Guía 10: *Modelo matemático del valor de verdad de una fórmula*

El valor de un término en una estructura

- Sea $\mathbf{A} = (A, i)$ una estructura de tipo τ. Una **asignación de A** será un elemento de $A^N = \{\text{infinituplas de elementos de } A\}$.
- Si $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots)$ es una asignación, entonces diremos que a_j es el **valor** que $\vec{a}$ le asigna a la variable x_j.
- Dada una estructura $\mathbf{A}$ de tipo τ, un término $t \in T^\tau$ y una asignación $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots) \in A^N$ definamos recursivamente $t^{\mathbf{A}}[\vec{a}]$ de la siguiente manera:
  1. Si $t = x_i \in Var$, entonces $t^{\mathbf{A}}[\vec{a}] = a_i$
  2. Si $t = c \in \mathcal{C}$, entonces $t^{\mathbf{A}}[\vec{a}] = i(c)$
  3. Si $t = f(t_1, \dots, t_n)$, con $f \in \mathcal{F}_n$, $n \geq 1$, $t_1, \dots, t_n \in T^\tau$, entonces $t^{\mathbf{A}}[\vec{a}] = i(f)(t_1^{\mathbf{A}}[\vec{a}], \dots, t_n^{\mathbf{A}}[\vec{a}])$
- El elemento $t^{\mathbf{A}}[\vec{a}]$ será llamado el **valor de t en la estructura A para la asignación $\vec{a}$**.
- Dada una asignación $\vec{a} \in A^N$ y $a \in A$, con $\downarrow_i^a(\vec{a})$ denotaremos la asignación que resulta de reemplazar en $\vec{a}$ el i-ésimo elemento por a.
- *Propiedades*:
  - Sea $\mathbf{A}$ una estructura de tipo τ y sea $t \in T^\tau$. Supongamos que $\vec{a}, \vec{b}$ son asignaciones tales que $a_i = b_i$, cada vez que x_i ocurra en t. Entonces $t^{\mathbf{A}}[\vec{a}] = t^{\mathbf{A}}[\vec{b}]$
  - Sea τ un tipo, $t \in T^\tau$ y t' el resultado de reemplazar toda ocurrencia de x_i en t por x_l, la cual no ocurre en t. Entonces para cualquier estructura $\mathbf{A}$, cualquier asignación $\vec{a} \in A^N$ y cualquier $a \in A$, se tiene que $t'A[\downarrow_l^a(\vec{a})] = t^{\mathbf{A}}[\downarrow_i^a(\vec{a})]$

La relación $\models$

- Definiremos recursivamente la relación $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}]$, donde $\mathbf{A}$ es una estructura de tipo τ, $\vec{a}$ es una asignación y $\varphi \in F^\tau$. Escribiremos $\mathbf{A} \not\models \varphi[\vec{a}]$ para expresar que no se da $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}]$.
  1. Si $\varphi = (t \equiv s)$, entonces $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}] \iff t^{\mathbf{A}}[\vec{a}] = s^{\mathbf{A}}[\vec{a}]$
  2. Si $\varphi = r(t_1, \dots, t_m)$, entonces $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}] \iff (t_1^{\mathbf{A}}[\vec{a}], \dots, t_m^{\mathbf{A}}[\vec{a}]) \in i(r)$
  3. Si $\varphi = (\varphi_1 \wedge \varphi_2)$, entonces $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}] \iff \mathbf{A} \models \varphi_1[\vec{a}]$ y $\mathbf{A} \models \varphi_2[\vec{a}]$
  4. Si $\varphi = (\varphi_1 \vee \varphi_2)$, entonces $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}] \iff \mathbf{A} \models \varphi_1[\vec{a}]$ y $\mathbf{A} \models \varphi_2[\vec{a}]$
  5. Si $\varphi = (\varphi_1 \to \varphi_2)$, entonces $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}] \iff \mathbf{A} \not\models \varphi_1[\vec{a}]$ y $\mathbf{A} \models \varphi_2[\vec{a}]$
  6. Si $\varphi = (\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2)$, entonces $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}] \iff$ ya sea se dan $\mathbf{A} \models \varphi_1[\vec{a}]$ y $\mathbf{A} \models \varphi_2[\vec{a}]$ o se dan $\mathbf{A} \not\models \varphi_1[\vec{a}]$ y $\mathbf{A} \not\models \varphi_2[\vec{a}]$
  7. Si $\varphi = \neg\varphi_1$, entonces $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}] \iff \mathbf{A} \not\models \varphi_1[\vec{a}]$
  8. Si $\varphi = \forall x_i \varphi_1$, entonces $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}] \iff$ para cada $a \in A$ se da que $\mathbf{A} \models \varphi_1[\downarrow_i^a(\vec{a})]$
  9. Si $\varphi = \exists x_i \varphi_1$, entonces $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}] \iff$ hay un $a \in A$ tal que $\mathbf{A} \models \varphi_1[\downarrow_i^a(\vec{a})]$
- Cuando se de $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}]$ diremos que la estructura $\mathbf{A}$ satisface φ en la asignación $\vec{a}$ y en tal caso diremos que φ es verdadera en $\mathbf{A}$ para la asignación $\vec{a}$. Cuando no se de $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}]$ diremos que la estructura $\mathbf{A}$ no satisface φ en la asignación $\vec{a}$ y en tal caso diremos que φ es falsa en $\mathbf{A}$ para la asignación $\vec{a}$.
  - También hablaremos del **valor de verdad** de φ en $\mathbf{A}$ para la asignación $\vec{a}$ el cual será igual a 1 si se da $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}]$ y 0 en caso contrario.
- *Propiedades*:
  - Sea $\mathbf{A}$ una estructura de tipo τ, $\vec{a}$ una asignación y $\varphi \in F^\tau$. Entonces no puede suceder que $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}]$ y $\mathbf{A} \models \neg\varphi[\vec{a}]$.
    * En particular, esto nos dice que $\mathbf{A} \not\models (\varphi \wedge \neg\varphi)[\vec{a}]$ y que se da ya sea $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}]$ o $\mathbf{A} \models \neg\varphi[\vec{a}]$
  - Supongamos que $\vec{a}, \vec{b}$ son asignaciones tales que si $x_i \in Li(\varphi)$, entonces $a_i = b_i$. Entonces $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}] \iff \mathbf{A} \models \varphi[\vec{b}]$

- Si φ es una sentencia, entonces $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}] \iff \mathbf{A} \models \varphi[\vec{b}]$, cualesquiera sean las asignaciones $\vec{a}, \vec{b}$.
  - En base a esto, el valor de verdad de una sentencia φ en una estructura dada $\mathbf{A}$ para una asignación $\vec{a}$ no depende de $\vec{a}$. Es decir, tiene el mismo valor para todas las asignaciones.
  - En estos casos podemos definir que φ es **verdadera** en $\mathbf{A}$ (y escribiremos $\mathbf{A} \models \varphi$), o que φ es **falsa** en $\mathbf{A}$ (y escribiremos $\mathbf{A} \not\models \varphi$)
  - Una sentencia de tipo τ será llamada **universalmente válida** si es verdadera en cada modelo de tipo τ.
- Sean φ, ϕ, ψ sentencias de tipo τ, las siguientes son universalmente válidas:
  1. $\forall x_1 \exists x_2 (x_1 \equiv x_2)$
  2. $(\varphi \to (\psi \to \varphi))$
  3. $(((\varphi \to \psi) \wedge (\varphi \to (\psi \to \phi))) \to (\varphi \to \phi))$
  4. *Strong responsability property*: $(((\varphi \wedge \psi) \to \phi)) \to ((\varphi \to \phi) \vee (\psi \to \phi))$

Equivalencia de fórmulas

- Dadas $\varphi, \psi \in F^\tau$ diremos que φ y ψ son **equivalentes** cuando se de la siguiente condición: $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}] \iff \mathbf{A} \models \psi[\vec{a}]$ para cada modelo de tipo $\tau, \mathbf{A}$ y cada $\vec{a} \in A^N$
  - Escribiremos $\varphi \sim \psi$ cuando φ y ψ sean equivalentes
  - Nótese que $\{(\varphi, \psi) \in F^\tau \times F^\tau : \varphi \sim \psi\}$ es una relación de equivalencia sobre F^τ
- *Propiedades*:
  - Si $Li(\phi) \cup Li(\psi) \subseteq \{x_{i_1}, \dots, x_{i_n}\}$, entonces $\phi \sim \psi \iff$ la sentencia $\forall x_{i_1} \dots \forall x_{i_n} (\phi \leftrightarrow \psi)$ es universalmente válida.
  - Si $\phi_i \sim \psi_i,\ i = 1, 2$, entonces $\neg\phi_1 \sim \neg\psi_1,\ (\phi_1 \eta \phi_2) \sim (\psi_1 \eta \psi_2)$ y $Qv\phi_1 \sim Qv\psi_1$
  - Si $\phi \sim \psi$ y α' es el resultado de reemplazar en una fórmula α algunas (posiblemente 0) ocurrencias de ϕ por ψ, entonces $\alpha \sim \alpha'$.
  - Sea τ un tipo. Para $\varphi \in F^\tau$, si φ' = resultado de reemplazar en φ toda ocurrencia de $\forall x_1 \forall x_2 \exists$ por $\forall x_2 \forall x_1 \exists$, entonces $\varphi' \sim \varphi$
  - Sea τ un tipo. Sea $\alpha \in F^\tau$, si α' es el resultado de remover de α una ocurrencia de la palabra $\neg\neg$ entonces α' es equivalente a α.

Homomorfismos

- Dado un modelo de tipo $\tau,\ \mathbf{A} = (A, i),\ \forall s \in \mathcal{C} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{R}$, usaremos $s^{\mathbf{A}}$ para denotar a $i(s)$
- Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ modelos de tipo τ, una función $F : A \to B$ será un **homomorfismo** de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$ si se cumplen las siguientes:
  1. $F(c^{\mathbf{A}}) = c^{\mathbf{B}}\ \forall c \in \mathcal{C}$
  2. $F(f^{\mathbf{A}}(a_1, \dots, a_n)) = f^{\mathbf{B}}(F(a_1), \dots, F(a_n))\ \forall f \in \mathcal{F}_n,\ a_1, \dots, a_n \in A$
  3. $(a_1, \dots, a_n) \in r^{\mathbf{A}}$ implica $(F(a_1), \dots, F(a_n)) \in r^{\mathbf{B}},\ \forall r \in \mathcal{R}_n,\ a_1, \dots, a_n \in A$
- Un **isomorfismo** de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$ es un homomorfismo de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$ si es biyectivo y su inversa es un homomorfismo de $\mathbf{B}$ en $\mathbf{A}$.
  - Diremos que $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ es un homomorfismo para expresar que F es un *homomorfismo* de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$
  - Diremos que $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ es un isomorfismo para expresar que F es un *isomorfismo* de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$
  - Diremos que los modelos $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ son *isomorfos* ($\mathbf{A} \cong \mathbf{B}$) cuando haya un isomorfismo F de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$
- *Propiedades*:
  - Supongamos $\mathcal{R} = \emptyset$. Sea $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ un homomorfismo biyectivo. Entonces F es un isomorfismo.
  - Sea $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ un homomorfismo. Entonces $F(t^{\mathbf{A}}[(a_1, a_2, \dots)] = t^{\mathbf{B}}[(F(a_1), F(a_2), \dots)])$ para cada $t \in T^\tau,\ (a_1, a_2, \dots) \in A^N$

- Supongamos que $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ es un isomorfismo. Sea $\varphi \in F^\tau$, entonces $A \models \varphi[(a_1, a_2, \dots)] \iff \mathbf{B} \models \varphi[(F(a_1), F(a_2), \dots)]$ para cada $(a_1, a_2, \dots) \in A^N$.
    * En particular $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ satisfacen las mismas sentencias de tipo τ.