Guía 11:

Notación declaratoria para términos

- Si t es un término de tipo τ, entonces escribiremos $t =_d t(v_1, \ldots, v_n)$ para declarar que $v_1, \ldots, v_n$ son variables distintas (con $n \geq 1$) y tales que toda variable que ocurre en t pertenece a $\{v_1, \ldots, v_n\}$ (no necesariamente v_j debe ocurrir en t).

Notación declaratoria para fórmulas

- Si φ es una fórmula de tipo τ, entonces escribiremos $\varphi =_d \varphi(v_1, \ldots, v_n)$ para declarar que $v_1, \ldots, v_n$ son variables distintas (con $n \geq 1$) y tales que $Li(\varphi) \subseteq \{v_1, \ldots, v_n\}$

Elementos definibles

- Sea A un modelo de tipo τ, diremos que un elemento a de A es **definible** en $\mathbf{A}$ si hay una fórmula $\varphi =_d \varphi(v)$ tal que $\mathbf{A} \models \varphi[a]$ y para cada $b \in A - \{a\}$ se tiene que $\mathbf{A} \not\models \varphi[b]$
  - Es decir, a es el único elemento de A que cumple $\mathbf{A} \models \varphi[a]$
  - En este caso, además, diremos que φ **define** a en $\mathbf{A}$
- Si $\mathbf{A}$ es un modelo de tipo τ y $a \in A$ es tal que $F(a) \neq a$, para algún isomorfismo $F : \mathbf{A} \to \mathbf{A}$, entonces a **no es definible** en $\mathbf{A}$

Manejo técnico de la notación declaratoria

- *Lectura única de términos declarados*: Sea τ un tipo cualquiera y supongamos $t \in T^\tau$, si $t =_d t(v_1, \ldots, v_n)$, entonces se da una y solo una de las siguientes:
  1. $t = c$ para algún $c \in \mathcal{C}$
  2. $t = v_j$ para algún j
  3. $t = f(t_1, \ldots, t_m)$ con $f \in \mathcal{F}_m$, $t_1, \ldots, t_m \in T^\tau$ únicos
- *Carácter recursivo de la notación $t^{\mathbf{A}}[a_1, \ldots, a_n]$*: Sea τ un tipo cualquiera, $t \in T^\tau$, $t =_d t(v_1, \ldots, v_n)$, $\mathbf{A}$ un modelo de tipo τ y $a_1, \ldots, a_n \in A$, se tiene que:
  1. Si $t = c$, entonces $t^{\mathbf{A}}[a_1, \ldots, a_n] = c^{\mathbf{A}}$
  2. Si $t = v_j$, entonces $t^{\mathbf{A}}[a_1, \ldots, a_n] = a_j$
  3. Si $t = f(t_1, \ldots, t_m)$ con $f \in \mathcal{F}_m$ y $t_1, \ldots, t_m \in T^\tau$, entonces $t^{\mathbf{A}}[a_1, \ldots, a_n] = f^{\mathbf{A}}(t_1^{\mathbf{A}}[a_1, \ldots, a_n], \ldots, t_m^{\mathbf{A}}[a_1, \ldots, a_n])$
- *Lectura única de fórmulas declaradas*: Sea τ un tipo cualquiera, $\varphi \in F^\tau$ y $\varphi =_d \varphi(v_1, \ldots, v_n)$, entonces se da una y solo una de las siguientes:
  1. $\varphi = (t \equiv s)$, con $t, s \in T^\tau$ únicos
  2. $\varphi = r(t_1, \ldots, t_m)$, con $r \in \mathcal{R}_m$ y $t_1, \ldots, t_m \in T^\tau$ únicos
  3. $\varphi = (\varphi_1 \wedge \varphi_2)$, con $\varphi_1, \varphi_2 \in F^\tau$ únicas
  4. $\varphi = (\varphi_1 \vee \varphi_2)$, con $\varphi_1, \varphi_2 \in F^\tau$ únicas
  5. $\varphi = (\varphi_1 \to \varphi_2)$, con $\varphi_1, \varphi_2 \in F^\tau$ únicas
  6. $\varphi = (\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2)$, con $\varphi_1, \varphi_2 \in F^\tau$ únicas
  7. $\varphi = \neg\varphi_1$, con $\varphi_1 \in F^\tau$ única
  8. $\varphi = \forall v_j \varphi_1$, con $v_j \in \{v_1, \ldots, v_n\}$ y $\varphi_1 \in F^\tau$ únicas
  9. $\varphi = \forall v \varphi_1$, con $v \in Var - \{v_1, \ldots, v_n\}$ y $\varphi_1 \in F^\tau$ únicas
  10. $\varphi = \exists v_j \varphi_1$, con $v_j \in \{v_1, \ldots, v_n\}$ y $\varphi_1 \in F^\tau$ únicas
  11. $\varphi = \exists v \varphi_1$, con $v \in Var - \{v_1, \ldots, v_n\}$ y $\varphi_1 \in F^\tau$ únicas
- *Carácter recursivo de la notación $\mathbf{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n]$*: Sea $\varphi =_d \varphi(v_1, \ldots, v_n), \mathbf{A} = (A, i)$ un modelo de tipo τ y sean $a_1, \ldots, a_n \in A$, entonces:
  1. Si $\varphi = (t \equiv s)$, entonces $\mathbf{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n]$ si y solo si $t^{\mathbf{A}}[a_1, \ldots, a_n] = s^{\mathbf{A}}[a_1, \ldots, a_n]$
  2. Si $\varphi = r(t_1, \ldots, t_m)$, entonces $\mathbf{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n]$ si y solo si $(t_1^{\mathbf{A}}[a_1, \ldots, a_n], \ldots, t_m^{\mathbf{A}}[a_1, \ldots, a_n]) \in r^{\mathbf{A}}$

3. Si $\varphi = (\varphi_1 \wedge \varphi_2)$, entonces $\mathbf{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n]$ si y solo si $\mathbf{A} \models \varphi_1[a_1, \ldots, a_n]$ y $\mathbf{A} \models \varphi_2[a_1, \ldots, a_n]$
4. Si $\varphi = (\varphi_1 \vee \varphi_2)$, entonces $\mathbf{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n]$ si y solo si $\mathbf{A} \models \varphi_1[a_1, \ldots, a_n]$ o $\mathbf{A} \models \varphi_2[a_1, \ldots, a_n]$
5. Si $\varphi = (\varphi_1 \rightarrow \varphi_2)$, entonces $\mathbf{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n]$ si y solo si $\mathbf{A} \not\models \varphi_1[a_1, \ldots, a_n]$ o $\mathbf{A} \models \varphi_2[a_1, \ldots, a_n]$
6. Si $\varphi = (\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2)$, entonces $\mathbf{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n]$ si y solo si $\mathbf{A} \models \varphi_1[a_1, \ldots, a_n]$ y $\mathbf{A} \models \varphi_2[a_1, \ldots, a_n]$ o $\mathbf{A} \not\models \varphi_1[a_1, \ldots, a_n]$ y $\mathbf{A} \not\models \varphi_2[a_1, \ldots, a_n]$
7. Si $\varphi = (\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2)$, entonces $\mathbf{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n]$ si y solo si ya sea $\mathbf{A} \models \varphi_1[a_1, \ldots, a_n]$ y $\mathbf{A} \models \varphi_2[a_1, \ldots, a_n]$, o bien $\mathbf{A} \not\models \varphi_1[a_1, \ldots, a_n]$ y $\mathbf{A} \not\models \varphi_2[a_1, \ldots, a_n]$
8. Si $\varphi = \neg\varphi_1$, entonces $\mathbf{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n]$ si y solo si $\mathbf{A} \not\models \varphi_1[a_1, \ldots, a_n]$
9. Si $\varphi = \forall v_j \varphi_1$, entonces $\mathbf{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n]$ si y solo si $\mathbf{A} \models \varphi_1[a_1, \ldots, a, \ldots, a_n] \forall a \in A$
10. Si $\varphi = \forall v \varphi_1$ con $v \notin \{v_1, \ldots, v_n\}$, entonces $\mathbf{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n]$ si y solo si $\mathbf{A} \models \varphi_1[a_1, \ldots, a_n, a] \forall a \in A$
11. Si $\varphi = \exists v_j \varphi_1$, entonces $\mathbf{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n]$ si y solo si $\mathbf{A} \models \varphi_1[a_1, \ldots, a, \ldots, a_n]$ para algún $a \in A$
12. Si $\varphi = \exists v \varphi_1$ con $v \notin \{v_1, \ldots, v_n\}$, entonces $\mathbf{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n]$ si y solo si $\mathbf{A} \models \varphi_1[a_1, \ldots, a_n, a]$ para algún $a \in A$

- Sea $F : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ un homomorfismo y $t =_d t(v_1, \ldots, v_n)$, entonces $F(t^{\mathbf{A}}[a_1, \ldots, a_n]) = t^{\mathbf{B}}[F(a_1), \ldots, F(a_n)]$ para cada $a_1, \ldots, a_n \in A$
- Sea $F : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ un isomorfismo y $\varphi =_d \varphi(v_1, \ldots, v_n) \in F^\tau$, entonces $\mathbf{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n] \iff \mathbf{B} \models \varphi[F(a_1), \ldots, F(a_n)]$ para cada $a_1, \ldots, a_n \in A$
- Sea $F : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ un homomorfismo sobre y $\varphi =_d \varphi(v_1, \ldots, v_n) \in F^\tau$ tal que los símbolos $\neg \ \rightarrow \leftrightarrow$ no ocurren en φ, entonces $\mathbf{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n]$ implica $\mathbf{B} \models \varphi[F(a_1), \ldots, F(a_n)]$ para cada $a_1, \ldots, a_n \in A$.

Teoremas de reemplazo

- *Teorema de reemplazo para términos* Sean $t =_d t(w_1, \ldots, w_k), s_1 =_d s_1(v_1, \ldots, v_n), \ldots, s_k =_d s_k(v_1, \ldots, v_n)$, entonces:
  - Todas las variables de $t(s_1, \ldots, s_k)$ están en $\{v_1, \ldots, v_n\}$
  - Si declaramos $t(s_1, \ldots, s_k) =_d t(s_1, \ldots, s_k)(v_1, \ldots, v_n)$, entonces $\forall \mathbf{A}$ y $a_1, \ldots, a_n \in A$ se tiene que $t(s_1, \ldots, s_k)^{\mathbf{A}}[a_1, \ldots, a_n] = t^{\mathbf{A}}[s_1^{\mathbf{A}}[a_1, \ldots, a_n], \ldots, s_k^{\mathbf{A}}[a_1, \ldots, a_n]]$
- *Variable sustituible*: Diremos que v es **sustituible** por w en φ cuando ninguna ocurrencia libre de v en φ sucede dentro de una ocurrencia de una subfórmula de la forma $Qw\psi$ en φ
  - Dado un término t, diremos que v es **sustituible** por t en φ cuando v sea sustituible en φ por cada variable que ocurre en t
  - *Propiedades*:
    1. Si φ es atómica, entonces v es sustituible por w en φ
    2. Si $\varphi = (\varphi_1 \eta \varphi_2)$, entonces v es sustituible por w en φ sii v es sustituible por w en φ_1 y en φ_2
    3. Si $\varphi = \neg\varphi_1$, entonces v es sustituible por w en φ sii v es sustituible por w en φ_1
    4. Si $\varphi = Qv\varphi_1$, entonces v es sustituible por w n φ
    5. Si $\varphi = Qw\varphi$ y $v \in Li(\varphi_1)$, entonces v **no** es sustituible por w en φ
    6. Si $\varphi = Qw\varphi$ y $v \notin Li(\varphi_1)$, entonces v es sustituible por w en φ
    7. Si $\varphi = Qu\varphi_1$ con $u \neq v, w$, entonces v es sustituible por w en φ sii v es sustituible por w en φ_1
- *Teorema de reemplazo para fórmulas*: Supongamos $\varphi =_d \varphi(w_1, \ldots, w_k), t_1 =_d (v_1, \ldots, v_n), \ldots, t_k =_d t_k(v_1, \ldots, v_n)$ y que cada w_j es sustituible por t_j en φ, entonces:
  1. $Li(\varphi(t_1, \ldots, t_k)) \subseteq \{v_1, \ldots, v_n\}$
  2. Si declaramos $\varphi(t_1, \ldots, t_k) =_d \varphi(t_1, \ldots, t_k)(v_1, \ldots, v_n)$, entonces para cada estructura $\mathbf{A}$ y $\vec{a} \in A^n$ se tiene $\mathbf{A} \models \varphi(t_1, \ldots, t_k)[\vec{a}] \iff \mathbf{A} \models \varphi[t_1^{\mathbf{A}}[\vec{a}], \ldots, t_k^{\mathbf{A}}[\vec{a}]]$