Guia 5 de Logica

September 3, 2024

Nota: Los ejercicios que tienen una S son para una "Segunda pasada" es decir ya sea son mas anecdoticos y menos importantes tematicamente, o son de completar pruebas y tienen que ver mas con la parte teorica, o son mas dificiles y conviene encararlos despues de una primera pasada por la guia (asi uno comienza a pensarlos con un poco mas de madurez sobre el tema).

Reticulados acotados

Por un *reticulado acotado* entenderemos una 5-upla $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)$, tal que $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ es un reticulado terna, $0, 1 \in L$, y ademas se cumplen las siguientes identidades

(I8) $0 \mathsf{ s } x = x$, para cada $x \in L$

(I9) $x \mathsf{ s } 1 = 1$, para cada $x \in L$

Por ejemplo $(\{4, 56, 449\}, \max, \min, 4, 449)$ es un reticulado acotado pero es facil ver que $(\{4, 56, 449\}, \max, \min, 449, 56)$ no lo es.

Reflexion Informatica

Por supuesto, en virtud de lo desarrollado en la Guia 3 se tiene que si $(L, \leq)$ es reticulado par en el cual hay un maximo 1 y un minimo 0, entonces si tomamos:

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{s} : L^2 & \rightarrow & L \\ (a, b) & \rightarrow & \sup(\{a, b\}) \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \mathsf{i} : L^2 & \rightarrow & L \\ (a, b) & \rightarrow & \inf(\{a, b\}) \end{array}$$

tenemos que $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)$ es un reticulado acotado. Veamos que todo reticulado acotado se obtiene de esta forma. Supongamos $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)$ es un reticulado acotado. Ya que por definicion tenemos que entonces $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ es un reticulado terna, el teorema de Dedekind nos dice que el orden parcial $\leq = \{(x, y) : x \mathsf{ s } y = y\}$ hace de $(L, \leq)$ un reticulado par en el cual

$$\sup(\{x, y\}) = x \mathsf{ s } y$$
$$\inf(\{x, y\}) = x \mathsf{ i } y$$

cualesquiera sean $x, y \in L$. Ademas las propiedades (I8) y (I9) nos garantizan que 0 y 1 son maximo y minimo de $(L, \leq)$. O sea que a nivel de informacion, un reticulado par que tiene 0 y 1 es exactamente lo mismo que un reticulado acotado. O, dicho de otra forma, hay una biyeccion entre el conjunto de los reticulados pares con 0 y 1 y el conjunto de los reticulados acotados.

El orden asociado a un reticulado acotado

Dado un reticulado acotado $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)$, llamaremos a $\leq = \{(x,y) : x \mathsf{\ s\ } y = y\}$ el *orden parcial asociado a* $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)$ y $(L \leq)$ sera llamado el *poset asociado a* $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)$. Notese que tambien tenemos que $\leq = \{(x,y) : x \mathsf{\ i\ } y = x\}$ (¿por que?). Muchos conceptos definidos para posets ahora pueden aplicarse cuando tenemos un reticulado acotado $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)$. Por ejemplo, si decimos que $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)$ es totalmente ordenado, esto significara que el poset $(L, \leq)$ lo es. Otro ejemplo, si decimos que en $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)$ se da que el supremo de un conjunto S es a, nos estaremos refiriendo a que en su poset asociado $(L, \leq)$ se da que el supremo de S es a.

Ejercicio 1: Pruebe que si $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)$ es un reticulado acotado entonces $0 \mathsf{\ i\ } x = 0$, para cada $x \in L$

Ejercicio 1,5: V o F o I, justifique

(a) Por definicion: un reticulado acotado es un reticulado terna $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ el cual cumple que tiene un elemento minimo 0 y un elemento maximo 1

(b) Si $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)$ es un reticulado acotado, entonces $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 1, 0)$ es un reticulado acotado

(c) Si $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)$ es un reticulado acotado, entonces $Ti(0) = \text{NUMERO}$

Subreticulados acotados

Dados reticulados acotados $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)$ y $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}', 0', 1')$ diremos que $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)$ *es un subreticulado acotado de* $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}', 0', 1')$ si se dan las siguientes condiciones

(1) $L \subseteq L'$

(2) L es cerrado bajo las operaciones s' e i'

(3) $0 = 0'$ y $1 = 1'$

(4) $\mathsf{s} = \mathsf{s}'|_{L \times L}$ y $\mathsf{i} = \mathsf{i}'|_{L \times L}$

Sea $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)$ un reticulado acotado. Un conjunto $S \subseteq L$ es llamado *subuniverso* de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)$ si $0, 1 \in S$ y ademas S es cerrado bajo las operaciones s e i. Es importante notar que si bien los conceptos de subreticulado acotado y subuniverso estan muy relacionados, se trata de conceptos diferentes ya que los subreticulados acotados de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)$ son reticulados acotados, es decir 5-uplas y los subuniversos de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)$ son conjuntos, por lo cual no son 5-uplas.

Es facil de chequear que si S es un subuniverso de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)$, entonces $(S, \mathsf{s}|_{S\times S}, \mathsf{i}|_{S\times S}, 0, 1)$ es un subreticulado acotado de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)$ y que todo subreticulado acotado de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)$ se obtiene en esta forma. Es decir, hay una biyeccion entre el conjunto de los subreticulados acotados de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)$ y el conjunto de los subuniversos de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)$ (cual es?). Dicho de manera mas rapida: los subuniversos de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)$ son ni mas ni menos que los universos de los subreticulados acotados de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)$.

Ejercicio 2: Si $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)$ es un reticulado acotado y S_1, S_2 son subuniversos de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)$, entonces $S_1 \cap S_2$ es un subuniverso de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)$

Homomorfismos de reticulados acotados

Sean $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)$ y $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}', 0', 1')$ reticulados acotados. Una funcion $F : L \to L'$ sera llamada un *homomorfismo de* $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)$ *en* $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}', 0', 1')$ si para todo $x, y \in L$ se cumple que

$$\begin{aligned} F(x \mathrel{\mathsf{s}} y) &= F(x) \mathrel{\mathsf{s}'} F(y) \\ F(x \mathrel{\mathsf{i}} y) &= F(x) \mathrel{\mathsf{i}'} F(y) \\ F(0) &= 0' \\ F(1) &= 1' \end{aligned}$$

Un homomorfismo de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)$ en $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}', 0', 1')$ sera llamado *isomorfismo* cuando sea biyectivo y su inversa sea tambien un homomorfismo. Escribiremos $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1) \cong (L', \mathsf{s}', \mathsf{i}', 0', 1')$ cuando exista un isomorfismo de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)$ en $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}', 0', 1')$. Escribiremos "Sea $F : (L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1) \to (L', \mathsf{s}', \mathsf{i}', 0', 1')$ un homomorfismo" para expresar que F es un homomorfismo de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)$ en $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}', 0', 1')$. No hay que confundirse al leer esta notacion y pensar que F es una funcion cuyo dominio es $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)$, lo cual por otra parte no tiene sentido ya que el dominio de una funcion nunca puede ser una 5-upla!

Los lemas siguientes se prueban en la misma forma que sus analogos para reticulados terna de la Guia 4. Los aceptaremos sin demostracion

Lemma 1 *Si $F : (L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1) \to (L', \mathsf{s}', \mathsf{i}', 0', 1')$ un homomorfismo biyectivo, entonces F es un isomorfismo*

Lemma 2 *Si $F : (L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1) \to (L', \mathsf{s}', \mathsf{i}', 0', 1')$ es un homomorfismo, entonces I_F es un subuniverso de $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}', 0', 1')$. Es decir que F es tambien un homomorfismo de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)$ en $(I_F, \mathsf{s}'|_{I_F\times I_F}, \mathsf{i}'|_{I_F\times I_F}, 0', 1')$*

Congruencias de reticulados acotados

Sea $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)$ un reticulado acotado. Una *congruencia sobre* $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)$ sera una relacion de equivalencia θ la cual sea una congruencia sobre $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$. Tenemos definidas sobre L/θ dos operaciones binarias $\tilde{\mathsf{s}}$ e $\tilde{\imath}$, de la siguiente manera:

$$x/\theta \tilde{\mathsf{s}} y/\theta = (x \mathsf{ s } y)/\theta$$
$$x/\theta \tilde{\imath} y/\theta = (x \mathsf{ i } y)/\theta$$

La 5-upla $(L/\theta, \tilde{\mathsf{s}}, \tilde{\imath}, 0/\theta, 1/\theta)$ es llamada el *cociente de* $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)$ *sobre* θ y la denotaremos con $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)/\theta$.

Lemma 3 *Sea* $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)$ *un reticulado acotado y* θ *una congruencia sobre* $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)$.

(a) $(L/\theta, \tilde{\mathsf{s}}, \tilde{\imath}, 0/\theta, 1/\theta)$ *es un reticulado acotado.*

(b) π_θ *es un homomorfismo de* $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)$ *en* $(L/\theta, \tilde{\mathsf{s}}, \tilde{\imath}, 0/\theta, 1/\theta)$ *cuyo nucleo es* θ.

Proof. (a). Es facil ver que $(L/\theta, \tilde{\mathsf{s}}, \tilde{\imath}, 0/\theta, 1/\theta)$ cumple (I1), (I2),...,(I9) dado que $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)$ las cumple.

(b). Es directo de su analogo para reticulados terna. ∎

Lemma 4 *Si* $F : (L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1) \to (L', \mathsf{s}', \mathsf{i}', 0', 1')$ *es un homomorfismo de reticulados acotados, entonces* $\ker F$ *es una congruencia sobre* $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)$.

Proof. Directo de su analogo para reticulados terna. ∎

Reticulados complementados

Sea $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)$ un reticulado acotado. Dado $a \in L$, diremos que a es *complementado* cuando exista un elemento $b \in L$ (llamado *complemento de* a) tal que:

$$a \mathsf{ s } b = 1$$
$$a \mathsf{ i } b = 0$$

Notese que dicho elemento b puede no ser unico, es decir a puede tener varios complementos. Notese que si consideramos el reticulado acotado $(\mathcal{P}(\mathbf{N}), \cup, \cap, \emptyset, \mathbf{N})$ entonces todo elemento $A \in \mathcal{P}(\mathbf{N})$ es complementado y tiene un unico complemento, a saber $\mathbf{N} - A$.

Ejercicio 3: Dar un ejemplo de un reticulado acotado y un elemento que tenga mas de un complemento

Ejercicio 4: Sea $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)$ un reticulado acotado. Si 1 es un complemento de a, entonces $a = 0$. Si a es un complemento de 0, entonces $a = 1$

Recordemos que una operacion unaria sobre un conjunto L es por definicion una funcion de L en L. Muchas veces si s denota una operacion unaria, entonces escribiremos x^s en lugar de $s(x)$.

Por un *reticulado complementado* entederemos una 6-upla $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, ^c, 0, 1)$ tal que $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)$ es un reticulado acotado y ^{c} es una operacion unaria sobre L tal que

(I10) $x \ \mathsf{s} \ x^c = 1$, para cada $x \in L$

(I11) $x \ \mathsf{i} \ x^c = 0$, para cada $x \in L$

Dado un reticulado acotado $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)$ puede haber mas de una operacion unaria g tal que $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, g, 0, 1)$ resulte un reticulado complementado.

Ejercicio 5: Consideremos el poset $(\{1, 2, 3, 5, 30\}, |)$ (el diamante). Es facil ver que es un reticulado par por lo cual $(\{1, 2, 3, 5, 30\}, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ es un reticulado terna, donde s e i son las operaciones binarias definidas usando supremos e infimos en $(\{1, 2, 3, 5, 30\}, |)$. Note que $(\{1, 2, 3, 5, 30\}, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 1, 30)$ es un reticulado acotado. Encuentre todas las operaciones unarias g que hacen que $(\{1, 2, 3, 5, 30\}, \mathsf{s}, \mathsf{i}, g, 1, 30)$ resulte un reticulado complementado.

Reflexion Informatica

Notese que si tenemos un reticulado par $(L, \leq)$ en el cual hay un maximo 1 y un minimo 0 y ademas tenemos una funcion $g : L \to L$ tal que

$$\sup\{x, g(x)\} = 1$$
$$\inf\{x, g(x)\} = 0$$

para cada $x \in L$, entonces podemos definir

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{s} : L^2 & \to & L \\ (a, b) & \to & \sup(\{a, b\}) \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \mathsf{i} : L^2 & \to & L \\ (a, b) & \to & \inf(\{a, b\}) \end{array}$$

y se obtiene que $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, g, 0, 1)$ es un reticulado complementado. Ademas todo reticulado complementado se obtiene de esta forma (por que?). O sea que a nivel de informacion, tener un reticulado par con 0 y 1 junto con una operacion unaria que da complementos, es exactamente lo mismo que tener un reticulado complementado.

El orden asociado a un reticulado complementado

Dado un reticulado complementado $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, ^c, 0, 1)$, llamaremos a $\leq = \{(x,y) : x \mathsf{ s } y = y\}$ el *orden parcial asociado a* $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, ^c, 0, 1)$ y $(L \leq)$ sera llamado el *poset asociado a* $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, ^c, 0, 1)$. Notese que tambien tenemos que $\leq = \{(x,y) : x \mathsf{ i } y = x\}$ (¿por que?). Muchos conceptos definidos para posets ahora pueden aplicarse cuando tenemos un reticulado complementado $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, ^c, 0, 1)$. Por ejemplo, si decimos que en $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, ^c, 0, 1)$ el elemento a es cubierto por b, esto significara que en el poset $(L, \leq)$ el elemento a es cubierto por b. Otro ejemplo, si decimos que en $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, ^c, 0, 1)$ se da que el supremo de un conjunto S es a, nos estaremos refiriendo a que en su poset asociado $(L, \leq)$ se da que el supremo de S es a.

Subreticulados complementados

Dados reticulados complementados $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, ^c, 0, 1)$ y $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}', ^{c'}, 0', 1')$ diremos que $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, ^c, 0, 1)$ *es un subreticulado complementado de* $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}', ^{c'}, 0', 1')$ si se dan las siguientes condiciones

(1) $L \subseteq L'$

(2) L es cerrado bajo las operaciones s', i' y $^{c'}$

(3) $0 = 0'$ y $1 = 1'$

(4) $\mathsf{s} = \mathsf{s}'|_{L \times L}$, $\mathsf{i} = \mathsf{i}'|_{L \times L}$ y $^c = {}^{c'}|_L$

Sea $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, ^c, 0, 1)$ un reticulado complementado. Un conjunto $S \subseteq L$ es llamado *subuniverso* de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, ^c, 0, 1)$ si $0, 1 \in S$ y ademas S es cerrado bajo las operaciones s, i y ^{c}. Es importante notar que si bien los conceptos de subreticulado complementado y subuniverso estan muy relacionados, se trata de conceptos diferentes ya que los subreticulados complementados de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, ^c, 0, 1)$ son reticulados complementados, es decir 6-uplas y los subuniversos de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, ^c, 0, 1)$ son conjuntos, por lo cual no son 6-uplas.

Es facil de chequear que si S es un subuniverso de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, ^c, 0, 1)$, entonces $(S, \mathsf{s}|_{S \times S}, \mathsf{i}|_{S \times S}, ^c|_S, 0, 1)$ es un subreticulado complementado de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, ^c, 0, 1)$ y que todo subreticulado complementado de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, ^c, 0, 1)$ se obtiene en esta forma. Es decir, hay una biyeccion entre el conjunto de los subreticulados complementados de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, ^c, 0, 1)$ y el conjunto de los subuniversos de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, ^c, 0, 1)$ (cual es?). Dicho de manera mas rapida: los subuniversos de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, ^c, 0, 1)$ son ni mas ni menos que los universos de los subreticulados complementados de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, ^c, 0, 1)$.

Ejercicio 6: Refute con un ejemplo el siguiente enunciado: Sea $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, f, 0, 1)$ un reticulado complementado y supongamos $S \subseteq L$ es un subuniverso de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)$ el cual cumple que para cada $x \in S$, existe un $y \in S$ tal que $x \mathsf{ s } y = 1$ y $x \mathsf{ i } y = 0$. Entonces S es un subuniverso de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, f, 0, 1)$

Homomorfismos de reticulados complementados

Sean $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, ^c, 0, 1)$ y $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}', ^{c'}, 0', 1')$ reticulados complementados. Una funcion $F : L \to L'$ sera llamada un *homomorfismo de* $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, ^c, 0, 1)$ *en* $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}', ^{c'}, 0', 1')$ si para todo $x, y \in L$ se cumple que

$$\begin{aligned} F(x \mathsf{ s } y) &= F(x) \mathsf{ s}' F(y) \\ F(x \mathsf{ i } y) &= F(x) \mathsf{ i}' F(y) \\ F(x^c) &= F(x)^{c'} \\ F(0) &= 0' \\ F(1) &= 1' \end{aligned}$$

Un homomorfismo de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, ^c, 0, 1)$ en $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}', ^{c'}, 0', 1')$ sera llamado *isomorfismo* cuando sea biyectivo y su inversa sea un homomorfismo. Como es usual usaremos el simbolo $\cong$ para denotar la relacion de isomorfismo. Escribiremos "Sea $F : (L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, ^c, 0, 1) \to (L', \mathsf{s}', \mathsf{i}', ^{c'}, 0', 1')$ un homomorfismo" para expresar que F es un homomorfismo de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, ^c, 0, 1)$ en $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}', ^{c'}, 0', 1')$. No hay que confundirse al leer esta notacion y pensar que F es una funcion cuyo dominio es $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, ^c, 0, 1)$, lo cual por otra parte no tiene sentido ya que el dominio de una funcion nunca puede ser una 6-upla!

Los lemas siguientes se prueban en la misma forma que sus analogos para reticulados acotados y los aceptaremos sin demostracion

Lemma 5 *Si* $F : (L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, ^c, 0, 1) \to (L', \mathsf{s}', \mathsf{i}', ^{c'}, 0', 1')$ *un homomorfismo biyectivo, entonces* F *es un isomorfismo*

Lemma 6 *Si* $F : (L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, ^c, 0, 1) \to (L', \mathsf{s}', \mathsf{i}', ^{c'}, 0', 1')$ *es un homomorfismo, entonces* I_F *es un subuniverso de* $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}', ^{c'}, 0', 1')$. *Es decir que* F *es tambien un homomorfismo de* $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, ^c, 0, 1)$ *en* $(I_F, \mathsf{s}'|_{I_F \times I_F}, \mathsf{i}'|_{I_F \times I_F}, ^{c'}, 0', 1')$

Congruencias de reticulados complementados

Sea $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, ^c, 0, 1)$ un reticulado complementado. Una *congruencia sobre* $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, ^c, 0, 1)$ sera una relacion de equivalencia sobre L la cual cumpla:

(1) θ es una congruencia sobre $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)$

(2) $x/\theta = y/\theta$ implica $x^c/\theta = y^c/\theta$

Las condiciones anteriores nos permiten definir sobre L/θ dos operaciones binarias $\tilde{\mathsf{s}}$ e $\tilde{\imath}$, y una operacion unaria $^{\tilde{c}}$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} x/\theta \mathbin{\tilde{\mathsf{s}}} y/\theta &= (x \mathsf{ s } y)/\theta \\ x/\theta \mathbin{\tilde{\imath}} y/\theta &= (x \mathsf{ i } y)/\theta \\ (x/\theta)^{\tilde{c}} &= x^c/\theta \end{aligned}$$

La 6-upla $(L/\theta, \tilde{\mathsf{s}}, \tilde{\imath}, ^{\tilde{c}}, 0/\theta, 1/\theta)$ es llamada el *cociente de* $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, ^c, 0, 1)$ *sobre* θ y la denotaremos con $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, ^c, 0, 1)/\theta$. Tal como era de esperar tenemos entonces

Lemma 7 *Sea* $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, ^c, 0, 1)$ *un reticulado complementado y sea* θ *una congruencia sobre* $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, ^c, 0, 1)$.

(a) $(L/\theta, \tilde{\mathsf{s}}, \tilde{\imath}, ^{\tilde{c}}, 0/\theta, 1/\theta)$ *es un reticulado complementado.*

(b) π_θ *es un homomorfismo de* $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, ^c, 0, 1)$ *en* $(L/\theta, \tilde{\mathsf{s}}, \tilde{\imath}, ^{\tilde{c}}, 0/\theta, 1/\theta)$ *cuyo nucleo es* θ.

Proof. (a) Por un lema anterior ya sabemos que $(L/\theta, \tilde{\mathsf{s}}, \tilde{\imath}, 0/\theta, 1/\theta)$ es un reticulado acotado. Es decir que solo nos falta ver que $(L/\theta, \tilde{\mathsf{s}}, \tilde{\imath}, ^{\tilde{c}}, 0/\theta, 1/\theta)$ satisface las identidades (I10) y (I11). Veamos por ejemplo que satisface la (I10). Sea x/θ un elemento cualquiera de L/θ. Ya que $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, ^c, 0, 1)$ satisface la (I10), tenemos que $x \mathbin{\mathsf{s}} x^c = 1$. O sea que $(x \mathbin{\mathsf{s}} x^c)/\theta = 1/\theta$ y por lo tanto $x/\theta \mathbin{\tilde{\mathsf{s}}} x^c/\theta = 1/\theta$. Pero por definicion de $^{\tilde{c}}$ tenemos que $(x/\theta)^{\tilde{c}} = x^c/\theta$, lo cual nos dice que $x/\theta \mathbin{\tilde{\mathsf{s}}} (x/\theta)^{\tilde{c}} = 1/\theta$. Dejamos al lector ver que $(L/\theta, \tilde{\mathsf{s}}, \tilde{\imath}, ^{\tilde{c}}, 0/\theta, 1/\theta)$ satisface la identidad (I11)

(b) Por el resultado analogo para reticulados acotados tenemos que π_θ es un homomorfismo de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)$ en $(L/\theta, \tilde{\mathsf{s}}, \tilde{\imath}, 0/\theta, 1/\theta)$ cuyo nucleo es θ. Notese que por definicion de $^{\tilde{c}}$ tenemos que $x^c/\theta = (x/\theta)^{\tilde{c}}$, es decir $\pi_\theta(x^c) = (\pi_\theta(x))^{\tilde{c}}$, cualquiera sea $x \in L$ ■

El lema siguiente se prueba en la misma forma que sus analogos y lo aceptaremos sin demostracion

Lemma 8 *Si* $F : (L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, ^c, 0, 1) \to (L', \mathsf{s}', \mathsf{i}', ^{c'}, 0', 1')$ *es un homomorfismo de reticulados complementados, entonces* $\ker F$ *es una congruencia sobre* $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, ^c, 0, 1)$

Ejercicio 7: Encontrar dos reticulados complementados $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, ^{\mathbf{c}}, 0, 1)$, $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}', ^{\mathbf{c}'}, 0', 1')$ y $F : L \to L'$ tal que F sea homomorfismo de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)$ en $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}', 0', 1')$, pero no sea homomorfismo de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, ^{\mathbf{c}}, 0, 1)$ en $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}', ^{\mathbf{c}'}, 0', 1')$

Algebras de Boole

Como ya vimos en la Guia 4, un reticulado terna $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ se llama *distributivo* cuando cumpla

Dis$_1$ $x \mathbin{\mathsf{i}} (y \mathbin{\mathsf{s}} z) = (x \mathbin{\mathsf{i}} y) \mathbin{\mathsf{s}} (x \mathbin{\mathsf{i}} z)$, cualesquiera sean $x, y, z \in L$

Diremos que un reticulado acotado $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)$ (resp. complementado $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, ^c, 0, 1)$) es *distributivo* cuando $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ lo sea. Consideremos la distributividad dual a Dis$_1$, es decir

Dis$_2$ $x \mathbin{\mathsf{s}} (y \mathbin{\mathsf{i}} z) = (x \mathbin{\mathsf{s}} y) \mathbin{\mathsf{i}} (x \mathbin{\mathsf{s}} z)$, cualesquiera sean $x, y, z \in L$

Lemma 9 *Sea* $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ *un reticulado terna. Entonces* $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ *satisface Dis*$_1$ *sii* $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ *satisface Dis*$_2$

Proof. Supongamos $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ satisface Dis_1. Sean $a, b, c \in L$ elementos fijos. Por Dis_1 tenemos que

$$(a \mathsf{\ s\ } b) \mathsf{\ i\ } (a \mathsf{\ s\ } c) = ((a \mathsf{\ s\ } b) \mathsf{\ i\ } a) \mathsf{\ s\ } ((a \mathsf{\ s\ } b) \mathsf{\ i\ } c)$$

Pero por conmutatividad tenemos que

$$((a \mathsf{\ s\ } b) \mathsf{\ i\ } a) \mathsf{\ s\ } ((a \mathsf{\ s\ } b) \mathsf{\ i\ } c) = (a \mathsf{\ i\ } (a \mathsf{\ s\ } b)) \mathsf{\ s\ } (c \mathsf{\ i\ } (a \mathsf{\ s\ } b))$$

Por (I7) tenemos que $a \mathsf{\ i\ } (a \mathsf{\ s\ } b) = a$ y por Dis_1 tenemos que $c \mathsf{\ i\ } (a \mathsf{\ s\ } b) = (c \mathsf{\ i\ } a) \mathsf{\ s\ } (c \mathsf{\ i\ } b)$ por lo cual

$$(a \mathsf{\ i\ } (a \mathsf{\ s\ } b)) \mathsf{\ s\ } (c \mathsf{\ i\ } (a \mathsf{\ s\ } b)) = a \mathsf{\ s\ } ((c \mathsf{\ i\ } a) \mathsf{\ s\ } (c \mathsf{\ i\ } b))$$

Por asociatividad tenemos que

$$a \mathsf{\ s\ } ((c \mathsf{\ i\ } a) \mathsf{\ s\ } (c \mathsf{\ i\ } b)) = (a \mathsf{\ s\ } (c \mathsf{\ i\ } a)) \mathsf{\ s\ } (c \mathsf{\ i\ } b)$$

Pero por conmutatividad tenemos que

$$(a \mathsf{\ s\ } (c \mathsf{\ i\ } a)) \mathsf{\ s\ } (c \mathsf{\ i\ } b) = (a \mathsf{\ s\ } (a \mathsf{\ i\ } c)) \mathsf{\ s\ } (b \mathsf{\ i\ } c)$$

Lo cual por (I6) nos dice que

$$(a \mathsf{\ s\ } (a \mathsf{\ i\ } c)) \mathsf{\ s\ } (b \mathsf{\ i\ } c) = a \mathsf{\ s\ } (b \mathsf{\ i\ } c)$$

Por transitividad de la igualdad, las igualdades anteriores nos dicen que

$$a \mathsf{\ s\ } (b \mathsf{\ i\ } c) = (a \mathsf{\ s\ } b) \mathsf{\ i\ } (a \mathsf{\ s\ } c)$$

Pero a, b, c eran elementos arbitrarios por lo que hemos probado que vale Dis_2.
■

Por un *Algebra de Boole* entenderemos un reticulado complementado que es distributivo. Algunos ejemplos:

E1 Dado un conjunto no vacio X, la 6-upla $(X, \cup, \cap, ^c, \emptyset, X)$ es un algebra de Boole

E2 $(\{1\}, \max, \min, \{(1,1)\}, 1, 1)$ es un algebra de Boole

E3 $(\{0,1\}, \max, \min, \{(0,1),(1,0)\}, 0, 1)$ es un algebra de Boole

E4 $(\{1,2,5,10\}, mcm, mcd, c, 0, 1)$ es un algebra de Boole, donde $c(x) = 10/x$, para cada $x \in \{1,2,5,10\}$.

Para probar algunas propiedades fundamentales de un algebra de Boole necesitaremos el siguiente

Lemma 10 *Si* $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)$ *es un reticulado acotado y distributivo, entonces todo elemento tiene a lo sumo un complemento. Es decir, si* $x \mathsf{ s } u = x \mathsf{ s } v = 1$ *y* $x \mathsf{ i } u = x \mathsf{ i } v = 0$*, entonces* $u = v$*, cualesquiera sean* $x, u, v \in L$*.*

Proof. Sean $a, b, c \in L$ elementos fijos. Supongamos que

$$a \mathsf{ s } b = a \mathsf{ s } c = 1$$
$$a \mathsf{ i } b = a \mathsf{ i } c = 0$$

(es decir b y c son ambos complementos de a). Veremos que entonces $b = c$. Notese que

$$b = b \mathsf{ i } 1 = b \mathsf{ i } (a \mathsf{ s } c) = ...$$

■

Ejercicio 7,5: Complete la prueba anterior

Una propiedad muy importante que se da en las algebras de Boole es

Lemma 11 *Sea* $(B, \mathsf{s}, \mathsf{i}, {}^{\mathbf{c}}, 0, 1)$ *un álgebra de Boole. Cualesquiera sean* $x, y \in B$*, se tiene que* $y = (y \mathsf{ i } x) \mathsf{ s } (y \mathsf{ i } x^c)$*.*

Ejercicio 8: Pruebe el lema anterior

Theorem 12 *Sea* $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, {}^{\mathbf{c}}, 0, 1)$ *un álgebra de Boole y sean* $a, b \in L$*. Se tiene que:*

(1) $(a \mathsf{ i } b)^c = a^c \mathsf{ s } b^c$

(2) $(a \mathsf{ s } b)^c = a^c \mathsf{ i } b^c$

(3) $a^{cc} = a$

(4) $a \mathsf{ i } b = 0$ *si y solo si* $b \leq a^c$

(5) $a \leq b$ *si y solo si* $b^c \leq a^c$

Proof. (1) Es facil ver que $a^c \mathsf{ s } b^c$ es un complemento de $a \mathsf{ i } b$ (hacer!). Pero ya que $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, {}^{\mathbf{c}}, 0, 1)$ es un reticulado complementado, tenemos que $(a \mathsf{ i } b)^c$ es un complemento de $a \mathsf{ i } b$. El Lema 10 nos dice que $(a \mathsf{ i } b)^c$ y $a^c \mathsf{ s } b^c$ deben ser iguales.

(2) y (3) se prueban en forma similar (hacer!)

(4) Supongamos $a \mathsf{i} b = 0$. Se tiene

$$\begin{aligned} b &= (b \mathsf{i} a) \mathsf{s} (b \mathsf{i} a^c) \\ &= (a \mathsf{i} b) \mathsf{s} (b \mathsf{i} a^c) \\ &= 0 \mathsf{s} (b \mathsf{i} a^c) \\ &= (b \mathsf{i} a^c) \end{aligned}$$

lo cual dice que $b \leq a^c$. Supongamos $b \leq a^c$. Entonces $a \mathsf{i} b \leq a \mathsf{i} a^c = 0$ por lo cual $a \mathsf{i} b = 0$.

(5) Supongamos $a \leq b$. Entonces $a \mathsf{i} b = a$, lo cual por (1) nos dice que $a^c \mathsf{s} b^c = a^c$ obteniendo que $b^c \leq a^c$. La resiproca es dejada al lector (hint: use (3)) ■

Ejercicio 9: Complete la prueba del lema anterior

Ejercicio 10: Se cumplen las propiedades del teorema anterior en un reticulado complementado cualquiera?

Convencion notacional: Notese que hemos definido distintos tipos de estructuras (i.e. posets, reticulados terna, etc) y en todas ellas su primera coordenada es llamada el *universo* de dicha estructura. En general usaremos letras mayusculas en bold para denotar una estructura dada y en tal caso usaremos la convension de que su correspondiente mayuscula en italica denotara el universo de dicha estructura. Por ejemplo si decimos "sea $\mathbf{L}$ un reticulado acotado", entonces ya queda implicita la informacion de que denotaremos con L al universo de $\mathbf{L}$. Ademas deberia quedar claro que en tal caso $\mathbf{L}$ es una 5-upla.

Tambien si $\mathbf{L}'$ denota una estructura, L' denotara su universo. Similarmente si $\tilde{\mathbf{L}}$ denota una estructura, $\tilde{L}$ denotara su universo, etc.

Notese que entonces, si escribimos "Sea $F : \mathbf{L} \to \mathbf{L}'$ es un homomorfismo de reticulados complementados", estaremos suponiendo que $\mathbf{L}$ y $\mathbf{L}'$ son reticulados complementados (i.e. ciertas 6-uplas) y que F es una funcion de L en L' la cual es un homomorfismo de $\mathbf{L}$ en $\mathbf{L}'$. Aqui hay que tener cuidado ya que D_F es L y no $\mathbf{L}$ lo cual seria imposible ya que $\mathbf{L}$ no es un conjunto!

Tambien notese que si $\mathbf{L}$ denota un reticulado acotado y θ es una congruencia de $\mathbf{L}$, entonces $\mathbf{L}/\theta$ denotara el cociente de $\mathbf{L}$ sobre θ, a saber cierto reticulado acotado cuyo universo es L/θ. Es decir que $Ti(\mathbf{L}/\theta) = 5\text{−UPLA}$ y $Ti(L/\theta) = \text{CONJUNTO}$