

Combo 2 de teoremas

Emanuel Nicolás Herrador - November 2024

Teorema de Dedekind

Sea (L, s, i) un reticulado terna. La relación binaria definida por:

$$x \leq y \iff x s y = y$$

es un orden parcial sobre L para el cual se cumple que:

$$\begin{aligned}\sup(\{x, y\}) &= x s y \\ \inf(\{x, y\}) &= x i y\end{aligned}$$

cualesquiera sean $x, y \in L$.

Demostración

Primero, demostremos que \leq es reflexiva, transitiva y antisimétrica suponiendo $x, y, z \in L$:

1. *Reflexividad*: Por reflexividad de s , tenemos $x s x = x$. Luego, por def. de \leq , tenemos $x \leq x$ por lo que se demuestra.
2. *Transitividad*: Sea $(x s y = y) \wedge (y s z = z)$, entonces:

$$\begin{aligned}(x s y) s (y s z) &= y s z \\ x s (y s y) s z &= y s z && \text{Asociatividad} \\ x s y s z &= y s z && \text{Reflexividad} \\ x s (y s z) &= y s z && \text{Asociatividad} \\ x s z &= z && \text{Por suposición anterior}\end{aligned}$$

Ahora, por def. de \leq , tenemos que si $x \leq y \wedge y \leq z$, entonces $x \leq z$, por lo que se demuestra.

3. *Antisimetría*: Sea $(x s y = y \wedge y s x = x)$, por conmutatividad tenemos que $x s y = y s x$. Luego, con esto llegamos a que $x = y$. Por ello, por def. de \leq , esto significa que si $x \leq y \wedge y \leq x$, entonces $x = y$ por lo que se demuestra.

Como \leq es reflexiva, transitiva y antisimétrica, entonces por def. es un orden parcial sobre L . Con ello, solo queda ver que $\forall x, y \in L$ se cumple que $\sup(\{x, y\}) = x s y$ y que $\inf(\{x, y\}) = x i y$. Veamos ambos casos:

- $\sup(\{x, y\}) = x s y$:
 - Por reflexividad y asociatividad, tenemos que $x s y = (x s x) s y = x s (x s y)$ por lo que por def. de \leq , llegamos a que $x \leq x s y$. Del mismo modo, llegamos también a que $y \leq x s y$. Esto significa, entonces, que $x s y$ es una cota superior de $\{x, y\}$.
 - Sea z una cota superior de $\{x, y\}$, entonces $x \leq z \wedge y \leq z$, por lo que por def. de \leq tenemos $x s z = z \wedge y s z = z$. Con ello:

$$\begin{aligned}(x s z) s (y s z) &= z s z \\ (x s y) s (z s z) &= z s z && \text{Asociatividad y Conmutatividad} \\ (x s y) s z &= z && \text{Reflexividad}\end{aligned}$$

Luego, por def. de \leq , tenemos que $x s y \leq z$, por lo que $x s y$ es la menor cota superior de $\{x, y\}$.

Finalmente, entonces, esto significa por def. de supremo que $\sup(\{x, y\}) = x s y$, y se demuestra. ■

- $\inf(\{x, y\}) = x i y$

- Notemos que $x \leq y \stackrel{\text{def.}}{\iff} x \text{ s } y = y$. Luego, aplicando ínfimo de x a ambos, llegamos a que $x \text{ i } y = x \text{ i } (x \text{ s } y) \stackrel{\text{Absorción}}{=} x$. Entonces, $x \leq y \iff x \text{ i } y = x$ o, por conmutatividad, $y \text{ i } x = x$ (def. alternativa del orden parcial).
- Veamos que $x \text{ i } y \stackrel{\text{Reflexividad}}{=} (x \text{ i } x) \text{ i } y \stackrel{\text{Asociatividad}}{=} x \text{ i } (x \text{ i } y)$. Luego, por def. alternativa del orden parcial, $x \text{ i } y \leq x$. Del mismo modo, llegamos a que $x \text{ i } y \leq y$, por lo que por def. $x \text{ i } y$ es una cota inferior de $\{x, y\}$.
- Sea z una cota inferior de $\{x, y\}$, entonces por def. $z \leq x \wedge z \leq y$, por lo que por def. alternativa del orden parcial, $z \text{ i } x = z \wedge z \text{ i } y = z$. Ahora, notemos que:

$$\begin{aligned} (z \text{ i } x) \text{ i } (z \text{ i } y) &= z \text{ i } z \\ (x \text{ i } y) \text{ i } (z \text{ i } z) &= z \text{ i } z && \text{Asociatividad y Conmutatividad} \\ (x \text{ i } y) \text{ i } z &= z && \text{Reflexividad} \end{aligned}$$

Luego, por def. alternativa de \leq , tenemos que $z \leq x \text{ i } y$, por lo que $x \text{ i } y$ es la mayor cota inferior de $\{x, y\}$.

Finalmente, entonces, esto significa que por la def. de ínfimo, $\inf(\{x, y\}) = x \text{ i } y$.

Con todo ello, entonces, se demuestra. ■

Lema

Supongamos que \vec{a}, \vec{b} son asignaciones tales que si $x_i \in Li(\varphi)$, entonces $a_i = b_i$. Entonces $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}]$ sii $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{b}]$

Demostración

Por *lema* sabemos que: Sea \mathbf{A} una estructura de tipo τ y sea $t \in T^\tau$. Supongamos que \vec{a}, \vec{b} son asignaciones tales que $a_i = b_i$, cada vez que x_i ocurra en t . Entonces $t^{\mathbf{A}}[\vec{a}] = t^{\mathbf{A}}[\vec{b}]$.

Vamos a demostrar por inducción en k que el lema vale $\forall \varphi \in F_k^\tau$. Suponemos \vec{a}, \vec{b} asignaciones tales que si $x_i \in Li(\varphi)$, entonces $a_i = b_i$.

- *Caso base* $k = 0$: Sea $\varphi \in F_0^\tau$, entonces tenemos dos casos:

- $\varphi = (t \equiv s)$ con $t, s \in T^\tau$: Por lema, sabemos que $t^{\mathbf{A}}[\vec{a}] = t^{\mathbf{A}}[\vec{b}]$ y que $s^{\mathbf{A}}[\vec{a}] = s^{\mathbf{A}}[\vec{b}]$. Por ello:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}] &\iff t^{\mathbf{A}}[\vec{a}] = s^{\mathbf{A}}[\vec{a}] && \text{Def. de } \models \\ &\iff t^{\mathbf{A}}[\vec{b}] = s^{\mathbf{A}}[\vec{b}] && \text{Lema} \\ &\iff \mathbf{A} \models \varphi[\vec{b}] && \text{Def. de } \models \end{aligned}$$

por lo que se demuestra.

- $\varphi = r(t_1, \dots, t_n)$ con $r \in \mathcal{R}_n, n \geq 1$ y $t_1, \dots, t_n \in T^\tau$: Por lema, sabemos que $t_i^{\mathbf{A}}[\vec{a}] = t_i^{\mathbf{A}}[\vec{b}]$. Por ello:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}] &\iff (t_1^{\mathbf{A}}[\vec{a}], \dots, t_n^{\mathbf{A}}[\vec{a}]) \in i(r) && \text{Def. de } \models \\ &\iff (t_1^{\mathbf{A}}[\vec{b}], \dots, t_n^{\mathbf{A}}[\vec{b}]) \in i(r) && \text{Lema} \\ &\iff \mathbf{A} \models \varphi[\vec{b}] && \text{Def. de } \models \end{aligned}$$

por lo que se demuestra.

- *Hipótesis inductiva* (k): Sea $k \in \mathbb{N}_0$, entonces $\forall \varphi \in F_k^\tau, (\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}] \iff \mathbf{A} \models \varphi[\vec{b}])$
- *Caso inductivo* ($k + 1$): Sea $\varphi \in F_{k+1}^\tau$, tenemos varios casos:
 - Si $\varphi \in F_k^\tau$: se demuestra por HI.
 - Si $\varphi = (\varphi_1 \eta \varphi_2)$ con $\varphi_1, \varphi_2 \in F_k^\tau$ y $\eta \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$: Los casos son análogos, por lo que vamos a ver $\varphi = (\varphi_1 \wedge \varphi_2)$. Como $Li(\varphi_i) \subseteq Li(\varphi)$, por HI $\mathbf{A} \models \varphi_i[\vec{a}] \iff \mathbf{A} \models \varphi_i[\vec{b}]$. Se tiene entonces que:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}] &\iff \mathbf{A} \models \varphi_1[\vec{a}] \text{ y } \mathbf{A} \models \varphi_2[\vec{a}] && \text{Def. de } \models \\ &\iff \mathbf{A} \models \varphi_1[\vec{b}] \text{ y } \mathbf{A} \models \varphi_2[\vec{b}] && \text{HI} \\ &\iff \mathbf{A} \models \varphi[\vec{b}] && \text{Def. de } \models \end{aligned}$$

por lo que se demuestra.

- Si $\varphi = Qx_j\varphi_1$ con $\varphi_1 \in F_k^\tau$ y $Q \in \{\forall, \exists\}$: Los dos casos son análogos, por lo que vamos a ver $\varphi = \forall x_j\varphi_1$. Como $Li(\varphi_1) \subseteq Li(\varphi) \cup \{x_j\}$, por HI $\mathbf{A} \models \varphi_1[\vec{a}] \iff \mathbf{A} \models \varphi_1[\vec{b}]$. Por ello mismo, entonces, $\mathbf{A} \models \varphi_1[\downarrow_j^a(\vec{a})] \iff \mathbf{A} \models \varphi_1[\downarrow_j^a(\vec{b})]$ para todo $a \in A$. Con esto en mente, se tiene:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}] &\iff \forall a \in A, \mathbf{A} \models \varphi_1[\downarrow_j^a(\vec{a})] && \text{Def. de } \models \\
&\iff \forall a \in A, \mathbf{A} \models \varphi_1[\downarrow_j^a(\vec{b})] && \text{Prop. anterior} \\
&\iff \mathbf{A} \models \varphi[\vec{b}] && \text{Def. de } \models
\end{aligned}$$

por lo que se demuestra.

Con todo ello, entonces, se demuestra por inducción. ■