1 Modelo matematico del valor de verdad de una formula

En esta seccion daremos una definicion matematica que modeliza la idea intuitiva de cuando una formula de tipo τ es verdadera en una estructura dada para una asignacion de elementos a las variables libres de dicha formula. Esto corresponde al punto (2) del programa de logica enunciado en la Guia 7.

El valor de un termino en una estructura

Sea $\mathbf{A} = (A, i)$ una estructura de tipo τ. Una *asignacion de* $\mathbf{A}$ sera un elemento de $A^{\mathbf{N}} = \{$infinituplas de elementos de $A\}$. Si $\vec{a} = (a_1, a_2, ...)$ es una asignacion, entonces diremos que a_j *es el valor que* $\vec{a}$ *le asigna a la variable* x_j.

Dada una estructura $\mathbf{A}$ de tipo τ, un termino $t \in T^\tau$ y una asignacion $\vec{a} = (a_1, a_2, ...) \in A^{\mathbf{N}}$ definamos recursivamente $t^{\mathbf{A}}[\vec{a}]$ de la siguiente manera

(1) Si $t = x_i \in Var$, entonces $t^{\mathbf{A}}[\vec{a}] = a_i$

(2) Si $t = c \in \mathcal{C}$, entonces $t^{\mathbf{A}}[\vec{a}] = i(c)$

(3) Si $t = f(t_1, ..., t_n)$, con $f \in \mathcal{F}_n$, $n \geq 1$ y $t_1, ..., t_n \in T^\tau$, entonces $t^{\mathbf{A}}[\vec{a}] = i(f)(t_1^{\mathbf{A}}[\vec{a}], ..., t_n^{\mathbf{A}}[\vec{a}])$

El elemento $t^{\mathbf{A}}[\vec{a}]$ sera llamado el *valor de* t *en la estructura* $\mathbf{A}$ *para la asignacion* $\vec{a}$.

Veamos un ejemplo. Sea τ el tipo

$$(\{\text{uno}, \text{doli}\}, \{\text{MAS}, \text{P}\}, \{\text{Her}\}, \{(\text{MAS}, 4), (\text{P}, 1), (\text{Her}, 3)\})$$

y sea $\mathbf{A} = (A, i)$ la estructura de tipo τ con universo $A = \mathbf{R}$ y

- $i(\text{uno}) = 9$
- $i(\text{doli}) = 0$
- $i(\text{MAS})$ igual a la operacion

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R}^4 & \rightarrow & \mathbf{R} \\ (x, y, z, w) & \rightarrow & 2x + 4y \end{array}$$

- $i(\text{P})$ igual a la operacion

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \rightarrow & \mathbf{R} \\ x & \rightarrow & 5^x \end{array}$$

- $i(\text{Her}) = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x.y.z = 9\}$

Sea $\vec{a} = (1, 2, 3, 4, 5, ...)$. Claramente $\vec{a}$ es una asignacion de $\mathbf{A}$. Se tiene que:

1. Si $t = \mathsf{X}\mathit{55}\mathbf{4}$, entonces $t^{\mathbf{A}}[\vec{a}] = \mathsf{X}\mathit{55}\mathbf{4}^{\mathbf{A}}[\vec{a}] = 554$ (por (1) de la definicion recursiva de $t^{\mathbf{A}}[\vec{a}]$)

2. Si $t = \text{uno}$, entonces $t^{\mathbf{A}}[\vec{a}] = \text{uno}^{\mathbf{A}}[\vec{a}] = 9$ (por (2) de la definicion recursiva de $t^{\mathbf{A}}[\vec{a}]$)

3. Si $t = \mathrm{P}(\mathsf{X}\mathbf{3})$, entonces

$$\begin{aligned} t^{\mathbf{A}}[\vec{a}] &= \mathrm{P}(\mathsf{X}\mathbf{3})^{\mathbf{A}}[\vec{a}] \\ &= i(\mathrm{P})(\mathsf{X}\mathbf{3}^{\mathbf{A}}[\vec{a}]) \text{ (por (3) de la definicion de } t^{\mathbf{A}}[\vec{a}]) \\ &= i(\mathrm{P})(3) \\ &= 5^3 = 125 \end{aligned}$$

4. Si $t = \mathrm{MAS}(\mathsf{X}\mathbf{1}, \text{uno}, \mathsf{X}\mathbf{3}, \mathsf{X}\mathit{55}\mathbf{4})$, entonces

$$\begin{aligned} t^{\mathbf{A}}[\vec{a}] &= \mathrm{MAS}(\mathsf{X}\mathbf{1}, \text{uno}, \mathsf{X}\mathbf{3}, \mathsf{X}\mathit{55}\mathbf{4})^{\mathbf{A}}[\vec{a}] \\ &= i(\mathrm{MAS})(\mathsf{X}\mathbf{1}^{\mathbf{A}}[\vec{a}], \text{uno}^{\mathbf{A}}[\vec{a}], \mathsf{X}\mathbf{3}^{\mathbf{A}}[\vec{a}], \mathsf{X}\mathit{55}\mathbf{4}^{\mathbf{A}}[\vec{a}]) \\ &= i(\mathrm{MAS})(1, 9, 3, 554) \\ &= 2.1 + 4.9 = 38 \end{aligned}$$

Lemma 1 *Sea* $\mathbf{A}$ *una estructura de tipo* τ *y sea* $t \in T^{\tau}$. *Supongamos que* $\vec{a}, \vec{b}$ *son asignaciones tales que* $a_i = b_i$, *cada vez que* x_i *ocurra en* t. *Entonces* $t^{\mathbf{A}}[\vec{a}] = t^{\mathbf{A}}[\vec{b}]$.

Proof. Sea

- Teo_k: El lema vale para $t \in T_k^{\tau}$.

Teo_0 es facil de probar. Veamos $\text{Teo}_k \Rightarrow \text{Teo}_{k+1}$. Supongamos $t \in T_{k+1}^{\tau} - T_k^{\tau}$ y sean $\vec{a}, \vec{b}$ asignaciones tales que $a_i = b_i$, cada vez que x_i ocurra en t. Notese que $t = f(t_1, ..., t_n)$, con $f \in \mathcal{F}_n$, $n \geq 1$ y $t_1, ..., t_n \in T_k^{\tau}$. Notese que para cada $j = 1, ..., n$, tenemos que $a_i = b_i$, cada vez que x_i ocurra en t_j, lo cual por Teo_k nos dice que

$$t_j^{\mathbf{A}}[\vec{a}] = t_j^{\mathbf{A}}[\vec{b}],\ j = 1, ..., n$$

Se tiene entonces que

$$\begin{aligned} t^{\mathbf{A}}[\vec{a}] &= i(f)(t_1^{\mathbf{A}}[\vec{a}], ..., t_n^{\mathbf{A}}[\vec{a}]) \text{ (por def de } t^{\mathbf{A}}[\vec{a}]) \\ &= i(f)(t_1^{\mathbf{A}}[\vec{b}], ..., t_n^{\mathbf{A}}[\vec{b}]) \\ &= t^{\mathbf{A}}[\vec{b}] \text{ (por def de } t^{\mathbf{A}}[\vec{b}]) \end{aligned}$$

■

Ejercicio 1: Sea $\tau = (\{0,1\}, \{\text{por}, +\}, \{r\}, \{(\text{por}, 2), (+, 2), (r, 2)\})$ y

$$t = +(x_1, \text{por}(+(\text{por}(x_{1000}, 0), x_{13}), +(\text{por}(+(x_2, x_3), 1), x_{13})))$$

Dar $t^{\mathbf{A}}[\vec{a}]$ para los siguientes modelos $\mathbf{A} = (A, i)$ y asignaciones $\vec{a}$:

(a) $A = \{1,2,3\}, i(0) = 1, i(1) = 3, i(r) = \{(1,1), (2,2), (3,3), (1,3), (3,2)\}$

$i(\text{por})$	1	2	3
1	1	1	3
2	1	2	3
3	2	3	2

$i(+)$	1	2	3
1	3	2	3
2	2	3	3
3	3	2	2

i. $\vec{a} = (1, 2, 3, 1, 2, 3, ...)$

ii. $\vec{a} = (1, 1, 2, 2, 1, 1, 2, 2, ...)$

(b) $A = \mathbf{R}$, $i(0) = 0$, $i(1) = 1$, $i(\text{por})(x, y) = x + y$, $i(+)(x, y) = x.y$, $i(r) = \{(x, y) : |x| = |y|\}$ y:

i. $\vec{a} = (1, 2, 3, 4, 5, ...)$

ii. $\vec{a} = (1, 6, 0, 4, 3, 6, 9, 43, 5, 7, 9, 1, 1, 1, 1, 1, ...)$

iii. $\vec{a} = (0, 0, 0, 0, ...)$

($|x|$ denota el modulo de un numero real x)

(c) $A = \mathcal{P}(\mathbf{N})$, $i(0) = \emptyset$, $i(1) = \mathbf{N}$, $i(\text{por})(x, y) = \{1, 4, 7\} \cup y$, $i(+)(x, y) = x - y$, $i(r) = \{(x, y) : x \cup \{1\} = y \cup \{1\}\}$ y:

i. $\vec{a} = (\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, ...)$

ii. $\vec{a} = (\mathbf{N} - \{1\}, \mathbf{N} - \{1, 2\}, \mathbf{N} - \{1, 2, 3\}, \mathbf{N} - \{1, 2, 3, 4\}, ...)$

iii. $\vec{a} = (\emptyset, \emptyset, \emptyset, \emptyset, ...)$

Ejercicio 2: V o F o I, justifique

(a) Sea $\mathbf{A} = (A, i)$ una estructura de tipo τ, sea $t \in T^\tau$ y supongamos que $\vec{a}$ es una asignacion de $\mathbf{A}$. Entonces $Ti(t^{\mathbf{A}}[\vec{a}]) = Ti(A)$

(b) Sea $\mathbf{A}$ una estructura de tipo τ, sea $t \in T^\tau$ y supongamos que $\vec{a}$ es una asignacion de $\mathbf{A}$. Entonces $Ti(t^{\mathbf{A}}[\vec{a}]) = \text{PALABRA}$

(c) Sea $\mathbf{A} = (A, i)$ una estructura de tipo τ, sea $t \in T^\tau$ y supongamos que $\vec{a}$ es una asignacion de $\mathbf{A}$. Entonces si $a \in A$, se tiene que $Ti(t^{\mathbf{A}}[\vec{a}]) = Ti(a)$

(d) Si $\tau = (\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{R}, a)$ es un tipo, $\mathbf{A} = (A, i)$ una estructura de tipo τ y $t \in T^\tau$, entonces $i(t) \in A$

(e) Sea $\mathbf{A}$ una estructura de tipo τ, sea $t \in T^\tau$ y supongamos que $\vec{a}$ es una asignacion de $\mathbf{A}$. Entonces $t(\vec{a}) \in A$

Dada una asignacion $\vec{a} \in A^{\mathbf{N}}$ y $a \in A$, con $\downarrow_i^a (\vec{a})$ denotaremos la asignacion que resulta de reemplazar en $\vec{a}$ el i-esimo elemento por a.

Ejercicio 3: Sea τ un tipo. Sea $t \in T^\tau$ y sea t' el resultado de reemplazar toda ocurrencia de x_i en t por x_l, la cual no ocurre en t. Entonces para cualquier estructura $\mathbf{A}$, cualquier asignacion $\vec{a} \in A^{\mathbf{N}}$ y cualquier $a \in A$, se tiene que $t'^{\mathbf{A}}[\downarrow_l^a (\vec{a})] = t^{\mathbf{A}}[\downarrow_i^a (\vec{a})]$

La relacion $\models$

Dada una asignacion $\vec{a} \in A^{\mathbf{N}}$ y $a \in A$, con $\downarrow_i^a (\vec{a})$ denotaremos la asignacion que resulta de reemplazar en $\vec{a}$ el i-esimo elemento por a. A continuacion definiremos recursivamente la relacion $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}]$, donde $\mathbf{A}$ es una estructura de tipo τ, $\vec{a}$ es una asignacion y $\varphi \in F^\tau$. Escribiremos $\mathbf{A} \not\models \varphi[\vec{a}]$ para expresar que no se da $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}]$.

(1) Si $\varphi = (t \equiv s)$, entonces

- $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}]$ si y solo si $t^{\mathbf{A}}[\vec{a}] = s^{\mathbf{A}}[\vec{a}]$

(2) Si $\varphi = r(t_1, ..., t_m)$, entonces

- $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}]$ si y solo si $(t_1^{\mathbf{A}}[\vec{a}], ..., t_m^{\mathbf{A}}[\vec{a}]) \in i(r)$

(3) Si $\varphi = (\varphi_1 \wedge \varphi_2)$, entonces

- $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}]$ si y solo si $\mathbf{A} \models \varphi_1[\vec{a}]$ y $\mathbf{A} \models \varphi_2[\vec{a}]$

(4) Si $\varphi = (\varphi_1 \vee \varphi_2)$, entonces

- $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}]$ si y solo si $\mathbf{A} \models \varphi_1[\vec{a}]$ o $\mathbf{A} \models \varphi_2[\vec{a}]$

(5) Si $\varphi = (\varphi_1 \rightarrow \varphi_2)$, entonces

- $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}]$ si y solo si $\mathbf{A} \not\models \varphi_1[\vec{a}]$ o $\mathbf{A} \models \varphi_2[\vec{a}]$

(6) Si $\varphi = (\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2)$, entonces

- $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}]$ si y solo si ya sea se dan $\mathbf{A} \models \varphi_1[\vec{a}]$ y $\mathbf{A} \models \varphi_2[\vec{a}]$ o se dan $\mathbf{A} \not\models \varphi_1[\vec{a}]$ y $\mathbf{A} \not\models \varphi_2[\vec{a}]$

(7) Si $\varphi = \neg\varphi_1$, entonces

- $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}]$ si y solo si $\mathbf{A} \not\models \varphi_1[\vec{a}]$

(8) Si $\varphi = \forall x_i \varphi_1$, entonces

- $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}]$ si y solo si para cada $a \in A$, se da que $\mathbf{A} \models \varphi_1[\downarrow_i^a (\vec{a})]$

(9) Si $\varphi = \exists x_i \varphi_1$, entonces

- $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}]$ si y solo si hay un $a \in A$ tal que $\mathbf{A} \models \varphi_1[\downarrow_i^a (\vec{a})]$

Cuando se de $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}]$ diremos que *la estructura* $\mathbf{A}$ *satisface* φ *en la asignacion* $\vec{a}$ y en tal caso diremos que φ *es verdadera en* $\mathbf{A}$ *para la asignacion* $\vec{a}$. Cuando no se de $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}]$ diremos que *la estructura* $\mathbf{A}$ *no satisface* φ *en la asignacion* $\vec{a}$ y en tal caso diremos que φ *es falsa en* $\mathbf{A}$ *para la asignacion* $\vec{a}$. Tambien hablaremos del *valor de verdad de* φ *en* $\mathbf{A}$ *para la asignacion* $\vec{a}$ el cual sera igual a 1 si se da $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}]$ y 0 en caso contrario.

Veamos algunos ejemplos. Sea τ el tipo

$$(\{\text{uno}, \text{doli}\}, \{\text{MAS}, \text{P}\}, \{\text{Her}\}, \{(\text{MAS}, 4), (\text{P}, 1), (\text{Her}, 3)\})$$

y sea $\mathbf{A} = (A, i)$ la estructura de tipo τ con universo $A = \mathbf{R}$ y

- $i(\text{uno}) = 9$
- $i(\text{doli}) = 0$
- $i(\text{MAS})$ igual a la operacion

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R}^4 & \rightarrow & \mathbf{R} \\ (x,y,z,w) & \rightarrow & 2x+4y \end{array}$$

- $i(\text{P})$ igual a la operacion

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \rightarrow & \mathbf{R} \\ x & \rightarrow & 5^x \end{array}$$

- $i(\text{Her}) = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x.y.z = 9\}$

Sea $\vec{a} = (1,2,3,4,5,...)$. Claramente $\vec{a}$ es una asignacion de $\mathbf{A}$. Consideremos los siguientes ejemplos:

(E1) Si $\varphi = (\text{MAS}(\mathsf{X}\mathbf{1}, \text{uno}, \mathsf{X}\mathbf{3}, \mathsf{X}\mathit{55}\mathbf{4}) \equiv \text{P}(\mathsf{X}\mathbf{3}))$, entonces ya que

(a) $\text{MAS}(\mathsf{X}\mathbf{1}, \text{uno}, \mathsf{X}\mathbf{3}, \mathsf{X}\mathit{55}\mathbf{4})^{\mathbf{A}}[\vec{a}] = 38$

(b) $\text{P}(\mathsf{X}\mathbf{3})^{\mathbf{A}}[\vec{a}] = 125$

tenemos que (1) de la definicion nos dice que $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}]$ si y solo si $38 = 125$ por lo cual se saca que $\mathbf{A} \not\models \varphi[\vec{a}]$.

(E2) Si $\varphi = \neg\text{Her}(\text{P}(\text{P}(\mathsf{X}\mathbf{6})), \mathsf{X}\mathbf{3}, \text{doli})$, entonces ya que

- $\text{P}(\text{P}(\mathsf{X}\mathbf{6}))^{\mathbf{A}}[\vec{a}] = 5^{(5^6)}$
- $\mathsf{X}\mathbf{3}^{\mathbf{A}}[\vec{a}] = 3$
- $\text{doli}^{\mathbf{A}}[\vec{a}] = 0$

tenemos que (7) de la definicion nos dice que $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}]$ si y solo si $\mathbf{A} \not\models \text{Her}(\text{P}(\text{P}(\mathsf{X}\mathbf{6})), \mathsf{X}\mathbf{3}, \text{doli})[\vec{a}]$. Pero (2) de la definicion nos dice que $\mathbf{A} \models \text{Her}(\text{P}(\text{P}(\mathsf{X}\mathbf{6})), \mathsf{X}\mathbf{3}, \text{doli})[\vec{a}]$ si y solo si $(5^{(5^6)}, 3, 0) \in i(\text{Her})$ ya que no se da que $(5^{(5^6)}, 3, 0) \in i(\text{Her})$, tenemos que $\mathbf{A} \not\models \text{Her}(\text{P}(\text{P}(\mathsf{X}\mathbf{6})), \mathsf{X}\mathbf{3}, \text{doli})[\vec{a}]$ lo cual nos dice que $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}]$.

(E3) Si $\varphi = \exists \mathsf{X}\mathbf{3}\text{Her}(\mathsf{X}\mathbf{6}, \mathsf{X}\mathbf{3}, \text{uno})$, entonces por (9) de la definicion tenemos que

- $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}]$ sii hay un $r \in \mathbf{R}$ tal que $\mathbf{A} \models \text{Her}(\mathsf{X}\mathbf{6}, \mathsf{X}\mathbf{3}, \text{uno})[\downarrow_3^r (\vec{a})]$

es decir que

- $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}]$ sii hay un $r \in \mathbf{R}$ tal que $\mathbf{A} \models \text{Her}(\mathsf{X}\mathbf{6}, \mathsf{X}\mathbf{3}, \text{uno})[(1,2,r,4,5,6,...)]$

Pero (2) de la definicion nos dice que cualquiera sea $r \in \mathbf{R}$ se tiene que

- $\mathbf{A} \models \text{Her}(\mathsf{X}\mathbf{6}, \mathsf{X}\mathbf{3}, \text{uno})[(1,2,r,4,5,6,...)]$ sii $(6,r,9) \in i(\text{Her})$

O sea que obtenemos finalmente que

- $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}]$ sii hay un $r \in \mathbf{R}$ tal que $6.r.9 = 9$

Lo cual claramente implica que $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}]$ ya que podemos tomar $r = 1/6$.

(E4) Si $\varphi = \forall \mathsf{X}\mathbf{3}((\mathsf{X}\mathbf{4} \equiv \mathsf{X}\mathbf{3}) \to \exists \mathsf{X}\mathbf{6}\mathrm{Her}(\mathsf{X}\mathbf{6}, \mathsf{X}\mathbf{3}, \mathrm{uno}))$, entonces por (8) de la definicion tenemos que

- $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}]$ sii para cada $r \in \mathbf{R}$ se da que

$$\mathbf{A} \models ((\mathsf{X}\mathbf{4} \equiv \mathsf{X}\mathbf{3}) \to \exists \mathsf{X}\mathbf{6}\mathrm{Her}(\mathsf{X}\mathbf{6}, \mathsf{X}\mathbf{3}, \mathrm{uno}))[\downarrow_3^r(\vec{a})]$$

es decir que

- $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}]$ sii para cada $r \in \mathbf{R}$ se da que

$$\mathbf{A} \models ((\mathsf{X}\mathbf{4} \equiv \mathsf{X}\mathbf{3}) \to \exists \mathsf{X}\mathbf{6}\mathrm{Her}(\mathsf{X}\mathbf{6}, \mathsf{X}\mathbf{3}, \mathrm{uno}))[(1, 2, r, 4, 5, 6, ...)]$$

Pero entonces (5) de la definicion nos dice que

- $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}]$ sii para cada $r \in \mathbf{R}$ se da que

  $\mathbf{A} \not\models (\mathsf{X}\mathbf{4} \equiv \mathsf{X}\mathbf{3})[(1, 2, r, 4, 5, 6, ...)]$ o $\mathbf{A} \models \exists \mathsf{X}\mathbf{6}\mathrm{Her}(\mathsf{X}\mathbf{6}, \mathsf{X}\mathbf{3}, \mathrm{uno}))[(1, 2, r, 4, 5, 6, ...)]$

  O sea que

- $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}]$ sii para cada $r \in \mathbf{R}$ se da que

$$r \neq 4 \text{ o } \mathbf{A} \models \exists \mathsf{X}\mathbf{6}\mathrm{Her}(\mathsf{X}\mathbf{6}, \mathsf{X}\mathbf{3}, \mathrm{uno}))[(1, 2, r, 4, 5, 6, ...)]$$

  Es decir que debemos ver cuando se da que $\mathbf{A} \models \exists \mathsf{X}\mathbf{6}\mathrm{Her}(\mathsf{X}\mathbf{6}, \mathsf{X}\mathbf{3}, \mathrm{uno}))[(1, 2, r, 4, 5, 6, ...)]$. Por (9) y (2) de la definicion tenemos que cualquiera sea el $r \in \mathbf{R}$ se da que

- $\mathbf{A} \models \exists \mathsf{X}\mathbf{6}\mathrm{Her}(\mathsf{X}\mathbf{6}, \mathsf{X}\mathbf{3}, \mathrm{uno}))[(1, 2, r, 4, 5, 6, ...)]$ sii hay un $s \in \mathbf{R}$ tal que $s.r.9 = 9$.

Esto nos dice finalmente que

- $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}]$ sii para cada $r \in \mathbf{R}$ se da que

$$r \neq 4 \text{ o hay un } s \in \mathbf{R} \text{ tal que } s.r.9 = 9$$

Pensando un poco esto nos dice que $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}]$ (separar los casos $r = 4$ y $r \neq 4$)

Ejercicio 4: Sea $\mathbf{A}$ una estructura de tipo τ, $\vec{a}$ una asignacion y $\varphi \in F^\tau$. Entonces no puede suceder que $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}]$ y $\mathbf{A} \models \neg\varphi[\vec{a}]$. En particular esto nos dice que $\mathbf{A} \not\models (\varphi \wedge \neg\varphi)[\vec{a}]$. Ademas claramente se da que ya sea $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}]$ o $\mathbf{A} \models \neg\varphi[\vec{a}]$.

Ejercicio 5: Sean

$$\varphi_1 = \exists x_3(r(\text{por}(x_1, x_3), +(0, \text{por}(x_8, x_4))) \to (x_1 \equiv 1))$$
$$\varphi_2 = (\exists x_6(x_4 \equiv \text{por}(x_6, x_6)) \wedge \exists x_5((x_2 \equiv \text{por}(x_4, +(x_5, 0))) \wedge (x_5 \equiv 0)))$$
$$\varphi_3 = \forall x_1 \exists x_2(((\text{por}(x_1, x_{16}) \equiv 1) \wedge (+(x_1, x_2) \equiv 0)) \to r(x_1, x_{16}))$$
$$\varphi_4 = \forall x_1((\exists x_2(\text{por}(x_2, x_{16}) \equiv 1) \to (+(x_1, x_2) \equiv 0)) \to r(x_1, x_{16}))$$
$$\varphi_5 = (\exists x_2 r(x_2, x_{16}) \to r(x_2, x_{16}))$$

Para cada φ_i, decidir si $\mathbf{A} \models \varphi_i[\vec{a}]$, para los modelos y asignaciones del Ejercicio 1

Lemma 2 *Supongamos que $\vec{a}, \vec{b}$ son asignaciones tales que si $x_i \in Li(\varphi)$, entonces $a_i = b_i$. Entonces $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}]$ sii $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{b}]$*

Proof. Probaremos por induccion en k que el lema vale para cada $\varphi \in F_k^\tau$. El caso $k = 0$ se desprende del lema analogo para terminos. Veamos que Teo_k implica Teo_{k+1}. Sea $\varphi \in F_{k+1}^\tau - F_k^\tau$. Hay varios casos:

CASO $\varphi = (\varphi_1 \wedge \varphi_2)$.

Ya que $Li(\varphi_i) \subseteq Li(\varphi)$, $i = 1, 2$, Teo_k nos dice que $\mathbf{A} \models \varphi_i[\vec{a}]$ sii $\mathbf{A} \models \varphi_i[\vec{b}]$, para $i = 1, 2$. Se tiene entonces que

$$\begin{array}{l}
\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}] \\
\ \Updownarrow \ (\text{por (3) en la def de } \mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}]) \\
\mathbf{A} \models \varphi_1[\vec{a}] \text{ y } \mathbf{A} \models \varphi_2[\vec{a}] \\
\ \Updownarrow \ (\text{por Teo}_k) \\
\mathbf{A} \models \varphi_1[\vec{b}] \text{ y } \mathbf{A} \models \varphi_2[\vec{b}] \\
\ \Updownarrow \ (\text{por (3) en la def de } \mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}]) \\
\mathbf{A} \models \varphi[\vec{b}]
\end{array}$$

CASO $\varphi = (\varphi_1 \vee \varphi_2)$.

Es completamente similar al anterior.

CASO $\varphi = (\varphi_1 \to \varphi_2)$.

Es completamente similar al anterior.

CASO $\varphi = (\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2)$.

Es completamente similar al anterior.

CASO $\varphi = \neg\varphi_1$.

Es completamente similar al anterior.

CASO $\varphi = \forall x_j \varphi_1$.

Supongamos $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}]$. Entonces por (8) en la def de $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}]$ se tiene que $\mathbf{A} \models \varphi_1[\downarrow_j^a (\vec{a})]$, para todo $a \in A$. Notese que $\downarrow_j^a (\vec{a})$ y $\downarrow_j^a (\vec{b})$ coinciden en toda $x_i \in Li(\varphi_1)$ ya que $Li(\varphi_1) \subseteq Li(\varphi) \cup \{x_j\}$. O sea que por Teo_k se tiene que $\mathbf{A} \models \varphi_1[\downarrow_j^a (\vec{b})]$, para todo $a \in A$, lo cual por (8) en la def de $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}]$ nos dice que $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{b}]$. La prueba de que $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{b}]$ implica que $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}]$ es similar.

CASO $\varphi = \exists x_j \varphi_1$.

Es similar al anterior. ■

Corollary 3 *Si φ es una sentencia, entonces $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}]$ sii $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{b}]$, cualesquiera sean las asignaciones $\vec{a}, \vec{b}$.*

En virtud del corolario anterior tenemos que el valor de verdad de una sentencia φ en una estructura dada $\mathbf{A}$ para una asignacion $\vec{a}$ no depende de $\vec{a}$, es decir este valor es ya sea 1 para todas las asignaciones o 0 para todas las asignaciones. En el primer caso diremos que φ *es verdadera en* $\mathbf{A}$ (y escribiremos $\mathbf{A} \models \varphi$) y en el segundo caso diremos que φ *es falsa en* $\mathbf{A}$ (y escribiremos $\mathbf{A} \not\models \varphi$)

Ejercicio 6: Sea τ un tipo. Para cada $n \in \mathbf{N}$ dar una sentencia φ_n tal que para todo modelo $\mathbf{A}$ de τ se cumpla $\mathbf{A} \models \varphi_n$ si y solo si A tiene exactamente n elementos

Una sentencia de tipo τ sera llamada *universalmente valida* si es verdadera en cada modelo de tipo τ.

Ejercicio 7: Sean φ, ϕ y ψ sentencias de tipo τ. Las siguientes son universalmente válidas:

(a) $\forall x_1 \exists x_2 (x_1 \equiv x_2)$

(b) $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi))$

(c) $(((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \phi))) \rightarrow (\varphi \rightarrow \phi))$

(d) Strong responsability property: $(((\varphi \wedge \psi) \rightarrow \phi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \phi) \vee (\psi \rightarrow \phi)))$

Equivalencia de formulas

Dadas $\varphi, \psi \in F^\tau$ diremos que φ y ψ son *equivalentes* cuando se de la siguiente condicion

- $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}]$ si y solo si $\mathbf{A} \models \psi[\vec{a}]$, para cada modelo de tipo τ, $\mathbf{A}$ y cada $\vec{a} \in A^{\mathbf{N}}$

Escribiremos $\varphi \sim \psi$ cuando φ y ψ sean equivalentes. Notese que

$$\{(\varphi, \psi) \in F^\tau \times F^\tau : \varphi \sim \psi\}$$

es una relacion de equivalencia sobre F^τ.

Lemma 4 *(a) Si $Li(\phi) \cup Li(\psi) \subseteq \{x_{i_1}, ..., x_{i_n}\}$, entonces $\phi \sim \psi$ si y solo si la sentencia $\forall x_{i_1} ... \forall x_{i_n} (\phi \leftrightarrow \psi)$ es universalmente valida.*

(b) *Si $\phi_i \sim \psi_i$, $i = 1,2$, entonces $\neg\phi_1 \sim \neg\psi_1$, $(\phi_1\eta\phi_2) \sim (\psi_1\eta\psi_2)$ y $Qv\phi_1 \sim Qv\psi_1$.*

(c) *Si $\phi \sim \psi$ y α' es el resultado de reemplazar en una formula α algunas (posiblemente 0) ocurrencias de ϕ por ψ, entonces $\alpha \sim \alpha'$.*

Proof. (a) Tenemos que

$$\begin{array}{l}
\varphi \sim \psi \\
\ \Updownarrow \ \text{(por (6) de la def de} \models \text{)} \\
\mathbf{A} \models (\phi \leftrightarrow \psi)[\vec{a}], \text{ para todo } \mathbf{A} \text{ y toda } \vec{a} \in A^{\mathbf{N}} \\
\ \Updownarrow \\
\mathbf{A} \models (\phi \leftrightarrow \psi)[\downarrow^{a}_{i_n}(\vec{a})], \text{ para todo } \mathbf{A},\ a \in A \text{ y toda } \vec{a} \in A^{\mathbf{N}} \\
\ \Updownarrow \text{(por (8) de la def de} \models \text{)} \\
\mathbf{A} \models \forall x_{i_n}(\phi \leftrightarrow \psi)[\vec{a}], \text{ para todo } \mathbf{A} \text{ y toda } \vec{a} \in A^{\mathbf{N}} \\
\ \Updownarrow \\
\mathbf{A} \models \forall x_{i_n}(\phi \leftrightarrow \psi)[\downarrow^{a}_{i_{n-1}}(\vec{a})], \text{ para todo } \mathbf{A},\ a \in A \text{ y toda } \vec{a} \in A^{\mathbf{N}} \\
\ \Updownarrow \ \text{(por (8) de la def de} \models \text{)} \\
\mathbf{A} \models \forall x_{i_{n-1}}\forall x_{i_n}(\phi \leftrightarrow \psi)[\vec{a}], \text{ para todo } \mathbf{A} \text{ y toda } \vec{a} \in A^{\mathbf{N}} \\
\ \Updownarrow \\
\quad \vdots \\
\ \Updownarrow \\
\mathbf{A} \models \forall x_{i_1} \ldots \forall x_{i_n}(\phi \leftrightarrow \psi)[\vec{a}], \text{ para todo } \mathbf{A} \text{ y toda } \vec{a} \in A^{\mathbf{N}} \\
\ \Updownarrow \\
\forall x_{i_1} \ldots \forall x_{i_n}(\phi \leftrightarrow \psi) \text{ es universalmente valida}
\end{array}$$

(b) Es dejado al lector.
(c) Por induccion en el k tal que $\alpha \in F^{\tau}_{k}$. ■

Ejercicio 8: Sea $\tau = (\{0,1\}, \{\text{por}, +\}, \{r\}, \{(\text{por}, 2), (+, 2), (r, 2)\})$. Decida si son equivalentes

(a) $\exists x_1 \forall x_2 r(x_1, x_2)$ y $\forall x_1 \exists x_2 r(x_1, x_2)$

(b) $(\exists x_1(\text{por}(x_5, x_5) \equiv x_1) \vee (x_3 \equiv x_3))$ y $\exists x_1(\text{por}(x_5, x_5) \equiv x_1)$

(c) $\exists x_1 \forall x_1 r(x_1, x_1)$ y $\exists x_1 r(x_1, x_1)$

(d) $\exists x_1 \forall x_1 r(x_1, x_1)$ y $\forall x_1 r(x_1, x_1)$

(e) $\forall x_1\ r(x_1, x_2)$ y $\forall x_1\ r(x_1, x_3)$

Ejercicio 9: Sea τ un tipo.

(a) Para $\varphi \in F^{\tau}$ definimos φ' = resultado de reemplazar en φ toda ocurrencia de $\forall x_1 \forall x_2 \exists$ por $\forall x_2 \forall x_1 \exists$. Pruebe que $\varphi' \sim \varphi$

(b) Sea $\alpha \in F^{\tau}$. Si α' es el resultado de remover de α una ocurrencia de la palabra $\neg\neg$ entonces α' es equivalente a α

Un poco de semantica

Dado que las estructuras de tipo τ constituyen los "mundos posibles" donde las formulas de tipo τ se "interpretan" se suele llamar semantica al estudio general de las estructuras y su vinculacion con el lenguaje. Aqui daremos algunas nociones basicas de semantica.

Homomorfismos

La nocion de homomorfismo estaba restringida a unos pocos casos particulares de estructuras estudiadas pero ahora con nuestra definicion general de estructura podemos generalizarla en forma natural. Antes una notacion muy util. Dado un modelo de tipo τ, $\mathbf{A} = (A, i)$, para cada $s \in \mathcal{C} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{R}$, usaremos $s^{\mathbf{A}}$ para denotar a $i(s)$. Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ modelos de tipo τ. Una funcion $F : A \to B$ sera un *homomorfismo de* $\mathbf{A}$ *en* $\mathbf{B}$ si se cumplen las siguientes

(1) $F(c^{\mathbf{A}}) = c^{\mathbf{B}}$, para todo $c \in \mathcal{C}$,

(2) $F(f^{\mathbf{A}}(a_1, ..., a_n)) = f^{\mathbf{B}}(F(a_1), ..., F(a_n))$, para cada $f \in \mathcal{F}_n$, $a_1, ..., a_n \in A$.

(3) $(a_1, ..., a_n) \in r^{\mathbf{A}}$ implica $(F(a_1), ..., F(a_n)) \in r^{\mathbf{B}}$, para todo $r \in \mathcal{R}_n$, $a_1, ..., a_n \in A$.

Un *isomorfismo de* $\mathbf{A}$ *en* $\mathbf{B}$ sera un un homomorfismo de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$ el cual sea biyectivo y cuya inversa sea un homomorfismo de $\mathbf{B}$ en $\mathbf{A}$. Diremos que los modelos $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son *isomorfos* (en simbolos: $\mathbf{A} \cong \mathbf{B}$), cuando haya un isomorfismo F de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$. Diremos que $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ *es un homomorfismo* para expresar que F es un homomorfismo de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$. Analogamente diremos que $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ *es un isomorfismo* para expresar que F es un isomorfismo de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$.

Tal como sucedia para el caso de las distintas estructuras reticuladas estudiadas en las primeras guias, tenemos que cuando $\mathcal{R} = \emptyset$, la nocion de isomorfismo se simplifica

Ejercicio 10: Supongamos $\mathcal{R} = \emptyset$. Sea $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ un homomorfismo biyectivo. Entonces F es un isomorfismo

Lemma 5 *Sea $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ un homomorfismo. Entonces*

$$F(t^{\mathbf{A}}[(a_1, a_2, ...)] = t^{\mathbf{B}}[(F(a_1), F(a_2), ...)]$$

para cada $t \in T^\tau$, $(a_1, a_2, ...) \in A^{\mathbf{N}}$.

Proof. Sea

- Teo$_k$: Si $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ es un homomorfismo, entonces

$$F(t^{\mathbf{A}}[(a_1, a_2, ...)]) = t^{\mathbf{B}}[(F(a_1), F(a_2), ...)]$$

  para cada $t \in T^\tau_k$, $(a_1, a_2, ...) \in A^{\mathbf{N}}$.

Teo$_0$ es trivial. Veamos que Teo$_k$ implica Teo$_{k+1}$. Supongamos que vale Teo$_k$ y supongamos $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ es un homomorfismo, $t \in T^\tau_{k+1} - T^\tau_k$ y $\vec{a} = (a_1, a_2, ...) \in A^{\mathbf{N}}$. Denotemos $(F(a_1), F(a_2), ...)$ con $F(\vec{a})$. Ya que $t \in T^\tau_{k+1} - T^\tau_k$, tenemos que $t = f(t_1, ..., t_n)$, con $n \geq 1$, $f \in \mathcal{F}_n$ y $t_1, ..., t_n \in T^\tau_k$. Entonces

$$\begin{array}{rcl} F(t^{\mathbf{A}}[\vec{a}]) & = & F(f(t_1, ..., t_n)^{\mathbf{A}}[\vec{a}]) \\ & = & F(f^{\mathbf{A}}(t_1^{\mathbf{A}}[\vec{a}], ..., t_n^{\mathbf{A}}[\vec{a}])) \\ & = & f^{\mathbf{B}}(F(t_1^{\mathbf{A}}[\vec{a}]), ..., F(t_n^{\mathbf{A}}[\vec{a}])) \\ & = & f^{\mathbf{B}}(t_1^{\mathbf{B}}[F(\vec{a})], ..., t_n^{\mathbf{B}}[F(\vec{a})])) \\ & = & f(t_1, ..., t_n)^{\mathbf{B}}[F(\vec{a})] \\ & = & t^{\mathbf{B}}[F(\vec{a})] \end{array}$$

■

Lemma 6 *Supongamos que $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ es un isomorfismo. Sea $\varphi \in F^\tau$. Entonces*

$$\mathbf{A} \models \varphi[(a_1, a_2, ...)] \text{ sii } \mathbf{B} \models \varphi[(F(a_1), F(a_2), ...)]$$

para cada $(a_1, a_2, ...) \in A^{\mathbf{N}}$. En particular $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ satisfacen las mismas sentencias de tipo τ.

Proof. Por induccion. Sea

- Teo$_k$: Supongamos que $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ es un isomorfismo. Sea $\varphi \in F^\tau_k$. Entonces

$$\mathbf{A} \models \varphi[(a_1, a_2, ...)] \text{ sii } \mathbf{B} \models \varphi[(F(a_1), F(a_2), ...)]$$

  para cada $(a_1, a_2, ...) \in A^{\mathbf{N}}$

Prueba de Teo$_0$. Supongamos que $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ es un isomorfismo, $\varphi \in F^\tau_0$ y $(a_1, a_2, ...) \in A^{\mathbf{N}}$. Probaremos que

$$\mathbf{A} \models \varphi[(a_1, a_2, ...)] \text{ sii } \mathbf{B} \models \varphi[(F(a_1), F(a_2), ...)]$$

Hay dos casos. Caso $\varphi = r(t_1, ..., t_n)$, con $n \geq 1$, $r \in \mathcal{R}_n$ y $t_1, ..., t_n \in T^\tau$. Denotemos con $\vec{a}$ a $(a_1, a_2, ...)$ y con $F(\vec{a})$ a $(F(a_1), F(a_2), ...)$. Tenemos entonces

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}] & \text{sii} & (t_1^{\mathbf{A}}[\vec{a}], ..., t_m^{\mathbf{A}}[\vec{a}]) \in r^{\mathbf{A}} \text{ (def de } \models \text{)} \\ & \text{sii} & (F(t_1^{\mathbf{A}}[\vec{a}]), ..., F(t_n^{\mathbf{A}}[\vec{a}])) \in r^{\mathbf{B}} \text{ (} F \text{ es iso)} \\ & \text{sii} & (t_1^{\mathbf{B}}[F(\vec{a})]), ..., t_n^{\mathbf{B}}[F(\vec{a})]) \in r^{\mathbf{B}} \text{ (Lema } \mathbf{??}\text{)} \\ & \text{sii} & \mathbf{B} \models \varphi[F(\vec{a})] \end{array}$$

Dejamos al lector completar la prueba de que Teo$_k$ implica Teo$_{k+1}$ ■

Ejercicio 11: Completar la prueba del lema anterior

Ejercicio 12: Encuentre resultados probados o dejados como ejercicios en las guias de posets y reticulados, los cuales sean consecuencia inmediata del lema anterior