Guia 3 de Logica

August 29, 2024

Nota: Los ejercicios que tienen una S son para una "Segunda pasada" es decir ya sea son mas anecdoticos y menos importantes tematicamente, o son de completar pruebas y tienen que ver mas con la parte teorica, o son mas dificiles y conviene encararlos despues de una primera pasada por la guia (asi uno comienza a pensarlos con un poco mas de madurez sobre el tema).

Reticulados par

El concepto de reticulado puede ser abordado en dos formas distintas, una geometrica, via posets, la cual daremos ahora y la otra algebraica, via estructuras algebraicas definidas ecuacionalmente, la cual daremos en la Guia 4. Como veremos mas adelante ambas definiciones son equivalentes.

Por un *reticulado par* entenderemos un poset $(P, \leq)$ el cual cumple que para todo $a, b \in P$, existen (en $(P, \leq)$) $\sup(\{a, b\})$ e $\inf(\{a, b\})$.

Ejercicio 1: Dar todos reticulados par cuyo universo es $\{2, 3, 4\}$

Ejercicio 2: Probar que $(\mathcal{P}(\omega), \leq)$, donde $\leq = \{(A, B) \in \mathcal{P}(\omega)^2 : A \subseteq B\}$, es un reticulado par.

Ejercicio 2,5: Pruebe que $(\mathbf{N}, D)$ es un reticulado par, donde $D = \{(x, y) \in \mathbf{N}^2 : x|y\}$. ¿tiene elemento maximo? ¿tiene elemento minimo?

Ejercicio 3: Sea $(P, \leq)$ un poset.

(a) Supongamos $a, b \in P$ son tales que $a \leq b$. Entonces $\sup(\{a, b\}) = b$

(b) Si $(P, \leq)$ es un conjunto totalmente ordenado, entonces $(P, \leq)$ es un reticulado par.

Notese que si $(P, \leq)$ es un poset y $S \subseteq P$ es no vacio, entonces $\leq \cap S^2$ es un orden parcial sobre S, por lo cual $(S, \leq \cap S^2)$ es un poset.

Ejercicio 4: V o F o I, justifique

(a) $(\{1\},\{(1,1)\})$ es un reticulado par

(b) Si $(P,\leq)$ es un reticulado par, entonces existe $\sup S$ para cada $S\subseteq P$

(c) Si $(P,\leq)$ es un reticulado par y $S\subseteq P$ es no vacio, entonces $(S,\leq\cap S^2)$ es un reticulado par

(d) (S) Sea $(P,\leq)$ un reticulado par y sea $S\subseteq P$ no vacio tal que $(S,\leq\cap S^2)$ es un reticulado par. Sean $a,b\in S$. Entonces el infimo de $\{a,b\}$ en $(P,\leq)$ y el infimo de $\{a,b\}$ en $(S,\leq\cap S^2)$ coinciden

(e) (S) Sea $\leq=\{(A,B)\in(\mathcal{P}(\mathbf{R})-\{\mathbf{N}\})^2 : A\subseteq B\}$. Entonces $(\mathcal{P}(\mathbf{R})-\{\mathbf{N}\},\leq)$ es un reticulado par

Dado un conjunto A, por una *operacion binaria sobre* A entenderemos una funcion cuyo dominio es A^2 y cuya imagen esta contenida en A. En un reticulado par $(P,\leq)$ tenemos dos operaciones binarias naturalmente definidas:

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{s}:P^2 & \to & P \\ (a,b) & \to & \sup(\{a,b\}) \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rcl} \mathsf{i}:P^2 & \to & P \\ (a,b) & \to & \inf(\{a,b\}) \end{array}$$

Escribiremos $a\ \mathsf{s}\ b$ en lugar de $\mathsf{s}(a,b)$ y $a\ \mathsf{i}\ b$ en lugar de $\mathsf{i}(a,b)$.

Ejercicio 5: Cuales son las operaciones s e i en el reticulado par $(\mathbf{N},|)$ (con $|=\{(x,y)\in\mathbf{N}^2 : x|y\}$)?

Ejercicio 6 Cuales son las operaciones s e i en el reticulado par $(\mathcal{P}(\omega),\leq)$ (con $\leq=\{(A,B)\in\mathcal{P}(\omega)^2 : A\subseteq B\}$)?

Ejercicio 7: Sea $n\in\mathbf{N}$. Sea $D_n=\{x\in\mathbf{N} : x|n\}$ y sea $\leq_n=\{(x,y)\in D_n\times D_n : x|y\}$. Pruebe que $(D_n,\leq_n)$ es un reticulado par y describa las operaciones s e i de $(D_n,\leq_n)$. Haga el diagrama de Hasse de $(D_{60},\leq_{60})$

Ejercicio 8: Sea $P\subseteq\mathcal{P}(\mathbf{N})$, y supongamos $(P,\leq)$ es un reticulado par, donde $\leq=\{(A,B)\in P^2 : A\subseteq B\}$. Es entonces la operación i de $(P,\leq)$ igual a la operación intersección de conjuntos restringida a P^2?

Ejercicio 9: Sea $P\subseteq\mathbf{N}$, y supongamos $(P,\leq)$ es un reticulado par, donde $\leq=\{(x,y)\in P^2 : x|y\}$. Es entonces la operación i de $(P,\leq)$ igual a la operación maximo comun divisor restringida a P^2?

Ejercicio 10: (S) Si $(P,\leq)$ es un reticulado par y m es un elemento maximal de $(P,\leq)$ entonces m es un elemento maximo de $(P,\leq)$. Puede debilitar la hipotesis de que $(P,\leq)$ sea un reticulado par de manera que el enunciado siga siendo verdadero?

A continuacion nos dedicaremos a probar varias propiedades agradables que se cumplen en un reticulado par. Recomendamos al lector que en algunos casos practique encontrando pruebas perfectas. Esto lo entrenara en su capacidad de ser un matematico maduro, la cual sera crucial a la hora de hacer logica ya que la logica estudia (modeliza) matematicamente el funcionar de un matematico y sera muy practico que cada uno cuente con un matematico maduro en su propia mente.

Lemma 1 *Dado un reticulado par $(L, \leq)$, se cumplen las siguientes.*

(1) $x \leq x \mathsf{s} y$*, cualesquiera sean* $x, y \in L$

(2) $x \mathsf{i} y \leq x$*, cualesquiera sean* $x, y \in L$

(3) $x \mathsf{s} x = x$*, cualesquiera sea* $x \in L$

(4) $x \mathsf{i} x = x$*, cualesquiera sea* $x \in L$

(5) $x \mathsf{s} y = y \mathsf{s} x$*, cualesquiera sean* $x, y \in L$

(6) $x \mathsf{i} y = y \mathsf{i} x$*, cualesquiera sean* $x, y \in L$

Proof. Prueba perfecta de (1). Sean $a, b \in L$, fijos. Por definicion de s tenemos que $a \mathsf{s} b = \sup(\{a, b\})$. O sea que por definicion de supremo de un conjunto tenemos que $a \mathsf{s} b$ es cota superior del conjunto $\{a, b\}$ en $(L \leq)$. O sea que $a \leq a \mathsf{s} b$. Ya que a, b eran arbitrarios, hemos probado que vale (1).

Prueba perfecta de (3). Sea $a \in L$, fijo. Por definicion de s tenemos que $a \mathsf{s} a = \sup(\{a, a\}) = \sup(\{a\})$. O sea que debemos probar que $a = \sup(\{a\})$. Es claro que a es cota superior de $\{a\}$. Ademas es claro que si z es cota superior de $\{a\}$, entonces $z \geq a$. O sea que por definicion de supremo de un conjunto tenemos que $a = \sup(\{a\})$. O sea que hemos probado que $a \mathsf{s} a = a$. Ya que a era arbitrario, hemos probado que vale (3).

Dejamos al lector completar la prueba. ■

Ejercicio 11: Complete la prueba del lema anterior

Lemma 2 *Dado un reticulado par $(L, \leq)$ se tiene que:*

(1) $x \leq y$ *si y solo si* $x \mathsf{s} y = y$*, cualesquiera sean* $x, y \in L$

(2) $x \leq y$ *si y solo si* $x \mathsf{i} y = x$*, cualesquiera sean* $x, y \in L$

Ejercicio 12: Demuestre el lema anterior

Las siguientes dos propiedades son conocidas como leyes de absorcion (por que?)

Lemma 3 *Dado un reticulado par $(L, \leq)$, se tiene que:*

(1) $x \mathsf{s} (x \mathsf{i} y) = x$, *cualesquiera sean* $x, y \in L$

(2) $x \mathsf{i} (x \mathsf{s} y) = x$, *cualesquiera sean* $x, y \in L$

Proof. (1). Sean $a, b \in L$, fijos. Por definicion de s debemos probar que $\sup(\{a, a \mathsf{i} b\}) = a$. O sea debemos probar que a es la menor cota superior de $\{a, a \mathsf{i} b\}$. Por un lema anterior tenemos que $a \mathsf{i} b \leq a$ y obviamente se da $a \leq a$, lo cual nos dice que a es cota superior de $\{a, a \mathsf{i} b\}$. Es claro que es menor o igual que cualquier otra cota superior. O sea que hemos probado que $a \mathsf{s} (a \mathsf{i} b) = a$, lo cual ya que a, b eran elementos arbitrarios nos dice que vale (1). ■

Ejercicio 13: Pruebe (2) del lema anterior

Antes de seguir dando propiedades basicas de los reticulados par daremos tres reglas que seran de suma utilidad para encontrar pruebas.

Regla Igualdad en Posets
Si ud esta intentando probar que en un poset $(P, \leq)$ dos elementos x, y son iguales, desdoble su tarea en las dos tareas siguientes:

- Probar que $x \leq y$
- Probar que $y \leq x$

Regla Superar un Supremo
Si ud esta intentando probar que en un reticulado par $(L, \leq)$ se da que $z \geq x \mathsf{s} y$, desdoble su tarea en las dos tareas siguientes:

- Probar que $z \geq x$
- Probar que $z \geq y$

Regla Ser Menor o Igual que un Infimo
Si ud esta intentando probar que en un reticulado par $(L, \leq)$ se da que $z \leq x \mathsf{i} y$, desdoble su tarea en las dos tareas siguientes:

- Probar que $z \leq x$
- Probar que $z \leq y$

Ejercicio 14: Justifique matematicamente la validez de las reglas anteriores

Ambas operaciones s e i son asociativas, es decir:

Lemma 4 *Dado un reticulado par $(L, \leq)$, se tiene que:*

(1) $(x \mathsf{s}\, y) \mathsf{s}\, z = x \mathsf{s}\, (y \mathsf{s}\, z)$, *cualesquiera sean* $x, y, z \in L$

(2) $(x \mathsf{i}\, y) \mathsf{i}\, z = x \mathsf{i}\, (y \mathsf{i}\, z)$, *cualesquiera sean* $x, y, z \in L$

Proof. (1) Sean $a, b, c \in L$, fijos. Usaremos la regla Igualdad en Posets. Primero probaremos $(a \mathsf{s}\, b) \mathsf{s}\, c \leq a \mathsf{s}\, (b \mathsf{s}\, c)$. Para esto usaremos la regla Superar un Supremo. Es decir que debemos probar que

$$\begin{aligned} (a \mathsf{s}\, b) &\leq a \mathsf{s}\, (b \mathsf{s}\, c) \\ c &\leq a \mathsf{s}\, (b \mathsf{s}\, c) \end{aligned}$$

Para la primer desigualdad usaremos tambien la regla Superar un Supremo, por lo cual deberemos probar

$$\begin{aligned} a &\leq a \mathsf{s}\, (b \mathsf{s}\, c) \\ b &\leq a \mathsf{s}\, (b \mathsf{s}\, c) \end{aligned}$$

O sea que en suma debemos probar las siguientes desigualdades

$$\begin{aligned} a &\leq a \mathsf{s}\, (b \mathsf{s}\, c) \\ b &\leq a \mathsf{s}\, (b \mathsf{s}\, c) \\ c &\leq a \mathsf{s}\, (b \mathsf{s}\, c) \end{aligned}$$

La primera es directa de un lema anterior, y para la segunda notese que el mismo lema nos dice que

$$b \leq (b \mathsf{s}\, c) \text{ y } (b \mathsf{s}\, c) \leq a \mathsf{s}\, (b \mathsf{s}\, c)$$

por lo cual solo resta usar que $\leq$ es transitiva. La tercera es completamente analoga a la segunda.

En forma similar se prueba que $a \mathsf{s}\, (b \mathsf{s}\, c) \leq (a \mathsf{s}\, b) \mathsf{s}\, c$. Es decir que por la regla Igualdad en Posets tenemos que $a \mathsf{s}\, (b \mathsf{s}\, c) = (a \mathsf{s}\, b) \mathsf{s}\, c$. Ya que a, b, c eran elementos arbitrarios hemos probado que vale (1).

(2) es dejada como ejercicio. ■

Ejercicio 14,5: Complete la prueba de (1) en la demostracion anterior, probando que $a \mathsf{s}\, (b \mathsf{s}\, c) \leq (a \mathsf{s}\, b) \mathsf{s}\, c$

El siguiente lema prueba que en un reticulado par las operaciones s e i preservan el orden

Lemma 5 *Dado un reticulado par $(L, \leq)$, se tiene que:*

(1) $x \leq z$ *e* $y \leq w$ *implica* $x \mathsf{s}\, y \leq z \mathsf{s}\, w$, *cualesquiera sean* $x, y, z, w \in L$

(2) $x \leq z$ *e* $y \leq w$ *implica* $x \mathsf{i} y \leq z \mathsf{i} w$*, cualesquiera sean* $x, y, z, w \in L$

Proof. (1) Sean $a, b, c, d \in L$, elementos fijos. Supongamos que $a \leq c$ e $b \leq d$. Probaremos que entonces $a \mathsf{s} b \leq c \mathsf{s} d$. Por la regla Superar un Supremo basta con probar que

$$a \leq c \mathsf{s} d$$
$$b \leq c \mathsf{s} d$$

Para ver que $a \leq c \mathsf{s} d$ notese que $a \leq c$ (por hipotesis) y $c \leq c \mathsf{s} d$, por lo cual podemos usar que $\leq$ es transitiva. La desigualdad $b \leq c \mathsf{s} d$ se prueba en forma similar. O sea que hemos probado que

$$a \leq c \text{ y } b \leq d \text{ implican } a \mathsf{s} b \leq c \mathsf{s} d$$

Ya que a, b, c, d eran elementos arbitrarios hemos probado que vale (1). ■

Ejercicio 15: Haga la prueba de (2) del lema anterior

Lemma 6 *Dado un reticulado par* $(L, \leq)$*, se tiene que:*

- $(x \mathsf{i} y) \mathsf{s} (x \mathsf{i} z) \leq x \mathsf{i} (y \mathsf{s} z)$*, cualesquiera sean* $x, y, z \in L$

Proof. Sean $a, b, c \in L$, elementos fijos. Por la regla Superar un Supremo, basta con probar que

$$a \mathsf{i} b \leq a \mathsf{i} (b \mathsf{s} c)$$
$$a \mathsf{i} c \leq a \mathsf{i} (b \mathsf{s} c)$$

Pero estas dos desigualdades pueden ser facilmente probadas aplicando (2) del lema anterior. O sea que $(a \mathsf{i} b) \mathsf{s} (a \mathsf{i} c) \leq a \mathsf{i} (b \mathsf{s} c)$, de lo cual se deduce nuestro lema ya que a, b, c eran elementos arbitrarios. ■

Ejercicio 16: Complete la prueba del lema anterior

Iterar supremos (resp. infimos) da supremos (resp. infimos), es decir:

Lemma 7 *Sea* $(L, \leq)$ *un reticulado par. Se tiene que*

$$(...(x_1 \mathsf{s} x_2) \mathsf{s} ...) \mathsf{s} x_n = \sup(\{x_1, ..., x_n\})$$
$$(...(x_1 \mathsf{i} x_2) \mathsf{i} ...) \mathsf{i} x_n = \inf(\{x_1, ..., x_n\})$$

cualesquiera sean los elementos $x_1, ..., x_n \in L$*, con* $n \geq 2$*.*

Proof. Por induccion en n. Claramente el resultado vale para $n = 2$. Supongamos vale para n y veamos entonces que vale para $n+1$. Sean $a_1, ..., a_{n+1} \in L$, fijos. Por hipotesis inductiva tenemos que

(1) $(...(a_1 \mathsf{s}\, a_2) \mathsf{s} ...) \mathsf{s}\, a_n = \sup(\{a_1, ..., a_n\})$

Veamos entonces que

(2) $((...(a_1 \mathsf{s}\, a_2) \mathsf{s} ...) \mathsf{s}\, a_n) \mathsf{s}\, a_{n+1} = \sup(\{a_1, ..., a_{n+1}\})$

Usando (1), es facil ver que $((...(a_1 \mathsf{s}\, a_2) \mathsf{s} ...) \mathsf{s}\, a_n) \mathsf{s}\, a_{n+1}$ es cota superior de $\{a_1, ..., a_{n+1}\}$. Supongamos que z es otra cota superior. Ya que z es tambien cota superior del conjunto $\{a_1, ..., a_n\}$, por (1) tenemos que

$$(...(a_1 \mathsf{s}\, a_2) \mathsf{s} ...) \mathsf{s}\, a_n \leq z$$

Pero entonces ya que $a_{n+1} \leq z$, tenemos que

$$((...(a_1 \mathsf{s}\, a_2) \mathsf{s} ...) \mathsf{s}\, a_n) \mathsf{s}\, a_{n+1} \leq z$$

con lo cual hemos probado (2). Ya que $a_1, ..., a_{n+1} \in L$ eran elementos arbitrarios, hemos probado que vale el enunciado del lema para $n+1$. ■

Ejercicio 17: Complete la prueba del lema anterior justificando por que $((...(a_1 \mathsf{s}\, a_2) \mathsf{s} ...) \mathsf{s}\, a_n) \mathsf{s}\, a_{n+1}$ es cota superior de $\{a_1, ..., a_{n+1}\}$

Dado que la distribucion de parentesis en una expresion de la forma

$$(...(x_1 \mathsf{s}\, x_2) \mathsf{s} ...) \mathsf{s}\, x_n$$

es irrelevante (ya que s es asociativa), en general suprimiremos los parentesis.

Ejercicio 18: Complete el enunciado de la siguiente regla, la cual hemos usado constantemente a lo largo de la guia:

Igualar un Supremo

Si ud esta intentando probar que en un poset $(P, \leq)$ se da que $x = \sup(S)$, desdoble su tarea en las dos tareas siguientes:

(a) ....

(b) ....

Ejercicio 19: (S) Que relacion tienen las cinco reglas consideradas en la guia con el concepto de inteligencia artificial?