Guía 1: Relaciones de equivalencia y particiones

Relaciones de equivalencia

- **Relación binaria**: sea A un conjunto, R es una relación binaria sobre A si es un subconjunto de A^2
  - Si R es una relación binaria sobre A y $A \subseteq B$, entonces R es una relación binaria sobre B
  - *Propiedades que puede tener* (a destacar):
    - *Reflexividad*: $xRx \; \forall x \in A$
    - *Transitividad*: $xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz \; \forall x, y, z \in A$
    - *Simetría*: $xRy \Rightarrow yRx \; \forall x, y \in A$
    - *Antisimetría*: $xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y \; \forall x, y \in A$
- **Relación de equivalencia**: sea A un conjunto, R es una relación de equivalencia sobre A si es una relación binaria sobre A, la cual es reflexiva, transitiva y simétrica (con respecto a A).
- **Clases de equivalencia**: sea R una relación de equivalencia sobre A y $a \in A$, definimos la clase de equivalencia de a con respecto a R como $a/R = \{b \in A : aRb\}$
  - **Cociente de A por R**: $A/R = \{a/R : a \in A\}$
  - **Proyección canónica (respecto de R)**: $\pi_R : A \to A/R$ con $\pi_R(a) = a/R \; \forall a \in A$.
  - *Propiedades*:
    - Sea R una relación de equivalencia sobre A, y $a, b \in A$, entonces:
      - $a \in a/R$
      - $aRb \Leftrightarrow a/R = b/R$
      - $a/R \cap b/R = \emptyset \vee a/R = b/R$
    - Sea R una relación de equivalencia sobre $A \neq \emptyset$, entonces $|A/R| = 1 \iff R = A^2$

Correspondencia entre relaciones de equivalencia y particiones

- **Partición**: dado un conjunto A, una partición de A es un conjunto $\mathcal{P}$ tal que:
  1. Cada elemento de $\mathcal{P}$ es un subconjunto no vacío de A
  2. Si $S_1, S_2 \in \mathcal{P}$ con $S_1 \neq S_2$, entonces $S_1 \cap S_2 = \emptyset$
  3. $A = \{a : a \in S \text{ para algún } S \in \mathcal{P}\}$
  - Podemos definir una relación binaria asociada a $\mathcal{P}$ como $R_{\mathcal{P}} = \{(a, b) \in A^2 : a, b \in S \text{ para algún } S \in \mathcal{P}\}$
- *Correspondencia*:
  - *Propiedades*: sea A un conjunto, entonces:
    - Sea $\mathcal{P}$ una partición de A, entonces $R_{\mathcal{P}}$ es una relación de equivalencia sobre A
    - Sea R una relación de equivalencia sobre A, entonces A/R es una partición de A
  - **Teorema**: sea A un conjunto cualquiera, y sean $Part = \{\text{particiones de } A\}$, $ReEq = \{\text{relaciones de equivalencia de } A\}$, entonces las funciones:

$$\begin{array}{cc} Part \to ReEq & ReEq \to Part \\ \mathcal{P} \to R_{\mathcal{P}} & R \to A/R \end{array}$$

son biyecciones una inversa de la otra.

- Es decir, a nivel de información es lo mismo tener una relación de equivalencia sobre A que una partición de A.

Funciones con dominio A/R

- Sea R una relación de equivalencia sobre A, entonces la definición de una función de tipo $f : A/R \to B$ puede no ser una función, porque el valor que toma para una clase de equivalencia, puede ser cualquiera de los representantes.
- *Ejemplos*:
  - *Caso ambiguo*: si tenemos R relación de equivalencia sobre $\mathbb{R}$ y definimos $f : \mathbb{R}/R \to \mathbb{R}$ como $f(r/R) = r^2$, entonces *no es una función* dado que si se cumple, por ejemplo, $2R6$, entonces $2^2 = f(2/R) = f(6/R) = 6^2$, lo cual es absurdo.
  - *Caso inambiguo*: sea $F : A \to B$, entonces $f(a/ker(F)) = F(a)$ define en forma inambigua una función f de tipo $A/ker(F) \to B$, la cual es inyectiva. En caso de que F sea sobreyectiva, f será también sobreyectiva, por lo que sería una biyección.
    - Recordemos que $ker(F) = \{(a, b) \in A^2 : f(a) = f(b)\}$