

Guía 1: Relaciones de equivalencia y particiones

Relaciones de equivalencia

- **Relación binaria:** sea A un conjunto, R es una relación binaria sobre A si es un subconjunto de A^2
 - Si R es una relación binaria sobre A y $A \subseteq B$, entonces R es una relación binaria sobre B
 - *Propiedades que puede tener (a destacar):*
 - *Reflexividad:* $xRx \forall x \in A$
 - *Transitividad:* $xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz \forall x, y, z \in A$
 - *Simetría:* $xRy \Rightarrow yRx \forall x, y \in A$
 - *Asimetría:* $xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y \forall x, y \in A$
- **Relación de equivalencia:** sea A un conjunto, R es una relación de equivalencia sobre A si es una relación binaria sobre A , la cual es reflexiva, transitiva y simétrica (con respecto a A).
- **Clases de equivalencia:** sea R una relación de equivalencia sobre A y $a \in A$, definimos la clase de equivalencia de a con respecto a R como $a/R = \{b \in A : aRb\}$
 - **Cociente de A por R :** $A/R = \{a/R : a \in A\}$
 - **Proyección canónica (respecto de R):** $\pi_R : A \rightarrow A/R$ con $\pi_R(a) = a/R \forall a \in A$.
 - *Propiedades:* Sea R una relación de equivalencia sobre A , y $a, b \in A$, entonces:
 - $a \in a/R$
 - $aRb \Leftrightarrow a/R = b/R$
 - $a/R \cap b/R = \emptyset \wedge a/R = b/R$

Correspondencia entre relaciones de equivalencia y particiones

- **Partición:** dado un conjunto A , una partición de A es un conjunto \mathcal{P} tal que:
 1. Cada elemento de \mathcal{P} es un subconjunto no vacío de A
 2. Si $S_1, S_2 \in \mathcal{P}$, entonces $S_1 \cap S_2 = \emptyset$
 3. $A = \{a : a \in S \text{ para algún } S \in \mathcal{P}\}$
 - Podemos definir una relación binaria asociada a \mathcal{P} como
$$R_{\mathcal{P}} = \{(a, b) \in A^2 : a, b \in S \text{ para algún } S \in \mathcal{P}\}$$
- **Correspondencia:**
 - *Propiedades:* sea A un conjunto, entonces:
 - Sea \mathcal{P} una partición de A , entonces $R_{\mathcal{P}}$ es una relación de equivalencia sobre A

- Sea R una relación de equivalencia sobre A , entonces A/R es una partición de A
- **Teorema:** sea A un conjunto cualquiera, y sean $Part = \{\text{particiones de } A\}$, $ReEq = \{\text{relaciones de equivalencia de } A\}$, entonces las funciones:

$$\begin{array}{ll} Part \rightarrow ReEq & ReEq \rightarrow Part \\ \mathcal{P} \rightarrow R_{\mathcal{P}} & R \rightarrow A/R \end{array}$$

son biyecciones una inversa de la otra.

- Es decir, a nivel de información es lo mismo tener una relación de equivalencia sobre A que una partición de A .

Funciones con dominio A/R

- Sea R una relación de equivalencia sobre A , entonces la definición de una función de tipo $f : A/R \rightarrow B$ puede no ser una función, porque el valor que toma para una clase de equivalencia, puede ser cualquiera de los representantes.
- *Ejemplos:*
 - *Caso ambiguo:* si tenemos R relación de equivalencia sobre \mathbb{R} y definimos $f : \mathbb{R}/R \rightarrow \mathbb{R}$ como $f(r/R) = r^2$, entonces *no es una función* dado que si se cumple, por ejemplo, $2R6$, entonces $2^2 = f(2/R) = f(6/R) = 6^2$, lo cual es absurdo.
 - *Caso inambiguo:* sea $F : A \rightarrow B$, entonces $f(a/ker(F)) = F(a)$ define en forma inambigua una función f de tipo $A/ker(F) \rightarrow B$, la cual es biyectiva.
 - Recordemos que $ker(F) = \{(a, b) \in A^2 : f(a) = f(b)\}$