Combo 9 de definiciones y convenciones notacionales

Emanuel Nicolás Herrador - November 2024

1 Término elemental de tipo τ

Defina "término elemental de tipo τ"

Dado un tipo $\tau = (\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{R}, a)$, definimos los términos elementales de tipo τ del siguiente modo:

- Cada palabra de $\mathcal{C}$ es un término elemental de tipo τ
- Cada variable es un término elemental de tipo τ
- Cada nombre de elemento fijo es un término elemental de tipo τ
- Si $f \in \mathcal{F}_n$, con $n \geq 1$ y $t_1, \ldots, t_n$ términos elementales de tipo τ, entonces $f(t_1, \ldots, t_n)$ es un término elemental de tipo τ
- Una palabra es un término elemental de tipo τ sii se puede construir usando las cláusulas anteriores

2 $\dashv\vdash_T$

Defina $\dashv\vdash_T$

Sea $T = (\Sigma, \tau)$ una teoría, podemos definir la siguiente relación binaria sobre S^τ:

$$\varphi \dashv\vdash_T \psi \text{ sii } T \vdash (\varphi \leftrightarrow \psi)$$

Es decir, $\dashv\vdash_T$ es una relación de equivalencia dada por:

$$\dashv\vdash_T = \{(\varphi, \psi) \in S^\tau : T \vdash (\varphi \leftrightarrow \psi)\}$$

3 s^T

Defina s^T (explique por qué la definición es inambigua)

Dada una teoría $T = (\Sigma, \tau)$, definiremos sobre $S^\tau / \dashv\vdash_T$ la siguiente operación binaria s^T:

$$[\varphi]_T \ s^T \ [\psi]_T = [(\varphi \vee \psi)]_T$$

Para mostrar que es inambigua, debemos demostrar la siguiente propiedad:

$$([\varphi]_T = [\varphi']_T \text{ y } [\psi]_T = [\psi']_T) \Rightarrow [(\varphi \vee \psi)]_T = [(\varphi' \vee \psi')]_T$$

Es decir, debemos probar que:

$$(T \vdash (\varphi \leftrightarrow \varphi') \text{ y } T \vdash (\psi \leftrightarrow \psi')) \Rightarrow T \vdash ((\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\varphi' \vee \psi'))$$

Para ello, sea $(\Sigma \cup \{(\varphi \leftrightarrow \varphi'), (\psi \leftrightarrow \psi')\}, \tau)$, podemos considerar la siguiente prueba formal:

1.	$(\varphi \leftrightarrow \varphi')$	AXIOMAPROPIO
2.	$(\psi \leftrightarrow \psi')$	AXIOMAPROPIO
3.	$((\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\varphi \vee \psi))$	AXIOMALOGICO
4.	$((\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\varphi' \vee \psi))$	REEMPLAZO$(1, 3)$
5.	$((\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\varphi' \vee \psi'))$	REEMPLAZO$(2, 4)$

Con ello, se atestigua que $(\Sigma \cup \{(\varphi \leftrightarrow \varphi'), (\psi \leftrightarrow \psi')\}, \tau) \vdash ((\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\varphi' \vee \psi'))$.
Finalmente, entonces, se demuestra que s^T es inambigua.

4 $\mathcal{A}_T$

Defina $\mathcal{A}_T$

Dada una teoría $T = (\Sigma, \tau)$, denotaremos con $\mathcal{A}_T$ al álgebra de Boole $(S^\tau / \dashv\vdash_T, s^T, i^T, {}^{c^T}, 0^T, 1^T)$. El álgebra $\mathcal{A}_T$ será llamada el álgebra de Lindenbaum de la teoría T.
Notar que:

- $[\varphi]_T \ s^T \ [\psi]_T = [(\varphi \vee \psi)]_T$
- $[\varphi]_T \ i^T \ [\psi]_T = [(\varphi \wedge \psi)]_T$
- $([\varphi]_T)^{c^T} = [\neg\varphi]_T$
- $0^T = \{\varphi \in S^\tau : \varphi$ es refutable en $T\}$ (φ es refutable en T si $T \vdash \neg\varphi$)
- $1^T = \{\varphi \in S^\tau : \varphi$ es un teorema de $T\}$

5 Subuniverso de un reticulado complementado

Defina "S es un subuniverso del reticulado complementado $(L, s, i, {}^c, 0, 1)$"

Sea $(L, s, i, {}^c, 0, 1)$ un reticulado complementado. Un conjunto $S \subseteq L$ es llamado subuniverso de $(L, s, i, {}^c, 0, 1)$ si $0, 1 \in S$ y además S es cerrado bajo las operaciones $s, i, {}^c$.