Guía 6: *Reticulados cuaterna y su lenguaje elemental*

Definición

- Un **reticulado cuaterna** es una 4-upla $(L, s, i, \leq)$ tal que L es un conjunto no vacío, s e i son operaciones binarias sobre L, $\leq$ es una relación binaria sobre L y se cumplen las siguientes propiedades:
    1. *Reflexividad*: $\forall x \in L, x \leq x$
    2. *Transitividad*: $\forall x, y, z \in L, x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$
    3. *Antisimetría*: $\forall x, y \in L, x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$
    4. *Cota superior (1)*: $\forall x, y \in L, x \leq x\ s\ y \wedge y \leq x\ s\ y$
    5. *Cota superior (2)*: $\forall x, y, z \in L, x \leq z \wedge y \leq z \Rightarrow x\ s\ y \leq z$
    6. *Cota inferior (1)*: $\forall x, y \in L, x\ i\ y \leq x \wedge x\ i\ y \leq y$
    7. *Cota inferior (2)*: $\forall x, y, z \in L, z \leq x \wedge z \leq y \Rightarrow z \leq x\ i\ y$
- *Misma información que reticulado terna*: una 4-upla $(L, s, i, \leq)$ es un reticulado cuaterna $\iff$ (L, s, i) es un reticulado terna y $\leq$ es su orden parcial asociado.
    - En base a esto, muchos conceptos definidos para posets o reticulados terna los usaremos referidos a un reticulado cuaterna.

Lenguaje elemental de reticulados cuaterna

- Tengamos en cuenta que las **fórmulas elementales de reticulados cuaterna** son *palabras* que se construyen usando símbolos de la siguiente lista:
    - $\forall\ \exists\ \neg\ \vee\ \wedge\ \rightarrow \leftrightarrow\ (\ )\ =\ s\ i\ \leq$
    - Variables: $x, y, z, w, ...$
    - Nombres de elementos fijos: $a, b, c, d, ...$

Términos elementales de reticulados cuaterna

- Los **términos elementales de reticulados cuaterna** son *palabras* que representan el resultado de aplicar a las variables y a los nombres de elementos fijos las operaciones s e i cierta cantidad de veces.
- *Reglas constructivas*: sean s, t términos elementales de reticulados cuaterna entonces
    - Cada variable
    - Cada nombre de elemento fijo
    - $(t\ s\ s)$
    - $(t\ i\ s)$

  son términos elementales de reticulados cuaterna y es la única forma de construirlos.
- Un término elemental t *representa o asume un valor* cuando tenemos un reticulado cuaterna concreto y le asignamos valores a las variables y nombres de elementos fijos que ocurren en t.

Fórmulas elementales de reticulados cuaterna

- *Reglas constructivas*: sean t, s términos elementales de reticulados cuaterna y φ_1, φ_2 fórmulas elementales de reticulados cuaterna, entonces:
    - $(t = s)$
    - $(t \leq s)$
    - $\varphi_1 \wedge \varphi_2$
    - $\varphi_1 \vee \varphi_2$

- $\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2$
- $\varphi_1 \to \varphi_2$
- $\neg\varphi_1$
- $\forall x\varphi_1$ $\forall y\varphi_1$ $\forall z\varphi_1$ ...
- $\exists x\varphi_1$ $\exists y\varphi_1$ $\exists z\varphi_1$ ...

son fórmulas elementales de reticulados cuaterna y es la única forma de construirlas.

- Una fórmula elemental *asume o representa* un valor de verdadero o falto cuando tenemos un reticulado cuaterna concreto $(L, s, i, \leq)$ y además asignamos valores concretos de L a las variables libres y a los nombres de elementos fijos que ocurren en dicha fórmula.
  - Cabe destacar que los cuantificadores siempre ranguean sobre L.

Sentencias elementales de reticulados cuaterna

- Una **sentencia elemental de reticulados cuaterna** es una fórmula elemental de reticulados cuaterna que no tiene variables libres
- *Variables libres*:
  - Si una variable ocurre varias veces en una fórmula, entonces algunas de aquellas ocurrencias serán libres y otras no
  - A las ocurrencias que no son libres las llamaremos *acotadas*.
  - Cuando digamos que x es una *variable libre* de una fórmula φ, nos estaremos refiriendo a que x ocurre al menos una vez libremente en φ (aunque también puede ocurrir acotadamente)

Alcance de la ocurrencia de un cuantificador

- Un *cuantificador* es una palabra formada por alguno de los símbolos $\forall$ $\exists$ seguido de una variable.
- *Propiedad*: Siempre que un cuantificador ocurra en una fórmula, seguido a dicha ocurrencia ocurrirá una fórmula elemental (la cual además es única).
  - *Alcance*: En base a esto, el alcance de una ocurrencia de un cuantificador es el espacio ocupado por la única fórmula que ocurre inmediatamente después de dicha ocurrencia dle cuantificador.

Pruebas elementales de reticulados cuaterna

- Las propiedades que definen a un reticulado cuaterna pueden ser escritas como sentencias elementales de reticulados cuaterna:

  1. *Reflexividad*: $A_{\leq R} = \forall x(x \leq x)$
  2. *Transitividad*: $A_{\leq T} = \forall x\forall y\forall z((x \leq y \wedge y \leq z) \to x \leq z)$
  3. *Antisimetría*: $A_{\leq A} = \forall x\forall y((x \leq y \wedge y \leq x) \to x = y)$
  4. *Cota superior (1)*: $A_{s \text{ es } C} = \forall x\forall y(x \leq x\ s\ y \wedge y \leq x\ s\ y)$
  5. *Cota superior (2)*: $A_{s \leq C} = \forall x\forall y\forall z((x \leq z \wedge y \leq z) \to x\ s\ y \leq z)$
  6. *Cota inferior (1)*: $A_{i \text{ es } C} = \forall x\forall y(x\ i\ y \leq x \wedge x\ i\ y \leq y)$
  7. *Cota inferior (2)*: $A_{i \geq C} = \forall x\forall y\forall z((z \leq x \wedge z \leq y) \to z \leq x\ i\ y)$

- Llamaremos **pruebas elementales de reticulados cuaterna** a las pruebas que tengan las siguientes características:

  1. Se parte de una estructura $(L, s, i, \leq)$ de la cual solo sabemos que satisface los axiomas $A_{\leq R}, A_{\leq A}, A_{\leq T}, A_{s \text{ es } C}, A_{s \leq C}, A_{i \text{ es } C}, A_{i \geq C}$
  2. Las deducciones de la prueba son muy simples y obvias de justificar con mínimas frases en castellano
  3. En la escritura de la prueba, lo concerniente a la matemática misma se expresa usando solo sentencias elementales de reticulados cuaterna