Guía 4: Reticulados terna

Definición y propiedades iniciales

- De las propiedades de s, i de un reticulado par $(L, \leq)$ vamos a considerar:
  - Reflexividad: $x\ s\ x = x\ i\ x = x\ \forall x \in L$
  - Conmutatividad: $x\ s\ y = y\ s\ x \wedge x\ i\ y = y\ i\ x\ \forall x, y \in L$
  - Asociatividad: $x\ s\ (y\ s\ z) = (x\ s\ y)\ s\ z \wedge x\ i\ (y\ i\ z) = (x\ i\ y)\ i\ z\ \forall x, y, z \in L$
  - Absorción: $x\ s\ (x\ i\ y) = x = x\ i\ (x\ s\ y)\ \forall x, y \in L$
- **Reticulado terna**: un reticulado terna es una terna (L, s, i) tal que L es un conjunto no vacío y s, i son dos operaciones binarias sobre L que cumplen las propiedades de reflexividad, conmutatividad, asociatividad y absorción.
  - En este caso, decimos que L es el universo de (L, s, i)
- **Teorema de Dedekind**: Sea (L, s, i) un reticulado terna, la relación binaria sobre L definida por $x \leq y \iff x\ s\ y = y$ es un orden parcial sobre L para el cual se cumple que $sup(\{x, y\}) = x\ s\ y$ e $inf(\{x, y\}) = x\ i\ y\ \forall x, y \in L$.
  - Nos dice que a *nivel de información* es lo mismo tener un reticulado par que un reticulado terna

Orden asociado a un reticulado terna

- **Definición**: Llamaremos a $\leq = \{(x, y) : x\ s\ y = y\}$ el *orden parcial asociado* a (L, s, i) y $(L, \leq)$ será llamado el *poset asociado* a (L, s, i).
  - Notar que también tenemos que $\leq = \{(x, y) : x\ i\ y = x\}$
- *Propiedades*:
  - Si (L, s, i) es un reticulado terna, entonces (L, i, s) también lo es.

Reticulados terna distributivos

- **Definición**: Un reticulado terna (L, s, i) se llamará *distributivo* cuando cumpla que $x\ i\ (y\ s\ z) = (x\ i\ y)\ s\ (x\ i\ z)\ \forall x, y, z \in L$ (Dis_1)

Subreticulados terna

- **Conjunto cerrado bajo operación**: Si f es una operación n-aria sobre A y $S \subseteq A$, entonces diremos que S es *cerrado bajo f* cuando se de que $f(a_1, ..., a_n) \in S$ cada vez que $a_1, ..., a_n \in S$.
- **Subreticulado terna**: Dados reticulados terna (L, s, i) y (L', s', i'), diremos que (L, s, i) es un subreticulado terna de (L', s', i') si se dan las siguientes condiciones:
  1. $L \subseteq L'$
  2. L es cerrado bajo las operaciones s' e i'
  3. $s = s'|_{L^2}$ e $i = i'|_{L^2}$
- **Subuniverso**: Sea (L, s, i) un reticulado terna, un conjunto $S \subseteq L$ es llamado subuniverso de (L, s, i) si es no vacío y cerrado bajo las operaciones s e i.
  - Notar que los subuniversos de (L, s, i) son los universos de los subreticulados terna de (L, s, i).
- *Propiedades*:
  - Si (L, s, i) es un reticulado terna y S_1, S_2 son subuniversos de (L, s, i) tal que $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$, entonces $S_1 \cap S_2$ es un subuniverso de (L, s, i)
  - Sea (L, s, i) un reticulado terna y sea $\leq$ su orden asociado, si $S \subseteq L$ es no vacío con $(S, \leq \cap S^2)$ reticulado par con operaciones de supremo e ínfimo $\hat{s}, \hat{i}$, entonces $(S, \hat{s}, \hat{i})$ es un subreticulado terna de (L, s, i).

Homomorfismo e isomorfismo de reticulados terna

- **Homomorfismo**: Sean (L, s, i) y (L', s', i') reticulados terna, una función $F : L \to L'$ será llamada un homomorfismo de (L, s, i) en (L', s', i') si $\forall x, y \in L$ se cumple que $F(x\ s\ y) = F(x)\ s'\ F(y)$ y que $F(x\ i\ y) = F(x)\ i'\ F(y)$.
  - Escribiremos "Sea $F : (L, s, i) \to (L', s', i')$ un homomorfismo" para expresarlo.
- **Isomorfismo**: Un homomorfismo de (L, s, i) en (L', s', i') será llamado isomorfismo de (L, s, i) en (L', s', i') cuando sea biyectivo y su inversa también sea un homomorfismo.
  - Escribiremos $(L, s, i) \cong (L', s', i')$ cuando exista un isomorfismo de (L, s, i) en (L', s', i').
- *Propiedades*:
  - *Importantísima de isomorfismos*: Si $F : (L, s, i) \to (L', s', i')$ es un homomorfismo biyectivo, entonces F es un isomorfismo
    * Es decir, no hace falta chequear que F^{-1} sea un homomorfismo para ver que F es un isomorfismo.
  - Sean (L, s, i) y (L', s', i') reticulados terna y sea $F : (L, s, i) \to (L', s', i')$ un homomorfismo, entonces I_F es un subuniverso de (L', s', i').
  - *Isomorfismo de reticulados terna equivale a isomorfismo de posets*: Sean (L, s, i) y (L', s', i') reticulados terna y sean $(L, \leq)$ y $(L', \leq')$ los posets asociados, si $F : L \to L'$ es una función, entonces F es un isomorfismo de (L, s, i) en $(L', s', i') \iff F$ es un isomorfismo de $(L, \leq)$ en $(L', \leq)$
  - *Homomorfismo suryectivo mantiene distributividad*: Si $F : (L, s, i) \to (L', s', i')$ es un homomorfismo suryectivo y (L, s, i) es distributivo, entonces (L', s', i') es distributivo.
    * En particular, si $(L, s, i) \cong (L', s', i')$, entonces o ambos son distributivos, o ambos son no distributivos.
  - *Homomorfismo suryectivo mantiene máximo (análogo para mínimo)*: Sea $F : (L, s, i) \to (L', s', i')$ un homomorfismo suryectivo y a un elemento máximo de (L, s, i), entonces $F(a)$ es un elemento máximo de (L', s', i').

Congruencias de reticulados terna

- **Congruencia**: Sea (L, s, i) un reticulado terna, una congruencia sobre (L, s, i) será una relación de equivalencia θ sobre L la cual cumpla que $x\theta x' \wedge y\theta y' \Rightarrow (x\ s\ y)\theta(x'\ s\ y') \wedge (x\ i\ y)\theta(x'\ i\ y')$.
  - Por ello, podemos definir en forma no ambigua sobre L/θ dos operaciones binarias $\tilde{s}, \tilde{i}$ tales que $x/\theta\ \tilde{s}\ y/\theta = (x\ s\ y)/\theta$ y $x/\theta\ \tilde{i}\ y/\theta = (x\ i\ y)/\theta$.
- **Cociente**: La terna $(L/\theta, \tilde{s}, \tilde{i})$ es llamada el cociente de (L, s, i) sobre θ y la denotaremos con $(L, s, i)/\theta$
  - **Orden parcial**: Denotaremos con $\tilde{\leq}$ al orden parcial asociado al reticulado terna $(L/\theta, \tilde{s}, \tilde{i})$
- *Propiedades*:
  - *El cociente de un reticulado terna es un reticulado terna*: Sea (L, s, i) un reticulado terna y sea θ una congruencia de (L, s, i), entonces $(L/\theta, \tilde{s}, \tilde{i})$ es un reticulado terna.
  - *Relación entre orden parcial asociado al cociente y congruencia*: Sea (L, s, i) un reticulado terna y sea θ una congruencia de (L, s, i), entonces $x/\theta \mathrel{\tilde{\leq}} y/\theta \iff y\theta(x\ s\ y)\ \forall x, y \in L$.
  - *Cociente mantiene máximo (análogo con el mínimo)*: Sea (L, s, i) un reticulado terna con máximo 1, entonces si θ es una congruencia sobre (L, s, i), $1/\theta$ es el máximo de $(L, s, i)/\theta$.
  - *Única congruencia con máximo y mínimo congruentes*: Sea (L, s, i) un reticulado terna con máximo 1 y mínimo 0. Sea θ una congruencia sobre (L, s, i). Si $(0, 1) \in \theta$, entonces $\theta = L^2$.
  - *El núcleo de un homomorfismo es una congruencia*: Si $F : (L, s, i) \to (L', s', i')$ es un homomorfismo, entonces $ker(F)$ es una congruencia sobre (L, s, i)
  - *La proyección canónica de una congruencia es un homomorfismo*: Sea (L, s, i) un reticulado terna y sea θ una congruencia sobre (L, s, i), entonces π_θ es un homomorfismo de (L, s, i) en

$(L/\theta, \tilde{s}, \tilde{i})$ y $ker(\pi_\theta) = \theta$.

- Sea θ una congruencia del reticulado terna (L, s, i), si $c \in L/\theta$ entonces:
  - c es un subuniverso de (L, s, i)
  - c es un subconjunto convexo de (L, s, i). Es decir que $\forall x, y, z \in L, ((x, y \in \wedge x \leq z \leq y) \Rightarrow z \in c)$
- Sea (L, s, i) un reticulado terna y S un subuniverso de (L, s, i) con θ congruencia de $(S, s|_{S^2}, i|_{S^2})$, entonces hay una congruencia δ de (L, s, i) tal que $\theta = \delta \cap S^2$
- *El cociente de un reticulado terna distributivo es distributivo*: Sea (L, s, i) un reticulado terna distributivo y θ una congruencia de (L, s, i), entonces $(L/\theta, \tilde{s}, \tilde{i})$ es distributivo.
- *Se mantiene el orden parcial asociado entre el reticulado terna y su cociente*: Sea (L, s, i) un reticulado terna, θ una congruencia de (L, s, i) y $(L/\theta, \tilde{s}, \tilde{i})$ el reticulado terna cociente, entonces dados $c, c' \in L/\theta$ tenemos que $c \tilde{\leq} c' \iff \exists x \in c, y \in c' : x \leq y$.