Combo 4 de teoremas

Emanuel Nicolás Herrador - November 2024

Propiedades básicas de la deducción

Sea (Σ, τ) una teoría:

1. (Uso de Teoremas). Si $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ y $(\Sigma \cup \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}, \tau) \vdash \varphi$, entonces $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$
2. Supongamos $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi_1, \ldots, \varphi_n$. Si R es una regla distinta de $GENERALIZACION$ y $ELECCION$, y φ se deduce de $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ por la regla R, entonces $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$
3. $(\Sigma, \tau) \vdash (\varphi \to \psi)$ sii $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau) \vdash \psi$

Demostración

Vamos a usar los siguientes dos *lemas* en la demostración:

- *Cambio de índice de hipótesis*: Sea $(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{J})$ una prueba formal de φ en (Σ, τ). Sea $m \in N$ tal que $\mathbf{J}_i \neq$ HIPOTESIS$\bar{m}$ para cada $i = 1, \ldots, n(\boldsymbol{\varphi})$. Supongamos que $\mathbf{J}_i =$ HIPOTESIS$\bar{k}$ y que $\mathbf{J}_j =$ TESIS$\bar{k}\alpha$ con $[\alpha]_1 \notin Num$. Sea $\tilde{\mathbf{J}}$ el resultado de reemplazar en $\mathbf{J}$ la justificación $\mathbf{J}_i$ por HIPOTESIS$\bar{m}$ y reemplazar la justificación $\mathbf{J}_j$ por TESIS$\bar{m}\alpha$. Entonces $(\boldsymbol{\varphi}, \tilde{\mathbf{J}})$ es una prueba formal de φ en (Σ, τ).
- *Cambio de constantes auxiliares*: Sea $(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{J})$ una prueba formal de φ en (Σ, τ). Sea $\mathcal{C}_1$ el conjunto de nombres de constante que ocurren en $\boldsymbol{\varphi}$ y que no pertenecen a $\mathcal{C}$. Sea $e \in \mathcal{C}_1$. Sea $\tilde{e} \notin \mathcal{C} \cup \mathcal{C}_1$ tal que $(\mathcal{C} \cup (\mathcal{C}_1 - \{e\}) \cup \{\tilde{e}\}, \mathcal{F}, \mathcal{R}, a)$ es un tipo. Sea $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}_i =$ resultado de reemplazar en $\boldsymbol{\varphi}_i$ cada ocurrencia de e por $\tilde{e}$. Entonces $(\tilde{\boldsymbol{\varphi}}_1 \ldots \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_{n(\boldsymbol{\varphi})}, \mathbf{J})$ es una prueba formal de φ en (Σ, τ).

A continuación, demostraremos cada uno de los puntos por separado.

Punto (1)

Notemos que basta con hacer el caso $n = 1$, porque si $n \geq 2$, entonces se obtiene aplicando n veces el caso igual a 1.

Supongamos entonces que $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi_1$ y que $(\Sigma \cup \{\varphi_1\}) \vdash \varphi$. Sea $(\alpha_1 \ldots \alpha_h, I_1 \ldots I_h)$ una prueba formal de φ_1 en (Σ, τ); y sea $(\psi_1 \ldots \psi_m, J_1 \ldots J_m)$ una prueba formal de φ en $(\Sigma \cup \{\varphi_1\}, \tau)$. Notemos que por los *lemas* anteriores podemos suponer que las pruebas no comparten ningún nombre de constante auxiliar y que tampoco comparten números asociados a hipótesis o tesis.

Por ello, para cada $i = 1, \ldots, m$, definamos $\tilde{J}_i$ de la siguiente manera:

- Si $J_i = \alpha$AXIOMAPROPIO con $\alpha \in \{\varepsilon\} \cup \{\text{TESIS}\bar{k} : k \in N\}$ y $\psi_i = \varphi_1$, entonces $\tilde{J}_i = \alpha$EVOCACION$(\bar{h})$
- Si $J_i = \alpha R(\bar{l_1}, \ldots, \bar{l_k})$ con $\alpha \in \{\varepsilon\} \cup \{\text{TESIS}\bar{k} : k \in N\}$, entonces $\tilde{J}_i = \alpha R(\overline{l_1 + h}, \ldots, \overline{l_k + h})$
- Sino, $\tilde{J}_i = J_i$

Luego, $(\alpha_1 \ldots \alpha_h \psi_1 \ldots \psi_m, I_1 \ldots I_h \tilde{J}_1 \ldots \tilde{J}_m)$ es una prueba formal de φ en (Σ, τ), por lo que $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$ y se demuestra. ■

Punto (2)

Notemos que:

$$
\begin{array}{rll}
1. & \varphi_1 & \text{AXIOMAPROPIO} \\
2. & \varphi_2 & \text{AXIOMAPROPIO} \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
n. & \varphi_n & \text{AXIOMAPROPIO} \\
n+1. & \varphi & R(1, \ldots, \bar{n})
\end{array}
$$

es una prueba formal de φ en $(\Sigma \cup \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}, \tau)$, por lo que $(\Sigma \cup \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}, \tau) \vdash \varphi$. Como suponemos $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi_1, \ldots, \varphi_n$, por el punto (**1**) tenemos que $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$ por lo que se demuestra. ■

Punto (3)

Veamos los dos casos:

- *Ida*: Supongamos $(\Sigma,\tau)\vdash(\varphi\to\psi)$. Luego, claramente $(\Sigma\cup\{\varphi\},\tau)\vdash(\varphi\to\psi),\varphi$, por lo que por el punto (**2**) usando MODUSPONENS tenemos que $(\Sigma\cup\{\varphi\},\tau)\vdash\psi$. Por ello, se demuestra la ida.

- *Vuelta*: Supongamos $(\Sigma\cup\{\varphi\},\tau)\vdash\psi$. Sea $(\varphi_1\ldots\varphi_n, J_1\ldots J_n)$ una prueba formal de ψ en $(\Sigma\cup\{\varphi\},\tau)$, entonces para cada $i=1,\ldots,n$ definamos $\tilde{J}_i$ del siguiente modo:

  - Si $J_i=\alpha$AXIOMAPROPIO con $\alpha\in\{\varepsilon\}\cup\{\text{TESIS}\bar{k}: k\in N\}$ y $\varphi_i=\varphi$, entonces $\tilde{J}_i=\alpha$EVOCACION(1)
  - Si $J_i=\alpha R(\bar{l_1},\ldots,\bar{l_k})$ con $\alpha\in\{\varepsilon\}\cup\{\text{TESIS}\bar{k}: k\in N\}$, entonces $\tilde{J}_i=\alpha R(\overline{l_1+1},\ldots,\overline{l_k+1})$
  - Sino, $\tilde{J}_i=J_i$

  Sea m tal que ninguna J_i es igual a HIPOTESIS$\bar{m}$. Entonces

  $$(\varphi\varphi_1\ldots\varphi_n(\varphi\to\psi), \text{HIPOTESIS}\bar{m}\tilde{J}_1\ldots\tilde{J}_{n-1}TESIS\bar{m}\tilde{J}_nCONCLUSION)$$

  es una prueba formal de $(\varphi\to\psi)$ en (Σ,τ). Luego, $(\Sigma,\tau)\vdash(\varphi\to\psi)$ y se demuestra la vuelta.

Por ello, se demuestra el punto (**3**). ■

Teorema

Sea $(L,s,i,{}^c,0,1)$ un álgebra de Boole y sean $a,b\in B$. Se tiene que:

1. $(a\ i\ b)^c=a^c\ s\ b^c$
2. $a\ i\ b=0$ sii $b\leq a^c$

Demostración

Demostremos cada uno de los puntos por separado.

Punto (1)

Vamos a usar el *lema* que dice que: Si $(L,s,i,0,1)$ es un reticulado acotado y distributivo, entonces todo elemento tiene a lo sumo un complemento. Es decir, si $x\ s\ u=x\ s\ v=1$ y $x\ i\ u=x\ i\ v=0$, entonces $u=v$, cualesquiera sean $x,u,v\in L$.

Notemos que:

$$\begin{aligned}(a^c\ s\ b^c)\ s\ (a\ i\ b) &= (a^c\ s\ b^c\ s\ a)\ i\ (a^c\ s\ b^c\ s\ b) && \text{distributividad}\\ &= (1\ s\ b^c)\ i\ (a^c\ s\ 1)\\ &= 1\ i\ 1\\ &= 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a^c\ s\ b^c)\ i\ (a\ i\ b) &= (a^c\ i\ a\ i\ b)\ s\ (b^c\ i\ a\ i\ b) && \text{distributividad}\\ &= (0\ i\ b)\ s\ (0\ i\ a)\\ &= 0\ s\ 0\\ &= 0\end{aligned}$$

Luego, por def. tenemos que $a^c\ s\ b^c$ es el complemento de $a\ i\ b$. Como $(L,s,i,{}^c,0,1)$ es un Álgebra de Boole, por def. es también un reticulado acotado y distributivo. Luego, por el anterior *lema* sabemos que es único el complemento.

Por ello, $(a\ i\ b)^c=a^c\ s\ b^c$ y se demuestra. ■

Punto (2)

Para demostrarlo, veamos ambos lados de la doble implicación:

- *Ida*: Supongamos $a\ i\ b = 0$. Con ello:

$$\begin{aligned} b &= b\ i\ 1 \\ &= b\ i\ ((a\ i\ b)\ s\ (a\ i\ b)^c) && \text{def. complemento} \\ &= b\ i\ (0\ s\ (a\ i\ b)^c) && \text{supuesto} \\ &= b\ i\ (a\ i\ b)^c \\ &= b\ i\ (a^c\ s\ b^c) && \text{punto (1)} \\ &= (b\ i\ a^c)\ s\ (b\ i\ b^c) && \text{distributividad} \\ &= (b\ i\ a^c)\ s\ 0 \\ &= b\ i\ a^c \end{aligned}$$

  Luego, como $b = b\ i\ a^c$, por def. alternativa del orden parcial $\leq$, tenemos que $b \leq a^c$ y se demuestra la ida.

- *Vuelta*: Supongamos $b \leq a^c$. Por def. alternativa del orden parcial $\leq$, tenemos que $b\ i\ a^c = b$. Con ello, veamos que:

$$\begin{aligned} a\ i\ b &= a\ i\ (b\ i\ a^c) && \text{reemplazando} \\ &= (a\ i\ a^c)\ i\ b \\ &= 0\ i\ b \\ &= 0 \end{aligned}$$

  Luego, llegamos a que $a\ i\ b = 0$ y se demuestra la vuelta.

Por ello, se demuestra el punto (**2**). ■

Lema

Sean (L, s, i) y (L', s', i') reticulados terna y sean $(L, \leq)$ y $(L', \leq')$ los posets asociados. Sea $F : L \to L'$ una función. Entonces F es un isomorfismo de (L, s, i) en (L', s', i') sii F es un isomorfismo de $(L, \leq)$ en $(L', \leq')$

Demostración

Para la demostración, vamos a usar el siguiente *lema*: Sean $(P, \leq)$ y $(P', \leq')$ posets y F un isomorfismo de $(P, \leq)$ en $(P', \leq')$, entonces:

- $\forall x, y, z \in P,\ z = \sup\{x, y\} \iff F(z) = \sup\{F(x), F(y)\}$
- $\forall x, y, z \in P,\ z = \inf\{x, y\} \iff F(z) = \inf\{F(x), F(y)\}$

Vamos a demostrar cada uno de los lados de la doble implicación por separado:

- *Ida*: Supongamos F es un isomorfismo de (L, s, i) en (L', s', i'). Por def. de isomorfismo, F es biyectiva y F, F^{-1} son homomorfismos. Por ello, podemos ver que, sean $x, y \in L$:

$$x \leq y \overset{\text{def. } \leq}{\Rightarrow} y = x\ s\ y \overset{\text{def. homomorfismo}}{\Rightarrow} F(y) = F(x\ s\ y) = F(x)\ s'\ F(y) \overset{\text{def. de } \leq}{\Rightarrow} F(x) \leq' F(y)$$

  Con ello, llegamos a que F es un homomorfismo de $(L, \leq)$ en $(L', \leq')$. Como F es biyectiva y de forma análoga a la anterior podemos ver que F^{-1} es un homomorfismo de $(L', \leq')$ en $(L, \leq)$, entonces F es un isomorfismo de $(L, \leq)$ en $(L', \leq')$ y se demuestra la ida.

- *Vuelta*: Supongamos F es un isomorfismo de $(L, \leq)$ en $(L', \leq')$. Por ello, tenemos que:

$$\begin{aligned} \forall x, y, z \in L,\ z = x\ s\ y \iff F(z) = F(x)\ s\ F(y) && \text{por lema} \\ \forall x, y \in L,\ F(x\ s\ y) = F(x)\ s'\ F(y) && \text{usando la prop. con } \Rightarrow \end{aligned}$$

  Análogamente, llegamos también a que $\forall x, y \in L,\ F(x\ i\ y) = F(x)\ i'\ F(y)$. Por ello, F es un homomorfismo de (L, s, i) en (L', s', i').

  Ahora, como F es biyectiva y de forma análoga F^{-1} es un homomorfismo de (L', s', i') en (L, s, i), por def. F es un isomorfismo.

  Con ello, se demuestra la vuelta.

Por todo ello, entonces, se demuestra el lema. ■