Guía 13: El álgebra de Lindenbaum

- **Relación**: Sea $T = (\Sigma, \tau)$ una teoría, definimos la siguiente relación binaria sobre S^τ: $\varphi \dashv\vdash_T \psi$ sii $T \vdash (\varphi \leftrightarrow \psi)$
  - Propiedades:
    - $\dashv\vdash_T$ es una relación de equivalencia
    - $\{\varphi \in S^\tau : \varphi \text{ es un teorema de } T\} \in S^\tau / \dashv\vdash_T$
    - $\{\varphi \in S^\tau : \varphi \text{ es refutable en } T\} \in S^\tau / \dashv\vdash_T$
      - Una sentencia φ se dice **refutable** en (Σ, τ) si $(\Sigma, \tau) \vDash \neg\varphi$
- **Clases**: Dada una teoría $T = (\Sigma, \tau)$ y $\varphi \in S^\tau$, $[\varphi]_T$ denotará la clase de φ con respecto a la relación de equivalencia $\dashv\vdash_T$
- **Operaciones** sobre $S^\tau / \dashv\vdash_T$:
  - $[\varphi]_T s^T [\psi]_T = [(\varphi \vee \psi)]_T$
  - $[\varphi]_T i^T [\psi]_T = [(\varphi \wedge \psi)]_T$
  - $([\varphi]_T)^{c^T} = [\neg\varphi]_T$
- **Constantes** en $S^\tau / \dashv\vdash_T$:
  - $1^T = \{\varphi \in S^\tau : \varphi \text{ es un teorema de } T\}$
  - $0^T = \{\varphi \in S^\tau : \varphi \text{ es refutable en } T\}$
- **Álgebra de Lindenbaum**: Sea (Σ, τ) una teoría, denotaremos con $\mathcal{A}_T$ a $(S^\tau / \dashv\vdash_T, s^T, i^T, {}^{c^T}, 0^T, 1^T)$ y será llamada el *álgebra de Lindenbam* de la teoría T.
  - $\mathcal{A}_T$ es un álgebra de Boole
- **Orden parcial**: Denotaremos con $\leq^T$ al orden parcial asociado al álgebra de Boole $\mathcal{A}_T$
  - $[\varphi]_T \leq^T [\psi]_T$ sii $T \vDash (\varphi \rightarrow \psi)$
- **Criterio para resolver ejercicios**: Si queremos demostrar que en $\mathcal{A}_T$ se da que $[\varphi]_T \neq [\psi]_T$ entonces basta con encontrar un modelo $\mathbf{A}$ de T tal que $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ sea falsa en $\mathbf{A}$. Es decir, deberemos encontrar un modelo el cual haga verdadera a una de las sentencias y falsa a la otra.