Combo 3 de teoremas

Emanuel Nicolás Herrador - November 2024

Lectura única de términos

Dado $t \in T^\tau$ se da una de las siguientes:

1. $t \in Var \cup \mathcal{C}$
2. Hay únicos $n \geq 1, f \in \mathcal{F}_n,\ t_1, \dots, t_n \in T^\tau$ tales que $t = f(t_1, \dots, t_n)$

Demostración

Por el *lema de Menú para términos* sabemos que: Supongamos $t \in T^\tau_k$, con $k \geq 1$. Entonces se da alguna de las siguientes:

1. $t \in Var \cup \mathcal{C}$
2. $t = f(t_1, \dots, t_n)$ con $f \in \mathcal{F}_n$, $n \geq 1$ y $t_1, \dots, t_n \in T^\tau_{k-1}$

Por el *lema de Mordizqueo de términos* sabemos que: Sean $s, t \in T^\tau$ y supongamos que hay palabras x, y, z, con $y \neq \varepsilon$ tales que $s = xy$ y $t = yz$. Entonces $x = z = \varepsilon$ o $s, t \in \mathcal{C}$. En particular, si un término es tramo inicial o final de otro término, entonces dichos términos son iguales.

Por el lema de "Menú para términos", solo debemos demostrar la unicidad del punto (2). Supongamos $t = f(t_1, \dots, t_n) = g(s_1, \dots, s_m)$ con $n, m \geq 1,\ f \in \mathcal{F}_n,\ g \in \mathcal{F}_m,\ t_1, \dots, t_n, s_1, \dots, s_m \in T^\tau$.

Notemos que claramente $f = g$, por lo que $n = m = a(f) = a(g)$. Notemos que t_1 es tramo inicial de s_1 o s_1 es tramo inicial de t_1. Por el lema de "Mordizqueo de términos", $t_1 = s_1$. Análogamente, podemos probar que $t_2 = s_2, \dots, t_n = s_n$. Por ello, llegamos a que efectivamente son únicos, por lo que se demuestra. ∎

Lema

Supongamos que $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ es un isomorfismo. Sea $\varphi \in F^\tau$. Entonces:

$$\mathbf{A} \vDash \varphi[(a_1, a_2, \dots)] \text{ sii } \mathbf{B} \vDash \varphi[(F(a_1), F(a_2), \dots)]$$

para cada $(a_1, a_2, \dots) \in A^N$. En particular $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ satisfacen las mismas sentencias de tipo τ.

Demostración

Durante la demostración vamos a usar el siguiente *lema*: Sea $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ un homomorfismo, entonces $F(t^\mathbf{A}[(a_1, a_2, \dots)]) = t^\mathbf{B}[(F(a_1), F(a_2), \dots)]\ \forall t \in T^\tau,\ (a_1, a_2, \dots) \in A^N$.

Vamos a demostrar por inducción en $k \in \mathbb{N}_0$ que el lema vale $\forall \varphi \in F^\tau_k$. Supongamos $(a_1, a_2, \dots) \in A^N$ y $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ un isomorfismo. Para mayor facilidad, denotemos con $\vec{a}$ a $(a_1, a_2, \dots)$ y con $F(\vec{a})$ a $(F(a_1), F(a_2), \dots)$. Entonces:

- *Caso base* $k = 0$: Sea $\varphi \in F^\tau_0$, tenemos dos casos:
  - $\varphi = (t \equiv s)$ con $t, s \in T^\tau$: Veamos que:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} \vDash \varphi[\vec{a}] &\iff t^\mathbf{A}[\vec{a}] = s^\mathbf{A}[\vec{a}] && \text{Def. de } \vDash \\
&\iff F(t^\mathbf{A}[\vec{a}]) = F(s^\mathbf{A}[\vec{a}]) && \text{Al ser F isomorfismo (i.e., biyectiva)} \\
&\iff t^\mathbf{B}[F(\vec{a})] = s^\mathbf{B}[F(\vec{a})] && \text{Lema} \\
&\iff \mathbf{B} \vDash \varphi[F(\vec{a})] && \text{Def. de } \vDash
\end{aligned}$$

    Por lo que se demuestra.

– $\varphi = r(t_1, \ldots, t_n)$ con $r \in \mathcal{R}_n,\ n \geq 1,\ t_1, \ldots, t_n \in T^\tau$: Veamos que:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} \vDash \varphi[\vec{a}] &\iff (t_1^{\mathbf{A}}[\vec{a}], \ldots, t_n^{\mathbf{A}}[\vec{a}]) \in r^{\mathbf{A}} && \text{Def. de } \vDash \\
&\iff (F(t_1^{\mathbf{A}}[\vec{a}]), \ldots, F(t_n^{\mathbf{A}}[\vec{a}])) \in r^{\mathbf{B}} && F \text{ es isomorfismo} \\
&\iff (t_1^{\mathbf{B}}[F(\vec{a})], \ldots, t_n^{\mathbf{B}}[F(\vec{a})]) \in r^{\mathbf{B}} && \text{Lema} \\
&\iff \mathbf{B} \vDash \varphi[F(\vec{a})] && \text{Def. de } \vDash
\end{aligned}$$

Por lo que se demuestra.

- *Hipótesis inductiva* (k): Sea $k \in \mathbb{N}_0$, entonces $\forall \varphi \in F_k^\tau, (\mathbf{A} \vDash \varphi[\vec{a}] \iff \mathbf{B} \vDash \varphi[F(\vec{a})])$
- *Caso inductivo* $(k+1)$: Sea $\varphi \in F_{k+1}^\tau$, tenemos varios casos:
  - Si $\varphi \in F_k^\tau$: se demuestra por HI.
  - Si $\varphi = (\varphi_1 \eta \varphi_2)$ con $\varphi_1, \varphi_2 \in F_k^\tau$ y $\eta \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$: Los casos son análogos, por lo que vamos a suponer $\varphi = (\varphi_1 \wedge \varphi_2)$. Por ello:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} \vDash \varphi[\vec{a}] &\iff \mathbf{A} \vDash \varphi_1[\vec{a}] \text{ y } \mathbf{A} \vDash \varphi_2[\vec{a}] && \text{Def. de } \vDash \\
&\iff \mathbf{B} \vDash \varphi_1[F(\vec{a})] \text{ y } \mathbf{B} \vDash \varphi_2[F(\vec{a})] && \text{HI} \\
&\iff \mathbf{B} \vDash \varphi[F(\vec{a})] && \text{Def. de } \vDash
\end{aligned}$$

    Por lo que se demuestra.
  - Si $\varphi = Qx_j\varphi_1$ con $\varphi_1 \in F_k^\tau$ y $Q \in \{\forall, \exists\}$: Los dos casos son análogos, por lo que vamos a ver $\varphi = \forall x_j \varphi_1$. Por ello:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} \vDash \varphi[\vec{a}] &\iff \forall a \in A,\ \mathbf{A} \vDash \varphi_1[\downarrow_j^a (\vec{a})] && \text{Def. de } \vDash \\
&\iff \forall a \in A,\ \mathbf{B} \vDash \varphi_1[F(\downarrow_j^a (\vec{a}))] && \text{HI} \\
&\iff \forall b \in B,\ \mathbf{B} \vDash \varphi_1[\downarrow_j^b (F(\vec{a}))] && \text{Al ser F isomorfismo (i.e., biyectivo)} \\
&\iff \mathbf{B} \vDash \varphi[F(\vec{a})] && \text{Def. de } \vDash
\end{aligned}$$

    Por lo que se demuestra.

Con ello, se demuestra el lema. ■

Teorema

Sea $T = (\Sigma, \tau)$ una teoría. Entonces $(S^\tau / \dashv\vdash_T, s^T, i^T, {}^{c^T}, 0^T, 1^T)$ es un álgebra de Boole.
Pruebe solo el item (6).

Demostración

Queremos probar que $\forall \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in S^\tau,\ [\varphi_1]_T\ s^T\ ([\varphi_2]_T\ s^T\ [\varphi_3]_T) = ([\varphi_1]_T\ s^T\ [\varphi_2]_T)\ s^T\ [\varphi_3]_T$.

Sean $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in S^\tau$ fijas pero arbitrarios, veamos que:

$$\begin{gathered}
[\varphi_1]_T\ s^T\ ([\varphi_2]_T\ s^T\ [\varphi_3]_T) = ([\varphi_1]_T\ s^T\ [\varphi_2]_T)\ s^T\ [\varphi_3]_T \\
\Updownarrow \text{def. de } s^T \\
[(\varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3))]_T = [((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3)]_T \\
\Updownarrow \text{Def. de clase de equivalencia en } S^\tau / \dashv\vdash_T \\
(\varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3)) \dashv\vdash_T ((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3) \\
\Updownarrow \text{Def. de } \dashv\vdash_T \\
T \vdash ((\varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3)) \leftrightarrow ((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3))
\end{gathered}$$

Ahora, por *lema* sabemos que: Sea (Σ, τ) una teoría y $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi_1, \ldots, \varphi_n$. Si R es una regla distinta de GENERALIZACION y ELECCION, y φ se deduce de $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ por la regla R, entonces $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$.

Por ello, por el anterior lema aplicado con la regla EQUIVALENCIAINTRODUCCION, tenemos que probar solo que:

$$T \vdash ((\varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3)) \rightarrow ((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3))$$
$$T \vdash (((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3) \rightarrow (\varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3)))$$

Las dos son totalmente análogas, por lo que solo vamos a dar la prueba que atestigua la primera:

1. $(\varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3))$	HIP1
2. φ_1	HIP2
3. $\varphi_1 \vee \varphi_2$	DISJINT(2)
4. $(\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3$	TESIS2DISJINT(3)
5. $\varphi_1 \to ((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3)$	CONC
6. $\varphi_2 \vee \varphi_3$	HIP3
7. φ_2	HIP4
8. $\varphi_1 \vee \varphi_2$	DISJINT(7)
9. $(\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3$	TESIS4DISJINT(8)
10. $\varphi_2 \to ((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3)$	CONC
11. φ_3	HIP5
12. $(\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3$	TESIS5DISJINT(11)
13. $\varphi_3 \to ((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3)$	CONC
14. $((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3)$	TESIS3DIVPORCASOS$(6, 10, 13)$
15. $(\varphi_2 \vee \varphi_3) \to ((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3)$	CONC
16. $((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3)$	TESIS1DIVPORCASOS$(1, 5, 15)$
17. $(\varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3)) \to ((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3)$	CONC

Por lo tanto, se demuestra para toda sentencia dado que las consideramos fijas pero arbitrarias. ■