Guía 2: Posets e isomorfismos

Órdenes parciales

- **Orden parcial**: una relación binaria R sobre un conjunto A es un orden parcial sobre A si es reflexiva, transitiva y antisimétrica respecto de A.
  - El orden parcial se denota con $\leq$
  - $<= \{(a,b) \in A^2 : a \leq b \wedge a \neq b\}$
  - **Cubrir**: $\prec= \{(a,b) \in A^2 : a < b \wedge \nexists z | a < z < b\}$
    - Cuando se de $a \prec b$, diremos que b cubre a a (respecto de $\leq$).
  - **Tapar**: Dado un poset $(P, \leq)$ y $a, b \in P$, diremos que b tapa a a cuando $a < b \wedge b \leq c \forall c \in P : a \leq c$
    - Si b tapa a a, entonces b cubre a a. *Pero no se cumple la recíproca*
  - **Poset denso**: un poset $(P, \leq)$ es denso si $\forall a, b \in P : a < b \Rightarrow \exists c \in P : a < c \wedge c < b$
- **Orden total**: un orden total sobre A es un orden parcial $\leq$ sobre A que cumple $x \leq y \vee y \leq x \forall x, y \in A$.
- **Poset (conjunto parcialmente ordenado)**: Un poset es un par $(P, \leq)$ donde P es un conjunto no vacío y $\leq$ es un orden parcial sobre P
- **Conjunto totalmente ordenado**: es un par $(P, \leq)$ donde P es un conjunto no vacío y $\leq$ es un orden total sobre P
  - Todo conjunto totalmente ordenado es un poset

Diagramas de Hasse

- Dado un poset $(P, \leq)$ con P finito, el diagrama de Hasse se hace siguiendo estas instrucciones:
  1. Asociar en forma inyectiva a cada $a \in P$ un punto p_a del plano
  2. Trazar un segmento de recta uniendo los puntos p_a y p_b, cada vez que $a \prec b$
  3. Realizar lo indicado en los puntos (1) y (2) en tal forma que
     1. Si $a \prec b$, entonces p_a está por debajo de p_b
     2. Si un punto p_a ocurre en un segmento del diagrama, entonces lo hace en alguno de sus extremos

Elementos maximales, máximos, minimales y mínimos

- **Máximo y mínimo**: Sea $(P, \leq)$ un poset, diremos que $a \in P$ es un elemento máximo de $(P, \leq)$ si $b \leq a \forall b \in P$. Análogamente se define el mínimo.
  - Hay a lo sumo un máximo o mínimo (pero puede no haber)
  - El máximo se denota con 1 y el mínimo con 0.
- **Maximal y minimal**: Sea $(P, \leq)$ un poset, diremos que $a \in P$ es un elemento maximal de $(P, \leq)$ si $\nexists b \in P : a < b$. De forma análoga se define el minimal.
  - No siempre hay maximales o minimales en un poset
  - Todo máximo (resp. mínimo) es un elemento maximal (resp. minimal) del poset
  - Si un poset no tiene elementos maximales, entonces es infinito

Supremos e ínfimos

Supremos

- **Cota superior**: Sea $(P, \leq)$ un poset y dado $S \subseteq P$, diremos que $a \in P$ es cota superior de S en $(P, \leq)$ cuando $b \leq a \forall b \in S$.
- **Supremo**: Un elemento $a \in P$ es supremo de S en $(P, \leq)$ cuando:
  1. a es cota superior de S en $(P, \leq)$
  2. $\forall b \in P$, si b es cota superior de S en $(P, \leq)$, entonces $a \leq b$

- Se denotará, en caso que exista, con $sup(S)$
- *Propiedades*:
  - Hay a lo sumo un supremo (no siempre existe)
  - En caso de existir, $sup(\emptyset)$ en $(P, \leq)$ es el mínimo de $(P, \leq)$
  - Si $a = sup(S)$, entonces $a = sup(S \cup \{a\})$
  - Si $a \in P$, entonces a es máximo de $(P, \leq) \iff a = sup(P)$
  - Sea $S \subseteq P$ y $b \in P$, si $a = sup(S)$ y existe $sup(\{a, b\})$, entonces $sup(S \cup \{b\}) = sup(\{a, b\})$
- *Ejemplo de supremo*: Considerando el poset $(\mathbb{N}, D)$ donde $D = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 : x|y\}$, dados $x, y \in \mathbb{N}$, se tiene que $mcm(x, y)$ es el supremo de $\{x, y\}$ en $(\mathbb{N}, D)$

Ínfimos

- **Cota inferior**: Sea $(P, \leq)$ un poset, dado $S \subseteq P$, diremos que un elemento $a \in P$ es cota inferior de S en $(P, \leq)$ cuando $a \leq b \forall b \in S$.
- **Ínfimo**: Un elemento $a \in P$ será llamado ínfimo de S en $(P, \leq)$ cuando:
  1. a es cota inferior de S en $(P, \leq)$
  2. $\forall b \in P$, si b es cota inferior de S en $(P, \leq)$, entonces $b \leq a$
  - Se denotará, en caso de que exista, $inf(S)$
  - *Propiedades*:
    - Hay a lo sumo un ínfimo (no siempre existe)
    - En caso de existir, el ínfimo de $\emptyset$ es el máximo del poset
  - *Ejemplo de ínfimo*: Sea el poset $(\mathbb{N}, D)$ donde $D = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 : x|y\}$, dados $x, y \in \mathbb{N}$ se tiene que $mcd(x, y)$ es el ínfimo de $\{x, y\}$ en $(\mathbb{N}, D)$

Homomorfismos e isomorfimos

- **Homomorfismo**: Sean $(P, \leq)$ y $(P', \leq')$ posets, una función $F : P \to P'$ será llamada homomorfismo de $(P, \leq)$ en $(P', \leq')$ si $\forall x, y \in P$ se cumple que $x \leq y \Rightarrow F(x) \leq' F(y)$.
  - Escribiremos $F : (P, \leq) \to (P', \leq')$ para expresar que F es un homomorfismo de $(P, \leq)$ en $(P', \leq')$
  - *Propiedades*: Suponiendo que F es suryectiva, entonces
    - Si $(P, \leq)$ es un conjunto totalmente ordenado, $(P', \leq')$ también lo es
    - Si $(P, \leq)$ tiene un elemento máximo/mínimo, entonces $(P', \leq')$ también
- **Isomorfismo**: Una función $F : P \to P'$ será llamada un isomorfismo de $(P, \leq)$ en $(P', \leq')$ si F es biyectiva, F es un homomorfismo de $(P, \leq)$ en $(P', \leq')$ y F^{-1} es un homomorfismo de $(P', \leq')$ en $(P, \leq)$.
  - Escribiremos $(P, \leq) \cong (P', \leq')$ cuando exista un isomorfismo entre $(P, \leq), (P', \leq')$ y, en este caso, diremos que son isomorfos
- *Propiedades*:
  - **Lema (isomorfismos conservan todas las propiedades matemáticas)**: Sean $(P, \leq), (P', \leq')$ posets y F un isomorfismo de $(P, \leq)$ en $(P', \leq')$:
    - $\forall x, y \in P, x < y \iff F(x) <' F(y)$
    - $\forall x \in P$, x es máximo (resp. mínimo) de $(P, \leq) \iff F(x)$ es máximo (resp. mínimo) de $(P', \leq')$
    - $\forall x \in P$, x es maximal (resp. minimal) en $(P, \leq) \iff F(x)$ es maximal (resp. minimal) en $(P', \leq')$
    - $\forall x, y, z \in P, z = sup\{x, y\} \iff F(z) = sup\{F(x), F(y)\}$
    - $\forall x, y, z \in P, z = inf\{x, y\} \iff F(z) = inf\{F(x), F(y)\}$
    - $\forall x, y \in P, x \prec y \iff F(x) \prec' F(y)$
      - Esto garantiza que si dos posets finitos son isomorfos, entonces pueden representarse con el mismo diagrama de Hasse

- El isomorfismo conserva las siguientes propiedades:
    * Que el poset sea denso
    * La cantidad de máximos/mínimos/maximales/minimales
    * x es tapado por $y \iff F(x)$ es tapado por $F(y)$