Combo 5 de teoremas

Emanuel Nicolás Herrador - November 2024

Teorema de Completitud

Sea $T = (\Sigma, \tau)$ una teoría de primer orden. Si $T \vDash \varphi$, entonces $T \vdash \varphi$.

Haga solo el caso en que τ tiene una cantidad infinita de nombres de constante que no ocurren en las sentencias de Σ. En la exposición de la prueba no es necesario que demuestre los ítems (1) y (5).

Lemas que usaremos

Lema (A)

Sea τ un tipo. Hay una infinitupla $(\gamma_1, \gamma_2, \dots) \in F^{\tau N}$ tal que:

1. $|Li(\gamma_j)| \leq 1$ para cada $j = 1, 2, \dots$
2. Si $|Li(\gamma)| \leq 1$, entonces $\gamma = \gamma_j$ para algún $j \in N$

Lema (B): Lema del ínfimo

Sea $T = (\Sigma, \tau)$ una teoría y supongamos que τ tiene una cantidad infinita de nombres de constante que no ocurren en las sentencias de Σ. Entonces para cada fórmula $\varphi =_d \varphi(v)$, se tiene que en el álgebra de Lindembaum $\mathcal{A}_T$, $[\forall v \varphi(v)]_T = \inf(\{[\varphi(t)]_T : t \in T_c^\tau\})$

Teorema (C): Teorema de Rasiova y Sikorski

Sea $(B, s, i, {}^c, 0, 1)$ un álgebra de Boole. Sea $x \in B : x \neq 0$. Supongamos que $(A_1, A_2, \dots)$ es una infinitupla de subconjuntos de B tal que $(\exists \inf(A_j)) \forall j = 1, 2, \dots$. Entonces hay un filtro primo P tal que:

- $x \in P$
- $\forall j = 1, 2, \dots,\ A_j \subseteq P \Rightarrow \inf(A_j) \in P$

Demostración

Digamos $T = (\Sigma, \tau)$ una teoría de primer orden tal que τ tiene una cantidad infinita de nombres de constante que no ocurren en las sentencias de Σ.

Vamos a probar el *Teorema* por el absurdo, es decir, supongamos que $\exists \varphi_0 \in S^\tau,\ (T \vDash \varphi_0 \wedge T \nvdash \varphi_0)$.

Veamos que $[\neg\varphi_0]_T \neq 0^T$ por absurdo: Supongamos que $[\neg\varphi_0]_T = 0^T$, luego:

$$\begin{aligned}
[\neg\varphi_0]_T = 0^T &\Rightarrow \neg\varphi_0 \in 0^T \\
&\Rightarrow \neg\varphi_0 \in \{\psi \in S^\tau : T \vdash \neg\psi\} \\
&\Rightarrow T \vdash \neg\neg\varphi_0 \\
&\Rightarrow T \vdash \varphi_0 \text{ (AXILOG)}
\end{aligned}$$

lo cual es absurdo, pues suponemos $T \nvdash \varphi_0$. Luego, efectivamente $[\neg\varphi_0]_T \neq 0^T$.

Por **(A)** tenemos que hay una infinitupla $(\gamma_1, \gamma_2, \dots) \in F^{\tau N}$ tal que:

1. $|Li(\gamma_j)| \leq 1$ para cada $j = 1, 2, \dots$
2. Si $|Li(\gamma)| \leq 1$, entonces $\gamma = \gamma_j$ para algún $j \in N$

Para cada $j \in N$, sea $w_j \in Var : Li(\gamma_j) \subseteq \{w_j\}$, declararemos $\gamma_j =_d \gamma_j(w_j)$. Luego, por el **lema del ínfimo (B)**, tenemos que en $\mathcal{A}_T$ se tiene que $\forall j \in N,\ [\forall w_j \gamma_j(w_j)]_T = \inf(\{[\gamma_j(t)]_T : t \in T_c^\tau\})$

Ahora, como $\mathcal{A}_T$ es un álgebra de Boole, $[\neg\varphi_0]_T \in S^\tau / \dashv\vdash_T$ (universo de $\mathcal{A}_T$), $[\neg\varphi_0] \neq 0^T$ y $(\{[\gamma_1(t)]_T : t \in T_c^\tau\}, \{[\gamma_2(t)]_T : t \in T_c^\tau\}, \dots)$ es una infinitupla de subconjuntos de $S^\tau / \dashv\vdash_T$ tal que existe el ínfimo para cada uno de ellos; por el **Teorema de Rasiova y Sikorski (C)** tenemos que hay un filtro primo P tal que:

- $[\neg\varphi_0]_T \in P$
- $\forall j \in N,\ (\{[\gamma_j(t)]_T : t \in T_c^\tau\} \subseteq P \Rightarrow [\forall w_j \gamma_j(w_j)]_T \in P)$

Como $(\gamma_1, \gamma_2, \dots)$ cubre todas las fórmulas con a lo sumo una variable libre, podemos reescribir las propiedades anteriores como:

- $[\neg\varphi_0]_T \in P$
- $\forall \varphi =_d \varphi(v) \in F^\tau,\ (\{[\varphi(t)]_T : t \in T_c^\tau\} \subseteq P \Rightarrow [\forall v \varphi(v)]_T \in P)$

Definamos sobre T_c^τ la relación: $t \bowtie s$ sii $[(t \equiv s)]_T \in P$. Veamos que:

(1) $\bowtie$ es de equivalencia

(2) $\forall \varphi =_d \varphi(v_1, \dots, v_n) \in F^\tau,\ t_1, \dots, t_n, s_1, \dots, s_n \in T_c^\tau$, si $t_1 \bowtie s_1, \dots, t_n \bowtie s_n$, entonces $[\varphi(t_1, \dots, t_n)]_T \in P$ sii $[\varphi(s_1, \dots, s_n)]_T \in P$

- *Ida*: Supongamos $[\varphi(t_1, \dots, t_n)]_T \in P$. Entonces:

$$\begin{array}{rl} T \vdash ((t_1 \equiv s_1) \wedge \dots \wedge (t_n \equiv s_n) \wedge \varphi(t_1, \dots, t_n)) \rightarrow \varphi(s_1, \dots, s_n) & \text{REEMP} \\ [((t_1 \equiv s_1) \wedge \dots \wedge (t_n \equiv s_n) \wedge \varphi(t_1, \dots, t_n))]_T \leq^T [\varphi(s_1, \dots, s_n)]_T & \text{Def. de } \leq^T \\ [(t_1 \equiv s_1)]_T\ i^T\ \dots\ i^T\ [(t_n \equiv s_n)]_T\ i^T\ [\varphi(t_1, \dots, t_n)]_T \leq^T [\varphi(s_1, \dots, s_n)]_T & \text{Def. de } i^T \end{array}$$

  Como P es un filtro, por def.:
  - $x, y \in P \Rightarrow x\ i\ y \in P$
  - $x \in P \wedge x \leq y \Rightarrow y \in P$

  Luego, como $\forall i \in \{1, \dots, n\},\ [(t_i \equiv s_i)]_T \in P$, entonces nos queda que:

$$[\varphi(t_1, \dots, t_n)]_T \in P \Rightarrow [\varphi(s_1, \dots, s_n)]_T \in P$$

  Por lo que se demuestra este caso.
- *Vuelta*: Es análoga al caso anterior.

Con ello, se demuestra esta propiedad. ■

(3) $\forall f \in \mathcal{F}_n,\ t_1, \dots, t_n, s_1, \dots, s_n \in T_c^\tau$, entonces $(t_1 \bowtie s_1, \dots, t_n \bowtie s_n) \Rightarrow (f(t_1, \dots, t_n) \bowtie f(s_1, \dots, s_n))$

Sean $\varphi = (f(v_1, \dots, v_n) \equiv f(s_1, \dots, s_n))$ y $\varphi =_d \varphi(v_1, \dots, v_n)$, entonces: $T \vdash \varphi(s_1, \dots, s_n) \overset{\text{def. } 1^T}{\Rightarrow} \varphi(s_1, \dots, s_n) \in 1^T \Rightarrow [\varphi(s_1, \dots, s_n)]_T = 1^T \overset{(x \in P \wedge x \leq y \Rightarrow y \in P)}{\Rightarrow} [\varphi(s_1, \dots, s_n)]_T \in P \overset{\text{por } (2)}{\Rightarrow} [\varphi(t_1, \dots, t_n)]_T \in P$

Luego, $[(f(t_1, \dots, t_n) \equiv f(s_1, \dots, s_n))]_T \in P$, por lo que por def. de $\bowtie$, $f(t_1, \dots, t_n) \bowtie f(s_1, \dots, s_n)$.

Con ello, se demuestra esta propiedad. ■

Definamos ahora un modelo $\mathbf{A}_P$ de tipo τ tal que:

- Universo de $\mathbf{A}_P = T_c^\tau / \bowtie$
- $c^{\mathbf{A}_P} = c/\bowtie,\ \forall c \in \mathcal{C}$
- $f^{\mathbf{A}_P}(t_1/\bowtie, \dots, t_n/\bowtie) = f(t_1, \dots, t_n)/\bowtie,\ \forall f \in \mathcal{F}_n,\ t_1, \dots, t_n \in T_c^\tau$
- $r^{\mathbf{A}_P} = \{(t_1/\bowtie, \dots, t_n/\bowtie) : [r(t_1, \dots, t_n)]_T \in P\},\ \forall r \in \mathcal{R}_n$

Notar que $f^{\mathbf{A}_P}$ es inambigua por la propiedad (3) vista antes. Con ello, veamos que se cumple que:

(4) $\forall t =_d t(v_1, \dots, v_n) \in T^\tau,\ t_1, \dots, t_n \in T_c^\tau,\ (t^{\mathbf{A}_P}[t_1/\bowtie, \dots, t_n/\bowtie] = t(t_1, \dots, t_n)/\bowtie)$

Vamos a demostrar por inducción en $k \in N_0$ que el lema vale $\forall t \in T_k^\tau$.

- *Caso base* $(k = 0)$: Sea $t =_d t(v_1, \dots, v_n) \in T_0^\tau$, tenemos dos casos:
  - Si $t \in Var$: Luego, $t = v_j$ para $j \in \{1, \dots, n\}$. Por ello: $t^{\mathbf{A}_P}[t_1/\bowtie, \dots, t_n/\bowtie] = t_j/\bowtie \overset{\text{conv. not.}}{=} v_j(t_1, \dots, t_n)/\bowtie = t(t_1, \dots, t_n)/\bowtie$. Por ello, se demuestra este caso.

- Si $t \in \mathcal{C}$: Luego, $t = c$ para algún $c \in \mathcal{C}$. De forma similar, $t^{\mathbf{A}_P}[t_1/\bowtie, \ldots, t_n/\bowtie] = c^{\mathbf{A}_P} = c/\bowtie \overset{\text{conv. not.}}{=} c(t_1, \ldots, t_n)/\bowtie = t(t_1, \ldots, t_n)/\bowtie$. Por ello, se demuestra este caso.

  Luego, se demuestra el caso base.

- *Hipótesis inductiva* (k): Sea $k \in N_0$, entonces $\forall t =_d t(v_1, \ldots, v_n) \in T_k^\tau,\ t_1, \ldots, t_n \in T_c^\tau,\ (t^{\mathbf{A}_P}[t_1/\bowtie, \ldots, t_n/\bowtie] = t(t_1, \ldots, t_n)/\bowtie)$
- *Caso inductivo* $(k+1)$: Sea $t =_d t(v_1, \ldots, v_n) \in T_{k+1}^\tau$, entonces tenemos dos casos:
  - Si $t \in T_k^\tau$: Se demuestra por HI.
  - Si $t = f(s_1, \ldots, s_m)$ con $f \in \mathcal{F}_m,\ s_1, \ldots, s_m \in T_k^\tau$: Luego:

$$\begin{aligned} t^{\mathbf{A}_P}[t_1/\bowtie, \ldots, t_n/\bowtie] &= f^{\mathbf{A}_P}(s_1^{\mathbf{A}_P}[t_1/\bowtie, \ldots, t_n/\bowtie], \ldots, s_m^{\mathbf{A}_P}[t_1/\bowtie, \ldots, t_n/\bowtie]) \\ &= f^{\mathbf{A}_P}(s_1(t_1, \ldots, t_n)/\bowtie, \ldots, s_m(t_1, \ldots, t_n)/\bowtie) && \text{HI} \\ &= f(s_1(t_1, \ldots, t_n), \ldots, s_m(t_1, \ldots, t_n))/\bowtie && \text{Def. de } f^{\mathbf{A}_P} \\ &= f(s_1, \ldots, s_m)(t_1, \ldots, t_n)/\bowtie && \text{conv. not.} \\ &= t(t_1, \ldots, t_n)/\bowtie \end{aligned}$$

    Por ello, se demuestra el paso inductivo.

  Con todo esto, se demuestra la propiedad (4). ∎

(5) $\forall \varphi =_d \varphi(v_1, \ldots, v_n) \in F^\tau,\ t_1, \ldots, t_n \in T_c^\tau,\ (\mathbf{A}_P \vDash \varphi[t_1/\bowtie, \ldots, t_n/\bowtie] \iff [\varphi(t_1, \ldots, t_n)]_T \in P)$

Con esto, notemos que (5) nos dice que, en particular, $\forall \psi \in S^\tau,\ (\mathbf{A}_P \vDash \psi \iff [\psi]_T \in P)$. Por ello, como $1^T, [\neg\varphi_0]_T \in P$, entonces tenemos que $\mathbf{A}_P \vDash \neg\varphi_0$ y $\forall \psi \in \Sigma,\ \mathbf{A}_P \vDash \psi$. Esto significa, entonces, que por def. $\mathbf{A}_P$ es un modelo de la teoría $T = (\Sigma, \tau)$

Como $\mathbf{A}_P$ es un modelo de la teoría T y $T \vDash \varphi_0$, entonces $\mathbf{A}_P \vDash \varphi_0$. Luego, llegamos a un absurdo, que vino de suponer $T \nvdash \varphi_0$, dado que $\mathbf{A}_P \vDash \neg\varphi_0$ también. Por ello, $T \vdash \varphi_0$ y se demuestra. ∎