Combo 4 de definiciones y convenciones notacionales

Emanuel Nicolás Herrador - November 2024

1 $(L, s, i, {}^c, 0, 1)$ subreticulado complementado de $(L', s', i', {}^{c'}, 0', 1')$

> Defina "$(L, s, i, {}^c, 0, 1)$ es subreticulado complementado de $(L', s', i', {}^{c'}, 0', 1')$"

Dados reticulados complementados $(L, s, i, {}^c, 0, 1)$ y $(L', s', i', {}^{c'}, 0', 1')$ diremos que $(L, s, i, {}^c, 0, 1)$ es un subreticulado complementado de $(L', s', i', {}^{c'}, 0', 1')$ si se dan las siguientes condiciones:

1. $L \subseteq L'$
2. L es cerrado bajo las operaciones $s', i', {}^{c'}$
3. $0 = 0'$ y $1 = 1'$
4. $s = s'|_{L\times L},\ i = i'|_{L\times L}$ y ${}^c = {}^{c'}|_L$

2 $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}]$

> Defina $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}]$ (versión absoluta, no dependiente de una declaración previa, i.e., $\vec{a} \in A^N$. No hace falta definir $t^{\mathbf{A}}[\vec{a}]$)

Sea $\mathbf{A}$ una estructura de tipo τ, $\vec{a}$ una asignación y $\varphi \in F^\tau$, definiremos recursivamente la relación $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}]$ (escribiremos $\mathbf{A} \not\models \varphi[\vec{a}]$ para expresar que no se da $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}]$):

1. Si $\varphi = (t \equiv s)$: $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}]$ sii $t^{\mathbf{A}}[\vec{a}] = s^{\mathbf{A}}[\vec{a}]$
2. Si $\varphi = r(t_1, \ldots, t_m)$: $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}]$ sii $(t_1^{\mathbf{A}}[\vec{a}], \ldots, t_m^{\mathbf{A}}[\vec{a}]) \in i(r)$
3. Si $\varphi = (\varphi_1 \wedge \varphi_2)$: $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}]$ sii $\mathbf{A} \models \varphi_1[\vec{a}]$ y $\mathbf{A} \models \varphi_2[\vec{a}]$
4. Si $\varphi = (\varphi_1 \vee \varphi_2)$: $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}]$ sii $\mathbf{A} \models \varphi_1[\vec{a}]$ o $\mathbf{A} \models \varphi_2[\vec{a}]$
5. Si $\varphi = (\varphi_1 \rightarrow \varphi_2)$: $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}]$ sii $\mathbf{A} \not\models \varphi_1[\vec{a}]$ o $\mathbf{A} \models \varphi_2[\vec{a}]$
6. Si $\varphi = (\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2)$: $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}]$ sii se dan ($\mathbf{A} \models \varphi_1[\vec{a}]$ y $\mathbf{A} \models \varphi_2[\vec{a}]$) o se dan ($\mathbf{A} \not\models \varphi_1[\vec{a}]$ y $\mathbf{A} \not\models \varphi_2[\vec{a}]$)
7. Si $\varphi = \neg\varphi_1$: $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}]$ sii $\mathbf{A} \not\models \varphi_1[\vec{a}]$
8. Si $\varphi = \forall x_i \varphi_1$: $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}]$ sii $\forall a \in A,\ \mathbf{A} \models \varphi_1[\downarrow_i^a (\vec{a})]$
9. Si $\varphi = \exists x_i \varphi_1$: $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}]$ sii $\exists a \in A : \mathbf{A} \models \varphi_1[\downarrow_i^a (\vec{a})]$

Cuando se de $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}]$ diremos que la estructura $\mathbf{A}$ satisface φ en la asignación $\vec{a}$ y en tal caso diremos que φ es verdadera en $\mathbf{A}$ para la asignación $\vec{a}$.
Cuando no se de $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}]$ diremos que la estructura $\mathbf{A}$ no satisface φ en la asignación $\vec{a}$ y en tal caso diremos que φ es falsa en $\mathbf{A}$ para la asignación $\vec{a}$.

3 v ocurre libremente en φ a partir de i

> Defina la relación "v ocurre libremente en φ a partir de i"

Dadas palabras $\alpha, \beta \in \Sigma^*$, con $|\alpha|, |\beta| \geq 1$ y un natural $i \in \{1, \ldots, |\beta|\}$, se dice que α ocurre a partir de i en β cuando se de que existan palabras δ, γ tales que $\beta = \delta\alpha\gamma$ y $|\delta| = i - 1$.
Definamos recursivamente la relación "v ocurre libremente en φ a partir de i", donde $v \in Var, \varphi \in F^\tau$ e $i \in \{1, \ldots, |\varphi|\}$, de la siguiente manera:

1. Si φ es atómica (i.e., de la forma $(t \equiv s)$ o $r(t_1, \ldots, t_n)$), entonces v ocurre libremente en φ a partir de i sii v ocurre en φ a partir de i

2. Si $\varphi = (\varphi_1 \eta \varphi_2)$ con $\eta \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, entonces v ocurre libremente en φ a partir de i sii se da alguna de las siguientes:
    (a) v ocurre libremente en φ_1 a partir de $i - 1$
    (b) v ocurre libremente en φ_2 a partir de $i - |(\varphi_1 \eta|$
3. Si $\varphi = \neg\varphi_1$, entonces v ocurre libremente en φ a partir de i sii v ocurre libremente en φ_1 a partir de $i - 1$
4. Si $\varphi = Qw\varphi_1$, con $Q \in \{\forall, \exists\}$, entonces v ocurre libremente en φ a partir de i sii $v \neq w$ y v ocurre libremente en φ_1 a partir de $i - |Qw|$

4 Reticulado cuaterna

Defina reticulado cuaterna

Por un reticulado cuaterna entenderemos una 4-upla $(L, s, i, \leq)$ tal que L es un conjunto no vacío, s e i son operaciones binarias sobre L, $\leq$ es una relación binaria sobre L y se cumplen las siguientes propiedades:

1. $\forall x \in L, \quad x \leq x$
2. $\forall x, y, z \in L, \quad x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$
3. $\forall x, y \in L, \quad x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$
4. $\forall x, y \in L, \quad x \leq x\ s\ y \wedge y \leq x\ s\ y$
5. $\forall x, y, z \in L, \quad x \leq z \wedge y \leq z \Rightarrow x\ s\ y \leq z$
6. $\forall x, y \in L, \quad x\ i\ y \leq x \wedge x\ i\ y \leq y$
7. $\forall x, y, z \in L, \quad z \leq x \wedge z \leq y \Rightarrow z \leq x\ i\ y$