Guia 14 de logica: Teorema de completitud

November 5, 2024

Hasta el momento tenemos una definicion matematica de prueba formal que modeliza el concepto intuitivo de prueba elemental, el cual corresponde al mundo real de los matematicos profecionales. Ahora bien, nada nos asegura que no aparesca un matematico que realize una prueba elemental de una sentencia φ en una teoria (Σ, τ), y que no haya una prueba formal de φ en (Σ, τ). En tal caso nuestro concepto de prueba seria incompleto (como modelo) aunque, como ya se vio, el mismo es correcto. Esto podria pasar por ejemplo si nos hubiesemos olvidado de incluir en nuestra definicion de prueba formal alguna regla o accion que el matematico usara para probar dicha φ, es decir nos podria pasar que no podamos "traducir" dicha prueba elemental a una prueba formal. Parese dificil poder asegurar o probar que nuestro concepto de prueba formal sea completo en el sentido antes descripto ya que el concepto de prueba elemental es empirico puesto que depende de las acciones de la comunidad matematica profecional y ademas no tiene una formulacion precisa. Por otra parte nada nos asegura que los matematicos profecionales no vayan a descubrir en el futuro algun nuevo "truco" elemental y que nuestro concepto que era completo pase a ser incompleto.

Fue un verdadero desafio cientifico (de los años cercanos a 1900) lidiar con estos problemas, y el teorema de completitud de Godel resuelve todo de una manera limpia y asombrosa. La razon es muy simple: Godel prueba que si una sentencia φ es verdadera en todos los modelos de (Σ, τ), entonces hay una prueba formal de φ en (Σ, τ). Ya que toda prueba elemental que haga un matematico (ahora o en el futuro) siempre probara una sentencia que es verdadera en cada modelo de (Σ, τ), el teorema de Godel nos garantiza que para cada prueba elemental (de ahora y del futuro) habra una prueba formal que pruebe la misma sentencia!

Por supuesto queda la posibilidad de que una prueba elemental dada por algun matematico (ahora o en el futuro) no sea traducible en forma natural a una prueba formal que pruebe lo mismo (mas alla de que sepamos que hay una gracias a Godel). Sin envargo el lector se ira convenciendo que esto es improbable que suceda, a medida que vaya formalizando distintas pruebas elementales clasicas dadas por los matematicos a lo largo de la historia.

Cabe destacar que entonces el Teorema de Correccion junto con el Teorema de Completitud resuelven el punto (4) del programa de logica dado al final de la Guia 8.

Para probar el teorema de completitud necesitaremos varios resultados los cuales iremos probando a continuacion.

Teorema del filtro primo

Un *filtro* de un reticulado terna $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ sera un subconjunto $F \subseteq L$ tal que:

(1) $F \neq \emptyset$

(2) $x, y \in F \Rightarrow x \mathsf{\ i\ } y \in F$

(3) $x \in F$ y $x \leq y \Rightarrow y \in F$

El nombre "filtro" es inspirado por la propiedad (3) ya que si un filtro o colador atrapa a cierto objeto x, entonces claramente atrapara a todos los objetos mas grandes que x.

Ejercicio 1: Como son los filtros de $(\mathbf{R}, \max, \min)$? Siempre existe $\inf F$, cualquiera sea el filtro F?

Ejercicio 2: Encuentre todos los filtros de $(\{1, 2, 3, 6, 12\}, mcm, mcd)$

Dado un conjunto $S \subseteq L$, denotemos con $[S)$ el siguiente conjunto

$$\{y \in L : y \geq s_1 \mathsf{\ i\ } ... \mathsf{\ i\ } s_n, \text{ para algunos } s_1, ..., s_n \in S, \, n \geq 1\}$$

Lemma 1 *Supongamos S es no vacio. Entonces $[S)$ es un filtro. Mas aun si F es un filtro y $F \supseteq S$, entonces $F \supseteq [S)$. Es decir, $[S)$ es el menor filtro que contiene a S.*

Proof. Ya que $S \subseteq [S)$, tenemos que $[S) \neq \emptyset$. Claramente $[S)$ cumple la propiedad (3). Veamos cumple la (2). Si $y \geq s_1 \mathsf{\ i\ } s_2 \mathsf{\ i\ } ... \mathsf{\ i\ } s_n$ y $z \geq t_1 \mathsf{\ i\ } t_2 \mathsf{\ i\ } ... \mathsf{\ i\ } t_m$, con $s_1, s_2, ..., s_n, \, t_1, t_2, ..., t_m \in S$, entonces

$$y \mathsf{\ i\ } z \geq s_1 \mathsf{\ i\ } s_2 \mathsf{\ i\ } ... \mathsf{\ i\ } s_n \mathsf{\ i\ } t_1 \mathsf{\ i\ } t_2 \mathsf{\ i\ } ... \mathsf{\ i\ } t_m$$

lo cual prueba (2). ■

Llamaremos a $[S)$ el *filtro generado por* S.

Ejercicio 3: Si S es finito, tenemos que $[S) = \{y \in L : y \geq \inf S\}$. De un ejemplo en el que no existe $\inf S$

Cuando S es infinito y existe $\inf S$, en muchos casos se dara que $[S) = \{y \in L : y \geq \inf S\}$ o que $[S) = \{y \in L : y > \inf S\}$, pero no necesariamente esto sucedera siempre. Por ejemplo:

- Sea $\mathbf{L} = (\mathcal{P}(\mathbf{N}), \cup, \cap)$ y sea $S = \{\mathbf{N} - \{n\} : n \in \mathbf{N}\}$. Es facil ver que $\inf S = \emptyset$ y que $[S) = \{A \in \mathcal{P}(\mathbf{N}) : \mathbf{N} - A \text{ es finito}\}$ por lo cual no se da que $[S) = \{y \in L : y \geq \inf S\}$ o que $[S) = \{y \in L : y > \inf S\}$

Sea $(P, \leq)$ un poset. Un subconjunto $C \subseteq P$ sera llamado una *cadena* si para cada $x, y \in C$, se tiene que $x \leq y$ o $y \leq x$. Por ejemplo

(E1) $\{1, 10, 40, 600\}$ y $\{2^n : n \in \mathbf{N}\}$ son cadenas del poset $(\mathbf{N}, |)$

(E2) $\{-3, 5, 2\}$ y el intervalo $[2, 3]$ son cadenas del poset $(\mathbf{R}, \leq)$. De hecho todo subconjunto de $\mathbf{R}$ es una cadena de $(\mathbf{R}, \leq)$

(E3) $C = \{[0, n] : n \in \mathbf{N}\}$ es una cadena del poset $(\mathcal{P}(\mathbf{R}), \subseteq)$. Notese que cada elemento de C es un conjunto (i.e. un intervalo).

Es importante notar que las cadenas pueden ser infinitas y que dada una cadena infinita C puede no existir una infinitupla $(c_1, c_2, ...)$ tal que $C = \{c_n : n \in \mathbf{N}\}$. Este es el caso de la cadena $[0, 1]$ del poset $(\mathbf{R}, \leq)$, ya que el bien conocido argumento diagonal de Cantor nos dice que no existe una manera de enumerar los elementos del intervalo $[0, 1]$. Esto nos obliga a pensar con cierta madurez a las cadenas y no caer en la falacia de pensar que sus elementos forman necesariamente una "filita discreta". Otro ejemplo para madurar nuestra idea de cadena, tomemos C igual al conjunto de los numeros racionales mayores o iguales que 0. Claramente C es una cadena del poset $(\mathbf{R}, \leq)$. Si bien C puede ser enumerado, es decir hay una funcion $c : \omega \to C$, la cual es biyectiva (por lo cual cumple que $C = \{c(0), c(1), ...\}$), nunca la enumeracion c podra ser "en filita", es decir $c(0) < c(1) < c(2) < ...$

Tambien es importante, para entender la prueba del Teorema del Filtro Primo que viene a continuacion, imaginar las cadenas de posets que sus elementos son conjuntos y su orden es la inclusion, es decir dichas cadenas seran un conjunto de conjuntos C con la propiedad que dados dos cualesquiera elementos de C siempre alguno contiene al otro. Un ejemplo de este tipo de cadenas es dado en (E3). Otro ejemplo:

(E4) Sea $\mathcal{F} = \{F : F \text{ es un filtro del reticulado terna } (\mathbf{N}, mcm, mcd)\}$. Notar que dado $n \in \mathbf{N}$, el conjunto $\{x \in \mathbf{N} : n|x\}$ es un filtro de $(\mathbf{N}, mcm, mcd)\}$. Ya que $\mathcal{F}$ es no vacio tenemos que $(\mathcal{F}, \subseteq)$ es un poset. Entonces

$$C = \{\{x \in \mathbf{N} : n|x\} : n \text{ es potencia de } 2\}$$

es una cadena de $(\mathcal{F}, \subseteq)$.

El siguiente resultado es una herramienta fundamental en el algebra moderna. Lo aceptaremos sin prueba.

Lemma 2 ([Lema de Zorn) *Sea $(P, \leq)$ un poset y supongamos cada cadena de $(P, \leq)$ tiene al menos una cota superior. Entonces hay un elemento maximal en $(P, \leq)$.*

Obviamente en cada poset con universo finito hay al menos un elemento maximal. O sea que el Lema de Zorn es interesante para el caso en que P es un conjunto infinito. Un argumento para creer en la veracidad del lema podria ser el siguiente razonamiento por el absurdo:

Supongamos que $(P, \leq)$ es un poset en el cual cada cadena tiene al menos una cota superior y supongamos ademas que no hay elementos maximales en $(P, \leq)$. Tomemos $x_0 \in P$ un elemento cualquiera. Ya que x_0 no es maximal, hay un $x_1 \in P$ tal que $x_0 < x_1$. Iterando esta idea vemos que debe haber elementos $x_2, x_3, ...$ tales que:

$$x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \cdots$$

Pero $\{x_0, x_1, x_2, x_3, ...\}$ es una cadena por lo cual hay al menos una cota superior de ella en $(P, \leq)$. Sea y_0 una de tales cotas. Ya que y_0 no es maximal, hay un y_1 tal que $y_0 < y_1$. Iterando esta idea vemos que debe haber elementos $y_2, y_3, ...$ tales que:

$$x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < y_0 < y_1 < y_2 < y_3 < \cdots$$

Pero $\{x_0, x_1, x_2, x_3, ..., y_0, y_1, y_2, y_3, ...\}$ es una cadena por lo cual hay al menos una cota superior de ella en $(P, \leq)$. Esto nos permite seguir agrandando la cadena usando la misma usada recien lo cual muestra que tenemos un procedimiento abstracto constructivo que nos permite ir agrandando indefinidamente nuestra cadena. Esto huele a absurdo!

De todas maneras para dar una prueba formal del lema de Zorn es necesario madurar algunos conceptos para poder escribir en forma precisa el argumento antes descripto.

Un filtro F de un reticulado terna $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ sera llamado *primo* cuando se cumplan:

(1) $F \neq L$

(2) $x \mathsf{s} y \in F \Rightarrow x \in F$ o $y \in F$.

Algunos ejemplos:

E1 Todo filtro de $(\mathbf{R}, \max, \min)$, distinto de $\mathbf{R}$, es primo (justificar)

E2 Sea $B = \{X \subseteq \omega : X$ es finito o $\omega - X$ es finito$\}$. Como vimos anteriormente B es cerrado bajo las operaciones $\cup$ y $\cap$. Sea $P = \{X \subseteq \omega : \omega - X$ es finito$\}$. Entonces P es un filtro primo de $(B, \cup, \cap)$.

Ejercicio 8: Todo filtro de $(\mathbf{R}, \max, \min)$, distinto de $\mathbf{R}$, es primo

Ejercicio 9: Encuentre todos los filtros primos de $(\{1, 2, 3, 6, 12\}, mcm, mcd)$

Theorem 3 (Teorema del Filtro Primo) *Sea* $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ *un reticulado terna distributivo y* F *un filtro. Supongamos* $x_0 \in L - F$*. Entonces hay un filtro primo* P *tal que* $x_0 \notin P$ *y* $F \subseteq P$*.*

Proof. Sea
$$\mathcal{F} = \{F_1 : F_1 \text{ es un filtro, } x_0 \notin F_1 \text{ y } F \subseteq F_1\}.$$
Notese que $\mathcal{F} \neq \emptyset$, por lo cual $(\mathcal{F}, \subseteq)$ es un poset. Veamos que cada cadena en $(\mathcal{F}, \subseteq)$ tiene una cota superior. Sea C una cadena. Si $C = \emptyset$, entonces cualquier elemento de $\mathcal{F}$ es cota de C. Supongamos entonces $C \neq \emptyset$. Sea

$$G = \{x : x \in F_1, \text{ para algun } F_1 \in C\}.$$

Veamos que G es un filtro. Es claro que G es no vacio. Supongamos que $x, y \in G$. Sean $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ tales que $x \in F_1$ y $y \in F_2$. Si $F_1 \subseteq F_2$, entonces ya que F_2 es un filtro tenemos que $x \mathsf{i} y \in F_2 \subseteq G$. Si $F_2 \subseteq F_1$, entonces tenemos que $x \mathsf{i} y \in F_1 \subseteq G$. Ya que C es una cadena, tenemos que siempre $x \mathsf{i} y \in G$. En forma analoga se prueba la propiedad restante por lo cual tenemos que G es un filtro. Ademas $x_0 \notin G$, por lo que $G \in \mathcal{F}$ es cota superior de C. Por el lema de Zorn, $(\mathcal{F}, \subseteq)$ tiene un elemento maximal P. Veamos que P es un filtro primo. Supongamos $x \mathsf{s} y \in P$ y $x, y \notin P$. Notese que $[P \cup \{x\})$ es un filtro el cual contiene propiamente a P. Entonces ya que P es un elemento maximal de $(\mathcal{F}, \subseteq)$, tenemos que $x_0 \in [P \cup \{x\})$. Analogamente tenemos que $x_0 \in [P \cup \{y\})$. Ya que $x_0 \in [P \cup \{x\})$, tenemos que hay elementos $p_1, ..., p_n \in P$, tales que

$$x_0 \geq p_1 \mathsf{i} \ldots \mathsf{i} p_n \mathsf{i} x$$

(se deja como ejercicio justificar esto). Ya que $x_0 \in [P \cup \{y\})$, tenemos que hay elementos $q_1, ..., q_m \in P$, tales que

$$x_0 \geq q_1 \mathsf{i} \ldots \mathsf{i} q_m \mathsf{i} y$$

Si llamamos p al siguiente elemento de P

$$p_1 \mathsf{i} \ldots \mathsf{i} p_n \mathsf{i} q_1 \mathsf{i} \ldots \mathsf{i} q_m$$

tenemos que

$$x_0 \geq p \mathsf{i} x$$
$$x_0 \geq p \mathsf{i} y$$

Se tiene entonces que $x_0 \geq (p \mathsf{i} x) \mathsf{s} (p \mathsf{i} y) = p \mathsf{i} (x \mathsf{s} y) \in P$, lo cual es absurdo ya que $x_0 \notin P$. ■

Teorema de Rasiova Sikorski

El siguiente teorema sera clave en nuestra prueba del Teorema de Completitud. Lo aceptaremos sin demostracion. Su demostracion es una ingeniosa aplicacion del Teorema del Filtro Primo y puede leerse en el apunte.

Theorem 4 *(Rasiova y Sikorski) Sea* $(B, \mathsf{s}, \mathsf{i}, ^c, 0, 1)$ *un algebra de Boole. Sea* $a \in B$, $a \neq 0$. *Supongamos que* $(A_1, A_2, ...)$ *es una infinitupla de subconjuntos de* B *tal que existe* $\inf(A_j)$, *para cada* $j = 1, 2....$ *Entonces hay un filtro primo* P *el cual cumple:*

(a) $a \in P$

(b) $P \supseteq A_j \Rightarrow P \ni \inf(A_j)$, *para cada* $j = 1, 2, ...$

Lema del infimo

Aceptaremos sin demostracion el siguiente resultado.

Lemma 5 ([Lema del infimo) *Sea* $T = (\Sigma, \tau)$ *una teoria y supongamos que* τ *tiene una cantidad infinita de nombres de cte que no ocurren en las sentencias de* Σ. *Entonces para cada formula* $\varphi =_d \varphi(v)$, *se tiene que en el algebra de Lindembaum* $\mathcal{A}_T$*:*

$$[\forall v \varphi(v)]_T = \inf(\{[\varphi(t)]_T : t \in T_c^\tau\})$$

Ejercicio 4: (S) Encuentre un contraejemplo para el caso en que no se da la hipotesis de que τ tiene una cantidad infinita de nombres de cte que no ocurren en las sentencias de Σ.

Lema de coincidencia

El siguiente resultado es muy natural y lo aceptaremos sin demostracion.

Lemma 6 ([Lema de Coincidencia) *Sean* τ *y* τ' *dos tipos cualesquiera y sea* $\tau_\cap = (\mathcal{C}_\cap, \mathcal{F}_\cap, \mathcal{R}_\cap, a_\cap)$, *donde*

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_\cap &= \mathcal{C} \cap \mathcal{C}' \\ \mathcal{F}_\cap &= \{f \in \mathcal{F} \cap \mathcal{F}' : a(f) = a'(f)\} \\ \mathcal{R}_\cap &= \{r \in \mathcal{R} \cap \mathcal{R}' : a(r) = a'(r)\} \\ a_\cap &= a \mid_{\mathcal{F}_\cap \cup \mathcal{R}_\cap} \end{aligned}$$

Entonces $\tau_\cap$ *es un tipo tal que* $T^{\tau_\cap} = T^\tau \cap T^{\tau'}$ *y* $F^{\tau_\cap} = F^\tau \cap F^{\tau'}$. *Sean* $\mathbf{A}$ *y* $\mathbf{A}'$ *modelos de tipo* τ *y* τ' *respectivamente. Supongamos que* $A = A'$ *y que* $c^{\mathbf{A}} = c^{\mathbf{A}'}$, *para cada* $c \in \mathcal{C}_\cap$, $f^{\mathbf{A}} = f^{\mathbf{A}'}$, *para cada* $f \in \mathcal{F}_\cap$ *y* $r^{\mathbf{A}} = r^{\mathbf{A}'}$, *para cada* $r \in \mathcal{R}_\cap$.

(a) Para cada $t =_d t(\vec{v}) \in T^{\tau_\cap}$ *se tiene que* $t^{\mathbf{A}}[\vec{a}] = t^{\mathbf{A}'}[\vec{a}]$, *para cada* $\vec{a} \in A^n$

(b) Para cada $\varphi =_d \varphi(\vec{v}) \in F^{\tau_\cap}$ *se tiene que*

$$\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}] \textit{ si y solo si } \mathbf{A}' \models \varphi[\vec{a}].$$

(c) Si $\Sigma \cup \{\varphi\} \subseteq S^{\tau_\cap}$*, entonces*

$$(\Sigma, \tau) \models \varphi \textit{ sii } (\Sigma, \tau') \models \varphi.$$

Ejercicio 5: Meditar sobre el lema anterior hasta entender que es intuitivamente obvio. Intente dar una descripcion rapida, en castellano, de lo que "dice" el lema.

Ejercicio 6: Sean

$$\tau = (\{\mathrm{un}, \mathrm{do}, \triangle\}, \{+, \mathrm{Fa}\}, \{\mathrm{Her}, \leq\}, \{(+,2), (\mathrm{Fa},1), (\mathrm{Her},3), (\leq,2)\})$$
$$\tau' = (\{\mathrm{un}, \mathrm{do}, \bigtriangledown\}, \{+, \mathrm{G}\}, \{\mathrm{Her}, r\}, \{(+,2), (\mathrm{G},4), (\mathrm{Her},3), (r,1)\})$$

Notar que $\tau_\cap = (\{\mathrm{un}, \mathrm{do}\}, \{+\}, \{\mathrm{Her}\}, \{(+,2), (\mathrm{Her},3)\})$. Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{A}'$ modelos de tipo τ y τ' respectivamente tales que

$$\begin{aligned} A &= A' \\ \mathrm{un}^{\mathbf{A}} &= \mathrm{un}^{\mathbf{A}'} \\ \mathrm{do}^{\mathbf{A}} &= \mathrm{do}^{\mathbf{A}'} \\ +^{\mathbf{A}} &= +^{\mathbf{A}'} \\ \mathrm{Her}^{\mathbf{A}} &= \mathrm{Her}^{\mathbf{A}'} \end{aligned}$$

Entonces:

(a) Para cada $t =_d t(\vec{v}) \in T^{\tau_\cap}$ se tiene que $t^{\mathbf{A}}[\vec{a}] = t^{\mathbf{A}'}[\vec{a}]$, para cada $\vec{a} \in A^n$

(b) Para cada $\varphi =_d \varphi(\vec{v}) \in F^{\tau_\cap}$ se tiene que

$$\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}] \text{ si y solo si } \mathbf{A}' \models \varphi[\vec{a}].$$

(c) Si $\Sigma \cup \{\varphi\} \subseteq S^{\tau_\cap}$, entonces

$$(\Sigma, \tau) \models \varphi \text{ sii } (\Sigma, \tau') \models \varphi.$$

Lema de enumeracion

Lemma 7 *Sea τ un tipo. Hay una infinitupla $(\gamma_1, \gamma_2, ...) \in F^{\tau\mathbf{N}}$ tal que:*

(1) $|Li(\gamma_j)| \leq 1$, para cada $j = 1, 2, ...$

(2) Si $|Li(\gamma)| \leq 1$, entonces $\gamma = \gamma_j$, para algun $j \in \mathbf{N}$

Proof. Notese que las formulas de tipo τ son palabras de algun alfabeto finito A. Dado un orden total $\leq$ para A, podemos definir

$$\gamma_1 = \min\nolimits_{\alpha}^{\leq} (\alpha \in F^\tau \wedge |Li(\alpha)| \leq 1)$$
$$\gamma_{t+1} = \min\nolimits_{\alpha}^{\leq} (\alpha \in F^\tau \wedge |Li(\alpha)| \leq 1 \wedge (\forall i \in \omega)_{i \leq t} \alpha \neq \gamma_i)$$

Notese que para $t \in \mathbf{N}$, tenemos que $\gamma_t = t$-esimo elemento de $\{\alpha \in F^\tau : |Li(\alpha)| \leq 1\}$, con respecto al orden total de A^* inducido por $\leq$. Claramente entonces la infinitupla $(\gamma_1, \gamma_2, ...)$ cumple (1) y (2). ■

Ejercicio 7: Para $\tau = (\emptyset, \{\mathsf{s}^2, \mathsf{i}^2\}, \emptyset, a)$ encuentre el alfabeto A del cual habla la prueba anterior, ordenelo y calcule $\gamma_1, ..., \gamma_{10}$

Ejercicio 8: Sea $T = (\Sigma, \tau)$ una teoria de primer orden y sea $\mathbf{A}$ un modelo de T.

(a) Pruebe que
$$P = \{[\varphi]_T : \varphi \in S^\tau \text{ y } \mathbf{A} \models \varphi\}$$
es un filtro primo del algebra de Boole $\mathcal{A}_T$.

(b) Pruebe que si para cada $a \in A$, hay un termino cerrado t tal que $a = t^{\mathbf{A}}$, entonces P tiene la siguiente propiedad:

- Para cada $\varphi =_d \varphi(v) \in F^\tau$, si $\{[\varphi(t)]_T : t \in T_c^\tau\} \subseteq P$ entonces $[\forall v \varphi(v)]_T \in P$

Lema de tipos parecidos

Lemma 8 *Sean $\tau = (\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{R}, a)$ y $\tau' = (\mathcal{C}', \mathcal{F}', \mathcal{R}', a')$ tipos.*

(1) Si $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}'$, $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'$, $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}'$ y $a' |_{\mathcal{F} \cup \mathcal{R}} = a$, entonces $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$ implica $(\Sigma, \tau') \vdash \varphi$

(2) Si $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}'$, $\mathcal{F} = \mathcal{F}'$, $\mathcal{R} = \mathcal{R}'$ y $a' = a$, entonces $(\Sigma, \tau') \vdash \varphi$ implica $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$, cada vez que $\Sigma \cup \{\varphi\} \subseteq S^\tau$

Aceptaremos sin prueba el lema anterior pero:

Ejercicio 9: Medite hasta entender que aplicando el lema de cambio de nombres de ctes auxiliares de la Guia 12 podemos probar (1) del lema anterior. No es necesario que escriba la prueba.

Ejercicio 10: Medite hasta entender que bajo las hipotesis de (2) del lema anterior se tiene que una prueba de φ en (Σ, τ') tambien es una prueba de φ en (Σ, τ). No es necesario que escriba la prueba.

Teorema de Completitud

Ahora si, el famoso resultado de Godel.

Theorem 9 (Teorema de Completitud) *Sea $T = (\Sigma, \tau)$ una teoria de primer orden. Si $T \models \varphi$, entonces $T \vdash \varphi$.*

Proof. Primero probaremos completitud para el caso en que τ tiene una cantidad infinita de nombres de cte que no ocurren en las sentencias de Σ. Lo probaremos por el absurdo, es decir supongamos que hay una sentencia φ_0 tal que $T \models \varphi_0$ y $T \not\vdash \varphi_0$. Ya que $T \not\vdash \varphi_0$, tenemos que $[\varphi_0]_T \neq 1^T = \{\varphi \in S^\tau : T \vdash \varphi\}$. O sea que $[\neg\varphi_0]_T \neq 0^T$. Por el lema anterior hay una infinitupla $(\gamma_1, \gamma_2, ...) \in F^{\tau\mathbf{N}}$ tal que:

- $|Li(\gamma_j)| \leq 1$, para cada $j = 1, 2, ...$
- Si $|Li(\gamma)| \leq 1$, entonces $\gamma = \gamma_j$, para algun $j \in \mathbf{N}$

Para cada $j \in \mathbf{N}$, sea $w_j \in Var$ tal que $Li(\gamma_j) \subseteq \{w_j\}$. Para cada j, declaremos $\gamma_j =_d \gamma_j(w_j)$. Notese que por el Lema 5 tenemos que $\inf\{[\gamma_j(t)]_T : t \in T_c^\tau\} = [\forall w_j \gamma_j(w_j)]_T$, para cada $j = 1, 2, ...$ Por el Teorema de Rasiova y Sikorski tenemos que hay un filtro primo $\mathcal{U}$ de $\mathcal{A}_T$, el cual cumple:

(a) $[\neg\varphi_0]_T \in \mathcal{U}$

(b) Para cada $j \in \mathbf{N}$, $\{[\gamma_j(t)]_T : t \in T_c^\tau\} \subseteq \mathcal{U}$ implica que $[\forall w_j \gamma_j(w_j)]_T \in \mathcal{U}$

Ya que la infinitupla $(\gamma_1, \gamma_2, ...)$ cubre todas las formulas con a lo sumo una variable libre, podemos reescribir la propiedad (b) de la siguiente manera

(b)$'$ Para cada $\varphi =_d \varphi(v) \in F^\tau$, si $\{[\varphi(t)]_T : t \in T_c^\tau\} \subseteq \mathcal{U}$ entonces $[\forall v \varphi(v)]_T \in \mathcal{U}$

Definamos sobre T_c^τ la siguiente relacion:

$$t \bowtie s \text{ si y solo si } [(t \equiv s)]_T \in \mathcal{U}.$$

Veamos entonces que:

(1) $\bowtie$ es de equivalencia.

(2) Para cada $\varphi =_d \varphi(v_1, ..., v_n) \in F^\tau$, $t_1, ..., t_n, s_1, ..., s_n \in T_c^\tau$, si $t_1 \bowtie s_1$, $t_2 \bowtie s_2$, ..., $t_n \bowtie s_n$, entonces $[\varphi(t_1, ..., t_n)]_T \in \mathcal{U}$ si y solo si $[\varphi(s_1, ..., s_n)]_T \in \mathcal{U}$.

(3) Para cada $f \in \mathcal{F}_n$, $t_1, ..., t_n, s_1, ..., s_n \in T_c^\tau$,

$$t_1 \bowtie s_1, t_2 \bowtie s_2, ..., \ t_n \bowtie s_n \text{ implica } f(t_1, ..., t_n) \bowtie f(s_1, ..., s_n).$$

Probaremos (2). Notese que

$$T \vdash ((t_1 \equiv s_1) \wedge (t_2 \equiv s_2) \wedge ... \wedge (t_n \equiv s_n) \wedge \varphi(t_1, ..., t_n)) \to \varphi(s_1, ..., s_n)$$

lo cual nos dice que

$$[(t_1 \equiv s_1)]_T \text{ ¡}^T \ [(t_2 \equiv s_2)]_T \text{ ¡}^T \ ... \text{ ¡}^T \ [(t_n \equiv s_n)]_T \text{ ¡}^T \ [\varphi(t_1, ..., t_n)]_T \leq^T [\varphi(s_1, ..., s_n)]_T$$

de lo cual se desprende que

$$[\varphi(t_1, ..., t_n)]_T \in \mathcal{U} \text{ implica } [\varphi(s_1, ..., s_n)]_T \in \mathcal{U}$$

ya que $\mathcal{U}$ es un filtro. La otra implicacion es analoga.

Para probar (3) podemos tomar $\varphi = (f(v_1, ..., v_n) \equiv f(s_1, ..., s_n))$ y aplicar (2).

Definamos ahora un modelo $\mathbf{A}_\mathcal{U}$ de tipo τ de la siguiente manera:

- Universo de $\mathbf{A}_\mathcal{U} = T_c^\tau / \bowtie$
- $c^{\mathbf{A}_\mathcal{U}} = c/\bowtie$, para cada $c \in \mathcal{C}$.
- $f^{\mathbf{A}_\mathcal{U}}(t_1/\bowtie, ..., t_n/\bowtie) = f(t_1, ..., t_n)/\bowtie$, para cada $f \in \mathcal{F}_n$, $t_1, ..., t_n \in T_c^\tau$
- $r^{\mathbf{A}_\mathcal{U}} = \{(t_1/\bowtie, ..., t_n/\bowtie) : [r(t_1, ..., t_n)]_T \in \mathcal{U}\}$, para cada $r \in \mathcal{R}_n$.

Notese que la definicion de $f^{\mathbf{A}_\mathcal{U}}$ es inambigua por (3). Probaremos las siguientes propiedades basicas:

(4) Para cada $t =_d t(v_1, ..., v_n) \in T^\tau$, $t_1, ..., t_n \in T_c^\tau$, tenemos que

$$t^{\mathbf{A}_\mathcal{U}}[t_1/\bowtie, ..., t_n/\bowtie] = t(t_1, ..., t_n)/\bowtie$$

(5) Para cada $\varphi =_d \varphi(v_1, ..., v_n) \in F^\tau$, $t_1, ..., t_n \in T_c^\tau$, tenemos que

$$\mathbf{A}_\mathcal{U} \models \varphi[t_1/\bowtie, ..., t_n/\bowtie] \text{ si y solo si } [\varphi(t_1, ..., t_n)]_T \in \mathcal{U}.$$

La prueba de (4) es directa por induccion. Probaremos (5) por induccion en el k tal que $\varphi \in F_k^\tau$. El caso $k = 0$ es dejado al lector. Supongamos (5) vale cuando $\varphi \in F_k^\tau$. Sea $\varphi =_d \varphi(v_1, ..., v_n) \in F_{k+1}^\tau - F_k^\tau$. Hay varios casos:

CASO $\varphi = (\varphi_1 \vee \varphi_2)$.

Notese que por la Convencion Notacional 6, tenemos que $\varphi_i =_d \varphi_i(v_1, ..., v_n)$. Tenemos entonces

$$\begin{array}{c}
\mathbf{A}_{\mathcal{U}} \models \varphi[t_1/\bowtie, ..., t_n/\bowtie] \\
\Updownarrow \\
\mathbf{A}_{\mathcal{U}} \models \varphi_1[t_1/\bowtie, ..., t_n/\bowtie] \text{ o } \mathbf{A}_{\mathcal{U}} \models \varphi_2[t_1/\bowtie, ..., t_n/\bowtie] \\
\Updownarrow \\
[\varphi_1(t_1, ..., t_n)]_T \in \mathcal{U} \text{ o } [\varphi_2(t_1, ..., t_n)]_T \in \mathcal{U} \\
\Updownarrow \\
[\varphi_1(t_1, ..., t_n)]_T \ \mathsf{s}^T \ [\varphi_2(t_1, ..., t_n)]_T \in \mathcal{U} \\
\Updownarrow \\
[(\varphi_1(t_1, ..., t_n) \vee \varphi_2(t_1, ..., t_n))]_T \in \mathcal{U} \\
\Updownarrow \\
[\varphi(t_1, ..., t_n)]_T \in \mathcal{U}.
\end{array}$$

CASO $\varphi = \forall v \varphi_1$, con $v \in Var - \{v_1, ..., v_n\}$. Notese que por la Convencion Notacional 6, tenemos que $\varphi_1 =_d \varphi_1(v_1, ..., v_n, v)$. Tenemos entonces

$$\begin{array}{c}
\mathbf{A}_{\mathcal{U}} \models \varphi[t_1/\bowtie, ..., t_n/\bowtie] \\
\Updownarrow \\
\mathbf{A}_{\mathcal{U}} \models \varphi_1[t_1/\bowtie, ..., t_n/\bowtie, t/\bowtie], \text{ para todo } t \in T_c^\tau \\
\Updownarrow \\
[\varphi_1(t_1, ..., t_n, t)]_T \in \mathcal{U}, \text{ para todo } t \in T_c^\tau \\
\Updownarrow \\
[\forall v \varphi_1(t_1, ..., t_n, v)]_T \in \mathcal{U} \\
\Updownarrow \\
[\varphi(t_1, ..., t_n)]_T \in \mathcal{U}.
\end{array}$$

CASO $\varphi = \exists v \varphi_1$, con $v \in Var - \{v_1, ..., v_n\}$. Notese que por la Convencion Notacional 6, tenemos que $\varphi_1 =_d \varphi_1(v_1, ..., v_n, v)$. Tenemos entonces

$$\begin{array}{c}
\mathbf{A}_{\mathcal{U}} \models \varphi[t_1/\bowtie, ..., t_n/\bowtie] \\
\Updownarrow \\
\mathbf{A}_{\mathcal{U}} \models \varphi_1[t_1/\bowtie, ..., t_n/\bowtie, t/\bowtie], \text{ para algun } t \in T_c^\tau \\
\Updownarrow \\
[\varphi_1(t_1, ..., t_n, t)]_T \in \mathcal{U}, \text{ para algun } t \in T_c^\tau \\
\Updownarrow \\
([\varphi_1(t_1, ..., t_n, t)]_T)^{\mathsf{c}^T} \notin \mathcal{U}, \text{ para algun } t \in T_c^\tau \\
\Updownarrow \\
[\neg\varphi_1(t_1, ..., t_n, t)]_T \notin \mathcal{U}, \text{ para algun } t \in T_c^\tau \\
\Updownarrow \\
[\forall v \ \neg\varphi_1(t_1, ..., t_n, v)]_T \notin \mathcal{U} \\
\Updownarrow \\
([\forall v \ \neg\varphi_1(t_1, ..., t_n, v)]_T)^{\mathsf{c}^T} \in \mathcal{U} \\
\Updownarrow \\
[\neg\forall v \ \neg\varphi_1(t_1, ..., t_n, v)]_T \in \mathcal{U} \\
\Updownarrow \\
[\varphi(t_1, ..., t_n)]_T \in \mathcal{U}.
\end{array}$$

Pero ahora notese que (5) en particular nos dice que para cada sentencia $\psi \in S^\tau$, $\mathbf{A}_\mathcal{U} \models \psi$ si y solo si $[\psi]_T \in \mathcal{U}$. De esta forma llegamos a que $\mathbf{A}_\mathcal{U} \models \Sigma$ y $\mathbf{A}_\mathcal{U} \models \neg\varphi_0$, lo cual contradice la suposicion de que $T \models \varphi_0$.

Ahora supongamos que τ es cualquier tipo. Sean s_1 y s_2 un par de simbolos no pertenecientes a la lista

$$\forall \ \exists \ \neg \ \vee \ \wedge \ \rightarrow \ \leftrightarrow \ (\ ) \ , \ \equiv \ \mathsf{X} \ \mathit{0} \ \mathit{1} \ ... \ \mathit{9} \ \mathbf{0} \ \mathbf{1} \ ... \ \mathbf{9}$$

y tales que ninguno ocurra en alguna palabra de $\mathcal{C} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{R}$. Si $T \models \varphi$, entonces usando el Lema de Coincidencia se puede ver que $(\Sigma, (\mathcal{C} \cup \{s_1s_2s_1, s_1s_2s_2s_1, ...\}, \mathcal{F}, \mathcal{R}, a)) \models \varphi$, por lo cual

$$(\Sigma, (\mathcal{C} \cup \{s_1s_2s_1, s_1s_2s_2s_1, ...\}, \mathcal{F}, \mathcal{R}, a)) \vdash \varphi.$$

Pero por Lema 8, tenemos que $T \vdash \varphi$. ■

Corollary 10 *Toda teoria consistente tiene un modelo.*

Proof. Supongamos (Σ, τ) es consistente y no tiene modelos. Entonces $(\Sigma, \tau) \models (\varphi \wedge \neg\varphi)$, con lo cual por completitud $(\Sigma, \tau) \vdash (\varphi \wedge \neg\varphi)$, lo cual es absurdo. ■

Corollary 11 ([Teorema de Compacidad) *Sea (Σ, τ) una teoria.*

(a) Si (Σ, τ) es tal que (Σ_0, τ) tiene un modelo, para cada subconjunto finito $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$, entonces (Σ, τ) tiene un modelo

(b) Si $(\Sigma, \tau) \models \varphi$, entonces hay un subconjunto finito $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ tal que $(\Sigma_0, \tau) \models \varphi$.

Proof. (a) Veamos que (Σ, τ) es consistente. Supongamos lo contrario, es decir supongamos $(\Sigma, \tau) \vdash (\varphi \wedge \neg\varphi)$, para alguna sentencia φ. Notese que entonces hay un subconjunto finito $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ tal que la teoria $(\Sigma_0, \tau) \vdash (\varphi \wedge \neg\varphi)$ (Σ_0 puede ser formado con los axiomas de Σ usados en una prueba formal que atestigue que $(\Sigma, \tau) \vdash (\varphi \wedge \neg\varphi)$). Pero esto es absurdo ya que por hypotesis dicha teoria (Σ_0, τ) tiene un modelo. O sea que (Σ, τ) es consistente por lo cual tiene un modelo.

(b) Si $(\Sigma, \tau) \models \varphi$, entonces por completitud, $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$. Pero entonces hay un subconjunto finito $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ tal que $(\Sigma_0, \tau) \vdash \varphi$, es decir tal que $(\Sigma_0, \tau) \models \varphi$ (correccion). ■

Ejercicio 11: $T \not\models \varphi$ si y solo si hay un modelo de T en el cual φ es falsa

Ejercicio 12: $T \not\models \neg\varphi$ si y solo si hay un modelo de T en el cual φ es verdadera

Ejercicio 13: V o F o I, justifique

(a) Sea (Σ, τ) una teoria consistente. Si $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$ y $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau) \nvdash \neg\psi$, entonces $(\Sigma, \tau) \vdash \psi$

(b) Sea (Σ,τ) una teoria consistente. Entonces $(\Sigma,\tau)\vdash(\varphi\rightarrow\psi)$ si y solo si $(\Sigma\cup\{\varphi\},\tau)\nvdash\neg\psi$

(c) Sea (Σ,τ) una teoria consistente. Si $(\Sigma,\tau)\not\vdash\neg\varphi_1$ y $(\varphi_1,\varphi_2)\in Partic^\tau$, entonces $(\Sigma,\tau)\not\vdash\neg\varphi_2$.

(hint: reemplace $\vdash$ por $\models$)

Ejercicio 14: Sea $\tau=(\{0\},\emptyset,\{\leq^2\},a)$, y sea Σ el conjunto formado por los axiomas que dicen que $\leq$ es un orden parcial junto con los dos siguientes axiomas

$$\exists x,y,z\ ((x\neq y\wedge x\neq z\wedge y\neq z)\wedge\forall w\ (w=x\vee w=y\vee w=z))$$
$$\forall x\ 0\leq x$$

Sea T la teoría (Σ,τ). De un algoritmo que decida cuando una sentencia de tipo τ es un teorema de T

Interpretacion semantica del algebra de Lindembaum

Sea $T=(\Sigma,\tau)$ una teoria. Dada $\varphi\in S^\tau$ definamos

$$\mathrm{Mod}_T(\varphi)=\{\mathbf{A}:\mathbf{A}\text{ es modelo de }T\text{ y }\mathbf{A}\vDash\varphi\}$$

Por ejemplo $\mathrm{Mod}_{Po}(\exists x\forall z(x\leq z))=\{(A,i):(A,i(\leq))$ es un poset con minimo$\}$.

Lemma 12 *Dadas $\varphi,\psi\in S^\tau$ se tiene:*

(1) $[\varphi]_T\leq^T[\psi]_T$ *sii* $\mathrm{Mod}_T(\varphi)\subseteq\mathrm{Mod}_T(\psi)$

(2) $[\varphi]_T=[\psi]_T$ *sii* $\mathrm{Mod}_T(\varphi)=\mathrm{Mod}_T(\psi)$

(3) $[\varphi]_T<^T[\psi]_T$ *sii* $\mathrm{Mod}_T(\varphi)\subsetneq\mathrm{Mod}_T(\psi)$

Ejercicio 15: Pruebe el lema anterior

Ejercicio 16: (Opcional) Sea $\tau=(\{0\},\emptyset,\{\leq^2\},a)$, y sea Σ el conjunto formado por los axiomas que dicen que $\leq$ es un orden parcial junto con el axioma $\forall x\ 0\leq x$. Sea T la teoría (Σ,τ). Sea

$$\varphi=\exists x,y\quad(0<x\wedge x<y\wedge\forall z\quad(z=0\vee z=x\vee z=y))$$

Entonces $[\varphi]_T$ es un átomo del álgebra de Lindenbaum $\mathcal{A}_T$.

Ejercicio 17: (Opcional) Sea $\tau=(\emptyset,\emptyset,\{r^2\},a)$. En el algebra de Lindenbaum $\mathcal{A}_{(\emptyset,\tau)}$ se tiene que $[\exists x\forall y\ r(x,y)]\prec[\forall y\exists x\ r(x,y)]$?

Ejercicio 18: (Opcional) Sea $T=(\Sigma,\tau)$ una teoría consistente y sea $\varphi=\forall x,y\ (x\equiv y)$. Es $[\varphi]_T$ un átomo del álgebra de Lindenbaum $\mathcal{A}_T$?