcm(x, y)$ divide a cada multiplo comun de x e y

Un ejemplo importante de existencia de supremos es el siguiente:

- (E4) Consideremos el poset (\mathbf{N}, D) , donde $D = \{(x, y) \in \mathbf{N}^2 : x | y\}$. Dados $x, y \in \mathbf{N}$, se tiene que $mcm(x, y)$ es el supremo de $\{x, y\}$ en (\mathbf{N}, D) . Es claro que $mcm(x, y)$ es cota superior de $\{x, y\}$ en (\mathbf{N}, D) . Ademas la propiedad (*) nos asegura que la propiedad (2) de la definicion de supremo se cumple. No es obvio que se cumple (2) de la definicion de supremo? Por que es necesario aplicar la propiedad (*)?

Infimos

Sea (P, \leq) un poset. Dado $S \subseteq P$, diremos que un elemento $a \in P$ es *cota inferior de* S en (P, \leq) , cuando $a \leq b$, para cada $b \in S$. Notese que todo elemento de P es cota inferior de \emptyset en (P, \leq) . Un elemento $a \in P$ sera llamado *infimo de* S en (P, \leq) cuando se den las siguientes dos propiedades

- (1) a es a cota inferior de S en (P, \leq)
- (2) Para cada $b \in P$, si b es una cota inferior de S en (P, \leq) , entonces $b \leq a$.

Algunos ejemplos:

- (E1) Si $S = \{x, y\}$ y se da que $x \leq y$, entonces x es infimo de S en (P, \leq)
- (E2) Consideremos el poset (\mathbf{R}, \leq) , donde \leq es el orden usual de los numeros reales. Notese que ningun elemento de \mathbf{R} es cota inferior de \mathbf{Z} en (\mathbf{R}, \leq) . O sea que ningun elemento de \mathbf{R} es infimo de \mathbf{Z} en (\mathbf{R}, \leq) . Sea

$$\begin{aligned} S &= \{1/n : n \in \mathbf{N}\} \\ &= \{1, 1/2, 1/3, \dots\} \end{aligned}$$

Es facil ver que 0 es infimo de S en (\mathbf{R}, \leq) .

- (E3) Consideremos el poset $(\mathcal{P}(\omega), \leq)$, donde $\leq = \{(A, B) \in \mathcal{P}(\omega)^2 : A \subseteq B\}$. Sean $A, B \in \mathcal{P}(\omega)$. Es facil ver que $A \cap B$ es infimo de $\{A, B\}$ en $(\mathcal{P}(\omega), \leq)$.

Como lo muestra el ejemplo (E1) no siempre existe un infimo de S en (P, \leq) .

Ejercicio 15: Si a es infimo de S en (P, \leq) y a' es infimo de S en (P, \leq) , entonces $a = a'$

El ejercicio anterior nos permite hablar de EL infimo de S en (P, \leq) , cuando exista. Denotaremos con $\inf(S)$ al infimo de S en (P, \leq) , en caso de que exista. A veces para hacer mas dinamicos los enunciados en lugar de escribir z es infimo de S en (P, \leq) escribiremos $z = \inf(S)$ o $\inf(S) = z$.

Notese que (E1) nos muestra que no siempre el infimo de un conjunto pertenece al conjunto.

Ejercicio 16: Sea (P, \leq) un poset.

- (a) Si $a \leq b$ entonces $\inf\{a, b\} = a$
- (b) Encuentre $\{a \in P : a \text{ es cota inferior de } \emptyset \text{ en } (P, \leq)\}$
- (c) En caso de existir, el infimo del conjunto \emptyset en (P, \leq) es un elemento maximo de (P, \leq) .

Ejercicio 17: Sea $P = \{0\} \cup \{x \in \mathbf{R} : 1 < x \leq 2\}$. Sea $\leq = \{(x, y) \in P^2 : x \leq y\}$. Sea $S = \{x \in \mathbf{Q} : 1 < x \leq 2\}$. Tiene infimo S en el poset (P, \leq) ?

Ejercicio 18: (S) V o F, Justificar. Sea $D((x_0, y_0), r) = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq r^2\}$. Sea $P = \{\emptyset\} \cup \{D((x_0, y_0), r) : x_0, y_0 \in \mathbf{R}, r > 0\}$. En el poset (P, \subseteq) siempre existe $\inf\{D_1, D_2\}$, cualesquiera sean $D_1, D_2 \in P$. (Ver video en granlogico resolviendo este ejercicio.)

Recordemos que dados $x, y \in \mathbf{N}$, por definicion, el *maximo comun divisor* de x e y es el mayor elemento del conjunto $\{z \in \mathbf{N} : z|x \text{ y } z|y\}$. El maximo comun divisor de x e y se denota con $mcd(x, y)$. Una propiedad importante es la siguiente:

- (**) Si $z|x$ y $z|y$, entonces $z|mcd(x, y)$, es decir no solo $mcd(x, y)$ es mayor o igual a cada divisor comun de x e y , sino que $mcd(x, y)$ es divisible por cada divisor comun de x e y

Un ejemplo importante de existencia de infimos es el siguiente:

- (E4) Consideremos el poset (\mathbf{N}, D) , donde $D = \{(x, y) \in \mathbf{N}^2 : x|y\}$. Dados $x, y \in \mathbf{N}$, se tiene que $mcd(x, y)$ es el infimo de $\{x, y\}$ en (\mathbf{N}, D) . Es claro que $mcd(x, y)$ es cota inferior de $\{x, y\}$ en (\mathbf{N}, D) . Ademas la propiedad (**) nos asegura que la propiedad (2) de la definicion de infimo se cumple. No es obvio que se cumple (2) de la definicion de infimo? Por que es necesario aplicar la propiedad (**)?

Homomorfismos de posets

Sean (P, \leq) y (P', \leq') posets. Una funcion $F : P \rightarrow P'$ sera llamada un *homomorfismo de (P, \leq) en (P', \leq')* si para todo $x, y \in P$ se cumple que $x \leq y$ implica $F(x) \leq' F(y)$. Escribiremos $F : (P, \leq) \rightarrow (P', \leq')$ para expresar que F es un homomorfismo de (P, \leq) en (P', \leq') . Algunos ejemplos:

- (E1) $F : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ dada por $F(r) = 3.r$ es un homomorfismo de (\mathbf{R}, \leq) en (\mathbf{R}, \leq)
- (E2) Sea $\leq = \{(n, m) \in \omega^2 : n = m\}$ y sea (P', \leq') un poset cualquiera. Entonces cualquier funcion $F : \omega \rightarrow P'$ es un homomorfismo de (ω, \leq) en (P', \leq') (glup!)
- (E3) Consideremos el poset $(\mathcal{P}(\omega), \leq)$, donde $\leq = \{(A, B) \in \mathcal{P}(\omega)^2 : A \subseteq B\}$ y el poset $(\mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4\}), \leq')$, donde $\leq' = \{(A, B) \in \mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4\})^2 : A \subseteq B\}$. Entonces $F : \mathcal{P}(\omega) \rightarrow \mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4\})$ dada por $F(A) = A \cap \{1, 2, 3, 4\}$ es un homomorfismo de $(\mathcal{P}(\omega), \leq)$ en $(\mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4\}), \leq')$

Una funcion $F : P \rightarrow P'$ sera llamada un *isomorfismo de (P, \leq) en (P', \leq')* si F es biyectiva, F es un homomorfismo de (P, \leq) en (P', \leq') y F^{-1} es un homomorfismo de (P', \leq') en (P, \leq) . Escribiremos $(P, \leq) \cong (P', \leq')$ cuando exista un isomorfismo de (P, \leq) en (P', \leq') y en tal caso diremos que (P, \leq) y (P', \leq') son *isomorfos*. Ejemplos:

- (E4) $F : \omega \rightarrow \mathbf{N}$ dada por $F(x) = x + 1$ es un isomorfismo de (ω, \leq) en (\mathbf{N}, \leq') , donde \leq es el orden usual de ω y \leq' es el orden usual de \mathbf{N}
- (E5) Consideremos los posets $(\mathcal{P}(\{1, 2\}), \leq)$, donde $\leq = \{(A, B) \in \mathcal{P}(\{1, 2\})^2 : A \subseteq B\}$ y $(\{1, 2, 3, 6\}, \leq')$, donde $\leq' = \{(x, y) \in \{1, 2, 3, 6\}^2 : x|y\}$. Entonces la funcion $\{(\emptyset, 1), (\{2\}, 2), (\{3\}, 3), (\{1, 2\}, 6)\}$ es un isomorfismo de $(\mathcal{P}(\{1, 2\}), \leq)$ en $(\{1, 2, 3, 6\}, \leq')$. Se le ocurre otro isomorfismo de $(\mathcal{P}(\{1, 2\}), \leq)$ en $(\{1, 2, 3, 6\}, \leq')$.

Ejercicio 18,5: Refute con un contraejemplo la aparentemente verdadera propiedad:

- Si F es un homomorfismo de (P, \leq) en (P', \leq') , entonces

$$x < y \text{ implica } F(x) <' F(y), \text{ cualesquiera sean } x, y \in P$$

Ejercicio 19: Encuentre un homomorfismo F de (P, \leq) en (P', \leq') el cual sea biyectivo pero que no sea un isomorfismo de (P, \leq) en (P', \leq')

El siguiente lema aporta evidencia al hecho de que los isomorfismos preservan todas las propiedades matematicas.

Lemma 1 Sean (P, \leq) y (P', \leq') posets. Supongamos F es un isomorfismo de (P, \leq) en (P', \leq') .

- (a) Para $x, y \in P$, tenemos que $x < y$ si y solo si $F(x) <' F(y)$.
- (b) Para cada $x \in P$, se tiene que x es maximo (resp. minimo) de (P, \leq) si y solo si $F(x)$ es maximo (resp. minimo) de (P', \leq') .
- (c) Para cada $x \in P$, se tiene que x es maximal (resp. minimal) en (P, \leq) si y solo si $F(x)$ es maximal (resp. minimal) en (P', \leq') .
- (d) Para $x, y, z \in P$, tenemos que $z = \sup\{x, y\}$ si y solo si $F(z) = \sup\{F(x), F(y)\}$
- (e) Para $x, y, z \in P$, tenemos que $z = \inf\{x, y\}$ si y solo si $F(z) = \inf\{F(x), F(y)\}$
- (f) Para $x, y \in P$, tenemos que $x \prec y$ si y solo si $F(x) \prec' F(y)$.

Proof. (b) Sea $a \in P$ un elemento fijo. Supongamos $a \in P$ es maximo de (P, \leq) . Probaremos que $F(a)$ es maximo de (P', \leq') . Sea b un elemento fijo pero arbitrario de P' . Probaremos que $b \leq' F(a)$. Sea $d \in P$ tal que $F(d) = b$ (tal d existe y que F es sobreyectiva). Ya que a es maximo de (P, \leq) tenemos que $d \leq a$. Ya que F es un homomorfismo tenemos que $F(d) \leq' F(a)$ por lo cual $b \leq' F(a)$ ya que $F(d) = b$. Ya que b era arbitrario hemos probado que $x \leq' F(a)$ para cada $x \in P'$, lo cual por definicion nos dice que $F(a)$ es maximo de (P', \leq') . Supongamos ahora que $F(a)$ es maximo de (P', \leq') . Probaremos que a es maximo de (P, \leq) . Sea b un elemento fijo pero arbitrario de P . Probaremos que $b \leq a$. Ya que $F(a)$ es maximo de (P', \leq') tenemos que $F(b) \leq' F(a)$. Ya que F^{-1} es un homomorfismo tenemos que $F^{-1}(F(b)) \leq F^{-1}(F(a))$, por lo cual $b \leq a$. Ya que b era arbitrario hemos probado que $x \leq a$ para cada $x \in P$, lo cual por definicion nos dice que a es maximo de (P, \leq) .

Ya que a era fijo pero arbitrario hemos probado que cualquiera sea $x \in P$, se tiene que x es maximo de (P, \leq) si y solo si $F(x)$ es maximo de (P', \leq') . ■

Notese que en la prueba de (b) del lema anterior se uso tacitamente la siguiente propiedad que es obvia pero clave en la demostracion:

- Si F es una funcion y $b \in \text{Im}(F)$, entonces $b = F(d)$, para algun $d \in D_F$

Esto da lugar a la siguiente regla la cual es muy util a la hora de hacer pruebas:

Regla Pertenecer a la Imagen

Si ud en el desarrollo de una prueba conoce que un elemento b esta en la imagen de una funcion F , entonces escriba al elemento b en la forma $F(a)$, donde a denota algun elemento fijo del dominio de F

Muchas veces tener presente dicha regla es la diferencia a que a uno le salga o no una prueba determinada.

Ejercicio 20: Hacer las pruebas de (a),(c), (d), (e) y (f) del lema anterior (la prueba de (f) esta en video en granlogico)

Notese que (f) nos garantiza que si dos posets finitos son isomorfos, entonces pueden representarse con el mismo diagrama de Hasse.

Un poset (P, \leq) sera llamado *denso* cuando cumpla:

- Si $a, b \in P$ son tales que $a < b$, entonces hay un $c \in P$ tal que $a < c$ y $c < b$

Ejercicio 21: Pruebe que si (P, \leq) y (P', \leq') son isomorfos, entonces

- (a) Si (P, \leq) tiene exactamente tres elementos maximales, entonces tambien (P', \leq') tiene exactamente tres elementos maximales
- (b) Si (P, \leq) es denso, entonces (P', \leq') es denso
- (c) Si cada elemento en (P, \leq) es cubierto por exactamente dos elementos, entonces cada elemento en (P', \leq') es cubierto por exactamente dos elementos (Hint: primero escriba mas formalmente que significa que un elemento a sea cubierto en un poset (P, \leq) por exactamente dos elementos)

Ejercicio 21,3: Sea $F : (P, \leq) \rightarrow (P', \leq')$ un isomorfismo de posets. Pruebe que cualesquiera sean $x, y \in P$, tenemos que x es tapado por y si y solo si $F(x)$ es tapado por $F(y)$ (antes del Ejercicio 5,5 esta la definicion de "es tapado por")

Ejercicio 21,5: Sea $F : (P, \leq) \rightarrow (P', \leq')$ un homomorfismo de posets. Supongamos que F es suryectiva. Entonces

- (a) Si (P, \leq) es un conjunto totalmente ordenado, (P', \leq') tambien lo es
- (b) Si (P, \leq) tiene un elemento maximo, (P', \leq') tiene un elemento maximo

Ejercicio 22: V o F o I, justifique

- (a) Si (P, \leq) y (P, \leq') son posets finitos isomorfos, entonces $\leq = \leq'$
- (b) Si (P, \leq) es un poset tal que toda funcion $F : P \rightarrow P$ es un homomorfismo de (P, \leq) en (P, \leq) , entonces $|P| = 1$
- (c) Si $F : (P, \leq) \rightarrow (P', \leq')$ un homomorfismo de posets y (P', \leq') tiene un elemento maximo, entonces (P, \leq) tiene un elemento maximo

Reticulados par

El concepto de reticulado puede ser abordado en dos formas distintas, una geométrica, via posets, la cual daremos ahora y la otra algebraica, via estructuras algebraicas definidas ecuacionalmente, la cual daremos en la Guía 3. Como veremos mas adelante ambas definiciones son equivalentes.

Por un *reticulado par* entenderemos un poset (P, \leq) el cual cumple que para todo $a, b \in P$, existen (en (P, \leq)) $\sup(\{a, b\})$ e $\inf(\{a, b\})$.

Ejercicio 23: Dar todos reticulados par cuyo universo es $\{2, 3, 4\}$

Ejercicio 24: Probar que $(\mathcal{P}(\omega), \leq)$, donde $\leq = \{(A, B) \in \mathcal{P}(\omega)^2 : A \subseteq B\}$, es un reticulado par.

Ejercicio 25: Pruebe que (\mathbf{N}, D) es un reticulado par, donde $D = \{(x, y) \in \mathbf{N}^2 : x|y\}$. ¿tiene elemento maximo? ¿tiene elemento minimo?

Ejercicio 25,5: Sea (P, \leq) un poset.

- (a) Supongamos $a, b \in P$ son tales que $a \leq b$. Entonces $\sup(\{a, b\}) = b$
- (b) Si (P, \leq) es un conjunto totalmente ordenado, entonces (P, \leq) es un reticulado par.

Notese que si (P, \leq) es un poset y $S \subseteq P$ es no vacio, entonces $\leq \cap S^2$ es un orden parcial sobre S , por lo cual $(S, \leq \cap S^2)$ es un poset.

Ejercicio 26: V o F o I, justifique

- (a) $(\{1\}, \{(1, 1)\})$ es un reticulado par
- (b) Si (P, \leq) es un reticulado par, entonces existe $\sup S$ para cada $S \subseteq P$
- (c) Si (P, \leq) es un reticulado par y $S \subseteq P$ es no vacio, entonces $(S, \leq \cap S^2)$ es un reticulado par
- (d) (S) Sea (P, \leq) un reticulado par y sea $S \subseteq P$ no vacio tal que $(S, \leq \cap S^2)$ es un reticulado par. Sean $a, b \in S$. Entonces el infimo de $\{a, b\}$ en (P, \leq) y el infimo de $\{a, b\}$ en $(S, \leq \cap S^2)$ coinciden
- (e) (S) Sea $\leq = \{(A, B) \in (\mathcal{P}(\mathbf{R}) - \{\mathbf{N}\})^2 : A \subseteq B\}$. Entonces $(\mathcal{P}(\mathbf{R}) - \{\mathbf{N}\}, \leq)$ es un reticulado par

Dado un conjunto A , por una *operacion binaria sobre A* entenderemos una funcion cuyo dominio es A^2 y cuya imagen esta contenida en A . En un reticulado par (P, \leq) tenemos dos operaciones binarias naturalmente definidas:

$$\begin{array}{ll} s : P^2 & \rightarrow P & i : P^2 & \rightarrow P \\ (a, b) & \rightarrow \sup(\{a, b\}) & (a, b) & \rightarrow \inf(\{a, b\}) \end{array}$$

Escribiremos $a \text{ s } b$ en lugar de $s(a, b)$ y $a \text{ i } b$ en lugar de $i(a, b)$.

Ejercicio 26,3: Cuales son las operaciones s e i en el reticulado par $(\mathbf{N}, |)$ (con $| = \{(x, y) \in \mathbf{N}^2 : x|y\}$)?

Ejercicio 26,5 Cuales son las operaciones s e i en el reticulado par $(\mathcal{P}(\omega), \leq)$ (con $\leq = \{(A, B) \in \mathcal{P}(\omega)^2 : A \subseteq B\}$)?

Ejercicio 26,7: Sea $n \in \mathbf{N}$. Sea $D_n = \{x \in \mathbf{N} : x|n\}$ y sea $\leq_n = \{(x, y) \in D_n \times D_n : x|y\}$. Pruebe que (D_n, \leq_n) es un reticulado par y describa las operaciones s e i de (D_n, \leq_n) . Haga el diagrama de Hasse de (D_{60}, \leq_{60})

Ejercicio 27: Sea $P \subseteq \mathcal{P}(\mathbf{N})$, y supongamos (P, \leq) es un reticulado par, donde $\leq = \{(A, B) \in P^2 : A \subseteq B\}$. Es entonces la operación i de (P, \leq) igual a la operación intersección de conjuntos restringida a P^2 ?

Ejercicio 27,5: Sea $P \subseteq \mathbf{N}$, y supongamos (P, \leq) es un reticulado par, donde $\leq = \{(x, y) \in P^2 : x|y\}$. Es entonces la operación i de (P, \leq) igual a la operación maximo comun divisor restringida a P^2 ?

Ejercicio 28: (S) Si (P, \leq) es un reticulado par y m es un elemento maximal de (P, \leq) entonces m es un elemento maximo de (P, \leq) . Puede debilitar la hipotesis de que (P, \leq) sea un reticulado par de manera que el enunciado siga siendo verdadero?

A continuacion nos dedicaremos a probar varias propiedades agradables que se cumplen en un reticulado par. Recomendamos al lector que en algunos casos practique encontrando pruebas perfectas. Esto lo entrenara en su capacidad de ser un matematico maduro, la cual sera crucial a la hora de hacer logica ya que la logica estudia (modeliza) matematicamente el funcionar de un matematico y sera muy practico que cada uno cuente con un matematico maduro en su propia mente.

Lemma 2 Dado un reticulado par (L, \leq) , se cumplen las siguientes.

- (1) $x \leq x \text{ s } y$, cualesquiera sean $x, y \in L$
- (2) $x \text{ i } y \leq x$, cualesquiera sean $x, y \in L$
- (3) $x \text{ s } x = x$, cualesquiera sea $x \in L$
- (4) $x \text{ i } x = x$, cualesquiera sea $x \in L$
- (5) $x \text{ s } y = y \text{ s } x$, cualesquiera sean $x, y \in L$
- (6) $x \text{ i } y = y \text{ i } x$, cualesquiera sean $x, y \in L$

Proof. Prueba perfecta de (1). Sean $a, b \in L$, fijos. Por definicion de s tenemos que $a \leq b = \sup(\{a, b\})$. O sea que por definicion de supremo de un conjunto tenemos que $a \leq b$ es cota superior del conjunto $\{a, b\}$ en (L, \leq) . O sea que $a \leq a \leq b$. Ya que a, b eran arbitrarios, hemos probado que vale (1).

Prueba perfecta de (3). Sea $a \in L$, fijo. Por definicion de s tenemos que $a \leq a = \sup(\{a, a\}) = \sup(\{a\})$. O sea que debemos probar que $a = \sup(\{a\})$. Es claro que a es cota superior de $\{a\}$. Ademas es claro que si z es cota superior de $\{a\}$, entonces $z \geq a$. O sea que por definicion de supremo de un conjunto tenemos que $a = \sup(\{a\})$. O sea que hemos probado que $a \leq a = a$. Ya que a era arbitrario, hemos probado que vale (3).

Dejamos al lector completar la prueba. ■

Ejercicio 29: Complete la prueba del lema anterior

Lemma 3 Dado un reticulado par (L, \leq) se tiene que:

(1) $x \leq y$ si y solo si $x \leq y = y$, cualesquiera sean $x, y \in L$

(2) $x \leq y$ si y solo si $x \wedge y = x$, cualesquiera sean $x, y \in L$

Ejercicio 30: Demuestre el lema anterior

Las siguientes dos propiedades son conocidas como leyes de absorcion (por que?)

Lemma 4 Dado un reticulado par (L, \leq) , se tiene que:

(1) $x \leq (x \wedge y) = x$, cualesquiera sean $x, y \in L$

(2) $x \wedge (x \vee y) = x$, cualesquiera sean $x, y \in L$

Proof. (1). Sean $a, b \in L$, fijos. Por definicion de s debemos probar que $\sup(\{a, a \wedge b\}) = a$. O sea debemos probar que a es la menor cota superior de $\{a, a \wedge b\}$. Por un lema anterior tenemos que $a \wedge b \leq a$ y obviamente se da $a \leq a$, lo cual nos dice que a es cota superior de $\{a, a \wedge b\}$. Es claro que es menor o igual que cualquier otra cota superior. O sea que hemos probado que $a \leq (a \wedge b) = a$, lo cual ya que a, b eran elementos arbitrarios nos dice que vale (1). ■

Ejercicio 31: Pruebe (2) del lema anterior

Antes de seguir dando propiedades basicas de los reticulados par daremos tres reglas que seran de suma utilidad para encontrar pruebas.

Regla Igualdad en Posets

Si ud esta intentando probar que en un poset (P, \leq) dos elementos x, y son iguales, desdoble su tarea en las dos tareas siguientes:

- Probar que $x \leq y$
- Probar que $y \leq x$

Regla Superar un Supremo

Si ud esta intentando probar que en un reticulado par (L, \leq) se da que $z \geq x$ s y , desdoble su tarea en las dos tareas siguientes:

- Probar que $z \geq x$
- Probar que $z \geq y$

Regla Ser Menor o Igual que un Infimo

Si ud esta intentando probar que en un reticulado par (L, \leq) se da que $z \leq x$ i y , desdoble su tarea en las dos tareas siguientes:

- Probar que $z \leq x$
- Probar que $z \leq y$

Ejercicio 32: Justifique matematicamente la validez de las reglas anteriores

Ambas operaciones s e i son asociativas, es decir:

Lemma 5 *Dado un reticulado par (L, \leq) , se tiene que:*

- (1) $(x \text{ s } y) \text{ s } z = x \text{ s } (y \text{ s } z)$, cualesquiera sean $x, y, z \in L$
- (2) $(x \text{ i } y) \text{ i } z = x \text{ i } (y \text{ i } z)$, cualesquiera sean $x, y, z \in L$

Proof. (1) Sean $a, b, c \in L$, fijos. Usaremos la regla Igualdad en Posets. Primero probaremos $(a \text{ s } b) \text{ s } c \leq a \text{ s } (b \text{ s } c)$. Para esto usaremos la regla Superar un Supremo. Es decir que debemos probar que

$$\begin{aligned} (a \text{ s } b) &\leq a \text{ s } (b \text{ s } c) \\ c &\leq a \text{ s } (b \text{ s } c) \end{aligned}$$

Para la primer desigualdad usaremos tambien la regla Superar un Supremo, por lo cual deberemos probar

$$\begin{aligned} a &\leq a \text{ s } (b \text{ s } c) \\ b &\leq a \text{ s } (b \text{ s } c) \end{aligned}$$

O sea que en suma debemos probar las siguientes desigualdades

$$\begin{aligned} a &\leq a \text{ s } (b \text{ s } c) \\ b &\leq a \text{ s } (b \text{ s } c) \\ c &\leq a \text{ s } (b \text{ s } c) \end{aligned}$$

La primera es directa de un lema anterior, y para la segunda notese que el mismo lema nos dice que

$$b \leq (b \text{ s } c) \text{ y } (b \text{ s } c) \leq a \text{ s } (b \text{ s } c)$$

por lo cual solo resta usar que \leq es transitiva. La tercera es completamente analoga a la segunda.

En forma similar se prueba que $a \text{ s } (b \text{ s } c) \leq (a \text{ s } b) \text{ s } c$. Es decir que por la regla Igualdad en Posets tenemos que $a \text{ s } (b \text{ s } c) = (a \text{ s } b) \text{ s } c$. Ya que a, b, c eran elementos arbitrarios hemos probado que vale (1).

(2) es dejada como ejercicio. ■

Ejercicio 33: Complete la prueba de (1) en la demostracion anterior, probando que $a \text{ s } (b \text{ s } c) \leq (a \text{ s } b) \text{ s } c$

El siguiente lema prueba que en un reticulado par las operaciones s e i preservan el orden

Lemma 6 Dado un reticulado par (L, \leq) , se tiene que:

- (1) $x \leq z$ e $y \leq w$ implica $x \text{ s } y \leq z \text{ s } w$, cualesquiera sean $x, y, z, w \in L$
- (2) $x \leq z$ e $y \leq w$ implica $x \text{ i } y \leq z \text{ i } w$, cualesquiera sean $x, y, z, w \in L$

Proof. (1) Sean $a, b, c, d \in L$, elementos fijos. Supongamos que $a \leq c$ e $b \leq d$. Probaremos que entonces $a \text{ s } b \leq c \text{ s } d$. Por la regla Superar un Supremo basta con probar que

$$\begin{aligned} a &\leq c \text{ s } d \\ b &\leq c \text{ s } d \end{aligned}$$

Para ver que $a \leq c \text{ s } d$ notese que $a \leq c$ (por hipotesis) y $c \leq c \text{ s } d$, por lo cual podemos usar que \leq es transitiva. La desigualdad $b \leq c \text{ s } d$ se prueba en forma similar. O sea que hemos probado que

$$a \leq c \text{ y } b \leq d \text{ implican } a \text{ s } b \leq c \text{ s } d$$

Ya que a, b, c, d eran elementos arbitrarios hemos probado que vale (1). ■

Ejercicio 34: Haga la prueba de (2) del lema anterior

Lemma 7 Dado un reticulado par (L, \leq) , se tiene que:

$$- (x \text{ i } y) \text{ s } (x \text{ i } z) \leq x \text{ i } (y \text{ s } z), \text{ cualesquiera sean } x, y, z \in L$$

Proof. Sean $a, b, c \in L$, elementos fijos. Por la regla Superar un Supremo, basta con probar que

$$a \text{ i } b \leq a \text{ i } (b \text{ s } c)$$

$$a \text{ i } c \leq a \text{ i } (b \text{ s } c)$$

Pero estas dos desigualdades pueden ser facilmente probadas aplicando (2) del lema anterior. O sea que $(a \text{ i } b) \text{ s } (a \text{ i } c) \leq a \text{ i } (b \text{ s } c)$, de lo cual se deduce nuestro lema ya que a, b, c eran elementos arbitrarios. ■

Ejercicio 35: Complete la prueba del lema anterior

Iterar supremos (resp. infimos) da supremos (resp. infimos), es decir:

Lemma 8 Sea (L, \leq) un reticulado par. Se tiene que

$$(\dots(x_1 \text{ s } x_2) \text{ s } \dots) \text{ s } x_n = \sup(\{x_1, \dots, x_n\})$$

$$(\dots(x_1 \text{ i } x_2) \text{ i } \dots) \text{ i } x_n = \inf(\{x_1, \dots, x_n\})$$

cualquiera sean los elementos $x_1, \dots, x_n \in L$, con $n \geq 2$.

Proof. Por induccion en n . Claramente el resultado vale para $n = 2$. Supongamos vale para n y veamos entonces que vale para $n + 1$. Sean $a_1, \dots, a_{n+1} \in L$, fijos. Por hipotesis inductiva tenemos que

$$(1) (\dots(a_1 \text{ s } a_2) \text{ s } \dots) \text{ s } a_n = \sup(\{a_1, \dots, a_n\})$$

Veamos entonces que

$$(2) ((\dots(a_1 \text{ s } a_2) \text{ s } \dots) \text{ s } a_n) \text{ s } a_{n+1} = \sup(\{a_1, \dots, a_{n+1}\})$$

Usando (1), es facil ver que $((\dots(a_1 \text{ s } a_2) \text{ s } \dots) \text{ s } a_n) \text{ s } a_{n+1}$ es cota superior de $\{a_1, \dots, a_{n+1}\}$. Supongamos que z es otra cota superior. Ya que z es tambien cota superior del conjunto $\{a_1, \dots, a_n\}$, por (1) tenemos que

$$(\dots(a_1 \text{ s } a_2) \text{ s } \dots) \text{ s } a_n \leq z$$

Pero entonces ya que $a_{n+1} \leq z$, tenemos que

$$((\dots(a_1 \text{ s } a_2) \text{ s } \dots) \text{ s } a_n) \text{ s } a_{n+1} \leq z$$

con lo cual hemos probado (2). Ya que $a_1, \dots, a_{n+1} \in L$ eran elementos arbitrarios, hemos probado que vale el enunciado del lema para $n + 1$. ■

Ejercicio 36: Complete la prueba del lema anterior justificando por que $((...(a_1 \text{ s } a_2) \text{ s } ...) \text{ s } a_n) \text{ s } a_{n+1}$ es cota superior de $\{a_1, ..., a_{n+1}\}$

Dado que la distribucion de parentesis en una expresion de la forma

$$(...(x_1 \text{ s } x_2) \text{ s } ...) \text{ s } x_n$$

es irrelevante (ya que s es asociativa), en general suprimiremos los parentesis.

Ejercicio 37: Complete el enunciado de la siguiente regla, la cual hemos usado constantemente a lo largo de la guia:

Igualar un Supremo

Si ud esta intentando probar que en un poset (P, \leq) se da que $x = \sup(S)$, desdoble su tarea en las dos tareas siguientes:

(a)

(b)

Ejercicio 38: (S) Que relacion tienen las cinco reglas consideradas en la guia con el concepto de inteligencia artificial?