# Guia 1 de Logica

September 3, 2024

Nota: Los ejercicios que tienen una S son para una "Segunda pasada" es decir ya sea son mas anecdoticos y menos importantes tematicamente, o son de completar pruebas y tienen que ver mas con la parte teorica, o son mas dificiles y conviene encararlos despues de una primera pasada por la guia (asi uno comienza a pensarlos con un poco mas de madurez sobre el tema).

## Relaciones de equivalencia

Sea $A$ un conjunto. Por una *relacion binaria sobre* $A$ entenderemos un subconjunto de $A^2$. Algunos ejemplos

(E1) Sea $R = \{(1,2),(2,3)\}$. Entonces $R$ es una relacion binaria sobre $\mathbf{N}$

(E2) Sea $R = \{(x,y) \in \omega^2 : x \text{ divide a } y\}$. Entonces $R$ es una relacion binaria sobre $\omega$

(E3) Sea $R = \{(r,t) \in \mathbf{R}^2 : r \leq t\}$. Entonces $R$ es una relacion binaria sobre $\mathbf{R}$

(E4) $\emptyset$ es una relacion binaria sobre $A$, cualesquiera sea el conjunto $A$

(E5) Sea $R = \{(x,y) \in \omega^2 : x < y \text{ o } y = 0\}$. Entonces $R$ es una relacion binaria sobre $\omega$

Notese que si $R$ es una relacion binaria sobre $A$ y $A \subseteq B$ entonces $R$ es una relacion binaria sobre $B$. Por ejemplo las relaciones dadas en los ejemplos (E1), (E2), (E4) y (E5) tambien son relaciones binarias sobre $\mathbf{R}$. Sin envargo si $R$ es una relacion binaria sobre $B$ y $A \subseteq B$ entonces no necesariamente $R$ sera una relacion binaria sobre $A$ (por que?).

Como es usual, cuando $R$ sea una relacion binaria sobre un conjunto $A$, escribiremos algunas veces $aRb$ en lugar de $(a,b) \in R$.

Hay algunas propiedades que pueden tener o no las relaciones binarias sobre un conjunto $A$, las cuales son muy importantes en matematica. Algunas de estas son:

Reflexividad $xRx$, cualesquiera sea $x \in A$

Transitividad $xRy$ y $yRz$ implica $xRz$, cualesquiera sean $x, y, z \in A$

Simetria $xRy$ implica $yRx$, cualesquiera sean $x, y \in A$

Antisimetria $xRy$ y $yRx$ implica $x = y$, cualesquiera sean $x, y \in A$

Cuando $R$ cumpla la primer propiedad diremos que $R$ es *reflexiva, con respecto a A*. Analogamente diremos que $R$ es *transitiva, simetrica o antisimetrica, con respecto a A*, cuando se den, respectivamente las otras propiedades. Notese que estas propiedades dependen del conjunto $A$, por ejemplo si tomamos $R = \{(r, t) \in \mathbf{N}^2 : r \leq t\}$ entonces $R$ es una relacion binaria sobre $\mathbf{N}$ y tambien es una relacion binaria sobre $\omega$, pero es relexiva con respepcto a $\mathbf{N}$ y no lo es con respecto a $\omega$ ya que $(0, 0)$ no pertenece a $R$. Sin envargo $R$ es transitiva con respecto a $\mathbf{N}$ y tambien lo es con respecto a $\omega$

Sea $A$ un conjunto cualquiera. Por una *relacion de equivalencia sobre A* entenderemos una relacion binaria sobre $A$ la cual es reflexiva, transitiva y simetrica, con respecto a $A$. Algunos ejemplos:

(E1) Sea $R = \{(r, t) \in \mathbf{R}^2 : r = t\}$. Entonces $R$ es una relacion de equivalencia sobre $\mathbf{R}$

(E2) Dada una funcion $f : A \to B$, el nucleo de $f$, i.e. $\ker(f) = \{(a, b) \in A^2 : f(a) = f(b)\}$ es una relacion de equivalencia sobre $A$.

(E3) Sea $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1)\}$. Entonces $R$ es una relacion de equivalencia sobre $\{1, 2, 3\}$

(E4) Sea $R = \{(x, y) \in \omega^2 : x = y\}$. Entonces $R$ es una relacion de equivalencia sobre $\omega$

(E5) Sea $R = \{(S, T) \in \mathcal{P}(\omega)^2 : (S - T) \cup (T - S) \text{ es finito}\}$. Entonces $R$ es una relacion de equivalencia sobre $\mathcal{P}(\omega)$

(E7) Sea $R = \{(1, 1)\}$. Entonces $R$ es una relacion de equivalencia sobre $\{1\}$.

(E8) Sea $R = \{(x, y) \in \mathbf{Z}^2 : x - y \text{ es multiplo de } 5\}$. Entonces $R$ es una relacion de equivalencia sobre $\mathbf{Z}$.

Ejercicio 1 V o F o I justifique

(a) Sea $X$ un conjunto cualquiera. Entonces $R = \emptyset$ es una relacion binaria sobre $X$ la cual es transitiva, simetrica y antisimetrica, con respecto a $X$.

(b) Si $R$ es una relacion binaria sobre $X$, entonces si $R$ no es antisimetrica con respecto a $X$, se tiene que $R$ es simetrica con respecto a $X$

(c) Si $A$ es un conjunto, entonces $A \times A$ es una relacion de equivalencia sobre $A$

(d) Si $A$ es un conjunto, entonces $\emptyset$ es una relacion de equivalencia sobre $A$

(e) Sea $R = \{(x, y) \in \mathbf{N}^2 : x = y\}$. Entonces $R$ es una relacion de equivalencia sobre $\omega$

(f) Si $R$ es una relacion de equivalencia sobre $B$ y $A \subseteq B$, entonces $R$ es una relacion de equivalencia sobre $A$

Dada una relacion de equivalencia $R$ sobre $A$ y $a \in A$, definimos:

$$a/R = \{b \in A : aRb\}$$

El conjunto $a/R$ sera llamado la *clase de equivalencia de a, con respecto a R*. Ejemplos:

(E1) Si $R = \{(r, t) \in \mathbf{R}^2 : r = t\}$, entonces $r/R = \{r\}$, cualesquier sea $r \in \mathbf{R}$

(E2) Si $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1)\}$, entonces $1/R = 2/R = \{1, 2\}$ y $3/R = \{3\}$

(E3) Si $R = \{(x, y) \in \mathbf{Z}^2 : x - y$ es multiplo de $5\}$, entonces $0/R = \{5.t : t \in \mathbf{Z}\}$

Ejercicio 2 Sea $R$ una relacion de equivalencia sobre $A$ y sea $a \in A$. Entonces $a \in a/R$

Ejercicio 3 Sea $R$ una relacion de equivalencia sobre $A$ y sean $a, b \in A$. Entonces $aRb$ si y solo si $a/R = b/R$. Es decir que si $b \in a/R$, entonces $b/R = a/R$

Ejercicio 4 Sea $R$ una relacion de equivalencia sobre $A$ y sean $a, b \in A$. Entonces $a/R \cap b/R = \emptyset$ o $a/R = b/R$

Denotaremos con $A/R$ al conjunto $\{a/R : a \in A\}$. Llamaremos a $A/R$ el *cociente de A por R*. Ejemplos:

(E1) Si $R = \{(r, t) \in \mathbf{R}^2 : r = t\}$, entonces $\mathbf{R}/R = \{\{r\} : r \in \mathbf{R}\}$

(E2) Si $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1)\}$, entonces $\{1, 2, 3\}/R = \{\{1, 2\}, \{3\}\}$

Ejercicio 5 Sea $R = \{(x, y) \in \mathbf{Z}^2 : x - y$ es multiplo de $5\}$. Encuentre $\mathbf{Z}/R$. Cuantos elementos tiene?

Ejercicio 6 Sea $R = \{(x, y) \in \mathbf{N}^2 : x, y \leq 6\} \cup \{(x, y) \in \mathbf{N}^2 : x > 6$ y $y > 6\}$. Pruebe que $R$ es relacion de equivalencia sobre $\mathbf{N}$. Encuentre $\mathbf{N}/R$. Cuantos elementos tiene?

Ejercicio 7 V o F o I justifique

(a) Si $R$ es una relacion de equivalencia sobre un conjunto no vacio $A$, entonces $|A/R| = 1$ sii $R = A \times A$

(b) Si $R$ es una relacion de equivalencia sobre $A$, entonces $A/R = \{\{a/R\} : a \in A\}$

(c) Sea $R$ es una relacion de equivalencia sobre $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Entonces $|\{i/R : i \in A\}| = 5$

(d) $A/\{(x, y) \in A^2 : x = y\} = A$

(e) Sea $R$ es una relacion de equivalencia sobre $A$ y sea $C$ un subconjunto no vacio de $A$ tal que $xRy$, cualesquiera sean $x, y \in C$. Entonces $C \in A/R$

Si $R$ es una relacion de equivalencia sobre $A$, definamos la funcion $\pi_R : A \to A/R$ por $\pi_R(a) = a/R$, para cada $a \in A$. La funcion $\pi_R$ es llamada la *proyeccion canonica* (*respecto de* $R$)

Ejercicio 8 Sea $R$ una relacion de equivalencia sobre $A$.

(a) $\ker(\pi_R) = R$

(b) $\pi_R$ es inyectiva sii $R = \{(x, y) \in A^2 : x = y\}$

## Correspondencia entre relaciones de equivalencia y particiones

Dado un conjunto $A$ por una *particion de* $A$ entenderemos un conjunto $\mathcal{P}$ tal que:

- Cada elemento de $\mathcal{P}$ es un subconjunto no vacio de $A$
- Si $S_1, S_2 \in \mathcal{P}$ y $S_1 \neq S_2$, entonces $S_1 \cap S_2 = \emptyset$
- $A = \{a : a \in S$, para algun $S \in \mathcal{P}\}$

La ultima condicion dice simplemente que la union de todos los elementos de $\mathcal{P}$ debe ser $A$. Ejemplos:

(E1) Si $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, entonces

$$\mathcal{P} = \{\{1, 5\}, \{2, 3\}, \{4\}\}$$

es una particion de $A$

(E2) $\mathcal{P} = \{\mathbf{N}, \mathbf{R} - \mathbf{N}\}$ es una particion de $\mathbf{R}$

(E3) $\mathcal{P} = \{\{0\}, \{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}, \{7, 8\}, \{9, 10\}, ...\}$ es una particion de $\omega$

Una observacion importante es

Ejercicio 9 Si $\mathcal{P}$ es una particion de $A$, entonces para cada $a \in A$ hay un unico $S \in \mathcal{P}$ tal que $a \in S$. O sea que podemos hablar de EL elemento de $\mathcal{P}$ que contiene a $a$.

Dada una particion $\mathcal{P}$ de un conjunto $A$ podemos definir una relacion binaria asociada a $\mathcal{P}$ de la siguiente manera:

$$R_{\mathcal{P}} = \{(a,b) \in A^2 : a, b \in S, \text{ para algun } S \in \mathcal{P}\}$$

Ejercicio 10 Sea $A$ un conjunto cualquiera. Entonces:

(a) Sea $\mathcal{P}$ una particion de $A$. Entonces $R_{\mathcal{P}}$ es una relacion de equivalencia sobre $A$

(b) Sea $R$ una relacion de equivalencia sobre $A$. Entonces $A/R$ es una particion de $A$

El siguiente teorema da una correspondencia natural entre relaciones de equivalencia sobre $A$ y particiones de $A$.

**Theorem 1** *Sea $A$ un conjunto cualquiera. Sean*

$$\begin{aligned} Part &= \{\textit{particiones de } A\} \\ ReEq &= \{\textit{relaciones de equivalencia sobre } A\} \end{aligned}$$

*Entonces las funciones:*

$$\begin{array}{rcl} Part & \to & ReEq \\ \mathcal{P} & \to & R_{\mathcal{P}} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rcl} ReEq & \to & Part \\ R & \to & A/R \end{array}$$

*son biyecciones una inversa de la otra.*

**Proof.** La prueba es rutinaria pero lo aceptaremos sin demostracion ■

El teorema anterior muestra que a nivel de informacion es lo mismo tener una relacion de equivalencia sobre $A$ que tener una particion de $A$. Esto es muy util ya que muchas veces es mas facil especificar una relacion de equivalencia via su particion asociada. Por ejemplo si hablamos de la relacion de equivalencia sobre $\{1,2,3,4,5\}$ dada por la particion

$$\mathcal{P} = \{\{1,5\},\{4\},\{2,3\}\}$$

nos estaremos refiriendo a $R_{\mathcal{P}}$, es decir a la relacion:

$$\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(1,5),(5,1),(2,3),(3,2)\}$$

Ejercicio 11 V o F o I. Justificar

(a) Si $\mathcal{P}$ es una particion de $X$ y $x \in X$, entonces $x/\mathcal{P} \in \mathcal{P}$

(b) $\mathcal{P} = \{1, 3 \ / \ 2, 4 \ / \ 5, 6\}$ es una particion de $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

(c) $\{1, 3\}, \{2, 4\}, \{5, 6\}$ es una particion de $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

(d) Si $\mathcal{P}$ es una particion de $X$, entonces $\mathcal{P} \cap X = \emptyset$

(e) Si $R$ es una relacion de equivalencia sobre $A$, entonces $A \cap A/R = \emptyset$

(f) Si $R$ es una relacion de equivalencia sobre $A$ y hay una biyeccion entre $A$ y $A/R$ entonces $R = \{(x, y) \in A^2 : x = y\}$

Ejercicio 11,5: Cuantas relaciones de equivalencia sobre $\{1, 2, 3, 4\}$ hay?

## Definicion de funciones con dominio $A/R$

Supongamos $R$ es una relacion de equivalencia sobre $\mathbf{R}$ y supongamos definimos una funcion $f : \mathbf{R}/R \to \mathbf{R}$ de la siguiente manera:

$$f(r/R) = r^2$$

A priori puede pareser que esta definicion es natural y que no esconde ninguna posible complicacion. Pero veamos que pueden surgir problemas dependiendo de como es $R$. Supongamos que $R$ es tal que $2R6$. Entonces tendriamos que $2/R = 6/R$, lo cual nos diria obviamente que $f(2/R) = f(6/R)$. Pero $f(2/R) = 2^2 = 4$ y $f(6/R) = 6^2 = 36$, por lo cual deberia suceder que 4 sea igual a 36. El problema aqui es que la ecuacion $f(r/R) = r^2$ no esta definiendo en forma correcta o inhambigua una funcion ya que el supuesto valor de la funcion en una clase de equivalencia dada depende de que representante de la clase usamos para denotarla. Si usamos el 2 la ecuacion nos dice que entonces $f$ debe valer 4 y si usamos el 6 la ecuacion nos dice que $f$ debe valer 36. Claramente no estamos definiendo una funcion.

Ejercicio 12 V o F o I justifique

(a) Sea $R = \{(x, y) \in \mathbf{Z}^2 : x - y \text{ es multiplo de } 2\}$. La ecuacion

$$f(n/R) = 1/(n^2 + 1)$$

define correctamente una funcion $f : \mathbf{Z}/R \to \mathbf{R}$

(b) Si $R$ es una relacion de equivalencia sobre $A$, entonces la funcion

$$\begin{array}{ccc} A/R & \to & A \\ a/R & \to & a \end{array}$$

es sobre

Si bien hemos visto ejemplos donde ecuaciones, en algun sentido naturales, no definen correctamente una funcion, hay muchos casos en los que si sucede. Veremos mediante ejercicios un tipo de situaciones en las cuales este tipo de definicion resulta inhambigua.

Recordemos que dada una funcion $F : A \to B$, se define $\ker(F) = \{(a, b) \in A^2 : F(a) = F(b)\}$.

Ejercicio 13 Sea $A$ un alfabeto finito. Sea $R = \{(\alpha, \beta) \in A^{*2} : |\alpha| = |\beta|\}$. Explique por que la ecuacion

$$f(\alpha/R) = |\alpha|$$

define inhambiguamente una funcion $f : A^*/R \to \omega$. Es inyectiva esta funcion? Es suryectiva?

Ejercicio 14 Sea $F : \mathbf{N} \to \{0, 1, 2, 3\}$ dada por $F(n)$ = resto de dividir $n$ por 4. Explique por que la ecuacion

$$f(n/\ker(F)) = F(n)$$

define inhambiguamente una funcion $f$ de $\mathbf{N}/\ker(F)$ en $\mathbf{N}$. Es inyectiva esta funcion? Es suryectiva?

Ejercicio 15 (S) Sea $F : A \to B$.

(a) Pruebe entonces que la ecuacion

$$f(a/\ker(F)) = F(a)$$

define en forma inambigua una funcion $f$ de $A/\ker(F)$ en $B$.

(b) Pruebe que $f$ es inyectiva.

(c) Pruebe que si $F$ es sobreyectiva, entonces $f$ es una biyeccion.