Guía 3: Reticulados par

Definición inicial y algunas propiedades

- **Reticulado par**: poset $(P, \leq)$ el cual cumple que $\forall a, b \in P$ existen en $(P, \leq)$ $sup(\{a, b\})$ e $inf(\{a, b\})$
- *Propiedades*:
  - Si $(P, \leq)$ es un conjunto totalmente ordenado, entonces $(P, \leq)$ es un reticulado par.
  - Si $(P, \leq)$ es un reticulado par, entonces existe $sup(S) \forall S \subseteq P$.

Funciones s, i

- **Función binaria**: Dado un conjunto A, por una operación binaria sobre A entenderemos una función cuyo dominio es A^2 y cuya imagen está contenida en A.
- **Funciones** s, i: En un reticulado par $(P, \leq)$ tenemos dos operaciones binarias naturalmente definidas:

$$\begin{array}{ll} s : P^2 \to P & \quad i : P^2 \to P \\ (a, b) \to sup(\{a, b\}) & \quad (a, b) \to inf(\{a, b\}) \end{array}$$

  - Escribiremos $a \ s \ b$ en lugar de $s(a, b)$ y $a \ i \ b$ en lugar de $i(a, b)$
- *Lemas*: Dado un reticulado par $(L, \leq)$:
  - *Cotas básicas, Reflexividad y Conmutatividad*. Se cumplen las siguientes:
    1. $x \leq x \ s \ y \ \forall x, y \in L$
    2. $x \ i \ y \leq x \ \forall x, y \in L$
    3. $x \ s \ x = x \ \forall x \in L$
    4. $x \ i \ x = x \ \forall x \in L$
    5. $x \ s \ y = y \ s \ x \ \forall x, y \in L$
    6. $x \ i \ y = y \ i \ x \ \forall x, y \in L$
  - *Supremo e ínfimo cuando están relacionados*. Se tiene que:
    1. $x \leq y \iff x \ s \ y = y \ \forall x, y \in L$
    2. $x \leq y \iff x \ i \ y = x \ \forall x, y \in L$
  - *Absorción*. Se tiene que:
    1. $x \ s \ (x \ i \ y) = x \ \forall x, y \in L$
    2. $x \ i \ (x \ s \ y) = x \ \forall x, y \in L$
  - *Asociatividad*. Se tiene que:
    1. $(x \ s \ y) \ s \ z = x \ s \ (y \ s \ z) \ \forall x, y, z \in L$
    2. $(x \ i \ y) \ i \ z = x \ i \ (y \ i \ z) \ \forall x, y, z \in L$

- *Preserva el orden*. Se tiene que:
    1. $x \leq z \wedge y \leq w \Rightarrow x \ s \ y \leq z \ s \ w \ \forall x, y, z, w \in L$
    2. $x \leq z \wedge y \leq w \Rightarrow x \ i \ y \leq z \ i \ w \ \forall x, y, z, w \in L$
- *Desigualdad de la distributividad*. Se tiene que:
    - $(x \ i \ y) \ s \ (x \ i \ z) \leq x \ i \ (y \ s \ z) \ \forall x, y, z \in L$
- *Relación entre s/i con sup/inf para conjuntos*. Se tiene que, cualesquiera sean los elementos $x_1, \ldots, x_n \in L : n \geq 2$:
    - $(\ldots(x_1 \ s \ x_2) \ s \ \ldots) \ s \ x_n = sup(\{x_1, \ldots, x_n\})$
    - $(\ldots(x_1 \ i \ x_2) \ i \ \ldots) \ i \ x_n = inf(\{x_1, \ldots, x_n\})$

- *Notación*: Dado que la distribución de paréntesis en una expresión de la forma $(\ldots(x_1 \ s \ x_2) \ s \ \ldots) \ s \ x_n$ es irrelevante (ya que s es asociativa), en general se suprimen. Lo mismo para i.

Reglas/Trucos para demostraciones

- *Igualdad en Posets*: Para ver que $x = y$ en un poset $(P, \leq)$, ver que:
    - $x \leq y$
    - $y \leq x$.
- *Igualar un Supremo*: Para ver que $x = sup(S)$ en un poset $(P, \leq)$, ver que:
    - x es cota superior de S
    - $x \leq z \ \forall z$ cota superior de S
- *Superar un Supremo*: Para ver que $z \geq x \ s \ y$ en un reticulado par $(L, \leq)$, ver que:
    - $z \geq x$
    - $z \geq y$
- *Ser Menor o Igual que un Ínfimo*: Para ver que $z \leq x \ i \ y$ en un reticulado par $(L, \leq)$, ver que:
    - $z \leq x$
    - $z \leq y$