Guía 3: Reticulados par

Definición inicial y algunas propiedades

- **Reticulado par**: poset $(P, \leq)$ el cual cumple que $\forall a, b \in P$ existen en $(P, \leq)$ $sup(\{a, b\})$ e $inf(\{a, b\})$
- *Propiedades*:
  - Si $(P, \leq)$ es un conjunto totalmente ordenado, entonces $(P, \leq)$ es un reticulado par.
  - Si $(P, \leq)$ es un reticulado par, entonces existe $sup(S) \forall S \subseteq P$.

Funciones s, i

- **Función binaria**: Dado un conjunto A, por una operación binaria sobre A entenderemos una función cuyo dominio es A^2 y cuya imagen está contenida en A.
- **Funciones** s, i: En un reticulado par $(P, \leq)$ tenemos dos operaciones binarias naturalmente definidas:

$$\begin{array}{ll} s : P^2 \to P & i : P^2 \to P \\ (a, b) \to sup(\{a, b\}) & (a, b) \to inf(\{a, b\}) \end{array}$$

  - Escribiremos $a\ s\ b$ en lugar de $s(a, b)$ y $a\ i\ b$ en lugar de $i(a, b)$
- *Lemas*: Dado un reticulado par $(L, \leq)$:
  - *Cotas básicas, Reflexividad y Conmutatividad*. Se cumplen las siguientes:
    1. $x \leq x\ s\ y\ \forall x, y \in L$
    2. $x\ i\ y \leq x\ \forall x, y \in L$
    3. $x\ s\ x = x\ \forall x \in L$
    4. $x\ i\ x = x\ \forall x \in L$
    5. $x\ s\ y = y\ s\ x\ \forall x, y \in L$
    6. $x\ i\ y = y\ i\ x\ \forall x, y \in L$
  - *Supremo e ínfimo cuando están relacionados*. Se tiene que:
    1. $x \leq y \iff x\ s\ y = y\ \forall x, y \in L$
    2. $x \leq y \iff x\ i\ y = x\ \forall x, y \in L$
  - *Absorción*. Se tiene que:
    1. $x\ s\ (x\ i\ y) = x\ \forall x, y \in L$
    2. $x\ i\ (x\ s\ y) = x\ \forall x, y \in L$
  - *Asociatividad*. Se tiene que:
    1. $(x\ s\ y)\ s\ z = x\ s\ (y\ s\ z)\ \forall x, y, z \in L$
    2. $(x\ i\ y)\ i\ z = x\ i\ (y\ i\ z)\ \forall x, y, z \in L$
  - *Preserva el orden*. Se tiene que:
    1. $x \leq z \wedge y \leq w \Rightarrow x\ s\ y \leq z\ s\ w\ \forall x, y, z, w \in L$
    2. $x \leq z \wedge y \leq w \Rightarrow x\ i\ y \leq z\ i\ w\ \forall x, y, z, w \in L$
  - *Desigualdad de la distributividad*. Se tiene que:
    * $(x\ i\ y)\ s\ (x\ i\ z) \leq x\ i\ (y\ s\ z)\ \forall x, y, z \in L$
  - *Relación entre s/i con sup/inf para conjuntos*. Se tiene que, cualesquiera sean los elementos $x_1, ..., x_n \in L : n \geq 2$:
    * $(...(x_1\ s\ x_2)\ s\ ...)\ s\ x_n = sup(\{x_1, ..., x_n\})$
    * $(...(x_1\ i\ x_2)\ i\ ...)\ i\ x_n = inf(\{x_1, ..., x_n\})$
- *Notación*: Dado que la distribución de paréntesis en una expresión de la forma $(...(x_1\ s\ x_2)\ s\ ...)\ s\ x_n$ es irrelevante (ya que s es asociativa), en general se suprimen. Lo mismo para i.

Reglas/Trucos para demostraciones

- *Igualdad en Posets*: Para ver que $x = y$ en un poset $(P, \leq)$, ver que:
  - $x \leq y$

  - $y \leq x$.
- *Igualar un Supremo*: Para ver que $x = sup(S)$ en un poset $(P, \leq)$, ver que:
  - x es cota superior de S
  - $x \leq z$ $\forall z$ cota superior de S
- *Superar un Supremo*: Para ver que $z \geq x \ s \ y$ en un reticulado par $(L, \leq)$, ver que:
  - $z \geq x$
  - $z \geq y$
- *Ser Menor o Igual que un Ínfimo*: Para ver que $z \leq x \ i \ y$ en un reticulado par $(L, \leq)$, ver que:
  - $z \leq x$
  - $z \leq y$