Combo 6 de teoremas

Emanuel Nicolás Herrador - November 2024

Teorema de Completitud

Sea $T = (\Sigma, \tau)$ una teoría de primer orden. Si $T \vDash \varphi$, entonces $T \vdash \varphi$.
Haga solo el caso en que τ tiene una cantidad infinita de nombres de constante que no ocurren en las sentencias de Σ. En la exposición de la prueba no es necesario que demuestre los ítems $(1), (2), (3)$ y (4).

Lemas que usaremos

Lema (A)

Sea τ un tipo. Hay una infinitupla $(\gamma_1, \gamma_2, \dots) \in F^{\tau N}$ tal que:

1. $|Li(\gamma_j)| \leq 1$ para cada $j = 1, 2, \dots$
2. Si $|Li(\gamma)| \leq 1$, entonces $\gamma = \gamma_j$ para algún $j \in N$

Lema (B): Lema del ínfimo

Sea $T = (\Sigma, \tau)$ una teoría y supongamos que τ tiene una cantidad infinita de nombres de constante que no ocurren en las sentencias de Σ. Entonces para cada fórmula $\varphi =_d \varphi(v)$, se tiene que en el álgebra de Lindembaum $\mathcal{A}_T$, $[\forall v \varphi(v)]_T = \inf(\{[\varphi(t)]_T : t \in T_c^\tau\})$

Teorema (C): Teorema de Rasiova y Sikorski

Sea $(B, s, i, {}^c, 0, 1)$ un álgebra de Boole. Sea $x \in B : x \neq 0$. Supongamos que $(A_1, A_2, \dots)$ es una infinitupla de subconjuntos de B tal que $(\exists \inf(A_j)) \forall j = 1, 2, \dots$. Entonces hay un filtro primo P tal que:

- $x \in P$
- $\forall j = 1, 2, \dots,\ A_j \subseteq P \Rightarrow \inf(A_j) \in P$

Lema (D)

Sea $(B, s, i, {}^c, 0, 1)$ un álgebra de Boole. Entonces para un filtro $F \subseteq B$, las siguientes son equivalentes:

1. F es primo
2. $x \in F$ o $x^c \in F$ para cada $x \in B$

Demostración

Digamos $T = (\Sigma, \tau)$ una teoría de primer orden tal que τ tiene una cantidad infinita de nombres de constante que no ocurren en las sentencias de Σ.

Vamos a probar el *Teorema* por el absurdo, es decir, supongamos que $\exists \varphi_0 \in S^\tau,\ (T \vDash \varphi_0 \wedge T \nvdash \varphi_0)$.

Veamos que $[\neg\varphi_0]_T \neq 0^T$ por absurdo: Supongamos que $[\neg\varphi_0]_T = 0^T$, luego:

$$\begin{aligned} [\neg\varphi_0]_T = 0^T &\Rightarrow \neg\varphi_0 \in 0^T \\ &\Rightarrow \neg\varphi_0 \in \{\psi \in S^\tau : t \vdash \neg\psi\} \\ &\Rightarrow T \vdash \neg\neg\varphi_0 \\ &\Rightarrow T \vdash \varphi_0 \text{ (AXILOG)} \end{aligned}$$

lo cual es absurdo, pues suponemos $T \nvdash \varphi_0$. Luego, efectivamente $[\neg\varphi_0]_T \neq 0^T$.

Por **(A)** tenemos que hay una infinitupla $(\gamma_1, \gamma_2, \dots) \in F^{\tau N}$ tal que:

1. $|Li(\gamma_j)| \leq 1$ para cada $j = 1, 2, \dots$

2. Si $|Li(\gamma)| \leq 1$, entonces $\gamma = \gamma_j$ para algún $j \in N$

Para cada $j \in N$, sea $w_j \in Var : Li(\gamma_j) \subseteq \{w_j\}$, declararemos $\gamma_j =_d \gamma_j(w_j)$. Luego, por el **lema del ínfimo (B)**, tenemos que en $\mathcal{A}_T$ se tiene que $\forall j \in N,\ [\forall w_j \gamma_j(w_j)]_T = \inf(\{[\gamma_j(t)]_T : t \in T_c^\tau\})$

Ahora, como $\mathcal{A}_T$ es un álgebra de Boole, $[\neg\varphi_0]_T \in S^\tau / \dashv\vdash_T$ (universo de $\mathcal{A}_T$), $[\neg\varphi_0] \neq 0^T$ y $(\{[\gamma_1(t)]_T : t \in T_c^\tau\}, \{[\gamma_2(t)]_T : t \in T_c^\tau\}, \dots)$ es una infinitupla de subconjuntos de $S^\tau / \dashv\vdash_T$ tal que existe el ínfimo para cada uno de ellos; por el **Teorema de Rasiova y Sikorski (C)** tenemos que hay un filtro primo P tal que:

- $[\neg\varphi_0]_T \in P$
- $\forall j \in N,\ (\{[\gamma_j(t)]_T : t \in T_c^\tau\} \subseteq P \Rightarrow [\forall w_j \gamma_j(w_j)]_T \in P)$

Como $(\gamma_1, \gamma_2, \dots)$ cubre todas las fórmulas con a lo sumo una variable libre, podemos reescribir las propiedades anteriores como:

- $[\neg\varphi_0]_T \in P$
- $\forall \varphi =_d \varphi(v) \in F^\tau,\ (\{[\varphi(t)]_T : t \in T_c^\tau\} \subseteq P \Rightarrow [\forall v \varphi(v)]_T \in P)$

Definamos sobre T_c^τ la relación: $t \bowtie s$ sii $[(t \equiv s)]_T \in P$. Veamos que:

(1) $\bowtie$ es de equivalencia

(2) $\forall \varphi =_d \varphi(v_1, \dots, v_n) \in F^\tau,\ t_1, \dots, t_n, s_1, \dots, s_n \in T_c^\tau$, si $t_1 \bowtie s_1, \dots, t_n \bowtie s_n$, entonces $[\varphi(t_1, \dots, t_n)]_T \in P$ sii $[\varphi(s_1, \dots, s_n)]_T \in P$

(3) $\forall f \in \mathcal{F}_n,\ t_1, \dots, t_n, s_1, \dots, s_n \in T_c^\tau$, entonces $(t_1 \bowtie s_1, \dots, t_n \bowtie s_n) \Rightarrow (f(t_1, \dots, t_n) \bowtie f(s_1, \dots, s_n))$

Definamos ahora un modelo $\mathbf{A}_P$ de tipo τ tal que:

- Universo de $\mathbf{A}_P = T_c^\tau / \bowtie$
- $c^{\mathbf{A}_P} = c/\bowtie,\ \forall c \in \mathcal{C}$
- $f^{\mathbf{A}_P}(t_1/\bowtie, \dots, t_n/\bowtie) = f(t_1, \dots, t_n)/\bowtie,\ \forall f \in \mathcal{F}_n,\ t_1, \dots, t_n \in T_c^\tau$
- $r^{\mathbf{A}_P} = \{(t_1/\bowtie, \dots, t_n/\bowtie) : [r(t_1, \dots, t_n)]_T \in P\},\ \forall r \in \mathcal{R}_n$

Notar que $f^{\mathbf{A}_P}$ es inambigua por la propiedad (3) vista antes. Con ello, veamos que se cumple que:

(4) $\forall t =_d t(v_1, \dots, v_n) \in T^\tau,\ t_1, \dots, t_n \in T_c^\tau,\ (t^{\mathbf{A}_P}[t_1/\bowtie, \dots, t_n/\bowtie] = t(t_1, \dots, t_n)/\bowtie)$

(5) $\forall \varphi =_d \varphi(v_1, \dots, v_n) \in F^\tau,\ t_1, \dots, t_n \in T_c^\tau,\ (\mathbf{A}_P \vDash \varphi[t_1/\bowtie, \dots, t_n/\bowtie] \iff [\varphi(t_1, \dots, t_n)]_T \in P)$

Vamos a demostrar por inducción en $k \in N_0$ que la propiedad vale $\forall \varphi \in F_k^\tau$.

- *Caso base* $(k = 0)$: Sea $\varphi =_d \varphi(v_1, \dots, v_n) \in F_0^\tau$, tenemos dos casos:
  - $\varphi = (t \equiv s)$ con $t, s \in T^\tau$: Tenemos que:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_P \vDash \varphi[t_1/\bowtie, \dots, t_n/\bowtie] &\iff t^{\mathbf{A}_P}[t_1/\bowtie, \dots, t_n/\bowtie] = s^{\mathbf{A}_P}[t_1/\bowtie, \dots, t_n/\bowtie] && \text{Def. } \vDash \\ &\iff t(t_1, \dots, t_n)/\bowtie = s(t_1, \dots, t_n)/\bowtie && (4) \\ &\iff t(t_1, \dots, t_n) \bowtie s(t_1, \dots, t_n) && \text{Misma clase} \\ &\iff [t(t_1, \dots, t_n) \equiv s(t_1, \dots, t_n)]_T \in P && \text{Def. } \bowtie \\ &\iff [\varphi(t_1, \dots, t_n)]_T \in P && \text{Reemplazando} \end{aligned}$$

    Luego, se prueba para este caso.
  - $\varphi = r(t_1, \dots, t_n)$ con $r \in \mathcal{R}_n,\ n \geq 1$ y $t_1, \dots, t_n \in T^\tau$: Tenemos que:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_P \vDash \varphi[t_1/\bowtie, \dots, t_n/\bowtie] &\iff (t_1/\bowtie, \dots, t_n/\bowtie) \in r^{\mathbf{A}_P} && \text{Def. } \vDash \\ &\iff [r(t_1, \dots, t_n)]_T \in P && \text{Def. } r^{\mathbf{A}_P} \\ &\iff [\varphi(t_1, \dots, t_n)]_T \in P && \text{Reemplazando} \end{aligned}$$

    Luego, se prueba para este caso.

  Con ello, se prueba para el caso base.

- *Hipótesis inductiva* (k): Sea $k \in N_0$, entonces $\forall \varphi =_d \varphi(v_1, \ldots, v_n) \in F_k^\tau,\ t_1, \ldots, t_n \in T_c^\tau,\ (\mathbf{A}_P \vDash \varphi[t_1/\bowtie, \ldots, t_n/\bowtie] \iff [\varphi(t_1, \ldots, t_n)]_T \in P)$
- *Paso inductivo* $(k+1)$: Sea $\varphi =_d \varphi(v_1, \ldots, v_n) \in F_{k+1}^\tau$, tenemos varios casos:
  - Si $\varphi \in F_k^\tau$: se demuestra por HI
  - Si $\varphi = \neg\varphi_1$ con $\varphi_1 \in F_k^\tau$: Veamos que

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_P \vDash \varphi[t_1/\bowtie, \ldots, t_n/\bowtie] &\iff \mathbf{A}_P \vDash \neg\varphi_1[t_1/\bowtie, \ldots, t_n/\bowtie] && \text{Def. } \vDash \\ &\iff [\varphi_1(t_1, \ldots, t_n)]_T \notin P && \text{HI} \\ &\iff ([\varphi_1(t_1, \ldots, t_n)]_T)^{c^{\mathbf{A}_P}} \in P && \text{Lema } \mathbf{(D)} \\ &\iff [\neg\varphi_1(t_1, \ldots, t_n)]_T \in P && \text{Def. } c^{\mathbf{A}_P} \\ &\iff [\varphi(t_1, \ldots, t_n)]_T \in P \end{aligned}$$

  Luego, se prueba para este caso.
  - Si $\varphi = (\varphi_1 \vee \varphi_2)$ con $\varphi_1, \varphi_2 \in F_k^\tau$: Veamos que

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_P \vDash \varphi[t_1/\bowtie, \ldots, t_n/\bowtie] &\iff \mathbf{A}_P \vDash \varphi_1[t_1/\bowtie, \ldots, t_n/\bowtie] \text{ o } \mathbf{A}_P \vDash \varphi_2[t_1/\bowtie, \ldots, t_n/\bowtie] && \text{Def. } \vDash \\ &\iff [\varphi_1(t_1, \ldots, t_n)]_T \in P \text{ o } [\varphi_2(t_1, \ldots, t_n)]_T \in P && \text{HI} \\ &\iff [\varphi_1(t_1, \ldots, t_n)]_T\ s^T\ [\varphi_2(t_1, \ldots, t_n)]_T \in P && \text{Def. } P \\ &\iff [\varphi_1(t_1, \ldots, t_n) \vee \varphi_2(t_1, \ldots, t_n)]_T \in P && \text{Def. } s^T \\ &\iff [\varphi(t_1, \ldots, t_n)]_T \in P \end{aligned}$$

  Luego, se prueba para este caso.
  - Si $\varphi = (\varphi_1 \wedge \varphi_2)$ con $\varphi_1, \varphi_2 \in F_k^\tau$: Veamos que

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_P \vDash \varphi[t_1/\bowtie, \ldots, t_n/\bowtie] &\iff \mathbf{A}_P \vDash \varphi_1[t_1/\bowtie, \ldots, t_n/\bowtie] \text{ y } \mathbf{A}_P \vDash \varphi_2[t_1/\bowtie, \ldots, t_n/\bowtie] && \text{Def. } \vDash \\ &\iff [\varphi_1(t_1, \ldots, t_n)]_T \in P \text{ y } [\varphi_2(t_1, \ldots, t_n)]_T \in P && \text{HI} \\ &\iff [\varphi_1(t_1, \ldots, t_n)]_T\ i^T\ [\varphi_2(t_1, \ldots, t_n)]_T \in P && \text{Def. } P \\ &\iff [\varphi_1(t_1, \ldots, t_n) \wedge \varphi_2(t_1, \ldots, t_n)]_T \in P && \text{Def. } i^T \\ &\iff [\varphi(t_1, \ldots, t_n)]_T \in P \end{aligned}$$

  Luego, se prueba para este caso.
  - Si $\varphi = (\varphi_1 \rightarrow \varphi_2)$ con $\varphi_1, \varphi_2 \in F_k^\tau$: Veamos que

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_P \vDash \varphi[t_1/\bowtie, \ldots, t_n/\bowtie] &\iff \mathbf{A}_P \nvDash \varphi_1[t_1/\bowtie, \ldots, t_n/\bowtie] \text{ o } \mathbf{A}_P \vDash \varphi_2[t_1/\bowtie, \ldots, t_n/\bowtie] && \text{Def. } \vDash \\ &\iff [\varphi_1(t_1, \ldots, t_n)]_T \notin P \text{ o } [\varphi_2(t_1, \ldots, t_n)]_T \in P && \text{HI} \\ &\iff ([\varphi_1(t_1, \ldots, t_n)]_T)^{c^{\mathbf{A}_P}} \in P \text{ o } [\varphi_2(t_1, \ldots, t_n)]_T \in P && \text{Lema } \mathbf{(D)} \\ &\iff [\neg\varphi_1(t_1, \ldots, t_n)]_T \in P \text{ o } [\varphi_2(t_1, \ldots, t_n)]_T \in P && \text{Def. } c^{\mathbf{A}_P} \\ &\iff [\neg\varphi_1(t_1, \ldots, t_n)]_T\ s^T\ [\varphi_2(t_1, \ldots, t_n)]_T \in P && \text{Def. } P \\ &\iff [\neg\varphi_1(t_1, \ldots, t_n) \vee \varphi_2(t_1, \ldots, t_n)]_T \in P && \text{Def. } s^T \\ &\iff [\varphi_1(t_1, \ldots, t_n) \rightarrow \varphi_2(t_1, \ldots, t_n)]_T \in P && \text{Teorema de } T \\ &\iff [\varphi(t_1, \ldots, t_n)]_T \in P \end{aligned}$$

  Luego, se prueba para este caso.
  - Si $\varphi = (\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2)$ con $\varphi_1, \varphi_2 \in F_k^\tau$: Por def. de $\vDash$, tenemos que $\mathbf{A}_P \vDash \varphi[t_1/\bowtie, \ldots, t_n/\bowtie]$ sii $(\mathbf{A}_P \vDash \varphi_1[t_1/\bowtie, \ldots, t_n/\bowtie]$ y $\mathbf{A}_P \vDash \varphi_2[t_1/\bowtie, \ldots, t_n/\bowtie])$ o $(\mathbf{A}_P \nvDash \varphi_1[t_1/\bowtie, \ldots, t_n/\bowtie]$ y

$\mathbf{A}_P \not\models \varphi_2[t_1/\bowtie, \dots, t_n/\bowtie]$). Veamos cada uno:

$$\begin{array}{rll} & \mathbf{A}_P \models \varphi_1[t_1/\bowtie, \dots, t_n/\bowtie] \text{ y } \mathbf{A}_P \models \varphi_2[t_1/\bowtie, \dots, t_n/\bowtie] & \text{Def. } \models \\ \iff & [\varphi_1(t_1, \dots, t_n)]_T \in P \text{ y } [\varphi_2(t_1, \dots, t_n)]_T \in P & \text{HI} \\ \iff & [\varphi_1(t_1, \dots, t_n)]_T \; i^T \; [\varphi_2(t_1, \dots, t_n)]_T \in P & \text{Def. } P \\ \iff & [\varphi_1(t_1, \dots, t_n) \wedge \varphi_2(t_1, \dots, t_n)]_T \in P & \text{Def. } i^T \end{array}$$

$$\begin{array}{rll} & \mathbf{A}_P \not\models \varphi_1[t_1/\bowtie, \dots, t_n/\bowtie] \text{ y } \mathbf{A}_P \not\models \varphi_2[t_1/\bowtie, \dots, t_n/\bowtie] & \text{Def. } \models \\ \iff & [\varphi_1(t_1, \dots, t_n)]_T \notin P \text{ y } [\varphi_2(t_1, \dots, t_n)]_T \notin P & \text{HI} \\ \iff & ([\varphi_1(t_1, \dots, t_n)]_T)^{c^{\mathbf{A}_P}} \in P \text{ y } ([\varphi_2(t_1, \dots, t_n)]_T)^{c^{\mathbf{A}_P}} \in P & \text{Lema } \mathbf{(D)} \\ \iff & [\neg\varphi_1(t_1, \dots, t_n)]_T \in P \text{ y } [\neg\varphi_2(t_1, \dots, t_n)]_T \in P & \text{Def. } c^{\mathbf{A}_P} \\ \iff & [\neg\varphi_1(t_1, \dots, t_n)]_T \; i^T \; [\neg\varphi_2(t_1, \dots, t_n)]_T \in P & \text{Def. } P \\ \iff & [\neg\varphi_1(t_1, \dots, t_n) \wedge \neg\varphi_2(t_1, \dots, t_n)]_T \in P & \text{Def. } i^T \end{array}$$

Análogamente llegamos a que $[(\varphi_1(t_1, \dots, t_n) \wedge \varphi_2(t_1, \dots, t_n)) \vee (\neg\varphi_1(t_1, \dots, t_n) \wedge \neg\varphi_2(t_1, \dots, t_n))]_T \in P$. Por Teorema de T (aplicando distributiva), podemos llegar a las dos implicaciones y, con ello, a que $[\varphi_1(t_1, \dots, t_n) \leftrightarrow \varphi_2(t_1, \dots, t_n)]_T \in P$.
Luego, se prueba para este caso.

– Si $\varphi = \forall v \varphi_1$ con $\varphi_1 \in F_k^\tau$ y $v \in Var - \{v_1, \dots, v_n\}$: Por convención notacional, $\varphi_1 =_d \varphi_1(v_1, \dots, v_n, v)$. Veamos que:

$$\begin{array}{rlll} \mathbf{A}_P \models \varphi[t_1/\bowtie, \dots, t_n/\bowtie] & \iff & \forall t \in T_c^\tau, \; \mathbf{A}_P \models \varphi_1[t_1/\bowtie, \dots, t_n/\bowtie, t/\bowtie] & \text{Def. } \models \\ & \iff & \forall t \in T_c^\tau, \; [\varphi_1(t_1, \dots, t_n, t)]_T \in P & \text{HI} \\ & \iff & [\forall v \varphi_1(t_1, \dots, t_n, v)]_T \in P & \text{Def. } P \\ & \iff & [\varphi(t_1, \dots, t_n)]_T \in P & \end{array}$$

Luego, se prueba para este caso.

– Si $\varphi = \exists v \varphi_1$ con $\varphi_1 \in F_k^\tau$ y $v \in Var - \{v_1, \dots, v_n\}$: Por convención notacional, $\varphi_1 =_d \varphi_1(v_1, \dots, v_n, v)$. Veamos que:

$$\begin{array}{rlll} \mathbf{A}_P \models \varphi[t_1/\bowtie, \dots, t_n/\bowtie] & \iff & \exists t \in T_c^\tau, \; \mathbf{A}_P \models \varphi_1[t_1/\bowtie, \dots, t_n/\bowtie, t/\bowtie] & \text{Def. } \models \\ & \iff & \exists t \in T_c^\tau, \; [\varphi_1(t_1, \dots, t_n, t)]_T \in P & \text{HI} \end{array}$$

Ahora, como los dos complementos no pueden estar en el filtro primo porque por def. de filtro $x \; i \; x^c = 0^T \in P$ y luego $\forall y \geq 0^T, \; y \in P$. Eso significaría que todos los elementos de $\mathcal{A}_T$ estarían en el filtro P, lo cual no es posible dado que es un filtro primo y, por def., no puede ser el universo.
Por ello mismo, si continuamos podemos ver que:

$$\begin{array}{rll} \iff & \exists t \in T_c^\tau, \; ([\varphi_1(t_1, \dots, t_n, t)]_T)^{c^T} \notin P & \text{Por lo anterior} \\ \iff & \exists t \in T_c^\tau, \; [\neg\varphi_1(t_1, \dots, t_n, t)]_T \notin P & \text{Def. } c^T \\ \iff & [\forall v \neg\varphi_1(t_1, \dots, t_n, v)]_T \notin P & \text{Si estuviera, el anterior tmb} \\ \iff & ([\forall v \neg\varphi_1(t_1, \dots, t_n, v)]_T)^{c^T} \in P & \text{Lema } \mathbf{(D)} \\ \iff & [\neg\forall v \neg\varphi_1(t_1, \dots, t_n, v)]_T \in P & \text{Def. } c^T \\ \iff & [\exists v \varphi_1(t_1, \dots, t_n, v)]_T \in P & \text{AXILOG} \\ \iff & [\varphi(t_1, \dots, t_n)]_T \in P & \end{array}$$

Luego, se prueba para este caso.

Con ello, se prueba para el paso inductivo.

Con todo esto, se prueba la propiedad (5). ■

Con esto, notemos que (5) nos dice que, en particular, $\forall \psi \in S^\tau, \; (\mathbf{A}_P \models \psi \iff [\psi]_T \in P)$. Por ello, como $1^T, [\neg\varphi_0]_T \in P$, entonces tenemos que $\mathbf{A}_P \models \neg\varphi_0$ y $\forall \psi \in \Sigma, \; \mathbf{A}_P \models \psi$. Esto significa, entonces, que por def. $\mathbf{A}_P$ es un modelo de la teoría $T = (\Sigma, \tau)$

Como $\mathbf{A}_P$ es un modelo de la teoría T y $T \models \varphi_0$, entonces $\mathbf{A}_P \models \varphi_0$. Luego, llegamos a un absurdo, que vino de suponer $T \nvdash \varphi_0$, dado que $\mathbf{A}_P \models \neg\varphi_0$ también. Por ello, $T \vdash \varphi_0$ y se demuestra. ■