Guia 12 de logica: Teorias de primer orden

November 5, 2024

En esta guia nos avocaremos a dar una solucion al punto (3) de nuestro programa de logica dado al final de la Guia 8. O sea nos abocaremos al siguiente problema:

(3) Dar un modelo matematico del concepto de prueba elemental en una teoria elemental.

Este problema involucra el concepto de teoria elemental definido en la Guia 8, el cual es intuitivo y no fue definido en forma precisa ya que depende del concepto de sentencia elemental de tipo. O sea que un primer paso en la resolucion de (3) sera dar un modelo matematico del concepto de teoria elemental. Recordemos que una teoria elemental es un par (Σ, τ) tal que τ es un tipo cualquiera y Σ es un conjunto de sentencias elementales puras de tipo τ. Dado que ya tenemos nuestro modelo matematico para las sentencias elementales puras de tipo τ (i.e. las sentencias de tipo τ), podemos dar el siguiente modelo matematico del concepto de teoria elemental:

Una *teoria (de primer orden)* sera un par (Σ, τ), donde τ es un tipo y Σ es un conjunto de sentencias de tipo τ. Esto ya es un buen comienzo en la resolucion del punto (3) pero aun nos queda por hacer lo mas complicado.

Dada una teoria de primer orden (Σ, τ), los elementos de Σ seran llamados *axiomas propios* de (Σ, τ). Un *modelo de* (Σ, τ) sera una estructura de tipo τ la cual satisfaga todos los axiomas propios de (Σ, τ).

Algunos ejemplos de teorias de primer orden:

La teoria Po. Sea

$$Po = (\{\mathrm{A}_{\leq R}, \mathrm{A}_{\leq T}, \mathrm{A}_{\leq A}\}, \tau_{Po})$$

donde τ_{Po} es el tipo de los posets, es decir $(\emptyset, \emptyset, \{\leq\}, \{(\leq, 2)\})$ y

$$\begin{aligned}
\mathrm{A}_{\leq R} &= \forall x_1 \leq(x_1, x_1) \\
\mathrm{A}_{\leq T} &= \forall x_1 \forall x_2 \forall x_3\ ((\leq(x_1, x_2) \wedge \leq(x_2, x_3)) \rightarrow \leq(x_1, x_3)) \\
\mathrm{A}_{\leq A} &= \forall x_1 \forall x_2\ ((\leq(x_1, x_2) \wedge \leq(x_2, x_1)) \rightarrow (x_1 \equiv x_2))
\end{aligned}$$

Notese que una estructura $\mathbf{A}$ de tipo τ_{Po} es un modelo de Po si y solo si $\leq^{\mathbf{A}}$ es un orden parcial sobre A. Estrictamente hablando un modelo de Po no es un poset ya que es un par (A,i) donde A es un conjunto no vacio e i es una funcion con dominio $\{\leq\}$ tal que $i(\leq)$ es un orden parcial sobre A. Es decir, un modelo de Po es un par $(A,\{(\leq,R)\})$ donde A es un conjunto no vacio y R es un orden parcial sobre A. De todas maneras deberia quedar claro que en esencia un poset y un modelo de Po son la misma cosa por lo cual llamaremos a Po la *teoria de los posets* y muchas veces nos referiremos a los modelos de Po como si fueran posets.

La teoria $RetCua$. Sea $\tau_{RetCua}=(\emptyset,\{\mathsf{s}^2,\mathsf{i}^2\},\{\leq^2\},a)$ y sea Σ_{RetCua} el siguiente conjunto de sentencias:

$$\begin{aligned}
\mathrm{A}_{\leq R} &= \forall x_1 \leq(x_1,x_1)\\
\mathrm{A}_{\leq T} &= \forall x_1\forall x_2\forall x_3\ ((\leq(x_1,x_2)\wedge\leq(x_2,x_3))\rightarrow\leq(x_1,x_3))\\
\mathrm{A}_{\leq A} &= \forall x_1\forall x_2\ ((\leq(x_1,x_2)\wedge\leq(x_2,x_1))\rightarrow(x_1\equiv x_2))\\
\mathrm{A}_{\mathsf{s}esC} &= \forall x_1\forall x_2\ (\leq(x_1,\mathsf{s}(x_1,x_2))\wedge\leq(x_2,\mathsf{s}(x_1,x_2)))\\
\mathrm{A}_{\mathsf{s}\leq C} &= \forall x_1\forall x_2\forall x_3\ \ ((\leq(x_1,x_3)\wedge\leq(x_2,x_3))\rightarrow\leq(\mathsf{s}(x_1,x_2),x_3))\\
\mathrm{A}_{\mathsf{i}esC} &= \forall x_1\forall x_2\ (\leq(\mathsf{i}(x_1,x_2),x_1)\wedge\leq(\mathsf{i}(x_1,x_2),x_2))\\
\mathrm{A}_{\mathsf{i}\geq C} &= \forall x_1\forall x_2\forall x_3\ \ ((\leq(x_3,x_1)\wedge\leq(x_3,x_2))\rightarrow\leq(x_3,\mathsf{i}(x_1,x_2)))
\end{aligned}$$

Definamos $RetCua=(\Sigma_{RetCua},\tau_{RetCua})$. Obviamente los modelos de esta teoria son esencialmente reticulados cuaterna en el sentido que una estructura $\mathbf{A}$ de tipo τ_{RetCua} es un modelo de $RetCua$ si y solo si $(A,\mathsf{s}^{\mathbf{A}},\mathsf{i}^{\mathbf{A}},\leq^{\mathbf{A}})$ es un reticulado cuaterna. Llamaremos a $RetCua$ la *teoria de los reticulados cuaterna* y muchas veces nos referiremos a los modelos de $RetCua$ como si fueran reticulados cuaterna.

Ejercicio 1: De una estructura de tipo τ_{RetCua} la cual satisfaga todos los axiomas de $RetCua$ menos $\mathrm{A}_{\mathsf{s}esC}$

Ejercicio 2: De una estructura de tipo τ_{RetCua} la cual satisfaga todos los axiomas de $RetCua$ menos $\mathrm{A}_{\mathsf{s}\leq C}$

Definicion del concepto de prueba formal

Recomendamos al lector repasar el concepto de prueba elemental en una teoria elemental, dado en la Guia 8. Aqui daremos un modelo matematico del concepto de prueba elemental en una teoria (Σ,τ). Tal como lo hemos visto en numerosos ejemplos, una prueba es una sucecion de sentencias junto con una sucesion de "justificaciones" las cuales van explicando o justificando por que es licito que cada una de dichas sentencias aparezca en la sucesion. Por supuesto nuestra definicion sera precisa y matematica por lo que deberemos trabajar bastante para poder escribirla correctamente. Como objeto matematico una prueba resultara ser un par ordenado de palabras cuya primera coordenada codificara en forma natural la sucesion de sentencias y su segunda coordenada codificara la sucesion de justificaciones.

La formalizacion matematica del concepto de prueba elemental es uno de los grandes logros de la ciencia moderna y este hecho se debe en gran medida a que si elejimos bien la teoria, las pruebas elementales no son ni mas ni menos que las pruebas de la matematica misma por lo cual se tiene un modelo matematico de la deduccion matematica real!

Reglas

Definiremos una serie de conjuntos los cuales poseen informacion deductiva basica, es decir representan las reglas usuales con las que los matematicos dan pasos dentro de una demostracion (aunque muchas veces ellos lo hacen sin avisar debido a la obviedad de dichas reglas).

Recordemos que si τ es un tipo cualquiera, un termino $t \in T^\tau$ es llamado *cerrado* si ninguna variable es subtermino de t. Con T_c^τ denotamos el conjunto formado por todos los terminos cerrados.

Sean

$$\begin{aligned}
Partic^\tau &= \{(\forall v\varphi(v), \varphi(t)) : \varphi =_d \varphi(v) \in F^\tau \text{ y } t \in T_c^\tau\} \\
Exist^\tau &= \{(\varphi(t), \exists v\varphi(v)) : \varphi =_d \varphi(v) \in F^\tau \text{ y } t \in T_c^\tau\} \\
Evoc^\tau &= \{(\varphi, \varphi) : \varphi \in S^\tau\} \\
Absur^\tau &= \{((\neg\varphi \to (\psi \wedge \neg\psi)), \varphi) : \varphi, \psi \in S^\tau\} \cup \{((\varphi \to (\psi \wedge \neg\psi)), \neg\varphi) : \varphi, \psi \in S^\tau\} \\
ConjElim^\tau &= \{((\varphi \wedge \psi), \varphi) : \varphi, \psi \in S^\tau\} \cup \{((\varphi \wedge \psi), \psi) : \varphi, \psi \in S^\tau\} \\
EquivElim^\tau &= \{((\varphi \leftrightarrow \psi), (\varphi \to \psi)) : \varphi, \psi \in S^\tau\} \cup \{((\varphi \leftrightarrow \psi), (\psi \to \varphi)) : \varphi, \psi \in S^\tau\} \\
DisjInt^\tau &= \{(\varphi, (\varphi \vee \psi)) : \varphi, \psi \in S^\tau\} \cup \{(\psi, (\varphi \vee \psi)) : \varphi, \psi \in S^\tau\} \cup \{((\neg\varphi \to \psi), (\varphi \vee \psi)) : \varphi, \psi \in S^\tau\}
\end{aligned}$$

Diremos que φ *se deduce de* ψ *por la regla de particularizacion* (resp. *existencia, evocacion, absurdo, conjuncion-eliminacion, equivalencia-eliminacion, disjuncion-introduccion*), *con respecto a* τ para expresar que $(\psi, \varphi) \in Partic^\tau$ (resp. $(\psi, \varphi) \in Exist^\tau$, $(\psi, \varphi) \in Evoc^\tau$, $(\psi, \varphi) \in Absur^\tau$, $(\psi, \varphi) \in ConjElim^\tau$, $(\psi, \varphi) \in EquivElim^\tau$, $(\psi, \varphi) \in DisjInt^\tau$).

Sea

$$Commut^\tau = Commut1^\tau \cup Commut2^\tau$$

donde

$$\begin{aligned}
Commut1^\tau &= \{((t \equiv s), (s \equiv t)) : s, t \in T_c^\tau\} \\
Commut2^\tau &= \{((\varphi \leftrightarrow \psi), (\psi \leftrightarrow \varphi)) : \varphi, \psi \in S^\tau\}
\end{aligned}$$

Diremos que φ *se deduce de* ψ *por la regla de commutatividad, con respecto a* τ para expresar que $(\psi, \varphi) \in Commut^\tau$.

Sean

$$\begin{aligned}
ModPon^{\tau} &= \{(\varphi, (\varphi \rightarrow \psi), \psi) : \varphi, \psi \in S^{\tau}\} \\
ConjInt^{\tau} &= \{(\varphi, \psi, (\varphi \wedge \psi)) : \varphi, \psi \in S^{\tau}\} \\
EquivInt^{\tau} &= \{((\varphi \rightarrow \psi), (\psi \rightarrow \varphi), (\varphi \leftrightarrow \psi)) : \varphi, \psi \in S^{\tau}\} \\
DisjElim^{\tau} &= \{(\neg\varphi, (\varphi \vee \psi), \psi) : \varphi, \psi \in S^{\tau}\} \cup \{(\neg\psi, (\varphi \vee \psi), \varphi) : \varphi, \psi \in S^{\tau}\}
\end{aligned}$$

Diremos que φ *se deduce de* ψ_1 y ψ_2 *por la regla de Modus Ponens* (resp. *conjuncion-introduccion, equivalencia-introduccion, disjuncion-eliminacion*), *con respecto a* τ para expresar que $(\psi_1, \psi_2, \varphi) \in ModPon^{\tau}$ (resp. $(\psi_1, \psi_2, \varphi) \in ConjInt^{\tau}$, $(\psi_1, \psi_2, \varphi) \in EquivInt^{\tau}$, $(\psi_1, \psi_2, \varphi) \in DisjElim^{\tau}$). Sea

$$DivPorCas^{\tau} = \{((\varphi_1 \vee \varphi_2), (\varphi_1 \rightarrow \psi), (\varphi_2 \rightarrow \psi), \psi) : \varphi_1, \varphi_2, \psi \in S^{\tau}\}$$

Diremos que φ *se deduce de* ψ_1, ψ_2 y ψ_3 *por la regla de division por casos, con respecto a* τ para expresar que $(\psi_1, \psi_2, \psi_3, \varphi) \in DivPorCas^{\tau}$. Sea

$$Reemp^{\tau} = Reemp1^{\tau} \cup Reemp2^{\tau}$$

donde

$Reemp1^{\tau} = \{((t \equiv s), \gamma, \tilde{\gamma}) : s, t \in T_c^{\tau},$
$\gamma \in S^{\tau}$ y $\tilde{\gamma} =$ resultado de reemplazar en γ una ocurrencia de t por $s\}$

$Reemp2^{\tau} = \{(\forall v_1 ... \forall v_n (\varphi \leftrightarrow \psi), \gamma, \tilde{\gamma}) : \varphi, \psi \in F^{\tau},\ Li(\varphi) = Li(\psi) = \{v_1, ..., v_n\},$
$n \geq 0, \gamma \in S^{\tau}$ y $\tilde{\gamma} =$ resultado de reemplazar en γ una ocurrencia de φ por $\psi\}$

Diremos que φ *se deduce de* ψ_1y ψ_2 *por la regla de reemplazo, con respecto a* τ, para expresar que $(\psi_1, \psi_2, \varphi) \in Reemp^{\tau}$. Sea

$$Trans^{\tau} = Trans1^{\tau} \cup Trans2^{\tau} \cup Trans3^{\tau}$$

donde

$$\begin{aligned}
Trans1^{\tau} &= \{((t \equiv s), (s \equiv u), (t \equiv u)) : t, s, u \in T_c^{\tau}\} \\
Trans2^{\tau} &= \{((\varphi \rightarrow \psi), (\psi \rightarrow \Phi), (\varphi \rightarrow \Phi)) : \varphi, \psi, \Phi \in S^{\tau}\} \\
Trans3^{\tau} &= \{((\varphi \leftrightarrow \psi), (\psi \leftrightarrow \Phi), (\varphi \leftrightarrow \Phi)) : \varphi, \psi, \Phi \in S^{\tau}\}
\end{aligned}$$

Diremos que φ *se deduce de* ψ_1y ψ_2 *por la regla de transitividad, con respecto a* τ para expresar que $(\psi_1, \psi_2, \varphi) \in Trans^{\tau}$. Sea

$Generaliz^{\tau} = \{(\varphi(c), \forall v \varphi(v)) : \varphi =_d \varphi(v) \in F^{\tau},\ Li(\varphi) = \{v\}$ y $c \in \mathcal{C}$ no ocurre en $\varphi\}$

Es importante el siguiente

Lemma 1 *Si* $(\varphi_1, \varphi_2) \in Generaliz^{\tau}$, *entonces el nombre de constante* c *del cual habla la definicion de* $Generaliz^{\tau}$ *esta univocamente determinado por el par* (φ_1, φ_2).

Proof. Notese que c es el unico nombre de constante que ocurre en φ_1 y no ocurre en φ_2 ■

Escribiremos $(\varphi_1, \varphi_2) \in Generaliz^\tau$ *via* c para expresar que $(\varphi_1, \varphi_2) \in Generaliz^\tau$ y que c es el unico nombre de constante que ocurre en φ_1 y no ocurre en φ_2. Diremos que φ_2 *se deduce de* φ_1 *por la regla de generalizacion con nombre de constante* c*, con respecto a* τ, para expresar que $(\varphi_1, \varphi_2) \in Generaliz^\tau$ *via* c

Sea

$$Elec^\tau = \{(\exists v \varphi(v), \varphi(e)) : \varphi =_d \varphi(v) \in F^\tau,\ Li(\varphi) = \{v\} \text{ y } e \in \mathcal{C} \text{ no ocurre en } \varphi\}$$

Es importante el siguiente

Lemma 2 *Si* $(\varphi_1, \varphi_2) \in Elec^\tau$*, entonces el nombre de constante e del cual habla la definicion de* $Elec^\tau$ *esta univocamente determinado por el par* (φ_1, φ_2)*.*

Ejercicio 3: Pruebe el lema anterior

Escribiremos $(\varphi_1, \varphi_2) \in Elec^\tau$ *via* e para expresar que $(\varphi_1, \varphi_2) \in Elec^\tau$ y que e es el unico nombre de constante que ocurre en φ_2 y no ocurre en φ_1. Diremos que φ_2 *se deduce de* φ_1 *por la regla de eleccion con nombre de constante* e*, con respecto a* τ para expresar que $(\varphi_1, \varphi_2) \in Elec^\tau$ *via* e.

Como se puede notar hay muchas reglas y todas modelizan en forma muy natural fragmentos deductivos usuales de las pruebas elementales. Una regla R sera llamada *universal* cuando se de que si φ se deduce de $\psi_1, ..., \psi_k$ por R, entonces $((\psi_1 \wedge ... \wedge \psi_k) \rightarrow \varphi)$ es una sentencia universalmente valida.

Lemma 3 *Sea* τ *un tipo. Todas las reglas excepto las reglas de eleccion y generalizacion son universales.*

Proof. Veamos que la regla de existencia es universal. Por definicion, un par de $Exist^\tau$ es siempre de la forma $(\varphi(t), \exists v \varphi(v))$, con $\varphi =_d \varphi(v)$ y $t \in T_c^\tau$. Sea $\mathbf{A}$ una estructura de tipo τ tal que $\mathbf{A} \models \varphi(t)$. Sea $t^{\mathbf{A}}$ el valor que toma t en $\mathbf{A}$. Por el Lema de reemplazo tenemos que $\mathbf{A} \models \varphi\left[t^{\mathbf{A}}\right]$, por lo cual tenemos que $\mathbf{A} \models \exists v \varphi(v)$.

Veamos que la regla de reemplazo es universal. Debemos probar que si $(\psi_1, \psi_2, \varphi) \in Reemp^\tau = Reemp1^\tau \cup Reemp2^\tau$, entonces $((\psi_1 \wedge \psi_2) \rightarrow \varphi)$ es una sentencia universalmente valida. El caso en el que $(\psi_1, \psi_2, \varphi) \in Reemp1^\tau$ es facil y lo dejaremos al lector. Para el caso en el que $(\psi_1, \psi_2, \varphi) \in Reemp2^\tau$ nos hara falta un resultado un poco mas general. Veamos por induccion en k que si se dan las siguienes condiciones

- $\alpha \in F_k^\tau$ y $\varphi, \psi \in F^\tau$

- $\mathbf{A}$ es una estructura de tipo τ

- $\overline{\alpha}$ = resultado de reemplazar en α una ocurrencia de φ por ψ,

- $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}]$ si y solo si $\mathbf{A} \models \psi[\vec{a}]$, para cada $\vec{a} \in A^{\mathbf{N}}$

entonces se da que

- $\mathbf{A} \models \alpha[\vec{a}]$ si y solo si $\mathbf{A} \models \overline{\alpha}[\vec{a}]$, para cada $\vec{a} \in A^{\mathbf{N}}$.

CASO $k = 0$.
Entonces α es atomica y por lo tanto ya que α es la unica subformula de α, la situacion es facil de probar.

CASO $\alpha = \forall x_i \alpha_1$.
Si $\varphi = \alpha$, entonces la situacion es facil de probar. Si $\varphi \neq \alpha$, entonces la ocurrencia de φ a reemplazar sucede en α_1 y por lo tanto $\overline{\alpha} = \forall x_i \overline{\alpha_1}$. Se tiene entonces que para un $\vec{a}$ dado,

$$\begin{array}{c} \mathbf{A} \models \alpha[\vec{a}] \\ \Updownarrow \\ \mathbf{A} \models \alpha_1[\downarrow_i^a \vec{a}], \text{ para cada } a \in A \\ \Updownarrow \\ \mathbf{A} \models \overline{\alpha_1}[\downarrow_i^a \vec{a}], \text{ para cada } a \in A \\ \Updownarrow \\ \mathbf{A} \models \overline{\alpha}[\vec{a}] \end{array}$$

CASO $\alpha = (\alpha_1 \vee \alpha_2)$.
Si $\varphi = \alpha$, entonces la situacion es facil de probar. Supongamos $\varphi \neq \alpha$ y supongamos que la ocurrencia de φ a reemplazar sucede en α_1. Entonces $\overline{\alpha} = (\overline{\alpha_1} \vee \alpha_2)$ y tenemos que

$$\begin{array}{c} \mathbf{A} \models \alpha[\vec{a}] \\ \Updownarrow \\ \mathbf{A} \models \alpha_1[\vec{a}] \text{ o } \mathbf{A} \models \alpha_2[\vec{a}] \\ \Updownarrow \\ \mathbf{A} \models \overline{\alpha_1}[\vec{a}] \text{ o } \mathbf{A} \models \alpha_2[\vec{a}] \\ \Updownarrow \\ \mathbf{A} \models \overline{\alpha}[\vec{a}] \end{array}$$

Los demas casos son dejados al lector. ∎

Ejercicio 4: (S) Pruebe que si $(\psi_1, \psi_2, \varphi) \in Reemp1^\tau$, entonces $((\psi_1 \wedge \psi_2) \to \varphi)$ es una sentencia universalmente valida.

Ejercicio 5: Pruebe que las reglas de eleccion y generalizacion no son universales.

Ejercicio 6: V o F o I, justifique.

(a) Sea τ un tipo y supongamos $f \in \mathcal{F}_1$ y $c \in \mathcal{C}$. Entonces $((f(c) \equiv c), \exists x_1(f(x_1) \equiv c)) \in Exist^\tau$

(b) Sea τ un tipo y supongamos $f \in \mathcal{F}_1$ y $c \in \mathcal{C}$. Entonces $((f(c) \equiv c), \forall x_1(f(x_1) \equiv c)) \in Generaliz^\tau$

(c) Sea τ un tipo y supongamos $f \in \mathcal{F}_1$ y $c \in \mathcal{C}$. Entonces $((f(c) \equiv x_2), \forall x_1(f(x_1) \equiv x_2)) \in Generaliz^\tau$

(d) Sea $\tau = (\{0,1\}, \{\mathsf{s}^2, \mathsf{i}^2\}, \emptyset, a)$. Entonces $(\forall x_2(1 \mathsf{\ s\ } x_2 \equiv 1), \forall x_1 \forall x_2(x_1 \mathsf{\ s\ } x_2 \equiv x_1) \in Generaliz^\tau$

(e) Sea $\tau = (\{0,1\}, \{\mathsf{s}^2, \mathsf{i}^2\}, \{\leq^2\}, a)$. Entonces $(\exists x_1 \leq (x_1, 0), \leq(1,0)) \in Elec^\tau$

(f) Sea $\tau = (\{0,1\}, \{\mathsf{s}^2, \mathsf{i}^2\}, \{\leq^2\}, a)$. Entonces $(\exists x_1(x_1 \equiv 0), (1 \equiv 0)) \in Elec^\tau$

(g) Si $(\varphi_1, \varphi_2) \in Generaliz^\tau$ *via* c, entonces c es un elemento fijo pero arbitrario

Axiomas logicos

Recordemos que dada una teoria (Σ, τ), los elementos de Σ son llamados axiomas propios y en general no son sentencias universalmente validas.

En las pruebas formales sera necesario usar ciertas verdades universales y obvias las cuales llamaremos *axiomas logicos*. Mas concretamente, llamaremos *axiomas logicos de tipo* τ a todas las sentencias de alguna de las siguientes formas.

1. $(\varphi \leftrightarrow \varphi)$
2. $(t \equiv t)$
3. $(\varphi \vee \neg\varphi)$
4. $(\varphi \leftrightarrow \neg\neg\varphi)$
5. $(\neg\forall v\psi \leftrightarrow \exists v\neg\psi)$
6. $(\neg\exists v\psi \leftrightarrow \forall v\neg\psi)$

donde $t \in T_c^\tau$, $\varphi \in S^\tau$, $\psi \in F^\tau$, $v \in Var$ y $Li(\psi) \subseteq \{v\}$. Con $AxLog^\tau$ denotaremos el conjunto

$$\{\varphi \in S^\tau : \varphi \text{ es un axioma logico de tipo } \tau\}$$

Notese que hay infinitos axiomas logicos de tipo τ, es decir el conjunto $AxLog^\tau$ es un conjunto infinito de palabras. Por ejemplo, el formato dado en 1. produce una cantidad infinita de axiomas logicos, a saber todas las sentencias de la forma $(\varphi \leftrightarrow \varphi)$, donde φ es cualquier sentencia de tipo τ.

Ejercicio 7: Pruebe que cada sentencia de $AxLog^{\tau}$ es universalmente valida

Justificaciones

Llamaremos *numerales* a los siguientes simbolos

$$0\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9$$

Usaremos Num para denotar el conjunto de numerales. Notese que $Num \cap \omega = \emptyset$. Sea $Sig : Num^* \to Num^*$ definida de la siguiente manera

$$\begin{aligned} Sig(\varepsilon) &= 1 \\ Sig(\alpha 0) &= \alpha 1 \\ Sig(\alpha 1) &= \alpha 2 \\ Sig(\alpha 2) &= \alpha 3 \\ Sig(\alpha 3) &= \alpha 4 \\ Sig(\alpha 4) &= \alpha 5 \\ Sig(\alpha 5) &= \alpha 6 \\ Sig(\alpha 6) &= \alpha 7 \\ Sig(\alpha 7) &= \alpha 8 \\ Sig(\alpha 8) &= \alpha 9 \\ Sig(\alpha 9) &= Sig(\alpha)0 \end{aligned}$$

Definamos $Dec : \omega \to Num^*$ de la siguiente manera

$$\begin{aligned} Dec(0) &= \varepsilon \\ Dec(n+1) &= Sig(Dec(n)) \end{aligned}$$

Notese que para $n \in \mathbf{N}$, la palabra $Dec(n)$ es la notacion usual decimal de n. Para hacer mas agil la notacion escribiremos $\bar{n}$ en lugar de $Dec(n)$.

Sea $Nombres_1$ el conjunto formado por las siguientes palabras

EXISTENCIA
COMMUTATIVIDAD
PARTICULARIZACION
ABSURDO
EVOCACION
CONJUNCIONELIMINACION
EQUIVALENCIAELIMINACION
DISJUNCIONINTRODUCCION
ELECCION
GENERALIZACION

Sea $Nombres_2$ el conjunto formado por las siguientes palabras

MODUSPONENS
TRANSITIVIDAD
CONJUNCIONINTRODUCCION
EQUIVALENCIAINTRODUCCION
DISJUNCIONELIMINACION
REEMPLAZO

Una *justificacion basica* es una palabra perteneciente a la union de los siguientes conjuntos de palabras

$$\{\text{CONCLUSION}, \text{AXIOMAPROPIO}, \text{AXIOMALOGICO}\}$$

$$\{\alpha(\bar{k}) : k \in \mathbf{N} \text{ y } \alpha \in Nombres_1\}$$

$$\{\alpha(\bar{j}, \bar{k}) : j, k \in \mathbf{N} \text{ y } \alpha \in Nombres_2\}$$

$$\{\text{DIVISIONPORCASOS}(\bar{j}, \bar{k}, \bar{l}) : j, k, l \in \mathbf{N}\}$$

Usaremos $JustBas$ para denotar el conjunto formado por todas las justificaciones basicas. Una *justificacion* es una palabra que ya sea es una justificacion basica o pertenece a la union de los siguientes conjuntos de palabras

$$\{\text{HIPOTESIS}\bar{k} : k \in \mathbf{N}\}$$

$$\{\text{TESIS}\bar{j}\alpha : j \in \mathbf{N} \text{ y } \alpha \in JustBas\}$$

Usaremos $Just$ para denotar el conjunto formado por todas las justificaciones. Cabe destacar que los elementos de $Just$ son palabras del alfabeto formado por los siguientes simbolos

( ) , 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 A B C D E G H I J L M N O P Q R S T U V X Z

Concatenaciones balanceadas de justificaciones Para construir el concepto de prueba formal deberiamos trabajar con sucesiones finitas de justificaciones pero el siguiente lema nos dice que podemos reemplazarlas por ciertas palabras, i.e. sus concatenaciones, sin perder informacion. Lo aceptaremos sin demostracion aunque su demostracion es simple.

Lemma 4 *Sea* $\mathbf{J} \in Just^+$. *Hay unicos* $n \geq 1$ *y* $J_1, ..., J_n \in Just$ *tales que* $\mathbf{J} = J_1...J_n$.

Es decir el lema anterior nos dice que la sucesion $J_1, ..., J_n$ se puede codificar con la palabra $J_1...J_n$ sin perder informacion. Dada $\mathbf{J} \in Just^+$, usaremos $n(\mathbf{J})$

y $\mathbf{J}_1, ..., \mathbf{J}_{n(\mathbf{J})}$ para denotar los unicos n y $J_1, ..., J_n$ cuya existencia garantiza el lema anterior.

Dados numeros naturales $i \leq j$, usaremos $\langle i, j\rangle$ para denotar el conjunto $\{i, i+1, ..., j\}$. A los conjuntos de la forma $\langle i, j\rangle$ los llamaremos *bloques*.

Dada $\mathbf{J} \in Just^+$ definamos

$$\begin{aligned} \mathcal{B}^{\mathbf{J}} = \{\langle i, j\rangle : \exists k\ \mathbf{J}_i = \text{HIPOTESIS}\bar{k} \text{ y} \\ \mathbf{J}_j = \text{TESIS}\bar{k}\alpha \text{ para algun } \alpha \in JustBas\} \end{aligned}$$

Diremos que $\mathbf{J} \in Just^+$ es *balanceada* si se dan las siguientes

(1) Por cada $k \in \mathbf{N}$ a lo sumo hay un i tal que $\mathbf{J}_i = \text{HIPOTESIS}\bar{k}$ y a lo sumo hay un i tal que $\mathbf{J}_i = \text{TESIS}\bar{k}\alpha$, con $\alpha \in JustBas$

(2) Si $\mathbf{J}_i = \text{HIPOTESIS}\bar{k}$ entonces hay un $l > i$ tal que $\mathbf{J}_l = \text{TESIS}\bar{k}\alpha$, con $\alpha \in JustBas$

(3) Si $\mathbf{J}_i = \text{TESIS}\bar{k}\alpha$, con $\alpha \in JustBas$, entonces hay un $l < i$ tal que $\mathbf{J}_l = \text{HIPOTESIS}\bar{k}$

(4) Si $B_1, B_2 \in \mathcal{B}^{\mathbf{J}}$, entonces $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ o $B_1 \subseteq B_2$ o $B_2 \subseteq B_1$

Pares adecuados

Para construir el concepto de prueba elemental deberiamos trabajar con sucesiones finitas de sentencias pero el siguiente lema nos dice que podemos reemplazarlas por ciertas palabras, i.e. sus concatenaciones, sin perder informacion.

Lemma 5 *Sea $\varphi \in S^{\tau+}$. Hay unicos $n \geq 1$ y $\varphi_1, ..., \varphi_n \in S^\tau$ tales que $\varphi = \varphi_1 ... \varphi_n$.*

Ejercicio 8: Pruebe el lema anterior

Es decir el lema anterior nos dice que la sucesion $\varphi_1, ..., \varphi_n$ se puede codificar con la palabra $\varphi_1 ... \varphi_n$ sin perder informacion. Dada $\varphi \in S^{\tau+}$, usaremos $n(\varphi)$ y $\varphi_1, ..., \varphi_{n(\varphi)}$ para denotar los unicos n y $\varphi_1, ..., \varphi_n$ cuya existencia garantiza el lema anterior.

Un *par adecuado de tipo* τ es un par $(\varphi, \mathbf{J}) \in S^{\tau+} \times Just^+$ tal que $n(\varphi) = n(\mathbf{J})$ y $\mathbf{J}$ es balanceada. Sea $(\varphi, \mathbf{J})$ un par adecuado de tipo τ. Si $\langle i, j\rangle \in \mathcal{B}^{\mathbf{J}}$, entonces φ_i sera la *hipotesis* del bloque $\langle i, j\rangle$ en $(\varphi, \mathbf{J})$ y φ_j sera la *tesis* del bloque $\langle i, j\rangle$ en $(\varphi, \mathbf{J})$. Diremos que φ_i *esta bajo la hipotesis* φ_l *en* $(\varphi, \mathbf{J})$ o que φ_l *es una hipotesis de* φ_i *en* $(\varphi, \mathbf{J})$ cuando haya en $\mathcal{B}^{\mathbf{J}}$ un bloque de la forma $\langle l, j\rangle$ el cual contenga a i. Sean $i, j \in \langle 1, n(\varphi)\rangle$. Diremos que i es *anterior* a j *en* $(\varphi, \mathbf{J})$ si $i < j$ y ademas para todo $B \in \mathcal{B}^{\mathbf{J}}$ se tiene que $i \in B \Rightarrow j \in B$.

Dependencia de constantes en pares adecuados Dadas $e, d \in \mathcal{C}$, diremos que e *depende directamente de* d *en* $(\varphi, \mathbf{J})$ si hay numeros $1 \leq l < j \leq n(\varphi)$ tales que

(1) l es anterior a j en $(\varphi, \mathbf{J})$

(2) $\mathbf{J}_j = \alpha\text{ELECCION}(\bar{l})$, con $\alpha \in \{\varepsilon\} \cup \{\text{TESIS}\bar{k} : k \in \mathbf{N}\}$ y $(\varphi_l, \varphi_j) \in Elec^\tau$ via e

(3) d ocurre en φ_l.

Dados $e, d \in \mathcal{C}$, diremos que e *depende de* d *en* $(\varphi, \mathbf{J})$ si existen $e_0, ..., e_{k+1} \in \mathcal{C}$, con $k \geq 0$, tales que

(1) $e_0 = e$ y $e_{k+1} = d$

(2) e_i *depende directamente de* e_{i+1} *en* $(\varphi, \mathbf{J})$, para $i = 0, ..., k$.

Definicion de prueba formal

Ahora si estamos en condiciones de definir el concepto de prueba en una teoria de primer orden. Sea (Σ, τ) una teoria de primer orden. Sea φ una sentencia de tipo τ. Una *prueba formal de* φ *en* (Σ, τ) sera un par adecuado $(\varphi, \mathbf{J})$ de algun tipo $\tau_1 = (\mathcal{C} \cup \mathcal{C}_1, \mathcal{F}, \mathcal{R}, a)$, con $\mathcal{C}_1$ finito y disjunto con $\mathcal{C}$, tal que

(1) Cada φ_i es una sentencia de tipo τ_1

(2) $\varphi_{n(\varphi)} = \varphi$

(3) Si $\langle i, j \rangle \in \mathcal{B}^{\mathbf{J}}$, entonces $\varphi_{j+1} = (\varphi_i \rightarrow \varphi_j)$ y $\mathbf{J}_{j+1} = \alpha\text{CONCLUSION}$, con $\alpha \in \{\varepsilon\} \cup \{\text{TESIS}\bar{k} : k \in \mathbf{N}\}$

(4) Para cada $i = 1, ..., n(\varphi)$, se da una de las siguientes

   (a) $\mathbf{J}_i = \text{HIPOTESIS}\bar{k}$ para algun $k \in \mathbf{N}$

   (b) $\mathbf{J}_i = \alpha\text{CONCLUSION}$, con $\alpha \in \{\varepsilon\} \cup \{\text{TESIS}\bar{k} : k \in \mathbf{N}\}$ y hay un j tal que $\langle j, i-1 \rangle \in \mathcal{B}^{\mathbf{J}}$ y $\varphi_i = (\varphi_j \rightarrow \varphi_{i-1})$

   (c) $\mathbf{J}_i = \alpha\text{AXIOMALOGICO}$, con $\alpha \in \{\varepsilon\} \cup \{\text{TESIS}\bar{k} : k \in \mathbf{N}\}$ y φ_i es un axioma logico de tipo τ_1

   (d) $\mathbf{J}_i = \alpha\text{AXIOMAPROPIO}$, con $\alpha \in \{\varepsilon\} \cup \{\text{TESIS}\bar{k} : k \in \mathbf{N}\}$ y $\varphi_i \in \Sigma$

   (e) $\mathbf{J}_i = \alpha\text{PARTICULARIZACION}(\bar{l})$, con $\alpha \in \{\varepsilon\} \cup \{\text{TESIS}\bar{k} : k \in \mathbf{N}\}$ l anterior a i y $(\varphi_l, \varphi_i) \in Partic^{\tau_1}$

   (f) $\mathbf{J}_i = \alpha\text{COMMUTATIVIDAD}(\bar{l})$, con $\alpha \in \{\varepsilon\} \cup \{\text{TESIS}\bar{k} : k \in \mathbf{N}\}$, l anterior a i y $(\varphi_l, \varphi_i) \in Commut^{\tau_1}$

   (g) $\mathbf{J}_i = \alpha\text{ABSURDO}(\bar{l})$, con $\alpha \in \{\varepsilon\} \cup \{\text{TESIS}\bar{k} : k \in \mathbf{N}\}$, l anterior a i y $(\varphi_l, \varphi_i) \in Absur^{\tau_1}$

(h) $\mathbf{J}_i = \alpha$EVOCACION($\bar{l}$), con $\alpha \in \{\varepsilon\} \cup \{\text{TESIS}\bar{k} : k \in \mathbf{N}\}$, l anterior a i y $(\varphi_l, \varphi_i) \in Evoc^{\tau_1}$

(i) $\mathbf{J}_i = \alpha$EXISTENCIA($\bar{l}$), con $\alpha \in \{\varepsilon\} \cup \{\text{TESIS}\bar{k} : k \in \mathbf{N}\}$, l anterior a i y $(\varphi_l, \varphi_i) \in Exist^{\tau_1}$

(j) $\mathbf{J}_i = \alpha$CONJUNCIONELIMINACION($\bar{l}$), con $\alpha \in \{\varepsilon\} \cup \{\text{TESIS}\bar{k} : k \in \mathbf{N}\}$, l anterior a i y $(\varphi_l, \varphi_i) \in ConjElim^{\tau_1}$

(k) $\mathbf{J}_i = \alpha$DISJUNCIONINTRODUCCION($\bar{l}$), con $\alpha \in \{\varepsilon\} \cup \{\text{TESIS}\bar{k} : k \in \mathbf{N}\}$, l anterior a i y $(\varphi_l, \varphi_i) \in DisjInt^{\tau_1}$

(l) $\mathbf{J}_i = \alpha$EQUIVALENCIAELIMINACION($\bar{l}$), con $\alpha \in \{\varepsilon\} \cup \{\text{TESIS}\bar{k} : k \in \mathbf{N}\}$, l anterior a i y $(\varphi_l, \varphi_i) \in EquivElim^{\tau_1}$

(m) $\mathbf{J}_i = \alpha$MODUSPONENS($\overline{l_1}, \overline{l_2}$), con $\alpha \in \{\varepsilon\} \cup \{\text{TESIS}\bar{k} : k \in \mathbf{N}\}$, l_1 y l_2 anteriores a i y $(\varphi_{l_1}, \varphi_{l_2}, \varphi_i) \in ModPon^{\tau_1}$

(n) $\mathbf{J}_i = \alpha$CONJUNCIONINTRODUCCION($\overline{l_1}, \overline{l_2}$), con $\alpha \in \{\varepsilon\} \cup \{\text{TESIS}\bar{k} : k \in \mathbf{N}\}$, l_1 y l_2 anteriores a i y $(\varphi_{l_1}, \varphi_{l_2}, \varphi_i) \in ConjInt^{\tau_1}$

(o) $\mathbf{J}_i = \alpha$EQUIVALENCIAINTRODUCCION($\overline{l_1}, \overline{l_2}$), con $\alpha \in \{\varepsilon\} \cup \{\text{TESIS}\bar{k} : k \in \mathbf{N}\}$, l_1 y l_2 anteriores a i y $(\varphi_{l_1}, \varphi_{l_2}, \varphi_i) \in EquivInt^{\tau_1}$

(p) $\mathbf{J}_i = \alpha$DISJUNCIONELIMINACION($\overline{l_1}, \overline{l_2}$), con $\alpha \in \{\varepsilon\} \cup \{\text{TESIS}\bar{k} : k \in \mathbf{N}\}$, l_1 y l_2 anteriores a i y $(\varphi_{l_1}, \varphi_{l_2}, \varphi_i) \in DisjElim^{\tau_1}$

(q) $\mathbf{J}_i = \alpha$REEMPLAZO($\overline{l_1}, \overline{l_2}$), con $\alpha \in \{\varepsilon\} \cup \{\text{TESIS}\bar{k} : k \in \mathbf{N}\}$, l_1 y l_2 anteriores a i y $(\varphi_{l_1}, \varphi_{l_2}, \varphi_i) \in Reemp^{\tau_1}$

(r) $\mathbf{J}_i = \alpha$TRANSITIVIDAD($\overline{l_1}, \overline{l_2}$), con $\alpha \in \{\varepsilon\} \cup \{\text{TESIS}\bar{k} : k \in \mathbf{N}\}$, l_1 y l_2 anteriores a i y $(\varphi_{l_1}, \varphi_{l_2}, \varphi_i) \in Trans^{\tau_1}$

(s) $\mathbf{J}_i = \alpha$DIVISIONPORCASOS($\overline{l_1}, \overline{l_2}, \overline{l_3}$), con $\alpha \in \{\varepsilon\} \cup \{\text{TESIS}\bar{k} : k \in \mathbf{N}\}$, l_1, l_2 y l_3 anteriores a i y y $(\varphi_{l_1}, \varphi_{l_2}, \varphi_{l_3}, \varphi_i) \in DivPorCas^{\tau_1}$

(t) $\mathbf{J}_i = \alpha$ELECCION($\bar{l}$), con $\alpha \in \{\varepsilon\} \cup \{\text{TESIS}\bar{k} : k \in \mathbf{N}\}$, l anterior a i y $(\varphi_l, \varphi_i) \in Elec^{\tau_1}$ via un nombre de cte e, el cual no pertenece a $\mathcal{C}$ y no ocurre en $\varphi_1, ..., \varphi_{i-1}$.

(u) $\mathbf{J}_i = \alpha$GENERALIZACION($\bar{l}$), con $\alpha \in \{\varepsilon\} \cup \{\text{TESIS}\bar{k} : k \in \mathbf{N}\}$, l anterior a i y $(\varphi_l, \varphi_i) \in Generaliz^{\tau_1}$ via un nombre de cte c el cual cumple:

   (i) $c \notin \mathcal{C}$
   (ii) c no es un nombre de cte que ocurra en φ el cual sea introducido por la aplicacion de la regla de eleccion; es decir para cada $u \in \{1, ..., n(\varphi)\}$, si $\mathbf{J}_u = \alpha$ELECCION($\bar{v}$), con $\alpha \in \{\varepsilon\} \cup \{\text{TESIS}\bar{k} : k \in \mathbf{N}\}$, entonces no se da que $(\varphi_v, \varphi_u) \in Elec^{\tau_1}$ via c.
   (iii) c no ocurre en ninguna hipotesis de φ_l.
   (iv) Ningun nombre de constante que ocurra en φ_l o en sus hipotesis, depende de c

El concepto de teorema

Cuando haya una prueba de φ en (Σ,τ), diremos que φ es un *teorema* de la teoria (Σ,τ) y escribiremos $(\Sigma,\tau)\vdash\varphi$. A continuacion daremos algunos ejemplos de teoremas exibiendo sus pruebas formales.

En la teoria Po

Sea $\mu=\forall x_1\forall x_2((\forall x_3\leq(x_3,x_1)\wedge\forall x_3\leq(x_3,x_2))\rightarrow(x_1\equiv x_2))$. Veamos que μ es un teorema de Po. La idea para hacer la prueba formal es ir copiando la estructura de la prueba elemental de μ dada en la Guia 7. Para facilitar la lectura la escribiremos secuencialmente

1.	$(\forall x_3\leq(x_3,a)\wedge\forall x_3\leq(x_3,b))$	HIPOTESIS1
2.	$\forall x_3\leq(x_3,a)$	CONJUNCIONELIMINACION(1)
3.	$\leq(b,a)$	PARTICULARIZACION(2)
4.	$\forall x_3\leq(x_3,b)$	CONJUNCIONELIMINACION(1)
5.	$\leq(a,b)$	PARTICULARIZACION(4)
6.	$(\leq(a,b)\wedge\leq(b,a))$	CONJUNCIONINTRODUCCION$(5,3)$
7.	$\forall x_1\forall x_2((\leq(x_1,x_2)\wedge\leq(x_2,x_1))\rightarrow(x_1\equiv x_2))$	AXIOMAPROPIO
8.	$\forall x_2((\leq(a,x_2)\wedge\leq(x_2,a))\rightarrow(a\equiv x_2))$	PARTICULARIZACION(7)
9.	$((\leq(a,b)\wedge\leq(b,a))\rightarrow(a\equiv b))$	PARTICULARIZACION(8)
10.	$(a\equiv b)$	TESIS1MODUSPONENS$(6,9)$
11.	$((\forall x_3\leq(x_3,a)\wedge\forall x_3\leq(x_3,b))\rightarrow(a\equiv b))$	CONCLUSION
12.	$\forall x_2((\forall x_3\leq(x_3,a)\wedge\forall x_3\leq(x_3,x_2))\rightarrow(a\equiv x_2))$	GENERALIZACION(11)
13.	$\forall x_1\forall x_2((\forall x_3\leq(x_3,x_1)\wedge\forall x_3\leq(x_3,x_2))\rightarrow(x_1\equiv x_2))$	GENERALIZACION(12)

pero por supuesto, nuestra prueba formal es en realidad el par $(\varphi,\mathbf{J})$ donde φ es la concatenacion de la secuencia de sentencias de arriba y $\mathbf{J}$ es la concatenacion de la secuencia de justificaciones de arriba. Notese que las sentencias de esta prueba formal son de tipo $(\{a,b\},\emptyset,\{\leq\},\{(\leq,2)\})$ es decir extendimos τ_{Po} agregando dos nombres de constante nuevos, los cuales en la "idea" de la prueba denotan elementos fijos pero arbitrarios. O sea que para esta prueba tenemos que el $\mathcal{C}_1$ al que se refiere la definicion de prueba es el conjunto $\{a,b\}$.

En la teoria $(\emptyset,\tau)$

Veamos algunos teoremas con sus pruebas formales de esta teoria.

- Cualesquiera sean las sentencias φ_1 y φ_2 de tipo τ se tiene que $((\varphi_1\vee\varphi_2)\rightarrow$

$(\varphi_2 \vee \varphi_1))$ es un teorema de $(\emptyset, \tau)$. Una prueba formal:

1.	$(\varphi_1 \vee \varphi_2)$	HIPOTESIS1
2.	φ_1	HIPOTESIS2
3.	$(\varphi_2 \vee \varphi_1)$	TESIS2DISJUNCIONINTRODUCCION(2)
4.	$(\varphi_1 \to (\varphi_2 \vee \varphi_1))$	CONCLUSION
5.	φ_2	HIPOTESIS3
6.	$(\varphi_2 \vee \varphi_1)$	TESIS3DISJUNCIONINTRODUCCION(5)
7.	$\varphi_2 \to (\varphi_2 \vee \varphi_1)$	CONCLUSION
8.	$(\varphi_2 \vee \varphi_1)$	TESIS1DIVISIONPORCASOS$(1, 4, 7)$
9.	$((\varphi_1 \vee \varphi_2) \to (\varphi_2 \vee \varphi_1))$	CONCLUSION

- Cualesquiera sean las sentencias φ_1, φ_2 y φ_3 de tipo τ se tiene que $((\varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3)) \to ((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3))$ es un teorema de $(\emptyset, \tau)$. Una prueba formal:

1.	$(\varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3))$	HIPOTESIS1
2.	φ_1	HIPOTESIS2
3.	$(\varphi_1 \vee \varphi_2)$	DISJUNCIONINTRODUCCION(2)
4.	$((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3)$	TESIS2DISJUNCIONINTRODUCCION(3)
5.	$(\varphi_1 \to ((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3))$	CONCLUSION
6.	$(\varphi_2 \vee \varphi_3)$	HIPOTESIS3
7.	φ_2	HIPOTESIS4
8.	$(\varphi_1 \vee \varphi_2)$	DISJUNCIONINTRODUCCION(7)
9.	$((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3)$	TESIS4DISJUNCIONINTRODUCCION(8)
10.	$(\varphi_2 \to ((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3))$	CONCLUSION
11.	φ_3	HIPOTESIS5
12.	$((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3)$	TESIS5DISJUNCIONINTRODUCCION(11)
13.	$(\varphi_3 \to ((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3))$	CONCLUSION
14.	$((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3)$	TESIS3DIVISIONPORCASOS$(6, 10, 13)$
15.	$((\varphi_2 \vee \varphi_3) \to ((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3))$	CONCLUSION
16.	$((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3)$	TESIS1DIVISIONPORCASOS$(1, 5, 15)$
17.	$((\varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3)) \to ((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3))$	CONCLUSION

- Cualesquiera sean las sentencias φ y ψ la sentencia $((\varphi \wedge (\varphi \vee \psi)) \leftrightarrow \varphi)$ es un teorema de $(\emptyset, \tau)$. Una prueba formal:

1.	$(\varphi \wedge (\varphi \vee \psi))$	HIPOTESIS1
2.	φ	TESIS1CONJUNCIONELIMINACION(1)
3.	$((\varphi \wedge (\varphi \vee \psi)) \to \varphi)$	CONCLUSION
4.	φ	HIPOTESIS2
5.	$(\varphi \vee \psi)$	DISJUNCIONINTRODUCCION(4)
6.	$(\varphi \wedge (\varphi \vee \psi))$	TESIS2CONJUNCIONINTRODUCCION$(4, 5)$
7.	$(\varphi \to (\varphi \wedge (\varphi \vee \psi)))$	CONCLUSION
8.	$((\varphi \wedge (\varphi \vee \psi)) \leftrightarrow \varphi)$	EQUIVALENCIAINTRODUCCION$(3, 7)$

- Cualesquiera sean las sentencias φ y ψ la sentencia $((\varphi \vee (\varphi \wedge \psi)) \leftrightarrow \varphi)$ es un teorema de $(\emptyset, \tau)$. Una prueba formal:

1.	$(\varphi \vee (\varphi \wedge \psi))$	HIPOTESIS1
2.	φ	HIPOTESIS2
3.	φ	TESIS2EVOCACION(2)
4.	$(\varphi \to \varphi)$	CONCLUSION
5.	$(\varphi \wedge \psi)$	HIPOTESIS3
6.	φ	TESIS3CONJUNCIONELIMINACION(5)
7.	$((\varphi \wedge \psi) \to \varphi)$	CONCLUSION
8.	φ	TESIS1DIVISIONPORCASOS$(1,4,7)$
9.	$((\varphi \vee (\varphi \wedge \psi)) \to \varphi)$	CONCLUSION
10.	φ	HIPOTESIS4
11.	$(\varphi \vee (\varphi \wedge \psi))$	TESIS4DISJUNCIONINTRODUCCION(10)
12.	$(\varphi \to (\varphi \vee (\varphi \wedge \psi)))$	CONCLUSION
13.	$((\varphi \vee (\varphi \wedge \psi)) \leftrightarrow \varphi)$	EQUIVALENCIAINTRODUCCION$(9,12)$

- Cualesquiera sean las sentencias φ_1, φ_2 y φ la sentencia $((\varphi \wedge (\varphi_1 \vee \varphi_2)) \to ((\varphi \wedge \varphi_1) \vee (\varphi \wedge \varphi_2)))$ es un teorema de $(\emptyset, \tau)$. Una prueba formal:

1.	$(\varphi \wedge (\varphi_1 \vee \varphi_2))$	HIPOTESIS1
2.	φ	CONJUNCIONELIMINACION(1)
3.	$(\varphi_1 \vee \varphi_2)$	CONJUNCIONELIMINACION(1)
4.	φ_1	HIPOTESIS2
5.	$(\varphi \wedge \varphi_1)$	CONJUNCIONINTRODUCCION$(2,4)$
6.	$((\varphi \wedge \varphi_1) \vee (\varphi \wedge \varphi_2))$	TESIS2DISJUNCIONINTRODUCCION(5)
7.	$(\varphi_1 \to ((\varphi \wedge \varphi_1) \vee (\varphi \wedge \varphi_2)))$	CONCLUSION
8.	φ_2	HIPOTESIS3
9.	$(\varphi \wedge \varphi_2)$	CONJUNCIONINTRODUCCION$(2,8)$
10.	$((\varphi \wedge \varphi_1) \vee (\varphi \wedge \varphi_2))$	TESIS3DISJUNCIONINTRODUCCION(9)
11.	$(\varphi_2 \to ((\varphi \wedge \varphi_1) \vee (\varphi \wedge \varphi_2)))$	CONCLUSION
12.	$((\varphi \wedge \varphi_1) \vee (\varphi \wedge \varphi_2))$	TESIS1DIVISIONPORCASOS$(3,7,11)$
13.	$((\varphi \wedge (\varphi_1 \vee \varphi_2)) \to ((\varphi \wedge \varphi_1) \vee (\varphi \wedge \varphi_2)))$	CONCLUSION

- Cualesquiera sean las sentencias φ_1, φ_2 y φ la sentencia $(((\varphi \wedge \varphi_1) \vee (\varphi \wedge$

$\varphi_2)) \rightarrow (\varphi \wedge (\varphi_1 \vee \varphi_2)))$ es un teorema de $(\emptyset, \tau)$. Una prueba formal:

1.	$((\varphi \wedge \varphi_1) \vee (\varphi \wedge \varphi_2))$	HIPOTESIS1
2.	$(\varphi \wedge \varphi_1)$	HIPOTESIS2
3.	φ	CONJUNCIONELIMINACION(2)
4.	φ_1	CONJUNCIONELIMINACION(2)
5.	$(\varphi_1 \vee \varphi_2)$	DISJUNCIONINTRODUCCION(4)
6.	$(\varphi \wedge (\varphi_1 \vee \varphi_2))$	TESIS2CONJUNCIONINTRODUCCION$(3, 5)$
7.	$((\varphi \wedge \varphi_1) \rightarrow (\varphi \wedge (\varphi_1 \vee \varphi_2)))$	CONCLUSION
8.	$(\varphi \wedge \varphi_2)$	HIPOTESIS3
9.	φ	CONJUNCIONELIMINACION(8)
10.	φ_2	CONJUNCIONELIMINACION(8)
11.	$(\varphi_1 \vee \varphi_2)$	DISJUNCIONINTRODUCCION(10)
12.	$(\varphi \wedge (\varphi_1 \vee \varphi_2))$	TESIS3CONJUNCIONINTRODUCCION$(9, 11)$
13.	$((\varphi \wedge \varphi_2) \rightarrow (\varphi \wedge (\varphi_1 \vee \varphi_2)))$	CONCLUSION
14.	$(\varphi \wedge (\varphi_1 \vee \varphi_2))$	TESIS1DIVISIONPORCASOS$(1, 7, 13)$
15.	$(((\varphi \wedge \varphi_1) \vee (\varphi \wedge \varphi_2)) \rightarrow (\varphi \wedge (\varphi_1 \vee \varphi_2)))$	CONCLUSION

Ejercicio 9: Sea τ un tipo cualquiera y sean $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ sentencias de tipo τ. Dar pruebas de las siguientes sentencias en la teoria $(\emptyset, \tau)$

(a) $((\varphi_1 \wedge \varphi_2) \rightarrow (\varphi_2 \wedge \varphi_1))$

(b) $(((\varphi_1 \wedge \varphi_2) \rightarrow \varphi_3) \leftrightarrow (\varphi_1 \rightarrow (\varphi_2 \rightarrow \varphi_3)))$

(c) $((\varphi_1 \rightarrow \varphi_2) \leftrightarrow (\neg\varphi_1 \vee \varphi_2))$

(d) $(\neg(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \leftrightarrow (\neg\varphi_1 \vee \neg\varphi_2))$

A continuacion damos varias sentencias para que el lector de pruebas formales en $RetCua$. La forma mas facil de hacer esto es primero dar la prueba elemental tal como se lo hizo en la Guia 6 (algunas fueron dejadas como ejercicios) y luego traducir la prueba elemental a una prueba formal. No se recomienda al lector que "cuan escarabajo" intente aplicar las reglas mecanicamente para obtener la prueba formal. Todo lo contrario el debe volver a la Guia 6 y hacer la respectiva prueba elemental imaginando como matematico la "novela" de su prueba elemental para luego dedicarse a traducirla a una formal. Cabe destacar que dar una prueba formal concreta en este caso no es ni mas ni menos que dar una formalizacion matematicamente perfecta de la matematica informal del contexto de la respectiva prueba elemental. Es decir estamos formalizando "porciones de matematica real".

Ejercicio 10: De una prueba formal de $\forall x_1(\mathsf{s}(x_1, x_1) \equiv x_1)$ en $RetCua$

Ejercicio 11: De una prueba formal de $\forall x_1 \forall x_2(\mathsf{s}(x_1, x_2) \equiv \mathsf{s}(x_2, x_1))$ en $RetCua$

Ejercicio 12: De una prueba formal de $\forall x_1 \forall x_2(\mathsf{i}(\mathsf{s}(x_1, x_2), x_1) \equiv x_1)$ en $RetCua$

Ejercicio 13: De una prueba formal de $\forall x_1 \forall x_2(\mathsf{s}(x_1, x_2) \equiv \mathsf{s}(x_2, x_1))$ en $RetCua$

Ejercicio 14: De una prueba formal de $\forall x_1 \forall x_2 (\leq (x_1, x_2) \leftrightarrow (\mathsf{s}(x_1, x_2) \equiv x_2))$ en *RetCua*

Observacion: En lo que sigue escribiremos las sentencias de una forma mas amigable pero el lector debe entender que nos estamos refiriendo a sentencias de tipo τ. Por ejemplo escribiremos $\forall x \forall y (x \ \mathsf{s} \ y \equiv y \ \mathsf{s} \ x)$ en lugar de $\forall x_1 \forall x_2 (\mathsf{s}(x_1, x_2) \equiv \mathsf{s}(x_2, x_1))$. Tambien para escribir las pruebas formales haremos lo mismo, pero siempre hay que entender que es una manera de hacer mas amena la notacion y que tanto las sentencias como las pruebas que haremos estan reemplazando a las verdaderas sentencias y pruebas formales.

Ejercicio 15: Dar pruebas formales en *RetCua* de cada una de las siguientes sentencias de tipo τ_{RetCua}.

(a) $\forall x \forall y \forall z \ (x \ \mathsf{s} \ y) \ \mathsf{s} \ z \equiv x \ \mathsf{s} \ (y \ \mathsf{s} \ z)$

(b) $\forall x \forall y \forall z \forall w ((x \leq z \wedge y \leq w) \rightarrow (x \ \mathsf{s} \ y \leq z \ \mathsf{s} \ w))$

(c) $\forall x \forall y \forall z \ (x \ \mathsf{i} \ y) \ \mathsf{s} \ (x \ \mathsf{i} \ z) \leq x \ \mathsf{i} \ (y \ \mathsf{s} \ z)$

(d) $(\forall xyz \ x \ \mathsf{i} \ (y \ \mathsf{s} \ z) \equiv (x \ \mathsf{i} \ y) \ \mathsf{s} \ (x \ \mathsf{i} \ z) \rightarrow \forall xy \ (\exists z (x \ \mathsf{i} \ z \equiv y \ \mathsf{i} \ z \wedge x \ \mathsf{s} \ z \equiv y \ \mathsf{s} \ z) \rightarrow x \equiv y))$

(e) $(\forall xyz \ x \ \mathsf{i} \ (y \ \mathsf{s} \ z) \equiv (x \ \mathsf{i} \ y) \ \mathsf{s} \ (x \ \mathsf{i} \ z) \rightarrow \forall xyz \ x \ \mathsf{s} \ (y \ \mathsf{i} \ z) \equiv (x \ \mathsf{s} \ y) \ \mathsf{i} \ (x \ \mathsf{s} \ z))$

(f) $\forall x \ (\neg \exists z (x \leq z \wedge \neg (z \equiv x)) \rightarrow \forall z (z \leq x))$

(Hint: primero dar la prueba elemental como cualquier matematico lo haria y luego traducir la prueba elemental a una prueba formal)

Ejercicio 16: Sea $\tau = (\emptyset, \emptyset, \{\mathrm{rel}^2\}, a)$. Sea T la teoria $(\{\forall x \exists y (\mathrm{rel}(x, y) \vee \mathrm{rel}(y, x))\}, \tau)$.

(a) Describa los los modelos de T

(b) De una prueba formal de $\forall x (\forall y \neg \mathrm{rel}(x, y) \rightarrow \exists z \mathrm{rel}(z, x))$ en T.

Ejercicio 17: Sea $\tau = (\{\mathrm{tot}\}, \{\mathrm{f}^1, \mathrm{g}^1, +^2\}, \emptyset, a)$, y sea Σ el conjunto formado por los siguientes axiomas:

$\exists y \ (\mathrm{tot} \equiv y + y \wedge \mathrm{tot} \equiv \mathrm{f}(y) + \mathrm{g}(y))$

$\mathrm{tot} \equiv \mathrm{f}(\mathrm{tot}) + \mathrm{g}(\mathrm{tot})$

$+$ es asociativa

$+$ es conmutativa

$\forall x \forall y \ \mathrm{f}(x + y) \equiv \mathrm{f}(x) + \mathrm{f}(y)$

$\forall x \forall y \ \mathrm{g}(x + y) \equiv \mathrm{g}(x) + \mathrm{g}(y)$

De una prueba formal que atestigue que $(\Sigma, \tau) \vdash \mathrm{tot} + \mathrm{tot} \equiv \mathrm{tot}$

Ejercicio 18: Sea $\tau = (\emptyset, \{\mathrm{Op}^1\}, \emptyset, a)$ y sea $T = (\{\forall x_1(\mathrm{Op}(\mathrm{Op}(x_1)) \equiv x_1)\}, \tau)$. De pruebas formales en T de las sentencias

(a) $\forall x_1 \forall x_2(\neg(x_1 \equiv x_2) \rightarrow \neg(\mathrm{Op}(x_1) \equiv \mathrm{Op}(x_2)))$

(b) $\forall x_1 \exists x_2(\mathrm{Op}(x_2) \equiv x_1)$

Ejercicio 19: Sea $\tau = (\{0, 1\}, \{\mathsf{s}^2, \mathsf{i}^2, \mathrm{Op}^1\}, \{\leq^2\}, a)$ y sea Σ formado por los axiomas de $RetCua$ junto con los axiomas:

$\forall x\ x \leq 1$

$\forall x\ 0 \leq x$

$\forall x\ (\mathrm{Op}(\mathrm{Op}(x)) \equiv x)$

$\forall x \forall y\ ((x \leq y) \rightarrow (\mathrm{Op}(y) \leq \mathrm{Op}(x)))$

De una prueba formal en (Σ, τ) de la sentencia $(\mathrm{Op}(0) \equiv 1)$

Conteo de modelos modulo isomorfismo

Es importante en el analisis de una teoria dada, entender como son sus modelos. Esto nos permite muchas veces sacar conclusiones importantes acerca del poder deductivo de dicha teoria (es decir acerca del conjunto de sus teoremas). Cuanto mas entendamos la naturaleza de los modelos de una teoria mas chanse tenemos de dar pruebas elementales y esto deberia quedar claro del hecho que cuando un matematico da una prueba elemental el esta pensando en un modelo generico de dicha teoria. Por ejemplo si la teoria es $RetCua$ el matematico tiene en mente un reticulado cuaterna y por supuesto cuanto mas sepa y entienda este concepto mas chanse tiene de encontrar pruebas elementales en $RetCua$

Un buen entrenamiento en el estudio de los modelos de una teoria consiste en contar modulo isomorfismo cuantos modelos tiene de una cardinalidad dada. Como lo vimos para posets y reticulados, contar "modulo isomorfismo" es contar pensando que dos estructuras isomorfas son "iguales" y por lo tanto aportan 1 a nuestra cuenta. Mas formalmente diremos que una teoria T *tiene, modulo isomorfismo, exactamente una cantidad n de modelos de m elementos* si hay $\mathbf{A}_1, ..., \mathbf{A}_n$ estructuras de tipo τ tales que:

1. Cada $\mathbf{A}_i$ es un modelo de T
2. $|A_i| = m$, para cada $i = 1, ..., n$
3. $\mathbf{A}_i$ no es isomorfa a $\mathbf{A}_j$ cada ves que i es distinto de j
4. Si $\mathbf{A}$ es un modelo de la teoria T y $|A| = m$, entonces $\mathbf{A}$ es isomorfo a $\mathbf{A}_i$ para algun i

Como puede notarse para contar estructuras modulo isomorfismo nos sera necesario probar que ciertas estructuras no son isomorfas. El siguiente criterio es muy util:

NoHayIso Si dos estructuras de tipo τ son tales que hay una $\varphi \in S^\tau$ la cual vale en una y no en la otra, entonces dichas estructuras no son isomorfas

Dejamos como ejercicio justificar este criterio usando un lema del final de la Guia 10. Cabe destacar que el criterio anterior no es completo, es decir dos estructuras $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ pueden satisfacer las mismas sentencias pero ser no isomorfas. Un ejemplo natural de esto se obtiene tomando $\tau = (\emptyset, \emptyset, \{\leq^2\}, a)$ y $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ dadas por

$$\begin{array}{ll} A = \mathbf{Q} & \leq^{\mathbf{A}} = \text{orden usual de } \mathbf{Q} \\ B = \mathbf{R} & \leq^{\mathbf{B}} = \text{orden usual de } \mathbf{R} \end{array}$$

No daremos la prueba de este hecho pero es un interesante ejercicio para el estudiante avanzado.

Ejercicio 20: Pruebe que modulo isomorfismo la teoria Po tiene exactamente 2 modelos de 2 elementos.

Ejercicio 21: Sea $\tau = (\emptyset, \emptyset, \{\leq^2, r^1\}, a)$. Sea Σ el conjunto formado por los axiomas que dicen que $\leq$ es un orden parcial junto con el axioma $\forall x \forall y\ (r(x) \wedge r(y) \rightarrow x \equiv y)$. Diga cuantos modelos de dos elementos tiene la teoria (Σ, τ), modulo isomorfismo

Ejercicio 22: Sea $\tau = (\{c\}, \emptyset, \{\leq^2, r^1\}, a)$. Sea Σ el conjunto formado por los axiomas que dicen que $\leq$ es un orden parcial junto con el axioma $\forall x \forall y\ (r(x) \wedge r(y) \rightarrow x \equiv y)$. Diga cuantos modelos de tres elementos tiene la teoria (Σ, τ), modulo isomorfismo

Ejercicio 23: Sean $n, m \in \mathbf{N}$. Defina matematicamente que significa que

(a) una teoria T tenga, modulo isomorfismo, exactamente n modelos

(b) una teoria T tenga, modulo isomorfismo, exactamente n modelos de cardinal menor o igual a m

(c) una teoria T tenga, modulo isomorfismo, exactamente n modelos con universo igual al conjunto de numeros naturales $\{1, 2, 3\}$

Ejercicio 24: Sea $\tau = (\{c\}, \emptyset, \{\leq^2, r^1\}, a)$ y sea Σ el conjunto formado por los axiomas que dicen que $\leq$ es un orden parcial junto con los siguientes axiomas

$\forall x\ (r(x) \rightarrow \exists z\ x \leq z \wedge \neg(x \equiv z))$

$\exists z \forall x\ (\neg(x \equiv z) \rightarrow (\neg(x \leq z) \wedge \neg(z \leq x)))$

$\forall x, y, z, w\ \ (x \equiv y \vee x \equiv z \vee x \equiv w \vee y \equiv z \vee y \equiv w \vee z \equiv w)$

(a) Diga cuantos modelos modulo isomorfismo tiene la teoria (Σ, τ)

Ejercicio 25: Sea $\tau = (\{0, 1, \mathrm{me}\}, \{\mathsf{s}^2, \mathsf{i}^2\}, \{\leq^2\}, a)$ y sea Σ formado por los axiomas de $RetCua$ junto con los axiomas:

$\forall x\ x \leq 1$

$\forall x\ 0 \leq x$

$\neg(\mathrm{me} \equiv 0) \wedge \neg(\mathrm{me} \equiv 1) \wedge \forall z((\mathrm{me} \leq z) \vee (z \leq \mathrm{me})))$

(a) Diga en forma hablada o mediante un grafico que son "esencialmente" los modelos de (Σ, τ)

(b) Diga, modulo isomorfismo, cuantos modelos de (Σ, τ) hay, con universo de exactamente 5 elementos. Justifique cuando afirme que dos modelos no son isomorfos.

(c) De una prueba formal que atestigue que

$$(\Sigma, \tau) \vdash \forall x\ (\exists z (x\ \mathsf{i}\ z \equiv 0 \wedge x\ \mathsf{s}\ z \equiv 1) \to (x \equiv 0 \vee x \equiv 1))$$

Ejercicio 26: Sea $\tau = (\{0, 1, \mathrm{mono}\}, \{\mathsf{s}^2, \mathsf{i}^2\}, \{\leq^2\}, a)$ y sea Σ formado por los axiomas de $RetCua$ junto con los axiomas:

$\forall x\ x \leq 1$

$\forall x\ 0 \leq x$

$\neg(\mathrm{mono} \equiv 0)$

$\forall x\ (\neg(x \equiv 0) \to \mathrm{mono} \leq x)$

(a) Diga en forma hablada o mediante un grafico que son "esencialmente" los modelos de (Σ, τ)

(b) Diga, modulo isomorfismo, cuantos modelos de (Σ, τ) hay, con universo de exactamente 5 elementos. Justifique cuando afirme que dos modelos no son isomorfos.

(c) De una prueba formal que atestigue que

$$(\Sigma, \tau) \vdash \forall x\ (\exists z (x\ \mathsf{i}\ z \equiv 0 \wedge x\ \mathsf{s}\ z \equiv 1) \to (x \equiv 0 \vee x \equiv 1))$$

Propiedades basicas de pruebas y teoremas

Por supuesto los numeros asociados a las hipotesis en una prueba son completamente arbitrarios y pueden cambiarse, es decir:

Lemma 6 ([Cambio de indice de hipotesis) *Sea $(\varphi, \mathbf{J})$ una prueba formal de φ en (Σ, τ). Sea $m \in \mathbf{N}$ tal que $\mathbf{J}_i \neq \mathrm{HIPOTESIS}\bar{m}$, para cada $i = 1, ..., n(\varphi)$. Supongamos que $\mathbf{J}_i = \mathrm{HIPOTESIS}\bar{k}$ y que $\mathbf{J}_j = \mathrm{TESIS}\bar{k}\alpha$, con $[\alpha]_1 \notin Num$. Sea $\tilde{\mathbf{J}}$ el resultado de reemplazar en $\mathbf{J}$ la justificacion $\mathbf{J}_i$ por $\mathrm{HIPOTESIS}\bar{m}$ y reemplazar la justificacion $\mathbf{J}_j$ por $\mathrm{TESIS}\bar{m}\alpha$. Entonces $(\varphi, \tilde{\mathbf{J}})$ es una prueba formal de φ en (Σ, τ).*

Tambien podemos cambiar los nombres de cte auxiliares

Lemma 7 ([Cambio de ctes auxiliares) *Sea $(\varphi, \mathbf{J})$ una prueba formal de φ en (Σ, τ). Sea $\mathcal{C}_1$ el conjunto de nombres de constante que ocurren en φ y que no pertenecen a $\mathcal{C}$. Sea $e \in \mathcal{C}_1$. Sea $\tilde{e} \notin \mathcal{C} \cup \mathcal{C}_1$ tal que $(\mathcal{C} \cup (\mathcal{C}_1 - \{e\}) \cup \{\tilde{e}\}, \mathcal{F}, \mathcal{R}, a)$ es un tipo. Sea $\tilde{\varphi}_i$ = resultado de reemplazar en φ_i cada ocurrencia de e por $\tilde{e}$. Entonces $(\tilde{\varphi}_1 ... \tilde{\varphi}_{n(\varphi)}, \mathbf{J})$ es una prueba formal de φ en (Σ, τ).*

Aceptaremos sin prueba los lemas anteriores pero:

Ejercicio 27: Medite hasta creer fuertemente en la veracidad de los lemas anteriores

Por una prueba del siguiente lema ver el apunte.

Lemma 8 ([Propiedades basicas de $\vdash$) *Sea (Σ, τ) una teoria.*

(1) (Uso de Teoremas) Si $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi_1, ..., \varphi_n$ y $(\Sigma \cup \{\varphi_1, ..., \varphi_n\}, \tau) \vdash \varphi$, entonces $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$.

(2) Supongamos $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi_1, ..., \varphi_n$. Si R es una regla distinta de GENERALIZACION y ELECCION y φ se deduce de $\varphi_1, ..., \varphi_n$ por la regla R, entonces $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$.

(3) $(\Sigma, \tau) \vdash (\varphi \rightarrow \psi)$ si y solo si $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau) \vdash \psi$.

Ejercicio 28: Haga un bosquejo de la prueba de (1) del lema anterior, para el caso $n = 1$. Convensase que iterando el caso $n = 1$, obtenemos el caso general.

Ejercicio 29: Pruebe (2), usando (1)

Ejercicio 30: Pruebe el "solo si" de (3) usando (2)

Ejercicio 31: Haga un bosquejo de la prueba del "si" de (3)

Consistencia

Una teoria (Σ, τ) sera *inconsistente* cuando haya una sentencia φ tal que $(\Sigma, \tau) \vdash (\varphi \wedge \neg\varphi)$. Una teoria (Σ, τ) sera *consistente* cuando no sea inconsistente.

Lemma 9 ([Propiedades basicas de la consistencia) *Sea (Σ, τ) una teoria.*

(1) Si (Σ, τ) es inconsistente, entonces $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$, para toda sentencia φ.

(2) Si (Σ, τ) es consistente y $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$, entonces $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau)$ es consistente.

(3) Si $(\Sigma,\tau)\nvdash\neg\varphi$*, entonces* $(\Sigma\cup\{\varphi\},\tau)$ *es consistente.*

Proof. (1) Si (Σ,τ) es inconsistente, entonces por definicion tenemos que $(\Sigma,\tau)\vdash\psi\wedge\neg\psi$ para alguna sentencia ψ. Dada una sentencia cualquiera φ tenemos que φ se deduce por la regla del absurdo a partir de $\psi\wedge\neg\psi$ con lo cual (2) del Lema 8 nos dice que $(\Sigma,\tau)\vdash\varphi$

(2) Supongamos (Σ,τ) es consistente y $(\Sigma,\tau)\vdash\varphi$. Si $(\Sigma\cup\{\varphi\},\tau)$ fuera inconsistente, entonces $(\Sigma\cup\{\varphi\},\tau)\vdash\psi\wedge\neg\psi$, para alguna sentencia ψ, lo cual por (1) del Lema 8 nos diria que $(\Sigma,\tau)\vdash\psi\wedge\neg\psi$, es decir nos diria que (Σ,τ) es inconsistente.

Dejamos (3) como ejercicio ■

Ejercicio 32: Pruebe (3) del lema anterior

El teorema de correccion

Como ya vimos en las secciones anteriores, el concepto matematico de prueba formal en una teoria (Σ,τ) fue hecho como un intento de modelizar ciertas pruebas que realizan los matematicos profecionales, a las que llamamos pruebas elementales. Es claro que cuando un matematico hace una prueba elemental de una setencia φ en una teoria (Σ,τ), comienza imaginando una estructura $\mathbf{A}$ de tipo τ de la cual lo unico que sabe es que ella satisface todas las sentencias de Σ, y luego al finalizar la prueba concluye que dicho modelo imaginario satisface la ultima sentencia de la prueba. En algun sentido la mision de una prueba es justamente eso: justificar con solidez que la sentencia a probar vale en todos los modelos de la teoria.

O sea que si nuestro concepto de prueba formal permitiera probar sentencias que no sean verdaderas en todos los modelos de la teoria, no seria correcto. Este no es el caso y el teorema que asegura que las pruebas formales solo prueban sentencias verdaderas en todos los modelos se llama Teorema de Correccion. Lo enunciaremos fomalmente a continuacion aunque no daremos la prueba ya que es dificultosa. Antes una definicion. Dada (Σ,τ) una teoria, escribiremos $(\Sigma,\tau)\models\varphi$ cuando φ sea verdadera en todo modelo de (Σ,τ).

Theorem 10 (Teorema de Correccion) $(\Sigma,\tau)\vdash\varphi$ *implica* $(\Sigma,\tau)\models\varphi$*.*

Cabe destacar que el teorema de correccion hace parte de la tarea encomendada en el punto (4) del programa de logica dado en la Guia 7 ya que asegura que nuestro concepto de prueba formal no es demaciado permisivo como para permitir probar sentencias que son falsas en algun modelo de la teoria. Pero dicho concepto podria ser incorrecto en el sentido que podria haber pruebas elementales dadas por matematicos la cuales no puedan ser simuladas por pruebas formales. Por ejemplo podria pasar que mañana un matematico diera una prueba elemental de una sentencia φ en una teoria (Σ, τ) pero que no haya una prueba formal de φ en (Σ, τ). En tal caso nuestro modelo de prueba formal seria un modelo erroneo del concepto de prueba elemental, por ser incompleto. Por supuesto en ese caso podriamos mejorarlo viendo la prueba elemental dada por dicho matematico y enrriquesiendo a la luz de dicha prueba nuestra definicion de prueba formal. De todas maneras nos quedaria la duda de que aun esta nueva definicion de prueba sea incompleta .... Como veremos el Teorema de Completitud de Godel prueba que este no es el caso!

Un corolario muy importante del Teorema de Correccion es el siguiente.

Corollary 11 *Si (Σ, τ) tiene un modelo, entonces (Σ, τ) es consistente.*

Proof. Supongamos $\mathbf{A}$ es un modelo de (Σ, τ). Si (Σ, τ) fuera inconsistente, entonces toda sentencia de tipo τ seria un teorema de (Σ, τ), en particular tendriamos que $\exists x_1 \neg(x_1 \equiv x_1)$ seria un teorema de (Σ, τ), lo cual por el Teorema de Correccion nos diria que $\mathbf{A} \models \exists x_1 \neg(x_1 \equiv x_1)$, lo cual no es cierto. O sea que (Σ, τ) es consistente ■

El teorema de correccion es muy util para asegurar que una sentencia no es un teorema de una teoria dada. Mas concretamente tenemos el siguiente criterio:

NoEsTeorema Si ud quiere probar que una sentencia $\varphi \in F^\tau$ no es teorema de una teoria (Σ, τ) basta con encontrar un modelo de (Σ, τ) para el cual φ sea falsa.

Ejercicio 33: Justifique el criterio anterior, es decir pruebe que si (Σ, τ) tiene un modelo en el cual φ es falsa, entonces φ no es un teorema de (Σ, τ)

Ejercicio 34: Pruebe que ni $\forall x \forall y \forall z\ (x \mathsf{\ i\ } y) \mathsf{\ s\ } (x \mathsf{\ i\ } z) \equiv x \mathsf{\ i\ } (y \mathsf{\ s\ } z)$ ni su negacion son teoremas de $RetCua$.

Ejercicio 35: Es la siguiente sentencia un teorema de $RetCua$?

$$\forall xyz\ ((x \mathsf{\ i\ } (y \mathsf{\ s\ } z) \equiv (x \mathsf{\ i\ } y) \mathsf{\ s\ } (x \mathsf{\ i\ } z) \rightarrow x \mathsf{\ s\ } (y \mathsf{\ i\ } z) \equiv (x \mathsf{\ s\ } y) \mathsf{\ i\ } (x \mathsf{\ s\ } z))$$

Ejercicio 36: Sea $T = (\Sigma, \tau)$ una teoría y φ una sentencia de τ tal que $T \vdash \varphi$, entonces o φ es universalmente valida o existen $\varphi_1, ..., \varphi_n \in \Sigma$, con $n \geq 1$, tales que $((\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_n) \rightarrow \varphi)$ es universalmente válida.

Ejercicio 37: V o F o I, justifique

(a) Sea $T = (\Sigma, \tau)$ una teoría y $\varphi, \phi \in S^\tau$ tales que $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau)$ y $(\Sigma \cup \{\phi\}, \tau)$ son ambas teorías consistentes. Entonces $(\Sigma \cup \{\varphi, \phi\}, \tau)$ es consistente

(b) Sea (Σ,τ) una teoria consistente. Si $(\Sigma,\tau)\vdash\varphi$ y $(\Sigma\cup\{\varphi\},\tau)\nvdash\neg\psi$, entonces $(\Sigma,\tau)\vdash\psi$

(c) Sea (Σ,τ) una teoria consistente. Entonces $(\Sigma,\tau)\vdash(\varphi\rightarrow\psi)$ si y solo si $(\Sigma\cup\{\varphi\},\tau)\nvdash\neg\psi$

(d) Sea (Σ,τ) una teoria consistente. Entonces $(\Sigma,\tau)\vdash(\varphi\vee\psi)$ si y solo si $(\Sigma,\tau)\vdash\varphi$ o $(\Sigma,\tau)\vdash\psi$

Concluimos la subseccion dando algunos ejemplos que muestran que si hacemos mas permisiva la definicion de prueba formal, esta ya no resulta correcta. Recomendamos al lector dejar estos ejemplos para una "segunda pasada" en el estudio de la materia

Ejemplo 1: Este ejemplo muestra que en la sentencia a generalizar (dentro de una prueba formal) no puede ocurrir un nombre de cte el cual dependa del nombre de cte a generalizar. Sea $\tau=(\emptyset,\{f^1\},\emptyset,a)$ y sea $\Sigma=\{\forall y\exists x\ y\equiv f(x)\}$. Sea $T=(\Sigma,\tau)$. Notese que una estructura $\mathbf{A}$ de tipo τ es modelo de T sii $f^{\mathbf{A}}$ es una funcion sobre. Consideremos

1.	$\forall y\exists x\ y\equiv f(x)$	AXIOMAPROPIO
2.	$\exists x\ y_0\equiv f(x)$	PARTICULARIZACION(1)
3.	$y_0\equiv f(e)$	ELECCION(2)
4.	$\forall y\ y\equiv f(e)$	GENERALIZACION(3)
5.	$c\equiv f(e)$	PARTICULARIZACION(4)
6.	$d\equiv f(e)$	PARTICULARIZACION(4)
7.	$f(e)\equiv d$	COMMUTATIVIDAD(6)
8.	$c\equiv d$	TRANSITIVIDAD(5, 7)
9.	$\forall y\ c\equiv y$	GENERALIZACION(8)
10.	$\forall x\forall y\ x\equiv y$	GENERALIZACION(9)

Obviamente, si permitieramos que lo anterior fuera una prueba formal, dejaria de valer el teorema de correccion ya que hay muchos modelos de T, los cuales no satisfacen $\forall x\forall y\ x\equiv y$.

Ejemplo 2: El siguiente ejemplo muestra que el nombre de cte a generalizar no puede ocurrir en hipotesis de la sentencia a la cual se le aplica la generalizacion. Sea $\tau=(\{1\},\emptyset,\emptyset,\emptyset)$ y sea $T=(\emptyset,\tau)$. Consideremos

1.	$c\equiv 1$	HIPOTESIS1
2.	$\forall x\ x\equiv 1$	TESIS1GENERALIZACION(1)
3.	$(c\equiv 1\rightarrow\forall x\ x\equiv 1)$	CONCLUSION
4.	$\forall y\ (y\equiv 1\rightarrow\forall x\ x\equiv 1)$	GENERALIZACION(3)
5.	$(1\equiv 1\rightarrow\forall x\ x\equiv 1)$	PARTICULARIZACION(4)
6.	$1\equiv 1$	AXIOMALOGICO
7.	$\forall x\ x\equiv 1$	MODUSPONENS(5, 6)

Si permitieramos que lo anterior fuera una prueba formal, dejaria de valer el teorema de correccion ya que hay muchos modelos de T (toda estructura es un modelo de T) los cuales no satisfacen $\forall x\ x\equiv 1$.

Ejemplo 3: El siguiente ejemplo muestra que la sentencia a generalizar no puede tener una hipotesis en las cual ocurra un nombre de cte que dependa del nombre de cte que se generaliza. Sea $\tau = (\emptyset, \emptyset, \emptyset, \emptyset)$ y sea $T = (\emptyset, \tau)$. Consideremos

1.	$c \equiv c$	AXIOMALOGICO
2.	$\exists z\ z \equiv c$	EXISTENCIA(1)
3.	$e \equiv c$	ELECCION(2)
4.	$d \equiv e$	HIPOTESIS1
5.	$d \equiv c$	TRANSITIVIDAD(4, 3)
6.	$\forall y\ d \equiv y$	TESIS1GENERALIZACION(5)
7.	$d \equiv e \rightarrow \forall y\ d \equiv y$	CONCLUSION
8.	$\forall x(x \equiv e \rightarrow \forall y\ x \equiv y)$	GENERALIZACION(7)
9.	$e \equiv e \rightarrow \forall y\ e \equiv y$	PARTICULARIZACION(8)
10.	$e \equiv e$	AXIOMALOGICO
11.	$\forall y\ e \equiv y$	MODUSPONENS(10, 9)
12.	$\forall y\ c \equiv y$	REEMPLAZO(3, 11)
13.	$\forall x \forall y\ x \equiv y$	GENERALIZACION(12)