Combo 7 de teoremas

Emanuel Nicolás Herrador - November 2024

Propiedades básicas de la deducción

Sea (Σ, τ) una teoría:

1. (Uso de Teoremas). Si $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi_1, \dots, \varphi_n$ y $(\Sigma \cup \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}, \tau) \vdash \varphi$, entonces $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$
2. Supongamos $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi_1, \dots, \varphi_n$. Si R es una regla distinta de $GENERALIZACION$ y $ELECCION$, y φ se deduce de $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ por la regla R, entonces $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$
3. $(\Sigma, \tau) \vdash (\varphi \to \psi)$ sii $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau) \vdash \psi$

Demostración

Vamos a usar los siguientes dos *lemas* en la demostración:

- *Cambio de índice de hipótesis*: Sea $(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{J})$ una prueba formal de φ en (Σ, τ). Sea $m \in N$ tal que $\mathbf{J}_i \neq$ HIPOTESIS$\bar{m}$ para cada $i = 1, \dots, n(\boldsymbol{\varphi})$. Supongamos que $\mathbf{J}_i =$ HIPOTESIS$\bar{k}$ y que $\mathbf{J}_j =$ TESIS$\bar{k}\alpha$ con $[\alpha]_1 \notin Num$. Sea $\tilde{\mathbf{J}}$ el resultado de reemplazar en $\mathbf{J}$ la justificación $\mathbf{J}_i$ por HIPOTESIS$\bar{m}$ y reemplazar la justificación $\mathbf{J}_j$ por TESIS$\bar{m}\alpha$. Entonces $(\boldsymbol{\varphi}, \tilde{\mathbf{J}})$ es una prueba formal de φ en (Σ, τ).
- *Cambio de constantes auxiliares*: Sea $(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{J})$ una prueba formal de φ en (Σ, τ). Sea $\mathcal{C}_1$ el conjunto de nombres de constante que ocurren en $\boldsymbol{\varphi}$ y que no pertenecen a $\mathcal{C}$. Sea $e \in \mathcal{C}_1$. Sea $\tilde{e} \notin \mathcal{C} \cup \mathcal{C}_1$ tal que $(\mathcal{C} \cup (\mathcal{C}_1 - \{e\}) \cup \{\tilde{e}\}, \mathcal{F}, \mathcal{R}, a)$ es un tipo. Sea $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}_i =$ resultado de reemplazar en $\boldsymbol{\varphi}_i$ cada ocurrencia de e por $\tilde{e}$. Entonces $(\tilde{\boldsymbol{\varphi}}_1 \dots \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_{n(\boldsymbol{\varphi})}, \mathbf{J})$ es una prueba formal de φ en (Σ, τ).

A continuación, demostraremos cada uno de los puntos por separado.

Punto (1)

Notemos que basta con hacer el caso $n = 1$, porque si $n \geq 2$, entonces se obtiene aplicando n veces el caso igual a 1.

Supongamos entonces que $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi_1$ y que $(\Sigma \cup \{\varphi_1\}) \vdash \varphi$. Sea $(\alpha_1 \dots \alpha_h, I_1 \dots I_h)$ una prueba formal de φ_1 en (Σ, τ); y sea $(\psi_1 \dots \psi_m, J_1 \dots J_m)$ una prueba formal de φ en $(\Sigma \cup \{\varphi_1\}, \tau)$. Notemos que por los *lemas* anteriores podemos suponer que las pruebas no comparten ningún nombre de constante auxiliar y que tampoco comparten números asociados a hipótesis o tesis.

Por ello, para cada $i = 1, \dots, m$, definamos $\tilde{J}_i$ de la siguiente manera:

- Si $J_i = \alpha$AXIOMAPROPIO con $\alpha \in \{\varepsilon\} \cup \{\text{TESIS}\bar{k} : k \in N\}$ y $\psi_i = \varphi_1$, entonces $\tilde{J}_i = \alpha$EVOCACION$(\bar{h})$
- Si $J_i = \alpha R(\bar{l_1}, \dots, \bar{l_k})$ con $\alpha \in \{\varepsilon\} \cup \{\text{TESIS}\bar{k} : k \in N\}$, entonces $\tilde{J}_i = \alpha R(\overline{l_1 + h}, \dots, \overline{l_k + h})$
- Sino, $\tilde{J}_i = J_i$

Luego, $(\alpha_1 \dots \alpha_h \psi_1 \dots \psi_m, I_1 \dots I_h \tilde{J}_1 \dots \tilde{J}_m)$ es una prueba formal de φ en (Σ, τ), por lo que $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$ y se demuestra. ■

Punto (2)

Notemos que:

$$\begin{array}{rll}
1. & \varphi_1 & \text{AXIOMAPROPIO} \\
2. & \varphi_2 & \text{AXIOMAPROPIO} \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
n. & \varphi_n & \text{AXIOMAPROPIO} \\
n+1. & \varphi & R(1, \dots, \bar{n})
\end{array}$$

es una prueba formal de φ en $(\Sigma \cup \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}, \tau)$, por lo que $(\Sigma \cup \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}, \tau) \vdash \varphi$. Como suponemos $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi_1, \dots, \varphi_n$, por el punto (**1**) tenemos que $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$ por lo que se demuestra. ■

Punto (3)

Veamos los dos casos:

- *Ida*: Supongamos $(\Sigma, \tau) \vdash (\varphi \to \psi)$. Luego, claramente $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau) \vdash (\varphi \to \psi), \varphi$, por lo que por el punto (**2**) usando MODUSPONENS tenemos que $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau) \vdash \psi$. Por ello, se demuestra la ida.
- *Vuelta*: Supongamos $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau) \vdash \psi$. Sea $(\varphi_1 \dots \varphi_n, J_1 \dots J_n)$ una prueba formal de ψ en $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau)$, entonces para cada $i = 1, \dots, n$ definamos $\tilde{J}_i$ del siguiente modo:
  - Si $J_i = \alpha$AXIOMAPROPIO con $\alpha \in \{\varepsilon\} \cup \{\text{TESIS}\bar{k} : k \in N\}$ y $\varphi_i = \varphi$, entonces $\tilde{J}_i = \alpha$EVOCACION(1)
  - Si $J_i = \alpha R(\bar{l_1}, \dots, \bar{l_k})$ con $\alpha \in \{\varepsilon\} \cup \{\text{TESIS}\bar{k} : k \in N\}$, entonces $\tilde{J}_i = \alpha R(\overline{l_1 + 1}, \dots, \overline{l_k + 1})$
  - Sino, $\tilde{J}_i = J_i$

  Sea m tal que ninguna J_i es igual a HIPOTESIS$\bar{m}$. Entonces

  $$(\varphi\varphi_1 \dots \varphi_n(\varphi \to \psi), \text{HIPOTESIS}\bar{m}\tilde{J}_1 \dots \tilde{J}_{n-1} TESIS\bar{m}\tilde{J}_n CONCLUSION)$$

  es una prueba formal de $(\varphi \to \psi)$ en (Σ, τ). Luego, $(\Sigma, \tau) \vdash (\varphi \to \psi)$ y se demuestra la vuelta.

Por ello, se demuestra el punto (**3**). ■

Lema

Sea (L, s, i) un reticulado terna y sea θ una congruencia de (L, s, i). Entonces:

1. $(L/\theta, \tilde{s}, \tilde{i})$ es un reticulado terna
2. El orden parcial $\tilde{\leq}$ asociado al reticulado terna $(L/\theta, \tilde{s}, \tilde{i})$ cumple $x/\theta \tilde{\leq} y/\theta$ sii $y\theta(x\ s\ y)$

Demostración

Vamos a demostrar cada punto por separado.

Punto (1)

Debemos demostrar que $(L/\theta, \tilde{s}, \tilde{i})$ cumple las siguientes propiedades:

1. Reflexividad de $\tilde{s}$ e $\tilde{i}$: $\forall x/\theta \in L/\theta,\ x/\theta\ \tilde{s}\ x/\theta = x/\theta\ \tilde{i}\ x/\theta = x/\theta$:
$$\begin{aligned} x/\theta\ \tilde{s}\ x/\theta &= (x\ s\ x)/\theta && \text{def. de } \tilde{s} \\ &= x/\theta && \text{reflexividad de } s \end{aligned}$$
El caso del ínfimo es análogo al del supremo.
2. Conmutatividad de $\tilde{s}$: $\forall x/\theta, y/\theta \in L/\theta,\ x/\theta\ \tilde{s}\ y/\theta = y/\theta\ \tilde{s}\ x/\theta$:
$$\begin{aligned} x/\theta\ \tilde{s}\ y/\theta &= (x\ s\ y)/\theta && \text{def. de } \tilde{s} \\ &= (y\ s\ x)/\theta && \text{conmutatividad de } s \\ &= y/\theta\ \tilde{s}\ x/\theta && \text{def. de } \tilde{s} \end{aligned}$$
3. Conmutatividad de $\tilde{i}$: $\forall x/\theta, y/\theta \in L/\theta,\ x/\theta\ \tilde{i}\ y/\theta = y/\theta\ \tilde{i}\ x/\theta$: Análogo a la anterior.
4. Asociatividad de $\tilde{s}$: $\forall x/\theta, y/\theta, z/\theta \in L/\theta,\ (x/\theta\ \tilde{s}\ y/\theta)\ \tilde{s}\ z/\theta = x/\theta\ \tilde{s}\ (y/\theta\ \tilde{s}\ z/\theta)$:
$$\begin{aligned} (x/\theta\ \tilde{s}\ y/\theta)\ \tilde{s}\ z/\theta &= ((x\ s\ y)\ s\ z)/\theta && \text{def. de } \tilde{s} \\ &= (x\ s\ (y\ s\ z))/\theta && \text{asociatividad de } s \\ &= x/\theta\ \tilde{s}\ (y/\theta\ \tilde{s}\ z/\theta) && \text{def. de } \tilde{s} \end{aligned}$$
5. Asociatividad de $\tilde{i}$: $\forall x/\theta, y/\theta, z/\theta \in L/\theta,\ (x/\theta\ \tilde{i}\ y/\theta)\ \tilde{i}\ z/\theta = x/\theta\ \tilde{i}\ (y/\theta\ \tilde{i}\ z/\theta)$: Análogo a la anterior.
6. Absorción: $\forall x/\theta, y/\theta \in L/\theta,\ x/\theta\ \tilde{s}\ (x/\theta\ \tilde{i}\ y/\theta) = x/\theta$:
$$\begin{aligned} x/\theta\ \tilde{s}\ (x/\theta\ \tilde{i}\ y/\theta) &= x/\theta\ \tilde{s}\ (x\ i\ y)/\theta && \text{def. de } \tilde{i} \\ &= (x\ s\ (x\ i\ y))/\theta && \text{def. de } \tilde{s} \\ &= x/\theta && \text{absorción} \end{aligned}$$
7. Absorción: $\forall x/\theta, y/\theta \in L/\theta,\ x/\theta\ \tilde{i}\ (x/\theta\ \tilde{s}\ y/\theta) = x/\theta$: Análogo a la anterior.

Por ello, $(L/\theta, \tilde{s}, \tilde{i})$ es un reticulado terna por def. dado que $L/\theta \neq \emptyset$ y cumple las 7 propiedades mencionadas. Finalmente, entonces, se demuestra el punto (**1**). ■

Punto (2)

Tenemos que:

$$\begin{aligned} x/\theta \tilde{\leq} y/\theta &\iff y/\theta = x/\theta \; \tilde{s} \; y/\theta && \text{def. de } \tilde{\leq} \\ &\iff y/\theta = (x \; s \; y)/\theta && \text{def. de } \tilde{s} \\ &\iff y\theta(x \; s \; y) \end{aligned}$$

Luego, se demuestra el punto (**2**). ■

Lema

Sean (L, s, i) y (L', s', i') reticulados terna y sean $(L, \leq)$ y $(L', \leq')$ los posets asociados. Sea $F : L \to L'$ una función. Entonces F es un isomorfismo de (L, s, i) en (L', s', i') sii F es un isomorfismo de $(L, \leq)$ en $(L', \leq')$

Demostración

Para la demostración, vamos a usar el siguiente *lema*: Sean $(P, \leq)$ y $(P', \leq')$ posets y F un isomorfismo de $(P, \leq)$ en $(P', \leq')$, entonces:

- $\forall x, y, z \in P, \; z = \sup\{x, y\} \iff F(z) = \sup\{F(x), F(y)\}$
- $\forall x, y, z \in P, \; z = \inf\{x, y\} \iff F(z) = \inf\{F(x), F(y)\}$

Vamos a demostrar cada uno de los lados de la doble implicación por separado:

- *Ida*: Supongamos F es un isomorfismo de (L, s, i) en (L', s', i'). Por def. de isomorfismo, F es biyectiva y F, F^{-1} son homomorfismos. Por ello, podemos ver que, sean $x, y \in L$:

  $$x \leq y \overset{\text{def. } \leq}{\Rightarrow} y = x \; s \; y \overset{\text{def. homomorfismo}}{\Rightarrow} F(y) = F(x \; s \; y) = F(x) \; s' \; F(y) \overset{\text{def. de } \leq}{\Rightarrow} F(x) \leq' F(y)$$

  Con ello, llegamos a que F es un homomorfismo de $(L, \leq)$ en $(L', \leq')$. Como F es biyectiva y de forma análoga a la anterior podemos ver que F^{-1} es un homomorfismo de $(L', \leq')$ en $(L, \leq)$, entonces F es un isomorfismo de $(L, \leq)$ en $(L', \leq')$ y se demuestra la ida.

- *Vuelta*: Supongamos F es un isomorfismo de $(L, \leq)$ en $(L', \leq')$. Por ello, tenemos que:

  $$\begin{aligned} &\forall x, y, z \in L, \; z = x \; s \; y \iff F(z) = F(x) \; s \; F(y) && \text{por lema} \\ &\forall x, y \in L, \; F(x \; s \; y) = F(x) \; s' \; F(y) && \text{usando la prop. con } \Rightarrow \end{aligned}$$

  Análogamente, llegamos también a que $\forall x, y \in L, \; F(x \; i \; y) = F(x) \; i' \; F(y)$. Por ello, F es un homomorfismo de (L, s, i) en (L', s', i').

  Ahora, como F es biyectiva y de forma análoga F^{-1} es un homomorfismo de (L', s', i') en (L, s, i), por def. F es un isomorfismo.

  Con ello, se demuestra la vuelta.

Por todo ello, entonces, se demuestra el lema. ■