Combo 2 de teoremas

Emanuel Nicolás Herrador - November 2024

Teorema de Dedekind

Sea (L, s, i) un reticulado terna. La relación binaria definida por:

$$x \leq y \iff x \ s \ y = y$$

es un orden parcial sobre L para el cual se cumple que:

$$\sup(\{x, y\}) = x \ s \ y$$
$$\inf(\{x, y\}) = x \ i \ y$$

cualesquiera sean $x, y \in L$.

Demostración

Primero, demostremos que $\leq$ es reflexiva, transitiva y antisimétrica suponiendo $x, y, z \in L$:

1. *Reflexividad*: Por reflexividad de s, tenemos $x \ s \ x = x$. Luego, por def. de $\leq$, tenemos $x \leq x$ por lo que se demuestra.
2. *Transitividad*: Sea $(x \ s \ y = y) \wedge (y \ s \ z = z)$, entonces:

$$\begin{aligned} (x \ s \ y) \ s \ (y \ s \ z) &= y \ s \ z && \\ x \ s \ (y \ s \ y) \ s \ z &= y \ s \ z && \text{Asociatividad} \\ x \ s \ y \ s \ z &= y \ s \ z && \text{Reflexividad} \\ x \ s \ (y \ s \ z) &= y \ s \ z && \text{Asociatividad} \\ x \ s \ z &= z && \text{Por suposición anterior} \end{aligned}$$

   Ahora, por def. de $\leq$, tenemos que si $x \leq y \wedge y \leq z$, entonces $x \leq z$, por lo que se demuestra.
3. *Antisimetría*: Sea $(x \ s \ y = y \wedge y \ s \ x = x)$, por conmutatividad tenemos que $x \ s \ y = y \ s \ x$. Luego, con esto llegamos a que $x = y$. Por ello, por def. de $\leq$, esto significa que si $x \leq y \wedge y \leq x$, entonces $x = y$ por lo que se demuestra.

Como $\leq$ es reflexiva, transitiva y antisimétrica, entonces por def. es un orden parcial sobre L. Con ello, solo queda ver que $\forall x, y \in L$ se cumple que $\sup(\{x, y\}) = x \ s \ y$ y que $\inf(\{x, y\}) = x \ i \ y$. Veamos ambos casos:

- $\sup(\{x, y\}) = x \ s \ y$:
  - Por reflexividad y asociatividad, tenemos que $x \ s \ y = (x \ s \ x) \ s \ y = x \ s \ (x \ s \ y)$ por lo que por def. de $\leq$, llegamos a que $x \leq x \ s \ y$. Del mismo modo, llegamos también a que $y \leq x \ s \ y$. Esto significa, entonces, que $x \ s \ y$ es una cota superior de $\{x, y\}$.
  - Sea z una cota superior de $\{x, y\}$, entonces $x \leq z \wedge y \leq z$, por lo que por def. de $\leq$ tenemos $x \ s \ z = z \wedge y \ s \ z = z$. Con ello:

$$\begin{aligned} (x \ s \ z) \ s \ (y \ s \ z) &= z \ s \ z && \\ (x \ s \ y) \ s \ (z \ s \ z) &= z \ s \ z && \text{Asociatividad y Conmutatividad} \\ (x \ s \ y) \ s \ z &= z && \text{Reflexividad} \end{aligned}$$

    Luego, por def. de $\leq$, tenemos que $x \ s \ y \leq z$, por lo que $x \ s \ y$ es la menor cota superior de $\{x, y\}$.

  Finalmente, entonces, esto significa por def. de supremo que $\sup(\{x, y\}) = x \ s \ y$, y se demuestra. ■
- $\inf(\{x, y\}) = x \ i \ y$

– Notemos que $x \leq y \overset{\text{def. } \leq}{\iff} x \ s \ y = y$. Luego, aplicando ínfimo de x a ambos, llegamos a que $x \ i \ y = x \ i \ (x \ s \ y) \overset{\text{Absorción}}{=} x$. Entonces, $x \leq y \iff x \ i \ y = x$ o, por conmutatividad, $y \ i \ x = x$ (def. alternativa del orden parcial).

– Veamos que $x \ i \ y \overset{\text{Reflexividad}}{=} (x \ i \ x) \ i \ y \overset{\text{Asociatividad}}{=} x \ i \ (x \ i \ y)$. Luego, por def. alternativa del orden parcial, $x \ i \ y \leq x$. Del mismo modo, llegamos a que $x \ i \ y \leq y$, por lo que por def. $x \ i \ y$ es una cota inferior de $\{x, y\}$.

– Sea z una cota inferior de $\{x, y\}$, entonces por def. $z \leq x \wedge z \leq y$, por lo que por def. alternativa del orden parcial, $z \ i \ x = z \wedge z \ i \ y = z$. Ahora, notemos que:

$$\begin{aligned} (z \ i \ x) \ i \ (z \ i \ y) &= z \ i \ z & & \\ (x \ i \ y) \ i \ (z \ i \ z) &= z \ i \ z & & \text{Asociatividad y Conmutatividad} \\ (x \ i \ y) \ i \ z &= z & & \text{Reflexividad} \end{aligned}$$

Luego, por def. alternativa de $\leq$, tenemos que $z \leq x \ i \ y$, por lo que $x \ i \ y$ es la mayor cota inferior de $\{x, y\}$.

Finalmente, entonces, esto significa que por la def. de ínfimo, $\inf(\{x, y\}) = x \ i \ y$.

Con todo ello, entonces, se demuestra. ■

Lema

Supongamos que $\vec{a}, \vec{b}$ son asignaciones tales que si $x_i \in Li(\varphi)$, entonces $a_i = b_i$. Entonces $\mathbf{A} \vDash \varphi[\vec{a}]$ sii $\mathbf{A} \vDash \varphi[\vec{b}]$

Demostración

Por *lema* sabemos que: Sea $\mathbf{A}$ una estructura de tipo τ y sea $t \in T^\tau$. Supongamos que $\vec{a}, \vec{b}$ son asignaciones tales que $a_i = b_i$, cada vez que x_i ocurra en t. Entonces $t^{\mathbf{A}}[\vec{a}] = t^{\mathbf{A}}[\vec{b}]$.

Vamos a demostrar por inducción en k que el lema vale $\forall \varphi \in F_k^\tau$. Suponemos $\vec{a}, \vec{b}$ asignaciones tales que si $x_i \in Li(\varphi)$, entonces $a_i = b_i$.

- *Caso base* $k = 0$: Sea $\varphi \in F_0^\tau$, entonces tenemos dos casos:

  – $\varphi = (t \equiv s)$ con $t, s \in T^\tau$: Por lema, sabemos que $t^{\mathbf{A}}[\vec{a}] = t^{\mathbf{A}}[\vec{b}]$ y que $s^{\mathbf{A}}[\vec{a}] = s^{\mathbf{A}}[\vec{b}]$. Por ello:

  $$\begin{aligned} \mathbf{A} \vDash \varphi[\vec{a}] &\iff t^{\mathbf{A}}[\vec{a}] = s^{\mathbf{A}}[\vec{a}] & & \text{Def. de } \vDash \\ &\iff t^{\mathbf{A}}[\vec{b}] = s^{\mathbf{A}}[\vec{b}] & & \text{Lema} \\ &\iff \mathbf{A} \vDash \varphi[\vec{b}] & & \text{Def. de } \vDash \end{aligned}$$

  por lo que se demuestra.

  – $\varphi = r(t_1, \ldots, t_n)$ con $r \in \mathcal{R}_n, n \geq 1$ y $t_1, \ldots, t_n \in T^\tau$: Por lema, sabemos que $t_i^{\mathbf{A}}[\vec{a}] = t_i^{\mathbf{A}}[\vec{b}]$. Por ello:

  $$\begin{aligned} \mathbf{A} \vDash \varphi[\vec{a}] &\iff (t_1^{\mathbf{A}}[\vec{a}], \ldots, t_n^{\mathbf{A}}[\vec{a}]) \in i(r) & & \text{Def. de } \vDash \\ &\iff (t_1^{\mathbf{A}}[\vec{b}], \ldots, t_n^{\mathbf{A}}[\vec{b}]) \in i(r) & & \text{Lema} \\ &\iff \mathbf{A} \vDash \varphi[\vec{b}] & & \text{Def. de } \vDash \end{aligned}$$

  por lo que se demuestra.

- *Hipótesis inductiva* (k): Sea $k \in \mathbb{N}_0$, entonces $\forall \varphi \in F_k^\tau, (\mathbf{A} \vDash \varphi[\vec{a}] \iff \mathbf{A} \vDash \varphi[\vec{b}])$

- *Caso inductivo* $(k+1)$: Sea $\varphi \in F_{k+1}^\tau$, tenemos varios casos:

  – Si $\varphi \in F_k^\tau$: se demuestra por HI.

  – Si $\varphi = (\varphi_1 \eta \varphi_2)$ con $\varphi_1, \varphi_2 \in F_k^\tau$ y $\eta \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$: Los casos son análogos, por lo que vamos a ver $\varphi = (\varphi_1 \wedge \varphi_2)$. Como $Li(\varphi_i) \subseteq Li(\varphi)$, por HI $\mathbf{A} \vDash \varphi_i[\vec{a}] \iff \mathbf{A} \vDash \varphi_i[\vec{b}]$. Se tiene entonces que:

  $$\begin{aligned} \mathbf{A} \vDash \varphi[\vec{a}] &\iff \mathbf{A} \vDash \varphi_1[\vec{a}] \text{ y } \mathbf{A} \vDash \varphi_2[\vec{a}] & & \text{Def. de } \vDash \\ &\iff \mathbf{A} \vDash \varphi_1[\vec{b}] \text{ y } \mathbf{A} \vDash \varphi_2[\vec{b}] & & \text{HI} \\ &\iff \mathbf{A} \vDash \varphi[\vec{b}] & & \text{Def. de } \vDash \end{aligned}$$

  por lo que se demuestra.

- Si $\varphi = \neg\varphi_1$ con $\varphi_1 \in F_k^\tau$: Como $Li(\varphi_1) \subseteq Li(\varphi)$, por HI $\mathbf{A} \vDash \varphi_1[\vec{a}] \iff \mathbf{A} \vDash \varphi_1[\vec{b}]$. Se tiene entonces que:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} \vDash \varphi[\vec{a}] &\iff \mathbf{A} \nvDash \varphi_1[\vec{a}] && \text{Def. de } \vDash \\
&\iff \mathbf{A} \nvDash \varphi_1[\vec{b}] && \text{HI} \\
&\iff \mathbf{A} \vDash \varphi[\vec{b}] && \text{Def. de } \vDash
\end{aligned}$$

  por lo que se demuestra.

- Si $\varphi = Qx_j\varphi_1$ con $\varphi_1 \in F_k^\tau$ y $Q \in \{\forall, \exists\}$: Los dos casos son análogos, por lo que vamos a ver $\varphi = \forall x_j\varphi_1$. Como $Li(\varphi_1) \subseteq Li(\varphi) \cup \{x_j\}$, por HI entonces, $\mathbf{A} \vDash \varphi_1[\downarrow_j^a (\vec{a})] \iff \mathbf{A} \vDash \varphi_1[\downarrow_j^a (\vec{b})]$ para todo $a \in A$. Con esto en mente, se tiene:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} \vDash \varphi[\vec{a}] &\iff \forall a \in A, \mathbf{A} \vDash \varphi_1[\downarrow_j^a (\vec{a})] && \text{Def. de } \vDash \\
&\iff \forall a \in A, \mathbf{A} \vDash \varphi_1[\downarrow_j^a (\vec{b})] && \text{Prop. anterior} \\
&\iff \mathbf{A} \vDash \varphi[\vec{b}] && \text{Def. de } \vDash
\end{aligned}$$

  por lo que se demuestra.

Con todo ello, entonces, se demuestra por inducción. ■