Modelo matematico de la sintaxis elemental

En esta guia daremos un modelo matematico del concepto de formula elemental de tipo τ. Esto coresponde al punto (1) del programa de logica enunciado al final de la Guia 8.

Variables

Las variables usadas en las formulas elementales no estaban del todo especificadas. Para hacer bien preciso este concepto definiremos un conjunto concreto de variables. Sea Var el siguiente conjunto de palabras del alfabeto $\{\mathsf{X}, \mathit{0}, \mathit{1}, ..., \mathit{9}, \mathbf{0}, \mathbf{1}, ..., \mathbf{9}\}$:

$$Var = \{\mathsf{X}\mathbf{1}, \mathsf{X}\mathbf{2}, ..., \mathsf{X}\mathbf{9}, \mathsf{X}\mathit{1}\mathbf{0}, \mathsf{X}\mathit{1}\mathbf{1}, ..., \mathsf{X}\mathit{1}\mathbf{9}, \mathsf{X}\mathit{2}\mathbf{0}, \mathsf{X}\mathit{2}\mathbf{1}, ...\}$$

Es decir el elemento n-esimo de Var es la palabra de la forma $\mathsf{X}\alpha$ donde α es el resultado de reemplazar en la palabra que denota n en notacion decimal, el ultimo numeral por su correspondiente numeral bold y los otros por sus correspondientes italicos. A los elementos de Var los llamaremos *variables.* La razon por la cual usamos numerales italicos y bold es que a los numerales normales los usamos habitualmente en los tipos y sera conveniente que entonces no ocurran en las variables. Ademas tomamos el ultimo simbolo de cada variable en bold para que de esta manera nunca una variable sea una subpalabra de otra variable distinta a ella, lo cual contribuye a simplificar los resultados.

Denotaremos con x_i al i-esimo elemento de Var, para cada $i \in \mathbf{N}$.

Ejercicio 1: V o F o I, justifique.

(a) $(x_1, x_2, ...) = Var$

(b) Si $v \in Var$, entonces $Ti(v) = n-$UPLA, para algun $n \in \mathbf{N} - \{1\}$

(c) Si $n \in \mathbf{N}$, entonces la variable x_n es una palabra de longitud $n+1$

(d) $Var - \{\mathsf{X}\} = \mathbf{N}$

(e) $Var - \{\mathsf{X}\} = \{\mathbf{1}, ..., \mathbf{9}, \mathit{1}\mathbf{0}, \mathit{1}\mathbf{1}, ..., \mathit{1}\mathbf{9}, \mathit{2}\mathbf{0}, \mathit{2}\mathbf{1}, ...\}$

(f) $\mathbf{N} = \{\mathbf{1}, ..., \mathbf{9}, \mathit{1}\mathbf{0}, \mathit{1}\mathbf{1}, ..., \mathit{1}\mathbf{9}, \mathit{2}\mathbf{0}, \mathit{2}\mathbf{1}, ...\}$

Terminos

Dado un tipo τ, definamos recursivamente los conjuntos de palabras T_k^τ, con $k \geq 0$, de la siguiente manera:

$$T_0^\tau = Var \cup \mathcal{C}$$
$$T_{k+1}^\tau = T_k^\tau \cup \{f(t_1, ..., t_n) : f \in \mathcal{F}_n,\ n \geq 1 \text{ y } t_1, ..., t_n \in T_k^\tau\}.$$

Sea

$$T^\tau = \bigcup_{k\geq 0} T_k^\tau$$

Los elementos de T^τ seran llamados *terminos de tipo* τ. Un termino t es llamado *cerrado* si x_i no es subpalabra de t, para cada $i \in \mathbf{N}$. Definamos

$$T_c^\tau = \{t \in T^\tau : t \text{ es cerrado}\}$$

Algunos ejemplos:

(E1) Sea $\tau = (\{\text{uno}, \text{doli}\}, \{\text{MAS}, \text{P}\}, \{\text{Her}\}, a)$, con a dado por $a(\text{MAS}) = 4$, $a(\text{P}) = 1$ y $a(\text{Her}) = 3$. Entonces

(a) Las palabras uno, doli y $\mathsf{X}\mathit{15666}\mathbf{9}$ son terminos de tipo τ ya que pertenecen a T_0^τ

(b) $\text{MAS}(\text{uno}, \text{doli}, \mathsf{X}\mathit{1}\mathbf{9}, \mathsf{X}\mathbf{5})$ y $\text{P}(\text{uno})$ son terminos de tipo τ ya que pertenecen a T_1^τ (por que?)

(c) Las palabras

$$\text{P}(\text{P}(\text{uno})) \qquad \text{MAS}(\text{P}(\mathsf{X}\mathbf{4}), \text{doli}, \mathsf{X}\mathit{1}\mathbf{9}, \mathsf{X}\mathbf{5})$$

son terminos de tipo τ ya que pertenecen a T_2^τ

(d) $\text{P}(\text{MAS}(\text{P}(\mathsf{X}\mathbf{4}), \text{MAS}(\mathsf{X}\mathbf{1}, \mathsf{X}\mathbf{2}, \mathsf{X}\mathbf{3}, \mathsf{X}\mathbf{4}), \mathsf{X}\mathit{1}\mathbf{9}, \mathsf{X}\mathbf{5}))$ es un termino ya que pertenece a T_3^τ

(e) uno, doli, $\text{P}(\text{uno})$ y $\text{MAS}(\text{uno}, \text{doli}, \text{doli}, \text{doli})$ son terminos cerrados de tipo τ

Lo que debe quedar claro es que como objetos matematicos los terminos son meras palabras, por ejemplo $\text{MAS}(\text{uno}, \text{doli}, \mathsf{X}\mathit{1}\mathbf{9}, \mathsf{X}\mathbf{5})$ es una palabra (de longitud 20)

(E2) Sea $\tau = (\{0, 1\}, \{+, \times, \uparrow\}, \emptyset, a)$, con a dado por $a(+) = 2$, $a(\times) = 3$ y $a(\uparrow) = 1$. Entonces

$$\mathsf{X}\mathit{111}\mathbf{9} \qquad 0 \qquad 1 \qquad +(+(\uparrow(\mathsf{X}\mathbf{4}), \times(\mathsf{X}\mathbf{2}, 1, 0)), \times(1, \mathsf{X}\mathbf{2}, \mathsf{X}\mathbf{3}))$$

son terminos de tipo τ. Tambien $\uparrow(+(\uparrow(0), \times(0, 1, 0)))$ es un termino cerrado de tipo τ

(E3) Sea $\tau = (\emptyset, \{\mathsf{s}, \mathsf{i}\}, \emptyset, \{(\mathsf{s}, 2), (\mathsf{i}, 2)\})$ el tipo de los reticulados terna. Entonces

$$\mathsf{s}(\mathsf{X}\mathbf{2}, \mathsf{X}\mathbf{3}) \qquad \mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{X}\mathbf{4}, \mathsf{X}\mathit{1}\mathbf{4}), \mathsf{i}(\mathsf{X}\mathbf{2}, \mathsf{X}\mathit{111}\mathbf{9}))$$

son terminos de tipo τ. No hay terminos cerrados de tipo τ. Cabe destacar que $\mathsf{X}\mathbf{2}\ \mathsf{s}\ \mathsf{X}\mathbf{3}$ no es un termino de tipo τ aunque, como veremos en los ejercicios esto no es trivial de la definicion de termino y requiere de una demostracion.

Ejercicio 2: V o F o I, justifique.

(a) si τ es un tipo, entonces $Ti(T^\tau) =$ CONJUNTO

(b) Hay exactamente dos terminos cerrados de tipo $(\{0,1\},\{\mathsf{s},\mathsf{i}\},\emptyset,\{(\mathsf{s},2),(\mathsf{i},2)\})$.

(c) Hay exactamente dos terminos cerrados de tipo $(\{0,1\},\{\max,\min\},\emptyset,\{(\max,2),(\min,2)\})$.

(d) $T^{(\emptyset,\emptyset,\emptyset,\emptyset)} = Var$

(e) $T^\tau = \bigcup_{k\geq 6} T_k^\tau$

(f) Sea t un termino no cerrado. Sea n la cantidad de ocurrencias de X en t. Entonces $Dom(t) = Var^n$

(g) Si τ es un tipo, entonces $T_c^\tau = \{t \in T^\tau : Var \cap t = \emptyset\}$

(h) Sea τ un tipo. Si $f \in \mathcal{F}_2$ y α, β son palabras tales que $f(\alpha,\beta) \in T^\tau$, entonces $\alpha, \beta \in T^\tau$

El siguiente lema es la herramienta basica para probar propiedades de los terminos.

Lemma 1 **([Menu para terminos)** *Supongamos $t \in T_k^\tau$, con $k \geq 1$. Entonces se da alguna de las siguientes:*

(a) $t \in Var \cup \mathcal{C}$

(b) $t = f(t_1,...,t_n)$, con $f \in \mathcal{F}_n$, $n \geq 1$ y $t_1,...,t_n \in T_{k-1}^\tau$.

Proof. Por induccion en k.

CASO $k = 1$: Es directo ya que por definicion

$$T_1^\tau = Var \cup \mathcal{C} \cup \{f(t_1,...,t_n) : f \in \mathcal{F}_n,\ n \geq 1 \text{ y } t_1,...,t_n \in T_0^\tau\}.$$

CASO $k \Rightarrow k+1$: Sea $t \in T_{k+1}^\tau$. Por definicion de T_{k+1}^τ tenemos que $t \in T_k^\tau$ o $t = f(t_1,...,t_n)$ con $f \in \mathcal{F}_n$, $n \geq 1$ y $t_1,...,t_n \in T_k^\tau$. Si se da que $t \in T_k^\tau$, entonces podemos aplicar hipotesis inductiva y usar que $T_{k-1}^\tau \subseteq T_k^\tau$. Esto completa el caso. ■

Ejercicio 3: Probar que si $t \in T^\tau - (Var \cup \mathcal{C})$ entonces $|t| \geq 4$

Ejercicio 4: Si $t \in T^\tau$ es tal que en t ocurre el simbolo), entonces $t = f(t_1,...,t_n)$ con $f \in \mathcal{F}_n$, $n \geq 1$ y $t_1,...,t_n \in T^\tau$.

Ejercicio 5: Si $t \in T^\tau$ y $[t]_i =$), con $i < |t|$, entonces $[t]_{i+1} =$, o $[t]_{i+1} =$)

Ejercicio 6: Probar que en un término nunca puede ocurrir la palabra (,

Ejercicio 7: Sea $\tau = (\{cero, 1\}, \{suma, glp\}, \emptyset, a)$, con $a(suma) = 2$, $a(glp) = 1$. Probar que las siguientes palabras no son términos de tipo τ:

(a) $glp((\mathsf{X}\mathit{13}\mathbf{3})$

(b) $suma(g, cero)$

(c) $glp(0)$

(d) $suma(\mathsf{X}\mathit{123}\mathbf{2}, \mathsf{X}\mathbf{2}, 1)$

(e) $suma(suma(suma(suma(suma(\mathsf{X}\mathit{123}\mathbf{4}, 1), 1), 1), 1), glp(cero)))$

Resolveremos algunos de los casos del ejercicio anterior. Una forma de probar que una palabra dada no es un termino es encontrar una propiedad que posean todos los terminos la cual no cumpla dicha palabra. Por ejemplo la siguiente propiedad:

$$|t|_(= |t|_)$$

la cumplen todos los terminos y claramente $glp((\mathsf{X}\mathit{13}\mathbf{3})$ no la cumple por lo cual hemos resuelto a. del Ejercicio 7. Usando esta estrategia se pueden hacer todos los incisos restantes del Ejercicio 7 pero daremos una prueba distinta para el inciso d.

Supongamos que $suma(\mathsf{X}\mathit{123}\mathbf{2}, \mathsf{X}\mathbf{2}, 1)$ es un termino de tipo τ. Llegaremos a un absurdo. Por definicion de T^τ tenemos que $suma(\mathsf{X}\mathit{123}\mathbf{2}, \mathsf{X}\mathbf{2}, 1) \in T_k^\tau$ para algun k. Notar que $k \geq 1$. Ya que $suma(\mathsf{X}\mathit{123}\mathbf{2}, \mathsf{X}\mathbf{2}, 1)$ no es variable ni nombre de cte tenemos que el Lema 1 nos asegura que

$$suma(\mathsf{X}\mathit{123}\mathbf{2}, \mathsf{X}\mathbf{2}, 1) = f(t_1, ..., t_n), \text{ con } f \in \mathcal{F}_n,\ n \geq 1,\ t_1, ..., t_n \in T_{k-1}^\tau$$

O sea que se da alguno de los siguientes casos

- $suma(\mathsf{X}\mathit{123}\mathbf{2}, \mathsf{X}\mathbf{2}, 1) = glp(t_1)$, con $t_1 \in T_{k-1}^\tau$
- $suma(\mathsf{X}\mathit{123}\mathbf{2}, \mathsf{X}\mathbf{2}, 1) = suma(t_1, t_2)$, con $t_1, t_2 \in T_{k-1}^\tau$

El primero de estos es claramente imposible. O sea que tenemos que

$$suma(\mathsf{X}\mathit{123}\mathbf{2}, \mathsf{X}\mathbf{2}, 1) = suma(t_1, t_2), \text{ con } t_1, t_2 \in T_{k-1}^\tau$$

O sea que

$$\mathsf{X}\mathit{123}\mathbf{2}, \mathsf{X}\mathbf{2}, 1 = t_1, t_2$$

donde $t_1, t_2 \in T_{k-1}^\tau$. De esta igualdad se deduce trivialmente que t_1 comienza con X, ya que t_1 no puede ser ε (justifique). Pero es facil probar por induccion que

(*) si un termino comienza con X, entonces debe ser una variable

de lo cual rapidamente inferimos que $\mathsf{X}\mathit{123}\mathbf{2} = t_1$. Esto nos dice que

$$\mathsf{X}\mathbf{2}, 1 = t_2$$

Pero nuevamente aplicando (*), obtenemos un absurdo ya que $\mathsf{X}\mathbf{2}, 1$ no es una variable

Unicidad de la lectura de terminos

Diremos que β es un *tramo inicial (propio)* de α si hay una palabra γ tal que $\alpha = \beta\gamma$ (y $\beta \notin \{\varepsilon, \alpha\}$). En forma similar se define *tramo final (propio)*.

Notese que en la definicion de tipo se exige que nunca un nombre de cte sea subpalabra de otro nombre de cte, lo cual garantiza que nunca puede ser un nombre de cte un tramo inicial o final propio de otro nombre de cte. Lo que si puede suceder es que un tramo final propio de un nombre de cte c sea un tramo inicial propio de otro nombre de cte d. Mas formalmente puede suceder que haya palabras x, y, z, las tres distintas de ε tales que $c = xy$ y $d = yz$. En tal caso solemos decir que las palabras c y d se *mordizquean*. Por ejemplo si $\tau = (\{\text{uno,noli}\}, \emptyset, \emptyset, \emptyset)$, es facil ver que τ es un tipo y que uno y noli se mordizquean. El lema siguiente nos dice que este es el unico caso de mordizqueo de terminos. Lo aceptaremos sin prueba.

Lemma 2 **([Mordizqueo de Terminos)** *Sean $s, t \in T^\tau$ y supongamos que hay palabras x, y, z, con $y \neq \varepsilon$ tales que $s = xy$ y $t = yz$. Entonces $x = z = \varepsilon$ o $s, t \in \mathcal{C}$. En particular si un termino es tramo inicial o final de otro termino, entonces dichos terminos son iguales.*

Ejercicio 8: No haga la prueba del lema anterior

Ejercicio 9: Sea τ un tipo. Si $t_1, t_2, s_1, s_2 \in T^\tau$ y $t_1t_2 = s_1s_2$, entonces $t_1 = s_1$ y $t_2 = s_2$

Theorem 3 **(Lectura unica de terminos)** *Dado $t \in T^\tau$ se da una de las siguientes:*

(1) $t \in Var \cup \mathcal{C}$

(2) Hay unicos $n \geq 1$, $f \in \mathcal{F}_n$, $t_1, ..., t_n \in T^\tau$ tales que $t = f(t_1, ..., t_n)$.

Proof. En virtud del primer lema de esta guia solo nos falta probar la unicidad en el punto (2). Supongamos que

$$t = f(t_1, ..., t_n) = g(s_1, ..., s_m)$$

con $n, m \geq 1$, $f \in \mathcal{F}_n$, $g \in \mathcal{F}_m$, $t_1, ..., t_n, s_1, ..., s_m \in T^\tau$. Notese que $f = g$. O sea que $n = m = a(f)$. Notese que t_1 es tramo inicial de s_1 o s_1 es tramo inicial de t_1, lo cual por el lema anterior nos dice que $t_1 = s_1$. Con el mismo razonamiento podemos probar que debera suceder $t_2 = s_2, ..., t_n = s_n$. ■

Ejercicio 10: (S) Sea τ un tipo. Si $f \in \mathcal{F}_2$ y $f(\alpha, t)$, $t \in T^\tau$, entonces $\alpha \in T^\tau$

El teorema anterior es importante ya que nos permite definir recursivamente funciones con dominio contenido en T^τ. Por ejemplo podemos definir una funcion $F : T^\tau \to T^\tau$, de la siguiente manera:

- $F(c) = c$, para cada $c \in \mathcal{C}$
- $F(v) = v$, para cada $v \in Var$
- $F(f(t_1, ..., t_n)) = f(F(t_1), ..., F(t_n))$, si $f \in \mathcal{F}_n$, con $n \neq 2$
- $F(f(t_1, t_2)) = f(t_2, t_1)$, si $f \in \mathcal{F}_2$.

Notese que si la unicidad de la lectura no fuera cierta, entonces las ecuaciones anteriores no estarian definiendo en forma correcta una funcion ya que el valor de la imagen de un termino t estaria dependiendo de cual descomposicion tomemos para t.

Ocurrencias

Dadas palabras $\alpha, \beta \in \Sigma^*$, con $|\alpha|, |\beta| \geq 1$, y un natural $i \in \{1, ..., |\beta|\}$, se dice que α *ocurre a partir de* i *en* β cuando se de que existan palabras δ, γ tales que $\beta = \delta\alpha\gamma$ y $|\delta| = i - 1$. Intuitivamente hablando α ocurre a partir de i en β cuando se de que si comensamos a leer desde el lugar i-esimo de β en adelante, leeremos la palabra α completa y luego posiblemente seguiran otros simbolos.

Notese que una palabra α puede ocurrir en β, a partir de i, y tambien a partir de j, con $i \neq j$. En virtud de esto, hablaremos de las distintas ocurrencias de α en β. Por ejemplo hay dos ocurrencias de la palabra aba en la palabra

$$ccccccabaccccabaccccc$$

y tambien hay dos ocurrencias de la palabra aba en la palabra

$$ccccccababaccccccccccc$$

En el primer caso diremos que dichas ocurrencias de aba son *disjuntas* ya que ocupan espacios disjuntos dentro de la palabra. En cambio en el segundo caso puede apreciarse que las dos ocurrencias se superponen en una posicion. A veces diremos que una ocurrencia esta *contenida* o *sucede* dentro de otra. Por ejemplo la segunda ocurrencia de ab en $babbbfabcccfabccc$ esta contenida en la primer ocurrencia de $fabc$ en $babbbfabcccfabccc$.

No definiremos en forma matematica precisa el concepto de ocurrencia pero el lector no tendra problemas en comprenderlo y manejarlo en forma correcta.

Reemplazos de ocurrencias Tambien haremos *reemplazos* de ocurrencias por palabras. Por ejemplo el resultado de reemplazar la primer ocurrencia de abb en $ccabbgfgabbgg$ por $oolala$ es la palabra $ccoolalagfgabbgg$. Cuando todas las ocurrencias de una palabra α en una palabra β sean disjuntas entre si, podemos hablar del resultado de *reeplazar simultaneamente cada ocurrencia de* α *en* β *por* γ. Por ejemplo si tenemos

$$\begin{aligned}
\alpha &= yet \\
\beta &= ghsyetcjjjyetbcpyeteabc \\
\gamma &= \%\%
\end{aligned}$$

entonces $ghs\%\%cjjj\%\%bcp\%\%eabc$ es el resultado de reemplazar simultaneamente cada ocurrencia de α en β por γ. Es importante notar que los reemplazos se hacen simultaneamente y no secuencialmente (i.e. reemplazando la primer ocurrencia de α por γ y luego al resultado reemplazarle la primer ocurrencia de α por γ y asi sucesivamente). Obviamente el reemplazo secuencial puede dar un resultado distinto al simultaneo (que es el que usaremos en general) e incluso puede suceder que en el reemplazo secuencial el proceso se pueda iterar indefinidamente. Dejamos al lector armar ejemplos de estas cituaciones.

Tambien se pueden hacer reemplazos simultaneos de distintas palabras en una palabra dada. Supongamos tenemos palabras $\alpha_1, ..., \alpha_n$ (con $\alpha_i \neq \alpha_j$, para $i \neq j$) las cuales tienen la propiedad de que las distintas ocurrencias de ellas en la palabra β son siempre disjuntas de a pares, y tenemos ademas palabras $\gamma_1, ..., \gamma_n$. Entonces hablaremos del resultado de reemplazar simultaneamente:

- cada ocurrencia de α_1 en β, por γ_1
- cada ocurrencia de α_2 en β, por γ_2

$$\vdots$$

- cada ocurrencia de α_n en β, por γ_n

Por ejemplo si tomamos

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= gh \\
\alpha_2 &= yet \\
\alpha_3 &= ana \\
\beta &= ghbbbyetbbgh\%\%ana\#\#ana!!!ana \\
\gamma_1 &= AA \\
\gamma_2 &= BBBB \\
\gamma_3 &= CCC
\end{aligned}$$

entonces $AAbbbBBBBbbAA\%\%CCC\#\#CCC!!!CCC$ es el resultado de reemplazar simultaneamente:

- cada ocurrencia de α_1 en β, por γ_1

- cada ocurrencia de α_2 en β, por γ_2

  cada ocurrencia de α_3 en β, por γ_3

Subterminos

Sean $s, t \in T^\tau$. Diremos que s es *subtermino* (*propio*) de t si (no es igual a t y) s es subpalabra de t.

Lemma 4 **([Ocurrencias de terminos en terminos)** *Sean $r, s, t \in T^\tau$.*

(a) Si $s \neq t = f(t_1, ..., t_n)$ y s ocurre en t, entonces dicha ocurrencia sucede dentro de algun t_j, $j = 1, ..., n$.

(b) Si r, s ocurren en t, entonces dichas ocurrencias son disjuntas o una ocurre dentro de otra. En particular, las distintas ocurrencias de r en t son disjuntas.

(c) Si t' es el resultado de reemplazar una ocurrencia de s en t por r, entonces $t' \in T^\tau$.

Proof. (a) Supongamos la ocurrencia de s comienza en algun t_j. Entonces el Lema de Modizqueo de Terminos nos conduce a que dicha ocurrencia debera estar contenida en t_j. Veamos que la ocurrencia de s no puede ser a partir de un $i \in \{1, ..., |f|\}$. Supongamos lo contrario. Tenemos entonces que s debe ser de la forma $g(s_1, ..., s_m)$ ya que no puede estar en $Var \cup \mathcal{C}$. Notese que $i \neq 1$ ya que en caso contrario s seria un tramo inicial propio de t. Pero entonces g debe ser un tramo final propio de f, lo cual es absurdo. Ya que s no puede comenzar con parentesis o coma, hemos contemplado todos los posibles casos de comienzo de la ocurrencia de s en t.

(b) y (c) pueden probarse por induccion, usando (a). $\blacksquare$

Ejercicio 11: (S) Complete las partes no hechas en la prueba anterior

Nota: Es importante notar que si bien no hemos definido en forma presisa el concepto de ocurrencia o de reemplazo de ocurrencias, la prueba del lema anterior es rigurosa en el sentido de que solo usa propiedades del concepto de ocurrencia y reemplazo de ocurrencias las cuales deberan ser comunes a cualquier definicion o formulacion matematica que se hiciera de aquellos conceptos. En este caso, es posible dar una definicion presisa y satisfactoria de dichos conceptos aunque para otros conceptos tales como el de prueba absoluta de consistencia, aun no se ha encontrado una formulacion matematica adecuada.

Formulas

Sea τ un tipo. Las palabras de alguna de las siguientes dos formas

$$\begin{array}{l} (t \equiv s), \text{ con } t, s \in T^\tau \\ r(t_1, ..., t_n), \text{ con } r \in \mathcal{R}_n,\ n \geq 1 \text{ y } t_1, ..., t_n \in T^\tau \end{array}$$

seran llamadas *formulas atomicas de tipo* τ. Por ejemplo si $\tau = (\{\mathrm{uno}, \mathrm{doli}\}, \{\mathrm{MAS}, \mathrm{P}\}, \{\mathrm{Her}\}, a)$, con a dado por $a(\mathrm{MAS}) = 4$, $a(\mathrm{P}) = 1$ y $a(\mathrm{Her}) = 3$, entonces

- $(\mathrm{uno} \equiv \mathrm{doli})$
- $(\mathsf{X}\mathit{15666}\mathbf{9} \equiv \mathrm{doli})$
- $\mathrm{Her}(\mathrm{uno}, \mathsf{X}\mathbf{4}, \mathrm{doli})$
- $(\mathrm{MAS}(\mathrm{uno}, \mathrm{doli}, \mathsf{X}\mathit{1}\mathbf{9}, \mathsf{X}\mathbf{5}) \equiv \mathrm{uno})$
- $\mathrm{Her}(\mathrm{P}(\mathrm{P}(\mathrm{uno})), \mathrm{MAS}(\mathrm{P}(\mathsf{X}\mathbf{4}), \mathrm{doli}, \mathsf{X}\mathit{1}\mathbf{9}, \mathsf{X}\mathbf{5}), \mathsf{X}\mathit{1}\mathbf{9})$

son formulas atomicas de tipo τ.

Dado un tipo τ, definamos recursivamente los conjuntos de palabras F_k^τ, con $k \geq 0$, de la siguiente manera:

$$\begin{array}{rcl} F_0^\tau & = & \{\text{formulas atomicas de tipo } \tau\} \\ F_{k+1}^\tau & = & F_k^\tau \cup \{\neg\varphi : \varphi \in F_k^\tau\} \cup \{(\varphi \vee \psi) : \varphi, \psi \in F_k^\tau\} \cup \\ & & \{(\varphi \wedge \psi) : \varphi, \psi \in F_k^\tau\} \cup \{(\varphi \rightarrow \psi) : \varphi, \psi \in F_k^\tau\} \cup \\ & & \{(\varphi \leftrightarrow \psi) : \varphi, \psi \in F_k^\tau\} \cup \{\forall v\varphi : \varphi \in F_k^\tau \text{ y } v \in Var\} \cup \\ & & \{\exists v\varphi : \varphi \in F_k^\tau \text{ y } v \in Var\} \end{array}$$

Sea

$$F^\tau = \bigcup_{k \geq 0} F_k^\tau$$

Los elementos de F^τ seran llamados *formulas de tipo* τ.

Algunos ejemplos:

(E1) Sea $\tau = (\{\mathrm{uno}, \mathrm{doli}\}, \{\mathrm{MAS}, \mathrm{P}\}, \{\mathrm{Her}\}, a)$, con a dado por $a(\mathrm{MAS}) = 4$, $a(\mathrm{P}) = 1$ y $a(\mathrm{Her}) = 3$. Entonces

(a) $\neg((\mathsf{X}\mathbf{1} \equiv \mathsf{X}\mathbf{2}) \wedge \mathrm{Her}(\mathrm{P}(\mathrm{doli}), \mathrm{doli}, \mathsf{X}\mathit{1}\mathbf{9}))$

(b) $\exists \mathsf{X}\mathbf{9}\mathrm{Her}(\mathrm{doli}, \mathrm{doli}, \mathsf{X}\mathbf{9})$

(c) $\exists \mathsf{X}\mathbf{9}\neg(\mathrm{uno} \equiv \mathrm{doli})$

(d) $\neg\exists \mathsf{X}\mathbf{9}\forall \mathsf{X}\mathbf{7}(\mathrm{Her}(\mathsf{X}\mathbf{9}, \mathrm{doli}, \mathsf{X}\mathbf{7}) \rightarrow (\mathrm{P}(\mathrm{doli}) \equiv \mathsf{X}\mathbf{7}))$

(e) $\forall \mathsf{X}\mathit{555}\mathbf{9}\forall \mathsf{X}\mathbf{7}\exists \mathsf{X}\mathit{5}\mathbf{1}(\mathrm{MAS}(\mathrm{uno}, \mathrm{doli}, \mathsf{X}\mathit{1}\mathbf{9}, \mathsf{X}\mathbf{5}) \equiv \mathrm{uno}) \rightarrow \mathrm{Her}(\mathrm{doli}, \mathrm{doli}, \mathrm{doli}))$

son formulas de tipo τ

(E2) Sea $\tau = (\{0, 1\}, \{\mathsf{s}, \mathsf{i}\}, \{\leq\}, \{(\mathsf{s}, 2), (\mathsf{i}, 2), (\leq, 2)\})$ el tipo de los reticulados cuaterna. Entonces

(a) $\leq(1,0)$

(b) $\leq(\mathsf{X}\mathbf{1},\mathsf{X}\mathbf{2})$

(c) $\neg(\mathsf{s}(\mathsf{X}\mathbf{2},\mathsf{X}\mathbf{1})\equiv\mathsf{X}\mathbf{2}))$

(d) $\forall\mathsf{X}\mathbf{2}\forall\mathsf{X}\mathbf{1}\leq(\mathsf{X}\mathbf{2},\mathsf{s}(\mathsf{X}\mathbf{2},\mathsf{X}\mathbf{1}))$

(e) $((\mathsf{i}(\mathsf{X}\mathbf{1},\mathsf{X}\mathbf{2})\equiv 0)\wedge(\mathsf{s}(\mathsf{X}\mathbf{1},\mathsf{X}\mathbf{2})\equiv 1))$

(f) $\forall\mathsf{X}\mathbf{9}\exists\mathsf{X}\mathbf{1}((0\equiv\mathsf{X}\mathbf{1})\rightarrow\exists\mathsf{X}\mathbf{1}\neg\leq(\mathsf{X}\mathbf{2},\mathsf{s}(\mathsf{X}\mathbf{2},\mathsf{X}\mathbf{1})))$

son formulas de tipo τ. Cabe destacar que $(\mathsf{X}\mathbf{1}\leq\mathsf{X}\mathbf{2})$ no es una formula de tipo τ aunque, como veremos en los ejercicios esto no es trivial de la definicion de formula y requiere de una demostracion.

El siguiente lema es la herramienta basica que usaremos para probar propiedades acerca de los elementos de F^{τ}.

Lemma 5 **([Menu para formulas)** *Supongamos $\varphi\in F_k^{\tau}$, con $k\geq 1$. Entonces φ es de alguna de las siguientes formas*

$\varphi=(t\equiv s)$, con $t,s\in T^{\tau}$.

$\varphi=r(t_1,...,t_n)$, con $r\in\mathcal{R}_n$, $t_1,...,t_n\in T^{\tau}$

$\varphi=(\varphi_1\eta\varphi_2)$, con $\eta\in\{\wedge,\vee,\rightarrow,\leftrightarrow\}$, $\varphi_1,\varphi_2\in F_{k-1}^{\tau}$

$\varphi=\neg\varphi_1$, con $\varphi_1\in F_{k-1}^{\tau}$

$\varphi=Qv\varphi_1$, con $Q\in\{\forall,\exists\}$, $v\in Var$ y $\varphi_1\in F_{k-1}^{\tau}$

Proof. Induccion en k. ■

Ejercicio 12: V o F o I, justificar

(a) Si α,β son palabras tales que $(\alpha\wedge\beta)\in F^{\tau}$, entonces $\alpha,\beta\in F^{\tau}$

Ejercicio 13: Sea $\varphi\in F^{\tau}$

(a) Si φ' = resultado de remover en φ cada ocurrencia del símbolo $\neg$ entonces $\varphi'\in F^{\tau}$

(b) Si φ' = resultado de reemplazar cada ocurrencia de la variable x_1 en φ por x_2, entonces $\varphi'\in F^{\tau}$

(c) Si φ' = resultado de reemplazar algunas ocurrencias de la variable x_1 en φ por x_2, entonces $\varphi'\in F^{\tau}$

Ejercicio 14: Pruebe que las siguientes palabras no son fórmulas de tipo $(\{0,1\},\{+\},\{r\},\{(+,2),(r,2)\})$.

(a) $\neg(((x_1\equiv x_2)\wedge r(+(0,x_{12}),x_2)),\forall x_3(x_3\equiv 0))$

(b) $((r(x_1,(0\equiv 1))\wedge\forall x_1\exists x_2 r(x_1,x_2))\wedge((0\equiv x_3)\rightarrow r(x_3,x_7)))$

(c) $\exists x_3(r(x_3,x_4)\rightarrow\neg(x_4\equiv 0)\forall x_4)$

Unicidad de la lectura de formulas

Aceptaremos sin prueba el siguiente resultado.

Proposition 6 **([Mordisqueo de formulas)** *Si $\varphi, \psi \in F^\tau$ y x, y, z son tales que $\varphi = xy$, $\psi = yz$ y $y \neq \varepsilon$, entonces $z = \varepsilon$ y $x \in (\{\neg\} \cup \{Qv : Q \in \{\forall, \exists\}$ y $v \in Var\})^*$. En particular ningun tramo inicial propio de una formula es una formula.*

Theorem 7 **(Lectura unica de formulas)** *Dada $\varphi \in F^\tau$ se da una y solo una de las siguientes:*

(1) $\varphi = (t \equiv s)$, con $t, s \in T^\tau$

(2) $\varphi = r(t_1, ..., t_n)$, con $r \in \mathcal{R}_n$, $t_1, ..., t_n \in T^\tau$

(3) $\varphi = (\varphi_1 \eta \varphi_2)$, con $\eta \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, $\varphi_1, \varphi_2 \in F^\tau$

(4) $\varphi = \neg\varphi_1$, con $\varphi_1 \in F^\tau$

(5) $\varphi = Qv\varphi_1$, con $Q \in \{\forall, \exists\}$, $\varphi_1 \in F^\tau$ y $v \in Var$.

Mas aun, en los puntos (1), (2), (3), (4) y (5) tales descomposiciones son unicas.

Proof. Si una formula φ satisface (1), entonces φ no puede contener simbolos del alfabeto $\{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ lo cual garantiza que φ no puede satisfacer (3). Ademas φ no puede satisfacer (2) o (4) o (5) ya que φ comienza con (. En forma analoga se puede terminar de ver que las propiedades (1),...,(5) son excluyentes.

La unicidad en las descomposiciones de (4) y (5) es obvia. La de (3) se desprende facilmente del lema anterior y la de los puntos (1) y (2) del lema analogo para terminos. ■

Ejercicio 15: (S) Complete las partes no hechas en la prueba anterior

Ejercicio 16: (S) Si $\psi_1, \psi_2, \varphi_1, \varphi_2 \in F^\tau$ y $\psi_1\psi_2 = \varphi_1\varphi_2$, entonces $\psi_1 = \varphi_1$ y $\psi_2 = \varphi_2$

Ejercicio 17: (S) Si $(\alpha \wedge \beta), \beta \in F^\tau$, entonces $\alpha \in F^\tau$

Subformulas

Una formula φ sera llamada una *subformula* (*propia*) de una formula ψ, cuando φ (sea no igual a ψ y) sea subpalabra de ψ. Ya que es similar a su analogo para terminos, aceptaremos sin prueba el lema siguiente

Lemma 8 **([Ocurrencias de formulas en formulas)** *Sea τ un tipo.*

(a) Las formulas atomicas no tienen subformulas propias.

(b) Si φ ocurre propiamente en $(\psi\eta\phi)$, entonces tal ocurrencia es en ψ o en ϕ.

(c) Si φ ocurre propiamente en $\neg\psi$, entonces tal ocurrencia es en ψ.

(d) Si φ ocurre propiamente en $Qx_k\psi$, entonces tal ocurrencia es en ψ.

(e) Si φ_1, φ_2 ocurren en φ, entonces dichas ocurrencias son disjuntas o una contiene a la otra.

(f) Si λ' es el resultado de reemplazar alguna ocurrencia de φ en λ por ψ, entonces $\lambda' \in F^\tau$.

Ejercicio 18: (S) Si $\psi, \varphi, \alpha \in F^\tau$ son tales que ψ ocurre en α a partir de i y φ ocurre en α a partir de $i+1$, entonces $|\varphi| < |\psi|$

Variables libres

Recordemos que dadas palabras $\alpha, \beta \in \Sigma^*$, con $|\alpha|, |\beta| \geq 1$, y un natural $i \in \{1, ..., |\beta|\}$, se dice que *$\alpha$ ocurre a partir de i en β* cuando se de que existan palabras δ, γ tales que $\beta = \delta\alpha\gamma$ y $|\delta| = i - 1$. Intuitivamente hablando α ocurre a partir de i en β cuando se de que si comensamos a leer desde el lugar i-esimo de β, en adelante, entonces leeremos la palabra α completa y luego posiblemente seguiran otros simbolos.

Definamos recursivamente la relacion "*v ocurre libremente en φ a partir de i*", donde $v \in Var$, $\varphi \in F^\tau$ y $i \in \{1, ..., |\varphi|\}$, de la siguiente manera:

(1) Si φ es atomica, entonces v ocurre libremente en φ a partir de i sii v ocurre en φ a partir de i

(2) Si $\varphi = (\varphi_1\eta\varphi_2)$, entonces v ocurre libremente en φ a partir de i sii se da alguna de las siguientes

  (a) v ocurre libremente en φ_1 a partir de $i - 1$

  (b) v ocurre libremente en φ_2 a partir de $i - |(\varphi_1\eta|$

(3) Si $\varphi = \neg\varphi_1$, entonces v ocurre libremente en φ a partir de i sii v ocurre libremente en φ_1 a partir de $i-1$

(4) Si $\varphi = Qw\varphi_1$, entonces v ocurre libremente en φ a partir de i sii $v \neq w$ y v ocurre libremente en φ_1 a partir de $i - |Qw|$

Dados $v \in Var$, $\varphi \in F^\tau$ y $i \in \{1, ..., |\varphi|\}$, diremos que "*$v$ ocurre acotadamente en φ a partir de i*" cuando v ocurre en φ a partir de i y v no ocurre libremente en φ a partir de i.

Algunos ejemplos:

1. Sea $\tau = (\{\text{uno}, \text{doli}\}, \{\text{MAS}, \text{P}\}, \{\text{Her}\}, a)$, con a dado por $a(\text{MAS}) = 4$, $a(\text{P}) = 1$ y $a(\text{Her}) = 3$.

   (a) $\mathsf{X}\mathbf{9}$ ocurre libremente en $\text{Her}(\text{doli}, \text{doli}, \mathsf{X}\mathbf{9})$ a partir de 15

   (b) $\mathsf{X}\mathbf{9}$ ocurre acotadamente en $\exists\mathsf{X}\mathbf{9}\text{Her}(\text{doli}, \text{doli}, \mathsf{X}\mathbf{9})$ a partir de 2 y de 18

   (c) $\mathsf{X}\mathbf{2}$ ocurre libremente en $(\exists\mathsf{X}\mathbf{2}\text{Her}(\mathsf{X}\mathbf{2}, \mathsf{X}\mathbf{7}, \text{uno}) \rightarrow \text{Her}(\mathsf{X}\mathbf{2}, \mathsf{X}\mathbf{7}, \text{uno}))$ a partir de 24 y acotadamente a partir de 3 y 9.

   (d) Sea $\varphi = ((\mathsf{X}\mathbf{1} \equiv \mathsf{X}\mathbf{2}) \wedge \exists\mathsf{X}\mathbf{2}\text{Her}(\text{P}(\text{doli}), \text{doli}, \mathsf{X}\mathbf{2}))$. La variable $\mathsf{X}\mathbf{2}$ ocurre libremente en φ a partir de 6 y ocurre acotadamente en φ a partir de 11 y de 30.

Dada una formula φ, sea

$$Li(\varphi) = \{v \in Var : \text{hay un } i \text{ tal que } v \text{ ocurre libremente en } \varphi \text{ a partir de } i\}.$$

Los elementos de $Li(\varphi)$ seran llamados *variables libres de φ*. Por ejemplo, si φ es la formula

$$(\exists\mathsf{X}\mathbf{7}(\mathsf{X}\mathbf{7} \equiv \mathsf{X}\mathbf{6}) \rightarrow ((\mathsf{X}\mathbf{1} \equiv \mathsf{X}\mathbf{2}) \wedge \exists\mathsf{X}\mathbf{2}\text{Her}(\text{doli}, \text{doli}, \mathsf{X}\mathbf{2})))$$

tenemos que $Li(\varphi) = \{\mathsf{X}\mathbf{1}, \mathsf{X}\mathbf{2}, \mathsf{X}\mathbf{6}\}$ (justifique). Tambien si

$$\varphi = (\exists\mathsf{X}\mathbf{2}\text{Her}(\mathsf{X}\mathbf{2}, \mathsf{X}\mathbf{7}, \text{uno}) \rightarrow \text{Her}(\mathsf{X}\mathbf{2}, \mathsf{X}\mathbf{7}, \text{uno}))$$

entonces $Li(\varphi) = \{\mathsf{X}\mathbf{2}, \mathsf{X}\mathbf{7}\}$.

Una *sentencia* sera una formula φ tal que $Li(\varphi) = \emptyset$. Usaremos S^τ para denotar el conjunto de las sentencias de tipo τ.

Lemma 9 *Sea τ un tipo*

(a) $Li((t \equiv s)) = \{v \in Var : v$ ocurre en t o v ocurre en $s\}$

(b) $Li(r(t_1, ..., t_n)) = \{v \in Var : v$ ocurre en algun $t_i\}$

(c) $Li(\neg\varphi) = Li(\varphi)$

(d) $Li((\varphi\eta\psi)) = Li(\varphi) \cup Li(\psi)$.

(e) $Li(Qx_j\varphi) = Li(\varphi) - \{x_j\}$.

Proof. (a) y (b) son triviales de las definiciones y dejadas al lector

(d) Supongamos $v \in Li((\varphi\eta\psi))$, entonces hay un i tal que v ocurre libremente en $(\varphi\eta\psi)$ a partir de i. Por definicion tenemos que ya sea v ocurre libremente en φ a partir de $i-1$ o v ocurre libremente en ψ a partir de $i-|(\varphi\eta|$, con lo cual $v \in Li(\varphi) \cup Li(\psi)$

Supongamos ahora que $v \in Li(\varphi) \cup Li(\psi)$. S.p.d.g. supongamos $v \in Li(\psi)$. Por definicion tenemos que hay un i tal que v ocurre libremente en ψ a partir de i. Pero notese que esto nos dice por definicion que v ocurre libremente en $(\varphi\eta\psi)$ a partir de $i + |(\varphi\eta|$ con lo cual $v \in Li((\varphi\eta\psi))$.

(c) es similar a (d)

(e) Supongamos $v \in Li(Qx_j\varphi)$, entonces hay un i tal que v ocurre libremente en $Qx_j\varphi$ a partir de i. Por definicion tenemos que $v \neq x_j$ y v ocurre libremente en φ a partir de $i - |Qx_j|$, con lo cual $v \in Li(\varphi) - \{x_j\}$

Supongamos ahora que $v \in Li(\varphi) - \{x_j\}$. Por definicion tenemos que hay un i tal que v ocurre libremente en φ a partir de i. Ya que $v \neq x_j$ esto nos dice por definicion que v ocurre libremente en $Qx_j\varphi$ a partir de $i + |Qx_j|$, con lo cual $v \in Li(Qx_j\varphi)$. ■

Ejercicio 19: V o F o I, justifique

(a) Sean $v \in Var$, $\varphi \in F^\tau$ y $i \in \omega$. Si v ocurre libremente en φ a partir de algun i entonces $\forall v$ no es subpalabra de φ

(b) Sean $v \in Var$, $\varphi \in F^\tau$ y $i \in \{1, ..., |\varphi|\}$. Entonces v ocurre libremente en φ a partir de i o v ocurre acotadamente en φ a partir de i

(c) Si $\varphi \in F^\tau$ y $j \in \mathbf{N}$, entonces $Li(\forall x_j\varphi) \cup \{x_j\} = Li(\varphi)$

Modelo matematico de las formulas elementales de tipo τ

Si $\tau = (\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{R}, a)$ es un tipo, diremos que τ' es una *extension de τ por nombres de constante* si τ' es de la forma $(\mathcal{C}', \mathcal{F}, \mathcal{R}, a)$ con $\mathcal{C}'$ tal que $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}'$.

Hemos definido las formulas de tipo τ con la intencion de dar un modelo matematico del concepto de formula elemental de tipo τ pero deberiamos notar que en las formulas de tipo τ no hay nombres de elementos fijos por lo cual dichas formulas son un modelo matematico solo de ciertas formulas elementales de tipo τ, a saber aquellas en las cuales no hay nombres de elementos fijos. Recordemos que estos nombres se usaban en las pruebas elementales para denotar elementos fijos (a veces arbitrarios y otras veces que cumplian alguna propiedad).

Cuando un matematico realiza una prueba elemental en una teoria elemental (Σ, τ) comienza la misma imaginando una estructura de tipo τ de la cual lo unico que sabe es que cumple las sentencias de Σ. Luego cuando fija un elemento y le pone nombre, digamos b, podemos pensar que expandio su estructura imaginaria a una de tipo $(\mathcal{C} \cup \{b\}, \mathcal{F}, \mathcal{R}, a)$ y continua su razonamiento. Esto lo puede hacer muchas veces a lo largo de una prueba por lo cual su estructura imaginaria va cambiando de tipo. Esta mecanica de prueba del matematico nos deja ver que es natural modelizar las formulas elementales de tipo τ con formulas de tipo τ_1, donde τ_1 es alguna extension de τ por constantes.