Reticulados cuaterna y su lenguaje elemental

Por un *reticulado cuaterna* entenderemos una 4-upla $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, \leq)$ tal que L es un conjunto no vacio, s e i son operaciones binarias sobre L, $\leq$ es una relacion binaria sobre L y se cumplen las siguientes propiedades:

(1) $x \leq x$, cualesquiera sea $x \in L$

(2) $x \leq y$ y $y \leq z$ implican $x \leq z$, cualesquiera sean $x, y, z \in L$

(3) $x \leq y$ y $y \leq x$ implican $x = y$, cualesquiera sean $x, y \in L$

(4) $x \leq x \mathsf{\ s\ } y$ y $y \leq x \mathsf{\ s\ } y$, cualesquiera sean $x, y \in L$

(5) $x \leq z$ y $y \leq z$ implican $x \mathsf{\ s\ } y \leq z$, cualesquiera sean $x, y, z \in L$

(6) $x \mathsf{\ i\ } y \leq x$ y $x \mathsf{\ i\ } y \leq y$, cualesquiera sean $x, y \in L$

(7) $z \leq x$ y $z \leq y$ implican $z \leq x \mathsf{\ i\ } y$, cualesquiera sean $x, y, z \in L$

Obviamente (1), (2) y (3) nos garantizan que $(L, \leq)$ es un poset. Ademas notese que (4) nos dice que cualesquiera sean $x, y \in L$ se tiene que $x \mathsf{\ s\ } y$ es cota superior del conjunto $\{x, y\}$. Ademas notese que (5) nos dice que cualesquiera sean los elementos $x, y \in L$, se tiene que $x \mathsf{\ s\ } y \leq z$, cada vez que z es cota superior del conjunto $\{x, y\}$. Por supuesto esto nos garaniza que $x \mathsf{\ s\ } y = \sup\{x, y\}$, cualesquiera sean $x, y \in L$. Similarmente (6) y (7) garantizan que $x \mathsf{\ s\ } y = \inf\{x, y\}$, cualesquiera sean $x, y \in L$.

O sea que, en virtud del teorema de Dedeking y de los resultados sobre reticulados par probados en la Guia 3, tenemos que un reticulado cuaterna no es ni mas ni menos que una 4-upla $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, \leq)$ tal que $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ es un reticulado terna y $\leq$ es su orden parcial asociado. Pero debe quedar claro que este ultimo es un teorema y no la definicion de reticulado cuaterna:

Ejercicio 1: Pruebe que una 4-upla $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, \leq)$ es un reticulado cuaterna si y solo si $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ es un reticulado terna y $\leq$ es su orden parcial asociado.

Algunos ejemplos de reticulados cuaterna:

- $(\mathbf{N}, mcm, mcd, |)$
- $(\mathbf{R}, max, min, \leq)$, donde $\leq$ es el orden usual de los numeros reales
- $(\{A \subseteq \mathbf{N} : A \text{ es finito}\}, \cup, \cap, \subseteq)$

Convencion Notacional: Muchos conceptos definidos para posets o reticulados terna los usaremos referidos a un reticulado cuaterna. Por ejemplo, si decimos que $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, \leq)$ es totalmente ordenado, esto significara que el poset $(L, \leq)$ lo es. Si decimos que $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, \leq)$ tiene elemento maximo, esto significara que el poset $(L, \leq)$ lo tiene. Si decimos que en $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, \leq)$ el elemento a cubre al elemento b, esto significara que eso sucede en el poset $(L, \leq)$. Otro ejemplo, si decimos que $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, \leq)$ es distributivo, nos estaremos refiriendo a que $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ es distributivo.

Formulas elementales de reticulados cuaterna

Podriamos hacer nuestro estudio algebraico similar al hecho con las otras estructuras y definir los conceptos de homorfismo de reticulados cuaterna, subreticulado cuaterna, etc. Pero esto es bastante simple y nos interesa mas estudiar aspectos que tienen que ver con cierto lenguaje primitivo en el que podemos expresar propiedades de los reticulados cuaterna. Definiremos un tipo de enunciados a los que llamaremos *formulas elementales de reticulados cuaterna* los cuales sirven para escribir muchos de los enunciados y sus pruebas en el contexto de los reticulados cuaterna. Iremos precisando de manera intuitiva y gradual este concepto y no daremos una definicion matematica del mismo. La primera observacion importante es que las formulas elementales de reticulados cuaterna son palabras que se construyen usando simbolos de la siguiente lista:

- $\forall\ \exists\ \neg\ \vee\ \wedge\ \rightarrow \leftrightarrow\ (\ )\ =\ \mathsf{s}\ \mathsf{i}\ \leq$
- Variables: $x, y, z, w, ...$
- Nombres de elementos fijos: $a, b, c, d, ...$

Es decir que, mas alla de que no daremos una definicion matematica del concepto de formula elemental de reticulados cuaterna, es importante entender que son meras palabras, es decir $Ti(\varphi) =$ PALABRA, cada ves que φ es una formula elemental de reticulado cuaterna. No precisaremos bien la lista de variables y la de nombres de elementos fijos pero esto no traera problemas para el manejo intuitivo que haremos del tema. Para definir el concepto de formula elemental de reticulado cuaterna nos hace falta uno mas basico todavia, a saber el concepto de *termino elemental de reticulados cuaterna.*

Terminos elementales de reticulados cuaterna

Son palabras que representan el resultado de aplicar a las variables y a los nombres de elementos fijos las operaciones s e i cierta cantidad de veces (posiblemente 0 veces). Algunos ejemplos:

- $(x\ \mathsf{s}\ y)$
- $((x\ \mathsf{i}\ y)\ \mathsf{s}\ z)$
- $((x\ \mathsf{s}\ y)\ \mathsf{s}\ ((x\ \mathsf{s}\ y)\ \mathsf{s}\ z))$
- $(x\ \mathsf{i}\ (x\ \mathsf{i}\ (x\ \mathsf{i}\ x)))$
- x
- a

Pero nuevamente es muy importante entender que los terminos elementales de reticulados cuaterna son palabras, es decir $Ti(t) =$ PALABRA, cada ves que t es un termino elemental de reticulado cuaterna. Por ejemplo el termino elemental dado en el primer ejemplo arriba es una palabra de longitud 5, el del quinto ejemplo es una palabra de longitud 1 (la letra x), etc. Las siguientes reglas constructivas nos aproximan mas aun al concepto de termino elemental de reticulado cuaterna (aunque no sean aun una definicion matematica precisa).

- Cada variable es un termino elemental de reticulados cuaterna
- Cada nombre de elemento fijo es un termino elemental de reticulados cuaterna
- Si t y s son terminos elementales de reticulados cuaterna, entonces $(t \mathsf{s} s)$ es un termino elemental de reticulados cuaterna
- Si t y s son terminos elementales de reticulados cuaterna, entonces $(t \mathsf{i} s)$ es un termino elemental de reticulados cuaterna
- Una palabra es un termino elemental de reticulados cuaterna si y solo si se puede construir usando las clausulas anteriores

Deberia quedar claro que arriba $(t \mathsf{s} s)$ denota el resultado de concatenar las 5 siguientes palabras

$$(\qquad t \qquad \mathsf{s} \qquad s \qquad)$$

es decir que $(t \mathsf{s} s)$ es una palabra de longitud $|t| + |s| + 3$.

Para que un termino elemental t *represente o asuma* un valor debemos tener un reticulado cuaterna concreto y asignarle valores a las variables y a los nombres de elementos fijos que ocurren en t. Algunos ejemplos:

- En el reticulado cuaterna $(\mathbf{N}, mcm, mcd, |)$, el termino $((x \mathsf{i} b))$, cuando le asignamos a x el valor 200 y a b el valor 300, asume el valor 100 (ya que $mcm(200, 300) = 100$).
- En el reticulado cuaterna $(\mathbf{N}, mcm, mcd, |)$, el termino z, cuando le asignamos a z el valor 200 asume el valor 200.
- En el reticulado cuaterna $(\mathbf{N}, mcm, mcd, |)$, el termino $((x \mathsf{i} y) \mathsf{s} z)$, cuando le asignamos a x el valor 20 a y el valor 12 y a z el valor 100, asume el valor 100 (ya que $mcm(mcd(20, 12), 100) = 100$).
- En el reticulado cuaterna $(\{A \subseteq \mathbf{N} : A \text{ es finito}\}, \cup, \cap, \subseteq)$, el termino $((x \mathsf{i} y) \mathsf{i} z)$, cuando le asignamos a x el valor $\{1, 5, 9\}$ a y el valor $\{5, 6, 9, 1000\}$ y a z el valor $\{9\}$, asume el valor $\{9\}$ (ya que $(\{1, 5, 9\} \cap \{5, 6, 9, 1000\}) \cap \{9\} = \{9\}$).

Es muy importante no confundir un termino elemental con el valor que asume en un reticulado cuaterna dado para alguna asignacion de valores a sus variables y nombres de elementos fijos. Por ejemplo los terminos elementales $(x \mathsf{i} y)$ y $(y \mathsf{i} x)$ son distintos y sin embargo asumen siempre el mismo valor cualquiera sea el reticulado cuaterna que considremos y cualquiera sea la asignacion de valores que tomemos para las variables x e y.

Ahora que ya tenemos definido el concepto de termino elemental de reticulados cuaterna, podemos definir el concepto de *formula elemental de reticulados* *cuaterna*. Recordemos que son palabras que se construyen usando simbolos de la siguiente lista:

- $\forall\ \exists\ \neg\ \vee\ \wedge\ \rightarrow \leftrightarrow\ (\ )\ =\ \mathsf{s}\,\mathsf{i}\ \leq$
- Variables: $x, y, z, w, ...$
- Nombres de elementos fijos: $a, b, c, d, ...$

Antes de dar una descripcion mas precisa, veamos algunos ejemplos concretos:

- $(x \leq y)$
- $(x = y)$
- $((x\ \mathsf{s}\ y) = a)$
- $((a\ \mathsf{s}\ z)\ \mathsf{i}\ x) = ((x\ \mathsf{i}\ y)\ \mathsf{s}\ x))$
- $(((a \leq z) \wedge (x = y)) \wedge \neg(x = y))$
- $\neg\exists y((x\ \mathsf{s}\ y = y) \wedge \neg(x = y))$
- $\forall x \forall y \forall z(((x \leq y) \wedge (y \leq z)) \rightarrow (x \leq z))$
- $(\forall x \exists y((x\ \mathsf{s}\ y) = a)$
- $\forall x \forall y \forall z \forall w(((x \leq z) \wedge (y \leq w)) \rightarrow ((x\ \mathsf{s}\ y) \leq (z\ \mathsf{s}\ w)))$

Las siguientes reglas constructivas nos describen en forma bastante precisa el concepto de formula elemental de reticulado cuaterna:

- Si t y s son terminos elementales de reticulados cuaterna, entonces la palabra $(t = s)$ es una formula elemental de reticulados cuaterna
- Si t y s son terminos elementales de reticulados cuaterna, entonces la palabra $(t \leq s)$ es una formula elemental de reticulados cuaterna
- Si φ_1 y φ_2 son formulas elementales de reticulados cuaterna, entonces $(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$ es una formula elemental de reticulados cuaterna
- Si φ_1 y φ_2 son formulas elementales de reticulados cuaterna, entonces $(\varphi_1 \vee \varphi_2)$ es una formula elemental de reticulados cuaterna
- Si φ_1 y φ_2 son formulas elementales de reticulados cuaterna, entonces $(\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2)$ es una formula elemental de reticulados cuaterna
- Si φ_1 y φ_2 son formulas elementales de reticulados cuaterna, entonces $(\varphi_1 \rightarrow \varphi_2)$ es una formula elemental de reticulados cuaterna
- Si φ es una formula elemental de reticulados cuaterna, entonces $\neg\varphi$ es una formula elemental de reticulados cuaterna

- Si φ es una formula elemental de reticulados cuaterna, entonces las palabras

$$\forall x\varphi \quad \forall y\varphi \quad \forall z\varphi \quad ...$$

son formulas elementales de reticulados cuaterna

- Si φ es una formula elemental de reticulados cuaterna, entonces las palabras

$$\exists x\varphi \quad \exists y\varphi \quad \exists z\varphi \quad ...$$

son formulas elementales de reticulados cuaterna

- Una palabra es una formula elemental de reticulados cuaterna si y solo si se puede construir usando las clausulas anteriores

Deberia quedar claro que, por ejemplo, arriba $(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$ denota el resultado de concatenar las 5 siguientes palabras

$$(\qquad \varphi_1 \qquad \wedge \qquad \varphi_2 \qquad)$$

es decir que $(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$ es una palabra de longitud $|\varphi_1| + |\varphi_2| + 3$. Notese que siempre "cuantificamos por delante", es decir que la palabra $(x \leq a)\forall x$ NO es una formula elemental de reticulados cuaterna. Tampoco se cuantificaran los nombres de elementos fijos, es decir solo cuantificamos variables. O sea que $\forall a(a = x)$ no es una formula elemental.

Para que una formula elemental se vuelva verdadera o falsa tenemos que tener un reticulado cuaterna concreto $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, \leq)$ y ademas asignarles valores concretos de L a las variables libres y a los nombres de elementos fijos que ocurren en dicha formula. Tambien cabe destacar que los cuantificadores siempre ranguean sobre L, es decir $\forall x$ se interpretara como $\forall x \in L$ y $\exists x$ se interpretara como $\exists x \in L$. Veamos algunos ejemplos concretos:

- La formula $(x \leq y)$ tiene a las variables x e y libres y en el reticulado cuaterna $(\mathbf{N}, mcm, mcd, |)$ es verdadera cuando le asignamos a x el valor 6 y a y el valor 36. Esto es ya que interpretamos a $\leq$ como la relacion $|$ y 6 divide a 36

- La formula $((a \mathsf{\ s\ } y = y) \vee (y \mathsf{\ s\ } a = a))$ tiene a y como su unica variable libre y en el reticulado cuaterna $(\mathbf{N}, mcm, mcd, |)$ es falsa cuando le asignamos a a el valor 5 y a y el valor 11 y verdadera cuando le asignamos a a el valor 5 y a y el valor 10. Esta formula es verdadera en el reticulado cuaterna $(\mathbf{N}, max, min, \leq)$ para cualquier asignacion de valores a a y a y.

- La formula $\exists y((y \leq x) \wedge \neg(y = x))$ tiene a x como su unica variable libre y en el reticulado cuaterna $(\{A \subseteq \mathbf{N} : A \text{ es finito}\}, \cup, \cap, \subseteq)$ es verdadera cuando le asignamos a x cualquier valor distinto de $\emptyset$ y es falsa cuando le asignamos a x el valor $\emptyset$

Tambien es bueno pensar que

- La formula $\forall y(x \leq y)$ "dice" x es un elemento minimo de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, \leq)$, en el sentido que ella sera verdadera en un reticulado cuaterna $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, \leq)$ si y solo si le asignamos a x un elemento minimo de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, \leq)$

- La formula $((x \leq y) \wedge \neg(y = x))$ "dice" x es menor que y en $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, \leq)$

- La formula $\neg\exists z((x \leq z) \wedge \neg(z = x))$ "dice" x es un elemento maximal de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, \leq)$

Ejercicio 1,5: De una formula elemental de reticulados cuaterna, que tenga dos variables libres x e y, la cual "diga" x es cubierto por y.

Ejercicio 2: De una formula elemental de reticulados cuaterna, que tenga una variable libre x, la cual "diga" x es cubierto por exactamente dos elementos

Sentencias elementales

Cuando una formula elemental de reticulados cuaterna no tiene variables libres diremos que es una *sentencia elemental de reticulados cuaterna*. Algunos ejemplos de sentencias:

- $\forall x(a \leq x)$

- $\exists x \exists y \neg(x = y)$

- $\forall x \forall y((x \leq y) \vee (y \leq x))$

- $\exists x \exists y((((a \mathsf{\ s\ } x) = (a \mathsf{\ s\ } y)) \wedge \neg(x \leq y)) \wedge \neg(y \leq x))$

Notese que en tal caso sera verdadera o falsa en $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, \leq)$ dependiendo solo de los valores que tomen los nombres para elementos fijos que ocurren en ella. Y si no ocurren en ella nombres de elementos fijos, entonces dado un reticulado cuaterna concreto, la sentencia resulta verdadera o falsa. Por ejemplo:

- La sentencia $\forall x(a \leq x)$ es verdadera en $(\{A \subseteq \mathbf{N} : A \text{ es finito}\}, \cup, \cap, \subseteq)$ cuando le asignamos a a el valor $\emptyset$

- La sentencia $\exists x \exists y \neg(x = y)$ es verdadera en un reticulado cuaterna $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, \leq)$ si y solo si L tiene al menos dos elementos distintos.

- La sentencia $\forall x \forall y((x \leq y) \vee (y \leq x))$ es verdadera en un reticulado cuaterna $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, \leq)$ si y solo si el poset $(L, \leq)$ es un conjunto totalmente ordenado

- La sentencia $\exists x \exists y((((a \mathsf{\ s\ } x) = (a \mathsf{\ s\ } y)) \wedge \neg(x \leq y)) \wedge \neg(y \leq x))$ es verdadera en el reticulado cuaterna $(\{1, 2, 5, 7, 70\}, mcm, mcd, |)$ cuando le asignamos a a el valor 5 y es falsa cuando le asigamos el valor 1

Ejercicio 3: De una sentencia elemental de reticulados cuaterna la cual sea verdadera en un reticulado cuaterna $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, \leq)$ si y solo si $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, \leq)$ es distributivo

Ejercicio 4: De una sentencia elemental de reticulados cuaterna la cual sea verdadera en un reticulado cuaterna $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, \leq)$ si y solo si L tiene exactamente 5 elementos

Ejercicio 4,5: De una sentencia elemental de reticulados cuaterna la cual sea verdadera en un reticulado cuaterna $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, \leq)$ si y solo si $(L, \leq)$ tiene un elemento minimo el cual es cubierto por al menos dos elementos distintos.

Extendiendo el concepto de verdad

Supongamos tenemos una cuatrupla (A, f, g, R) tal que A es un conjunto no vacio, f y g son operaciones binarias sobre A y R es una relacion binaria sobre A, pero no sabemos nada acerca de estas operaciones f y g ni de la relacion R. Es decir tenemos una "estructura" del mismo tipo que los reticulados cuaterna pero obviamente no tiene por que ser un reticulado cuaterna. Por ejemplo podriamos tener la cuatrupla $(\mathbf{R}, +, -, \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x + 1 = y\})$ la cual obviamente no es un reticulado cuaterna (por que?). Pero notese que lo mismo podemos hablar de cuando una formula elemental de reticulados cuaterna es verdadera en (A, f, g, R) para una asignacion de valores de A a sus variables libres y sus nombres de elementos fijos. Simplemente debemos interpretar a s como f, a i como g y a $\leq$ como R y "leer" dicha formula. Dicho en pocas palabras, las formulas elementales de reticulados cuaterna se pueden interpretar no solo en los reticulados cuaterna sino tambien en cualquier estructura del mismo tipo

Veamos algunos ejemplos:

- La formula $(x \leq y)$ es verdadera en la estructura $(\mathbf{R}, +, -, \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x + 1 = y\})$ cuando le asignamos a x el valor 10 y a y el valor 11. Esto es ya que interpretamos a $\leq$ como la relacion $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x + 1 = y\}$.

- La formula $((x \mathsf{\ s\ } x) = x)$ es falsa en la estructura $(\mathbf{R}, +, -, \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x + 1 = y\})$ cuando le asignamos a x cualquier valor no nulo. Esto es ya que interpretamos a s como la operacion $+$.

- La sentencia $\exists y((y \mathsf{\ s\ } y) = y)$ es falsa en la estructura $(\mathbf{N}, +, +, |)$.

- La formula $((a \mathsf{\ s\ } y) = (a \mathsf{\ i\ } y))$ es verdadera en la estructura $(\mathbf{N}, +, +, |)$ cualquiera sea la asignacion de valores a a y a y.

- La sentencia $\forall x((x \leq x) \rightarrow \forall z((z \mathsf{\ i\ } x) = x))$ es verdadera en la estructura $(\mathbf{R}, +, ., \{(0, 0)\})$

- La sentencia $\forall x(\neg(x = a) \rightarrow \exists y((x \mathsf{\ i\ } y) = b))$ es verdadera en la estructura $(\mathbf{R}, +, ., \{(0, 0)\})$ cuando le asignamos a a el valor 0 y a b el valor 1.

Un poco mas sobre variables libres

Ya que el tema de cuando una variable es libre o no, es bastante delicado, nos explayaremos un poco mas. Primero deberiamos notar que si una variable ocurre varias veces en una formula, entonces algunas de aquellas ocurrencias seran libres y otras no. Por ejemplo

- En la formula $((x \leq a) \wedge \forall x(b \leq x))$ la primer ocurrencia de x es libre y las otras dos ocurrencias de x no son libres

Como es usual a las ocurrencias que no son libres las llamaremos *acotadas*. O sea que toda ocurrencia de una variable en una formula es ya sea libre o acotada. Por ejemplo, en la formula

$$(((a \mathsf{s} b) \leq y) \wedge \forall y((z \mathsf{s} b) \leq y))$$

la variable y ocurre tres veces, la primera ocurrencia es libre y la segunda y tercera son acotadas.

Cuando digamos que *x es una variable libre de una formula φ* nos estaremos refiriendo a que la variable x ocurre al menos una ves libremente en φ, aunque tambien puede ocurrir acotadamente en φ. Por ejemplo:

- x es una variable libre de la formula $((x \leq a) \wedge \forall x(b \leq x))$ (aunque ocurre acotadamente)

- Las variables libres de la formula

  $$(((x \leq z) \vee \exists x \forall y((a \leq x) \wedge (y \leq x))) \rightarrow \forall y(z \leq y))$$

  son x y z. Las dos ocurrencias de z son libres, todas las ocurrencias de y son acotadas, la primer ocurrencia de x es libre y las otras tres ocurrencias de x son acotadas.

Alcance de la ocurrencia de un cuantificador

Un *cuantificador* sera una palabra formada por alguno de los simbolos

$$\forall \quad \exists$$

seguido de una variable. Es decir

$$\exists x \quad \forall x \quad \exists y \quad \forall y \quad \exists z \quad \forall z \quad \ldots$$

son los cuantificadores.

Una propiedad importante de las formulas elementales es que siempre que un cuantificador ocurra en una formula, seguido a dicha ocurrencia ocurrira una formula elemental (la cual ademas es unica). Ejemplos:

- En la formula

$$(((x \leq y) \wedge \forall y \neg (y = a)) \rightarrow \forall y (z \leq y))$$

  seguido a la segunda ocurrencia del cuantificador $\forall y$ ocurre la formula $(z \leq y)$ y seguido a la primer ocurrencia del cuantificador $\forall y$ ocurre la formula $\neg(y = a)$.

- En la formula

$$\forall x \forall y ((x \leq y) \vee (y \leq x))$$

  seguido a la unica ocurrencia del cuantificador $\forall y$ ocurre la formula $((x \leq y) \vee (y \leq x))$ y seguido a la unica ocurrencia del cuantificador $\forall x$ ocurre la formula $\forall y ((x \leq y) \vee (y \leq x))$

Esto nos da lugar al concepto de *alcance* de una ocurrencia de un cuantificador en una formula elemental. Intuitivamente hablando, el alcance de una ocurrencia de un cuantificador es el espacio ocupado por la unica formula que ocurre inmediatamente despues de dicha ocurrencia del cuantificador. Parece un trabalenguas pero con ejemplos se entendera la idea.

- En la formula

$$((((x \leq y) \wedge \forall y \underline{\neg (y = a)}) \rightarrow \forall y (z \leq y)) \vee (x \leq z))$$

  hemos subrayado el alcance de la primer ocurrencia del cuantificador $\forall y$.

- En la formula

$$\forall x \underline{\forall y ((x \leq y) \vee (y \leq x))}$$

  hemos subrayado el alcance de la unica ocurrencia del cuantificador $\forall x$.

- En la formula

$$(((x \leq z) \vee \exists x \underline{\forall y ((a \leq x) \wedge (y \leq x))}) \rightarrow \exists x (x \leq y))$$

  hemos subrayado el alcance de la primer ocurrencia del cuantificador $\exists x$.

Es importante notar que no tiene sentido hablar del alcance de un cuantificador en una formula ya que el mismo cuantificador puede ocurrir varias veces en dicha formula. Es decir el concepto de alcance es relativo a una ocurrencia de un cuantificador.

Notese que una ocurrencia de una variable v en una formula elemental φ sera acotada si y solo si ya sea es parte de la ocurrencia de un cuantificador Qv en φ, con $Q \in \{\forall, \exists\}$, o dicha ocurrencia sucede dentro del alcance de la ocurrencia de un cuantificador $Q'v$ en φ, con $Q' \in \{\forall, \exists\}$.

Deberia quedar claro que el roll jugado por una variable v en sus ocurrencias acotadas (dentro de la ocurrencia de un cuantificador Qv y su alcance) es en algun sentido "mudo" o "impersonal" en el sentido que podriamos reemplazar dichas ocurrencias de v por una variable w que no figure en la formula y el significado de la formula resultante seria el mismo que el de la formula original. Por ejemplo la formula

$$(\neg(x = a) \wedge \forall y((x \leq y) \wedge (x \leq y)))$$

nos "dice" que x es distinto a a y que x es comparable con todo otro elemento; y si reemplazamos cada ocurrencia de y en el bloque $\forall y((x \leq y) \wedge (x \leq y))$ por la variable z, obtenemos

$$(\neg(x = a) \wedge \forall z((x \leq z) \wedge (x \leq z)))$$

la cual claramente dice lo mismo acerca de x y a

Aviso importante: Ya tenemos una intuicion bien clara del concepto de formula elemental y en esta etapa no nos interesa ser puntillosos en la escritura por lo cual muchas veces para hacer mas dinamica la exposicion suprimiremos algunos parentesis. Por ejemplo en lugar de escribir $((x \leq y) \wedge (y \leq z))$ escribiremos $(x \leq y \wedge y \leq z)$ o tambien por ejemplo en lugar de escribir $((a \leq b) \wedge (x \leq y)) \wedge (z = c))$ escribiremos $(a \leq b \wedge x \leq y \wedge z = c)$ ya que obviamente ambas formulas tienen el mismo significado.

Pruebas elementales de reticulados cuaterna

Notese que las propiedades (1),...,(7) que definen reticulado cuaterna pueden ser escritas como sentencias elementales de reticulados cuaterna:

$\mathrm{A}_{\leq R} = \forall x(x \leq x)$

$\mathrm{A}_{\leq T} = \forall x \forall y \forall z((x \leq y \wedge y \leq z) \rightarrow x \leq z)$

$\mathrm{A}_{\leq A} = \forall x \forall y((x \leq y \wedge y \leq x) \rightarrow x = y)$

$\mathrm{A}_{\mathsf{s}esC} = \forall x \forall y(x \leq x \,\mathsf{s}\, y \wedge y \leq x \,\mathsf{s}\, y)$

$\mathrm{A}_{\mathsf{s}\leq C} = \forall x \forall y \forall z((x \leq z \wedge y \leq z) \rightarrow x \,\mathsf{s}\, y \leq z)$

$\mathrm{A}_{\mathsf{i}esC} = \forall x \forall y(x \,\mathsf{i}\, y \leq x \wedge x \,\mathsf{i}\, y \leq y)$

$\mathrm{A}_{\mathsf{i}\geq C} = \forall x \forall y \forall z((z \leq x \wedge z \leq y) \rightarrow z \leq x \,\mathsf{i}\, y)$

El nombre $\mathrm{A}_{\leq R}$ hace referencia a que esta sentencia "dice" que la relacion $\leq$ es reflexiva. El nombre $\mathrm{A}_{\mathsf{s}esC}$ hace referencia a que esta sentencia "dice" que $x \,\mathsf{s}\, y$ es cota superior del conjunto $\{x, y\}$. El nombre $\mathrm{A}_{\mathsf{s}\leq C}$ hace referencia a que esta sentencia "dice" que $x \,\mathsf{s}\, y$ es menor o igual a cualquier cota superior del conjunto $\{x, y\}$. Los otros nombres fueron elejidos en forma analoga.

Muchas propiedades que son ciertas en todos los reticulados cuaterna se pueden escribir usando sentencias elementales de reticulados cuaterna. Por ejemplo la sentencia elemental $\rho = \forall x \forall y (x \mathsf{s} y = y \mathsf{s} x)$ es cierta en cada reticulado cuaterna. Esto nosotros lo sabemos ya que en un reticulado cuaterna los axiomas $\mathrm{A}_{\mathsf{s}esC}$ y $\mathrm{A}_{\mathsf{s}\leq C}$ nos garantizan que $x \mathsf{s} y = \sup\{x, y\}$ y obviamente $\sup\{y, x\}$. Pero esta prueba o justificacion de ρ habla de $\sup\{x, y\}$, la cual es una expresion que no forma parte de las formulas elementales. Nos interesa dar una prueba muy especial de ρ en el sentido que se cumplan las siguientes caracteristicas

(1) En la prueba se parte de una estructura $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, \leq)$ de la cual solo sabemos que satisface los axiomas $\mathrm{A}_{\leq R}$, $\mathrm{A}_{\leq A}$, $\mathrm{A}_{\leq T}$, $\mathrm{A}_{\mathsf{s}esC}$, $\mathrm{A}_{\mathsf{s}\leq C}$, $\mathrm{A}_{\mathsf{i}esC}$, $\mathrm{A}_{\mathsf{i}\geq C}$

(2) Las deducciones de la prueba son muy simples y obvias de justificar con minimas fraces en castellano

(3) En la escritura de la prueba lo concerniente a la matematica misma se expresa usando solo sentencias elementales de reticulados cuaterna.

Veamos una prueba de ρ con estas caracteristicas

Proof. Sean $a, b \in L$ elementos fijos pero arbitarrios. Por el axioma $\mathrm{A}_{\mathsf{s}esC}$ (intanciado haciendo $x = b$ y $y = a$) tenemos que

$$b \leq b \mathsf{s} a \wedge a \leq b \mathsf{s} a$$

De lo cual sacamos obviamente que

$$a \leq b \mathsf{s} a \wedge b \leq b \mathsf{s} a$$

Ademas el axioma $\mathrm{A}_{\mathsf{s}\leq C}$ (instanciado haciendo $x = a$, $y = b$ y $z = b \mathsf{s} a$) nos dice que

$$((a \leq b \mathsf{s} a \wedge b \leq b \mathsf{s} a) \to a \mathsf{s} b \leq b \mathsf{s} a)$$

O sea que de las ultimas dos sentencias obtenemos trivialmente que

$$a \mathsf{s} b \leq b \mathsf{s} a$$

En forma analoga se puede probar que

$$b \mathsf{s} a \leq a \mathsf{s} b$$

Lo cual nos dice trivialmente que

$$a \mathsf{s} b \leq b \mathsf{s} a \wedge b \mathsf{s} a \leq a \mathsf{s} b$$

Pero el axioma $\mathrm{A}_{\leq A}$ nos dice que

$$(a \mathsf{s} b \leq b \mathsf{s} a \wedge b \mathsf{s} a \leq a \mathsf{s} b) \to a \mathsf{s} b = b \mathsf{s} a$$

De lo cual obviamente obtenemos que

$$a \mathsf{s} b = b \mathsf{s} a$$

Ya que a, b eran elementos fijos pero arbitrarios, hemos probado que

$$\forall x \forall y (x \mathsf{s} y = y \mathsf{s} x)$$

■

Por supuesto, en la parte de la prueba en la que decimos "En forma analoga se puede probar que $b \mathsf{s} a \leq a \mathsf{s} b$" deberiamos poner las lineas que corresponden para obtener la prueba elemental completa.

Ejercicio 5: Completar la prueba anterior haciendo la parte faltante.

Llamaremos a las pruebas que tengan estas caracteristicas, *pruebas elementales de reticulados cuaterna*. Muchas de las pruebas dadas en la Guia 3 pueden adaptarse naturalmente para ser pruebas elementales de reticulados cuaterna. Para hacer esta adaptacion notese que el axioma $A_{\leq A}$ puede ser usado en lugar de aplicar la regla Igualdad en Posets (asi lo hicimos en la prueba de recien) y similarmente los axiomas $A_{\mathsf{s}\leq C}$ y $A_{\mathsf{i}\geq C}$ se pueden usar en lugar de las reglas Superar un Supremo y Ser Menor o Igual que un Infimo.

Ahora daremos una prueba elemental de la sentencia elemental $\mu = \forall x \forall y (x \leq y \leftrightarrow x \mathsf{s} y = y)$. Obviamente sabemos que μ es verdadera en cada reticulado cuaterna pero queremos una prueba elemental.

Proof. [Prueba elemental de μ:] Sean $a, b \in L$ elementos fijos. Supongamos que $a \leq b$. Probaremos que $a \mathsf{s} b = b$. Por el axioma $A_{\mathsf{s}\leq C}$ tenemos que

$$((a \leq b \wedge b \leq b) \rightarrow a \mathsf{s} b \leq b)$$

Pero por el axioma $A_{\leq R}$ tenemos que $b \leq b$ y por hipotesis tenemos que $a \leq b$ por lo cual

$$a \leq b \wedge b \leq b$$

Obviamente esto nos dice que $a \mathsf{s} b \leq b$. Ademas por el axioma $A_{\mathsf{s}esC}$ tenemos que

$$b \leq a \mathsf{s} b$$

O sea que hemos probado

$$a \mathsf{s} b \leq b \wedge b \leq a \mathsf{s} b$$

Lo cual por el axioma $A_{\leq A}$ nos dice que $a \mathsf{s} b = b$. Ya que habiamos asumido que $a \leq b$ en realidad hemos probado que

$$a \leq b \rightarrow a \mathsf{s} b = b$$

Supongamos ahora que $a \mathsf{s} b = b$. Por el axioma $A_{\mathsf{s}esC}$ tenemos que $a \leq a \mathsf{s} b$. Ya que $a \mathsf{s} b = b$ obtenemos que $a \leq b$. O sea que realmente hemos probado que

$$a \mathsf{s} b = b \rightarrow a \leq b$$

Lo cual por la otra implicacion probada nos dice que

$$a \leq b \leftrightarrow a \mathsf{s}\, b = b$$

Ya que a, b eran elementos fijos pero arbitrarios, hemos probado que

$$\forall x \forall y (x \leq y \leftrightarrow x \mathsf{s}\, y = y)$$

$\blacksquare$

Consejos importantes: Por favor contengan a su escarabajo interior...

(a) Cuando queramos hacer una prueba elemental de alguna sentencia elemental es importante no perder nuestro roll de matematicos y creer que porque debemos realizar la prueba escribiendo las cosas con sentencias elementales debemos dejar de pensar como matematicos y volvernos escarabajos sintacticos mecanicos que solo usan reglas y van encadenando sentencias elementales sin pensar e imaginar. Es decir, debemos hacer la prueba a lo mariposa pensando, imaginando. Tal como lo venimos haciendo en las guias anteriores pero agregando la consigna de que a la matematica involucrada la escribamos usando sentencias elementales.

(b) Una buena manera de hacer una prueba elemental de una sentencia elemental φ es primero hacer la prueba matematica sin fijarse demaciado si es elemental o no. Es decir partir de la suposicion de que tenemos un reticulado cuaterna $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, \leq)$ fijo (pero arbitrario) e intentar (como matematicos) probar que entonces en $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, \leq)$ se cumple φ. Una ves que hayamos hecho nuestra prueba como matematicos, intentar tunearla para que solo use sentencias elementales en lo que se refiere a la escritura de lo matematico.

(c) Es decir debemos ser el mismo matematico de siempre solo que haciendo pruebas de un estilo muy particular.

Ejercicio 6: De pruebas elementales de reticulados cuaterna de las siguientes sentencias elementales.

(a) $\forall x (x \mathsf{s}\, x = x)$

(b) $\forall x \forall y ((x \mathsf{s}\, y) \mathsf{i}\, x = x)$

(c) $\forall x \forall y \forall z\ (x \mathsf{s}\, y) \mathsf{s}\, z = x \mathsf{s}\, (y \mathsf{s}\, z)$

(d) $\forall x \forall y \forall z \forall w ((x \leq z \wedge y \leq w) \rightarrow (x \mathsf{s}\, y \leq z \mathsf{s}\, w))$

Ejercicio 7: (a) (Ejercicio 10 de la Guia 3) Sea $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, \leq)$ un reticulado cuaterna. Supongamos que m es un elemento maximal de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, \leq)$. Pruebe que entonces m es un elemento maximo de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, \leq)$.

(b) Note que Use las ideas de la prueba hecha en (a) para dar una prueba elemental de reticulados cuaterna de la sentencia elemental $\forall x\ (\neg\exists z(x \leq z \wedge \neg(z = x)) \rightarrow \forall z(z \leq x))$.

Ejercicio 8: (a) (Ejercicio 10,5 de la Guia 3) Sea $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, \leq)$ un reticulado cuaterna y supongamos $a, b \in L$ son tales que b tapa a a. Entonces si $x \nleq a$ se tiene que $b \leq a \,\mathsf{s}\, x$. ("tapa" esta definido antes del Ejercicio 5,5 de la Guia 2)

(b) De una sentencia elemental de reticulados cuaterna, φ, la cual exprese el resultado de (a).

(c) Use las ideas de la prueba hecha en (a) para dar una prueba elemental de reticulados cuaterna de la sentencia φ.