Guía 4: ejercicios

Ejercicio 1

Item A

- Reflexividad (I1):
  - $a\ s\ a = \lfloor a + a \rfloor \neq a$ si $a \neq 0 \Rightarrow$ NO
  - $a\ i\ a = \min\{a, a\} = a \Rightarrow$ SI
- Conmutatividad (I2, I3):
  - $a\ s\ b = \lfloor a + b \rfloor = \lfloor b + a \rfloor = b\ s\ a \Rightarrow$ SI
  - $a\ i\ s = \min\{a, b\} = \min\{b, a\} = b\ i\ a \Rightarrow$ SI
- Asociatividad (I4, I5):
  - $a\ s\ (b\ s\ c) = \lfloor a + \lfloor b + c \rfloor \rfloor \Rightarrow$ NO. Contraejemplo con $a = 1, b = c = 0.5$
  - $a\ i\ (b\ i\ c) = \min\{a \min\{b, c\}\} = \min\{a, b, c\} = \min\{\min\{a, b\}, c\} = (a\ i\ b)\ c \Rightarrow$ SI
- Absorción (I6, I7):
  - $a\ s\ (a\ i\ b) = \lfloor a + \min\{a, b\} \rfloor \Rightarrow$ NO. Contraejemplo con $a = b = 1.$
  - $a\ i\ (a\ s\ b) = \min\{a, \lfloor a + b \rfloor\} \Rightarrow$ NO. Contrajemplo con $a = 1, b = -1$

Item B

Básicamente s es XOR $(\oplus)$ e i es AND $(\wedge)$. Con ello, veamos:

- Reflexividad (I1):
  - $a \oplus a = 0 \forall a \Rightarrow$ NO por contraejemplo con $a = 1$
  - $a \wedge a = a \Rightarrow$ SI
- Conmutatividad (I2, I3): Sabemos que sí
- Asociatividad (I4, I5): Sabemos que sí
- Absorción (I6, I7):
  - $a \oplus (a \wedge b) \Rightarrow$ NO. Contraejemplo con $a = b = 1$
  - $a \wedge (a \oplus b) \Rightarrow$ NO. Contraejemplo con $a = b = 1$

Ejercicio 2

Vamos a demostrar de forma completa el **Teorema de Dedekind**, el cual dice que: Sea (L, s, i) un reticulado terna, la relación binaria sobre L definida por $x \leq y \iff x\ s\ y = y$ es un orden parcial sobre L para el cual se cumple que $sup(\{x, y\}) = x\ s\ y$ y que $inf(\{x, y\}) = x\ i\ y\ \forall x, y \in L.$

Primero, demostremos que $\leq$ es reflexiva, transitiva y antisimétrica, suponiendo $x, y, z \in L$:

- Reflexividad: Por reflexividad de s sabemos que $x \ s \ x = x$. Luego, por def., esto implica que $x \leq x$ por lo que se demuestra
- Transitividad: Digamos que $x \ s \ y = y$ y que $y \ s \ z = z$. Luego, esto significa que:

$$\begin{aligned}
(x \ s \ y) \ s \ (y \ s \ z) &= y \ s \ z \\
x \ s \ (y \ s \ y) \ s \ z &= y \ s \ z && \text{(Asociatividad)} \\
x \ s \ y \ s \ z &= y \ s \ z && \text{(Reflexividad)} \\
x \ s \ (y \ s \ z) &= y \ s \ z && \text{(Asociatividad)} \\
x \ s \ z &= z && \text{(Por suposición anterior)}
\end{aligned}$$

  Ahora, por def. del orden parcial, tenemos que si $x \leq y$ y si $y \leq z$ entonces $x \leq z$, por lo que se cumple la transitividad.
- Antisimetría: Supongamos $x \ s \ y = y$ y que $y \ s \ x = x$. Luego, por conmutatividad sabemos que $x \ s \ y = y \ s \ x$ por lo que $x = y$. Por def. del orden parcial, esto significa que si $x \leq y$ y si $y \leq x$, entonces $x = y$, por lo que se cumple la antisimetría.

Ahora, ya habiendo demostrado por def. que $\leq$ es un orden parcial sobre L, tenemos que demostrar que $\forall x, y$ se cumple que $sup(\{x, y\}) = x \ s \ y$ y que $inf(\{x, y\}) = x \ i \ y$. Veamos ambos casos:

- $sup(\{x, y\}) = x \ s \ y$:
  - Notemos que $x \ s \ y = x \ s \ x \ s \ y = x \ s \ (x \ s \ y)$ por reflexividad y asociatividad. Luego, por def. del orden parcial, tenemos que $x \leq x \ s \ y$. Del mismo modo, llegamos también a que $y \leq x \ s \ y$. Esto significa, entonces, que $x \ s \ y$ es una cota superior de $\{x, y\}$
  - Sea z una cota superior de $\{x, y\}$, entonces $x \leq z \land y \leq z$, por lo que por def. del orden parcial tenemos que $x \ s \ z = z \land y \ s \ z = z$. Ahora, notemos que:

$$\begin{aligned}
(x \ s \ z) \ s \ (y \ s \ z) &= z \ s \ z \\
(x \ s \ y) \ s \ (z \ s \ z) &= z \ s \ z && \text{Asociatividad y Conmutatividad} \\
(x \ s \ y) \ s \ z &= z && \text{Reflexividad}
\end{aligned}$$

    Luego, por def. del orden parcial, $x \ s \ y \leq z$, por lo que esto significa que es la menor cota superior de $\{x, y\}$

  Finalmente, entonces, esto significa por def. de supremo que $sup(\{x, y\}) = x \ s \ y$.
- $inf(\{x, y\}) = x \ i \ y$:
  - Notemos que $x \leq y \overset{def. \leq}{\iff} x \ s \ y = y \iff x \ i \ y \overset{prop.\ anterior}{=} x \ i \ (x \ s \ y) \overset{Absorción}{=} x$. Entonces, $x \leq y \iff x \ i \ y = x$ o, por conmutatividad, $y \ i \ x = x$ (def. alternativa del orden parcial).
  - Veamos que $x \ i \ y \overset{Reflexividad}{=} (x \ i \ x) \ i \ y = \overset{Asociatividad}{=} x \ i \ (x \ i \ y)$. Luego, por def. alternativa del orden parcial, $x \ i \ y \leq x$. Del mismo modo, llegamos a que $x \ i \ y \leq y$, por lo que por def. $x \ i \ y$ es una cota inferior de $\{x, y\}$

- Sea z una cota inferior de $\{x, y\}$, entonces por def. $z \leq x \wedge z \leq y$, por lo que por def. alternativa del orden parcial, $z\ i\ x = z \wedge z\ i\ y = z$. Ahora, notemos que:

$$\begin{aligned} (z\ i\ x)\ i\ (z\ i\ y) &= z\ i\ z \\ (x\ i\ y)\ i\ (z\ i\ z) &= z\ i\ z && \text{Asocitatividad y Conmutatividad} \\ (x\ i\ y)\ i\ z &= z && \text{Reflexividad} \end{aligned}$$

  Luego, por def. alternativa del orden parcial, tenemos que $z \leq x\ i\ y$, por lo que $x\ i\ y$ es la mayor cota inferior de $\{x, y\}$.

Finalmente, entonces, esto significa que por la def. de ínfimo, $inf(\{x, y\}) = x\ i\ y$.

Con todo ello, entonces, se demuestra el **Teorema de Dedekind ■**.

Ejercicio 2,5

$$\mathcal{F} : \{(L, \leq) : (L, \leq) \text{ es reticulado par}\} \rightarrow \{(L, s, i) : (L, s, i) \text{ es reticulado terna}\}$$
$$\mathcal{F}((L, \leq)) = (L, sup, inf)$$

Ejercicio 3

Es ver cuántos reticulados terna hay con universo $\{1, 2, 3\}$. Por el *Teorema de Dedekind*, es equivalente a ver la cantidad de reticulados pares con ese universo.

En total son 6 las posibilidades de reticulados pares para este universo dado que su diagrama de Hasse es un "palito" (es decir, de la forma o-o-o).

Ejercicio 4

Sea (L, s, i) un reticulado terna, entonces su orden parcial asociado es $\leq = \{(x, y) : x\ s\ y = y\}$. Ahora, si consideramos $\leq' = \{(x, y) : (y, x) \in \leq\} = \{(x, y) : x\ s\ y = x\}$, podemos notar que claramente es un orden parcial y se cumple que el supremo y el ínfimo de $(L, \leq)$ son el ínfimo y el supremo de $(L, \leq')$ respectivamente. Teniendo esto en cuenta, entonces $(L, \leq')$ es un reticulado par, de donde se llega a que (L, i, s) es un reticulado terna. ■

Respecto a la relación entre los órdenes parciales asociados, notar que uno es el contrario del otro (excepto por la reflexividad, obvio).

Ejercicio 5

Item A

Falso. Como s es una función, entonces un elemento de esta es una 2-UPLA.

Item B

Verdadero. En particular no puede ser vacío por def. ya que ni sería un poset. Ahora, si L tuviera más de un elemento, tendríamos que dados $x, y \in L : x < y$, entonces $x \ s \ y = y$. Sin embargo, como s también es el ínfimo, tendríamos que $x \ s \ y = x$, por lo que $x = y$ y se llega a un absurdo.

Finalmente, $|L| = 1$.

Item C

Impreciso. El orden parcial asociado a s, i depende del tipo de los elementos de L, por lo que no siempre marca una relación entre s e i (solo cuando los elementos de L son conjuntos).

Item D

Impreciso. $s : L^2 \to L$, por lo que no tiene sentido.

Ejercicio 6

Item A

Notemos que, sean $x, y, z \in \mathbb{R}$, $x \ i \ (y \ s \ z) = \min(x, \max(y, z))$. Ahora, es sencillo notar que esto es igual a $\max(\min(x, y), \min(x, z)) = (x \ i \ y) \ s \ (x \ i \ z)$ dado que:

- Si $inf(\{x, y, z\}) = x$, entonces claramente la 1era devuelve x y en la segunda nos queda $\max(x, x) = x$.
- Si $inf(\{x, y, z\}) = y$, entonces en la 1era nos queda $\min(x, z)$. Respecto a la segunda, tendríamos $\max(y, \min(x, z))$, pero al ser y el más chico, claramente queda $\min(x, z)$
- Si $inf(\{x, y, z\}) = z$, es análogo a lo anterior.

Con ello, se demuestra que $x \ i \ (y \ s \ z) = (x \ i \ y) \ s \ (x \ i \ z)$, por lo que $(\mathbb{R}, \max, \min)$ es distributivo $\blacksquare$.

Item B

Sean $X, Y, Z \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, es trivial ver que $X \ i \ (Y \ s \ Z) = (X \ i \ Y) \ s \ (X \ i \ Z)$ dado que es lo mismo que $X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$, lo cual es una propiedad de conjuntos que ya conocemos $\blacksquare$.

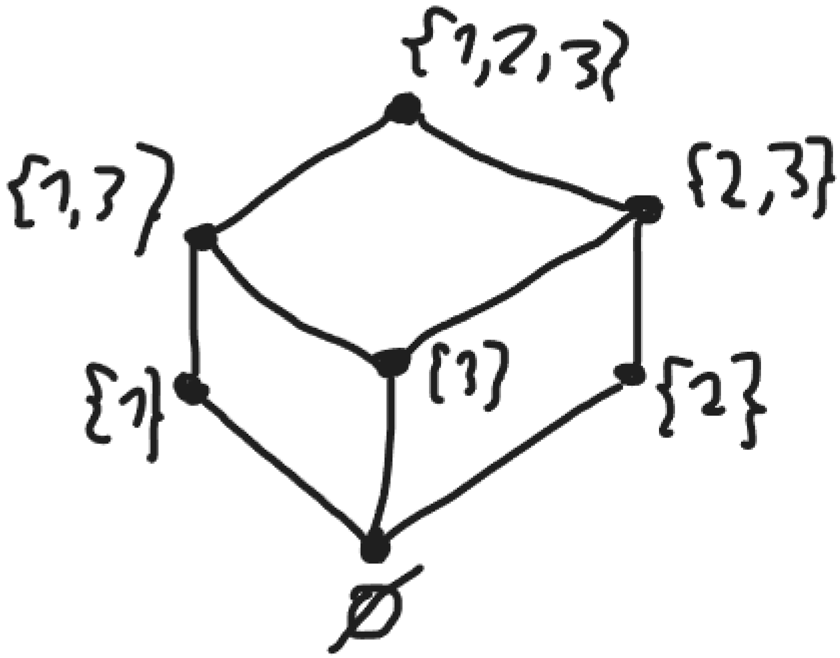
Ejercicio 7

Es claro de ver que $(\{1, 2, 3, 5, 30\}, s, i)$ no es un reticulado terna distributivo dado que $2\ i\ (3\ s\ 5) = 2\ i\ 30 = 2$ pero $(2\ i\ 3)\ s\ (2\ i\ 5) = 1\ s\ 1 = 1$. ■

Ejercicio 8

Notemos que $L = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$

Item A



Item B

Porque tiene esa forma el diagrama de Hasse

Item C

No sé a qué se refiere el enunciado

Item D

No es distributivo dado que $\{2, 3\}\ i\ (\{1\}\ s\ \{2\}) = \{2, 3\}\ i\ \{1, 2, 3\} = \{2, 3\}$ pero $(\{2, 3\}\ i\ \{1\})\ s\ (\{2, 3\}\ i\ \{2\}) = \emptyset\ s\ \{2\} = \{2\}$.

Ejercicio 9

Item A

Los subuniversos de $(\mathcal{P}(\{1,2\}), \cup, \cap)$ son $\mathcal{P}(\{1,2\}) - \{\emptyset\}$

Item B

Los subuniversos de $(\{1,2,3,6,12\}, mcm, mcd)$ son $[\{\{1,2,3,6,12\}, \{1,2,3,6\}\} \cup \mathcal{P}(\{1,2,6,12\}) \cup \mathcal{P}(\{1,3,6,12\})] - \{\emptyset\}$, siendo $2 + 2^4 + 2^3 - 1 = 25$ en total.

Los subreticulados terna correspondientes son $(L, mcm, mcd) \forall L \in \{\{1,2,3,6,12\}, \{1,2,3,6\}\}$ y $(L', \max, \min) \forall L' \in [\mathcal{P}(\{1,2,6,12\}) \cup \mathcal{P}(\{1,3,6,12\})] - \{\emptyset\}$.

Item C

Los subuniversos de $(\mathbb{R}, \max, \min)$ son $\mathcal{P}(\mathbb{R}) - \{\emptyset\}$.

Ejercicio 9,5

En el caso de los subuniversos de $(\mathbb{N}, \cup, \cap)$ con tres elementos, tenemos que son "palitos" en su diagrama de Hasse. Es decir, sean X, Y, Z los elementos, $X \subset Y \subset Z$.

En el caso de cuatro elementos, tenemos los "palitos" y también el rombo. Este último se describe de la siguiente forma: sean X, Y, W, Z los elementos, entonces $X \subset Y \subset W, X \subset Z \subset W$.

Ejercicio 9,7

Es la misma idea que los anteriores para resolverlo.

Ejercicio 10

Item A

Verdadero

Item B

Falso. Ya que no es cerrado en s porque $2\ s\ 3 = 6 \notin \{1, 2, 3, 12\}$

Item C

Falso. $Ti(S) = \text{CONJUNTO}$

Item D

Verdadero. Como S_1, S_2 son subuniversos de (L, s, i), entonces son cerrados por s, i. Luego, esto significa que:

- $\forall x, y \in S_1, x\ s\ y \in S_1$
- $\forall x, y \in S_2, x\ s\ y \in S_2$

Ahora, si tenemos $x, y \in S_1 \cap S_2$, por lo anterior sabemos que $x\ s\ y \in S_1$ y que $x\ s\ y \in S_2$, por lo que $x\ s\ y \in S_1 \cap S_2$. Luego, $S_1 \cap S_2$ es cerrado bajo s, i, por lo que es un subuniverso de este reticulado terna.

Item E

Falso. Por contraejemplo considerando $(\{1, 2, 3, 6\}, |)$, $S_1 = \{2\}$ y $S_2 = \{3\}$, ya que claramente $\{2, 3\}$ no es cerrado por mcm ni mcd.

Item F

Verdadero. Porque $L \subseteq L'$ en particular.

Item G

Falso. Simplemente tomar un ejemplo de los anteriores que no sea distributivo, y considerar un subreticulado con universo $\{x\} : x \in L'$, el cual sí es distributivo siempre.

Item H

Impreciso. No está definida la intersección para 3-UPLAS. Eso es para elementos de tipo CONJUNTO.

Item I

Verdadero. Como $\leq$ es el orden asociado de (L, s, i), por def.
$x \leq y \iff x\ s\ y = y \iff x\ i\ y = x$.

Ahora, $\leq \cap S^2 = \{(x, y) : x\ s\ y = y \wedge x, y \in S\}$. Como $(S, \leq \cap S^2)$ es un reticulado par, entonces está definido el supremo y el ínfimo para todo par de elementos de S. Luego, es claro ver que $x\ \hat{s}\ y \in S$ y que $x\ \hat{\imath}\ y \in S$ para $x, y \in S$, por lo que es cerrado en S bajo $\hat{s}, \hat{\imath}$. Luego, por def. $(S, \hat{s}, \hat{\imath})$ es subreticulado terna de (L, s, i).

Ejercicio 11

Vamos a probar el lema que dice que: Si $F : (L, s, i) \to (L', s', i')$ es un homomorfismo biyectivo, entonces F es un isomorfismo.

Como F es un homomorfismo biyectivo, entonces solo tenemos que demostrar que F^{-1} es un homomorfismo para ver que F es un isomorfismo.

Por ello mismo, entonces, notemos que por def. de homomorfismo, sean $x, y \in L$ se cumple que $F(x\ s\ y) = F(x)\ s'\ F(y)$. Si aplicamos la inversa a ambos lados tenemos $F^{-1}(F(x\ s\ y)) = x\ s\ y = F^{-1}(F(x))\ s\ F^{-1}(F(y)) = F^{-1}(F(x)\ s'\ F(y))$. Ahora, sean $a = F(x), b = F(y) \in L'$, entonces es lo mismo que $F^{-1}(a\ s'\ b) = F^{-1}(a)\ s\ F^{-1}(b)$.

Teniendo esto último en cuenta, como F es biyectiva, esto implica que existe una relación uno-a-uno entre los elementos de los reticulados terna, por lo que $\forall a, b \in L', F^{-1}(a\ s'\ b) = F^{-1}(a)\ s\ F^{-1}(b)$. De forma análoga llegamos a lo mismo pero con los ínfimos. Luego, entonces, por def. F^{-1} es un homomorfismo.

Finalmente, al ser F un homomorfismo biyectivo con F^{-1} homomorfismo, por def. F es un isomorfismo, por lo que $(L, s, i) \cong (L', s', i')$. $\blacksquare$

Ejercicio 12

Vamos a probar el lema que dice que: Sean $(L, s, i), (L', s', i')$ reticulados terna, $(L, \leq), (L', \leq')$ los posets asociados y $F : L \to L'$ una función, entonces F es un isomorfismo de (L, s, i) en $(L', s', i') \iff F$ es un isomorfismo de $(L, \leq)$ en $(L', \leq')$.

Veamos que F isomorfismo de (L, s, i) en $(L', s', i') \overset{\text{def. isomorfismo}}{\iff} F$ es homomorfismo biyectivo y F^{-1} es un homomorfismo
$\overset{\text{def. homomorfismo}}{\iff} \forall x, y \in L, F(x\ s\ y) = F(x)\ s'\ F(y) \wedge F(x\ i\ y) = F(x)\ i'\ F(y)$.

Ahora, con esto en cuenta, notemos que sean $x, y \in L$, entonces
$x \leq y \iff x\ s\ y = y \wedge x\ i\ y = x \iff F(y) = F(x)\ s'\ F(y) \wedge F(x) = F(x)\ i'\ F(y) \iff x \leq' y$
. Luego, por def. llegamos a que F es un isomorfismo de $(L, \leq)$ en $(L', \leq')$ por def. dado que es biyectiva y F, F^{-1} son homomorfismos. $\blacksquare$

Ejercicio 12,3

Vamos a demostrar que si $F : (L, s, i) \to (L', s', i')$ es un homomorfismo suryectivo y (L, s, i) es distributivo, entonces (L', s', i') es distributivo.

Para ver esto, digamos que tenemos $x, y, z \in L'$. Como F es suryectiva, $\exists a, b, c \in L : x = F(a), y = F(b), z = F(c)$. Luego, notemos que:

$$
\begin{aligned}
x\ i'\ (y\ s'\ z) &= F(a)\ i'\ (F(b)\ s'\ F(c)) \\
&= F(a)\ i'\ F(b\ s\ c) && \text{(def. homomorfismo)} \\
&= F(a\ i\ (b\ s\ c)) && \text{(def. homomorfismo)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(x\ i'\ y)\ s'\ (x\ i'\ z) &= (F(a)\ i'\ F(b))\ s'\ (F(a)\ i'\ F(c)) \\
&= F(a\ i\ b)\ s'\ F(a\ i\ c) && \text{(def. homomorfismo)} \\
&= F((a\ i\ b)\ s\ (a\ i\ c)) && \text{(def. homomorfismo)}
\end{aligned}
$$

Con ello, entonces, tenemos que si (L, s, i) es distributivo, entonces $a\ i\ (b\ s\ c) = (a\ i\ b)\ s\ (a\ i\ c)$, por lo que $x\ i'\ (y\ s'\ z) = (x\ i'\ y)\ s'\ (x\ i'\ z)$, por lo que por def. (L', s', i') es distributivo. ■

Respecto al caso del isomorfismo, como F, F^{-1} son homomorfismos suryectivos, entonces tenemos que:

$$
\begin{gathered}
(L, s, i) \text{ distributivo} \Rightarrow (L', s', i') \text{ distributivo} \\
(L', s', i') \text{ distributivo} \Rightarrow (L, s, i) \text{ distributivo}
\end{gathered}
$$

Por lo que $(L, s, i) \text{ distributivo} \iff (L', s', i') \text{ distributivo}$ ■.

Ejercicio 12,6

Notemos que si F es un homomorfismo suryectivo entre los reticulados terna, entonces con la misma idea del lema 4 llegamos a que F es un homomorfismo suryectivo de los posets asociados. Luego, como los posets asociados $(L, \leq), (L', \leq')$ cumplen que si a es máximo de $(L, \leq)$ entonces $F(a)$ es máximo de (L', s', i'), podemos demostrar esta propiedad. ■

Ejercicio 13

Entre (a) y (b).

Ejercicio 14

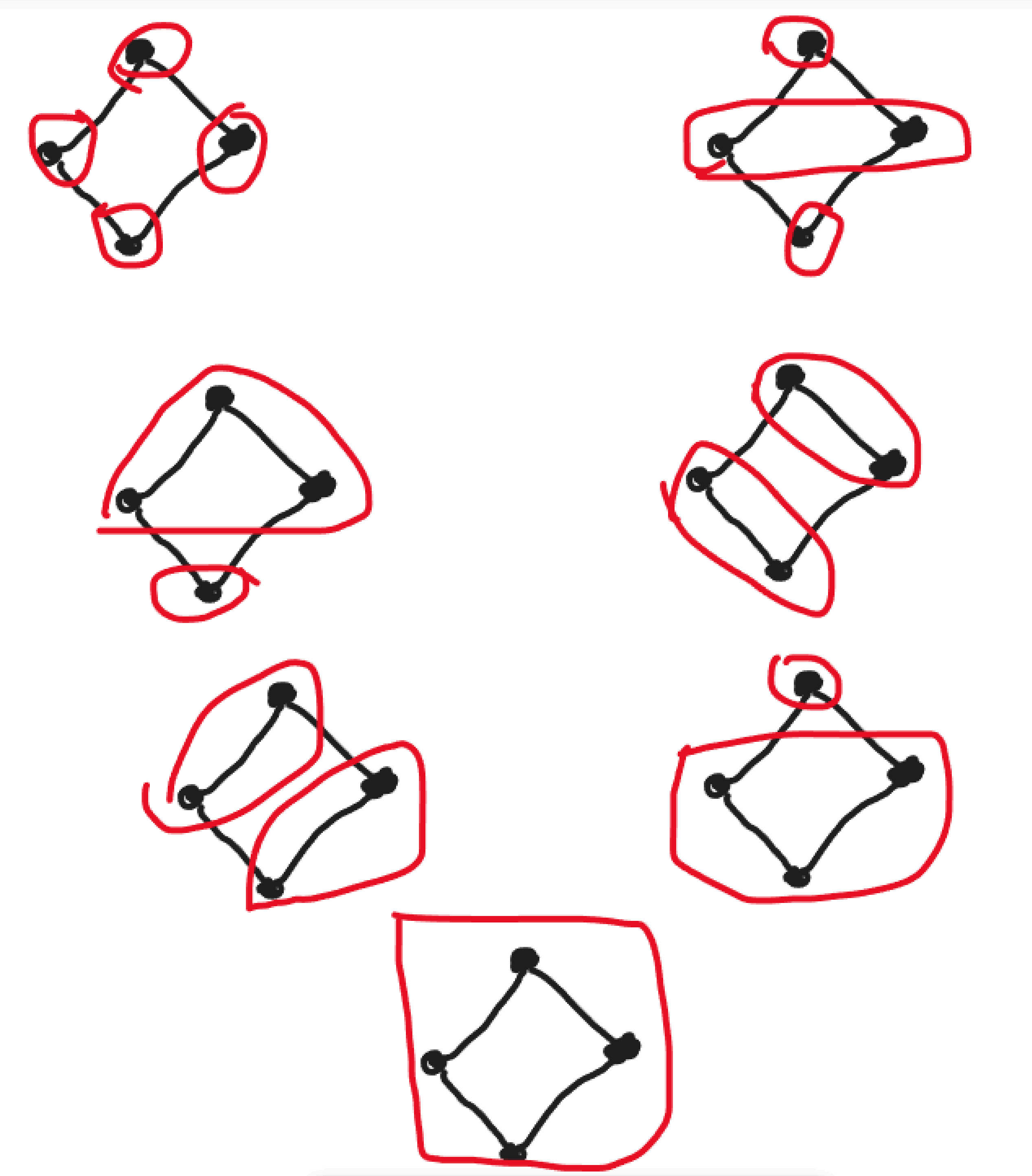
Notemos que $\tilde{s}$ no es ambigua dado que tenemos:

$$\begin{aligned} x/\theta \,\tilde{s}\, y/\theta &= \{x' \in L : x\theta x'\} \,\tilde{s}\, \{y' \in L : y\theta y'\} && \text{por def.} \\ &= \{x' \,\tilde{s}\, y' : x', y' \in L \wedge x\theta x' \wedge y\theta y'\} \\ &= \{x' \,\tilde{s}\, y' : x', y' \in L \wedge (x \; s \; y)\theta(x' \; s \; y)\} && \text{por prop. (1)} \\ &= (x \; s \; y)/\theta && \text{por def.} \end{aligned}$$

Del mismo modo, mostramos que $\tilde{i}$ tampoco es ambigua.

Ejercicio 15

La idea es hacerlo con los diagramas de Hasse y luego darlos de forma explícita:

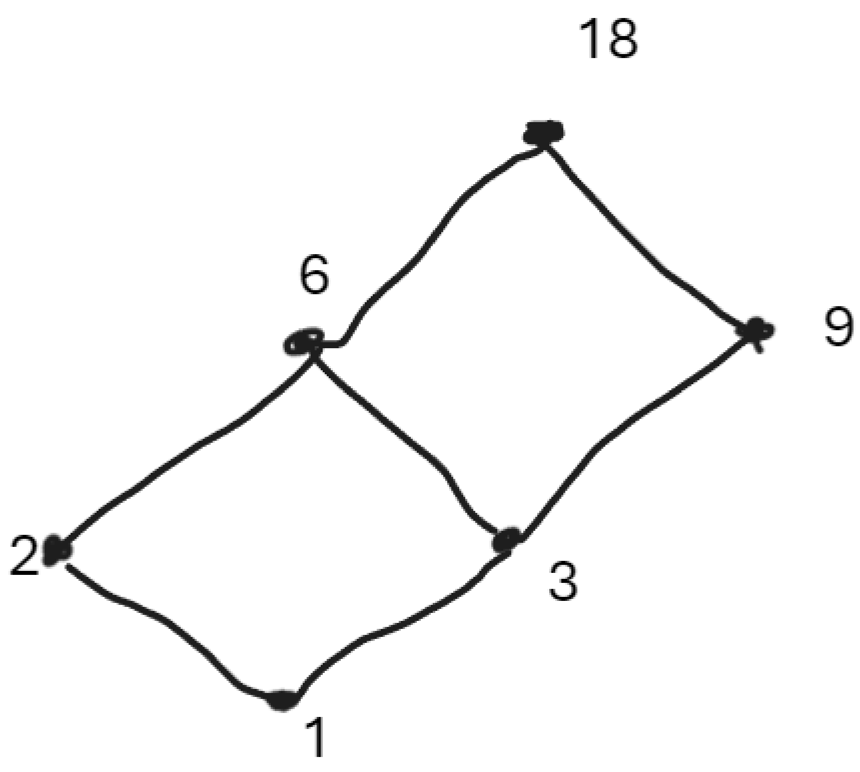


Con ello, podemos ver las siguientes congruencias (dadas por la partición):

- $\{\{\emptyset\},\{\{a\}\},\{\{b\}\},\{\{a,b\}\}\}$ cuyo reticulado terna cociente es isomorfo a $(\{1,2,3,6\}, mcm, mcd)$.
- $\{\{\emptyset\},\{\{a\},\{b\}\},\{\{a,b\}\}\}$ cuyo reticulado terna cociente es isomorfo a $(\{1,2,3\}, \max, \min)$
- $\{\{\emptyset\},\{\{a\},\{b\},\{a,b\}\}\}$ cuyo reticulado terna cociente es isomorfo a $(\{1,2\}, \max, \min)$
- $\{\{\emptyset,\{a\}\},\{\{b\},\{a,b\}\}\}$ cuyo reticulado terna cociente es isomorfo a $(\{1,2\}, \max, \min)$
- $\{\{\emptyset,\{a\},\{b\}\},\{\{a,b\}\}\}$ cuyo reticulado terna cociente es isomorfo a $(\{1,2\}, \max, \min)$
- $\{\{\emptyset,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}\}$ cuyo reticulado terna cociente es isomorfo a $(\{1\}, \max, \min)$

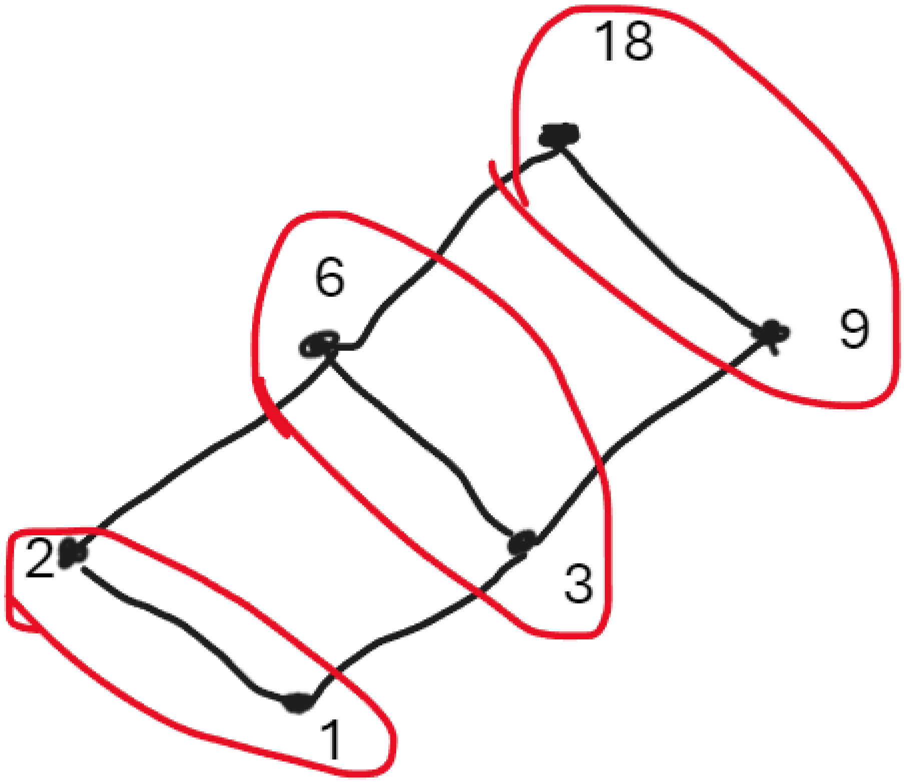
Ejercicio 15,5

Item A



Item B

Tiene sentido porque el diagrama de Hasse con la congruencia nos queda así:



Item C

$(L, mcm, mcd)/\theta = (\{\{1,2\},\{3,6\},\{9,18\}\}, \widetilde{s}, \widetilde{i})$ donde:

- $\{1,2\} \ \widetilde{s} \ \{3,6\} = \{3,6\}$ y $\{1,2\} \ \widetilde{i} \ \{3,6\} = \{1,2\}$
- $\{1,2\} \ \widetilde{s} \ \{9,18\} = \{9,18\}$ y $\{1,2\} \ \widetilde{i} \ \{9,18\} = \{1,2\}$
- $\{3,6\} \ \widetilde{s} \ \{9,18\} = \{9,18\}$ y $\{3,6\} \ \widetilde{i} \ \{9,18\} = \{3,6\}$

Item D

$$\begin{aligned}\widetilde{\leq} = \{&(\{1,2\},\{1,2\}),(\{1,2\},\{3,6\}),(\{1,2\},\{9,18\}),\\ &(\{3,6\},\{3,6\}),(\{3,6\},\{9,18\}),(\{9,18\},\{9,18\})\}\end{aligned}$$

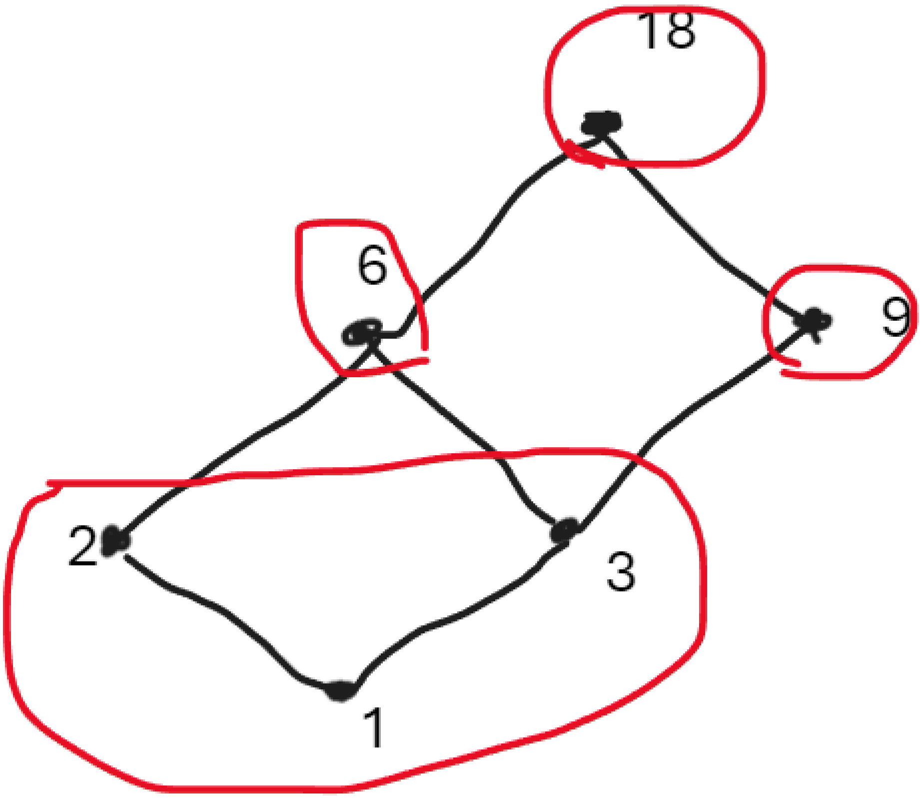
Item E

El isomorfismo está dado por:

$$\begin{aligned}\{1,2\} &\leftrightarrow 0\\ \{3,6\} &\leftrightarrow 1\\ \{9,18\} &\leftrightarrow 2\end{aligned}$$

Item F

La congruencia δ está dada por la partición $\{\{1,2,3\},\{6\},\{9\},\{18\}\}$ cuyo diagrama de Hasse es:



Y que, claramente, es isomorfo al rombo de $(\mathcal{P}(\{a,b\}),\cup,\cap)$.

Ejercicio 16

Queremos demostrar la siguiente propiedad: Sea (L,s,i) un reticulado terna cuyo máximo es 1, entonces si θ es una congruencia sobre (L,s,i), $1/\theta$ es el máximo de $(L,s,i)/\theta$.

Para ver esto, notemos que como 1 es el máximo de (L,s,i), entonces significa que $x \leq 1 \forall x \in L$. Ahora, por def. del orden asociado, sabemos que eso implica que $x\ s\ 1 = 1 \forall x \in L$.

Luego, sea θ la congruencia y sea $y \in L$, por def. de congruencia sabemos que $y/\theta\ s\ 1/\theta = (y\ s\ 1)/\theta = 1/\theta$ (por lo visto antes). Ahora, por def. del orden asociado a un reticulado terna, esto claramente implica que $y/\theta \tilde{\leq} 1/\theta$. Como esto se hizo $\forall y \in L$, quiere decir por def. que $1/\theta$ es el máximo del cociente. ■

Ejercicio 17

Por el ejercicio anterior, y haciéndolo de forma análoga para el ínfimo, tenemos que $1/\theta$ y $0/\theta$ son el máximo y el mínimo, respectivamente, del cociente de (L,s,i). Con ello, por def. de congruencia, como $(0,1) \in \theta$, entonces $0/\theta = 1/\theta$.

Ahora, como son mínimo y máximo, tenemos que $\forall x \in L, 0/\theta \tilde{\leq} x/\theta \tilde{\leq} 1/\theta$, pero como $0/\theta = 1/\theta$, entonces $x/\theta = 0/\theta = 1/\theta \forall x \in L$. Luego, esto quiere decir que $x\theta y \forall x, y \in L$, por lo que $\theta = L^2$ y se demuestra. ■

Ejercicio 18

Vamos a demostrar el lema que dice que: Si $F : (L, s, i) \to (L', s', i')$ es un homomorfismo, entonces $ker(F)$ es una congruencia sobre (L, s, i).

Para demostrar que $\theta = ker(F)$, tenemos que demostrar que dados $x, x', y, y' \in L$, entonces $x\theta x' \wedge y\theta y' \Rightarrow (x \ s \ y)\theta(x' \ s \ y')$. Por ello, digamos que tenemos estos $x, x', y, y' \in L$ que cumplen la precondición y veamos que, como $ker(F) = \{(a, b) \in L^2 : F(a) = F(b)\}$, entonces $F(x) = F(x')$ y $F(y) = F(y')$.

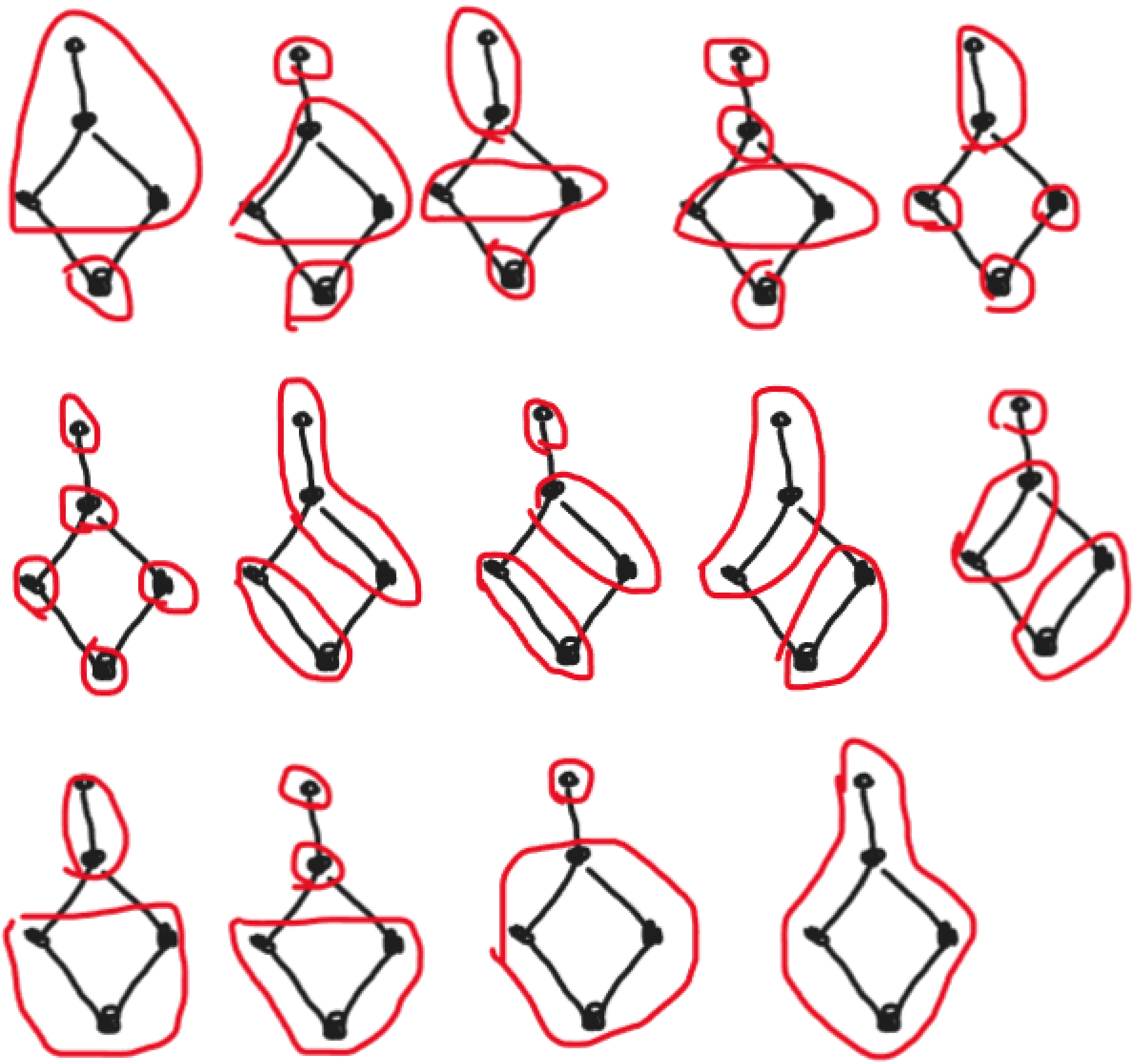
Teniendo esto último en cuenta, entonces:

$$\begin{aligned} F(x \ s \ y) &= F(x) \ s' \ F(y) && \text{def. de homomorfismo} \\ &= F(x') \ s' \ F(y') && \text{lo visto antes} \\ &= F(x' \ s \ y') && \text{def. de homomorfismo} \end{aligned}$$

Luego, como $F(x \ s \ y) = F(x' \ s \ y')$, entonces $(x \ s \ y)\theta(x' \ s \ y')$ por lo que se demuestra que $\theta = ker(F)$ es una congruencia de (L, s, i). ■.

Ejercicio 19

Las posibles congruencias de este reticulado terna las podemos ver gráficamente como particiones en el diagrama de Hass:



Ejercicio 20

Las posibles congruencias del diamante las obtenemos del ejercicio anterior sin considerar el elemento 12.

Ejercicio 21

Vamos a demostrar la propiedad que dice que: Sea θ una congruencia del reticulado terna (L, s, i), entonces:

- Si $c \in L/\theta$, entonces c es un subuniverso de (L, s, i)
- Si $c \in L/\theta$, entonces c es un subconjunto convexo de (L, s, i). Es decir, que $\forall x, y, z \in L$, $((x, y \in c \wedge x \leq z \leq y) \Rightarrow z \in c)$.

Item A

Digamos $x, y \in c$. Como $c \in L/\theta$ y θ es una congruencia de (L, s, i), entonces $x\theta y$. Ahora, como obviamente $x\theta x$, por definición de congruencia tenemos que $(x\ s\ x)\theta(x\ s\ y)$ y que $(x\ i\ x)\theta(x\ i\ y)$ por lo que por reflexividad de s, i llegamos a que $x\theta(x\ s\ y)$ y $x\theta(x\ i\ y)$. Finalmente, esto implica que $(x\ s\ y), (x\ i\ y) \in c$, por lo que c es cerrado por s, i y por def. es un subuniverso de (L, s, i). Con esto, se demuestra. ■

Item B

Sean $x, y, z \in L : x \leq z \leq y \wedge x, y \in c$ donde $c \in L/\theta$, entonces por def. del orden parcial asociado a (L, s, i) tenemos que $x\ s\ z = z \wedge z\ s\ y = y$.

Teniendo esto en cuenta, como $x\theta y \wedge z\theta z$, como θ es una congruencia de (L, s, i), entonces por def. se cumple que $(x\ s\ z)\theta(y\ s\ z)$. Luego, tomando el resultado anterior, esto es lo mismo que $z\theta y$, por lo que $z/\theta = y/\theta = x/\theta$ y, por ende, $z \in c$ demostrándose, así, que c es un subconjunto convexo de (L, s, i). ■

Ejercicio 22

Item A

Verdadero. Trivial de ver si consideramos δ dado por la partición $\{S\} \cup (\bigcup_{x \in L : x \notin S} \{x\})$, la cual claramente es una congruencia de (L, s, i).

Item B

Verdadero. Vamos a hacer la demostración formal a continuación.

Vamos a demostrar la propiedad que dice: Sea (L, s, i) un reticulado terna distributivo y θ una congruencia sobre él, entonces su cociente es distributivo.

Para ello, sean $a, b, c \in L/\theta$, sabemos que $\exists x, y, z \in L : a = x/\theta, b = y/\theta, c = z/\theta$. Luego, veamos que:

$$\begin{aligned}
a\ \widetilde{i}\ (b\ \widetilde{s}\ c) &= x/\theta\ \widetilde{i}\ (y/\theta\ \widetilde{s}\ z/\theta) & \\
&= x/\theta\ \widetilde{i}\ (y\ s\ z)/\theta & \text{prop. de congruencia} \\
&= (x\ i\ (y\ s\ z))/\theta & \text{prop. de congruencia} \\
&= ((x\ i\ y)\ s\ (x\ i\ z))/\theta & \text{distributividad de } (L, s, i) \\
&= (x\ i\ y)/\theta\ \widetilde{s}\ (x\ i\ z)/\theta & \text{prop. de congruencia} \\
&= (x/\theta\ \widetilde{i}\ y/\theta)\ \widetilde{s}\ (x/\theta\ \widetilde{i}\ z/\theta) & \text{prop. de congruencia} \\
&= (a\ \widetilde{i}\ b)\ \widetilde{s}\ (a\ \widetilde{i}\ c) &
\end{aligned}$$

Finalmente, entonces, por def. tenemos que $(L/\theta, \widetilde{s}, \widetilde{i}) = (L, s, i)/\theta$ es distributivo, por lo que se demuestra. ■

Item C

Falso. Es trivial ver que no es cierto si se considera la partición dada por $\{L\}$ y $u = 0$ siendo $|L| > 1$.

Ejercicio 23

Vamos a demostrar la propiedad que dice que: Sea (L, s, i) un reticulado terna y θ una congruencia de (L, s, i), entonces dados $c, c' \in L/\theta$ se cumple que $c \tilde{\leq} c' \iff \exists x \in c \wedge y \in c' : x \leq y$.

Para demostrarlo, vamos a ver los dos casos del sii:

- Caso $\Rightarrow$: Sean $c, c' \in L/\theta : c \tilde{\leq} c'$, por def. del orden parcial, significa que $c \; \tilde{s} \; c' = c'$. Ahora, como $\exists x, y \in L : x/\theta = c \wedge y/\theta = c'$, es claro notar que $x \in c, y \in c'$. Luego, tenemos que $x/\theta \; \tilde{s} \; y/\theta = (x \; s \; y)/\theta$ por def. de congruencia, lo que significa que $y/\theta = (x \; s \; y)/\theta$. Veamos los posibles casos:

    - Si $x\theta y$, o bien $x \leq y$ o bien $y \leq x$, pero se cumple dado que $c = c'$ y $x, y \in c$.
    - Sino, es claro que $y = x \; s \; y$, lo que implica que $x \leq y$.

  Con ello, se demuestra la ida. ■
- Caso $\Leftarrow$: Sean $c, c' \in L : (\exists x, y \in L : c = x/\theta \wedge c' = y/\theta \wedge x \leq y)$, entonces por def. del orden parcial asociado, $x \; s \; y = y$. Luego, claramente significa que $(x \; s \; y)/\theta = y/\theta$. Por propiedad de congruencia, llegamos a que $y/\theta = (x \; s \; y)/\theta = x/\theta \; \tilde{s} \; y/\theta$. Luego, por def. del orden parcial asociado, $x/\theta \tilde{\leq} y/\theta$, por lo que $c \tilde{\leq} c'$ y se demuestra la vuelta. ■

Habiendo demostrado ida y vuelta, se demuestra la propiedad por completo. ■