Guía 5: Reticulados acotados, complementados y distributivos, y Álgebras de Boole

Reticulados acotados

- **Definición**: Por un reticulado acotado entenderemos una 5-upla $(L, s, i, 0, 1)$ tal que (L, s, i) es un reticulado terna, $0, 1 \in L$, y además $\forall x \in L, 0\ s\ x = x \wedge x\ s\ 1 = 1$.

Orden asociado

- **Definición**: Dado un reticulado acotado $(L, s, i, 0, 1)$ llamaremos a $\leq = \{(x, y) : x\ s\ y = y\}$ el orden parcial asociado a $(L, s, i, 0, 1)$ y $(L, \leq)$ será llamado el poset asociado a $(L, s, i, 0, 1)$.
  - Notar que $\leq = \{(x, y) : x\ i\ y = x\}$
- *Propiedades*:
  - Si $(L, s, i, 0, 1)$ es un reticulado acotado, entonces $0\ i\ x = 0 \wedge 1\ i\ x = x\ \forall x \in L$

Subreticulado acotado

- **Definición**: Dados reticulados acotados $(L, s, i, 0, 1)$ y $(L', s', i', 0', 1')$, diremos que $(L, s, i, 0, 1)$ es un subreticulado acotado de $(L', s', i', 0', 1')$ si se dan las siguientes condiciones:
  1. $L \subseteq L'$
  2. L es cerrado bajo s', i'
  3. $0 = 0'$ y $1 = 1'$
  4. $s = s'|_{L^2}$ e $i = i'|_{L^2}$
- **Subuniverso**: Un conjunto $S \subseteq L$ es un subuniverso de $(L, s, i, 0, 1)$ si $0, 1 \in S$ y además S es cerrado bajo s, i.
  - Notar que los subuniversos de $(L, s, i, 0, 1)$ son los universos de los subreticulados acotados de $(L, s, i, 0, 1)$.
- *Propiedades:*
  - Si $(L, s, i, 0, 1)$ es un reticulado acotado y S_1, S_2 son subuniversos de $(L, s, i, 0, 1)$, entonces $S_1 \cap S_2$ es un subuniverso de $(L, s, i, 0, 1)$

Homomorfismo e isomorfismo de reticulados acotados

- **Homomorfismo**: Sean $(L, s, i, 0, 1)$ y $(L', s', i', 0', 1')$ reticulados acotados, una función $F : L \to L'$ será llamada un homomorfismo de $(L, s, i, 0, 1)$ en $(L', s', i', 0', 1')$ si $\forall x, y \in L$ se cumple que:
  1. $F(x\ s\ y) = F(x)\ s'\ F(y)$
  2. $F(x\ i\ y) = F(x)\ i'\ F(y)$
  3. $F(0) = 0'$
  4. $F(1) = 1'$
- **Isomorfismo**: Un homomorfismo de $(L, s, i, 0, 1)$ en $(L', s', i', 0', 1')$ será llamado isomorfismo cuando sea biyectivo y su inversa sea también un homomorfismo.
  - Escribiremos $(L, s, i, 0, 1) \cong (L', s', i', 0', 1')$
- *Propiedades*:
  - *Para isomorfismo no hace falta chequear la inversa*: Si $F : (L, s, i, 0, 1) \to (L', s', i', 0', 1')$ es un homomorfismo biyectivo, entonces F es un isomorfismo
  - *La imagen del homomorfismo es un subuniverso*: Si $F : (L, s, i, 0, 1) \to (L', s', i', 0', 1')$ es un homomorfismo, entonces I_F es un subuniverso de $(L', s', i', 0', 1')$.

Congruencias de reticulados acotados

- **Definición de congruencia**: Sea $(L, s, i, 0, 1)$ un reticulado acotado, una congruencia sobre $(L, s, i, 0, 1)$ será una relación de equivalencia θ la cual sea una congruencia sobre (L, s, i).

- **Definición de operaciones**: Tenemos definidas sobre L/θ dos operaciones binarias $\tilde{s}, \tilde{i}$ tales que $x/\theta \ \tilde{s} \ y/\theta = (x \ s \ y)/\theta$ y $x/\theta \ \tilde{i} \ y/\theta = (x \ i \ y)/\theta$
- **Definición de cociente**: La 5-upla $(L/\theta, \tilde{s}, \tilde{i}, 0/\theta, 1/\theta)$ es llamada el cociente de $(L, s, i, 0, 1)$ sobre θ y la denotaremos con $(L, s, i, 0, 1)/\theta$.
- *Propiedades*:
  - *La proyección canónica de la congruencia es un homomorfismo*: Sea $(L, s, i, 0, 1)$ un reticulado acotado y θ una congruencia sobre $(L, s, i, 0, 1)$, entonces $(L, s, i, 0, 1)/\theta$ es un reticulado acotado y π_θ es un homomorfismo de $(L, s, i, 0, 1)$ en $(L, s, i, 0, 1)/\theta$ cuyo núcleo es θ.
  - *El núcleo de un homomorfismo es una congruencia*: Si $F : (L, s, i, 0, 1) \to (L', s', i', 0', 1')$ es un homomorfismo de reticulados acotados, entonces $ker(F)$ es una congruencia sobre $(L, s, i, 0, 1)$.

Reticulados complementados

- **Definición de complemento**: Sea $(L, s, i, 0, 1)$ un reticulado acotado, dado $a \in L$ diremos que a es complementado cuando exista un elemento $b \in L$ (llamado complemento de a) tal que $a \ s \ b = 1 \wedge a \ i \ b = 0$.
  - Notar que el b puede no ser único. Es decir, a puede tener varios complementos.
- **Definición de operación unaria**: Una operación unaria sobre un conjunto L es una función de L en L.
  - Si s denota una operación unaria, entonces escribiremos x^s en vez de $s(x)$
- **Definición de reticulado complementado**: Por un reticulado complementado entenderemos una 6-upla $(L, s, i,^c, 0, 1)$ tal que $(L, s, i, 0, 1)$ es un reticulado acotado y ^{c} es una operación unaria sobre L tal que $\forall x \in L, x \ s \ x^c = 1 \wedge x \ i \ x^c = 0$
- *Propiedades*:
  - *Máximo y mínimo tienen un solo complemento*: Sea $(L, s, i, 0, 1)$ un reticulado acotado, si 1 es un complemento de a entonces $a = 0$. Del mismo modo, si a es un complemento de 0, entonces $a = 1$.

Orden asociado a un reticulado complementado

- **Definición**: Dado un reticulado complementado $(L, s, i,^c, 0, 1)$, llamaremos a $\leq = \{(x, y) : x \ s \ y = y\}$ el orden parcial asociado a $(L, s, i,^c, 0, 1)$ y $(L, \leq)$ será llamado el poset asociado a $(L, s, i,^c, 0, 1)$.
  - Notar que $\leq = \{(x, y) : x \ i \ y = x\}$

Subreticulado complementado

- **Definición**: Dados reticulado complementados $(L, s, i,^c, 0, 1)$ y $(L', s', i',^{c'}, 0', 1')$, diremos que $(L, s, i,^c, 0, 1)$ es un subreticulado complementado de $(L', s', i',^{c'}, 0', 1')$ si se dan las siguientes condiciones:
  1. $L \subseteq L'$
  2. L es cerrado bajo $s', i',^{c'}$
  3. $0 = 0'$ y $1 = 1'$
  4. $s = s'|_{L^2}$, $i = i'|_{L^2}$ y $^c =^{c'} |_L$
- **Definición de subuniverso**: Sea $(L, s, i,^c, 0, 1)$ un reticulado complementado, un conjunto $S \subseteq L$ es llamado subuniverso de $(L, s, i,^c, 0, 1)$ si $0, 1 \in S$ y además S es cerrado bajo $s, i,^c$.
  - Notar que los subuniversos de $(L, s, i,^c, 0, 1)$ son los universos de los subreticulados complementados de $(L, s, i,^c, 0, 1)$.

Homomorfismo e isomorfismo de reticulados complementados

- **Homomorfismo**: Sean $(L, s, i, ^c, 0, 1)$ y $(L', s', i', ^{c'}, 0', 1')$ reticulados complementados, una función $F : L \to L'$ será llamada un homomorfismo de $(L, s, i, ^c, 0, 1)$ en $(L', s', i', ^{c'}, 0', 1')$ si $\forall x, y \in L$ se cumple que:
  1. $F(x\ s\ y) = F(x)\ s'\ F(y)$
  2. $F(x\ i\ y) = F(x)\ i'\ F(y)$
  3. $F(x^c) = F(x)^{c'}$
  4. $F(0) = 0'$
  5. $F(1) = 1'$
- **Isomorfismo**: Un homomorfismo de $(L, s, i, ^c, 0, 1)$ en $(L', s', i', ^{c'}, 0', 1')$ será llamado isomorfismo cuando sea biyectivo y su inversa sea un homomorfismo.
  - Usaremos el símbolo $\cong$ para denotar la relación de isomorfismo.
- *Propiedades:*
  - *Para isomorfismo de reticulados complementados no hace falta ver la inversa*: Si $F : (L, s, i, ^c, 0, 1) \to (L', s', i', ^{c'}, 0', 1')$ es un homomorfismo biyectivo, entonces F es un isomorfismo.
  - *La imagen del homomorfismo es un subuniverso*: Si $F : (L, s, i, ^c, 0, 1) \to (L', s', i', ^{c'}, 0', 1')$ es un homomorfismo, entonces I_F es un subuniverso de $(L', s', i', ^{c'}, 0', 1')$.

Congruencias de reticulados complementados

- **Definición de congruencia**: Sea $(L, s, i, ^c, 0, 1)$ un reticulado complementado, una congruencia sobre $(L, s, i, ^c, 0, 1)$ será una relación de equivalencia θ sobre L la cual cumpla:
  1. θ es una congruencia sobre $(L, s, i, 0, 1)$
  2. $x/\theta = y/\theta \Rightarrow x^c/\theta = y^c/\theta$
- **Definición de operaciones**: Definimos sobre L/θ dos operaciones binarias $\tilde{s}$, $\tilde{i}$ y una operación unaria $^{\tilde{c}}$ tales que:
  - $x/\theta\ \tilde{s}\ y/\theta = (x\ s\ y)/\theta$
  - $x/\theta\ \tilde{i}\ y/\theta = (x\ i\ y)/\theta$
  - $(x/\theta)^{\tilde{c}} = x^c/\theta$
- **Definición de cociente**: La 6-upla $(L/\theta, \tilde{s}, \tilde{i}, ^{\tilde{c}}, 0/\theta, 1/\theta)$ es llamada el cociente de $(L, s, i, ^c, 0, 1)$ sobre θ y la denotaremos con $(L, s, i, ^c, 0, 1)/\theta$.
- *Propiedades:*
  - *La proyección canónica de una congruencia sobre un reticulado complementado es un homomorfismo de estos*: Sea $(L, s, i, ^c, 0, 1)$ un reticulado complementado y sea θ una congruencia sobre $(L, s, i, ^c, 0, 1)$ entonces $(L, s, i, ^c, 0, 1)/\theta$ es un reticulado complementado y π_θ es un homomorfismo de $(L, s, i, ^c, 0, 1)$ en $(L, s, i, ^c, 0, 1)/\theta$ cuyo núcleo es θ.
  - *El núcleo de un homomorfismo es una congruencia*: Si $F : (L, s, i, ^c, 0, 1) \to (L', s', i', ^{c'}, 0', 1')$ es un homomorfismo de reticulados complementados, entonces $ker(F)$ es una congruencia sobre $(L, s, i, ^c, 0, 1)$.

Álgebras de Boole

- **Distributividad**: Diremos que un reticulado acotado $(L, s, i, 0, 1)$ (resp. complementado $(L, s, i, ^c, 0, 1)$) es distributivo cuando (L, s, i) lo sea.
- **Álgebra de Boole**: Reticulado complementado que es distributivo.
- *Propiedades*:
  - *La distributividad y la distributividad dual son equivalentes*: Sea (L, s, i) un reticulado terna, entonces $(\forall x, y, z \in L, x\ i\ (y\ s\ z) = (x\ i\ y)\ s\ (x\ i\ z)) \iff (\forall a, b, c \in L, a\ s\ (b\ i\ c) = (a\ s\ b)\ i\ (a\ s\ c))$.

- *En un reticulado acotado distributivo se puede tener a lo sumo un complemento*: Si $(L, s, i, 0, 1)$ es un reticulado acotado y distributivo, entonces todo elemento tiene a lo sumo un complemento.
  - Es decir, si $x\ s\ u = x\ s\ v = 1$ y $x\ i\ u = x\ i\ v = 0$, entonces $u = v$ cualesquiera sean $x, u, v \in L$.
- Sea $(B, s, i, ^c, 0, 1)$ un álgebra de Boole, $\forall x, y \in B, y = (y\ i\ x)\ s\ (y\ i\ x^c)$
- *Teorema de Álgebras de Boole*: Sea $(L, s, i, ^c, 0, 1)$ un álgebra de Boole y sean $a, b \in L$, se tiene que:
  1. $(a\ i\ b)^c = a^c\ s\ b^c$
  2. $(a\ s\ b)^c = a^c\ i\ b^c$
  3. $a^{cc} = a$
  4. $a\ i\ b = 0 \iff b \leq a^c$
  5. $a \leq b \iff b^c \leq a^c$

Notación

- En general usaremos letras mayúsculas en negrita para denotar una estructura dada y su correspondiente mayúscula en itálica denotará al universo de esta.