Notacion declaratoria para terminos

Si t es un termino de tipo τ, entonces escribiremos $t =_d t(v_1, ..., v_n)$ para declarar que $v_1, ..., v_n$ son variables distintas (con $n \geq 1$) y tales que toda variable que ocurre en t pertenece a $\{v_1, ..., v_n\}$ (no necesariamente toda v_j debe ocurrir en t).

El uso de declaraciones de la forma $t =_d t(v_1, ..., v_n)$ sera muy util cuando se lo convina con ciertas convenciones notacionales que describiremos a continuacion.

Convencion Notacional 1: Cuando hayamos hecho la declaracion $t =_d t(v_1, ..., v_n)$, si $P_1, ..., P_n$ son palabras cualesquiera (no necesariamente terminos), entonces $t(P_1, ..., P_n)$ denotara la palabra que resulta de reemplazar (simultaneamente) cada ocurrencia de v_1 en t, por P_1, cada ocurrencia de v_2 en t, por P_2, etc.

Notese que cuando las palabras $P_i's$ son terminos, $t(P_1, ..., P_n)$ es un termino. Ademas notese que en esta convencion notacional, el orden de las variables $v_1, ..., v_n$ es clave. Por ejemplo si $\tau = (\emptyset, \{\mathrm{FU}\}, \emptyset, \{(\mathrm{FU}, 2)\})$ y $t = \mathrm{FU}(\mathrm{FU}(x_2, x_{16}), x_3)$, entonces

- Si declaramos $t =_d t(x_3, x_2, x_{16})$, entonces $t(\#\#, \blacktriangle\#\blacktriangle, @@)$ denotara la palabra $\mathrm{FU}(\mathrm{FU}(\blacktriangle\#\blacktriangle, @@), \#\#)$
- Si declaramos $t =_d t(x_{16}, x_3, x_2)$, entonces $t(\#\#, \blacktriangle\#\blacktriangle, @@)$ denotara la palabra $\mathrm{FU}(\mathrm{FU}(@@, \#\#), \blacktriangle\#\blacktriangle)$

Tambien podriamos haber declarado $t =_d t(x_3, x_{200}, x_2, x_{16}, x_{100})$ y en tal caso $t(\#\#, !!!!, \blacktriangle\#\blacktriangle, @@, !!)$ denotara la palabra $\mathrm{FU}(\mathrm{FU}(\blacktriangle\#\blacktriangle, @@), \#\#)$

Convencion Notacional 2: Cuando hayamos declarado $t =_d t(v_1, ..., v_n)$, si $\mathbf{A}$ es un modelo de tipo τ y $a_1, ..., a_n \in A$, entonces con $t^{\mathbf{A}}[a_1..., a_n]$ denotaremos al elemento $t^{\mathbf{A}}[\vec{b}]$, donde $\vec{b}$ es una asignacion tal que a cada v_i le asigna el valor a_i.

Ejercicio 1: Justifique por que no hay ambiguedad en la forma de definir $t^{\mathbf{A}}[a_1..., a_n]$ en la convencion anterior

Nuevamente cabe destacar que en esta ultima convencion notacional, el orden de las variables $v_1, ..., v_n$ es clave. Por ejemplo si τ y t son los dados en el ejemplo anterior y $\mathbf{A}$ es dado por $A = \{1, 2, 3\}$ y $\mathrm{FU}^{\mathbf{A}}(i, j) = j$, para cada $i, j \in A$, tenemos que

- Si declaramos $t =_d t(x_3, x_2, x_{16})$, entonces $t^{\mathbf{A}}[2,1,3] = \mathrm{FU}(\mathrm{FU}(x_2, x_{16}), x_3)^{\mathbf{A}}[2,1,3] = \mathrm{FU}^{\mathbf{A}}(\mathrm{FU}^{\mathbf{A}}(1,3), 2) = 2$
- Si declaramos $t =_d t(x_{16}, x_3, x_2)$, entonces $t^{\mathbf{A}}[2,1,3] = \mathrm{FU}(\mathrm{FU}(x_2, x_{16}), x_3)^{\mathbf{A}}[2,1,3] = \mathrm{FU}^{\mathbf{A}}(\mathrm{FU}^{\mathbf{A}}(3,2), 1) = 1$

Tambien podriamos haber declarado $t =_d t(x_3, x_{200}, x_2, x_{16}, x_{100})$ y en tal caso $t^{\mathbf{A}}[2, 10, 1, 3, 1000] = 2$

Ejercicio 2: V o F o I, justifique.

(a) Si $t =_d t(v_1, v_2)$ y $t_1, t_2 \in T^\tau$, entonces $|t(t_1, t_2)| = |t| + 1 + |t_1| + 1 + |t_2| + 1$

(b) Sea t un termino de tipo τ y supongamos $t =_d t(v_1, ..., v_n)$. Sea $\mathbf{A}$ un modelo de tipo τ. Sean $a_1, ..., a_n \in A$. Entonces $t^{\mathbf{A}}[a_1 ..., a_n]$ denota al elemento $t^{\mathbf{A}}[\vec{b}]$, donde $\vec{b}$ es cualquier elemento de $A^{\mathbf{N}}$ tal que $b_1 = a_1, ..., b_n = a_n$

(c) Supongamos $t =_d t(v_1, ..., v_n)$. Sea $\mathbf{A}$ un modelo de tipo τ. Sean $a_1, ..., a_n \in A$. Entonces $t^{\mathbf{A}}[a_1 ..., a_n] \in T_c^\tau$

(d) Supongamos $t =_d t(v_1, ..., v_n)$. Sea $\mathbf{A}$ un modelo de tipo τ. Sean $a_1, ..., a_n \in A$. Entonces $t(a_1 ..., a_n) \in A$

Notacion declaratoria para formulas

Si φ es una formula de tipo τ, entonces escribiremos $\varphi =_d \varphi(v_1, ..., v_n)$ para declarar que $v_1, ..., v_n$ son variables distintas (con $n \geq 1$) y tales que $Li(\varphi) \subseteq \{v_1, ..., v_n\}$. Tal como para el caso de terminos, el uso de declaraciones de la forma $\varphi =_d \varphi(v_1, ..., v_n)$ sera muy util cuando se combina con ciertas convenciones notacionales que describiremos a continuacion.

Convencion Notacional 3: Cuando hayamos hecho la declaracion $\varphi =_d \varphi(v_1, ..., v_n)$, si $P_1, ..., P_n$ son palabras cualesquiera, entonces $\varphi(P_1, ..., P_n)$ denotara la palabra que resulta de reemplazar (simultaneamente) cada ocurrencia libre de v_1 en φ, por P_1, cada ocurrencia libre de v_2 en φ, por P_2, etc.

Ejercicio 4: Pruebe que cuando las palabras $P_i's$ son terminos, $\varphi(P_1, ..., P_n)$ es una formula

Ademas notese que tal como para el caso de terminos, en esta convencion notacional, el orden de las variables $v_1, ..., v_n$ es clave:

Ejercicio 5: Sea $\tau = (\emptyset, \{\mathrm{F}\}, \{\mathrm{E}\}, \{(\mathrm{F}, 1), (\mathrm{E}, 2)\})$ y $\varphi = (\forall x_{16}\mathrm{E}(x_2, x_{16}) \wedge (\mathrm{F}(x_{16}) \equiv \mathrm{F}(x_{17})))$

(a) Declaremos $\varphi =_d \varphi(x_2, x_{16}, x_{17}, x_{18})$. ¿Que denota $\varphi(\$\$, \&\$\&, @@, \%) = (\forall x_{16}\mathrm{E}(\$\$, x_{16}) \wedge (\mathrm{F}(\&\$\&) \equiv \mathrm{F}(@@)))$?

(b) Declaremos $\varphi =_d \varphi(x_{18}, x_{16}, x_{17}, x_2)$. ¿Que denota $\varphi(\$\$, \&\$\&, @@, \%)$?

Ejercicio 6: Refute con un contraejemplo el siguiente enunciado

- Sea $\psi \in F^\tau$ tal que $Li(\psi) = \{x_1, x_2, x_3\}$. Declaremos $\psi =_d \psi(x_1, x_2, x_3)$. Entonces $Li(\psi(x_2, x_3, x_1)) = \{x_1, x_2, x_3\}$

Convencion Notacional 4: Cuando hayamos declarado $\varphi =_d \varphi(v_1, ..., v_n)$, si $\mathbf{A}$ es un modelo de tipo τ y $a_1, ..., a_n \in A$, entonces $\mathbf{A} \models \varphi[a_1..., a_n]$ significara que $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{b}]$, donde $\vec{b}$ es una asignacion tal que a cada v_i le asigna el valor a_i. En gral $\mathbf{A} \not\models \varphi[a_1, ..., a_n]$ significara que no sucede $\mathbf{A} \models \varphi[a_1, ..., a_n]$

Ejercicio 7: Justifique por que no hay ambiguedad en la forma de definir $\mathbf{A} \models \varphi[a_1, ..., a_n]$, en la convencion anterior

Notar que en esta convencion notacional, el orden de las variables $v_1, ..., v_n$ es clave:

Ejercicio 8: Sea $\tau = (\emptyset, \{\mathrm{F}\}, \{\mathrm{E}\}, \{(\mathrm{F}, 1), (\mathrm{E}, 2)\})$ y $\varphi = (\forall x_{16}\mathrm{E}(x_2, x_{16}) \wedge (\mathrm{F}(x_{16}) \equiv \mathrm{F}(x_{17})))$ y sea $\mathbf{A}$ el modelo de tipo τ dado por $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\mathrm{F}^{\mathbf{A}}(x) = \max\{x, 3\}$ y $\mathrm{E}^{\mathbf{A}} = \{1\} \times A$

(a) Declaremos $\varphi =_d \varphi(x_2, x_{16}, x_{17}, x_{18})$. ¿Se da que $\mathbf{A} \models \varphi[1, 2, 2, 4]$?

(b) Declaremos $\varphi =_d \varphi(x_{18}, x_{16}, x_{17}, x_2)$. ¿Se da que $\mathbf{A} \models \varphi[1, 2, 2, 4]$?

Ejercicio 9: Sea $\tau = (\emptyset, \emptyset, \{\leq^2\}, a)$.

(a) De una formula $\varphi =_d \varphi(x_1, x_2, x_3)$ tal que para cada estructura $\mathbf{A}$ de tipo τ tal que $(A, \leq^{\mathbf{A}})$ es un poset, se de que $\mathbf{A} \models \varphi[a, b, c]$ sii a es el supremo de $\{b, c\}$ en $(A, \leq^{\mathbf{A}})$, cualesquiera sean $a, b, c \in A$

(b) Dar una sentencia ρ de tipo τ tal que para cada estructura $\mathbf{A}$de tipo τ se de que

$$\mathbf{A} \models \rho \text{ sii } (A, \leq^{\mathbf{A}}) \text{ es un reticulado par}$$

(c) De una formula $\varphi =_d \varphi(x_1, x_2)$ tal que para cada estructura $\mathbf{A}$ de tipo τ tal que $(A, \leq^{\mathbf{A}})$ es un poset, se de que $\mathbf{A} \models \varphi[a, b]$ sii a es cubierto por b en $(A, \leq^{\mathbf{A}})$, cualesquiera sean $a, b \in A$

Ejercicio 10: Sea $\tau = (\emptyset, \{\mathsf{s}^2, \mathsf{i}^2\}, \emptyset, a)$.

(a) Dar una formula $\varphi =_d \varphi(x_1, x_2)$ tal que para cada estructura $\mathbf{A}$ de tipo τ tal que $(A, \mathsf{s}^{\mathbf{A}}, \mathsf{i}^{\mathbf{A}})$ es un reticulado terna se de que $\mathbf{A} \models \varphi[a, b]$ sii a es menor o igual que b en $(A, \mathsf{s}^{\mathbf{A}}, \mathsf{i}^{\mathbf{A}})$, cualesquiera sean $a, b \in A$

(b) Dar una formula $\varphi =_d \varphi(x_1, x_2)$ tal que para cada estructura $\mathbf{A}$ de tipo τ tal que $(A, \mathsf{s}^{\mathbf{A}}, \mathsf{i}^{\mathbf{A}})$ es un reticulado terna se de que $\mathbf{A} \models \varphi[a, b]$ sii a es cubierto por b en $(A, \mathsf{s}^{\mathbf{A}}, \mathsf{i}^{\mathbf{A}})$, cualesquiera sean $a, b \in A$

(c) Dar una formula $\varphi =_d \varphi(x_1)$ tal que para cada estructura $\mathbf{A}$ de tipo τ tal que $(A, \mathsf{s}^{\mathbf{A}}, \mathsf{i}^{\mathbf{A}})$ es un reticulado terna se de que $\mathbf{A} \models \varphi[a]$ sii a es un elemento minimo de $(A, \mathsf{s}^{\mathbf{A}}, \mathsf{i}^{\mathbf{A}})$, cualesquiera sea $a \in A$

Elementos definibles

Sea $\mathbf{A}$ un modelo de tipo τ. Diremos que un elemento a de A es *definible* en $\mathbf{A}$ si hay una fórmula $\varphi =_d \varphi(v)$ tal que $\mathbf{A} \models \varphi[a]$ y para cada $b \in A - \{a\}$ se tiene que $\mathbf{A} \not\models \varphi[b]$. Es decir a es el unico elemento de A que cumple $\mathbf{A} \models \varphi[a]$. Diremos que una formula $\varphi \in F^\tau$ *define* a en $\mathbf{A}$ si cumple lo especificado en la definicion anterior.

Ejercicio 11: Sea $\tau = (\{\text{un}\}, \emptyset, \emptyset, \emptyset)$. Sea $\mathbf{A}$ el modelo de tipo τ dado por $A = \{1, 3\}$ y $\text{un}^{\mathbf{A}} = 3$. ¿Cuales son los elementos definibles de $\mathbf{A}$?

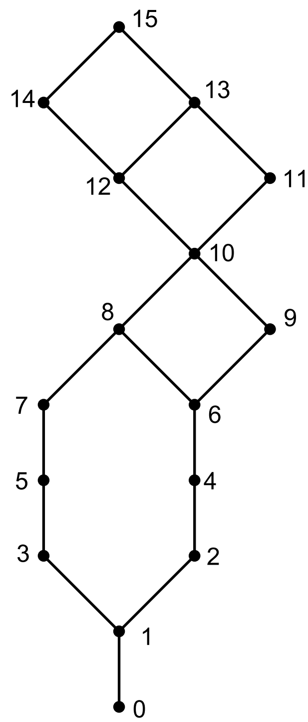
Ejercicio 12: Sea $\tau = (\emptyset, \emptyset, \{r^2\}, a)$ y sea $\mathbf{A}$ dado por:

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$
$$r^{\mathbf{A}} = \{(i, j) \in A^2 : i \leq j\}$$

Pruebe que todo elemento de $\mathbf{A}$ es definible.

Ejercicio 13: Sea $\tau = (\{\text{uno}\}, \{\text{mas}^2\}, \emptyset, a)$ y tomemos $A = \mathbf{N}$, $\text{mas}^{\mathbf{A}} = +$, $\text{uno}^{\mathbf{A}} = 1$. Mostrar que todo elemento de $\mathbf{A}$ es definible. Hint: puede definir cada elemento usando una formula sin cuantificadores.

Ejercicio 14: $\tau = (\emptyset, \{\mathsf{s}^2, \mathsf{i}^2\}, \emptyset, a)$. Sea $\mathbf{A}$ el modelo de tipo τ dado por el siguiente diagrama:



($\mathsf{s}^{\mathbf{A}}$ y $\mathsf{i}^{\mathbf{A}}$ son las operaciones supremo e infimo dadas por el diagrama.)
Cuales elementos de **A** son definibles?

A continuacion mostraremos como definir ciertos elementos de la estructura **A** del ejercicio anterior. Para definir al elemento 15 podemos tomar

$$\varphi_{15} = \forall x_{200}(\mathsf{s}(x_1, x_{200}) \equiv x_1)$$

Es facil ver que esta formula define al 15. Declaremos $\varphi_{15} =_d \varphi_{15}(x_1)$. Notar que

$$\varphi_{15}(x_7) = \forall x_{200}(\mathsf{s}(x_7, x_{200}) \equiv x_7)$$

tambien define al elemento 15 pero $\varphi_{15}(x_{200}) = \forall x_{200}(\mathsf{s}(x_{200}, x_{200}) \equiv x_{200})$ no define a 15 ya que es una sentencia que es verdadera en **A**

Para seguir definiendo elementos nos hara falta la formula:

- $Cub = ((\mathsf{s}(x_1, x_2) \equiv x_2) \wedge \neg(x_1 \equiv x_2)) \wedge$
$\neg \exists x_{300}((\mathsf{s}(x_1, x_{300}) \equiv x_{300}) \wedge \neg(x_1 \equiv x_{300})) \wedge (\mathsf{s}(x_{300}, x_2) \equiv x_2) \wedge \neg(x_{300} \equiv x_2))))$

Notese que $Li(Cub) = \{x_1, x_2\}$ y Cub dice "x_1 es cubierto por x_2". Declaremos $Cub =_d Cub(x_1, x_2)$. Notese que

$Cub(x_3, x_6)$ dice "x_3 es cubierto por x_6" pero $Cub(x_3, x_{300})$ no dice "x_3 es cubierto por x_{300}".

Ya que el elemento 13 es el unico que es cubierto por el 15 y que cubre a dos elementos distintos, podemos tomar

- $\varphi_{13} = \exists x_{600}(\varphi_{15}(x_{600}) \wedge Cub(x_1, x_{600})) \wedge$
$\exists x_{700} \exists x_{800}((Cub(x_{700}, x_1) \wedge Cub(x_{800}, x_1)) \wedge \neg(x_{700} \equiv x_{800}))$

para definir al elemento 13. Notese que la formula $\exists x_{600}(\varphi_{15}(x_{600}) \wedge Cub(x_1, x_{600}))$ dice "x_1 es cubierto por 15" o dicho de otra forma solo se cumple en los elementos que son cubiertos por el 15, i.e. solo se cumple en 13 y 14. Unos consejos para seguir definiendo:

- podemos definir a 14 como el unico elemento que es cubierto por el 15 y que no es igual a 14
- podemos definir a 12 como el unico elemento que es el supremo del 13 con el 14
- podemos definir a 11 como el unico elemento que es cubierto por el 13 y que no es igual a 12

Dejamos al lector completar el resto del Ejercicio 14.

Ejercicio 15: V o F o I, justifique.

(a) Sea τ un tipo y supongamos $f \in \mathcal{F}_1$. Sea $\mathbf{A}$ una estructura de tipo τ y supongamos $a \in A$ es definible en $\mathbf{A}$. Entonces $f^{\mathbf{A}}(a)$ es definible en $\mathbf{A}$.

(b) Sea τ un tipo y supongamos $f \in \mathcal{F}_1$. Sea $\mathbf{A}$ una estructura de tipo τ y supongamos $a \in A$ es definible en $\mathbf{A}$. Entonces la formula $(x_1 \equiv f(a))$ define $f^{\mathbf{A}}(a)$ en $\mathbf{A}$

(c) Sea τ un tipo y supongamos $f \in \mathcal{F}_1$. Sea $\mathbf{A}$ una estructura de tipo τ y supongamos $a \in A$ es definible en $\mathbf{A}$ por la formula $\varphi =_d \varphi(x_3)$. Entonces $f^{\mathbf{A}}(a)$ es definible en $\mathbf{A}$ por la formula $(\varphi(x_3) \wedge (x_1 \equiv f(x_3)))$

(d) Sea τ un tipo y supongamos $f \in \mathcal{F}_1$. Sea $\mathbf{A}$ una estructura de tipo τ y supongamos $a \in A$ es definible en $\mathbf{A}$ por la formula $\varphi =_d \varphi(x_3)$. Entonces $f^{\mathbf{A}}(a)$ es definible en $\mathbf{A}$ por la formula $\forall x_3(\varphi(x_3) \wedge (x_1 \equiv f(x_3)))$

(e) Sea τ un tipo y supongamos $f \in \mathcal{F}_1$. Sea $\mathbf{A}$ una estructura de tipo τ y supongamos $a \in A$ es definible en $\mathbf{A}$ por la formula $\varphi =_d \varphi(x_3)$. Entonces $f^{\mathbf{A}}(a)$ es definible en $\mathbf{A}$ por la formula $\exists x_3(\varphi(x_3) \rightarrow (x_1 \equiv f(x_3)))$

Para probar que un elemento dado no es definible usaremos el siguiente criterio:

NoDefinible Si $\mathbf{A}$ es un modelo de tipo τ y $a \in A$ es tal que $F(a) \neq a$, para algun isomorfismo $F : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}$, entonces a no es definible en $\mathbf{A}$

Mas adelante en esta guia se justificara dicho criterio (Ejercicio 26) pero por ahora lo aplicaremos ya que en muchos casos es facil de aplicar.

Ejercicio 16: Sea $\tau = (\{\mathrm{un}\}, \emptyset, \emptyset, \emptyset)$. Sea $\mathbf{A}$ el modelo de tipo τ dado por $A = \{1, 2, 3\}$ y $\mathrm{un}^{\mathbf{A}} = 3$. Decida cuales elementos de $\mathbf{A}$ son definibles. Justifique.

Ejercicio 17: Sea $\tau = (\emptyset, \emptyset, \{r^2\}, a)$ y sea $\mathbf{A}$ dado por:

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$
$$r^{\mathbf{A}} = \{(0, 1), (1, 0), (0, 2), (2, 0), (2, 4), (4, 2), (2, 3), (3, 2)\}$$

Decida cuales elementos de $\mathbf{A}$ son definibles. Justifique.

Ejercicio 18: Sea $\tau = (\emptyset, \emptyset, \{\mathrm{me}^2\}, a)$. Sea $\mathbf{A}$ dado por

$$A = \{1, 2, 3, 6, 12\}$$
$$\mathrm{me}^{\mathbf{A}} = \{(i, j) : i|j \text{ y } i \neq j\}$$

Decida cuales elementos de $\mathbf{A}$ son definibles. Justifique.

Ejercicio 18,5: Sea $\tau = (\emptyset, \emptyset, \{\mathrm{me}^2\}, a)$. Sea $\mathbf{A}$ dado por

$$A = \{2, 3, 6, 12, 13\}$$
$$\mathrm{me}^{\mathbf{A}} = \{(i, j) : i|j \text{ y } i \neq j\}$$

Decida cuales elementos de $\mathbf{A}$ son definibles. Justifique.

Manejo tecnico de la notacion declaratoria

Aqui daremos una serie de lemas y un par de convenciones notacionales las cuales nos permitiran usar con naturalidad y rigor la notacion declaratoria en enunciados de teoremas y en demostraciones.

Comenzamos con un lema de "lectura de terminos una ves declarados".

Lemma 1 **(Lectura unica de terminos declarados)** *Sea τ un tipo cualquiera y supongamos $t \in T^{\tau}$. Si $t =_d t(v_1, ..., v_n)$, entonces se da una y solo una de las siguientes*

(1) $t = c$, para algun $c \in \mathcal{C}$

(2) $t = v_j$, para algun j

(3) $t = f(t_1, ..., t_m)$, con $f \in \mathcal{F}_m$ y $t_1, ..., t_m \in T^{\tau}$, unicos

Ejercicio 19: Pruebe el lema anterior

Convencion Notacional 5: Cuando hayamos declarado $t =_d t(v_1, ..., v_n)$ y se el caso (3) del lema anterior, supondremos tacitamente que tambien hemos hecho las declaraciones $t_1 =_d t_1(v_1, ..., v_n), ..., t_m =_d t_m(v_1, ..., v_n)$. Esto lo podemos hacer ya que obviamente las variables que ocurren en cada uno de los $t_i's$ estan en $\{v_1, ..., v_n\}$

Cabe destacar que esta ultima convencion notacional junto con la Convencion Notacional 1, nos dice que cuando se de el caso (3) del lema anterior, si $P_1, ..., P_n$ son palabras cualesquiera, entonces

$$t(P_1, ..., P_n) = f(t_1(P_1, ..., P_n), ..., t_m(P_1, ..., P_n)).$$

El siguiente lema se basa en la Convencion Notacional 5 y nos permite darle caracter recursivo a la notacion $t^{\mathbf{A}}[a_1, ..., a_n]$.

Lemma 2 **(Caracter recursivo de la notacion $t^{\mathbf{A}}[a_1, ..., a_n]$)** *Sea τ un tipo cualquiera y $t \in T^{\tau}$. Supongamos $t =_d t(v_1, ..., v_n)$. Sea $\mathbf{A}$ un modelo de tipo τ. Sean $a_1, ..., a_n \in A$. Se tiene que:*

(1) Si $t = c$, entonces $t^{\mathbf{A}}[a_1, ..., a_n] = c^{\mathbf{A}}$

(2) Si $t = v_j$, entonces $t^{\mathbf{A}}[a_1, ..., a_n] = a_j$

(3) Si $t = f(t_1, ..., t_m)$, con $f \in \mathcal{F}_m$ y $t_1, ..., t_m \in T^{\tau}$, entonces

$$t^{\mathbf{A}}[a_1, ..., a_n] = f^{\mathbf{A}}(t_1^{\mathbf{A}}[a_1, ..., a_n], ..., t_m^{\mathbf{A}}[a_1, ..., a_n])$$

Proof. (1) y (2) son triviales.

(3) Sea $\vec{b}$ una asignacion tal que a cada v_i le asigna el valor a_i. Tenemos que

$$
\begin{aligned}
t^{\mathbf{A}}[a_1, ..., a_n] &= t^{\mathbf{A}}[\vec{b}] \text{ (por def. de } t^{\mathbf{A}}[a_1, ..., a_n]) \\
&= f^{\mathbf{A}}(t_1^{\mathbf{A}}[\vec{b}], ..., t_m^{\mathbf{A}}[\vec{b}]) \text{ (por def. de } t^{\mathbf{A}}[\vec{b}]) \\
&= f^{\mathbf{A}}(t_1^{\mathbf{A}}[a_1, ..., a_n], ..., t_m^{\mathbf{A}}[a_1, ..., a_n]) \text{ (por def. de cada } t_i^{\mathbf{A}}[a_1, ..., a_n])
\end{aligned}
$$

■

Nos sera conveniente enunciar el siguiente lema de "lectura unica de formulas declaradas".

Lemma 3 **(Lectura unica de formulas declaradas)** *Sea τ un tipo cualquiera y $\varphi \in F^\tau$. Supongamos $\varphi =_d \varphi(v_1, ..., v_n)$. Entonces se una y solo una de las siguientes:*

(1) $\varphi = (t \equiv s)$, con $t, s \in T^\tau$, unicos

(2) $\varphi = r(t_1, ..., t_m)$, con $r \in \mathcal{R}_m$ y $t_1, ..., t_m \in T^\tau$, unicos

(3) $\varphi = (\varphi_1 \wedge \varphi_2)$, con $\varphi_1, \varphi_2 \in F^\tau$, unicas

(4) $\varphi = (\varphi_1 \vee \varphi_2)$, con $\varphi_1, \varphi_2 \in F^\tau$, unicas

(5) $\varphi = (\varphi_1 \rightarrow \varphi_2)$, con $\varphi_1, \varphi_2 \in F^\tau$, unicas

(6) $\varphi = (\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2)$, con $\varphi_1, \varphi_2 \in F^\tau$, unicas

(7) $\varphi = \neg\varphi_1$, con $\varphi_1 \in F^\tau$, unica

(8) $\varphi = \forall v_j \varphi_1$, con $v_j \in \{v_1, ..., v_n\}$ y $\varphi_1 \in F^\tau$, unicas

(9) $\varphi = \forall v \varphi_1$, con $v \in Var - \{v_1, ..., v_n\}$ y $\varphi_1 \in F^\tau$, unicas

(10) $\varphi = \exists v_j \varphi_1$, con $v_j \in \{v_1, ..., v_n\}$ y $\varphi_1 \in F^\tau$, unicas

(11) $\varphi = \exists v \varphi_1$, con $v \in Var - \{v_1, ..., v_n\}$ y $\varphi_1 \in F^\tau$, unicas

Observacion: Cuando hayamos declarado $\varphi =_d \varphi(v_1, ..., v_n)$, entonces:

- si se da el caso (1) del Lema 3, entonces las variables que ocurren en t y s estan en $\{v_1, ..., v_n\}$.

- si se da el caso (2) del Lema 3, entonces las variables que ocurren en $t_1, ..., t_m$ estan en $\{v_1, ..., v_n\}$.

- si se da cualquiera de los casos (3), (4), (5) o (6) del Lema 3, entonces $Li(\varphi_1) \cup Li(\varphi_2) \subseteq \{v_1, ..., v_n\}$

- si se da cualquiera de los casos (7), (8) o (10) del Lema 3, entonces $Li(\varphi_1) \subseteq \{v_1, ..., v_n\}$

- si se da el caso (9) o el caso (11) del Lema 3, entonces $Li(\varphi_1) \subseteq \{v_1, ..., v_n, v\}$

Ejercicio 20: Justifique la observacion anterior

La observacion anterior nos permite hacer la siguiente:

Convencion Notacional 6: Cuando hayamos declarado $\varphi =_d \varphi(v_1, ..., v_n)$, entonces:

- si se da el caso (1) del Lema 3, supondremos tacitamente que tambien hemos hecho las declaraciones $t =_d t(v_1, ..., v_n)$ y $s =_d s(v_1, ..., v_n)$.

- si se da el caso (2) del Lema 3, supondremos tacitamente que tambien hemos hecho las declaraciones $t_1 =_d t_1(v_1, ..., v_n), ..., t_m =_d t_m(v_1, ..., v_n)$.

- si se da cualquiera de los casos (3), (4), (5) o (6) del Lema 3, supondremos tacitamente que tambien hemos hecho las declaraciones $\varphi_1 =_d \varphi_1(v_1, ..., v_n)$ y $\varphi_2 =_d \varphi_2(v_1, ..., v_n)$.

- si se da cualquiera de los casos (7), (8) o (10) del Lema 3, supondremos tacitamente que tambien hemos hecho la declaracion $\varphi_1 =_d \varphi_1(v_1, ..., v_n)$.

- si se da el caso (9) o el caso (11) del Lema 3, supondremos tacitamente que tambien hemos hecho la declaracion $\varphi_1 =_d \varphi_1(v_1, ..., v_n, v)$.

El siguiente lema se basa en la Convencion Notacional 6 y nos permite darle caracter recursivo a la notacion $\mathbf{A} \models \varphi[a_1, ..., a_n]$. Lo aceptaremos sin prueba aunque no es complicado dar una.

Lemma 4 **(Caracter recursivo de la notacion $\mathbf{A} \models \varphi[a_1, ..., a_n\ ]$)** *Supongamos $\varphi =_d \varphi(v_1, ..., v_n)$. Sea $\mathbf{A} = (A, i)$ un modelo de tipo τ y sean $a_1, ..., a_n \in A$. Entonces*

(1) Si $\varphi = (t \equiv s)$, entonces

- $\mathbf{A} \models \varphi[a_1, ..., a_n]$ *si y solo si* $t^{\mathbf{A}}[a_1, ..., a_n] = s^{\mathbf{A}}[a_1, ..., a_n]$

(2) Si $\varphi = r(t_1, ..., t_m)$, entonces

- $\mathbf{A} \models \varphi[a_1, ..., a_n]$ *si y solo si* $(t_1^{\mathbf{A}}[a_1, ..., a_n], ..., t_m^{\mathbf{A}}[a_1, ..., a_n]) \in r^{\mathbf{A}}$

(3) Si $\varphi = (\varphi_1 \wedge \varphi_2)$, entonces

- $\mathbf{A} \models \varphi[a_1, ..., a_n]$ *si y solo si* $\mathbf{A} \models \varphi_1[a_1, ..., a_n]$ *y* $\mathbf{A} \models \varphi_2[a_1, ..., a_n]$

(4) Si $\varphi = (\varphi_1 \vee \varphi_2)$, entonces

- *$\mathbf{A} \models \varphi[a_1, ..., a_n]$ si y solo si $\mathbf{A} \models \varphi_1[a_1, ..., a_n]$ o $\mathbf{A} \models \varphi_2[a_1, ..., a_n]$*

(5) Si $\varphi = (\varphi_1 \rightarrow \varphi_2)$, entonces

- *$\mathbf{A} \models \varphi[a_1, ..., a_n]$ si y solo si $\mathbf{A} \models \varphi_2[a_1, ..., a_n]$ o $\mathbf{A} \not\models \varphi_1[a_1, ..., a_n]$*

(6) Si $\varphi = (\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2)$, entonces

- *$\mathbf{A} \models \varphi[a_1, ..., a_n]$ si y solo si ya sea $\mathbf{A} \models \varphi_1[a_1, ..., a_n]$ y $\mathbf{A} \models \varphi_2[a_1, ..., a_n]$ o $\mathbf{A} \not\models \varphi_1[a_1, ..., a_n]$ y $\mathbf{A} \not\models \varphi_2[a_1, ..., a_n]$*

(7) Si $\varphi = \neg\varphi_1$, entonces

- *$\mathbf{A} \models \varphi[a_1, ..., a_n]$ si y solo si $\mathbf{A} \not\models \varphi_1[a_1, ..., a_n]$*

(8) Si $\varphi = \forall v_j \varphi_1$, entonces

- *$\mathbf{A} \models \varphi[a_1, ..., a_n]$ si y solo si $\mathbf{A} \models \varphi_1[a_1, ..., a, ..., a_n]$, para todo $a \in A$.*

(9) Si $\varphi = \forall v \varphi_1$, con $v \notin \{v_1, ..., v_n\}$, entonces

- *$\mathbf{A} \models \varphi[a_1, ..., a_n]$ si y solo si $\mathbf{A} \models \varphi_1[a_1, ..., a_n, a]$, para todo $a \in A$.*

(10) Si $\varphi = \exists v_j \varphi_1$, entonces

- *$\mathbf{A} \models \varphi[a_1, ..., a_n]$ si y solo si $\mathbf{A} \models \varphi_1[a_1, ..., a, ..., a_n]$, para algun $a \in A$.*

(11) Si $\varphi = \exists v \varphi_1$, con $v \notin \{v_1, ..., v_n\}$, entonces

- *$\mathbf{A} \models \varphi[a_1, ..., a_n]$ si y solo si $\mathbf{A} \models \varphi_1[a_1, ..., a_n, a]$, para algun $a \in A$.*

Ejercicio 21: Covensace que el lema anterior es cierto

Ejercicio 22: Sea $\tau = (\emptyset, \{\mathsf{s}^2, \mathsf{i}^2\}, \emptyset, a)$. Sea $t =_d t(v_1, ..., v_n) \in T^\tau$. Sea $\mathbf{A}$ una estructura de tipo τ tal que $(A, \mathsf{s}^{\mathbf{A}}, \mathsf{i}^{\mathbf{A}})$ es un reticulado terna. Pruebe que $t^{\mathbf{A}}[a, a, ..., a] = a$, para cada $a \in A$

Ejercicio 23: Sea $\tau = (\emptyset, \{\mathsf{s}^2, \mathsf{i}^2\}, \emptyset, a)$. Sea $t =_d t(v_1, v_2) \in T^\tau$. Sea $\mathbf{A}$ una estructura de tipo τ tal que $(A, \mathsf{s}^{\mathbf{A}}, \mathsf{i}^{\mathbf{A}})$ es un reticulado terna. Pruebe que $t^{\mathbf{A}}[a, b] \in \{a, b, \mathsf{s}^{\mathbf{A}}(a, b), \mathsf{i}^{\mathbf{A}}(a, b)\}$, para cada $a, b \in A$

Ejercicio 23,5 Sea $\tau = (\emptyset, \{\mathsf{s}^2, \mathsf{i}^2\}, \emptyset, a)$. Sea $t =_d t(v_1, v_2, v_3) \in T^\tau$. Sea $\mathbf{A}$ una estructura de tipo τ tal que $(A, \mathsf{s}^{\mathbf{A}}, \mathsf{i}^{\mathbf{A}})$ es un reticulado terna cuyo orden asociado es total. Pruebe que $t^{\mathbf{A}}[a, b, c] \in \{a, b, c\}$, para cada $a, b, c \in A$

Ejercicio 23,7 Sea $\tau = (\{0,1\}, \{\mathsf{s}^2, \mathsf{i}^2\}, \emptyset, a)$. Sea $\mathbf{A}$ una estructura de tipo τ tal que $(A, \mathsf{s}^{\mathbf{A}}, \mathsf{i}^{\mathbf{A}}, 0^{\mathbf{A}}, 1^{\mathbf{A}})$ es un reticulado acotado. Sea S un subuniverso de $(A, \mathsf{s}^{\mathbf{A}}, \mathsf{i}^{\mathbf{A}}, 0^{\mathbf{A}}, 1^{\mathbf{A}})$. Pruebe que cualesquiera sea $t =_d t(v_1, ..., v_n) \in T^\tau$ y $a_1, ..., a_n \in S$, se tiene que $t^{\mathbf{A}}[a_1, ..., a_n] \in S$.

Ejercicio 24: Sea $\tau = (\emptyset, \{\mathsf{s}^2, \mathsf{i}^2\}, \emptyset, a)$. Sea $t =_d t(v_1, v_2) \in T^\tau$. Sea $\mathbf{A}$ una estructura de tipo τ tal que $(A, \mathsf{s}^{\mathbf{A}}, \mathsf{i}^{\mathbf{A}})$ es un reticulado terna. Pruebe que cualesquiera sean $a_1, a_2, b_1, b_2 \in A$, se tiene que si $a_1 \leq^{\mathbf{A}} b_1$ y $a_2 \leq^{\mathbf{A}} b_2$ entonces $t^{\mathbf{A}}[a_1, a_2] \leq^{\mathbf{A}} t^{\mathbf{A}}[b_1, b_2]$.

Los siguientes dos ejercicios son versiones en notacion declaratoria de lemas probados en la Guia 7. Se recomienda ser cuidadoso y preciso en la prueba, basándose en los lemas y convenciones notacionales antes enunciados, para ir ganando experiencia en el manejo de la notación declaratoria y su rol en la presentación de resultados teóricos ya que los resultados más importantes de la materia serán expresados valiéndose de esta notacion.

Ejercicio 24,5: Sea $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ un homomorfismo. Supongamos $t =_d t(v_1, ..., v_n)$. Entonces

$$F(t^{\mathbf{A}}[a_1, a_2, ..., a_n]) = t^{\mathbf{B}}[F(a_1), F(a_2), ..., F(a_n)]$$

para cada $a_1, a_2, ..., a_n \in A$.

Ejercicio 25: Supongamos que $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ es un isomorfismo. Sea $\varphi =_d \varphi(v_1, ..., v_n) \in F^\tau$. Entonces

$$\mathbf{A} \models \varphi[a_1, a_2, ..., a_n] \text{ sii } \mathbf{B} \models \varphi[F(a_1), F(a_2), ..., F(a_n)]$$

para cada $a_1, a_2, ...a_n \in A$.

Ejercicio 26: Si $\mathbf{A}$ es un modelo de tipo τ y $a \in A$ es definible, entonces $F(a) = a$, para cada isomorfismo $F : \mathbf{A} \to \mathbf{A}$. Saque como corolario que el criterio **NoDefinible** dado anteriormente es correcto

Ejercicio 27: (S) Supongamos que $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ es un homomorfismo sobre. Sea $\varphi =_d \varphi(v_1, ..., v_n) \in F^\tau$ tal que los simbolos

$$\neg \quad \to \quad \leftrightarrow$$

no ocurren en φ. Entonces

$$\mathbf{A} \models \varphi[a_1, a_2, ..., a_n] \text{ implica } \mathbf{B} \models \varphi[F(a_1), F(a_2), ..., F(a_n)]$$

para cada $a_1, a_2, ...a_n \in A$. Encuentre contraejemplo para cuando F no es sobre y para cuando F es sobre pero $\neg$ ocurre en φ

Dos teoremas de reemplazo

El primer teorema de reemplazo es directo aunque lo aceptaremos sin prueba.

Theorem 5 **(Teorema de reemplazo para terminos)** *Supongamos* $t =_d t(w_1, ..., w_k)$, $s_1 =_d s_1(v_1, ..., v_n), ..., s_k =_d s_k(v_1, ..., v_n)$. *Todas las variables de* $t(s_1, ..., s_k)$ *estan en* $\{v_1, ..., v_n\}$ *y si declaramos* $t(s_1, ..., s_k) =_d t(s_1, ..., s_k)(v_1, ..., v_n)$, *entonces para cada estructura* $\mathbf{A}$ *y* $a_1, ..., a_n \in A$, *se tiene que*

$$t(s_1, ..., s_k)^{\mathbf{A}}[a_1, ..., a_n] = t^{\mathbf{A}}[s_1^{\mathbf{A}}[a_1, ..., a_n], ..., s_k^{\mathbf{A}}[a_1, ..., a_n]]$$

En el sentido mas general, el reemplazo de variables libres en formulas por terminos no preserva el significado. Por ejemplo sea $\varphi = \exists x_1(f(x_1) \equiv x_2)$ y declaremos $\varphi =_d \varphi(x_2)$. Es claro que dada una estructura $\mathbf{A}$, tenemos que $\mathbf{A} \models \varphi[a]$ si y solo si a esta en la imagen de $f^{\mathbf{A}}$, es decir la formula $\varphi(x_2)$ dice "x_2 esta en la imagen de $f^{\mathbf{A}}$". Uno entonces esperaria que $\varphi(x_1)$ diga "x_1 esta en la imagen de $f^{\mathbf{A}}$" pero esto no es asi ya que $\varphi(x_1)$ es igual a $\exists x_1(f(x_1) \equiv x_1)$ y por lo tanto ni siquiera habla acerca de x_1 (de hecho $\varphi(x_1)$ es una sentencia que vale en $\mathbf{A}$ sii $f^{\mathbf{A}}$ tiene un punto fijo). Para seguir perdiendo ingenuidad recomendamos hacer el siguiente ejercicio.

Ejercicio 28: Refute con un contraejemplo

- Sea $\varphi =_d \varphi(x_1) \in F^\tau$. Entonces $\forall x_1 \forall x_2\ ((\varphi(x_1) \wedge (x_1 \equiv x_2)) \rightarrow \varphi(x_2))$ es universalmente válida.

Lo anterior da lugar a la siguiente definicion: Diremos que v *es sustituible por* w *en* φ cuando ninguna ocurrencia libre de v en φ sucede dentro de una ocurrencia de una subformula de la forma $Qw\psi$ en φ. En otras palabras v no sera sustituible por w en φ cuando alguna ocurrencia libre de v en φ suceda dentro de una ocurrencia en φ de una formula de la forma $Qw\psi$. Notese que puede suceder que v sea sustituible por w en φ y que sin envargo haya una subformula de la forma $Qw\psi$ para la cual $v \in Li(Qw\psi)$. Dejamos como ejercicio encontrar un ejemplo de esta situacion. Dado un termino t, diremos que v *es sustituible por* t *en* φ cuando v sea sustituible en φ por cada variable que ocurre en t.

Usando lemas anteriores podemos ver que se dan las siguientes propiedades

(1) Si φ es atomica, entonces v es sustituible por w en φ

(2) Si $\varphi = (\varphi_1 \eta \varphi_2)$, entonces v es sustituible por w en φ sii v es substituible por w en φ_1 y v es

substituible por w en φ_2

(3) Si $\varphi = \neg\varphi_1$, entonces v es sustituible por w en φ sii v es substituible por w en φ_1

(4) Si $\varphi = Qv\varphi_1$, entonces v es sustituible por w en φ

(5) Si $\varphi = Qw\varphi_1$ y $v \in Li(\varphi_1)$, entonces v no es sustituible por w en φ

(6) Si $\varphi = Qw\varphi_1$ y $v \notin Li(\varphi_1)$, entonces v es sustituible por w en φ

(7) Si $\varphi = Qu\varphi_1$, con $u \neq v, w$, entonces v es sustituible por w en φ sii v es sustituible por w en φ_1

Notese que las propiedades (1),...,(7) pueden usarse para dar una definicion recursiva de la relacion "*v es sustituible por w en φ*".

Ahora si, podemos enunciar nuestro teorema de reemplazo de variables por terminos en formulas. Lo aceptaremos sin demostracion.

Theorem 6 **(Teorema de reemplazo para formulas)** *Supongamos $\varphi =_d \varphi(w_1, ..., w_k)$, $t_1 =_d t_1(v_1, ..., v_n), ..., t_k =_d t_k(v_1, ..., v_n)$ y supongamos ademas que cada w_j es sustituible por t_j en φ. Entonces*

(a) $Li(\varphi(t_1, ..., t_k)) \subseteq \{v_1, ..., v_n\}$

(b) Si declaramos $\varphi(t_1, ..., t_k) =_d \varphi(t_1, ..., t_k)(v_1, ..., v_n)$, entonces para cada estructura $\mathbf{A}$ y $\vec{a} \in A^n$ se tiene

$$\mathbf{A} \models \varphi(t_1, ..., t_k)[\vec{a}] \text{ si y solo si } \mathbf{A} \models \varphi[t_1^{\mathbf{A}}[\vec{a}], ..., t_k^{\mathbf{A}}[\vec{a}]]$$

Ejercicio 29: (S) Use el teorema anterior para probar: Supongamos $\varphi =_d \varphi(x_1)$ y $c \in \mathcal{C}$. Entonces $\varphi(c)$ es una sentencia y se tiene que para estructura $\mathbf{A}$ y $a \in A$,

$$\mathbf{A} \models \varphi(c) \text{ si y solo si } \mathbf{A} \models \varphi[c^{\mathbf{A}}]$$

Concluimos con un ejemplo. Sea $\tau = (\emptyset, \{f\}, \emptyset, \{(f, 1)\})$. Sean $\varphi = \exists v_1(f(v_1) \equiv w_1)$ y $t = v_1$, donde v_1 y w_1 son variables distintas. Declaremos $\varphi =_d \varphi(w_1)$ y $t =_d t(v_1)$. Notese que w_1 no es sustituible en φ por t, por lo cual el teorema anterior no se puede aplicar. De hecho la conclusion del teorema no se da en este caso ya que puede verse facilmente que, cualesquiera sea la estructura de tipo τ, $\mathbf{A}$ y $a_1 \in A$, tenemos que:

- $\mathbf{A} \models \varphi(t)[a_1]$ si y solo si $f^{\mathbf{A}}$ tiene un pto fijo, es decir, $f^{\mathbf{A}}(a) = a$, para algun $a \in A$

- $\mathbf{A} \models \varphi[t^{\mathbf{A}}[a_1]]$ si y solo si a_1 esta en la imagen de $f^{\mathbf{A}}$

las cuales son condiciones claramente no equivalentes