Guía 14: Teorema de Completitud

Teorema del filtro primo

- **Definición**: Un *filtro* de un reticulado terna (L, s, i) será un subconjunto $F \subseteq L$ tal que:
  1. $F \neq \emptyset$
  2. $x, y \in F \Rightarrow x\ i\ y \in F$
  3. $x \in F$ y $x \leq y \Rightarrow y \in F$
- **Filtro generado por S**:
  - Dado un conjunto $S \subseteq L$, consideraremos $[S) = \{y \in L : y \geq s_1\ i\ \dots\ i\ s_n, \text{ para algunos } s_1, \dots, s_n \in S, n \geq 1\}$
  - *Lema*: Supongamos S no vacío. Entonces $[S)$ es un filtro. Más aún, si F es un filtro y $F \supseteq S$, entonces $F \supseteq [S)$. Es decir, $[S)$ es el menor filtro que contiene a S.
  - Llamaremos a $[S)$ el *filtro generado* por S
- **Cadena**: Sea $(P, \leq)$ un poset. Un subconjunto $C \subseteq P$ será llamado una *cadena* si $\forall x, y \in C,\ (x \leq y \vee y \leq x)$
- **Lema de Zorn**: Sea $(P, \leq)$ un poset y supongamos que cada cadena de $(P, \leq)$ tiene al menos una cota superior. Entonces hay un elemento maximal en $(P, \leq)$
- **Filtro primo**: Un filtro F de un reticulado terna (L, s, i) será llamado *primo* cuando se cumplan:
  1. $F \neq L$
  2. $x\ s\ y \in F \Rightarrow (x \in F \vee y \in F)$
- **Teorema del Filtro Primo**: Sea (L, s, i) un reticulado terna distributivo y F un filtro. Supongamos $x_0 \in L - F$. Entonces hay un filtro primo P tal que $x_0 \notin P$ y $F \subseteq P$

Teorema de Rasiova Sikorski

- **Teorema**: Sea $(B, s, i, {}^c, 0, 1)$ un álgebra de Boole. Sea $a \in B, a \neq 0$. Supongamos que $(A_1, A_2, \dots)$ es una infinitupla de subconjuntos de B tal que existe $\inf(A_j)$, para cada $j = 1, 2 \dots$. Entonces hay un filtro primo P el cual cumple:
  1. $a \in P$
  2. $P \supseteq A_j \Rightarrow P \ni \inf(A_j)$ para cada $j = 1, 2, \dots$

Lema del ínfimo

- **Lema**: Sea $T = (\Sigma, \tau)$ una teoría y supongamos que τ tiene una cantidad infinita de nombres de constante que no ocurren en las sentencias de Σ. Entonces para cada fórmula $\varphi =_d \varphi(v)$, se tiene que en el álgebra de Lindembaum $\mathcal{A}_T$:

$$[\forall v \varphi(v)]_T = \inf(\{[\varphi(t)]_T : t \in T_c^\tau\})$$

Lema de coincidencia

- **Lema**: Sean τ y τ' dos tipos cualesquiera y sea $\tau_\cap = (\mathcal{C}_\cap, \mathcal{F}_\cap, \mathcal{R}_\cap, a_\cap)$ donde

$$\begin{aligned}
&\mathcal{C}_\cap = \mathcal{C} \cap \mathcal{C}' \\
&\mathcal{F}_\cap = \{f \in \mathcal{F} \cap \mathcal{F}' : a(f) = a'(f)\} \\
&\mathcal{R}_\cap = \{r \in \mathcal{R} \cap \mathcal{R}' : a(r) = a'(r)\} \\
&a_\cap = a|_{\mathcal{F}_\cap \cup \mathcal{R}_\cap}
\end{aligned}$$

  Entonces $\tau_\cap$ es un tipo tal que $T^{\tau_\cap} = T^\tau \cap T^{\tau'}$ y $F^{\tau_\cap} = F^\tau \cap F^{\tau'}$. Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{A}'$ modelos de tipo τ y τ' respectivamente. Supongas que $A = A'$ y que $c^{\mathbf{A}} = c^{\mathbf{A}'}$ para cada $c \in \mathcal{C}_\cap$, $f^{\mathbf{A}} = f^{\mathbf{A}'}$ para cada $f \in \mathcal{F}_\cap$ y $r^{\mathbf{A}} = r^{\mathbf{A}'}$ para cada $r \in \mathcal{R}_\cap$. Entonces:
  1. Para cada $t =_d t(\vec{v}) \in T^{\tau_\cap}$ se tiene que $t^{\mathbf{A}}[\vec{a}] = t^{\mathbf{A}'}[\vec{a}]$ para cada $\vec{a} \in A^n$
  2. Para cada $\varphi =_d \varphi(\vec{v}) \in F^{\tau_\cap}$ se tiene que $\mathbf{A} \vDash \varphi[\vec{a}]$ sii $\mathbf{A}' \vDash \varphi[\vec{a}]$
  3. Si $\Sigma \cup \{\varphi\} \subseteq S^{\tau_\cap}$, entonces $(\Sigma, \tau) \vDash \varphi$ sii $(\Sigma, \tau') \vDash \varphi$

Lema de enumeración

- **Lema**: Sea τ un tipo. Hay una infinitupla $(\gamma_1, \gamma_2, \dots) \in F^{\tau N}$ tal que:
  1. $|Li(\gamma_j)| \leq 1$ para cada $j = 1, 2, \dots$
  2. Si $|Li(\gamma)| \leq 1$ entonces $\gamma = \gamma_j$ para algún $j \in N$

Lema de tipos parecidos

- **Lema**: Sean $\tau = (\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{R}, a)$ y $\tau' = (\mathcal{C}', \mathcal{F}', \mathcal{R}', a')$ tipos. Entonces:
  1. Si $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}', \mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}', \mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}'$ y $a = a'|_{\mathcal{F} \cup \mathcal{R}}$, entonces $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$ implica $(\Sigma, \tau') \vdash \varphi$
  2. Si $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}', \mathcal{F} = \mathcal{F}', \mathcal{R} = \mathcal{R}'$ y $a = a'$, entonces $(\Sigma, \tau') \vdash \varphi$ implica $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$ cada vez que $\Sigma \cup \{\varphi\} \subseteq S^\tau$

Teorema de Completitud

- **Teorema**: Sea $T = (\Sigma, \tau)$ una teoría de primer orden. Si $T \vDash \varphi$, entonces $T \vdash \varphi$
- **Corolario**: Toda teoría consistente tiene un modelo
- **Corolario - Teorema de Compacidad**: Sea (Σ, τ) una teoría. Entonces:
  1. Si (Σ, τ) es tal que (Σ_0, τ) tiene un modelo para cada subconjunto finito $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$, entonces (Σ, τ) tiene un modelo
  2. Si $(\Sigma, \tau) \vDash \varphi$, entonces hay un subconjunto finito $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ tal que $(\Sigma_0, \tau) \vDash \varphi$

Interpretación semántica del álgebra de Lindenbaum

- **Definición**: Sea $T = (\Sigma, \tau)$ una teoría. Dada $\varphi \in S^\tau$ definamos $\mathrm{Mod}_T(\varphi) = \{\mathbf{A} : \mathbf{A}$ es modelo de T y $\mathbf{A} \vDash \varphi\}$
- **Lema**: Dadas $\varphi, \psi \in S^\tau$ se tiene:
  1. $[\varphi]_T \leq^T [\psi]_T$ sii $\mathrm{Mod}_T(\varphi) \subseteq \mathrm{Mod}_T(\psi)$
  2. $[\varphi]_T = [\psi]_T$ sii $\mathrm{Mod}_T(\varphi) = \mathrm{Mod}_T(\psi)$
  3. $[\varphi]_T <^T [\psi]_T$ sii $\mathrm{Mod}_T(\varphi) \subsetneq \mathrm{Mod}_T(\psi)$