Combo 8 de teoremas

Emanuel Nicolás Herrador - November 2024

Lema

Supongamos que $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ es un isomorfismo. Sea $\varphi =_d \varphi(v_1, \ldots, v_n) \in F^\tau$. Entonces:

$$\mathbf{A} \vDash \varphi[a_1, \ldots, a_n] \text{ sii } \mathbf{B} \vDash \varphi[F(a_1), \ldots, F(a_n)]$$

para cada $a_1, \ldots, a_n \in A$

Demostración

Vamos a usar los siguientes resultados en la demostración:

- *Convención notacional*: Una vez declarado $\varphi =_d \varphi(v_1, \ldots, v_n)$, si $\mathbf{A}$ es un modelo de tipo τ y $a_1, \ldots, a_n \in A$, entonces $\mathbf{A} \vDash \varphi[a_1, \ldots, a_n]$ significará que $\mathbf{A} \vDash \varphi[\vec{b}]$ donde $\vec{b}$ es una asignación tal que a cada v_i le asigna el valor a_i.
- *Lema*: Supongamos que $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ es un isomorfismo. Sea $\varphi \in F^\tau$, entonces $\mathbf{A} \vDash \varphi[(a_1, a_2, \ldots)] \iff \mathbf{B} \vDash \varphi[(F(a_1), F(a_2), \ldots)]$ para cada $(a_1, a_2, \ldots) \in A^N$. En particular, $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ satisfacen las mismas sentencias de tipo τ.

Ahora, supongamos $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ isomorfismo, $\varphi =_d \varphi(v_1, \ldots, v_n) \in F^\tau$ y $a_1, \ldots, a_n \in A$ fijos pero arbitrarios. Entonces:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} \vDash \varphi[a_1, a_2, \ldots, a_n] &\iff \mathbf{A} \vDash \varphi[\vec{b}] \text{ con } \vec{b} \text{ tq a } v_i \text{ le asigna } a_i && \text{Por Convención Notacional} \\
&\iff \mathbf{B} \vDash \varphi[(F(b_1), F(b_2), \ldots)] \text{ con } \vec{b} \text{ tq a } v_i \text{ le asigna } a_i && \text{Por Lema} \\
&\iff \mathbf{B} \vDash \varphi[\vec{c}] \text{ con } \vec{c} \text{ tq a } v_i \text{ le asigna } F(a_i) \\
&\iff \mathbf{B} \vDash \varphi[F(a_1), F(a_2), \ldots, F(a_n)] && \text{Por Convención Notacional}
\end{aligned}$$

Luego, como eran fijos pero arbitrarios, se demuestra el lema para toda asignación. ■

Lema

Sean $(P, \leq)$ y $(P', \leq')$ posets. Supongamos F es un isomorfismo de $(P, \leq)$ en $(P', \leq')$:

(a) Para cada $S \subseteq P$ y cada $a \in P$, se tiene que a es cota superior (resp. inferior) de S sii $F(a)$ es cota superior (resp. inferior) de $F(S)$

(b) Para cada $S \subseteq P$, se tiene que existe $\sup(S)$ sii existe $\sup(F(S))$ y en el caso de que existan tales elementos se tiene que $F(\sup(S)) = \sup(F(S))$

Veamos cada punto por separado.

Punto (a)

Vemos la ida y la vuelta por separado. Ver la cota superior e inferior es análogo, por lo que demostramos solo la primera.

- *Ida*: Supongamos a cota superior de S. Sea $x \in F(S)$ fijo pero arbitrario y $s \in S : x = F(s)$. Como $s \leq a$, por def. de isomorfismo, $x = F(s) \leq' F(a)$. Luego, como x era fijo pero arbitrario, se tiene que $F(a)$ es cota superior de $F(S)$ y se demuestra la ida.
- *Vuelta*: Supongamos $F(a)$ cota superior de $F(S)$ con $a \in S$. Sea $s \in S$ fijo pero arbitrario, como $F(s) \leq' F(a)$ entonces por def. de isomorfismo, $s = F^{-1}(F(s)) \leq F^{-1}(F(a)) = a$. Como s era fijo pero arbitrario, se tiene que a es cota superior de S y se demuestra la vuelta.

Con ello, se demuestra la doble implicación para el caso de la cota superior. Como son análogos ambos casos de cota superior e inferior, se demuestra el punto **(a)**. ■

Punto (b)

Vemos la ida y la vuelta por separado:

- *Ida*: Supongamos que existe $\sup(S)$. Por (**a**) sabemos que $F(\sup(S))$ es cota superior de $F(S)$. Sea b un elemento fijo pero arbitrario tal que es cota superior de $F(S)$, entonces por (**a**) $F^{-1}(b)$ es cota superior de $F^{-1}(F(S)) = S$ por lo que $\sup(S) \leq F^{-1}(b)$. Luego, con ello, por def. de isomorfismo, $F(\sup(S)) \leq' F(F^{-1}(b)) = b$.

  Con ello, como b era fijo pero arbitrario, se tiene que se cumple para todo b cota superior de $F(S)$. Luego, por def., $F(\sup(S))$ es supremo de $F(S)$ por lo que se demuestra la ida.

- *Vuelta*: Es totalmente análogo al caso anterior, dado que F es un isomorfismo.

Con ello, entonces se demuestra el punto **(b)**. ■