Guía 12: Teorías de primer orden

Teoría de primer orden

- **Teoría de primer orden**: Una teoría (de primer orden) es un par (Σ, τ) donde τ es un tipo y Σ es un conjunto de sentencias de tipo τ
  - Los elementos de Σ son los *axiomas propios* de (Σ, τ)
  - Un *modelo de* (Σ, τ) será una estructura de tipo τ la cual satisfaga todos los axiomas propios de (Σ, τ)
  - Ejemplos:
    - $Po = (\{A_{\leq R}, A_{\leq T}, A_{\leq A}\}, \tau_{Po})$ con $\tau_{Po} = (\emptyset, \emptyset, \{\leq\}, \{(\leq, 2)\})$
    - $RetCua = (\Sigma_{RetCua}, \tau_{RetCua})$ con $\Sigma_{RetCua} = \{A_{\leq R}, A_{\leq T}, A_{\leq A}, A_{s \text{ es } C}, A_{s \leq C}, A_{i \text{ es } C}, A_{i \geq C}\}$ y $\tau_{RetCua} = (\emptyset, \{s^2, i^2\}, \{\leq^2\}, a)$

Prueba formal

- Como objeto matemático, una prueba resultará ser un par ordenado de palabras cuya primera coordenada codificará en forma natural la sucesión de sentencias y su segunda coordenada codificará la sucesión de justificaciones

Reglas

- Reglas a considerar:
  - Sea R una regla tal que $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \in R$, decimos que φ_n se deduce de $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$ por la regla R respecto a τ para expresar que $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \in R$
  - Particularización:
    - $Partic^\tau = \{(\forall v \varphi(v), \varphi(t)) : \varphi_d = \varphi(v) \in F^\tau \text{ y } t \in T_c^\tau\}$
  - Existencia:
    - $Exist^\tau = \{(\varphi(t), \exists v \varphi(v)) : \varphi =_d \varphi(v) \in F^\tau \text{ y } t \in T_c^\tau\}$
  - Evocación
    - $Evoc^\tau = \{(\varphi, \varphi) : \varphi \in S^\tau\}$
  - Absurdo:
    - $Absur^\tau = Absur1^\tau \cup Absur2^\tau \cup Absur3^\tau$
      - $Absur1^\tau = \{((\neg\varphi \rightarrow (\psi \wedge \neg\psi)), \varphi) : \varphi, \psi \in S^\tau\}$
      - $Absur2^\tau = \{((\varphi \rightarrow (\psi \wedge \neg\psi)), \neg\varphi) : \varphi, \psi \in S^\tau\}$
      - $Absur3^\tau = \{((\varphi \wedge \neg\varphi), \psi) : \varphi, \psi \in S^\tau\}$
  - Conjunción-introducción y conjunción-eliminación:
    - $ConjInt^\tau = \{(\varphi, \psi, (\varphi \wedge \psi)) : \varphi, \psi \in S^\tau\}$
    - $ConjElim^\tau = ConjElim1^\tau \cup ConjElim2^\tau$
      - $ConjElim1^\tau = \{((\varphi \wedge \psi), \varphi) : \varphi, \psi \in S^\tau\}$
      - $ConjElim2^\tau = \{((\varphi \wedge \psi), \psi) : \varphi, \psi \in S^\tau\}$
  - Equivalencia-introducción y equivalencia-eliminación:
    - $EquivInt^\tau = \{((\varphi \rightarrow \psi), (\psi \rightarrow \varphi), (\varphi \leftrightarrow \psi)) : \varphi, \psi \in S^\tau\}$
    - $EquivElim^\tau = EquivElim1^\tau \cup EquivElim2^\tau$
      - $EquivElim1^\tau = \{((\varphi \leftrightarrow \psi), (\varphi \rightarrow \psi)) : \varphi, \psi \in S^\tau\}$
      - $EquivElim2^\tau = \{((\varphi \leftrightarrow \psi), (\psi \rightarrow \varphi)) : \varphi, \psi \in S^\tau\}$
  - Disyunción-introducción y disyunción-eliminación:
    - $DisjInt^\tau = DijInt1^\tau \cup DisjInt2^\tau \cup DisjElim3^\tau$
      - $DisjInt1^\tau = \{(\varphi, (\varphi \vee \psi)) : \varphi, \psi \in S^\tau\}$
      - $DisjInt2^\tau = \{(\psi, (\varphi \vee \psi)) : \varphi, \psi \in S^\tau\}$
      - $DisjInt3^\tau = \{((\neg\varphi \rightarrow \psi), (\varphi \vee \psi)) : \varphi, \psi \in S^\tau\}$
    - $DisjElim^\tau = DisjElim1^\tau \cup DisjElim2^\tau$
      - $DisjElim1^\tau = \{(\neg\varphi, (\varphi \vee \psi), \psi) : \varphi, \psi \in S^\tau\}$
      - $DisjElim2^\tau = \{(\neg\psi, (\varphi \vee \psi), \varphi) : \varphi, \psi \in S^\tau\}$
  - Conmutatividad:
    - $Commut^\tau = Commut1^\tau \cup Commut2^\tau$
      - $Commut1^\tau = \{((t \equiv s), (s \equiv t)) : s, t \in T_c^\tau\}$
      - $Commut2^\tau = \{((\varphi \leftrightarrow \psi), (\psi \leftrightarrow \varphi)) : \varphi, \psi \in S^\tau\}$
  - Modus Ponens:
    - $ModPon^\tau = \{(\varphi, (\varphi \rightarrow \psi), \psi) : \varphi, \psi \in S^\tau\}$
  - División por casos:
    - $DivPorCas^\tau = \{((\varphi_1 \vee \varphi_2), (\varphi_1 \rightarrow \psi), (\varphi_2 \rightarrow \psi), \psi) : \varphi_1, \varphi_2, \psi \in S^\tau\}$
  - Reemplazo:

- $Reemp^\tau = Reemp1^\tau \cup Reem2^\tau$
  - $Reem1^\tau = \{((t \equiv s), \gamma, \bar{\gamma}) : s, t \in T_c^\tau, \gamma \in S^\tau$ y $\bar{\gamma} =$ resultado de reemplazar en γ una ocurrencia de t por $s\}$
  - $Reem2^\tau = \{(\forall v_1 \ldots \forall v_n(\varphi \leftrightarrow \psi), \gamma, \bar{\gamma}), \varphi, \psi \in F^\tau, Li(\varphi) = Li(\psi) = \{v_1, \ldots, v_n\}, n \geq 0, \gamma \in S^\tau$ y $\bar{\gamma} =$ resultado de reemplazar en γ una ocurrencia de φ por $\psi\}$
- Transitividad:
  - $Trans^\tau = Trans1^\tau \cup Trans2^\tau \cup Trans3^\tau$
    - $Trans1^\tau = \{((t \equiv s), (s \equiv u), (t \equiv u)) : t, s, u \in T_c^\tau\}$
    - $Trans2^\tau = \{((\varphi \to \psi), (\psi \to \Phi), (\varphi \to \Phi)) : \varphi, \psi, \Phi \in S^\tau\}$
    - $Trans3^\tau = \{((\varphi \leftrightarrow \psi), (\psi \leftrightarrow \Phi), (\varphi \leftrightarrow \Phi)) : \varphi, \psi, \Phi \in S^\tau\}$
- Generalización:
  - $Generaliz^\tau = \{(\varphi(c), \forall v \varphi(v)) : \varphi =_d \varphi(v) \in F^\tau, Li(\varphi) = \{v\}$ y $c \in \mathcal{C}$ no ocurre en $\varphi\}$
- Elección:
  - $Elec^\tau = \{((\exists v \varphi(v), \varphi(e))) : \varphi =_d \varphi(v) \in F^\tau, Li(\varphi) = \{v\}$ y $e \in \mathcal{C}$ no ocurre en $\varphi\}$

- **Regla universal**: Una regla R es llamada universal cuando se da que si φ se deduce de $\psi_1, \ldots, \psi_k$ por R entonces $((\psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_k) \to \varphi)$ es una sentencia universalmente válida
  - *Lema*: Sea τ un tipo, todas las reglas excepto las de elección y generalización son universales

Axiomas lógicos

- Axiomas lógicos (*verdades universales*) de tipo τ que consideraremos: Sean $t \in T_c^\tau, \varphi \in S^\tau, \psi \in F^\tau, v \in Var, Li(\psi) \subseteq \{v\}$:
  - $(\varphi \leftrightarrow \varphi)$
  - $(t \equiv t)$
  - $(\varphi \vee \neg\varphi)$
  - $(\varphi \leftrightarrow \neg\neg\varphi)$
  - $(\neg\forall v \psi \leftrightarrow \exists v \neg\psi)$
  - $(\neg\exists v \psi \leftrightarrow \forall v \neg\psi)$
- Denotaremos $AxLog^\tau = \{\varphi \in S^\tau : \varphi$ es un axioma lógico de tipo $\tau\}$

Justificaciones

- **Justificación básica**: Sea $Nombres_1$ el conjunto formado por las siguientes palabras:
  - EXISTENCIA
  - COMMUTATIVIDAD
  - PARTICULARIZACION
  - ABSURDO
  - EVOCACION
  - CONJUNCIONELIMINACION
  - EQUIVALENCIAELIMINACION
  - DISJUNCIONINTRODUCCION
  - ELECCION
  - GENERALIZACION

  Y $Nombres_2$ el conjunto formado por las siguientes palabras:
  - MODUSPONENS
  - TRANSITIVIDAD
  - CONJUNCIONINTRODUCCION
  - EQUIVALENCIAINTRODUCCION
  - DISJUNCIONELIMINACION
  - REEMPLAZO

  Una *justificación básica* es una palabra perteneciente a la unión de los siguientes conjuntos de palabras:
  - {CONCLUSION, AXIOMAPROPIO, AXIOMALOGICO}
  - $\{\alpha(\bar{k}) : k \in N, \alpha \in Nombres_1\}$
  - $\{\alpha(\bar{j}, \bar{k}) : j, k \in N, \alpha \in Nombres_2\}$
  - $\{DIVISIONPORCASOS(\bar{j}, \bar{k}, \bar{l}) : j, k, l \in N\}$

  Y usaremos $JustBas$ para denotar el conjunto formado por todas las justificaciones básicas.
- **Justificación**: Una justificación es una palabra que pertenece a la unión de los siguientes conjuntos de palabras:
  - $JustBas$

- $\{\text{HIPOTESIS}\bar{k} : k \in N\}$
- $\{\text{TESIS}\bar{j}\alpha : j \in N, \alpha \in JustBas\}$

Usaremos $Just$ para denotar el conjunto formado por todas las justificaciones.

- **Concatenaciones balanceadas de justificaciones**:
  - *Lema*: Sea $\mathbf{J} \in Just^+$, hay únicos $n \geq 1$ y $J_1, \ldots, J_n \in Just$ tales que $\mathbf{J} = J_1 \ldots J_n$
    * Es decir que la sucesión $J_1, \ldots, J_n$ puede codificarse con la palabra $J_1 \ldots J_n$ sin perder información
    * Dada $\mathbf{J} \in Just^+$, usaremos $n(\mathbf{J})$ y $\mathbf{J}_1, \ldots, \mathbf{J}_{n(\mathbf{J})}$ para denotar los únicos n y $J_1, \ldots, J_n$ cuya existencia garantiza el lema anterior
  - **Bloques**: Dados números naturales $i \leq j$, usaremos $\langle i, j \rangle$ para denotar el conjunto $\{i, i+1, \ldots, j\}$. A los conjuntos de la forma $\langle i, j \rangle$ los llamaremos bloques
  - **Justificación balanceada**: Sea $\mathcal{B}^{\mathbf{J}}$ el conjunto de bloques de $\mathbf{J} \in Just^+$, diremos que $\mathbf{J}$ es balanceada si se dan las siguientes condiciones:
    1. Por cada $k \in N$ hay a lo sumo un i tal que $\mathbf{J}_i = \text{HIPOTESIS}\bar{k}$ y a lo sumo un j tal que $\mathbf{J}_j = \text{TESIS}\bar{k}\alpha$, con $\alpha \in JustBas$
    2. Si $\mathbf{J}_i = \text{HIPOTESIS}\bar{k}$ entonces hay un $l > i$ tal que $\mathbf{J}_l = \text{TESIS}\bar{k}\alpha$, con $\alpha \in JustBas$
    3. Si $\mathbf{J}_i = \text{TESIS}\bar{k}\alpha$ entonces hay un $l < i$ tal que $\mathbf{J}_l = \text{HIPOTESIS}\bar{k}$
    4. Si $B_1, B_2 \in \mathcal{B}^{\mathbf{J}}$, entonces $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ o $B_1 \subseteq B_2$ o $B_2 \subseteq B_1$

Pares adecuados

- *Lema*: Sea $\varphi \in S^{\tau+}$, hay únicos $n \geq 1$ y $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in S^\tau$ tales que $\varphi = \varphi_1 \ldots \varphi_n$
  - Es decir que la sucesión $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ puede codificarse con la palabra $\varphi_1 \ldots \varphi_n$ sin perder información
  - Dada $\varphi \in S^{\tau+}$, usaremos $n(\varphi)$ y $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n(\varphi)}$ para denotar los únicos n y $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ cuya existencia garantiza el lema anterior
- **Par adecuado**: Un par adecuado de tipo τ es un par $(\varphi, \mathbf{J}) \in S^{\tau+} \times Just^+$ tal que $n(\varphi) = n(\mathbf{J})$ y $\mathbf{J}$ es balanceada
- *Bloques en un par adecuado*: Sea $(\varphi, \mathbf{J})$ un par adecuado de tipo τ
  - Si $\langle i, j \rangle \in \mathcal{B}^{\mathbf{J}}$, entonces φ_i será la **hipótesis** del bloque $\langle i, j \rangle$ en $(\varphi, \mathbf{J})$ y φ_j será la **tesis** del bloque $\langle i, j \rangle$ en $(\varphi, \mathbf{J})$
  - Diremos que φ_i está **bajo la hipótesis** φ_l en $(\varphi, \mathbf{J})$ o que φ_l es una una hipótesis de φ_i en $(\varphi, \mathbf{J})$ cuando haya en $\mathcal{B}^{\mathbf{J}}$ un bloque de la forma $\langle l, j \rangle$ el cual contenga a i
  - Sean $i, j \in \langle 1, n(\varphi) \rangle$, diremos que i es **anterior** a j en $(\varphi, \mathbf{J})$ si $i < j$ y además para todo $B \in \mathcal{B}^{\mathbf{J}}$ se tiene que $i \in B \Rightarrow j \in B$
- *Dependencia de constantes en pares adecuados*:
  - **Dependencia directa**: Dadas $e, d \in \mathcal{C}$, diremos que e depende directamente de d en $(\varphi, \mathbf{J})$ si hay números $1 \leq l < j \leq n(\varphi)$ tales que:
    1. l es anterior a j en $(\varphi, \mathbf{J})$
    2. $\mathbf{J}_j = \alpha\text{ELECCION}(\bar{l})$ con $\alpha \in \{\varepsilon\} \cup \{\text{TESIS}\bar{k} : k \in N\}$ y $(\varphi_l, \varphi_j) \in Elec^\tau$ vía e
    3. d ocurre en φ_l
  - **Dependencia**: Dados $e, d \in \mathcal{C}$, diremos que e depende de d en $(\varphi, \mathbf{J})$ si existen $e_0, \ldots, e_{k+1} \in \mathcal{C}$ con $k \geq 0$ tales que
    1. $e_0 = e$ y $e_{k+1} = d$
    2. e_i depende directamente de e_{i+1} en $(\varphi, \mathbf{J})$ para $i = 0, \ldots, k$

Definición de prueba formal

- **Prueba formal**: Sea (Σ, τ) una teoría de primer orden y φ una sentencia de tipo τ, una prueba formal de φ en (Σ, τ) será un par adecuado $(\varphi, \mathbf{J})$ de algún tipo $\tau_1 = (\mathcal{C} \cup \mathcal{C}_1, \mathcal{F}, \mathcal{R}, a)$, con $\mathcal{C}_1$ finito y disjunto con $\mathcal{C}$, tal que:
  1. Cada φ_i es una sentencia de tipo τ_1
  2. $\varphi_{n(\varphi)} = \varphi$
  3. Si $\langle i, j \rangle \in \mathcal{B}^{\mathbf{J}}$, entonces $\varphi_{j+1} = (\varphi_i \to \varphi_j)$ y $\mathbf{J}_{j+1} = \alpha\text{CONCLUSION}$, con $\alpha \in \{\varepsilon\} \cup \{\text{TESIS}\bar{k} : k \in N\}$
  4. Para cada $i = 1, \ldots, n(\varphi)$, se da una de las siguientes:
     1. $\mathbf{J}_i = \text{HIPOTESIS}\bar{k}$
        - Para algún $k \in N$
     2. $\mathbf{J}_i = \alpha\text{CONCLUSION}$
        - Con $\alpha \in \{\varepsilon\} \cup \{TESIS\bar{k} : k \in N\}$ y hay un j tal que $\langle j, i-1 \rangle \in \mathcal{B}^{\mathbf{J}}$ y $\varphi_i = (\varphi_j \to \varphi_{i-1})$
     3. $\mathbf{J}_i = \alpha\text{AXIOMALOGICO}$
        - Con $\alpha \in \{\varepsilon\} \cup \{TESIS\bar{k} : k \in N\}$ y φ_i es un axioma lógico de tipo τ_1
     4. $\mathbf{J}_i = \alpha\text{AXIOMAPROPIO}$
        - Con $\alpha \in \{\varepsilon\} \cup \{TESIS\bar{k} : k \in N\}$ y $\varphi_i \in \Sigma$
     5. $\mathbf{J}_i = \alpha\text{PARTICULARIZACION}(\bar{l})$
        - Con $\alpha \in \{\varepsilon\} \cup \{TESIS\bar{k} : k \in N\}$, l anterior a i y $(\varphi_l, \varphi_i) \in Partic^{\tau_1}$

6. $\mathbf{J}_i = \alpha$COMMUTATIVIDAD$(\bar{l})$
   - Con $\alpha \in \{\varepsilon\} \cup \{TESIS\bar{k} : k \in N\}$, l anterior a i y $(\varphi_l, \varphi_i) \in Commut^{\tau_1}$
7. $\mathbf{J}_i = \alpha$ABSURDO$(\bar{l})$
   - Con $\alpha \in \{\varepsilon\} \cup \{TESIS\bar{k} : k \in N\}$, l anterior a i y $(\varphi_l, \varphi_i) \in Absur^{\tau_1}$
8. $\mathbf{J}_i = \alpha$EVOCACION$(\bar{l})$
   - Con $\alpha \in \{\varepsilon\} \cup \{TESIS\bar{k} : k \in N\}$, l anterior a i y $(\varphi_l, \varphi_i) \in Evoc^{\tau_1}$
9. $\mathbf{J}_i = \alpha$EXISTENCIA$(\bar{l})$
   - Con $\alpha \in \{\varepsilon\} \cup \{TESIS\bar{k} : k \in N\}$, l anterior a i y $(\varphi_l, \varphi_i) \in Exist^{\tau_1}$
10. $\mathbf{J}_i = \alpha$CONJUNCIONELIMINACION$(\bar{l})$
    - Con $\alpha \in \{\varepsilon\} \cup \{TESIS\bar{k} : k \in N\}$, l anterior a i y $(\varphi_l, \varphi_i) \in ConjElim^{\tau_1}$
11. $\mathbf{J}_i = \alpha$DISJUNCIONINTRODUCCION$(\bar{l})$
    - Con $\alpha \in \{\varepsilon\} \cup \{TESIS\bar{k} : k \in N\}$, l anterior a i y $(\varphi_l, \varphi_i) \in DisjElim^{\tau_1}$
12. $\mathbf{J}_i = \alpha$EQUIVALENCIAELIMINACION$(\bar{l})$
    - Con $\alpha \in \{\varepsilon\} \cup \{TESIS\bar{k} : k \in N\}$, l anterior a i y $(\varphi_l, \varphi_i) \in EquivElim^{\tau_1}$
13. $\mathbf{J}_i = \alpha$MODUSPONENS$(\bar{l}_1, \bar{l}_2)$
    - Con $\alpha \in \{\varepsilon\} \cup \{TESIS\bar{k} : k \in N\}$, l_1 y l_2 anteriores a i y $(\varphi_{l_1}, \varphi_{l_2}, \varphi_i) \in ModPon^{\tau_1}$
14. $\mathbf{J}_i = \alpha$CONJUNCIONINTRODUCCION$(\bar{l}_1, \bar{l}_2)$
    - Con $\alpha \in \{\varepsilon\} \cup \{TESIS\bar{k} : k \in N\}$, l_1 y l_2 anteriores a i y $(\varphi_{l_1}, \varphi_{l_2}, \varphi_i) \in ConjInt^{\tau_1}$
15. $\mathbf{J}_i = \alpha$EQUIVALENCIAINTRODUCCION$(\bar{l}_1, \bar{l}_2)$
    - Con $\alpha \in \{\varepsilon\} \cup \{TESIS\bar{k} : k \in N\}$, l_1 y l_2 anteriores a i y $(\varphi_{l_1}, \varphi_{l_2}, \varphi_i) \in EquivInt^{\tau_1}$
16. $\mathbf{J}_i = \alpha$DISJUNCIONELIMINACION$(\bar{l}_1, \bar{l}_2)$
    - Con $\alpha \in \{\varepsilon\} \cup \{TESIS\bar{k} : k \in N\}$, l_1 y l_2 anteriores a i y $(\varphi_{l_1}, \varphi_{l_2}, \varphi_i) \in DisjElim^{\tau_1}$
17. $\mathbf{J}_i = \alpha$REEMPLAZO$(\bar{l}_1, \bar{l}_2)$
    - Con $\alpha \in \{\varepsilon\} \cup \{TESIS\bar{k} : k \in N\}$, l_1 y l_2 anteriores a i y $(\varphi_{l_1}, \varphi_{l_2}, \varphi_i) \in Reemp^{\tau_1}$
18. $\mathbf{J}_i = \alpha$TRANSITIVIDAD$(\bar{l}_1, \bar{l}_2)$
    - Con $\alpha \in \{\varepsilon\} \cup \{TESIS\bar{k} : k \in N\}$, l_1 y l_2 anteriores a i y $(\varphi_{l_1}, \varphi_{l_2}, \varphi_i) \in Trans^{\tau_1}$
19. $\mathbf{J}_i = \alpha$DIVISIONPORCASOS$(\bar{l}_1, \bar{l}_2, \bar{l}_3)$
    - Con $\alpha \in \{\varepsilon\} \cup \{TESIS\bar{k} : k \in N\}$, l_1, l_2, l_3 anteriores a i y $(\varphi_{l_1}, \varphi_{l_2}, \varphi_{l_3}, \varphi_i) \in DivPorCas^{\tau_1}$
20. $\mathbf{J}_i = \alpha$ELECCION$(\bar{l})$
    - Con $\alpha \in \{\varepsilon\} \cup \{TESIS\bar{k} : k \in N\}$, l anterior a i y $(\varphi_l, \varphi_i) \in Elec^{\tau_1}$ vía un nombre de constante e, el cual no pertenece a $\mathcal{C}$ y no ocurre en $\varphi_1, \ldots, \varphi_{i-1}$
21. $\mathbf{J}_i = \alpha$GENERALIZACION$(\bar{l})$
    - Con $\alpha \in \{\varepsilon\} \cup \{TESIS\bar{k} : k \in N\}$, l anterior a i y $(\varphi_l, \varphi_i) \in Generaliz^{\tau_1}$ vía un nombre de constante c el cual cumple:
      * $c \notin \mathcal{C}$
      * c no es un nombre de constante que ocurra en φ el cual sea introducido por la regla de elección
      * c no ocurre en ninguna hipótesis de φ_l
      * Ningún nombre de constante que ocurra en φ_l o en sus hipótesis, depende de c

El concepto de Teorema

- **Teorema**: Cuando haya una prueba de φ en (Σ, τ), diremos que φ es un *teorema* de la teoría (Σ, τ) y escribiremos $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$

Conteo de modelos módulo isomorfismo

- **Definición**: Diremos que una teoría T tiene, módulo isomorfismo, exactamente una cantidad n de modelos de m elementos si hay $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$ estructuras de tipo τ tales que:
  1. Cada $\mathbf{A}_i$ es un modelo de T
  2. $|A_i| = m$ para cada $i = 1, \ldots, n$
  3. $\mathbf{A}_i$ no es isomorfa a $\mathbf{A}_j$ para $i \neq j$
  4. Si $\mathbf{A}$ es un modelo de la teoría T y $|A| = m$, entonces $\mathbf{A}$ es isomorfa a algún $\mathbf{A}_i$
- *Criterio para saber que dos estructuras no son isomorfas*: Si dos estructuras de tipo τ son tales que hay una $\varphi \in S^\tau$ la cual vale en una y no en la otra, entonces dichas estructuras no son isomorfas
  - Notar que *no es completo*, es decir, dos estructuras pueden satisfacer las mismas sentencias pero no ser isomorfas

Propiedades básicas de pruebas y teoremas

- *Lema de cambio de índice de hipótesis*: Sea $(\varphi, \mathbf{J})$ una prueba formal de φ en (Σ, τ) y sea $m \in N$ tal que $\mathbf{J}_i \neq$ HIPOTESIS$\bar{m}$ para cada $i = 1, \ldots, n(\varphi)$. Supongamos que $\mathbf{J}_i =$ HIPOTESIS$\bar{k}$ y que $\mathbf{J}_j =$ TESIS$\bar{k}\alpha$ con $[\alpha]_1 \notin Num$ y

sea $\bar{\mathbf{J}}$ el resultado de reemplazar en $\mathbf{J}$ la justificación $\mathbf{J}_i$ por HIPOTESIS$\bar{m}$ y reemplazar la justificación $\mathbf{J}_j$ por TESIS$\bar{m}\alpha$. Entonces $(\varphi, \bar{\mathbf{J}})$ es una prueba formal de φ en (Σ, τ)
- *Lema de cambio de constantes auxiliares*: Sea $(\varphi, \mathbf{J})$ una prueba formal de φ en (Σ, τ); $\mathcal{C}_1$ el conjunto de nombres de constante que ocurren en φ y que no pertenecen a $\mathcal{C}$; $e \in \mathcal{C}_1$; $\bar{e} \notin \mathcal{C} \cup \mathcal{C}_1$ tal que $(\mathcal{C} \cup (\mathcal{C}_\infty - \{e\}) \cup \{\bar{e}\}, \mathcal{F}, \mathcal{R}, a)$ es un tipo; y $\bar{\varphi}_i =$ resultado de reemplazar en φ_i cada ocurrencia de e por $\bar{e}$. Entonces $(\bar{\varphi}_1 \dots \bar{\varphi}_{n(\varphi)}, \mathbf{J})$ es una prueba formal de φ en (Σ, τ)
- *Lema de propiedades básicas de* $\vdash$: Sea (Σ, τ) una teoría
  1. *Uso de teoremas*: Si $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi_1, \dots, \varphi_n$ y $(\Sigma \cup \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}, \tau) \vdash \varphi$, entonces $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$
  2. Supongamos $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi_1, \dots, \varphi_n$. Si R es una regla distinta de GENERALIZACION y ELECCION, y φ se deduce de $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ por la regla R, entonces $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$.
  3. $(\Sigma, \tau) \vdash (\varphi \to \psi)$ sí y solo sí $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau) \vdash \psi$

Consistencia

- **Teorías consistentes e inconsistentes**: Una teoría (Σ, τ) será
  - *Inconsistente* cuando haya una sentencia φ tal que $(\Sigma, \tau) \vdash (\varphi \wedge \neg\varphi)$.
  - *Consistente* cuando no sea inconsistente
- *Lema de propiedades básicas de la consistencia*: Sea (Σ, τ) una teoría
  1. Si (Σ, τ) es inconsistente, entonces $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$ para toda sentencia φ
  2. Si (Σ, τ) es consistente y $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$, entonces $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau)$ es consistente
  3. Si $(\Sigma, \tau) \nvdash \neg\varphi$ entonces $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau)$ es consistente

El teorema de corrección

- *Definición*: Dada (Σ, τ) una teoría, escribiremos $(\Sigma, \tau) \vDash \varphi$ cuando φ sea verdadera en todo modelo de (Σ, τ)
- *Teorema de Corrección*: $(\Sigma, \tau) \vdash$ implica $(\Sigma, \tau) \vDash \varphi$
- *Corolario*: Si (Σ, τ) tiene un modelo, entonces (Σ, τ) es consistente
- *Idea para probar que una sentencia no es teorema*: Si queremos probar que una sentencia $\varphi \in F^\tau$ no es teorema de una teoría (Σ, τ) basta con encontrar un modelo de (Σ, τ) en el cual φ sea falsa