Guía 3: ejercicios

Ejercicio 1

Los únicos posibles reticulados par cuyo universo es $\{2, 3, 4\}$ son aquellos tales que se cumple alguna de las siguientes:

- $2 \leq 3 \leq 4$
- $2 \leq 4 \leq 3$
- $3 \leq 2 \leq 4$
- $3 \leq 4 \leq 2$
- $4 \leq 2 \leq 3$
- $4 \leq 3 \leq 2$

Agregando, obvio, las relaciones reflexivas $2 \leq 2, 3 \leq 3, 4 \leq 4$.

Ejercicio 2

Trivial. Notemos que en este ejercicio se cumple que $\forall A, B \in \mathcal{P}(\omega), sup(\{A, B\}) = A \cup B$ e $inf(\{A, B\}) = A \cap B$.

Ejercicio 2,5

Su mínimo sí existe y es 1. Respecto al máximo, este no tiene.

Sin embargo, cumple con el hecho de ser reticulado par porque $\forall a, b \in \mathbb{N}, sup(\{a, b\}) = mcm(a, b) \wedge inf(\{a, b\}) = mcd(a, b)$, los cuales pertenecen al universo $\mathbb{N}$.

Ejercicio 3

El item A es trivial y el B sale del primero dado que todo par de elementos del universo tiene un orden, por lo que su supremo está definido y existe.

Ejercicio 4

Item A

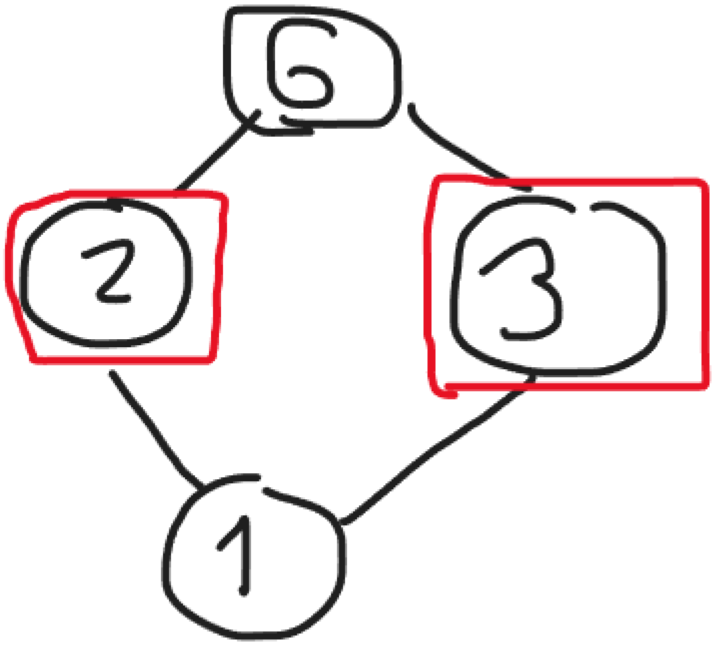
Verdadero. Trivial de ver dado que $\forall a, b \in \{1\}, sup(\{a, b\}) = inf(\{a, b\}) = 1$ por lo que existe.

Item B

Verdadero. Como es un reticulado par, entonces podemos considerar iterativamente tener un elemento $x \in P$ e $y \in S$ de modo que $sup(\{x, y\})$ existe por definición. La iteración comienza con algún $x \in S$, siendo los y siempre distintos en cada "ronda" y siendo el supremo el próximo valor x. Con esto, se ve por inducción que el supremo de S existe (tomando todos los elementos de este conjunto de a pares con el valor actual del supremo calculado).

Item C

Falso. Digamos que tenemos el reticulado par $(P, \leq)$ cuyo diagrama de Hasse es:



Luego, si $S = \{2, 3\}$, claramente no se cumple que $(S, \leq \cap S^2)$ sea un reticulado par porque no existe $sup(\{2, 3\})$ en S.

Item D

Verdadero. Como $(S, \leq \cap S^2)$ también es un reticulado par, entonces esto significa que dado $a, b \in S$, existe $inf(a, b) \in S$. Luego, extendiendo la definición para P, es trivial notar que $inf(a, b) \in P$ refiere al mismo elemento de S.

Item E

Falso. Notar que como $\mathbb{N}$ no es un elemento del universo, entonces las cotas superiores de $\{\mathbb{N} - \{1\}, \{1\}\}$ son $\mathbb{N} \cup \{x\} : x \in \mathbb{R} - \mathbb{N}$, y tales que no tienen relación entre sí según $\subseteq$. Luego, es claro que no hay ninguna de estas cotas superiores que sea el supremo de $\{\mathbb{N} - \{1\}, \{1\}\}$ por lo que no se cumple con la definición de reticulado par.

Ejercicio 5

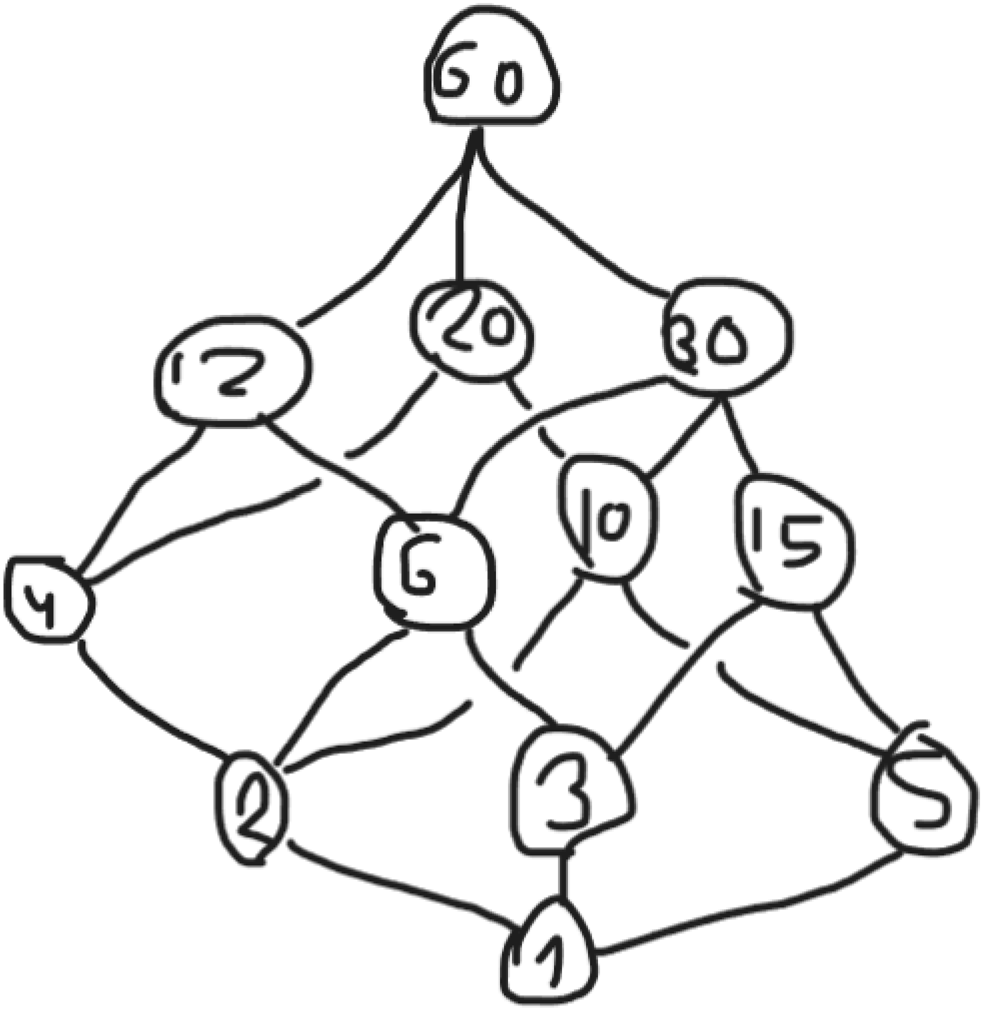
mcm y mcd respectivamente para s, i.

Ejercicio 6

$\cup$ y $\cap$ respectivamente para s, i

Ejercicio 7

Trivial viendo que $s = mcm$ y que $i = mcd$. El diagrama de Hasse de $(D_{60}, \leq_{60})$ es el siguiente:



Ejercicio 8

No. Un ejemplo es $inf(\{\{1,2,3\},\{2,3,4\}\}) = \{2,3\}$ pero que no cumple si $P = \{\{1,2,3\},\{2,3,4\},\{2\}\}$ dado que el ínfimo, en este caso, sería $\{2\}$.

Ejercicio 9

No. Análogo al ejercicio 8.

Ejercicio 10

Supongamos que m no es un elemento máximo de $(P, \leq)$ pero sí maximal. Luego, existe $m' \in P$ que también es maximal. Por definición de reticulado par tenemos que $sup(\{m, m'\})$ existe, por lo que o bien $m \leq m'$ o $m' \leq m$, por lo que se llega a un absurdo que vino de suponer que hay más de un maximal. Finalmente, al ser único este maximal, es el máximo del reticulado par. ■

Respecto a si se puede debilitar la hipótesis para que esto siga siendo verdadero, la respuesta es *no*. Lo único que se puede hacer es cambiarla por que sea un conjunto totalmente ordenado, donde también cumple esta propiedad.

Ejercicio 11

Item 1

Queremos demostrar que $x \leq x\ s\ y\ \forall x, y \in L$.

Sean $a, b \in L$, tenemos por def. que $a\ s\ b = sup(\{a, b\})$, por lo que por def. de supremo, $a\ s\ b$ es cota superior de $\{a, b\}$. Luego, por def. de cota superior, $a \leq a\ s\ b$ ■

Item 2

Queremos demostrar que $x\ i\ y \leq x\ \forall x, y \in L$.

Sean $a, b \in L$, tenemos por def. que $a\ i\ b = inf(\{a, b\})$, por lo que por def. de ínfimo, $a\ i\ b$ es cota inferior de $\{a, b\}$. Luego, por def. de cota inferior, $a\ i\ b \leq a$ ■

Item 3

Queremos demostrar que $x\ s\ x = x\ \forall x \in L$.

Sea $a \in L$, por def. de s tenemos que $a\ s\ a = sup(\{a, a\}) = sup(\{a\})$. Luego, es claro que a es cota superior de $\{a\}$ y que si z es cota superior de $\{a\}$, entonces $z \geq a$, por lo que $a = sup(\{a\})$. Luego, esto demuestra que $a\ s\ a = a$ ■.

Item 4

Queremos demostrar que $x\ i\ x = x\ \forall x \in L$.

Sea $a \in L$, por def. de i tenemos que $a\ i\ a = inf(\{a, a\}) = inf(\{a\})$. Luego, es claro que a es cota inferior de $\{a\}$ y que si z es cota inferior de $\{a\}$, entonces $z \leq a$, por lo que $a = inf(\{a\})$. Luego, esto demuestra que $a\ i\ a = a$ ■.

Item 5

Queremos demostrar que $x\ s\ y = y\ s\ x\ \forall x, y \in L$.

Sean $a, b \in L$, es sencillo notar que, por def. de s, $x\ s\ y = sup(\{x, y\})$ y que $y\ s\ x = sup(\{y, x\}) = sup(\{x, y\})$. Luego, $x\ s\ y = y\ s\ x$ ■.

Item 6

Queremos demostrar que $x \; i \; y = y \; i \; x \; \forall x, y \in L$.

Sean $a, b \in L$, es sencillo notar que, por def. de i, $x \; i \; y = inf(\{x, y\})$ y que $y \; i \; x = inf(\{y, x\}) = inf(\{x, y\})$. Luego, $x \; i \; y = y \; i \; x \blacksquare$.

Ejercicio 12

Queremos demostrar el lema que dice: dado un reticulado par $(L, \leq)$, se tiene que:

1. $x \leq y \iff x \; s \; y = y \; \forall x, y \in L$
2. $x \leq y \iff x \; i \; y = x \; \forall x, y \in L$

Item 1

Veamos los dos casos:

- Caso $\Rightarrow$: Sean $a, b \in L : a \leq b$, entonces es claro que por def. b es cota superior de $\{a, b\}$. Luego, como toda otra cota superior z debe cumplir que $b \leq z$, entonces b es el supremo de $\{a, b\}$, es decir, $a \; s \; b = b \blacksquare$.
- Caso $\Leftarrow$: Sean $a, b \in L : a \; s \; b = b$, entonces por def., $b = sup(\{a, b\})$, por lo que por def. de supremo, b es cota superior de $\{a, b\}$. Luego, esto significa que $a \leq b \blacksquare$.

Con ello, se demuestra el sii $\blacksquare$.

Item 2

Veamos los dos casos:

- Caso $\Rightarrow$: Sean $a, b \in L : a \leq b$, entonces es claro que por def. a es cota inferior de $\{a, b\}$. Luego, como toda otra cota inferior z debe cumplir que $z \leq a$, entonces a es el ínfimo de $\{a, b\}$, es decir, $a \; i \; b = a \blacksquare$.
- Caso $\Leftarrow$: Sean $a, b \in L : a \; i \; b = a$, entonces por def., $a = inf(\{a, b\})$, por lo que por def. de ínfimo, a es cota inferior de $\{a, b\}$. Luego, esto significa que $a \leq b \blacksquare$.

Con ello, se demuestra el sii $\blacksquare$.

Ejercicio 13

Queremos demostrar que dado el reticulado par $(L, \leq)$ se tiene que:

1. $x \; s \; (x \; i \; y) = x \; \forall x, y \in L$

2. $x \; i \; (x \; s \; y) = x \; \forall x, y \in L$

Item 1

Sean $a, b \in L$, por lema 1 tenemos que $a \; i \; b \leq a$, por lo que por lema 2, $(a \; i \; b) \; s \; a = a$ ■.

Item 2

Sean $a, b \in L$, por lema 1 tenemos que $a \leq a \; s \; b$, por lo que por lema 2, $a \; i \; (a \; s \; b) = a$ ■.

Ejercicio 14

- *Regla de Igualdad en Posets*: si $x \leq y$ e $y \leq x$, entonces claramente $x = y$ dado que ni $x < y$ ni $y < x$.
- *Regla Superar un Supremo*: si $z \geq x$ y $z \geq y$, entonces z es por def. cota superior de $\{x, y\}$. Luego, por def. de supremo, $z \geq sup(\{x, y\})$. Finalmente, por def. de s, $z \geq x \; s \; y$.
- *Regla Ser Menor o Igual que un Ínfimo*: si $z \leq x$ y $z \leq y$, entonces por def. z es cota inferior de $\{x, y\}$. Luego, por definición de ínfimo, $z \leq inf(\{x, y\})$. Finalmente, por def. de i, $z \leq x \; i \; y$.

Ejercicio 14,5

Queremos demostrar que dado un reticulado par $(L, \leq)$, se tiene que:

1. $(x \; s \; y) \; s \; z = x \; s \; (y \; s \; z) \; \forall x, y, z \in L$
2. $(x \; i \; y) \; i \; z = x \; i \; (y \; i \; z) \; \forall x, y, z \in L$

Las dos demostraciones son totalmente análogas. Vamos a demostrar el primer punto.

En la guía dos, específicamente en el ejercicio 14.5, demostramos el siguiente lema: Sea $(P, \leq)$ un poset, sea $S \subseteq P$ y sea $b \in P$, si $a = sup(S)$ y existe $sup(\{a, b\})$, entonces $sup(S \cup \{b\}) = sup(\{a, b\})$.

Teniendo esto en cuenta, y como todos los supremos existen en un reticulado par, tenemos que ver que:

$$
\begin{aligned}
(x\ s\ y)\ s\ z &\overset{def.\ s}{=} sup(\{sup(\{x,y\}),z\}) \\
&\overset{ej.\ 14.5}{=} sup(\{x,y,z\})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x\ s\ (y\ s\ z) &\overset{def.\ s}{=} sup(\{x,sup(\{y,z\})\}) \\
&\overset{ej.\ 14.5}{=} sup(\{x,y,z\})
\end{aligned}
$$

Gracias a lo cual llegamos a que $(x\ s\ y)\ s\ z = x\ s\ (y\ s\ z)$ ■.

Ejercicio 15

Queremos demostrar el lema que dice que: Dado un reticulado par $(L, \leq)$, se tiene que:

1. $x \leq z \wedge y \leq w \Rightarrow x\ s\ y \leq z\ s\ w\ \forall x,y,z,w \in L$
2. $x \leq z \wedge y \leq w \Rightarrow x\ i\ y \leq z\ i\ w\ \forall x,y,z,w \in L$

Veamos cada item por separado.

Item 1

Sean $x,y,z,w \in L$. Notemos que como $x \leq z \wedge y \leq w$, entonces por lema 1 tenemos que $x \leq z \leq z\ s\ w \wedge y \leq w \leq z\ s\ w$, por lo que $z\ s\ w$ es cota superior de $\{x,y\}$, por lo que por def. de supremo tenemos que $z\ s\ w \geq sup(\{x,y\})$. Luego, por def. de s, llegamos a que $x\ s\ y \leq z\ s\ w$ ■.

Item 2

Sean $x,y,z,w \in L$. Notemos que como $x \leq z \wedge y \leq w$, entonces por lema 1 tenemos que $x\ i\ y \leq x \leq z \wedge x\ i\ y \leq y \leq w$, por lo que $x\ i\ y$ es cota inferior de $\{z,w\}$, por lo que por def. de ínfimo tenemos que $x\ i\ y \leq inf(\{z,w\})$. Luego, por def. de i, llegamos a que $x\ i\ y \leq z\ i\ w$ ■.

Ejercicio 16

Queremos demostrar el lema que dice que: Dado un reticulado par $(L, \leq)$ se tiene que $(x\ i\ y)\ s\ (x\ i\ z) \leq x\ i\ (y\ s\ z)\ \forall x,y,z \in L$.

Para ello, consideremos $a,b,c \in L$. Luego, notemos que:

- Como $a \leq a \wedge b \leq b\ s\ c$ (por lema 1), entonces por lema 5, $a\ i\ b \leq a\ i\ (b\ s\ c)$
- Como $a \leq a \wedge c \leq b\ s\ c$ (por lema 1), entonces por lema 5, $a\ i\ c \leq a\ i\ (b\ s\ c)$

Ahora, esto significa, por def. de cota superior, que $a\ i\ (b\ s\ c)$ es cota superior de $\{a\ i\ b, a\ i\ c\}$. Luego, por def. de supremo, esto significa que $sup(\{a\ i\ b, a\ i\ c\}) \leq a\ i\ (b\ s\ c)$. Finalmente, por def. de s, tenemos que $(a\ i\ b)\ s\ (a\ i\ c) \leq a\ i\ (b\ s\ c)$ $\blacksquare$.

Ejercicio 17

Sale directamente del lema demostrado en el ejercicio 14,5 de la guía anterior.

Ejercicio 18

Regla Igualar un Supremo: Si ud. está intentando probar que en un poset $(P, \leq)$ se da que $x = sup(S)$ desdoble su tarea en las dos tareas siguientes:

1. x es cota superior de S
2. $x \leq z\ \forall z$ cota superior de S

Ejercicio 19

No lo voy a hacer.