# Guía 8: *Lógica matemática*

## Programa de lógica matemática

- En las siguientes guías se completará el concepto de lógica matemática con el siguiente programa:
  1. Modelo matemático del concepto de fórmula elemental de tipo $\tau$ (guía 9)
  2. Definición matemática de cuándo una fórmula elemental de tpo $\tau$ es verdadera en una estructura de tipo $\tau$ para una asignación dada de valores a las variables libres y a los nombres de constantes fijas de la fórmula (Tarski)
  3. Modelo matemático del concepto de prueba elemental en una teoría elemental de tipo $\tau$. Estas serán las pruebas formales de tipo $\tau$ (Fregue)
  4. Prueba matemática de que el concepto de prueba formal de tipo $\tau$ es una correcta modelización matemática de la idea de prueba elemental en una teoría elemental de tipo $\tau$ (Teoremas de Corrección y Completitud de Godel)

Para ello, primero veremos los conceptos para entenderlo.

## Tipos

- Para cada tipo de estructuras se distinguen *tres conjuntos de símbolos* (i.e., son de tipo *palabra*):
  - Un conjunto $\mathcal{C}$ formado por los símbolos que denotan genéricamente los elementos distinguidos de las estructuras
    - Sus elementos serán los *nombres de constante*
  - Un conjunto $\mathcal{F}$ formado por los símbolos que denotan genéricamente las operaciones de las estructuras
    - Sus elementos serán los *nombres de función*
  - Un conjunto $\mathcal{R}$ formado por los símbolos que denotan genéricamente las relaciones de las estructuras
    - Sus elementos serán los *nombres de relación*

  Para cada una de ellas, también nos importa su aridad, la cual será representada con $a : \mathcal{F} \cup \mathcal{R} \to N$.

  Por ejemplo:

  - *Posets*: $\mathcal{C} = \emptyset \quad \mathcal{F} = \emptyset \quad \mathcal{R} = \{\leq\} \quad a = \{(\leq, 2)\}$
  - *Reticulados terna*: $\mathcal{C} = \emptyset \quad \mathcal{F} = \{s, i\} \quad \mathcal{R} = \emptyset \quad a = \{(s, 2), (i, 2)\}$
  - *Reticulados acotados*: $\mathcal{C} = \{0, 1\} \quad \mathcal{F} = \{s, i\} \quad \mathcal{R} = \emptyset \quad a = \{(s, 2), (i, 2)\}$
  - *Reticulados complementados*: $\mathcal{C} = \{0, 1\} \quad \mathcal{F} = \{s, i, c\} \quad \mathcal{R} = \emptyset \quad a = \{(s, 2), (i, 2), (c, 1)\}$
  - *Reticulados cuaterna*: $\mathcal{C} = \emptyset \quad \mathcal{F} = \{s, i\} \quad \mathcal{R} = \{\leq\} \quad a = \{(s, 2), (i, 2), (\leq, 2)\}$
  - *Median algebras*: $\mathcal{C} = \emptyset \quad \mathcal{F} = \{M\} \quad \mathcal{R} = \emptyset \quad a = \{(M, 3)\}$
  - *Grafos*: $\mathcal{C} = \emptyset \quad \mathcal{F} = \emptyset \quad \mathcal{R} = \{r\} \quad a = \{(r, 2)\}$
  - *Grafos bicoloreados*: $\mathcal{C} = \emptyset \quad \mathcal{F} = \emptyset \quad \mathcal{R} = \{r, R\} \quad a = \{(r, 2), (R, 1)\}$

- Un **tipo (de primer orden)** es una 4-upla $\tau = (\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{R}, a)$ tal que:

  1. Hay alfabetos finitos $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ tales que:
     - $\mathcal{C} \subseteq \Sigma_1^+, \quad \mathcal{F} \subseteq \Sigma_2^+, \quad \mathcal{R} \subseteq \Sigma_3^+$
     - $\Sigma_i \neq \Sigma_j \forall i \neq j$
     - $\Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3$ no contiene ningún símbolo de la lista $\forall \; \exists \; \neg \; \vee \; \wedge \; \to \leftrightarrow \; ( \; ) \; , \; \equiv$ $\mathsf{X}$ *0 1 . . . 9* **0 1 . . . 9**
  2. $a : \mathcal{F} \cup \mathcal{R} \to N$ y $\forall p \in \mathcal{F} \cup \mathcal{R},\ a(p) \in N$ y es la *aridad* de $p$.
  3. Ninguna palabra de $\mathcal{C}$ (resp. $\mathcal{F}, \mathcal{R}$) es *subpalabra propia* de otra palabra de $\mathcal{C}$ (resp. $\mathcal{F}, \mathcal{R}$).

  En base a esto, algunos ejemplos de tipos son:

  - *Tipo de los posets*: $(\emptyset, \emptyset, \{\leq\}, \{(\leq, 2)\})$

- *Tipo de los reticulados terna*: $(\emptyset, \{s, i\}, \emptyset, \{(s, 2), (i, 2)\})$
- *Tipo de los reticulados acotados*: $(\{0, 1\}, \{s, i\}, \emptyset, \{(s, 2), (i, 2)\})$
- *Tipo de los reticulados complementados*: $(\{0, 1\}, \{s, i, c\}, \emptyset, \{(s, 2), (i, 2), (c, 1)\})$
- *Tipo de los reticulados cuaterna*: $(\emptyset, \{s, i\}, \{\leq\}, \{(s, 2), (i, 2), (\leq, 2)\})$
- *Tipo de las median algebras*: $(\emptyset, \{M\}, \emptyset, \{(M, 3)\})$
- *Tipo de los grafos*: $(\emptyset, \emptyset, \{r\}, \{(r, 2)\})$
- *Tipo de los grafos bicoloreados*: $(\emptyset, \emptyset, \{r, R\}, \{(r, 2), (R, 1)\})$

- Consideraremos **funciones y relaciones n-arias**:
  - $\mathcal{F}_n = \{f \in \mathcal{F} : a(f) = n\}$
  - $\mathcal{R}_n = \{r \in \mathcal{R} : a(r) = n\}$

## Estructuras de tipo $\tau$

- Sea $\tau$ un tipo, una **estructura o modelo de tipo** $\tau$ será un par $\mathbf{A} = (A, i)$ tal que:
  1. $A \neq \emptyset$
  2. $i$ es una función con dominio $\mathcal{C} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{R}$ tal que:
     1. $\forall c \in \mathcal{C},\ i(c) \in A$
     2. $\forall f \in \mathcal{F}_n\ (n \geq 1),\ i(f)$ es una operación $n$-aria
     3. $\forall r \in \mathcal{R}_n\ (n \geq 1),\ i(r)$ es una relación $n$-aria

  En este caso, $A$ es llamado el **universo** de $\mathbf{A}$, e $i$ la **función interpretación** de $\mathbf{A}$ (diremos que $i(s)$ es la intepretación de $s$ en $\mathbf{A}$ ).

## Fórmulas elementales de tipo $\tau$

- Dado un tipo $\tau = (\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{R}, a)$, los **términos elementales de tipo** $\tau$ son, sean $t_1, \ldots, t_n$ términos elementales de tipo $\tau$:
  1. Cada palabra de $\mathcal{C}$
  2. Cada variable
  3. Cada nombre de elemento fijo
  4. $f(t_1, \ldots, t_n)\ \forall f \in \mathcal{F}_n\ (n \geq 1)$

  Y solo pueden obtenerse con estas reglas.

- Las **fórmulas elementales de tipo** $\tau$ son, sean $t_1, \ldots, t_n$ términos elementales de tipo $\tau$ y $\varphi_1, \varphi_2$ fórmulas elementales de tipo $\tau$:
  1. $(t = s)$
  2. $r(t_1, \ldots, t_n)\ \forall r \in \mathcal{R}_\setminus\ (n \geq 1)$
  3. $(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$
  4. $(\varphi_1 \vee \varphi_2)$
  5. $(\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2)$
  6. $(\varphi_1 \rightarrow \varphi_2)$
  7. $\neg\varphi_1$
  8. $\forall x\varphi_1 \quad \forall y\varphi_1 \quad \forall z\varphi_1 \quad \ldots$
  9. $\exists x\varphi_1 \quad \exists y\varphi_1 \quad \exists z\varphi_1 \quad \ldots$

  Y solo pueden obtenerse con estas reglas.

- Una **sentencia elemental de tipo** $\tau$ es una fórmula elemental de tipo $\tau$ que no tiene variables libres.

- *Valores de términos y fórmulas para una estructura dada*:

- Dada un estructura $(A, i)$ de tipo $\tau$ y un término $t$ de tipo $\tau$, para que $t$ represente un valor de $A$, tenemos que asignarles valores concretos de $A$ a las variables libres y a los nombres de elementos fijos que figuran en $t$.
- Dada una estructura $(A, i)$ y una fórmula elemental $\varphi$ de tipo $\tau$, para que $\varphi$ sea verdadera o falsa tenemos que asignarles valores concretos de $A$ a las variables libres y a los nombres de elementos fijos que figuran en $\varphi$, y luego a los nombres de $\mathcal{C} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{R}$ los interpretaremos usando la función $i$.

## Teorías y pruebas elementales

### Teorías elementales

- Una **teoría elemental** es un par $(\Sigma, \tau)$ al que $\tau$ es un tipo cualquiera y $\Sigma$ es un conjunto de sentencias elementales de tipo $\tau$, las cuales no tienen nombres de elementos fijos.

  Algunos ejemplos son:

  - *Teoría elemental de los posets*: par $(\Sigma, \tau)$ donde $\tau = (\emptyset, \emptyset, \{\leq\}, \{(\leq, 2)\})$ y $\Sigma$ es el conjunto formado por las siguientes tres sentencias elementales de tipo $\tau$:
    1. $\forall x \ \leq (x, x)$
    2. $\forall x \forall y \forall z \ ((\leq (x, y) \wedge \leq (y, z)) \rightarrow \leq (x, z))$
    3. $\forall x \forall y \ ((\leq (x, y) \wedge \leq (y, x)) \rightarrow x = y)$
  - *Teoría elemental de lo reticulados terna*: par $(\Sigma, \tau)$ donde $\tau = (\emptyset, \{s, i\}, \emptyset, \{(s, 2), (i, 2)\})$ y $\Sigma$ es el conjunto formado por las siguientes sentencias elementales de tipo $\tau$:
    1. $\forall x \ (s(x, x) = x)$
    2. $\forall x \ (i(x, x) = x)$
    3. $\forall x \forall y \ (s(x, y) = s(y, x))$
    4. $\forall x \forall y \ (i(x, y) = i(y, x))$
    5. $\forall x \forall y \forall z \ (s(s(x, y), z) = s(x, s(y, z)))$
    6. $\forall x \forall y \forall z \ (i(i(x, y), z) = i(x, i(y, z)))$
    7. $\forall x \forall y \ (s(x, i(x, y)) = x)$
    8. $\forall x \forall y \ (i(x, s(x, y)) = x)$
  - *Teoría elemental de los reticulados cuaterna*: par $(\Sigma, \tau)$ donde $\tau = (\emptyset, \{s, i\}, \{\leq\}, \{(s, 2), (i, 2), (\leq, 2)\})$ y $\Sigma$ es el conjunto formado por las siguientes sentencias elementales de tipo $\tau$:
    1. $A_{\leq R} = \forall x \ \leq (x, x)$
    2. $A_{\leq T} = \forall x \forall y \forall z \ ((\leq (x, y) \wedge \leq (y, z)) \rightarrow \leq (x, z))$
    3. $A_{\leq A} = \forall x \forall y \ ((\leq (x, y) \wedge \leq (y, x)) \rightarrow x = y)$
    4. $A_{s \text{ es } C} = \forall x \forall y \ (\leq (x, s(x, y)) \wedge \leq (y, s(x, y)))$
    5. $A_{s \leq C} = \forall x \forall y \forall z \ ((\leq (x, z) \wedge \leq (y, z)) \rightarrow \leq (s(x, y), z))$
    6. $A_{i \text{ es } C} = \forall x \forall y \ (\leq (i(x, y), x) \wedge \leq (i(x, y), y))$
    7. $A_{i \geq C} = \forall x \forall y \forall z \ ((\leq (z, x) \wedge \leq (z, y)) \rightarrow \leq (z, i(x, y)))$
  - *Teoría elemental de los grafos*: par $(\Sigma, \tau)$ donde $\tau = (\emptyset, \emptyset, \{r\}, \{(r, 2)\})$ y $\Sigma$ es el conjunto formado por las siguientes sentencias elementales de tipo $\tau$:
    1. $\forall x \ \neg r(x, x)$
    2. $\forall x \forall y \ (r(x, y) \rightarrow r(y, x))$
  - *Teoría elemental de los grafos bicoloreados*: par $(\Sigma, \tau)$ donde $\tau = (\emptyset, \emptyset, \{r, R\}, \{(r, 2), (R, 1)\})$ y $\Sigma$ es el conjunto formado por las siguientes sentencias elementales de tipo $\tau$:
    1. $\forall x \ \neg r(x, x)$
    2. $\forall x \forall y \ (r(x, y) \rightarrow r(y, x))$
    3. $\forall x \forall y \ (r(x, y) \rightarrow ((R(x) \wedge \neg R(y)) \vee (\neg R(x) \wedge R(y))))$

- Un **modelo de** $(\Sigma, \tau)$ es una estructura de tipo $\tau$, la cual hace verdaderos a todos los elementos de $\Sigma$.

**Pruebas elementales**

- Dada una teoría elemental $(\Sigma, r)$ y una sentencia elemental $\varphi$ la cual no posea nombres de elementos fijos, una **prueba elemental de** $\varphi$ **en** $(\Sigma, r)$ será una prueba de $\varphi$ que posea las siguientes características:
  1. En la prueba se parte de una estructura de tipo $\tau$, fija pero arbitraria en el sentido que lo único que sabemos es qu ellas satisface los axiomas de $\Sigma$ (i.e. es un modelo de $(\Sigma, r)$ ) y además esta es la única información particular que podemos usar.
  2. Las deducciones en la prueba son muy simples y obvias de justificar con mínimas frases en castellano.
  3. En la escritura de la prueba lo concerniente a la matemática misma se expresa usando solo sentencias elementales de tipo $\tau$