Equivalencia elemental entre $(\mathbb{R}, \leq)$ y $(\mathbb{Q}, \leq)$

November 2024

Estudiante Emanuel Nicolás Herrador
Profesor Diego Vaggione

Consideraciones previas

Sea (Σ, τ) una teoría elemental y N, M dos modelos de ella, decimos que N y M son **elementalmente equivalentes** si cumplen que para cada sentencia de primer orden sobre (Σ, τ) se satisface en N sii se satisface en M. Es decir:

$$\forall \varphi \in S^\tau,\ (N \vDash \varphi \iff M \vDash \varphi)$$

Cuando N, M sean elementalmente equivalentes, lo denotaremos como $N \equiv M$.

Sean $\tau = (\emptyset, \emptyset, \{\leq\}, \{(\leq, 2)\})$ el tipo de los posets y Σ el conjunto formado por las siguientes tres sentencias elementales de tipo τ:

- $\forall x\ (x \leq x)$
- $\forall x, y, z\ ((x \leq y \wedge y \leq z) \to x \leq z)$
- $\forall x, y\ ((x \leq y \wedge y \leq x) \to x = y)$

Consideraremos los modelos $\mathbf{R} = (\mathbb{R}, \leq)$ y $\mathbf{Q} = (\mathbb{Q}, \leq)$ de la *teoría elemental de los posets* (Σ, τ).

Enunciado del Teorema

Los modelos $\mathbf{R}$ y $\mathbf{Q}$ son elementalmente equivalentes. Es decir:

$$\forall \varphi \in S^\tau,\ (\mathbf{R} \vDash \varphi \iff \mathbf{Q} \vDash \varphi)$$

Herramientas a utilizar

Antes de demostrar el teorema, consideraré algunas definiciones y lemas que nos serán de suma utilidad luego.

Definición: Asignaciones ordenadamente equivalentes

Sea $(A, \leq)$ un modelo de (Σ, τ), y sean $\vec{a}, \vec{b} \in A^N$ dos asignaciones de $\mathbf{A}$. Definimos que $\vec{a}, \vec{b}$ son **ordenadamente equivalentes** respecto a $I \subseteq \mathbb{N}$ si:

$$\forall i, j \in I,\ ((a_i \leq a_j) \iff (b_i \leq b_j))$$

Cuando $\vec{a}, \vec{b}$ sean ordenadamente equivalentes respecto a un conjunto $I \subseteq \mathbb{N}$, lo denotaremos como $\vec{a} \sim_I \vec{b}$.

Lema 1: Para las asignaciones a fórmulas solo me importan los valores asignados a las variables libres

Sea $(A, \leq)$ un modelo de (Σ, τ) y sea $\varphi \in F^\tau$. Sean $\vec{a}, \vec{b} \in A^N$ dos asignaciones de $\mathbf{A}$, tales que si $x_i \in Li(\varphi)$ entonces $a_i = b_i$. Entonces:

$$\mathbf{A} \vDash \varphi[\vec{a}] \iff \mathbf{A} \vDash \varphi[\vec{b}]$$

Demostración

Es el *Lema 2* de la Guía 10 (página 7). Allí se encuentra su demostración por inducción.

Lema 2: Asignaciones ordenadamente equivalentes en R preservan satisfacibilidad de fórmulas

Sea $\varphi \in F^\tau$ y sea $I \subseteq \mathbb{N}$ el conjunto finito de índices de las variables libres de φ. Si $\vec{a}, \vec{b} \in R^N$ tal que $\vec{a} \sim_I \vec{b}$, entonces:

$$\mathbf{R} \vDash \varphi[\vec{a}] \iff \mathbf{R} \vDash \varphi[\vec{b}]$$

Demostración

Sea $\varphi \in F^\tau$ y sea $I \subseteq \mathbb{N}$ el conjunto finito de índices de las variables libres de φ. Sean $\vec{a}, \vec{b} \in R^N$ fijos pero arbitrarios tales que $\vec{a} \sim_I \vec{b}$.
Consideremos $n = |Li(\varphi)|$ y $\{r_1, \dots, r_n\}$ la permutación de los índices de I tal que $a_{r_1} \leq \dots \leq a_{r_n}$. Como $\vec{a} \sim_I \vec{b}$, por definición está claro también que $b_{r_1} \leq \dots \leq b_{r_n}$.
Veamos cada uno de los casos en función de n:

- Si $n = 0$, claramente se cumple porque son sentencias.

- Si $n = 1$, consideremos $f : R \to R$ tal que $f(x) = b_{r_1} + (x - a_{r_1}) = x - (a_{r_1} - b_{r_1})$
  Notemos que f es una función biyectiva y se cumple que $\forall x, y \in R,\ (x \leq y \iff f(x) \leq f(y))$
  Para demostrar lo último, sean $x, y \in R$ fijos pero arbitrarios, veamos que:

  $$\begin{aligned} f(x) \leq f(y) &\iff x - (a_{r_1} - b_{r_1}) \leq y - (a_{r_1} - b_{r_1}) \quad \text{por def. de } f \\ &\iff x \leq y \end{aligned}$$

  Como x, y eran fijos pero arbitrarios, se puede extender para todo $x, y \in R$. Luego, se demuestra que f es un isomorfismo en R.
  Por propiedad de isomorfismo, sabemos que $\forall \vec{a} \in R^N, (\mathbf{R} \vDash \varphi[\vec{a}] \iff \mathbf{R} \vDash \varphi[(f(a_1), f(a_2), \dots)])$.
  Sin embargo, como $\forall i \in I,\ f(a_i) = b_i$, por el *Lema 1* tenemos que $\forall \vec{a} \in R^N,\ (\mathbf{R} \vDash \varphi[\vec{a}] \iff \mathbf{R} \vDash \varphi[\vec{b}])$ porque podemos cambiar todos los valores asignados a las variables no libres de φ.
  Con ello, se demuestra para este caso.

- Si $n \geq 2$, consideraremos $f : R \to R$ tal que:

  $$f(x) = \begin{cases} b_{r_i} + \frac{b_{r_{i+1}} - b_{r_i}}{a_{r_{i+1}} - a_{r_i}}(x - a_{r_i}) & \text{si } a_{r_i} \leq x \leq a_{r_{i+1}} \text{ para } i \in \{1, \dots, n\} \\ b_{r_1} + \frac{b_{r_2} - b_{r_1}}{a_{r_2} - a_{r_1}}(x - a_{r_1}) & \text{si } x < a_{r_1} \\ b_{r_n} + \frac{b_{r_n} - b_{r_{n-1}}}{a_{r_n} - a_{r_{n-1}}}(x - a_{r_n}) & \text{si } a_{r_n} < x \end{cases}$$

  Primero, notemos que f es *inyectiva* porque es estrictamente creciente ya que para todo $k \in \{1, \dots, n\}$, por def. $a_{r_{k+1}} \geq a_{r_k}$ y $b_{r_{k+1}} \geq b_{r_k}$ y por ende las pendientes de las rectas entre cada punto (a_{r_k}, b_{r_k}) y $(a_{r_{k+1}}, b_{r_{k+1}})$ son positivas
  Luego, al ser estrictamente creciente, continua y tener $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$, tenemos que f es *suryectiva.*
  Al ser inyectiva y suryectiva, f es *biyectiva.*
  Teniendo esto, solo queda demostrar que $\forall x, y \in R,\ (x \leq y \iff f(x) \leq f(y))$. Sin embargo, esta es una consecuencia del hecho de que f sea estrictamente creciente, por lo que se cumple.
  Ahora, por definición, entonces, tenemos que f es un isomorfismo en R. De forma totalmente análoga al caso anterior, podemos llegar a que $\forall \vec{a} \in R^N,\ (\mathbf{R} \vDash \varphi[\vec{a}] \iff \mathbf{R} \vDash \varphi[\vec{b}])$ ya que podemos cambiar todos los valores asignados a las variables no libres de φ por el *Lema 1.*

Con ello, como se demostró para todo n posible y para $\vec{a}, \vec{b}$ fijos pero arbitrarios, se llega a que $\vec{a} \sim_I \vec{b} \Rightarrow (\mathbf{R} \vDash \varphi[\vec{a}] \iff \mathbf{R} \vDash \varphi[\vec{b}])$ y se demuestra el lema. ■

Lema 3: Agregar a la asignación un racional es igual a agregar un real

Sean $\varphi \in F^\tau$, $\vec{a} \in \mathbb{Q}^N$ e $i \in \mathbb{N}$. Entonces:

$$\begin{aligned} (\forall a \in \mathbb{Q},\ \mathbf{R} \vDash \varphi[\downarrow_i^a (\vec{a})]) &\iff (\forall a \in R,\ \mathbf{R} \vDash \varphi[\downarrow_i^a (\vec{a})]) \\ (\exists a \in \mathbb{Q},\ \mathbf{R} \vDash \varphi[\downarrow_i^a (\vec{a})]) &\iff (\exists a \in R,\ \mathbf{R} \vDash \varphi[\downarrow_i^a (\vec{a})]) \end{aligned}$$

Demostración

Sean $\varphi \in F^\tau$, $\vec{a} \in \mathbb{Q}^N$ e $i \in \mathbb{N}$. Sea I el conjunto de índices de las variables libres de φ y $n = |Li(\varphi)|$, consideraremos $\{r_1, \dots, r_n\}$ a la permutación de los índices de I tal que $a_{r_1} \leq \dots \leq a_{r_n}$.
Vamos a separar la demostración en dos casos:

- **De racionales a reales**: Sea $b \in \mathbb{Q}$ fijo pero arbitrario, podemos notar que:
  - Si $\exists k \in \{1, \dots, n-1\} : a_{r_k} \leq b \leq a_{r_{k+1}}$, entonces $\forall c \in [a_{r_k}, a_{r_{k+1}}], (\downarrow_i^b (\vec{a}) \sim_{I \cup \{i\}} \downarrow_i^c (\vec{a}))$
    Sea $c \in [a_{r_k}, a_{r_{k+1}}]$ fijo pero arbitrario, primero notemos que siempre existe por densidad de $\mathbf{R}$.
    Ahora, como claramente $\vec{a} \sim_I \vec{a}$, nos interesa ver únicamente las relaciones con la asignación para x_i
    Por ello, tenemos que ver que $\forall j \in I, (a_j \leq [\downarrow_i^b (\vec{a})]_i \iff a_j \leq [\downarrow_i^c (\vec{a})]_i)$
    Esto es equivalente a ver que $\forall j \in I, (a_j \leq b \iff a_j \leq c)$
    Como $a_{r_k} \leq b, c \leq a_{r_{k+1}}$, tenemos que $(a_j \leq b \iff a_j \leq a_{r_k})$ y $(a_j \leq c \iff a_j \leq a_{r_k})$.
    Luego, juntando lo anterior, llegamos a lo que queríamos: $\forall j \in I, (a_j \leq b \iff a_j \leq c)$
    Por ello, se demuestra para este caso y, como lo consideramos fijo pero arbitrario, se puede extender para el intervalo $[a_{r_k}, a_{r_{k+1}}]$.
  - Si $b \leq a_{r_1}$, entonces $\forall c \in (-\infty, a_{r_1}], (\downarrow_i^b (\vec{a}) \sim_{I \cup \{i\}} \downarrow_i^c (\vec{a}))$
    Sea $c \in (-\infty, a_{r_1}]$ fijo pero arbitrario, primero notemos que siempre existe porque $\mathbf{R}$ no tiene extremos.
    Ahora, como $b, c \leq a_{r_1}$, entonces esto significa que $b, c \leq a_{r_l} \forall l \in \{1, \dots, n\}$, por lo que se mantiene el orden.
    Luego, se demuestra también para este caso y, como lo consideramos fijo pero arbitrario, se puede extender para el intervalo $(-\infty, a_{r_1}]$.
  - Si $a_{r_n} \leq b$, entonces $\forall c \in [a_{r_n}, \infty), (\downarrow_i^b (\vec{a}) \sim_{I \cup \{i\}} \downarrow_i^c (\vec{a}))$
    La demostración es análoga al caso anterior, pero con el otro extremo.

  Con ello, entonces, podemos ver que siempre se mantiene el orden en cada caso.
  Por el *Lema 2*, eso significa que en cada uno de los casos se mantiene la satisfacibilidad de φ.
  Como b era fijo pero arbitrario, se cumple $\forall b \in \mathbb{Q}$. Además, como la unión de los intervalos de cada caso es igual a $\mathbb{R}$ y siempre existe el c en los intervalos, llegamos a que:

  $$(\forall b \in \mathbb{Q},\ \mathbf{R} \vDash \varphi[\downarrow_i^b (\vec{a})]) \Rightarrow (\forall c \in R,\ \mathbf{R} \vDash \varphi[\downarrow_i^c (\vec{a})])$$
  $$(\exists b \in \mathbb{Q},\ \mathbf{R} \vDash \varphi[\downarrow_i^b (\vec{a})]) \Rightarrow (\exists c \in R,\ \mathbf{R} \vDash \varphi[\downarrow_i^c (\vec{a})])$$

  Con ello, se demuestra la ida.

- **De reales a racionales**: La demostración es análoga pero considerando intervalos de racionales. Notar que se cumple siempre que en un intervalo hay elementos por densidad de $\mathbf{Q}$.

Con ello, se demostró ida y vuelta, por lo que se llega a la doble implicación y se demuestra el lema. ■

Lema 4: Equivalencia elemental entre R y Q para fórmulas con asignación de racionales

Sean $\varphi \in F^\tau$ y $\vec{a} \in \mathbb{Q}^N$. Entonces:

$$\mathbf{R} \vDash \varphi[\vec{a}] \iff \mathbf{Q} \vDash \varphi[\vec{a}]$$

Demostración

Sean $\varphi \in F^\tau$ y $\vec{a} \in \mathbb{Q}^N$. Lo demostraremos por inducción en $k \in \mathbb{N}_0$:

- **Caso base** $k = 0$: Tenemos $\varphi \in F_0^\tau$
  Supongamos $\vec{a} \in \mathbb{Q}^N$. Como por definición las fórmulas atómicas de tipo τ son:
  - $v_1 = v_2$
  - $v_1 \leq v_2$

  Para $v_1, v_2 \in Var$. Entonces, es trivial notar que $\mathbf{R} \vDash \varphi[\vec{a}] \iff \mathbf{Q} \vDash \varphi[\vec{a}]$.
  Luego, se demuestra para $k = 0$.
- **Hipótesis inductiva:** Suponemos $k \in \mathbb{N}_0$ tal que $\forall \varphi \in F_k^\tau$, si $\vec{a} \in \mathbb{Q}^N$, entonces $\mathbf{R} \vDash \varphi[\vec{a}] \iff \mathbf{Q} \vDash \varphi[\vec{a}]$.

- **Paso inductivo** $k+1$: Tenemos $\varphi \in F^\tau_{k+1}$. Luego, si $\vec{a} \in \mathbb{Q}^N$, hay varios casos a considerar por separado:
  - **Misma fórmula** $\varphi = \psi$ para $\psi \in F^\tau_k$:
    Trivial por Hipótesis Inductiva.
  - **Negación** $\varphi = \neg\psi$ para $\psi \in F^\tau_k$:
    Por definición de $\vDash$ sabemos que $\mathbf{R} \vDash \varphi[\vec{a}] \iff \mathbf{R} \nvDash \psi[\vec{a}]$ y $\mathbf{Q} \vDash \varphi[\vec{a}] \iff \mathbf{Q} \nvDash \psi[\vec{a}]$
    Por Hipótesis Inductiva, $\mathbf{R} \vDash \psi[\vec{a}] \iff \mathbf{Q} \vDash \psi[\vec{a}]$. Luego, por contrarrecíproca dos veces, $\mathbf{R} \nvDash \psi[\vec{a}] \iff \mathbf{Q} \nvDash \psi[\vec{a}]$
    Juntando lo anterior, llegamos a $\mathbf{R} \vDash \varphi[\vec{a}] \iff \mathbf{R} \nvDash \psi[\vec{a}] \iff \mathbf{Q} \nvDash \psi[\vec{a}] \iff \mathbf{Q} \vDash \varphi[\vec{a}]$
    Luego, se demuestra para este caso.
  - **Disyunción** $\varphi = \psi \vee \Phi$ para $\psi, \Phi \in F^\tau_k$:
    Por definición de $\vDash$ sabemos que $\mathbf{R} \vDash \varphi[\vec{a}] \iff (\mathbf{R} \vDash \psi[\vec{a}] \vee \mathbf{R} \vDash \Phi[\vec{a}])$ y $\mathbf{Q} \vDash \varphi[\vec{a}] \iff (\mathbf{Q} \vDash \psi[\vec{a}] \vee \mathbf{Q} \vDash \Phi[\vec{a}])$
    Por Hipótesis Inductiva, $\mathbf{R} \vDash \psi[\vec{a}] \iff \mathbf{Q} \vDash \psi[\vec{a}]$ y $\mathbf{R} \vDash \Phi[\vec{a}] \iff \mathbf{Q} \vDash \Phi[\vec{a}]$.
    Luego, por lo anterior podemos llegar a que $\mathbf{R} \vDash \varphi[\vec{a}] \iff (\mathbf{Q} \vDash \psi[\vec{a}] \vee \mathbf{Q} \vDash \Phi[\vec{a}])$
    Aplicando la definición de $\vDash$ nuevamente, llegamos a que $\mathbf{R} \vDash \varphi[\vec{a}] \iff \mathbf{Q} \vDash \varphi[\vec{a}]$
    Por ello, se demuestra para este caso.
  - **Conjunción** $\varphi = \psi \wedge \Phi$ para $\psi, \Phi \in F^\tau_k$:
    Por definición de $\vDash$ sabemos que $\mathbf{R} \vDash \varphi[\vec{a}] \iff (\mathbf{R} \vDash \psi[\vec{a}] \wedge \mathbf{R} \vDash \Phi[\vec{a}])$ y $\mathbf{Q} \vDash \varphi[\vec{a}] \iff (\mathbf{Q} \vDash \psi[\vec{a}] \wedge \mathbf{Q} \vDash \Phi[\vec{a}])$
    Por Hipótesis Inductiva, $\mathbf{R} \vDash \psi[\vec{a}] \iff \mathbf{Q} \vDash \psi[\vec{a}]$ y $\mathbf{R} \vDash \Phi[\vec{a}] \iff \mathbf{Q} \vDash \Phi[\vec{a}]$.
    Luego, por lo anterior podemos llegar a que $\mathbf{R} \vDash \varphi[\vec{a}] \iff (\mathbf{Q} \vDash \psi[\vec{a}] \wedge \mathbf{Q} \vDash \Phi[\vec{a}])$
    Aplicando la definición de $\vDash$ nuevamente, llegamos a que $\mathbf{R} \vDash \varphi[\vec{a}] \iff \mathbf{Q} \vDash \varphi[\vec{a}]$
    Por ello, se demuestra para este caso.
  - **Implicación** $\varphi = \psi \to \Phi$ para $\psi, \Phi \in F^\tau_k$:
    Por definición de $\vDash$ sabemos que $\mathbf{R} \vDash \varphi[\vec{a}] \iff (\mathbf{R} \nvDash \psi[\vec{a}] \vee \mathbf{R} \vDash \Phi[\vec{a}])$ y $\mathbf{Q} \vDash \varphi[\vec{a}] \iff (\mathbf{Q} \nvDash \psi[\vec{a}] \vee \mathbf{Q} \vDash \Phi[\vec{a}])$
    Por Hipótesis Inductiva, $\mathbf{R} \vDash \psi[\vec{a}] \iff \mathbf{Q} \vDash \psi[\vec{a}]$ y $\mathbf{R} \vDash \Phi[\vec{a}] \iff \mathbf{Q} \vDash \Phi[\vec{a}]$.
    Luego, por contrarrecíproca dos veces, $\mathbf{R} \nvDash \psi[\vec{a}] \iff \mathbf{Q} \nvDash \psi[\vec{a}]$
    Si usamos los últimos dos resultados en la definición de $\vDash$ para $\mathbf{R}$, tenemos que $\mathbf{R} \vDash \varphi[\vec{a}] \iff (\mathbf{Q} \nvDash \psi[\vec{a}] \vee \mathbf{Q} \vDash \Phi[\vec{a}])$
    Aplicando la definición de $\vDash$ nuevamente pero para $\mathbf{Q}$, llegamos a que $\mathbf{R} \vDash \varphi[\vec{a}] \iff \mathbf{Q} \vDash \varphi[\vec{a}]$
    Por ello, se demuestra para este caso.
  - **Equivalencia (doble implica)** $\varphi = \psi \leftrightarrow \Phi$ para $\psi, \Phi \in F^\tau_k$:
    Por definición de $\vDash$ sabemos que $\mathbf{R} \vDash \varphi[\vec{a}] \iff ((\mathbf{R} \vDash \psi[\vec{a}] \wedge \mathbf{R} \vDash \Phi[\vec{a}]) \vee (\mathbf{R} \nvDash \psi[\vec{a}] \wedge \mathbf{R} \nvDash \Phi[\vec{a}]))$ y $\mathbf{Q} \vDash \varphi[\vec{a}] \iff ((\mathbf{Q} \vDash \psi[\vec{a}] \wedge \mathbf{Q} \vDash \Phi[\vec{a}]) \vee (\mathbf{Q} \nvDash \psi[\vec{a}] \wedge \mathbf{Q} \nvDash \Phi[\vec{a}]))$
    Por Hipótesis Inductiva, $\mathbf{R} \vDash \psi[\vec{a}] \iff \mathbf{Q} \vDash \psi[\vec{a}]$ y $\mathbf{R} \vDash \Phi[\vec{a}] \iff \mathbf{Q} \vDash \Phi[\vec{a}]$.
    Luego, por contrarrecíproca dos veces, $\mathbf{R} \nvDash \psi[\vec{a}] \iff \mathbf{Q} \nvDash \psi[\vec{a}]$ y $\mathbf{R} \nvDash \Phi[\vec{a}] \iff \mathbf{Q} \nvDash \Phi[\vec{a}]$
    Si usamos los últimos dos resultados en la definición de $\vDash$ para $\mathbf{R}$, tenemos que $\mathbf{R} \vDash \varphi[\vec{a}] \iff ((\mathbf{Q} \vDash \psi[\vec{a}] \wedge \mathbf{Q} \vDash \Phi[\vec{a}]) \vee (\mathbf{Q} \nvDash \psi[\vec{a}] \wedge \mathbf{Q} \nvDash \Phi[\vec{a}]))$
    Aplicando la definición de $\vDash$ nuevamente pero para $\mathbf{Q}$, llegamos a que $\mathbf{R} \vDash \varphi[\vec{a}] \iff \mathbf{Q} \vDash \varphi[\vec{a}]$
    Por ello, se demuestra para este caso.
  - **Para todo** $\varphi = \forall x_i \psi$ para $\psi \in F^\tau_k, x_i \in Var$:
    Por definición de $\vDash$ sabemos que $\mathbf{R} \vDash \varphi[\vec{a}] \iff (\forall a \in R,\ \mathbf{R} \vDash \psi[\downarrow^a_i (\vec{a})])$ y $\mathbf{Q} \vDash \varphi[\vec{a}] \iff (\forall a \in Q,\ \mathbf{Q} \vDash \psi[\downarrow^a_i (\vec{a})])$
    Por Hipótesis Inductiva, $\forall b \in \mathbb{Q}, (\mathbf{R} \vDash \psi[\downarrow^b_i (\vec{a})] \iff \mathbf{Q} \vDash \psi[\downarrow^b_i (\vec{a})])$.
    Luego, tenemos:

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q} \vDash \varphi[\vec{a}] &\iff (\forall a \in Q,\ \mathbf{Q} \vDash \psi[\downarrow^a_i (\vec{a})]) && \text{por def.}\\
&\iff (\forall a \in \mathbb{Q},\ \mathbf{R} \vDash \psi[\downarrow^a_i (\vec{a})]) && \text{por HI}\\
&\iff (\forall a \in R,\ \mathbf{R} \vDash \psi[\downarrow^a_i (\vec{a})]) && \text{por Lema 3}\\
&\iff \mathbf{R} \vDash \varphi[\vec{a}] && \text{por def.}
\end{aligned}$$

    Por ello, se demuestra para este caso.
  - **Existe** $\varphi = \exists v \psi$ para $\psi \in F^\tau_k, v \in Var$:
    Por definición de $\vDash$ sabemos que $\mathbf{R} \vDash \varphi[\vec{a}] \iff (\exists a \in R : \mathbf{R} \vDash \psi[\downarrow^a_i (\vec{a})])$ y $\mathbf{Q} \vDash \varphi[\vec{a}] \iff (\exists a \in Q : \mathbf{Q} \vDash \psi[\downarrow^a_i (\vec{a})])$
    Por Hipótesis Inductiva, $\forall b \in \mathbb{Q}, (\mathbf{R} \vDash \psi[\downarrow^b_i (\vec{a})] \iff \mathbf{Q} \vDash \psi[\downarrow^b_i (\vec{a})])$.

Luego, tenemos:

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q} \models \varphi[\vec{a}] &\iff (\exists a \in Q,\ \mathbf{Q} \models \psi[\downarrow_i^a (\vec{a})]) && \text{por def.}\\
&\iff (\exists a \in \mathbb{Q},\ \mathbf{R} \models \psi[\downarrow_i^a (\vec{a})]) && \text{por HI}\\
&\iff (\exists a \in R,\ \mathbf{R} \models \psi[\downarrow_i^a (\vec{a})]) && \text{por Lema 3}\\
&\iff \mathbf{R} \models \varphi[\vec{a}] && \text{por def.}
\end{aligned}$$

Por ello, se demuestra para este caso.

Con todo esto, se demuestra para el paso inductivo.

Finalmente, por inducción, se demuestra el lema. ■

Demostración del Teorema

Sea $\varphi \in S^\tau$ una sentencia fija pero arbitraria. Por el *Lema 4* tenemos que, sea $\vec{a} \in \mathbb{Q}^N$:

$$\mathbf{R} \models \varphi[\vec{a}] \iff \mathbf{Q} \models \varphi[\vec{a}]$$

Al ser una sentencia, por propiedad, tenemos entonces que:

$$\forall \vec{b}, \vec{c} \in R^N,\ (\mathbf{R} \models \varphi[\vec{b}] \iff \mathbf{R} \models \varphi[\vec{c}])$$
$$\forall \vec{b}, \vec{c} \in Q^N,\ (\mathbf{Q} \models \varphi[\vec{b}] \iff \mathbf{Q} \models \varphi[\vec{c}])$$

Por lo cual llegamos a que:

$$\mathbf{R} \models \varphi \iff \mathbf{Q} \models \varphi$$

Luego, como φ era arbitraria, tenemos que $\forall \varphi \in S^\tau,\ (\mathbf{R} \models \varphi \iff \mathbf{Q} \models \varphi)$, lo que por definición significa que son elementalmente equivalentes. Por ello, $\mathbf{R} \equiv \mathbf{Q}$ y se demuestra el teorema. ■