

Combo 4 de teoremas

Emanuel Nicolás Herrador - November 2024

Propiedades básicas de la deducción

Sea (Σ, τ) una teoría:

1. (Uso de Teoremas). Si $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi_1, \dots, \varphi_n$ y $(\Sigma \cup \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}, \tau) \vdash \varphi$, entonces $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$
2. Supongamos $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi_1, \dots, \varphi_n$. Si R es una regla distinta de *GENERALIZACION* y *ELECCION*, y φ se deduce de $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ por la regla R , entonces $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$
3. $(\Sigma, \tau) \vdash (\varphi \rightarrow \psi)$ sii $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau) \vdash \psi$

Demostración

Vamos a usar los siguientes dos *lemas* en la demostración:

- *Cambio de índice de hipótesis*: Sea (φ, \mathbf{J}) una prueba formal de φ en (Σ, τ) . Sea $m \in N$ tal que $\mathbf{J}_i \neq \text{HIPOTESIS}\bar{m}$ para cada $i = 1, \dots, n(\varphi)$. Supongamos que $\mathbf{J}_i = \text{HIPOTESIS}\bar{k}$ y que $\mathbf{J}_j = \text{TESIS}\bar{k}\alpha$ con $[\alpha]_1 \notin \text{Num}$. Sea $\tilde{\mathbf{J}}$ el resultado de reemplazar en \mathbf{J} la justificación \mathbf{J}_i por $\text{HIPOTESIS}\bar{m}$ y reemplazar la justificación \mathbf{J}_j por $\text{TESIS}\bar{m}\alpha$. Entonces $(\varphi, \tilde{\mathbf{J}})$ es una prueba formal de φ en (Σ, τ) .
- *Cambio de constantes auxiliares*: Sea (φ, \mathbf{J}) una prueba formal de φ en (Σ, τ) . Sea \mathcal{C}_1 el conjunto de nombres de constante que ocurren en φ y que no pertenecen a \mathcal{C} . Sea $e \in \mathcal{C}_1$. Sea $\tilde{e} \notin \mathcal{C} \cup \mathcal{C}_1$ tal que $(\mathcal{C} \cup (\mathcal{C}_1 - \{e\}) \cup \{\tilde{e}\}, \mathcal{F}, \mathcal{R}, a)$ es un tipo. Sea $\tilde{\varphi}_i =$ resultado de reemplazar en φ_i cada ocurrencia de e por \tilde{e} . Entonces $(\tilde{\varphi}_1 \dots \tilde{\varphi}_{n(\varphi)}, \mathbf{J})$ es una prueba formal de φ en (Σ, τ) .

A continuación, demostraremos cada uno de los puntos por separado.

Punto (1)

Notemos que basta con hacer el caso $n = 1$, porque si $n \geq 2$, entonces se obtiene aplicando n veces el caso igual a 1.

Supongamos entonces que $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi_1$ y que $(\Sigma \cup \{\varphi_1\}) \vdash \varphi$. Sea $(\alpha_1 \dots \alpha_h, I_1 \dots I_h)$ una prueba formal de φ_1 en (Σ, τ) ; y sea $(\psi_1 \dots \psi_m, J_1 \dots J_m)$ una prueba formal de φ en $(\Sigma \cup \{\varphi_1\}, \tau)$. Notemos que por los *lemas* anteriores podemos suponer que las pruebas no comparten ningún nombre de constante auxiliar y que tampoco comparten números asociados a hipótesis o tesis.

Por ello, para cada $i = 1, \dots, m$, definamos \tilde{J}_i de la siguiente manera:

- Si $J_i = \alpha \text{AXIOMAPROPIO}$ con $\alpha \in \{\varepsilon\} \cup \{\text{TESIS}\bar{k} : k \in N\}$ y $\psi_i = \varphi_1$, entonces $\tilde{J}_i = \alpha \text{EVOCACION}(\bar{h})$
- Si $J_i = \alpha R(\bar{l}_1, \dots, \bar{l}_k)$ con $\alpha \in \{\varepsilon\} \cup \{\text{TESIS}\bar{k} : k \in N\}$, entonces $\tilde{J}_i = \alpha R(\bar{l}_1 + \bar{h}, \dots, \bar{l}_k + \bar{h})$
- Sino, $\tilde{J}_i = J_i$

Luego, $(\alpha_1 \dots \alpha_h \psi_1 \dots \psi_m, I_1 \dots I_h \tilde{J}_1 \dots \tilde{J}_m)$ es una prueba formal de φ en (Σ, τ) , por lo que $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$ y se demuestra. ■

Punto (2)

Notemos que:

- | | | |
|---------|-------------|------------------------|
| 1. | φ_1 | AXIOMAPROPIO |
| 2. | φ_2 | AXIOMAPROPIO |
| | \vdots | \vdots |
| n . | φ_n | AXIOMAPROPIO |
| $n+1$. | φ | $R(1, \dots, \bar{n})$ |

es una prueba formal de φ en $(\Sigma \cup \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}, \tau)$, por lo que $(\Sigma \cup \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}, \tau) \vdash \varphi$. Como suponemos $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi_1, \dots, \varphi_n$, por el punto (1) tenemos que $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$ por lo que se demuestra. ■

Punto (3)

Veamos los dos casos:

- *Ida*: Supongamos $(\Sigma, \tau) \vdash (\varphi \rightarrow \psi)$. Luego, claramente $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau) \vdash (\varphi \rightarrow \psi)$, φ , por lo que por el punto (2) usando MODUSPONENS tenemos que $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau) \vdash \psi$. Por ello, se demuestra la ida.
- *Vuelta*: Supongamos $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau) \vdash \psi$. Sea $(\varphi_1 \dots \varphi_n, J_1 \dots J_n)$ una prueba formal de ψ en $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau)$, entonces para cada $i = 1, \dots, n$ definamos \tilde{J}_i del siguiente modo:
 - Si $J_i = \alpha \text{AXIOMAPROPIO}$ con $\alpha \in \{\varepsilon\} \cup \{\text{TESIS}\bar{k} : k \in N\}$ y $\varphi_i = \varphi$, entonces $\tilde{J}_i = \alpha \text{EVOCACION}(1)$
 - Si $J_i = \alpha R(\bar{l}_1, \dots, \bar{l}_k)$ con $\alpha \in \{\varepsilon\} \cup \{\text{TESIS}\bar{k} : k \in N\}$, entonces $\tilde{J}_i = \alpha R(\bar{l}_1 + 1, \dots, \bar{l}_k + 1)$
 - Sino, $\tilde{J}_i = J_i$

Sea m tal que ninguna J_i es igual a $\text{HIPOTESIS}\bar{m}$. Entonces

$$(\varphi\varphi_1 \dots \varphi_n(\varphi \rightarrow \psi), \text{HIPOTESIS}\bar{m}\tilde{J}_1 \dots \tilde{J}_{n-1}\text{TESIS}\bar{m}\tilde{J}_n\text{CONCLUSION})$$

es una prueba formal de $(\varphi \rightarrow \psi)$ en (Σ, τ) . Luego, $(\Sigma, \tau) \vdash (\varphi \rightarrow \psi)$ y se demuestra la vuelta.

Por ello, se demuestra el punto (3). ■

Teorema

Sea $(L, s, i, \cdot^c, 0, 1)$ un álgebra de Boole y sean $a, b \in B$. Se tiene que:

1. $(a \cdot b)^c = a^c \cdot b^c$
2. $a \cdot b = 0$ sii $b \leq a^c$

Demostración

Demostremos cada uno de los puntos por separado.

Punto (1)

Vamos a usar el *lema* que dice que: Si $(L, s, i, 0, 1)$ es un reticulado acotado y distributivo, entonces todo elemento tiene a lo sumo un complemento. Es decir, si $x \cdot s \cdot u = x \cdot s \cdot v = 1$ y $x \cdot i \cdot u = x \cdot i \cdot v = 0$, entonces $u = v$, cualesquiera sean $x, u, v \in L$.

Notemos que:

$$\begin{aligned} (a^c \cdot s \cdot b^c) \cdot s \cdot (a \cdot i \cdot b) &= (a^c \cdot s \cdot b^c \cdot s \cdot a) \cdot i \cdot (a^c \cdot s \cdot b^c \cdot s \cdot b) && \text{distributividad} \\ &= (1 \cdot s \cdot b^c) \cdot i \cdot (a^c \cdot s \cdot 1) \\ &= 1 \cdot i \cdot 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a^c \cdot s \cdot b^c) \cdot i \cdot (a \cdot i \cdot b) &= (a^c \cdot i \cdot a \cdot i \cdot b) \cdot s \cdot (b^c \cdot i \cdot a \cdot i \cdot b) && \text{distributividad} \\ &= (0 \cdot i \cdot b) \cdot s \cdot (0 \cdot i \cdot a) \\ &= 0 \cdot s \cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Luego, por def. tenemos que $a^c \cdot s \cdot b^c$ es el complemento de $a \cdot i \cdot b$. Como $(L, s, i, \cdot^c, 0, 1)$ es un Álgebra de Boole, por def. es también un reticulado acotado y distributivo. Luego, por el anterior *lema* sabemos que es único el complemento.

Por ello, $(a \cdot i \cdot b)^c = a^c \cdot s \cdot b^c$ y se demuestra. ■

Punto (2)

Para demostrarlo, veamos ambos lados de la doble implicación:

- *Ida*: Supongamos $a \dot{i} b = 0$. Con ello:

$$\begin{aligned}
 b &= b \dot{i} 1 \\
 &= b \dot{i} ((a \dot{i} b) s (a \dot{i} b)^c) && \text{def. complemento} \\
 &= b \dot{i} (0 s (a \dot{i} b)^c) && \text{supuesto} \\
 &= b \dot{i} (a \dot{i} b)^c \\
 &= b \dot{i} (a^c s b^c) && \text{punto (1)} \\
 &= (b \dot{i} a^c) s (b \dot{i} b^c) && \text{distributividad} \\
 &= (b \dot{i} a^c) s 0 \\
 &= b \dot{i} a^c
 \end{aligned}$$

Luego, como $b = b \dot{i} a^c$, por def. alternativa del orden parcial \leq , tenemos que $b \leq a^c$ y se demuestra la ida.

- *Vuelta*: Supongamos $b \leq a^c$. Por def. alternativa del orden parcial \leq , tenemos que $b \dot{i} a^c = b$. Con ello, veamos que:

$$\begin{aligned}
 a \dot{i} b &= a \dot{i} (b \dot{i} a^c) && \text{reemplazando} \\
 &= (a \dot{i} a^c) \dot{i} b \\
 &= 0 \dot{i} b \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Luego, llegamos a que $a \dot{i} b = 0$ y se demuestra la vuelta.

Por ello, se demuestra el punto (2). ■

Lema

Sean (L, s, i) y (L', s', i') reticulados terna y sean (L, \leq) y (L', \leq') los posets asociados. Sea $F : L \rightarrow L'$ una función. Entonces F es un isomorfismo de (L, s, i) en (L', s', i') sii F es un isomorfismo de (L, \leq) en (L', \leq')

Demostración

Para la demostración, vamos a usar el siguiente *lema*: Sean (P, \leq) y (P', \leq') posets y F un isomorfismo de (P, \leq) en (P', \leq') , entonces:

- $\forall x, y, z \in P, z = \sup\{x, y\} \iff F(z) = \sup\{F(x), F(y)\}$
- $\forall x, y, z \in P, z = \inf\{x, y\} \iff F(z) = \inf\{F(x), F(y)\}$

Vamos a demostrar cada uno de los lados de la doble implicación por separado:

- *Ida*: Supongamos F es un isomorfismo de (L, s, i) en (L', s', i') . Por def. de isomorfismo, F es biyectiva y F, F^{-1} son homomorfismos. Por ello, podemos ver que, sean $x, y \in L$:

$$x \leq y \xrightarrow{\text{def. } \leq} y = x s y \xrightarrow{\text{def. homomorfismo}} F(y) = F(x s y) = F(x) s' F(y) \xrightarrow{\text{def. de } \leq'} F(x) \leq' F(y)$$

Con ello, llegamos a que F es un homomorfismo de (L, \leq) en (L', \leq') . Como F es biyectiva y de forma análoga a la anterior podemos ver que F^{-1} es un homomorfismo de (L', \leq') en (L, \leq) , entonces F es un isomorfismo de (L, \leq) en (L', \leq') y se demuestra la ida.

- *Vuelta*: Supongamos F es un isomorfismo de (L, \leq) en (L', \leq') . Por ello, tenemos que:

$$\begin{aligned}
 \forall x, y, z \in P, z = x s y &\iff F(z) = F(x) s' F(y) && \text{por lema} \\
 \forall x, y \in P, F(x s y) &= F(x) s' F(y) && \text{usando la prop. con } \Rightarrow
 \end{aligned}$$

Análogamente, llegamos también a que $\forall x, y \in P, F(x \dot{i} y) = F(x) \dot{i}' F(y)$. Por ello, F es un homomorfismo de (L, s, i) en (L', s', i') .

Ahora, como F es biyectiva y de forma análoga F^{-1} es un homomorfismo de (L', s', i') en (L, s, i) , por def. F es un isomorfismo.

Con ello, se demuestra la vuelta.

Por todo ello, entonces, se demuestra el lema. ■