Guia 13 de logica: El algebra de Lindenbaum

November 5, 2024

Recordemos que dado un tipo τ, con S^τ denotamos el conjunto de las sentencias de tipo τ, es decir

$$S^\tau = \{\varphi \in F^\tau : Li(\varphi) = \emptyset\}$$

Sea $T = (\Sigma, \tau)$ una teoria. Podemos definir la siguiente relacion binaria sobre S^τ:

$$\varphi \dashv\vdash_T \psi \text{ si y solo si } T \vdash (\varphi \leftrightarrow \psi)$$

Es decir

$$\dashv\vdash_T = \{(\varphi, \psi) \in S^\tau : T \vdash (\varphi \leftrightarrow \psi)\}$$

Lemma 1 *$\dashv\vdash_T$ es una relacion de equivalencia.*

Proof. La relacion es reflexiva ya que $(\varphi \leftrightarrow \varphi)$ es un axioma logico y por lo tanto $((\varphi \leftrightarrow \varphi)$,AXIOMALOGICO) es una prueba formal de $(\varphi \leftrightarrow \varphi)$ en T. Veamos que es simetrica. Supongamos que $\varphi \dashv\vdash_T \psi$, es decir $T \vdash (\varphi \leftrightarrow \psi)$. Ya que $(\psi \leftrightarrow \varphi)$ se deduce de $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ por la regla de commutatividad, (2) del Lema "Propiedades basicas de $\vdash$" de la Guia 12 nos dice que $T \vdash (\psi \leftrightarrow \varphi)$. ∎

Ejercicio 1: Complete la prueba anterior probando que $\dashv\vdash_T$ es transitiva

Una sentencia φ se dice *refutable en* (Σ, τ) si $(\Sigma, \tau) \vdash \neg\varphi$.

Lemma 2 *Dada una teoria $T = (\Sigma, \tau)$, se tiene que:*

(1) $\{\varphi \in S^\tau : \varphi$ *es un teorema de* $T\} \in S^\tau / \dashv\vdash_T$

(2) $\{\varphi \in S^\tau : \varphi$ *es refutable en* $T\} \in S^\tau / \dashv\vdash_T$

Proof. Haremos la prueba de (2) y dejaremos la prueba de (1) como ejercicio. Sean φ, ψ refutables en T, veremos que $\varphi \dashv\vdash_T \psi$. Notese que

1.	φ	HIPOTESIS1
2.	$\neg\psi$	HIPOTESIS2
3.	$\neg\varphi$	AXIOMAPROPIO
4.	$(\varphi \wedge \neg\varphi)$	TESIS2CONJUNCIONINTRODUCCION$(1,3)$
5.	$\neg\psi \rightarrow (\varphi \wedge \neg\varphi)$	CONCLUSION
6.	ψ	TESIS1ABSURDO(5)
7.	$(\varphi \rightarrow \psi)$	CONCLUSION
8.	ψ	HIPOTESIS3
9.	$\neg\varphi$	HIPOTESIS4
10.	$\neg\psi$	AXIOMAPROPIO
11.	$(\psi \wedge \neg\psi)$	TESIS4CONJUNCIONINTRODUCCION$(8,10)$
12.	$\neg\varphi \rightarrow (\psi \wedge \neg\psi)$	CONCLUSION
13.	φ	TESIS3ABSURDO(12)
14.	$(\psi \rightarrow \varphi)$	CONCLUSION
15.	$(\varphi \leftrightarrow \psi)$	EQUIVALENCIAINTRODUCCION$(7,14)$

justifica que $(\Sigma \cup \{\neg\varphi, \neg\psi\}, \tau) \vdash (\varphi \leftrightarrow \psi)$ lo cual por (1) del Lema "Propiedades basicas de $\vdash$" de la Guia 12 nos dice que $(\Sigma, \tau) \vdash (\varphi \leftrightarrow \psi)$, obteniendo que $\varphi \dashv\vdash_T \psi$. Para terminar de probar (2) faltaria ver que si φ es refutable en T y $\varphi \dashv\vdash_T \psi$, entonces ψ es refutable en T. Dejamos al lector la prueba. ■

Ejercicio 2: Pruebe (1) del lema anterior y complete la prueba de (2)

Dada una teoria $T = (\Sigma, \tau)$ y $\varphi \in S^\tau$, $[\varphi]_T$ denotara la clase de φ con respecto a la relacion de equivalencia $\dashv\vdash_T$. Definiremos sobre $S^\tau / \dashv\vdash_T$ las siguiente operacion binaria s^T:

$$[\varphi]_T \ \mathsf{s}^T \ [\psi]_T = [(\varphi \vee \psi)]_T$$

Una observacion importante es que para que la definicion anterior de la operacion s^T sea inambigua, debemos probar la siguiente propiedad

- Si $[\varphi]_T = [\varphi']_T$ y $[\psi]_T = [\psi']_T$ entonces $[(\varphi \vee \psi)]_T = [(\varphi' \vee \psi')]_T$

Es decir debemos probar que si $T \vdash (\varphi \leftrightarrow \varphi')$ y $T \vdash (\psi \leftrightarrow \psi')$, entonces $T \vdash ((\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\varphi' \vee \psi'))$. Pero esto sigue de (1) del Lema "Propiedades basicas de $\vdash$" de la Guia 12 ya que

1.	$(\varphi \leftrightarrow \varphi')$	AXIOMAPROPIO
2.	$(\psi \leftrightarrow \psi')$	AXIOMAPROPIO
3.	$((\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\varphi \vee \psi))$	AXIOMALOGICO
4.	$((\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\varphi' \vee \psi))$	REEMPLAZO$(1,3)$
5.	$((\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\varphi' \vee \psi'))$	REEMPLAZO$(2,4)$

atestigua que $(\Sigma \cup \{(\varphi \leftrightarrow \varphi'), (\psi \leftrightarrow \psi')\}, \tau) \vdash ((\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\varphi' \vee \psi'))$. En forma analoga se puede ver que las siguientes igualdades definen en forma inambigua una operacion binaria i^T sobre $S^\tau/\dashv\vdash_T$ y una operacion unaria ${}^{\mathsf{c}^T}$ sobre $S^\tau/\dashv\vdash_T$:

$$[\varphi]_T \ \mathsf{i}^T \ [\psi]_T = [(\varphi \wedge \psi)]_T$$
$$([\varphi]_T)^{\mathsf{c}^T} = [\neg\varphi]_T$$

Dada una teoria $T = (\Sigma, \tau)$, denotemos con 1^T al conjunto $\{\varphi \in S^\tau : \varphi$ es un teorema de $T\}$ y con 0^T al conjunto $\{\varphi \in S^\tau : \varphi$ es refutable en $T\}$. Ya vimos en un lema anterior que 0^T y 1^T pertenecen a $S^\tau/\dashv\vdash_T$. Podemos enunciar ahora el siguiente resultado, inspirado en la idea clasica de Boole para el calculo proposicional.

Theorem 3 *Sea $T = (\Sigma, \tau)$ una teoria. Entonces $(S^\tau/\dashv\vdash_T, \mathsf{s}^T, \mathsf{i}^T, {}^{\mathsf{c}^T}, 0^T, 1^T)$ es un algebra de Boole.*

Proof. Por definicion de algebra de Boole, debemos probar que cualesquiera sean $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in S^\tau$, se cumplen las siguientes igualdades:

(1) $[\varphi_1]_T \ \mathsf{i}^T \ [\varphi_1]_T = [\varphi_1]_T$

(2) $[\varphi_1]_T \ \mathsf{s}^T \ [\varphi_1]_T = [\varphi_1]_T$

(3) $[\varphi_1]_T \ \mathsf{i}^T \ [\varphi_2]_T = [\varphi_2]_T \ \mathsf{i}^T \ [\varphi_1]_T$

(4) $[\varphi_1]_T \ \mathsf{s}^T \ [\varphi_2]_T = [\varphi_2]_T \ \mathsf{s}^T \ [\varphi_1]_T$

(5) $[\varphi_1]_T \ \mathsf{i}^T \ ([\varphi_2]_T \ \mathsf{i}^T \ [\varphi_3]_T) = ([\varphi_1]_T \ \mathsf{i}^T \ [\varphi_2]_T) \ \mathsf{i}^T \ [\varphi_3]_T$

(6) $[\varphi_1]_T \ \mathsf{s}^T \ ([\varphi_2]_T \ \mathsf{s}^T \ [\varphi_3]_T) = ([\varphi_1]_T \ \mathsf{s}^T \ [\varphi_2]_T) \ \mathsf{s}^T \ [\varphi_3]_T$

(7) $[\varphi_1]_T \ \mathsf{s}^T \ ([\varphi_1]_T \ \mathsf{i}^T \ [\varphi_2]_T) = [\varphi_1]_T$

(8) $[\varphi_1]_T \ \mathsf{i}^T \ ([\varphi_1]_T \ \mathsf{s}^T \ [\varphi_2]_T) = [\varphi_1]_T$

(9) $0^T \ \mathsf{s}^T \ [\varphi_1]_T = [\varphi_1]_T$

(10) $[\varphi_1]_T \ \mathsf{s}^T \ 1^T = 1^T$

(11) $[\varphi_1]_T \ \mathsf{s}^T \ ([\varphi_1]_T)^{\mathsf{c}^T} = 1^T$

(12) $[\varphi_1]_T \ \mathsf{i}^T \ ([\varphi_1]_T)^{\mathsf{c}^T} = 0^T$

(13) $[\varphi_1]_T \ \mathsf{i}^T \ ([\varphi_2]_T \ \mathsf{s}^T \ [\varphi_3]_T) = ([\varphi_1]_T \ \mathsf{i}^T \ [\varphi_2]_T) \ \mathsf{s}^T \ ([\varphi_1]_T \ \mathsf{i}^T \ [\varphi_3]_T)$

Veamos por ejemplo que se da (10), es decir probaremos que $[\varphi_1]_T \ \mathsf{s}^T \ 1^T = 1^T$, cualesquiera sea la sentencia φ_1. Ya que $\forall x_1(x_1 \equiv x_1)$ es un teorema de T, atestiguado por la prueba formal

1.	$c \equiv c$	AXIOMALOGICO
2.	$\forall x_1(x_1 \equiv x_1)$	GENERALIZACION(1)

(c es un nombre de cte no perteneciente a $\mathcal{C}$ y tal que $(\mathcal{C}\cup\{c\},\mathcal{F},\mathcal{R},a)$ es un tipo), tenemos que el Lema 2 nos dice que $1^T=\{\varphi\in S^\tau:\varphi$ es un teorema de $T\}=[\forall x_1(x_1\equiv x_1)]_T$. Es decir que para probar (10) debemos probar que para cualquier $\varphi_1\in S^\tau$, se da que

$$[\varphi_1]_T \;\mathsf{s}^T\; [\forall x_1(x_1\equiv x_1)]_T=\{\varphi\in S^\tau:\varphi \text{ es un teorema de } T\}$$

Ya que $[\varphi_1]_T \;\mathsf{s}^T\; [\forall x_1(x_1\equiv x_1)]_T=[\varphi_1\vee\forall x_1(x_1\equiv x_1)]_T$, debemos probar que $\varphi_1\vee\forall x_1(x_1\equiv x_1)$ es un teorema de T, lo cual es atestiguado por la siguiente prueba formal

1.	$c\equiv c$	AXIOMALOGICO
2.	$\forall x_1(x_1\equiv x_1)$	GENERALIZACION(1)
3.	$(\varphi_1\vee\forall x_1(x_1\equiv x_1))$	DISJUNCIONINTRODUCCION(2)

Veamos ahora que se da (6), es decir veamos que

$$[\varphi_1]_T \;\mathsf{s}^T\; ([\varphi_2]_T \;\mathsf{s}^T\; [\varphi_3]_T)=([\varphi_1]_T \;\mathsf{s}^T\; [\varphi_2]_T) \;\mathsf{s}^T\; [\varphi_3]_T$$

cualesquiera sean $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3\in S^\tau$. Sean $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3\in S^\tau$ fijas. Por la definicion de la operacion s^T debemos probar que

$$[(\varphi_1\vee(\varphi_2\vee\varphi_3))]_T=[((\varphi_1\vee\varphi_2)\vee\varphi_3)]_T$$

es decir, debemos probar que

$$T\vdash((\varphi_1\vee(\varphi_2\vee\varphi_3))\leftrightarrow((\varphi_1\vee\varphi_2)\vee\varphi_3))$$

Notese que por (2) del Lema "Propiedades basicas de $\vdash$" de la Guia 12 , basta con probar que

$$T\vdash((\varphi_1\vee(\varphi_2\vee\varphi_3))\rightarrow((\varphi_1\vee\varphi_2)\vee\varphi_3))$$
$$T\vdash(((\varphi_1\vee\varphi_2)\vee\varphi_3)\rightarrow(\varphi_1\vee(\varphi_2\vee\varphi_3)))$$

La siguiente es una prueba formal de $((\varphi_1\vee(\varphi_2\vee\varphi_3))\rightarrow((\varphi_1\vee\varphi_2)\vee\varphi_3))$ en

T y dejamos al lector la otra prueba formal.

1.	$(\varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3))$	HIPOTESIS1
2.	φ_1	HIPOTESIS2
3.	$(\varphi_1 \vee \varphi_2)$	DISJUNCIONINTRODUCCION(2)
4.	$((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3)$	TESIS2DISJUNCIONINTRODUCCION(3)
5.	$\varphi_1 \to ((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3)$	CONCLUSION
6.	$(\varphi_2 \vee \varphi_3)$	HIPOTESIS3
7.	φ_2	HIPOTESIS4
8.	$(\varphi_1 \vee \varphi_2)$	DISJUNCIONINTRODUCCION(6)
9.	$((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3)$	TESIS4DISJUNCIONINTRODUCCION(7)
10.	$\varphi_2 \to ((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3)$	CONCLUSION
11.	φ_3	HIPOTESIS5
12.	$((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3)$	TESIS5DISJUNCIONINTRODUCCION(11)
13.	$\varphi_3 \to ((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3)$	CONCLUSION
14.	$((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3)$	TESIS3DIVISIONPORCASOS$(6, 10, 13)$
15.	$(\varphi_2 \vee \varphi_3) \to ((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3)$	CONCLUSION
16.	$((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3)$	TESIS1DIVISIONPORCASOS$(1, 5, 15)$
17.	$(\varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3)) \to ((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3)$	CONCLUSION

El resto de las propiedades pueden ser probadas en forma similar, algunas de las pruebas formales necesarias han sido dadas en los ejemplos que siguen a la definicion de prueba formal ■

Dada una teoria $T = (\Sigma, \tau)$, denotaremos con $\mathcal{A}_T$ al algebra de Boole $(S^\tau/\dashv\vdash_T, \mathsf{s}^T, \mathsf{i}^T, {}^{\mathsf{c}^T}, 0^T, 1^T)$. El algebra $\mathcal{A}_T$ sera llamada el *algebra de Lindenbaum de la teoria T*. Denotaremos con $\leq^T$ al orden parcial asociado al algebra de Boole $\mathcal{A}_T$ (es decir $[\varphi]_T \leq^T [\psi]_T$ si y solo si $[\varphi]_T \ \mathsf{s}^T \ [\psi]_T = [\psi]_T$). El siguiente lema nos da una descripcion agradable de $\leq^T$.

Lemma 4 *Sea T una teoria. Se tiene que*

$$[\varphi]_T \leq^T [\psi]_T \textit{ si y solo si } T \vdash (\varphi \to \psi)$$

Proof. Supongamos que $[\varphi]_T \leq^T [\psi]_T$, es decir supongamos que $[\varphi]_T \ \mathsf{s}^T \ [\psi]_T = [\psi]_T$. Por la definicion de s^T tenemos que $[(\varphi \vee \psi)]_T = [\psi]_T$, es decir $T \vdash ((\varphi \vee \psi) \leftrightarrow \psi)$. Es facil ver entonces que $T \vdash (\varphi \to \psi)$. Reciprocamente si $T \vdash (\varphi \to \psi)$, entonces facilmente podemos probar que $T \vdash ((\varphi \vee \psi) \leftrightarrow \psi)$, lo cual nos dice que $[(\varphi \vee \psi)]_T = [\psi]_T$. Por la definicion de s^T tenemos que $[\varphi]_T \ \mathsf{s}^T \ [\psi]_T = [\psi]_T$, lo cual nos dice que $[\varphi]_T \leq^T [\psi]_T$ ■

Ejercicio 3: Reflexionar sobre la siguiente pregunta: ¿El concepto de algebra de Lindenbaum es un concepto sintactico o semantico?

Si queremos demostrar que en $\mathcal{A}_T$ se da que $[\varphi]_T \neq [\psi]_T$, es claro que por definicion de $\dashv\vdash_T$ deberemos probar que $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ no es un teorema de T. O sea que por el criterio **NoEsTeorema** surge el siguiente criterio:

- Si queremos demostrar que en $\mathcal{A}_T$ se da que $[\varphi]_T \neq [\psi]_T$, entonces basta con encontrar un modelo $\mathbf{A}$ de T tal que $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ sea falsa en $\mathbf{A}$. Es decir deberemos encontrar un modelo $\mathbf{A}$ de T el cual haga verdadera a una de las sentencias y falsa a la otra

Ejercicio 4: Hacer

(a) Encuentre φ y ψ sentencias de τ_{RetCua} tales que $[\varphi]_{RetCua} <^{RetCua} [\psi]_{RetCua}$

(b) Encuentre en $\mathcal{A}_{RetCua}$ una cadena ascendente numerable infinita

Ejercicio 5: V o F o I, justifique

(a) Sea $T = (\Sigma, \tau)$ una teoria. Entonces $1^T \cap 0^T = \emptyset$

(b) Sea T una teoria. Entonces $e \leq^T \forall x_1(x_1 \equiv x_1)$, para cada $e \in S^\tau/\dashv\vdash_T$

(c) Sea $\tau = (\emptyset, \emptyset, \emptyset, \emptyset)$. El algebra de Boole $\mathcal{A}_{(\emptyset,\tau)}$ tiene una cantidad finita de elementos

(d) Sea T una teoria. Entonces $[\varphi]_T \leq^T [\psi]_T$ si y solo si $(\varphi \to \psi)$ es veradera en T