Logica matematica

En el primer tercio de la materia nos focalizamos en aprender algebra con la intencion de volvernos lo mas "algebristas profecionales" que podamos. Para esto fuimos exigentes a la hora de delimitar y manejar nuestro lenguaje matematico y tambien a la hora de hacer pruebas pusimos mucha atencion en hacerlas "perfectas" en el sentido de que sean similares a las que haria un algebrista formado.

Pero para que hicimos esto? Muy simple: la logica matematica es *matematica aplicada* al estudio de los matematicos, su lenguaje y sus metodos de demostracion, y que mas comodo para hacer logica matematica que contar con un matematico dentro de uno mismo para estudiarlo! Tal como

- un biologo estudia la estructura y funcionamiento de los seres vivos,
- un astronomo estudia los cuerpos celestes,
- un fisico estudia la materia y su comportamiento,

un logico matematico estudia con herramientas matematicas a los mismos matematicos en cuanto a sus caracteristicas en su roll haciendo matematica. Es decir nos interesa dar un modelo matematico que describa en forma matematica precisa el funcionamiento de un matematico en cuanto a su lenguaje y sus metodos de demostracion. Pero algo debe quedar muy claro: haremos matematica aplicada, es decir, no es nuestra intencion decirle a un matematico como debe razonar! Todo lo contrario, sabemos que los matematicos profecionales actuales razonan correctamente y que su estilo de prueba es correcto, dado el avansado estado actual de la disciplina y de sus profecionales. Simplemente los estudiaremos con herramientas matematicas para tratar de dar una descripcion matematica de su lenguaje y de sus metodos de demostracion.

Por supuesto hacer logica matematica puede ser muy dificil o escurridizo ya que como todos sabemos los matematicos tienen metodos dificiles de entender y un lenguaje verdaderamente complicado.

La forma en la que encararemos el problema sera la siguiente. En lugar de estudiar a un matematico en su actividad real crearemos un "contexto matematico simplificado" en el cual tambien tenga sentido hacer matematica profecional y luego estudiaremos a un matematico haciendo matematica en este contexto. Por supueto esto baja mucho el nivel de nuestra ambicion cientifica como logicos matematicos ya que en lugar de estudiar a los matematicos en su vida real, los estudiaremos en un contexto simplificado. Sin envargo como veremos mas adelante nuestra simplificacion no nos hara perder generalidad y los resultados obtenidos daran un modelo matematico fidedigno y completo del quehacer matematico real. Este hecho es uno de los logros mas importantes de la ciencia moderna.

Para crear este "contexto matematico simplificado" nos serviran los conceptos de lenguaje elemental y prueba elemental. Mas concretamente fijaremos un tipo de estructura, por ejemplo los reticulados cuaterna, y estudiaremos a un matematico profecional haciendo matematica en este contexto elemental. Es decir le pediremos que realice pruebas de propiedades que valgan en todos los reticulados cuaterna pero lo restringirenos en su lenguaje, es decir le pediremos que se limite a usar solo formulas elementales de reticulados cuaterna y que las pruebas que realice sean tambien elementales de reticulados cuaterna. El matematico rapidamente entendera la consigna y posiblemente refunfuñe un poco porque claramente lo estamos restrinjiendo mucho en relacion a su manera de hacer matematica (por ejemplo no podra hablar de filtros primos, etc). De todas maneras las posibilidades de hacer matematica profunda e interesante aun con esta restriccion son inmensas, es decir hay verdades de reticulados cuaterna que son elementales en enunciado y prueba pero son extremadamente dificiles, ingeniosas y profundas.

En este proyecto de hacer logica matematica estudiando a un matematico haciendo matematica elemental de reticulados cuaterna hay varias cosas para hacer y las establecemos a continuacion.

Programa de logica sobre reticulados cuaterna

- Dar un modelo matematico del concepto de formula elemental de reticulados cuaterna

- Dar una definicion matematica de cuando una formula elemental es verdadera en un reticulado cuaterna dado, para una asignacion dada de valores a las variables libres y a los nombres de constantes fijas de la formula

- (Plato gordo) Dar un modelo matematico del concepto de prueba elemental de reticulados cuaterna. A estos objetos matematicos que modelizaran a las pruebas elementales de los matematicos los llamaremos pruebas formales de reticulados cuaterna.

- (Sublime) Intentar probar matematicamente que nuestro concepto de prueba formal de reticulados cuaterna es una correcta modelizacion matematica del concepto intuitivo de prueba elemental de reticulados cuaterna.

Como veremos, los cuatro puntos anteriores pueden ser hechos satisfactoriamente y constituyen el comienzo de la logica matematica con cuantificadores. Cabe aclarar que la realizacion del cuarto punto es realmente sorprendente ya que es un caso de una prueba matematica rigurosa de un enunciado que involucra un concepto intuitivo como lo es el de prueba elemental.

Ya que la realizacion de los 4 puntos anteriores no depende en absoluto de que hayamos elejido el tipo de estructura de los reticulados cuaterna (es decir, el desarrollo que resuelve los 4 puntos anteriores para los reticulados cuaterna puede adaptarse facilmente para cualquiera de los otros tipos de estructuras descriptos en la Guia 7), haremos las cosas con mas generalidad.

Primero, basados en la Guia 7, generalizaremos el concepto de estructura. La generalizacion que daremos del concepto de estructura es realmente muy amplia y nos llevara mucho trabajo de entrenamiento poder manejarla con madurez y naturalidad. Luego en la ultima seccion de esta guia estableceremos para un tipo generico de estructura el programa de logica arriba escrito para el caso particular de los reticulados cuaterna. En las subsiguientes guias nos dedicaremos a resolver dicho programa general.

Tipos

Para generalizar el concepto de estructura es clave primero dar definiciones generales de los conceptos de operacion y de relacion sobre un conjunto.

Sea A un conjunto y sea $n \in \mathbf{N}$. Por una *operacion n-aria sobre A* entenderemos una funcion cuyo dominio es A^n y cuya imagen esta contenida en A. Por una *relacion n-aria sobre A* entenderemos un subconjunto de A^n. Notar que por la definicion anterior una relacion 1-aria sobre A no es ni mas ni menos que un subconjunto de A.

Como venimos viendo hay una variedad de tipos de estructuras las cuales tienen un sentido o interes matematico claro y todas son de un formato similar, a saber uplas formadas por una primera coordenada que es un conjunto no vacio (llamado el universo de la estructura) y luego ciertas operaciones, relaciones y elementos distinguidos, dependiendo del caso. Otra cosa a notar es que para cada tipo de estructura hay ciertos simbolos fijos que usamos en forma generica para denotar sus relaciones, operaciones y elementos distinguidos. Por ejemplo:

- Para los posets usamos el simbolo $\leq$ para denotar la relacion (2-aria) de orden parcial en un sentido generico.

- Para el caso de los reticulados terna usamos en forma generica los simbolos s e i para denotar sus operaciones (2-arias) supremo e infimo

- Para el caso de los reticulados acotados usamos en forma generica los simbolos s e i para denotar sus operaciones (2-arias) supremo e infimo y los numerales 0 y 1 para denotar sus elementos distinguidos, a saber maximo y minimo respectivamente.

- Para el caso de los reticulados complementados usamos en forma generica los simbolos s e i para denotar sus operaciones (2-arias) supremo e infimo, el simbolo c para denotar su operacion (1-aria) de complementacion y los numerales 0 y 1 para denotar sus elementos distinguidos, a saber maximo y minimo respectivamente.

- Para el caso de los reticulados cuaterna usamos en forma generica los simbolos s e i para denotar sus operaciones (2-arias) supremo e infimo y el simbolo $\leq$ para denotar su relacion (2-aria) de orden parcial

- Para las median algebras usamos genericamente el simbolo M para denotar su operacion 3-aria.

- Para los grafos usamos el simbolo r para denotar en forma generica su relacion 2-aria.

- Para los grafos bicoloreados usamos el simbolo r para denotar en forma generica la relacion 2-aria del grafo y el simbolo R para denotar genericamente la relacion 1-aria que determina el bicoloreo

O sea que para cada tipo de estructuras se distinguen tres conjuntos de simbolos:

- un conjunto $\mathcal{C}$ formado por los simbolos que denotaran genericamente los elementos distinguidos de las estructuras

- un conjunto $\mathcal{F}$ formado por los simbolos que denotaran genericamente las operaciones de las estructuras

- un conjunto $\mathcal{R}$ formado por los simbolos que denotaran genericamente las relaciones de las estructuras

Ademas otra informacion importante que se tiene para cada tipo de estructura es la aridad de las operaciones que denotan los simbolos de $\mathcal{F}$ y la aridad de las relaciones que denotan los simbolos de $\mathcal{R}$. A esto lo representaremos con una funcion $a : \mathcal{F} \cup \mathcal{R} \to \mathbf{N}$ la cual le asocia a cada simbolo de $\mathcal{F} \cup \mathcal{R}$ la aridad del objeto que denota.

Ejemplos:

- Posets: $\mathcal{C} = \emptyset \quad \mathcal{F} = \emptyset \quad \mathcal{R} = \{<\} \quad a = \{(<, 2)\}$

- Reticulados terna: $\mathcal{C} = \emptyset \quad \mathcal{F} = \{\mathsf{s}, \mathsf{i}\} \quad \mathcal{R} = \emptyset \quad a = \{(\mathsf{s}, 2), (\mathsf{i}, 2)\}$

- Reticulados acotados: $\mathcal{C} = \{0, 1\} \quad \mathcal{F} = \{\mathsf{s}, \mathsf{i}\} \quad \mathcal{R} = \emptyset \quad a = \{(\mathsf{s}, 2), (\mathsf{i}, 2)\}$

- Reticulados comp.: $\mathcal{C} = \{0, 1\} \quad \mathcal{F} = \{\mathsf{s}, \mathsf{i}, c\} \quad \mathcal{R} = \emptyset \quad a = \{(\mathsf{s}, 2), (\mathsf{i}, 2), (c, 1)\}$

- Reticulados cuaterna: $\mathcal{C} = \emptyset \quad \mathcal{F} = \{\mathsf{s}, \mathsf{i}\} \quad \mathcal{R} = \{<\} \quad a = \{(\mathsf{s}, 2), (\mathsf{i}, 2), (<, 2)\}$

- Median algebras: $\mathcal{C} = \emptyset \quad \mathcal{F} = \{M\} \quad \mathcal{R} = \emptyset \quad a = \{(M, 3)\}$

- Grafos: $\mathcal{C} = \emptyset \quad \mathcal{F} = \emptyset \quad \mathcal{R} = \{r\} \quad a = \{(r, 2)\}$

- Grafos bicoloreados: $\mathcal{C} = \emptyset \quad \mathcal{F} = \emptyset \quad \mathcal{R} = \{r, R\} \quad a = \{(r, 2), (R, 1)\}$

Por supuesto aqui es muy importante no confundir los simbolos con los objetos que eventualmente ellos denotan. O sea en todos los ejemplos anteriores los elementos de $\mathcal{C}$, $\mathcal{F}$ y $\mathcal{R}$ son simbolos, es decir su Ti es PALABRA.

Lo anterior motiva la siguiente definicion de tipo (de estructura). Antes de darla recordemos que si α, β son palabras cualesquiera, decimos que α *es subpalabra (propia) de* β cuando ($\alpha \notin \{\varepsilon, \beta\}$ y) existen palabras δ, γ tales que $\beta = \delta\alpha\gamma$.

Ahora si, nuestra definicion de tipo:

Por un *tipo* (*de primer orden*) entenderemos una 4-upla $\tau = (\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{R}, a)$ tal que:

(1) Hay alfabetos finitos Σ_1, Σ_2 y Σ_3 tales:

   (a) $\mathcal{C} \subseteq \Sigma_1^+$, $\mathcal{F} \subseteq \Sigma_2^+$ y $\mathcal{R} \subseteq \Sigma_3^+$

   (b) Σ_1, Σ_2 y Σ_3 son disjuntos de a pares.

   (c) $\Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3$ no contiene ningun simbolo de la lista
   $\forall\ \exists\ \neg\ \vee\ \wedge\ \rightarrow \leftrightarrow\ (\ )\ ,\ \equiv \mathsf{X}\ \mathit{0}\ \mathit{1}\ ...\ \mathit{9}\ \mathbf{0}\ \mathbf{1}\ ...\ \mathbf{9}$

(2) $a : \mathcal{F} \cup \mathcal{R} \rightarrow \mathbf{N}$ es una funcion que a cada $p \in \mathcal{F} \cup \mathcal{R}$ le asocia un numero natural $a(p)$, llamado la *aridad* de p.

(3) Ninguna palabra de $\mathcal{C}$ (resp. $\mathcal{F}$, $\mathcal{R}$) es subpalabra propia de otra palabra de $\mathcal{C}$ (resp. $\mathcal{F}$, $\mathcal{R}$).

Notese que los elementos de $\mathcal{C}$, $\mathcal{F}$ y $\mathcal{R}$ pueden ser palabras y no solo simbolos (como sucede en los casos de los tipos de estructuras conocidas). Mas adelante cuando definamos las *formulas de tipo* τ se entenderan las restricciones puestas en (c) de (1) y en (3).

A los elementos de $\mathcal{C}$ (resp. $\mathcal{F}$, $\mathcal{R}$) los llamaremos *nombres de constante* (resp. *nombres de funcion, nombres de relacion*) *de tipo* τ. Para cada $n \in \mathbf{N}$, definamos

$$\mathcal{F}_n = \{f \in \mathcal{F} : a(f) = n\}$$
$$\mathcal{R}_n = \{r \in \mathcal{R} : a(r) = n\}$$

Al tipo $(\emptyset, \emptyset, \{\leq\}, \{(\leq, 2)\})$ lo llamaremos el *tipo de los posets.* Al tipo $(\emptyset, \{\mathsf{s}, \mathsf{i}\}, \emptyset, \{(\mathsf{s}, 2), (\mathsf{i}, 2)\})$ lo llamaremos el *tipo de los reticulados terna.* Al tipo

$$(\{0, 1\}, \{\mathsf{s}, \mathsf{i}\}, \emptyset, \{(\mathsf{s}, 2), (\mathsf{i}, 2)\})$$

lo llamaremos el *tipo de los reticulados acotados.* Al tipo

$$(\{0, 1\}, \{\mathsf{s}, \mathsf{i}, c\}, \emptyset, \{(\mathsf{s}, 2), (\mathsf{i}, 2), (c, 1)\})$$

lo llamaremos el *tipo de los reticulados complementados.* Al tipo

$$(\emptyset, \{\mathsf{s}, \mathsf{i}\}, \{\leq\}, \{(\mathsf{s}, 2), (\mathsf{i}, 2), (\leq, 2)\})$$

lo llamaremos el *tipo de los reticulados cuaterna.* Al tipo $(\emptyset, \{M\}, \emptyset, \{(M, 3)\})$ lo llamaremos el *tipo de las median algebras.* Al tipo $(\emptyset, \emptyset, \{r\}, \{(r, 2)\})$ lo llamaremos el *tipo de los grafos.* Al tipo

$$(\emptyset, \emptyset, \{r, R\}, \{(r, 2), (R, 1)\})$$

lo llamaremos el *tipo de los grafos bicoloreados.*

Algunos ejemplos de tipos:

1. $(\{\mathrm{uno}, \mathrm{doli}\}, \{\mathrm{MAS}, \mathrm{P}\}, \{\mathrm{Her}\}, a)$, con a dado por $a(\mathrm{MAS}) = 4$, $a(\mathrm{P}) = 1$ y $a(\mathrm{Her}) = 3$.

2. $(\{0,1\}, \{+, \times\}, \emptyset, a)$, con a dado por $a(+) = 2$ y $a(\times) = 2$.
3. $(\{\Box\}, \{\clubsuit\clubsuit, \text{Pic}\}, \{\triangleright, \|\}, a)$, con a dado por $a(\clubsuit\clubsuit) = 6$, $a(\text{Pic}) = 1$, $a(\triangleright) = 4$ y $a(\|) = 1$
4. $(\{\text{dod}, \text{dood}, \text{doood}, ...\}, \{\text{Fu}\}, \{\text{He}\}, a)$, con a dado por $a(\text{Fu}) = 1$ y $a(\text{He}) = 3$. Notese que este tipo tiene infinitos nombres de constante.

Ejercicio 1: V o F o I, justifique.

(a) Sea $\tau = (\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{R}, a)$ un tipo. Entonces $Ti(\mathcal{F}) = \text{PALABRA}$

(b) Sea $\tau = (\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{R}, a)$ un tipo. Entonces si $f \in \mathcal{F}$, se tiene que $Ti(f) = \text{CONJUNTO}$

(c) Sea τ un tipo y supongamos $f \in \mathcal{F}_3$, entonces $Dom(f) = A^3$, para algun conjunto A

(d) Si $\tau = (\emptyset, \{+\}, \emptyset, \{(+, 2)\})$ es un tipo y $e \in Dom(+)$, entonces $Ti(e) = 2{-}\text{UPLA}$

(e) Si $\tau = (\mathcal{C}, \{+\}, \emptyset, \{(+, 2)\})$ es un tipo y $c \in \mathcal{C}$, entonces $Ti(c) = \text{NUMERO}$

(f) $(\emptyset, \emptyset, \emptyset, \emptyset)$ es un tipo

Estructuras de tipo τ

Ahora si estamos en condiciones de dar una definicion general de estructura. Daremos una definicion matematica de "Estructura de tipo τ". En virtud de nuestras estructuras conocidas uno podria intentar definir estructura de tipo τ como cierta n-upla pero esto trae problemas ya que en un tipo τ los nombres de $\mathcal{C} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{R}$ no tienen por que estar ordenados y aparte puede haber infinitos nombres. De todas maneras la idea es muy similar y nos aproximaremos primero con ejemplos para entender mas facilmente el concepto.

Sea τ el tipo

$$(\{\text{uno}, \text{doli}\}, \{\text{MAS}, \text{P}\}, \{\text{Her}\}, \{(\text{MAS}, 4), (\text{P}, 1), (\text{Her}, 3)\})$$

Intuitivamente hablando, una estructura de tipo τ consiste en un conjunto no vacio A (que se llamara el universo de dicha estructura) junto con una interpretacion de cada uno de los nombres del conjunto $\{\text{uno}, \text{doli}, \text{MAS}, \text{P}, \text{Her}\}$. Esta interpretacion debe asignarle a

- uno un elemento de A
- doli un elemento de A
- MAS una operacion 4-aria sobre A

- P una operacion 1-aria sobre A

- Her una relacion 3-aria sobre A

Lo que debe quedar claro es que estos elementos, operaciones y relaciones pueden ser cualesquiera, es decir no deben cumplir nada en especial. Por ejemplo si tomamos $\mathbf{R}$ como universo podemos interpretar

- uno como el numero π

- doli como el numero 0

- MAS como la operacion

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{R}^4 & \to & \mathbf{R} \\ (x, y, z, w) & \to & 2x + 4y \end{array}$$

- P como la operacion

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{R} & \to & \mathbf{R} \\ x & \to & 5^x \end{array}$$

- Her como la relacion

$$\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x.y.z = 9\}$$

Analogamente, si τ es el tipo de los posets, es decir $\tau = (\emptyset, \emptyset, \{\leq\}, \{(\leq, 2)\})$, una estructura de tipo τ consistira de un conjunto no vacio A (que se llamara el universo de dicha estructura) junto con una interpretacion del simbolo $\leq$, la cual nos dira que relacion binaria sobre A denotara $\leq$. Pero esta relacion binaria puede ser cualquiera por lo cual habra muchas estructuras del tipo de los posets que no se corresponderan con posets. Solo aquellas en las que $\leq$ se interpreta como un orden parcial sobre su universo se corresponderan con los posets.

Ahora si daremos la definicion matematica de estructura de tipo τ:

Sea τ un tipo. Una *estructura o modelo de tipo* τ sera un par $\mathbf{A} = (A, i)$ tal que:

(1) A es un conjunto no vacio

(2) i es una funcion con dominio $\mathcal{C} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{R}$, tal que:

   (a) $i(c)$ es un elemento de A, para cada $c \in \mathcal{C}$

   (b) $i(f)$ es una operacion n-aria sobre A, para cada $f \in \mathcal{F}_n$, $n \geq 1$

   (c) $i(r)$ es una relacion n-aria sobre A, para cada $r \in \mathcal{R}_n$, $n \geq 1$

Si $\mathbf{A} = (A, i)$ es una estructura de tipo τ, el conjunto A es llamado el *universo* de $\mathbf{A}$ y la funcion i es llamada la *funcion interpretacion* de $\mathbf{A}$. Si $s \in \mathcal{C} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{R}$, diremos que $i(s)$ es la interpretacion del simbolo s en $\mathbf{A}$. Algunos ejemplos:

(E1) Si τ es el tipo

$$(\{\text{uno}, \text{doli}\}, \{\text{MAS}, \text{P}\}, \{\text{Her}\}, \{(\text{MAS}, 4), (\text{P}, 1), (\text{Her}, 3)\})$$

entonces $(\mathbf{R}, i)$ es una estructura de tipo τ, si definimos i igual a la funcion con dominio $\{\text{uno}, \text{doli}, \text{MAS}, \text{P}, \text{Her}\}$ dada por

(a) $i(\text{uno}) = \pi$

(b) $i(\text{doli}) = 0$

(c) $i(\text{MAS})$ igual a la operacion

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{R}^4 & \rightarrow & \mathbf{R} \\ (x, y, z, w) & \rightarrow & 2x + 4y \end{array}$$

(d) $i(\text{P})$ igual a la operacion

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{R} & \rightarrow & \mathbf{R} \\ x & \rightarrow & 5^x \end{array}$$

(e) $i(\text{Her}) = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x.y.z = 9\}$

(E2) Sea $\tau = (\emptyset, \emptyset, \{\leq\}, \{(\leq, 2)\})$. Notese que por definicion una estructura de tipo τ es un par (A, i) donde A es un conjunto no vacio y i es una funcion con dominio $\{\leq\}$ tal que $i(\leq)$ es una relacion binaria sobre A. Algunos ejemplos de estructuras de tipo τ:

(a) $(\{1, 2, 3\}, \{(\leq, \emptyset)\})$

(b) $(\{1, 2, 3\}, \{(\leq, \{2, 3\} \times \{1\})\})$

(c) $(\{1, \{2\}, \emptyset\}, \{(\leq, \{(1, \{2\})\})\})$

(d) $(\mathbf{N}, i)$, con i dada por $i(\leq) = \{(1, 2), (1000, 1), (1, 1)\}$

Notese que aunque τ es llamado el tipo de los posets, ninguna de las estructuras anteriores tiene mucho que ver con un poset. Consideremos ahora la estructura $(\mathbf{N}, i)$, donde i es la funcion con dominio igual a $\{\leq\}$ dada por

$$i(\leq) = \{(x, y) \in \mathbf{N}^2 : x|y\}$$

Notese que estrictamente hablando $(\mathbf{N}, i)$ no es un poset ya que i no es un orden parcial sobre $\mathbf{N}$ pero es claro que a nivel de informacion $(\mathbf{N}, i)$ y $(\mathbf{N}, |)$ son la misma cosa. O sea que aquellas estructuras de tipo τ en las cuales $\leq$ se interpreta como un orden parcial sobre el universo de la estructura son "esencialmente posets".

El siguiente lema nos servira para contar estructuras.

Lemma 1 *Se tiene que:*

(1) Dados A, B conjuntos finitos no vacios, hay $|B|^{|A|}$ funciones tales que su dominio es A y su imagen esta contenida en B

(2) si A es un conjunto cualquiera, entonces hay $2^{|A|}$ subconjuntos de A

Proof. (1) Supongamos $A = \{a_1, ..., a_n\}$, con $n = |A|$. Sea $Fu = \{f : D_f = A$ y $I_f \subseteq B\}$. Es facil ver que la siguiente funcion es biyectiva

$$\begin{array}{rcl} Fu & \to & B^n \\ f & \to & (f(a_1), ..., f(a_n)) \end{array}$$

(2) Ya que los subconjuntos de A estan en correspondencia biunivoca con las funciones de A en $\{0, 1\}$ (por que?) podemos aplicar (1) ■

Ejercicio 2: Sea $\tau = (\emptyset, \emptyset, \{\leq\}, \{(\leq, 2)\})$

(a) ¿Cuantas estructuras de tipo τ con universo igual a $\{1, 2, 3\}$ hay?

(b) ¿Alguna de ellas es un poset?

(c) De una biyeccion entre el conjunto formado por todos los posets y un subconjunto del conjunto de todas las estructuras de tipo τ

Ejercicio 3: Sea $\tau = (\emptyset, \{\mathsf{s}, \mathsf{i}\}, \emptyset, \{(\mathsf{s}, 2), (\mathsf{i}, 2)\})$

(a) ¿Cuantas estructuras de tipo τ con universo igual a $\{1, 2, 3\}$ hay?

(b) ¿Alguna de ellas es un reticulado terna?

(c) Cuales de ellas son "esencialmente" reticulados terna

(d) De una biyeccion entre el conjunto formado por todos los reticulados terna y un subconjunto del conjunto de todas las estructuras de tipo τ

Ejercicio 4: Sea $\tau = (\emptyset, \emptyset, \{r, R\}, \{(r, 2), (R, 1)\})$

(a) ¿Cuantas estructuras de tipo τ con universo igual a $\{1, 2, 3\}$ hay?

(b) ¿Alguna de ellas es grafo bicoloreado?

(c) Cuales de ellas son "esencialmente" grafos bicoloreados

(d) De una biyeccion entre el conjunto formado por todos los grafos bicoloreados y un subconjunto del conjunto de todas las estructuras de tipo τ

Ejercicio 5: Sea $\tau = (\{\mathrm{un}, \mathrm{dos}\}, \emptyset, \emptyset, \emptyset)$. Cuantos modelos de tipo τ con universo igual a $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ hay?

Ejercicio 6: Sea $\tau = (\{\text{un}, \text{dos}\}, \{\text{FE}^2\}, \emptyset, a)$. Cuantos modelos de tipo τ con universo igual a $\{1,2,3,4,5\}$ hay?

Ejercicio 7: Sea $\tau = (\{\text{un}, \text{dos}\}, \{\text{FE}^2, \text{GE}^3\}, \{\text{Ri}^1, \text{Ru}^3\}, a)$. Cuantos modelos de tipo τ con universo igual a $\{1,2,3,4,5\}$ hay?

Ejercicio 8: V o F o I, justifique

(a) Hay exactamente una estructura de tipo $(\emptyset, \{\max, \min\}, \emptyset, \{(\max, 2), (\min, 2)\})$ con universo igual a $\{1,2,3,4\}$

(b) $(\emptyset, \{\sin\}, \{\log\}, \{(\sin, 1), (\log, 1)\})$ es un tipo

(c) Sea τ un tipo y sea $\mathbf{A}$ una estructura de tipo τ. Si $f \in \mathcal{F}_3$, entonces $Dom(f) = A^3$

(d) Si τ es un tipo y $\mathbf{A} = (A, i)$, es una estructura de tipo τ y $\alpha \in Dom(i)$, entonces $Ti(\alpha) = \text{CONJUNTO}$

(e) Si $\tau = (\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{R}, a)$ es un tipo y $\mathbf{A} = (A, i)$ una estructura de tipo τ, entonces $\mathcal{C} \subseteq A$

(f) Sea $\tau = (\{\text{ce}, \text{un}, \text{do}, \text{tr}, \text{cu}, \text{ci}, \text{se}\}, \{\text{F}\}, \emptyset, \{(\text{F}, 1)\})$ y sea $\mathbf{A}$ una estructura de tipo τ. Entonces $D_{i(\text{F})} = \{\text{ce}, \text{un}, \text{do}, \text{tr}, \text{cu}, \text{ci}, \text{se}\}$

(g) Sea $\tau = (\{\text{un}, \text{dos}\}, \emptyset, \emptyset, \emptyset)$. Entonces $(\{\text{un}, \text{dos}\}, \{(\text{un}, \text{un}), (\text{dos}, \text{dos})\})$ es una estructura de tipo τ

(h) Sea $\tau = (\emptyset, \{\text{fe}\}, \emptyset, \{(\text{fe}, 1)\})$. Entonces $(\{1\}, \{(\text{fe}, (1,1))\})$ es una estructura de tipo τ

Independencia entre sintaxis y semantica

Notese que la definicion de tipo es muy libre en lo que respecta a que palabras componen los conjuntos $\mathcal{C}$, $\mathcal{F}$ y $\mathcal{R}$, es decir salvo por ciertas restricciones leves, ellas pueden ser cualquier palabra. Ademas no es necesario que las palabras de $\mathcal{C} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{R}$ se interpreten en la estructura de tipo τ (via la funcion i) como usualmente se interpretan en matematica. Algunos ejemplos:

- $\tau = (\{\leq\}, \emptyset, \emptyset, \emptyset)$ es un tipo y en las estructuras de tipo τ el simbolo $\leq$ se interpretara como un elemento del universo y no un orden parcial. Por ejemplo $(\{1,2,3\}, \{(\leq, 2)\})$ es una estructura de tipo τ.

- $\tau' = (\emptyset, \emptyset, \{\leq\}, \{(\leq, 3)\})$ es un tipo pero en las estructuras de tipo τ' el simbolo $\leq$ se interpreta como una relacion 3-aria sobre el universo. Por ejemplo $(\mathbf{N}, i)$, con i dada por $i(\leq) = \{(x,y,z) \in \mathbf{N}^3 : x = y = z\}$, es una estructura de tipo τ'. En esta estructura el simbolo $\leq$ no se interpreta como un orden parcial sino como una relacion ternaria ya que en τ' el simbolo $\leq$ es un simbolo de relacion de aridad 3

- $\tau'' = (\emptyset, \{1\}, \emptyset, \{(1,3)\})$ es un tipo y en las estructuras de tipo τ'' el simbolo 1 se interpretara como una funcion 3-aria sobre el universo (tener cuidado al leer $(\emptyset, \{1\}, \emptyset, \{(1,3)\})$ ya que en esta expresion 1 es el "numeral uno" y 3 es el numero tres). Por ejemplo si denotamos con f a la operacion

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{Z}^3 & \rightarrow & \mathbf{Z} \\ (x,y,z) & \rightarrow & x+y+z \end{array}$$

entonces $(\mathbf{Z}, i)$, con i dada por $i(1) = f$, es una estructura de tipo τ''

Esta libertad en la definicion de tipo y tambien en la definicion de estructura de tipo τ (i.e. las estructuras interpretan a los nombres de $\mathcal{C} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{R}$ con total independencia de la fisonomia de dichos nombres) es clave a la hora de fortalecer la separacion entre sintaxis y semantica, idea fundamental en el desarrollo de la logica.

Un poco de arrogancia

Hemos dado, via las definiciones de *tipo* y de *estructura de tipo* τ, un modelo matematico preciso del concepto intuitivo de estructura que veniamos acuñando en las guias anteriores. Esto es un salto importante ya que ahora tenemos una definicion matematica de lo que es una estructura en general y no solo un puñado de definiciones matematicas de ciertas estructuras particulares. Hemos encontrado la esencia del concepto intuitivo de estructura que veniamos acuñando con casos particulares en las primeras guias. La modelizacion es bastante sofisticada al punto que ninguna de las estructuras concretas antes estudiadas es estrictamente hablando una estructura de tipo τ, aunque cada tipo de estructura concreta estudiada tiene su "version" dentro de esta definicion general de estructura de tipo τ, la cual es esencialmente el mismo objeto. Por ejemplo, para el tipo de los reticulados complementados

$$\tau = (\{0,1\}, \{\mathsf{s}, \mathsf{i}, c\}, \emptyset, \{(\mathsf{s},2), (\mathsf{i},2), (c,1)\})$$

las estructuras de tipo τ que modelizan a los reticulados complementados son precisamente aquellas estructuras (A, i) tales que

$$(A, i(\mathsf{s}), i(\mathsf{i}), i(c), i(0), i(1))$$

es un reticulado complementado. Obviamente estas estructuras no son estrictamente hablando reticulados complementados, pero esencialmente son la misma cosa.

La utilidad de este nuevo concepto general de estructura ira quedando clara a medida que avancemos. Cabe destacar que este concepto general de estructura no solo ha sido clave en el desarrollo de la logica matematica sino que tambien ha sido crucial en el desarrollo de la informatica teorica, mas precisamente en el area de especificaciones algebraicas, ya que la versatilidad del concepto de estructura eterogenea ha permitido crear una teoria de amplio alcance y modelizacion de la idea de la especificacion de tipos abstractos de datos.

Formulas elementales de tipo τ

Recordemos que cada una de las estructuras consideradas en la Guia 7 tiene su tipo asociado. Es decir:

$$\begin{aligned}
\text{Tipo de los posets} &= (\emptyset, \emptyset, \{\leq\}, \{(\leq, 2)\}) \\
\text{Tipo de los ret. ternas} &= (\emptyset, \{\mathsf{s}, \mathsf{i}\}, \emptyset, \{(\mathsf{s}, 2), (\mathsf{i}, 2)\}) \\
\text{Tipo de los ret. acotados} &= (\{0, 1\}, \{\mathsf{s}, \mathsf{i}\}, \emptyset, \{(\mathsf{s}, 2), (\mathsf{i}, 2)\}) \\
\text{Tipo de los ret. comp.} &= (\{0, 1\}, \{\mathsf{s}, \mathsf{i}, c\}, \emptyset, \{(\mathsf{s}, 2), (\mathsf{i}, 2), (c, 1)\}) \\
\text{Tipo de los ret. cuaternas} &= (\emptyset, \{\mathsf{s}, \mathsf{i}\}, \{\leq\}, \{(\mathsf{s}, 2), (\mathsf{i}, 2), (\leq, 2)\}) \\
\text{Tipo de las median algebras} &= (\emptyset, \{M\}, \emptyset, \{(M, 3)\}) \\
\text{Tipo de los grafos} &= (\emptyset, \emptyset, \{r\}, \{(r, 2)\}) \\
\text{Tipo de los grafos bicoloreados} &= (\emptyset, \emptyset, \{r, R\}, \{(r, 2), (R, 1)\})
\end{aligned}$$

Notese que en cada uno de los casos anteriores los simbolos de $\mathcal{C} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{R}$ son los que se usan (junto con los simbolos logicos, las variables y los simbolos de elementos fijos) para formar sus correspondientes formulas elementales. Es decir, lo particular de las formulas elementales de cada tipo de estructura estaba dado por los correspondientes simbolos de $\mathcal{C} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{R}$. Esto nos permite generalizar nuestro concepto intuitivo de formula elemental, para el caso de cualquier tipo τ de estructuras. Para esto primero definamos dado un tipo $\tau = (\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{R}, a)$ los *terminos elementales de tipo τ* por las siguientes clausulas:

- Cada palabra de $\mathcal{C}$ es un termino elemental de tipo τ
- Cada variable es un termino elemental de tipo τ
- Cada nombre de elemento fijo es un termino elemental de tipo τ
- Si $f \in \mathcal{F}_n$, con $n \geq 1$ y $t_1, ..., t_n$ son terminos elementales de tipo τ, entonces $f(t_1, ..., t_n)$ es un termino elemental de tipo τ
- Una palabra es un termino elemental de reticulados complementados si y solo si se puede construir usando las clausulas anteriores

Deberia quedar claro que arriba $f(t_1, ..., t_n)$ denota el resultado de concatenar las $n + (n-1) + 3$ siguientes palabras

$$f \quad (\quad t_1 \quad , \quad t_2 \quad , \quad ... \quad , \quad t_n \quad)$$

es decir que $f(t_1, ..., t_n)$ es una palabra de longitud $|f|+|t_1|+...+|t_n|+(n-1)+2$ (notar que $n-1$ cuenta la cantidad de comas). Veamos algunos ejemplos:

(E1) Si τ es el tipo

$$(\{\text{un}, 0\}, \{\text{MAS}, \text{P}, +\}, \{\text{Verde}\}, \{(\text{MAS}, 4), (\text{P}, 1), (+, 2), (\text{Verde}, 1)\})$$

entonces las siguientes palabras terminos elementales de tipo τ:

(a) un

(b) 0

(c) x

(d) a

(e) $\mathrm{MAS}(a, b, \mathrm{un}, z)$

(f) $\mathrm{P}(\mathrm{P}(z))$

(g) $+(+(0, x), \mathrm{P}(z))$

(h) $\mathrm{MAS}(\mathrm{P}(0), +(0, b), \mathrm{un}, \mathrm{MAS}(x, x, x, x))$

Por supuesto las aridades de los nombres de $\mathcal{F}$ son importantes y deben ser respetadas. Por ejemplo

$$\mathrm{P}(x, y) \qquad \mathrm{MAS}(a, b) \qquad + (x, y, z)$$

no son terminos elementales de tipo τ.

(E2) Si τ es el tipo de los reticulados complementados

$$(\{0, 1\}, \{\mathsf{s}, \mathsf{i}, c\}, \emptyset, \{(\mathsf{s}, 2), (\mathsf{i}, 2), (c, 1)\})$$

entonces las siguientes palabras son terminos elementales de tipo τ:

(a) $\mathsf{s}(x, y)$

(b) a

(c) $\mathsf{s}(\mathsf{i}(x, 0), z)$

(d) $c(\mathsf{s}(\mathsf{i}(x, 0), c(z)))$

(e) $c(\mathsf{s}(\mathsf{i}(0, 0), 0))$

Notese que no coinciden con los terminos elementales de reticulados complementados definidos en la Guia 7 ya que aqui usamos un formato mas general y usamos $\mathsf{s}(x, y)$ en lugar de $(x \mathsf{ s } y)$, etc. Obviamente esto no cambia mucho las cosas y fue hecho a los fines de homogeneisar la escritura y no hacer un uso distinto para las operaciones binarias.

(E3) Si τ es tal que $\mathcal{F} = \emptyset$ entonces los terminos elementales de tipo τ son las variables, los nombres de elementos fijos y los elementos de $\mathcal{C}$

(E4) Si τ es el tipo

$$(\{1, \mathrm{er}\}, \{+, \mathsf{s}\}, \emptyset, \{(+, 5), (\mathsf{s}, 3)\})$$

entonces las siguientes palabras son terminos elementales de tipo τ:

(a) $\mathsf{s}(x, z, 1)$

(b) $+(1, 1, 1, 1, 1)$

(c) $\mathsf{s}(+(\mathrm{er}, \mathrm{er}, z, a, a), \mathrm{er}, \mathsf{s}(x, x, x))$

(E5) Tal como lo aclaramos anteriormente la definicion de tipo es muy libre en lo que respecta a que palabras componen los conjuntos $\mathcal{C}$, $\mathcal{F}$ y $\mathcal{R}$, es decir salvo por ciertas restricciones leves, ellas pueden ser cualquier palabra aunque a veces resulte chocante la eleccion de las mismas debido al uso y costumbre de los matematicos. Por ejemplo si tomamos $\tau = (\{\leq\}, \{1\}, \emptyset, \{(1,3)\})$, obtenemos un tipo en el cual $\leq$ es un nombre de constante y el numeral 1 es un nombre de funcion 3-aria (lo cual nos dice que en una estructura de tipo τ el simbolo $\leq$ debera interpretarse como un elemento del universo y el simbolo 1 debera interpretarse como una operacion 3-aria). Algunos terminos elementales de este tipo τ son:

(a) x

(b) $\leq$

(c) $1(z, z, z)$

(d) $1(x, a, 1(\leq, \leq, \leq))$

Ahora si usando el concepto de termino elemental de tipo τ podemos definir las *formulas elementales de tipo* τ con las siguientes clausulas:

- Si t y s son terminos elementales de tipo τ, entonces la palabra $(t = s)$ es una formula elemental de tipo τ

- Si $r \in \mathcal{R}_n$, con $n \geq 1$ y $t_1, ..., t_n$ son terminos elementales de tipo τ, entonces $r(t_1, ..., t_n)$ es un termino elemental de tipo τ

- Si φ_1 y φ_2 son formulas elementales de tipo τ, entonces $(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$ es una formula elemental de tipo τ

- Si φ_1 y φ_2 son formulas elementales de tipo τ, entonces $(\varphi_1 \vee \varphi_2)$ es una formula elemental de tipo τ

- Si φ_1 y φ_2 son formulas elementales de tipo τ, entonces $(\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2)$ es una formula elemental de tipo τ

- Si φ_1 y φ_2 son formulas elementales de tipo τ, entonces $(\varphi_1 \rightarrow \varphi_2)$ es una formula elemental de tipo τ

- Si φ es una formula elemental de tipo τ, entonces $\neg\varphi$ es una formula elemental de tipo τ

- Si φ es una formula elemental de tipo τ, entonces las palabras

  $$\forall x\varphi \quad \forall y\varphi \quad \forall z\varphi \quad ...$$

  son formulas elementales de tipo τ

- Si φ es una formula elemental de tipo τ, entonces las palabras

$$\exists x\varphi \quad \exists y\varphi \quad \exists z\varphi \quad ...$$

  son formulas elementales de tipo τ

- Una palabra es una formula elemental de tipo τ si y solo si se puede construir usando las clausulas anteriores

Veamos algunos ejemplos

(E1) Si τ es el tipo

$$(\{\mathrm{un}, 0\}, \{\mathrm{MAS}, \mathrm{P}\}, \{\mathrm{Her}, \mathrm{Verde}\}, \{(\mathrm{MAS}, 4), (\mathrm{P}, 1), (\mathrm{Her}, 3), (\mathrm{Verde}, 1)\})$$

entonces las siguientes son formulas elementales de tipo τ:

(a) $\mathrm{Her}(x, y, z)$
(b) $\mathrm{Verde}(x)$
(c) $\mathrm{Verde}(\mathrm{MAS}(a, b, \mathrm{un}, z))$
(d) $\mathrm{Her}(0, \mathrm{MAS}(a, b, \mathrm{un}, z), \mathrm{P}(\mathrm{P}(z)))$
(e) $(\mathrm{un} = \mathrm{P}(z))$
(f) $(\mathrm{Verde}(\mathrm{MAS}(a, b, \mathrm{un}, z)) \wedge (\mathrm{un} = \mathrm{P}(0)))$
(g) $(\mathrm{MAS}(a, b, \mathrm{un}, z) = b)$
(h) $(\mathrm{MAS}(a, b, \mathrm{un}, \mathrm{P}(z)) = \mathrm{P}(\mathrm{P}(\mathrm{P}(z))))$
(i) $\exists z(\mathrm{MAS}(a, b, \mathrm{un}, z) = b)$
(j) $\forall x \forall y \mathrm{Her}(0, y, \mathrm{P}(\mathrm{P}(x)))$
(k) $\forall y\ ((\mathrm{P}(\mathrm{P}(z)) = x) \to \exists z\ (\mathrm{Verde}(z) \wedge \mathrm{Her}(x, y, z)))$

Por supuesto las aridades de los nombres de $\mathcal{F} \cup \mathcal{R}$ son importantes y deben ser respetadas. Por ejemplo

$$(\mathrm{P}(x, y) = x) \qquad \mathrm{Her}(x, y) \qquad \mathrm{Verde}(x, y)$$

no son formulas elementales de tipo τ.

(E2) Si τ es el tipo

$$(\{0, 1\}, \{\mathsf{s}, \triangle\}, \{\leq, r\}, \{(\mathsf{s}, 2), (\triangle, 5), (\leq, 2), (r, 2)\})$$

entonces las siguientes son formulas elementales de tipo τ:

(a) $r(x, z)$
(b) $\leq(x, y)$
(c) $\leq(\triangle(x, y, z, 0, 0), \mathsf{s}(x, x))$

(d) $(\mathsf{s}(a,b)=\triangle(x,y,z,0,0))$

(e) $(\triangle(x,y,z,0,0)=\triangle(1,1,0,x,z))$

(f) $(\mathsf{s}(\triangle(x,y,z,0,0),z)=1)$

(g) $\neg r(x,\mathsf{s}(a,\mathsf{s}(a,b)))$

(h) $\neg\forall y(\mathsf{s}(x,y)=x)$

(i) $\exists z\forall x\ (r(x,\mathsf{s}(z,z)\wedge\neg{\leq}(x,z))$

(j) $\forall x\forall y\forall z\ ((r(x,y)\wedge r(y,z))\rightarrow r(x,z))$

Notese que hay algunas pequeñas diferencias con las formulas elementales de las estructuras clasicas ya que aqui respondemos a un formato mas general. Por ejemplo hemos escrito ${\leq}(x,y)$ en lugar de $x\leq y$ y $\mathsf{s}(x,y)$ en lugar de $(x\ \mathsf{s}\ y)$. Esto es a los fines de homogeneisar la escritura y no hacer un uso distinto para las operaciones binarias y las relaciones binarias.

Por supuesto las aridades de los nombres de $\mathcal{F}\cup\mathcal{R}$ son importantes y deben ser respetadas. Por ejemplo

$$(+(x,y,z)=x)\qquad r(x,y,z)\qquad {\leq}(x,y,z)$$

no son formulas elementales de tipo τ.

(E3) Si τ es el tipo

$$(\{\text{er}\},\{+\},\{\leq\},\{(+,4),(\leq,5)\})$$

entonces las siguientes son formulas elementales de tipo τ:

(a) ${\leq}(x,y,\text{er},\text{er},\text{er})$

(b) ${\leq}(+(x,y,z,\text{er}),+(x,x,\text{er},x),a,b,z)$

(c) $\exists z(+(x,z,x,+(x,x,x,x))=z)$

(E4) Si τ es el tipo

$$(\{\text{er}\},\{\leq\},\{+\},\{(\leq,3),(+,2)\})$$

entonces las siguientes son formulas elementales de tipo τ:

(a) $({\leq}(x,y,\text{er})=x)$

(b) $+(z,\text{er})$

(c) $\exists z\neg+(z,\text{er})$

(aqui hay que tener en cuenta que $\leq$ es un nombre de funcion de aridad 3 y que $+$ es un nombre de relacion de aridad 2, lo cual es inusual pero perfectamente posible en nuestra muy general definicion de tipo)

(E5) Si τ es el tipo

$$(\{\leq\},\{+\},\emptyset,\{(+,3)\})$$

entonces las siguientes son formulas elementales de tipo τ:

(a) $(\leq = x)$

(b) $(+(z, \leq, a) = \leq)$

(c) $(+(+(z, \leq, \leq), x, a) = b)$

(aqui hay que tener en cuenta que $\leq$ es un nombre de constante, lo cual es inusual pero perfectamente posible)

Variables libres, acotadas y alcance de un cuantificador

Estos conceptos se definen para una formula elemental φ de un tipo τ cualquiera, de la misma manera que lo hicimos en la Guia 6 para las formulas elementales de reticulados cuaterna. Dejamos al lector que los repace. Recordemos que una variable libre de una formula era una que al menos una vez ocurria libremente (aunque tambien pudiera ocurrir acotadamente en dicha formula). Cuando una formula elemental de tipo τ no tenga variables libres, diremos que es una *sentencia elemental de tipo* τ.

Valores de terminos y formulas para una estructura dada

Dada una estructura (A, i) de tipo τ y un termino t de tipo τ, para que t represente un valor de A, tenemos que asignarles valores concretos de A a las variables libres y a los nombres de elementos fijos que figuran en t. Los nombres de funcion que ocurren en t obviamente se interpretaran segun manda la funcion i. Similarmente dada una estructura (A, i) de tipo τ y una formula elemental φ de tipo τ, para que φ sea verdadera o falsa tenemos que asignarles valores concretos de A a las variables libres y a los nombres de elementos fijos que figuran en φ y luego a los nombres de $\mathcal{C} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{R}$ los interpretaremos usando la funcion i. Notemos que si φ es una sentencia elemental de tipo τ en la cual no ocurren nombres de elementos fijos, entonces φ sera verdadera o falsa en cada estructura de tipo τ, sin necesidad de hacer asignaciones de valores a sus variables.

Algunos ejemplos:

(E1) Sea τ el tipo

$$(\{\text{un}, 0\}, \{\text{MAS}, \text{P}\}, \{\text{Her}, \text{Verde}\}, \{(\text{MAS}, 4), (\text{P}, 1), (\text{Her}, 3), (\text{Verde}, 1)\})$$

y sea (A, i) la estructura de tipo τ dada por:

- $A = \mathbf{R}$, $i(\text{un}) = \pi$, $i(0) = 0$ (ojo que aqui el primer cero es un simbolo y el segundo un numero real!)
- $$\begin{array}{rcl} i(\text{MAS}) : \mathbf{R}^4 & \to & \mathbf{R} \\ (x, y, z, w) & \to & x.y \end{array}$$
  $$\begin{array}{rcl} i(\text{P}) : \mathbf{R} & \to & \mathbf{R} \\ x & \to & x^2 \end{array}$$

$$i(\mathrm{Her}) = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x.y.z = 9\}$$
$$i(\mathrm{Verde}) = \mathbf{Q}$$

Entonces:

(a) El termino un asume o representa el valor π

(b) El termino $\mathrm{P}(z)$ asume o representa el valor 25 cuando le asignamos a z el valor 5.

(c) El termino $\mathrm{MAS}(a,b,\mathrm{un},z)$ asume o representa el valor 2 cuando le asignamos a a el valor $\sqrt{2}$, a b el valor $\sqrt{2}$ y a z el valor 16 (o cualquier otro valor)

(d) la formula $\mathrm{Her}(x,y,z)$ es verdadera en (A,i) cuando le asignamos a x el valor 9, a y el valor 1 y a z el valor 1

(e) $\mathrm{Verde}(x)$ es falsa en (A,i) cuando le asignamos a x el valor $\sqrt{2}$

(f) $\mathrm{Verde}(\mathrm{MAS}(a,b,\mathrm{un},z))$ es verdadera en (A,i) cuando le asignamos a a el valor $\sqrt{2}$, a b el valor $\sqrt{2}$ y a z el valor 16 (o cualquier otro valor)

(g) la formula $\exists y \exists z\ \mathrm{Her}(a,y,z))$ es una sentencia ya que no tiene variables libres y es veradera en (A,i) cuando a a le asignamos un valor no nulo

(h) la formula $\exists y \exists z\ \mathrm{Her}(x,y,z))$ es una formula y es veradera en (A,i) cuando a x le asignamos un valor no nulo

(i) la formula $\forall x\ (\neg(x = 0) \rightarrow \exists y \exists z\ \mathrm{Her}(x,y,z))$ es una sentencia ya que no tiene variables libres y es veradera en (A,i)

(j) la formula $\forall x \forall y\ ((\mathrm{Verde}(x) \wedge \mathrm{Verde}(y)) \rightarrow \mathrm{Verde}(\mathrm{MAS}(x,y,\mathrm{un},z)))$ es verdadera en (A,i) independientemente de que valor le asignemos a z, ya que el producto de racionales es racional

(k) la formula $\exists y(\mathrm{MAS}(z,z,y,\mathrm{un}) = \mathrm{P}(z))$ es veradera en (A,i) cualquiera sea el valor que le asignemos a z

(l) **Error frecuente:** En la estructura anterior hay varios elementos que tienen su notacion clasica en la matematica, por ejemplo, con la letra griega π denotamos la cantidad de veces que entra el diametro en la circunferencia o con el numeral 3 denotamos al numero entero tres. Esto no debe confundirnos y pensar que por ejemplo las palabras

$$\neg\mathrm{Verde}(\pi) \qquad\qquad \exists y \mathrm{Her}(3,3,y)$$

son formulas elementales de tipo τ (aunque es claro que son verdaderas en la estructura (A,i))

(E2) Sea τ el tipo

$$(\{\mathrm{er}\}, \{+\}, \{\leq\}, \{(+,4), (\leq,5)\})$$

y sea (A,i) la estructura de tipo τ dada por:

- $A = \{1,2,3,4,5\}$, $i(\text{er}) = 4$
-
$$\begin{array}{rcl} i(+) : A^4 & \to & A \\ (x,y,z,w) & \to & \max\{x,y,z,w\} \end{array}$$
$$i(\leq) = \{(x,y,z,u,v) \in A^5 : x+y+z+u+v \geq 17\}$$

Entonces:

(a) El termino er asume o representa el valor 4

(b) El termino $+(x,x,x,a)$ asume o representa el valor 100 cuando le asignamos a x el valor 5 y a a el valor 100.

(c) $\leq(\text{er},\text{er},\text{er},\text{er},\text{er})$ es una sentencia verdadera en (A,i)

(d) $\leq(x,y,\text{er},\text{er},\text{er})$ es verdadera en (A,i) cuando le asignamos a las variables x e y valores que sumados den al menos 5

(e) $\forall x \exists y \leq(x,x,x,x,y)$ es una sentencia la cual es falsa en (A,i), ya que la formula $\exists y \leq(x,x,x,x,y)$ es falsa en (A,i) cuando le asignamos a x el valor 1

(f) la sentencia $\forall x \exists z \leq(x,x,x,x,+(x,x,x,z))$ es falsa en (A,i)

(E3) Sea τ el tipo
$$(\{\text{epa}\}, \{\leq, r\}, \emptyset, \{(\leq,1),(r,1)\})$$
y sea (A,i) la estructura de tipo τ dada por:

- $A = \omega$, $i(\text{epa}) = 71$
-
$$\begin{array}{rcl} i(\leq) : \omega & \to & \omega \\ x & \to & x^2 \end{array}$$
$$\begin{array}{rcl} i(r) : \omega & \to & \omega \\ x & \to & \lfloor \sqrt{x} \rfloor \end{array}$$

(Notese que aqui contrario al uso estandard en la matematica, el simbolo $\leq$ se interpreta como una funcion.)

(a) El termino $\leq(x)$ asume el valor 100 cuando a x le asignamos el valor 10

(b) El termino $r(\leq(b))$ asume el valor 11 cuando a b le asignamos el valor 11

(c) El termino $\leq(r(b))$ asume el valor 9 cuando a b le asignamos el valor 11

(d) $(\leq(\text{epa}) = x)$ es veradera en (A,i) cuando le asignamos a la variable x el valor 71^2 y falsa en caso contrario

(e) la sentencia $\exists z(\leq(z) = x)$ es verdadera en (A,i) cuando le asignamos a x el valor 16

(f) la sentencia $\forall x\ (r(\leq(x)) = x)$ es verdadera en (A, i)

(g) la sentencia $\exists x\ \neg(\leq(r(x)) = x)$ es verdadera en (A, i)

Ejercicio 9: Sea $\tau = (\{\text{un}\}, \{\text{F}\}, \{\text{Her}, \text{Verde}\}, \{(\text{F}, 1), (\text{Her}, 2), (\text{Verde}, 1)\})$.

(a) De una sentencia elemental φ la cual cumpla que para cada estructura $\mathbf{A} = (A, i)$ se tiene que φ es verdadera en $\mathbf{A}$ si y solo si $i(\text{F})$ es inyectiva.

(b) De una sentencia elemental φ la cual cumpla que para cada estructura $\mathbf{A} = (A, i)$ se tiene que φ es verdadera en $\mathbf{A}$ si y solo si $i(\text{F})$ es suryectiva

(c) De una sentencia elemental φ la cual cumpla que para cada estructura $\mathbf{A} = (A, i)$ se tiene que φ es verdadera en $\mathbf{A}$ si y solo si $i(\text{F})$ es biyectiva.

(d) De una sentencia elemental φ la cual cumpla que para cada estructura $\mathbf{A} = (A, i)$ se tiene que φ es verdadera en $\mathbf{A}$ si y solo si $i(\text{un}) \in \text{Im}(i(\text{F}))$

(e) De una formula elemental φ la cual tenga a x como su unica variable libre y la cual "diga" que x pertenece a $\text{Im}(i(\text{F}))$

(f) De una sentencia elemental φ la cual cumpla que para cada estructura $\mathbf{A} = (A, i)$ se tiene que φ es verdadera en $\mathbf{A}$ si y solo si $\text{Im}(i(\text{F})) = i(\text{Verde})$

(g) Recordemos que dada una funcion f definiamos $\ker(f) = \{(x, y) \in D_f \times D_f : f(x) = f(y)\}$. De una sentencia elemental φ la cual cumpla que para cada estructura $\mathbf{A} = (A, i)$ se tiene que φ es verdadera en $\mathbf{A}$ si y solo si $\ker(i(\text{F})) = i(\text{Her})$

Ejercicio 10: Sea $\tau = (\emptyset, \emptyset, \{\text{R}\}, \{(\text{R}, 2)\})$.

(a) De una sentencia elemental φ la cual cumpla que para cada estructura $\mathbf{A} = (A, i)$ se tiene que φ es verdadera en $\mathbf{A}$ si y solo si $i(\text{R})$ es un orden parcial sobre A.

(b) De una sentencia elemental φ la cual cumpla que para cada estructura $\mathbf{A} = (A, i)$ se tiene que φ es verdadera en $\mathbf{A}$ si y solo si $(A, i(\text{R}))$ es un grafo

(c) De una sentencia elemental φ la cual cumpla que para cada estructura $\mathbf{A} = (A, i)$ se tiene que φ es verdadera en $\mathbf{A}$ si y solo si $i(\text{R})$ es una relacion de equivalencia sobre A.

(d) De una formula elemental φ la cual tenga como su unica variable libre a x y la cual "diga"

- $i(\text{R})$ es un orden parcial sobre A y x es un elemento minimo de $(A, i(\text{R}))$

(e) De una formula elemental φ la cual tenga como sus unicas variables libres a x e y y la cual "diga"

- $i(\mathrm{R})$ es un orden parcial sobre A y x es cubierto por y

Ejercicio 11: Sea $\tau = (\{\mathrm{un}\}, \{\mathrm{P}\}, \{\mathrm{Moi}\}, \{(\mathrm{P}, 2), (\mathrm{Moi}, 2)\})$. Sea $\mathbf{A} = (\omega, i)$, con $i(\mathrm{un}) = 1$, $i(\mathrm{P}) =$ operacion producto de ω, y $i(\mathrm{Moi}) = \{(x, y) \in \omega : x \leq y\}$.

(a) De una formula elemental φ la cual tenga como sus unicas variables libres a x e y y la cual sea verdadera en $\mathbf{A}$ cuando asignamos los valores a, b a las variables x, y si y solo si a divide a b

(b) De una formula elemental φ la cual tenga como su unica variable libre a x y la cual sea verdadera en $\mathbf{A}$ cuando asignamos el valor a a la variable x si y solo si a es primo

(c) De una formula elemental φ la cual tenga como su unica variable libre a x y la cual sea verdadera en $\mathbf{A}$ cuando asignamos el valor a a la variable x si y solo si $a = 4$

Ejercicio 12: Sea $\tau = (\emptyset, \{\mathrm{M}, \mathrm{J}\}, \{\mathrm{L}\}, \{(\mathrm{M}, 2), (\mathrm{J}, 2), (\mathrm{L}, 2)\})$.

(a) De una sentencia elemental φ la cual sea verdadera en una estructura $\mathbf{A}$ si y solo si $(A, i(\mathrm{M}), i(\mathrm{J}), i(\mathrm{L}))$ es un reticulado cuaterna

(b) De una sentencia elemental φ la cual sea verdadera en una estructura $\mathbf{A}$ si y solo si $(A, i(\mathrm{M}), i(\mathrm{J}))$ es un reticulado terna cuyo orden parcial asociado es $i(\mathrm{L})$

Teorias elementales y pruebas elementales

Tal como vimos en la Guia 7, el concepto de prueba elemental dependia del tipo de estructura en cuestion y ademas de tener fijado un conjunto de sentencias elementales que llamabamos axiomas y eran el punto de partida de dichas pruebas. Cabe destacar que dichos axiomas eran sentencias elementales sin nombres de elementos fijos ya que estos se usaban solo en las pruebas elementales para denotar hipoteticos elementos dentro del argumento de la prueba misma. Ademas cuando haciamos una prueba elemental teniamos en mente una estructura generica de la cual solo sabiamos que satisfacia los axiomas, es decir solo podiamos usar la informacion particular que dichos axiomas nos proveian y pasos elementales obvios de los cuales nadie dudaria. Esto nos inspira a hacer las siguientes dos definiciones.

Una *teoria elemental* sera un par (Σ, τ) tal que τ es un tipo cualquiera y Σ es un conjunto de sentencias elementales de tipo τ, las cuales no tienen nombres de elementos fijos. Un *modelo de* (Σ, τ) sera una estructura de tipo τ la cual haga verdaderos a todos los elementos de Σ. Veamos algunos ejemplos:

(E1) La *teoria elemental de los posets* es el par (Σ, τ), donde $\tau = (\emptyset, \emptyset, \{\leq\}, \{(\leq, 2)\})$ y Σ es el conjunto formado por las siguientes tres sentencias elementales de tipo τ:

(a) $\forall x \leq(x,x)$

(b) $\forall x\forall y\forall z\ ((\leq(x,y) \wedge \leq(y,z)) \rightarrow \leq(x,z))$

(c) $\forall x\forall y((\leq(x,y) \wedge \leq(y,x)) \rightarrow x = y)$

Notese que los modelos de esta teoria elemental son exactamente aquellas estructuras de tipo τ las cuales son "esencialmente" posets.

(E2) La *teoria elemental de los reticulados terna* es el par (Σ, τ), donde $\tau = (\emptyset, \{\mathsf{s}, \mathsf{i}\}, \emptyset, \{(\mathsf{s}, 2), (\mathsf{i}, 2)\})$ y Σ es el conjunto formado por las siguientes sentencias elementales de tipo τ:

(a) $\forall x\forall y\ (\mathsf{s}(x,x) = x)$

(b) $\forall x\forall y\ (\mathsf{i}(x,x) = x)$

(c) $\forall x\forall y\ (\mathsf{s}(x,y) = \mathsf{s}(y,x))$

(d) $\forall x\forall y\ (\mathsf{i}(x,y) = \mathsf{i}(y,x))$

(e) $\forall x\forall y\forall z\ (\mathsf{s}(\mathsf{s}(x,y),z) = \mathsf{s}(x,\mathsf{s}(y,z)))$

(f) $\forall x\forall y\forall z\ (\mathsf{i}(\mathsf{i}(x,y),z) = \mathsf{i}(x,\mathsf{i}(y,z)))$

(g) $\forall x\forall y\ \mathsf{s}(x,\mathsf{i}(x,y)) = x)$

(h) $\forall x\forall y\ \mathsf{i}(x,\mathsf{s}(x,y)) = x)$

Notese que los modelos de esta teoria elemental son exactamente aquellas estructuras de tipo τ las cuales son "esencialmente" reticulados terna.

(E3) La *teoria elemental de los reticulados cuaterna* es el par (Σ, τ), donde $\tau = (\emptyset, \{\mathsf{s}, \mathsf{i}\}, \{\leq\}, \{(\mathsf{s}, 2), (\mathsf{i}, 2), (\leq, 2)\})$ y Σ es el conjunto formado por las siguientes sentencias elementales de tipo τ:

(a) $\mathrm{A}_{\leq R} = \forall x \leq(x,x)$

(b) $\mathrm{A}_{\leq T} = \forall x\forall y\forall z\ ((\leq(x,y) \wedge \leq(y,z)) \rightarrow \leq(x,z))$

(c) $\mathrm{A}_{\leq A} = \forall x\forall y\ ((\leq(x,y) \wedge \leq(y,x)) \rightarrow x = y)$

(d) $\mathrm{A}_{\mathsf{s}esC} = \forall x\forall y\ (\leq(x,\mathsf{s}(x,y)) \wedge \leq(y,\mathsf{s}(x,y)))$

(e) $\mathrm{A}_{\mathsf{s}\leq C} = \forall x\forall y\forall z\ \ ((\leq(x,z) \wedge \leq(y,z)) \rightarrow \leq(\mathsf{s}(x,y),z))$

(f) $\mathrm{A}_{\mathsf{i}esC} = \forall x\forall y\ (\leq(\mathsf{i}(x,y),x) \wedge \leq(\mathsf{i}(x,y),y))$

(g) $\mathrm{A}_{\mathsf{i}\geq C} = \forall x\forall y\forall z\ \ ((\leq(z,x) \wedge \leq(z,y)) \rightarrow \leq(z,\mathsf{i}(x,y)))$

Notese que los modelos de esta teoria elemental son exactamente aquellas estructuras de tipo τ las cuales son "esencialmente" reticulados cuaterna.

(E4) La *teoria elemental de los grafos* es el par (Σ, τ), donde $\tau = (\emptyset, \emptyset, \{r\}, \{(r,2)\})$ y Σ es el conjunto formado por las siguientes sentencias elementales de tipo τ:

(a) $\forall x \neg r(x,x)$

(b) $\forall x\forall y(r(x,y) \rightarrow r(y,x))$

Notese que los modelos de esta teoria elemental son exactamente aquellas estructuras de tipo τ las cuales son "esencialmente" grafos.

(E5) La *teoria elemental de los grafos bicoloreados* es el par (Σ, τ), donde $\tau = (\emptyset, \emptyset, \{r, R\}, \{(r, 2), (R, 1)\})$ y Σ es el conjunto formado por las siguientes sentencias elementales de tipo τ:

(a) $\forall x \neg r(x, x)$

(b) $\forall x \forall y (r(x, y) \rightarrow r(y, x))$

(c) $\forall x \forall y (r(x, y) \rightarrow ((R(x) \wedge \neg R(y)) \vee (\neg R(x) \wedge R(y))))$

Notese que los modelos de esta teoria elemental son exactamente aquellas estructuras de tipo τ las cuales son "esencialmente" grafos bicoloreados.

Es muy importante notar que una teoria elemental (Σ, τ) es en algun sentido un objeto esencialmente sintactico ya que Σ, $\mathcal{C}$, $\mathcal{F}$ y $\mathcal{R}$ son conjuntos de palabras. Los modelos de (Σ, τ) constituyen la semantica de la teoria.

Las anteriores son las teorias elementales que se corresponden con los tipos de estructuras consideradas en la Guia 7 pero nuestra definicion de teoria elemental es muy general y nos permite considerar una gran diversidad de teorias. Veamos algunos ejemplos de teorias elementales interesantes y no consideradas en la Guia 7:

(E6) Consideremos la teoria elemental (Σ, τ), donde $\tau = (\{\mathrm{ex}\}, \{\mathrm{F}\}, \emptyset, \{(\mathrm{F}, 1)\})$ y Σ es el conjunto formado por las siguientes dos sentencias elementales:

(a) $\forall x \forall y\ (\neg(x = y) \rightarrow \neg(\mathrm{F}(x) = \mathrm{F}(y)))$

(b) $\forall x\ \neg(\mathrm{F}(x) = \mathrm{ex})$

Notese que una estructura $\mathbf{A} = (A, i)$ de tipo τ es un modelo de (Σ, τ) si y solo si $i(\mathrm{F})$ es inyectiva y $i(\mathrm{ex}) \notin \mathrm{Im}(i(\mathrm{F}))$. Esto obviamente nos dice que el universo de cada modelo de esta teoria es infinito. Un modelo de la teoria es por ejemplo $(\omega, \{(\mathrm{ex}, 0), (\mathrm{F}, Suc)\})$

(E7) Sea $\tau = (\emptyset, \{\times\}, \{\mathrm{Com}\}, \{(\times, 2), (\mathrm{Com}, 1)\})$ y sea Σ el conjunto formado por las siguientes sentencias elementales de tipo τ:

(a) $\forall x \forall y \forall z\ (\times(\times(x, y), z) = \times(x, \times(y, z)))$

(b) $\forall z\ (\mathrm{Com}(z) \rightarrow \forall x\ (\times(x, z) = \times(z, x)))$

(c) $\forall x \exists z\ (x = \times(z, z) \wedge \mathrm{Com}(z))$

Supongamos $\mathbf{A} = (A, i)$ es un modelo de la teoria (Σ, τ). Notese que el primer axioma nos dice que $i(\times)$ es una operacion binaria asociativa, esto se ve mas facilmente si escribimos dicho axioma con la notacion mas usual para operaciones:

$$\forall x \forall y \forall z\ (x \times y) \times z = x \times (y \times z)$$

El segundo axioma nos dice que si $a \in i(\mathrm{Com})$, entonces $a\ i(\times)\ b = b\ i(\times)\ a$, cualesquiera sea $b \in A$. O sea nos dice que los elementos de $i(\mathrm{Com})$ conmutan con todos los otros elementos relativo a la operacion $i(\times)$. El tercer axioma nos dice que cualquiera sea $a \in A$, debe haber un $b \in i(\mathrm{Com})$ tal que $b\ i(\times)\ b = a$. En algun sentido nos dice que todo elemento de A tiene en el conjunto $i(\mathrm{Com})$ una "raiz cuadrada" relativo a la operacion $i(\times)$. Ejemplos de modelos de esta teoria son:

(a) $(\{r \in \mathbf{R} : r \geq 0\}, i)$, con $i(\times) =$ operacion producto usual de $\mathbf{R}$ restringida a $\{r \in \mathbf{R} : r \geq 0\}^2$ y $i(\mathrm{Com}) = \{r \in \mathbf{R} : r \geq 0\}$

(b) $(\mathbf{R}, i)$, con $i(\times) = \max$ y $i(\mathrm{Com}) = \mathbf{R}$

(c) $(\mathbf{R}, i)$, con $i(\times) = \min$ y $i(\mathrm{Com}) = \mathbf{R}$

(d) $(\mathcal{P}(\{1,2,3\}), i)$, con $i(\times) = \cup$ y $i(\mathrm{Com}) = \mathcal{P}(\{1,2,3\})$

(E8) La *teoria elemental de los reticulados cuaterna distributivos* es el par (Σ, τ), donde $\tau = (\emptyset, \{\mathsf{s}, \mathsf{i}\}, \{<\}, \{(\mathsf{s}, 2), (\mathsf{i}, 2), (<, 2)\})$ y Σ es el conjunto formado por los axiomas de la teoria elemental de los reticulados cuaterna junto con el axioma

(a) $\forall x \forall y \forall z\ (\mathsf{i}(x, \mathsf{s}(y, z)) = \mathsf{s}(\mathsf{i}(x, y), \mathsf{i}(x, z)))$

Notese que los modelos de esta teoria elemental son exactamente aquellas estructuras de tipo τ las cuales son "esencialmente" reticulados cuaterna distributivos

(E9) La *teoria elemental de los reticulados terna distributivos* es el par (Σ, τ), donde $\tau = (\emptyset, \{\mathsf{s}, \mathsf{i}\}, \emptyset, \{(\mathsf{s}, 2), (\mathsf{i}, 2)\})$ y Σ es el conjunto formado por los axiomas de la teoria elemental de los reticulados terna junto con el axioma

(a) $\forall x \forall y \forall z\ (\mathsf{i}(x, \mathsf{s}(y, z)) = \mathsf{s}(\mathsf{i}(x, y), \mathsf{i}(x, z)))$

Notese que los modelos de esta teoria elemental son exactamente aquellas estructuras de tipo τ las cuales son "esencialmente" reticulados terna distributivos

Pruebas elementales

Podemos generalizar el concepto de prueba elemental, introducido en la Guia 7, a cualquier teoria elemental. Dada una teoria elemental (Σ, τ) y una sentencia elemental φ la cual no posea nombres de elementos fijos, una *prueba elemental de φ en* (Σ, τ) sera una prueba de φ que posea las siguientes caracteristicas:

(1) En la prueba se parte de una estructura de tipo τ, fija pero arbitraria en el sentido que lo unico que sabemos es que ella satisface los axiomas de Σ (i.e. es un modelo de (Σ, τ)) y ademas esta es la unica informacion particular que podemos usar.

(2) Las deducciones en la prueba son muy simples y obvias de justificar con minimas fraces en castellano.

(3) En la escritura de la prueba lo concerniente a la matematica misma se expresa usando solo sentencias elementales de tipo τ

Notese que el punto (1) nos garantiza que una prueba elemental de φ en (Σ, τ) es una forma solida de justificar que *cualquier* estructura de tipo τ que satisfaga los axiomas de (Σ, τ) tambien satisfacera φ. Por supuesto el concepto de prueba elemental en una teoria (Σ, τ) no es un concepto definido en forma precisa sino mas bien una idea basada en ciertos ejemplos de la vida real de los matematicos.

Veamos algunos ejemplos:

(E1) Consideremos la teoria elemental del ejemplo (E6) de teorias elementales. Sea

$$\varphi = \exists x \exists y \exists z \ (\neg(x = y) \wedge \neg(x = z) \wedge \neg(y = z))$$

(φ dice que el universo tiene al menos tres elementos.) Tenemos la siguiente:

Prueba elemental de φ en (Σ, τ): Por el segundo axioma tenemos que $\neg(\mathrm{F}(\mathrm{ex}) = \mathrm{ex})$. Obviamente entonces tenemos que

(1) $\neg(\mathrm{ex} = \mathrm{F}(\mathrm{ex}))$

Por el segundo axioma tambien tenemos que $\neg(\mathrm{F}(\mathrm{F}(\mathrm{ex})) = \mathrm{ex})$ por lo que

(2) $\neg(\mathrm{ex} = \mathrm{F}(\mathrm{F}(\mathrm{ex})))$

Ya que se da (2), el primer axioma nos dice que

(3) $\neg(\mathrm{F}(\mathrm{ex}) = \mathrm{F}(\mathrm{F}(\mathrm{ex})))$

Poniendo (1), (2) y (3) juntos tenemos que

$$\neg(\mathrm{ex} = \mathrm{F}(\mathrm{ex})) \wedge \neg(\mathrm{ex} = \mathrm{F}(\mathrm{F}(\mathrm{ex}))) \wedge \neg(\mathrm{F}(\mathrm{ex}) = \mathrm{F}(\mathrm{F}(\mathrm{ex})))$$

de lo cual es obvio que vale φ.

(E2) Consideremos la teoria elemental del ejemplo (E7) de teorias elementales. A continuacion daremos una prueba elemental de $\varphi = \forall x \forall y \ (\times(x, y) = \times(y, x))$ en la teoria (Σ, τ). Para facilitar la lectura usaremos la notacion clasica para operaciones binarias, es decir escribiremos $x \times y$ en lugar de $\times(y, x)$, etc.

Prueba elemental de φ en (Σ, τ): Sean $a, b \in A$, fijos pero arbitrarios. Por el tercer axioma tenemos que

1. $\exists z \ (a = z \times z \wedge \mathrm{Com}(z))$

Sea c tal que

2. $a = c \times c \wedge \mathrm{Com}(c)$

Nuevamente, por el tercer axioma tenemos que

3. $\exists z\ (b = z \times z \wedge \mathrm{Com}(z))$
Sea d tal que
4. $b = d \times d \wedge \mathrm{Com}(d)$
Ya que vale $\mathrm{Com}(c)$, el segundo axioma nos dice que
5. $\forall x\ (x \times c = c \times x)$
Ya que $a = c \times c$ y $b = d \times d$, tenemos que
6. $a \times b = (c \times c) \times (d \times d)$
Pero por el primer axioma (asociatividad) tenemos que
7. $(c \times c) \times (d \times d) = c \times (c \times (d \times d))$
Pero por 5. tenemos que
8. $c \times (c \times (d \times d)) = c \times ((d \times d) \times c)$
Por asociatividad
9. $c \times ((d \times d) \times c) = (c \times (d \times d)) \times c$
Por 5. tenemos que
10. $(c \times (d \times d)) \times c = ((d \times d) \times c) \times c$
Por asociatividad tenemos que
11. $((d \times d) \times c) \times c = (d \times d) \times (c \times c)$
Ya que $a = c \times c$ y $b = d \times d$, tenemos que
12. $(d \times d) \times (c \times c) = b \times a$.
Siguiendo la cadena de igualdades desde 6. hasta 12. tenemos que
13. $a \times b = b \times a$.
Ya que a y b eran elementos arbitrarios, hemos probado que $\forall x \forall y\ x \times y = y \times x$

Ejercicio 13: Sea $\tau = (\emptyset, \{\mathsf{s}, \mathsf{i}\}, \{\leq, \mathrm{P}, \mathrm{Q}\}, a)$, con $a(\leq) = 2$ y $a(\mathrm{P}) = a(\mathrm{Q}) = 1$. Sea Σ formado por los axiomas de la teoria de los reticulados cuaterna (ver el (E3) de teorias elementales) junto con los axiomas:

$\exists x\ \mathrm{P}(x)$

$\exists x\ \mathrm{Q}(x)$

$\forall x \forall y\ ((\mathrm{P}(x) \wedge \mathrm{P}(y)) \rightarrow \mathrm{P}(\mathsf{i}(x, y)))$

$\forall x \forall y\ ((\mathrm{Q}(x) \wedge \mathrm{Q}(y)) \rightarrow \mathrm{Q}(\mathsf{i}(x, y)))$

$\forall x \forall y\ ((\mathrm{P}(x) \wedge \leq(x, y)) \rightarrow \mathrm{P}(y))$

$\forall x \forall y\ ((\mathrm{Q}(x) \wedge \leq(x, y)) \rightarrow \mathrm{Q}(y))$

(a) Diga en forma hablada que son "esencialmente" los modelos de (Σ, τ)
(b) De una prueba elemental de $\exists x\ (\mathrm{P}(x) \wedge \mathrm{Q}(x))$ en (Σ, τ).

Ejercicio 14: Sea $\tau = (\emptyset, \{\mathsf{s}, \mathsf{i}\}, \{\leq, \mathrm{P}, \mathrm{Q}\}, a)$, con $a(\leq) = 2$ y $a(\mathrm{P}) = a(\mathrm{Q}) = 1$. Sea Σ formado por los axiomas de la teoria del ejercicio anterior junto con el siguiente axioma:

$\forall x \forall y\ (\leq(x, y) \vee \leq(y, x))$

(a) De una prueba elemental en (Σ, τ) de la sentencia elemental:

$$(\forall x(\mathrm{P}(x) \rightarrow \mathrm{Q}(x))) \vee (\forall x(\mathrm{Q}(x) \rightarrow \mathrm{P}(x)))$$

Programa

Ahora que hemos generalizado los conceptos de estructura, formula elemental y prueba elemental via el concepto de tipo, podemos enunciar en forma mucho mas general el programa de logica para reticulados cuaterna dado al principio de esta guia.

Programa de logica matematica

(1) Dar un modelo matematico del concepto de formula elemental de tipo τ

(2) Dar una definicion matematica de cuando una formula elemental de tipo τ es verdadera en una estructura de tipo τ para una asignacion dada de valores a las variables libres y a los nombres de constantes fijas de la formula

(3) (Plato gordo) Dar un modelo matematico del concepto de prueba elemental en una teoria elemental de tipo τ. A estos objetos matematicos los llamaremos pruebas formales de tipo τ

(4) (Sublime) Intentar probar matematicamente que nuestro concepto de prueba formal de tipo τ es una correcta modelizacion matematica de la idea intuitiva de prueba elemental en una teoria elemental de tipo τ

Como veremos, los cuatro puntos anteriores pueden ser hechos satisfactoriamente y constituyen el comienzo de la logica matematica con cuantificadores. Cabe aclarar que la realizacion del cuarto punto es realmente sorprendente ya que es un caso de una prueba matematica rigurosa de un hecho que involucra un concepto intuitivo como lo es el de prueba elemental.

El punto (1) se resuelve en la Guia 9 y si bien produce interesantes conceptos y resultados matematicos su resolucion es rutinaria. El punto (2) es resuelto por Tarski. El punto (3) por Fregue. El (4) es una concecuencia de dos importantes teoremas, el Teorema de Correccion y el Teorema de Completitud de Godel.nuestra muy general definicion de tipo)