Estructuras y su lenguaje elemental asociado

En la Guia 6 desarrollamos a manera intuitiva un tipo de formulas y pruebas muy particulares asociadas con los reticulados cuaterna. Les llamamos formulas elementales y pruebas elementales por lo basicas y simples que son. En esta guia haremos lo mismo con las otras estructuras que venimos trabajando y con algunas nuevas. Esto dejara el terreno listo para hacer en la Guia 8 un tratamiento general del concepto de estructura y su lenguaje elemental.

Es importante notar que las estructuras que hemos estudiado en las guias previas son todas de un formato similar, a saber uplas formadas por una primera coordenada que es un conjunto no vacio (llamado el universo de la estructura) y luego ciertas relaciones, operaciones y elementos distinguidos, dependiendo del caso. Otra cosa importante a notar es que para cada tipo de estructura hay ciertos simbolos fijos que usamos en forma generica para denotar sus relaciones, operaciones y elementos distinguidos. Por ejemplo:

- Para los posets usamos el simbolo $\leq$ para denotar la relacion (2-aria) de orden parcial en un sentido generico.
- Para el caso de los reticulados terna usamos en forma generica los simbolos s e i para denotar sus operaciones (2-arias) supremo e infimo
- Para el caso de los reticulados acotados usamos en forma generica los simbolos s e i para denotar sus operaciones (2-arias) supremo e infimo y los numerales 0 y 1 para denotar sus elementos distinguidos, a saber maximo y minimo respectivamente.
- Para el caso de los reticulados complementados usamos en forma generica los simbolos s e i para denotar sus operaciones (2-arias) supremo e infimo, el simbolo c para denotar su operacion (1-aria) de complementacion y los numerales 0 y 1 para denotar sus elementos distinguidos, a saber maximo y minimo respectivamente.
- Para el caso de los reticulados cuaterna usamos en forma generica los simbolos s e i para denotar sus operaciones (2-arias) supremo e infimo y el simbolo $\leq$ para denotar su relacion (2-aria) de orden parcial

Para el caso de los reticulados cuaterna, estos simbolos (s, i y $\leq$) son justamente los que intervienen (aparte de los simbolos clasicos) en la construccion de las formulas elementales. Es decir que para dar nuestra definicion de formula elemental para alguno de estos otros tipos de estructura, usaremos la misma idea, es decir seran aquellas formulas que se pueden construir (de forma adecuada) usando solo los simbolos distinguidos del tipo de estructura en cuestion mas simbolos de la lista de simbolos clasicos

- $\forall\ \exists\ \neg\ \vee\ \wedge\ \rightarrow \leftrightarrow\ (\ ,\ )\ =$
- $x, y, z, w, ...$

- $a, b, c, d, ...$

Describiremos un poco mas en detalle el caso de los posets. Ya que no tenemos en los posets operaciones distinguidas, solo esta distinguida la relacion binaria $\leq$, los *terminos elementales de posets* seran las variables y los nombres de elementos fijos. Y las *formulas elementales de posets* se definen con las siguientes clausulas:

- Si t y s son terminos elementales de posets, entonces la palabra $(t = s)$ es una formula elemental de posets
- Si t y s son terminos elementales de posets, entonces la palabra $(t \leq s)$ es una formula elemental de posets
- Si φ_1 y φ_2 son formulas elementales de posets, entonces $(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$ es una formula elemental de posets
- Si φ_1 y φ_2 son formulas elementales de posets, entonces $(\varphi_1 \vee \varphi_2)$ es una formula elemental de posets
- Si φ_1 y φ_2 son formulas elementales de posets, entonces $(\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2)$ es una formula elemental de posets
- Si φ_1 y φ_2 son formulas elementales de posets, entonces $(\varphi_1 \rightarrow \varphi_2)$ es una formula elemental de posets
- Si φ es una formula elemental de posets, entonces $\neg\varphi$ es una formula elemental de posets
- Si φ es una formula elemental de posets, entonces las palabras

  $$\forall x\varphi \quad \forall y\varphi \quad \forall z\varphi \quad ...$$

  son formulas elementales de posets
- Si φ es una formula elemental de posets, entonces las palabras

  $$\exists x\varphi \quad \exists y\varphi \quad \exists z\varphi \quad ...$$

  son formulas elementales de posets
- Una palabra es una formula elemental de posets si y solo si se puede construir usando las clausulas anteriores

Notese que cada formula elemental de posets es una formula elemental de reticulados cuaterna pero obviamente no al revez.

Ejercicio 1: De una formula elemental de posets que tenga dos variables libres x e y la cual "diga" existe el supremo del conjunto $\{x, y\}$

Ejercicio 2: De una formula elemental de posets que tenga dos variables libres x e y la cual "diga" x es cubierto por y

Ejercicio 3: De una sentencia elemental de posets la cual sea verdadera en un poset $(P, \leq)$ si y solo si $(P, \leq)$ es isomorfo a $(\{2,4,8\}, |)$

Ejercicio 4: De una sentencia elemental de posets la cual sea verdadera en un poset $(P, \leq)$ si y solo si $(P, \leq)$ es un reticulado par

Ejercicio 5: De una sentencia elemental de posets la cual sea verdadera en un poset $(P, \leq)$ si y solo si $(P, \leq)$ es un reticulado par cuyo reticulado terna asociado es distributivo

Veamos ahora el caso de los reticulados complementados. Ya que en estas estructuras tenemos tres operaciones distinguidas, denotadas con s, i y c y ademas tenemos dos elementos distinguidos, denotados con los numerales 0 y 1, los *terminos elementales de reticulados complementados* seran dados por las siguientes clausulas

- Los numerales 0 y 1 son terminos elementales de reticulados complementados
- Cada variable es un termino elemental de reticulados complementados
- Cada nombre de elemento fijo es un termino elemental de reticulados complementados
- Si t es un termino elemental de reticulados complementados, entonces $c(t)$ es un termino elemental de reticulados complementados
- Si t y s son terminos elementales de reticulados complementados, entonces $(t \mathsf{\ s\ } s)$ es un termino elemental de reticulados complementados
- Si t y s son terminos elementales de reticulados complementados, entonces $(t \mathsf{\ i\ } s)$ es un termino elemental de reticulados complementados
- Una palabra es un termino elemental de reticulados complementados si y solo si se puede construir usando las clausulas anteriores

Deberia quedar claro que arriba $c(t)$ denota el resultado de concatenar las 4 siguientes palabras

$$c \qquad (\qquad t \qquad)$$

es decir que $c(t)$ es una palabra de longitud $|t| + 3$. Algunos ejemplos:

- $(0 \mathsf{\ s\ } c(y))$
- $c(0)$
- $c((x \mathsf{\ s\ } y) \mathsf{\ s\ } z))$

- $(c(a) \mathsf{s}\, z) \mathsf{i}\, x)$

- $c(c(c(b)))$

Las siguientes clausulas definen el concepto de *formula elemental de reticulados complementados*

- Si t y s son terminos elementales de reticulados cuaterna, entonces la palabra $(t = s)$ es una formula elemental de reticulados cuaterna

- Si φ_1 y φ_2 son formulas elementales de reticulados cuaterna, entonces $(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$ es una formula elemental de reticulados cuaterna

- Si φ_1 y φ_2 son formulas elementales de reticulados cuaterna, entonces $(\varphi_1 \vee \varphi_2)$ es una formula elemental de reticulados cuaterna

- Si φ_1 y φ_2 son formulas elementales de reticulados cuaterna, entonces $(\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2)$ es una formula elemental de reticulados cuaterna

- Si φ_1 y φ_2 son formulas elementales de reticulados cuaterna, entonces $(\varphi_1 \rightarrow \varphi_2)$ es una formula elemental de reticulados cuaterna

- Si φ es una formula elemental de reticulados cuaterna, entonces $\neg\varphi$ es una formula elemental de reticulados cuaterna

- Si φ es una formula elemental de reticulados cuaterna, entonces las palabras
$$\forall x\varphi \quad \forall y\varphi \quad \forall z\varphi \quad ...$$
son formulas elementales de reticulados cuaterna

- Si φ es una formula elemental de reticulados cuaterna, entonces las palabras
$$\exists x\varphi \quad \exists y\varphi \quad \exists z\varphi \quad ...$$
son formulas elementales de reticulados cuaterna

- Una palabra es una formula elemental de reticulados cuaterna si y solo si se puede construir usando las clausulas anteriores

Notese que por ejemplo la palabra $(x \leq y)$ no es una formula elemental de reticulados complementados y esto es debido a que el orden parcial de un reticulado complementado no es una de sus “relaciones distinguidas”.

Ejercicio 6: (a) De una sentencia elemental de reticulados complementados la cual sea verdadera en un reticulado complementado $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, c, 0, 1)$ si y solo si $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ es distributivo.

(b) De una formula elemental de reticulados complementados que tenga a x e y como sus unicas variables libres y la cual “diga” x es menor o igual a y en $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, c, 0, 1)$.

Ejercicio 7: (a) Defina el concepto de *termino elemental de reticulados terna*

(b) Defina el concepto de *formula elemental de reticulados terna*

Ejercicio 8: (a) Defina el concepto de *termino elemental de reticulados acotados*

(b) Defina el concepto de *formula elemental de reticulados acotados*

Ejercicio 9: (a) De una sentencia elemental de reticulados acotados la cual sea verdadera en un reticulado acotado $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)$ si y solo todo elemento de L tiene un complemento en $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)$.

(b) De una formula elemental de reticulados complementados que tenga a x como su unica variable libre y la cual "diga" x es complementado en $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)$.

A continuacion daremos otros tres tipos de estructuras y describiremos rapidamente como son sus formulas elementales.

Grafos y sus formulas elementales

Un *grafo* es un par (G, r) donde G es un conjunto no vacio y r es una relacion binaria sobre G tal que:

- $(x, x) \notin r$, cualesquiera sea $x \in G$

- Si $(x, y) \in r$, entonces $(y, x) \in r$, cualesquiera sean $x, y \in G$ (es decir, r es una relacion simetrica con respecto a G)

Hay varias presentaciones del concepto de grafo no dirigido pero el lector no tardara en darse cuenta que estas estructuras son equivalentes a las que el haya estudiado bajo el nombre de grafos no dirigidos. Los elementos de G son llamados los *vertices* de (G, r). Cuando $(x, y) \in r$ diremos que x e y son *adyacentes* o *estan conectados*.

Dado que no hay operaciones distinguidas en este tipo de estructuras, los *terminos elementales de grafos* seran las variables y los nombres de elementos fijos. Para las formulas elementales de grafos escribiremos $r(x, y)$ para expresar que $(x, y) \in r$. Con esta convencion las *formulas elementales de grafos* se definen con las siguientes clausulas:

- Si t y s son terminos elementales de grafos, entonces la palabra $(t = s)$ es una formula elemental de grafos

- Si t y s son terminos elementales de grafos, entonces la palabra $r(t, s)$ es una formula elemental de grafos

- Si φ_1 y φ_2 son formulas elementales de grafos, entonces $(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$ es una formula elemental de grafos

- Si φ_1 y φ_2 son formulas elementales de grafos, entonces $(\varphi_1 \vee \varphi_2)$ es una formula elemental de grafos
- Si φ_1 y φ_2 son formulas elementales de grafos, entonces $(\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2)$ es una formula elemental de grafos
- Si φ_1 y φ_2 son formulas elementales de grafos, entonces $(\varphi_1 \rightarrow \varphi_2)$ es una formula elemental de grafos
- Si φ es una formula elemental de grafos, entonces $\neg\varphi$ es una formula elemental de grafos
- Si φ es una formula elemental de grafos, entonces las palabras

  $$\forall x\varphi \quad \forall y\varphi \quad \forall z\varphi \quad ...$$

  son formulas elementales de grafos
- Si φ es una formula elemental de grafos, entonces las palabras

  $$\exists x\varphi \quad \exists y\varphi \quad \exists z\varphi \quad ...$$

  son formulas elementales de grafos
- Una palabra es una formula elemental de grafos si y solo si se puede construir usando las clausulas anteriores

Deberia quedar claro que arriba $r(t,s)$ denota el resultado de concatenar las 6 siguientes palabras

$$r \qquad (\qquad t \qquad , \qquad s \qquad)$$

es decir que $r(t,s)$ es una palabra de longitud $|t| + |s| + 4$.

Veamos algunas definiciones basicas de grafos. Dado un grafo (G,r) y $x \in G$ la *valencia* de x es el cardinal del conjunto $\{y : (x,y) \in r\}$. Diremos que un subconjunto $S \subseteq G$ es una *clique* cuando se de que $(x,y) \in r$ cada ves que x, y sean elementos distintos de S. Dado $n \geq 2$, un *n-ciclo* de (G,r) sera una sucecion $x_1, x_2, ..., x_n$ la cual cumpla que

- x_i es distinto de x_j, siempre que i sea distinto de j
- $(x_i, x_{i+1}) \in r$, para $i = 1, ..., n-1$
- $(x_n, x_1) \in r$

Algunos ejercicios:

Ejercicio 10: De una formula elemental de grafos que tenga a x como su unica variable libre la cual "diga" x tiene valencia 3

Ejercicio 11: De un sentencia elemental de grafos que sea verdadera en un grafo (G,r) si y solo si (G,r) no tiene cliques de cardinal 4

Ejercicio 12: De un sentencia elemental de grafos que sea verdadera en un grafo (G,r) si y solo si (G,r) no tiene 4-ciclos

Grafos bicoloreados y sus formulas elementales

Recordemos que dado un grafo (G, r), un *coloreo de* (G, r) es una asignacion de colores a cada elemento de G de manera que nunca dos elementos de G que esten relacionados tengan el mismo color. En el caso que solo usemos dos colores, le llamaremos un *bicoloreo de* (G, r). Notese que un bicoloreo puede ser representado con un subconjunto de G. Por ejemplo si el bicoloreo coloreaba a los elementos de G con dos colores, verde y rojo, podemos tomar $R = \{g \in G : g$ es rojo$\}$ y esto determina nuestro bicoloreo ya que $G - R$ sera justamente el conjunto de elemenos verdes. O sea que matematicamente hablando podemos dar la siguiente definicion. Un *bicoloreo de* (G, r) es un subconjunto R de G el cual cumple:

- Cualesquiera sean $x, y \in G$ se tiene que si $(x, y) \in r$, entonces se da alguna de las siguientes condiciones:

  (a) $x \in R$ y $y \notin R$

  (b) $x \notin R$ y $y \in R$

Esto nos inspira para dar la definicion de un nuevo tipo de estructura.

Un *grafo bicoloreado* es una terna (G, r, R), donde (G, r) es un grafo y R es un bicoloreo de (G, r). Algunos ejemplos:

- $(\{1, 2\}, \{(1, 2), (2, 1)\}, \{1\})$ es un grafo bicoloreado

- Tomemos

$$\begin{aligned} G &= \omega \\ r &= \{(x, x+1) : x \in \omega\} \cup \{(x+1, x) : x \in \omega\} \\ R &= \{x \in \omega : x \text{ es par}\} \end{aligned}$$

  Entonces (G, r, R) es un grafo bicoloreado

- $(\{1, 2, 3, 4\}, \emptyset, R)$ es un grafo bicoloreado, cualesquera sea $R \subseteq \{1, 2, 3, 4\}$

Para escribir las formulas elementales de grafos bicoloreados, pensaremos a R como una "relacion unaria" y escribiremos $R(x)$ para expresar que $x \in R$. Asi como cuando escribimos $r(x, y)$ pensamos "x e y estan conectados", cuando escribamos $R(x)$ pensaremos "x es rojo". Dejamos al lector la definicion de *terminos elementales de grafos bicoloreados* y de *formulas elementales de grafos bicoloreados*.

Algunos ejemplos de formulas elementales de grafos bicoloreados:

- $(R(a) \wedge r(x, y))$

- $\exists z(r(a, z) \rightarrow R(z))$

- $\forall y r(a, y)$

- $\forall x \forall y((R(x) \wedge R(y)) \rightarrow (x = y))$

- $\exists x \forall z(\neg R(z) \rightarrow r(x, z))$

- $\forall x \forall y(r(x, y) \rightarrow (R(x) \leftrightarrow \neg R(y)))$

- $\forall x \forall y \forall z\ (((x = y) \wedge (y = z)) \rightarrow (x = z))$

Algunos ejercicios:

Ejercicio 13: Pruebe que si un grafo (G, r) tiene un 3-ciclo, entonces no puede ser bicoloreado.

Ejercicio 14: Notese que si en un grafo bicoloreado (G, r, R) existe un elemento x el cual esta relacionado con todos los otros elementos, entonces ningun par de elementos distintos de x estan relacionados. Escriba una sentencia elemental de grafos bicoloreados que exprese esta propiedad.

Median algebras y sus formulas elementales

Una *median algebra* es un par (A, M) donde A es un conjunto no vacio, M es una operacion 3-aria sobre A (i.e. $M : A^3 \rightarrow A$) y se cumplen:

1. $M(x, y, z) = M(x, z, y)$, cualesquiera sean $x, y, z \in A$
2. $M(x, y, z) = M(y, z, x)$, cualesquiera sean $x, y, z \in A$
3. $M(x, x, y) = x)$, cualesquiera sean $x, y \in A$
4. $M(M(x, y, z), u, v)) = M(x, M(y, u, v), M(z, u, v))$, cualesquiera sean $x, y, z, u, v \in A$

Por ejemplo si tomamos un reticulado terna $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ y definimos $M(x, y, z) = (x \mathrel{\mathsf{i}} y) \mathrel{\mathsf{s}} (x \mathrel{\mathsf{i}} z) \mathrel{\mathsf{s}} (y \mathrel{\mathsf{i}} z)$, para cada $x, y, z \in L$, entonces (L, M) es una median algebra. Estas estructuras han sido extensivamente estudiadas y tienen un roll importante en la informatica teorica.

Ya que hay una unica operacion distinguida la cual denotamos genericamente con la letra M, los *terminos elementales de median algebras* seran dados por las siguientes clausulas

- Cada variable es un termino elemental de reticulados complementados

- Cada nombre de elemento fijo es un termino elemental de reticulados complementados

- Si t_1, t_2, t_3 son terminos elementales de median algebras, entonces $M(t_1, t_2, t_3)$ es un termino elemental de median algebras

- Una palabra es un termino elemental de median algebras si y solo si se puede construir usando las clausulas anteriores

Deberia quedar claro que arriba $M(t_1, t_2, t_3)$ denota el resultado de concatenar las 8 siguientes palabras

$$M \quad (\quad t_1 \quad , \quad t_2 \quad , \quad t_3 \quad)$$

es decir que $M(t_1, t_2, t_3)$ es una palabra de longitud $|t_1| + |t_2| + |t_3| + 5$. Algunos ejemplos:

- $M(x, y, z)$
- $M(M(a, a, a), a, a)$
- $M(a, b, M(M(M(x, y, z), u, v), x, a)$
- x
- a

Ahora seguramente el lector no tendra problema de definir las formulas elementales de median algebras. Algunos ejemplos:

- $\exists x \exists y(M(x, y, z) = z)$
- $\forall x \forall y \forall z((M(x, y, a) = M(x, y, b)) \rightarrow (a = b))$
- $\forall x \forall y(M(x, y, y) = y)$

Ejercicio 15: Defina el concepto de *formula elemental de median algebras*

Distintos tipos de estructuras y sus pruebas elementales

Ya tenemos una buena cantidad de tipos de estructuras y para cada tipo hemos definido el concepto de formula elemental. Ahora definiremos el concepto de prueba elemental asociado a cada tipo de estructura. Obviamente nos inspiraremos en nuestro concepto ya definido, y trabajado en la Guia 6, de prueba elemental de reticulado cuaterna. Primero es importante notar que para hablar del concepto de prueba elemental relativo a un tipo de estructura debemos tener un conjunto de sentencias elementales las cuales axiomaticen a tal tipo de estructura. A continuacion daremos para cada tipo de estructura un conjunto de axiomas. El lector no tendra problemas en corroborar que dichos conjuntos de axiomas caracterizan en cada caso al tipo de estructura en cuestion.

Axiomas elementales de posets

1. $\forall x(x \leq x)$
2. $\forall x \forall y \forall z((x \leq y \wedge y \leq z) \rightarrow x \leq z)$
3. $\forall x \forall y((x \leq y \wedge y \leq x) \rightarrow x = y)$

Axiomas elementales de reticulados terna

1. $\forall x(x \mathsf{s} x = x)$
2. $\forall x(x \mathsf{i} x = x)$
3. $\forall x \forall y(x \mathsf{s} y = y \mathsf{s} x)$
4. $\forall x \forall y(x \mathsf{i} y = y \mathsf{i} x)$
5. $\forall x \forall y \forall z((x \mathsf{s} y) \mathsf{s} z = x \mathsf{s} (y \mathsf{s} z))$
6. $\forall x \forall y \forall z((x \mathsf{i} y) \mathsf{i} z = x \mathsf{i} (y \mathsf{i} z))$
7. $\forall x \forall y(x \mathsf{s} (x \mathsf{i} y) = x)$
8. $\forall x \forall y(x \mathsf{i} (x \mathsf{s} y) = x)$

Axiomas elementales de reticulados acotados

1. $\forall x(x \mathsf{s} x = x)$
2. $\forall x(x \mathsf{i} x = x)$
3. $\forall x \forall y(x \mathsf{s} y = y \mathsf{s} x)$
4. $\forall x \forall y(x \mathsf{i} y = y \mathsf{i} x)$
5. $\forall x \forall y \forall z((x \mathsf{s} y) \mathsf{s} z = x \mathsf{s} (y \mathsf{s} z))$
6. $\forall x \forall y \forall z((x \mathsf{i} y) \mathsf{i} z = x \mathsf{i} (y \mathsf{i} z))$
7. $\forall x \forall y(x \mathsf{s} (x \mathsf{i} y) = x)$
8. $\forall x \forall y(x \mathsf{i} (x \mathsf{s} y) = x)$
9. $\forall x(0 \mathsf{s} x = x)$
10. $\forall x(x \mathsf{s} 1 = 1)$

Axiomas elementales de reticulados complementados

1. $\forall x(x \mathsf{\ s\ } x = x)$
2. $\forall x(x \mathsf{\ i\ } x = x)$
3. $\forall x \forall y(x \mathsf{\ s\ } y = y \mathsf{\ s\ } x)$
4. $\forall x \forall y(x \mathsf{\ i\ } y = y \mathsf{\ i\ } x)$
5. $\forall x \forall y \forall z((x \mathsf{\ s\ } y) \mathsf{\ s\ } z = x \mathsf{\ s\ } (y \mathsf{\ s\ } z))$
6. $\forall x \forall y \forall z((x \mathsf{\ i\ } y) \mathsf{\ i\ } z = x \mathsf{\ i\ } (y \mathsf{\ i\ } z))$
7. $\forall x \forall y(x \mathsf{\ s\ } (x \mathsf{\ i\ } y) = x)$
8. $\forall x \forall y(x \mathsf{\ i\ } (x \mathsf{\ s\ } y) = x)$
9. $\forall x(0 \mathsf{\ s\ } x = x)$
10. $\forall x(x \mathsf{\ s\ } 1 = 1)$
11. $\forall x(x \mathsf{\ s\ } c(x) = 1)$
12. $\forall x(x \mathsf{\ i\ } c(x) = 0)$

Axiomas elementales de grafos

1. $\forall x \neg r(x, x)$
2. $\forall x \forall y(r(x, y) \to r(y, x))$

Axiomas elementales de grafos bicoloreados

1. $\forall x \neg r(x, x)$
2. $\forall x \forall y(r(x, y) \to r(y, x))$
3. $\forall x \forall y(r(x, y) \to ((R(x) \wedge \neg R(y)) \vee (\neg R(x) \wedge R(y))))$

Axiomas elementales de median algebras

1. $\forall x \forall y \forall z(M(x, y, z) = M(x, z, y))$
2. $\forall x \forall y \forall z(M(x, y, z) = M(y, z, x))$
3. $\forall x \forall y(M(x, x, y) = x)$
4. $\forall x \forall y \forall z \forall u \forall v(M(M(x, y, z), u, v)) = M(x, M(y, u, v), M(z, u, v)))$

Ahora que tenemos para cada tipo de estructura sus axiomas elementales podemos describir el concepto de *prueba elemental* relativo a un tipo de estructura. Por supuesto las pruebas elementales prueban cierta sentencia elemental de dicho tipo, la cual debera obviamente ser verdadera en todas las estructuras de tal tipo. Deberan poseer ademas las siguientes caracteristicas:

(1) El enunciado a probar debe ser una sentencia elemental del tipo en cuestion (sin nombres de elementos fijos).

(2) En la prueba se parte de una estructura del tipo en cuestion, fija pero arbitraria en el sentido que lo unico que sabemos es que ella satisface los axiomas elementales correspondientes y ademas esta es la unica informacion particular que podemos usar.

(3) Las deducciones en la prueba son muy simples y obvias de justificar con minimas fraces en castellano

(4) En la escritura de la prueba lo concerniente a la matematica misma se expresa usando solo sentencias elementales del tipo de estructura en cuestion

Dado que en una prueba se parte de una estructura fija de la que solo se asume que satisface los axiomas elementales, la sentencia elemental probada debe ser verdadera en todas las estructuras del tipo en cuestion.

Veamos algunos ejemplos. Sea

$$\mu = \forall x \forall y \left((\forall z \ z \leq x \wedge \forall z \ z \leq y) \rightarrow x = y \right)$$

Notese que μ es una sentencia elemental de posets la cual se cumple en todos los posets ya que ella expresa que si en un poset x e y son elementos maximos, entonces $x = y$. Veamos una prueba elemental de μ. Notar que, tal como lo aclara el item (2) arriba, debemos partir de un poset $(P, \leq)$, fijo pero arbitrario y solo usar la informacion que nos brindan los axiomas.

Proof. Sean $a, b \in P$ fijos pero arbitrarios. Supongamos

$$(\forall z \ z \leq a \wedge \forall z \ z \leq b)$$

En particular $\forall z \ z \leq b$ nos dice que $a \leq b$ y $\forall z \ z \leq a$ nos dice que $b \leq a$, por lo cual tenemos que

$$a \leq b \wedge b \leq a$$

Pero el axioma

$$\forall x \forall y ((x \leq y \wedge y \leq x) \rightarrow x = y)$$

nos dice que

$$(a \leq b \wedge b \leq a) \rightarrow a = b$$

obteniendo de esta forma que $a = b$. O sea que hemos probado que

$$(\forall z \ z \leq a \wedge \forall z \ z \leq b) \rightarrow a = b$$

Como a y b eran elementos fijos pero arbitrarios, obtenemos que vale μ ■

Ejercicio 16: De pruebas elementales de posets de las siguientes sentencias

(a) $\exists x \exists y\ (\neg(x = y)) \to \exists x \exists y\ (\neg(x \leq y))$

(b) $\forall x \forall y \forall z\ (x \leq y \wedge y \leq z \wedge x = z \to x = y)$

(c) $(\forall x \exists y(\neg(x = y) \wedge x \leq y) \to \exists x \exists y \exists z(\neg(x = y) \wedge \neg(x = z) \wedge \neg(y = z))$

A continuacion daremos una prueba elemental de reticulados terna de la sentencia $\eta = \forall x \forall y(x \mathsf{\ s\ } y = y \to x \mathsf{\ i\ } y = x)$. Notar que, tal como lo aclara el item (2) de la descripcion de prueba elemental, debemos partir de un reticulado terna $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$, fijo pero arbitrario y solo usar la informacion que nos brindan los axiomas.

Proof. Sean $a, b \in L$ fijos pero arbitrarios. Supongamos

$$(a \mathsf{\ s\ } b = b)$$

El axioma

$$\forall x \forall y(x \mathsf{\ i\ } (x \mathsf{\ s\ } y) = x)$$

nos dice que

$$a \mathsf{\ i\ } (a \mathsf{\ s\ } b) = a$$

O sea que reemplazando en esta igualdad $a \mathsf{\ s\ } b$ por b obtenemos:

$$a \mathsf{\ i\ } b = a$$

Ya que habiamos supuesto que $a \mathsf{\ s\ } b = b$ hemos probado en realidad que

$$a \mathsf{\ s\ } b = b \to a \mathsf{\ i\ } b = a$$

Como a y b eran elementos fijos pero arbitrarios, obtenemos que vale $\forall x \forall y(x \mathsf{\ s\ } y = y \to x \mathsf{\ i\ } y = x)$ ■

Ejercicio 17: Notese que las sentencias elementales de reticulados terna son sentencias elementales de reticulados cuaterna tambien. Explique por que la prueba elemental de reticulados terna de arriba no es una prueba elemental de reticulados cuaterna.

Ejercicio 18: Sean

$$Dis_1 = \forall x \forall y \forall z(x \mathsf{\ i\ } (y \mathsf{\ s\ } z) = (x \mathsf{\ i\ } y) \mathsf{\ s\ } (x \mathsf{\ i\ } z))$$
$$Dis_2 = \forall x \forall y \forall z(x \mathsf{\ s\ } (y \mathsf{\ i\ } z) = (x \mathsf{\ s\ } y) \mathsf{\ i\ } (x \mathsf{\ s\ } z))$$

De una prueba elemental de reticulados terna de la sentencia $(Dis_1 \to Dis_2)$.

Encontrar pruebas elementales de reticulados terna tiene cierta dificultad ya que solo podemos usar los axiomas de reticulados terna y ademas no podemos escribir el simbolo $\leq$. De todas maneras podemos escribir $t \mathsf{s} s = s$ en lugar de $t \leq s$ y de esta manera simular en nuestras formulas elementales de reticulados terna al simbolo $\leq$. De todas maneras el escollo que tendremos es que de los axiomas de reticulados terna no es obvio que las operaciones s e i sean supremo e infimo respecto del orden dado por la ecuacion $x \mathsf{s} y = y$. Esto puede ser resuelto si nos inspiramos en la prueba del Teorema de Dedeking pero de todas maneras las pruebas se complican un poco en su escritura.

Tambien tenemos el problema de no poder escribir el simbolo $\leq$ en las pruebas elementales de reticulados acotados y tambien el escollo de que los axiomas no hacen referencia obvia a que las operaciones s e i sean operaciones supremo e infimo respecto del orden dado por la ecuacion $x \mathsf{s} y = y$. Sin envargo muchas pruebas elementales se pueden hacer en forma natural. Por ejemplo, notar que toda prueba elemental de reticulados terna es tambien una prueba elemental de reticulados acotados, por lo cual tenemos pruebas elementales de reticulados acotados de las sentencias

$$\forall x \forall y (x \mathsf{s} y = y \rightarrow x \mathsf{i} y = x)$$
$$(Dis_1 \rightarrow Dis_2)$$

Veamos una prueba elemental de reticulados acotados de la sentencia $\forall x (x \mathsf{i} 1 = x)$. Notar que, tal como lo aclara el item (2) de la descripcion de prueba elemental, debemos partir de un reticulado acotado $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)$, fijo pero arbitrario y solo usar la informacion que nos brindan los axiomas de reticulados acotados.

Proof. Sea $a \in L$ fijo pero arbitrario. El axioma

$$\forall x (x \mathsf{s} 1 = 1)$$

nos dice que

$$a \mathsf{s} 1 = 1$$

Ya que

$$\forall x \forall y (x \mathsf{s} y = y \rightarrow x \mathsf{i} y = x)$$

(teorema ya probado) tenemos que

$$a \mathsf{s} 1 = 1 \rightarrow a \mathsf{i} 1 = a$$

O sea que

$$a \mathsf{i} 1 = a$$

Ya que a era arbitrario, hemos probado que

$$\forall x (x \mathsf{i} 1 = x)$$

■

Notese que si realmente queremos tener la prueba elemental completa de $\forall x(x \mathsf{\ i\ } 1 = x)$ deberiamos agregar en la prueba anterior las lineas correspondientes a la prueba de $\forall x \forall y(x \mathsf{\ s\ } y = y \rightarrow x \mathsf{\ i\ } y = x)$.

Ejercicio 19: Inspirese en los resultados dados en la Guia 5 para dar una pruebas elementales de reticulados complementados de las siguientes sentencias elementales:

(a) $Dis_1 \rightarrow \forall x \forall u \forall v((x \mathsf{\ s\ } u = 1 \wedge x \mathsf{\ i\ } u = 0 \wedge x \mathsf{\ s\ } v = 1 \wedge x \mathsf{\ i\ } v = 0) \rightarrow u = v)$

(b) $Dis_1 \rightarrow \forall x \forall u((x \mathsf{\ s\ } u = 1 \wedge x \mathsf{\ i\ } u = 0) \rightarrow u = c(x))$

(c) $Dis_1 \rightarrow \forall x \forall y(c(x \mathsf{\,i\,} y) = c(x) \mathsf{\,s\,} c(y))$

Es dificil encontrar pruebas elementales de grafos que no sean complicadas. Aceptando cierto grado de complejidad hay muchas. Un dato interesante es que el conjunto de sentencias elementales de grafos que tienen una prueba elemental es no recursivo, es decir no hay un procedimiento efectivo que decida si una sentencia elemental de grafos dada tiene una prueba elemental. Esto habla acerca de cuan complicada puede ser la estructura o fisonomia de las sentencias elementales de grafos que pueden ser probadas elementalmente.

Tambien es dificil encontrar pruebas elementales de median algebras que no sean complicadas. Veamos una prueba elemental de median algebras de la sentencia $\forall x \forall y(M(x, y, y) = y)$. Notar que, tal como lo aclara el item (2) de la descripcion de prueba elemental, debemos partir de una median algebra (A, M), fija pero arbitraria y solo usar la informacion que nos brindan los axiomas de median algebras.

Proof. Sean $a, b \in A$ fijos pero arbitarrios. Por el axioma $\forall x \forall y \forall z(M(x, y, z) = M(y, z, x))$ tenemos que

$$M(a, b, b) = M(b, b, a)$$

Por el axioma $\forall x \forall y(M(x, x, y) = x)$ tenemos que

$$M(b, b, a) = b$$

O sea que

$$M(a, b, b) = b$$

Ya que a, b eran arbitarios, hemos probado que $\forall x \forall y(M(x, y, y) = y)$ ■

Veamos una prueba elemental de grafos bicoloreados de la sentencia $\forall x \forall y((r(x, y) \wedge R(x)) \rightarrow \neg R(y))$.

Proof. Sean $a, b \in G$ fijos pero arbitarios. Supongamos $r(a, b) \wedge R(a)$. En particular tenemos que se da $r(a, b)$. Por el axioma $\forall x \forall y(r(x, y) \rightarrow ((R(x) \wedge$

$\neg R(y)) \vee (\neg R(x) \wedge R(y))))$ tenemos que $r(a,b) \rightarrow ((R(a) \wedge \neg R(b)) \vee (\neg R(a) \wedge R(b)))$, por lo cual tenemos que $((R(a) \wedge \neg R(b)) \vee (\neg R(a) \wedge R(b)))$. Pero ya que se da $R(a)$, tenemos que no puede darse $(\neg R(a) \wedge R(b))$, por lo cual obtenemos que se da $(R(a) \wedge \neg R(b))$. Esto en particular nos dice que se da $\neg R(b)$. O sea que hemos probado que $(r(a,b) \wedge R(a)) \rightarrow \neg R(b)$. Ya que a y b eran arbitrarios tenemos que vale $\forall x \forall y((r(x,y) \wedge R(x)) \rightarrow \neg R(y))$. ■

Ejercicio 20: De pruebas elementales de grafos bicoloreados de las sentencias

(a) $\forall x \forall y((r(x,y) \wedge \neg R(x)) \rightarrow R(y))$

(b) $\forall x\ ((R(x) \wedge \forall z(\neg(z = x) \rightarrow r(x,z))) \rightarrow \forall u\ (\neg(u = x) \rightarrow \neg R(u)))$

(c) $\forall x\ (\forall z(\neg(z = x) \rightarrow r(x,z)) \rightarrow \forall u \forall v((\neg(u = x) \wedge \neg(v = x)) \rightarrow \neg r(u,v)))$

Ejercicio 21: (O) Defina el concepto de *grafo tricoloreado* como una cuatrupla (G,r,R,V), donde (G,r) es un grafo y ..... Describa informalmente cuales serian las sentencias elementales de grafos tricoloreados, encuentre sentencias elementales que los axiomaticen y de algunas pruebas elementales de grafos tricoloreados.