Nota: Los ejercicios que tienen una S son para una "Segunda pasada" es decir ya sea son mas anecdoticos y menos importantes tematicamente, o son de completar pruebas y tienen que ver mas con la parte teorica, o son mas dificiles y conviene encararlos despues de una primera pasada por la guia (asi uno comienza a pensarlos con un poco mas de madurez sobre el tema).

Notacion y conceptos basicos

Usaremos $\mathbf{R}$ para denotar el conjunto de los numeros reales, $\mathbf{Z}$ para denotar el conjunto de los numeros enteros, $\mathbf{N}$ para denotar el conjunto de los numeros naturales y ω para denotar al conjunto $\mathbf{N} \cup \{0\}$.

Dado un conjunto A, usaremos $\mathcal{P}(A)$ para denotar el conjunto formado por todos los subconjuntos de A, es decir:

$$\mathcal{P}(A) = \{S : S \subseteq A\}$$

Si A es un conjunto finito, entonces $|A|$ denotara la cantidad de elementos de A.

Para $x, y \in \omega$, definamos

$$x \dot{-} y = \begin{cases} x - y & \text{si } x \geq y \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Dados $x, y \in \omega$ diremos que x *divide a* y cuando haya un $z \in \omega$ tal que $y = z.x$. Notar que 0 divide a 0, 3 divide a 0 y 0 no divide a 23. Escribiremos $x \mid y$ para expresar que x divide a y. Si bien no hay una definicion natural en matematica de cuanto vale 0^0 (0 elevado a la 0), por convencion para nosotros $0^0 = 1$

Producto carteciano

Dados conjuntos $A_1, ..., A_n$, con $n \geq 2$, usaremos $A_1 \times ... \times A_n$ para denotar el *producto Cartesiano* de $A_1, ..., A_n$, es decir el conjunto formado por todas las n-uplas $(a_1, ..., a_n)$ tales que $a_1 \in A_1, ..., a_n \in A_n$. Si $A_1 = ... = A_n = A$, con $n \geq 2$, entonces escribiremos A^n en lugar de $A_1 \times ... \times A_n$. Para $n = 1$, definimos $A^n = A$, es decir $A^1 = A$. Usaremos $\Diamond$ para denotar la unica 0-upla. Definimos entonces $A^0 = \{\Diamond\}$. Si A es un conjunto denotaremos con $A^{\mathbf{N}}$ al conjunto formado por todas las infinituplas $(a_1, a_2, ...)$ tales que $a_i \in A$ para cada $i \in \mathbf{N}$. Por ejemplo

$$(1, 2, 3, 4, ...) \in \omega^{\mathbf{N}}$$

donde $(1, 2, 3, 4, ...)$ es una forma intuitiva de denotar la infinitupla cuyo i-esimo elemento es el numero natural i.

Si $(A_1, A_2, ...)$ es una infinitupla de conjuntos, entonces usaremos $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ o $\bigcup_{i \geq 1} A_i$ para denotar al conjunto

$$\{a : a \in A_i, \text{ para algun } i \in \mathbf{N}\}$$

Conjuntos

Supondremos que el lector sabe las nociones basicas sobre conjuntos, aunque resaltaremos algunas de las mas importantes para que el lector las repase.

La propiedad de *extensionalidad* nos dice que, dados conjuntos A, B, se tiene que $A = B$ si y solo si para cada objeto x se da que

$$x \in A \text{ si y solo si } x \in B$$

Esta propiedad es importante metodologicamente ya que a la hora de probar que dos conjuntos A, B son iguales, extensionalidad nos asegura que basta con ver que se dan las dos inclusiones $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$.

Otro tema importante es manejar correctamente la notacion cuando definimos un conjunto usando llaves y mediante propiedades que caracterizan la pertenencia al mismo. Algunos ejercicios para entrenar esta notacion:

Ejercicio 1: Entender en forma precisa que conjunto se esta denotando en cada uno de los siguientes casos

(a) $\{x \in \mathbf{N} : x = 1 \text{ o } x \geq 5\}$

(b) $\{x : x \in \mathbf{R} \text{ y } x^2 \geq 100\}$

(c) $\{x : x = 100\}$

(d) $\{x^2 + 1 : x \in \omega\}$

(e) $\{x + y + z : x, y, z \in \{1, 2\}\}$

Ejercicio 2: V o F o I, justifique.

(a) $\{x.y : x, y \in \omega\} = \omega$

(b) $|\{x.y : x, y \in \omega \text{ y } 1 \leq x, y \leq 5\}| = 25$

(c) Dados $A, B \subseteq \omega$, se tiene que $\{a \in A \text{ y } b \in B : a+b = 1000\} \subseteq A \times B$

(d) $\{a \in \mathbf{N}, a \geq 3\} \subseteq \omega$

(e) $\{x + 1 : x \in \{1, 2, 3\}\} = \{1, 2, 3, 4\}$

Alfabetos

Un *alfabeto* es un conjunto finito de simbolos. Notese que $\emptyset$ es un alfabeto. Si Σ es un alfabeto, entonces Σ^* denotara el conjunto de todas las palabras formadas con simbolos de Σ. Las palabras de longitud 1 son exactamente los elementos de Σ, en particular esto nos dice que $\Sigma \subseteq \Sigma^*$. La unica palabra de longitud 0 es denotada con ε. Ya que en ε no ocurren simbolos, tenemos que $\varepsilon \in \Sigma^*$, para cualquier alfabeto, mas aun notese que $\emptyset^* = \{\varepsilon\}$. Usaremos $|\alpha|$ para denotar la longitud de la palabra α. Si $\alpha \in \Sigma^*$ y $\sigma \in \Sigma$, usaremos $|\alpha|_\sigma$ para denotar la cantidad de ocurrencias del simbolo σ en α. Usaremos Σ^+ para denotar al conjunto $\Sigma^* - \{\varepsilon\}$. Notese que funciones, n-uplas y palabras son objetos de distinto tipo, por lo cual $\emptyset$, $\Diamond$ y ε son tres objetos matematicos diferentes.

Si $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \Sigma^*$, con $n \geq 0$, usaremos $\alpha_1...\alpha_n$ para denotar la *concatenacion* de las palabras $\alpha_1, ..., \alpha_n$ (notese que cuando $n = 0$, resulta que $\alpha_1...\alpha_n = \varepsilon$). Si $\alpha_1 = ... = \alpha_n = \alpha$, entonces escribiremos α^n en lugar de $\alpha_1...\alpha_n$. O sea que $\alpha^0 = \varepsilon$.

Diremos que α *es subpalabra (propia) de* β cuando ($\alpha \notin \{\varepsilon, \beta\}$ y) existan palabras δ, γ tales que $\beta = \delta\alpha\gamma$. Diremos que β es un *tramo inicial (propio)* de α si hay una palabra γ tal que $\alpha = \beta\gamma$ (y $\beta \notin \{\varepsilon, \alpha\}$). En forma similar se define *tramo final (propio)*.

Dados $i \in \omega$ y $\alpha \in \Sigma^*$ definamos

$$[\alpha]_i = \begin{cases} i\text{-esimo elemento de } \alpha & \text{si } 1 \leq i \leq |\alpha| \\ \varepsilon & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Dada $\gamma \in \Sigma^*$, definamos

$$\gamma^R = \begin{cases} [\gamma]_{|\gamma|}[\gamma]_{|\gamma|-1}...[\gamma]_1 & \text{si } |\gamma| \geq 1 \\ \varepsilon & \text{caso contrario} \end{cases}$$

La palabra γ^R es llamada la *resiproca* de γ.

Ocurrencias

Dadas palabras $\alpha, \beta \in \Sigma^*$, con $|\alpha|, |\beta| \geq 1$, y un natural $i \in \{1, ..., |\beta|\}$, se dice que α *ocurre a partir de* i *en* β cuando se de que existan palabras δ, γ tales que $\beta = \delta\alpha\gamma$ y $|\delta| = i - 1$. Intuitivamente hablando α ocurre a partir de i en β cuando se de que si comensamos a leer desde el lugar i-esimo de β en adelante, leeremos la palabra α completa y luego posiblemente seguiran otros simbolos.

Notese que una palabra α puede ocurrir en β, a partir de i, y tambien a partir de j, con $i \neq j$. En virtud de esto, hablaremos de las distintas ocurrencias de α en β. Por ejemplo hay dos ocurrencias de la palabra aba en la palabra

$$ccccccabaccccabaccccc$$

y tambien hay dos ocurrencias de la palabra aba en la palabra

$$ccccccababaccccccccccc$$

En el primer caso diremos que dichas ocurrencias de aba son *disjuntas* ya que ocupan espacios disjuntos dentro de la palabra. En cambio en el segundo caso puede apreciarse que las dos ocurrencias se superponen en una posicion. A veces diremos que una ocurrencia esta *contenida* o *sucede* dentro de otra. Por ejemplo la segunda ocurrencia de ab en $babbbfabcccfabccc$ esta contenida en la primer ocurrencia de $fabc$ en $babbbfabcccfabccc$.

No definiremos en forma matematica precisa el concepto de ocurrencia pero el lector no tendra problemas en comprenderlo y manejarlo en forma correcta.

Reemplazos de ocurrencias Tambien haremos *reemplazos* de ocurrencias por palabras. Por ejemplo el resultado de reemplazar la primer ocurrencia de abb en $ccabbgfgabbgg$ por $oolala$ es la palabra $ccoolalagfgabbgg$. Cuando todas las ocurrencias de una palabra α en una palabra β sean disjuntas entre si, podemos hablar del resultado de *reeplazar simultaneamente cada ocurrencia de* α *en* β *por* γ. Por ejemplo si tenemos

$$\begin{aligned}\alpha &= yet\\ \beta &= ghsyetcjjjyetbcpyeteabc\\ \gamma &= \%\%\end{aligned}$$

entonces $ghs\%\%cjjj\%\%bcp\%\%eabc$ es el resultado de reemplazar simultaneamente cada ocurrencia de α en β por γ. Es importante notar que los reemplazos se hacen simultaneamente y no secuencialmente (i.e. reemplazando la primer ocurrencia de α por γ y luego al resultado reemplazarle la primer ocurrencia de α por γ y asi sucesivamente). Obviamente el reemplazo secuencial puede dar un resultado distinto al simultaneo (que es el que usaremos en general) e incluso puede suceder que en el reemplazo secuencial el proceso se pueda iterar indefinidamente. Dejamos al lector armar ejemplos de estas cituaciones.

Tambien se pueden hacer reemplazos simultaneos de distintas palabras en una palabra dada. Supongamos tenemos palabras $\alpha_1, ..., \alpha_n$ (con $\alpha_i \neq \alpha_j$, para $i \neq j$) las cuales tienen la propiedad de que las distintas ocurrencias de ellas en la palabra β son siempre disjuntas de a pares, y tenemos ademas palabras $\gamma_1, ..., \gamma_n$. Entonces hablaremos del resultado de reemplazar simultaneamente:

- cada ocurrencia de α_1 en β, por γ_1

- cada ocurrencia de α_2 en β, por γ_2

$$\vdots$$

- cada ocurrencia de α_n en β, por γ_n

Por ejemplo si tomamos

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= gh\\ \alpha_2 &= yet\\ \alpha_3 &= ana\\ \beta &= ghbbbyetbbgh\%\%ana\#\#ana!!!ana\\ \gamma_1 &= AA\\ \gamma_2 &= BBBB\\ \gamma_3 &= CCC\end{aligned}$$

entonces $AAbbbBBBBbbAA\%\%CCC\#\#CCC!!!CCC$ es el resultado de reemplazar simultaneamente:

- cada ocurrencia de α_1 en β, por γ_1

- cada ocurrencia de α_2 en β, por γ_2

  cada ocurrencia de α_3 en β, por γ_3

Matematica orientada a objetos

Nuestro estilo o enfoque matematico pondra enfasis en los objetos, es decir haremos matematica prestando atencion a los distintos objetos matematicos involucrados, los cuales siempre seran definidos en forma precisa en terminos de objetos mas primitivos. Hay ciertos objetos matematicos los cuales no definiremos y supondremos que el lector tiene una idea clara y precisa de los mismos. Por ejemplo un tipo de objeto matematico, quizas el mas famoso, son los *numeros*. No diremos que es un numero pero supondremos que el lector tiene una intuicion clara acerca de este tipo de objetos y de sus propiedades basicas. Otro tipo de objeto que no definiremos y que sera clave para nuestro enfoque son los *conjuntos*. Nuevamente, no diremos que es un conjunto pero supondremos que el lector tiene una intuicion clara acerca de estos objetos y sus propiedades basicas. Es importante que en nuestro enfoque, numeros y conjuntos son objetos de distinta naturaleza por lo cual nunca un numero es un conjunto ni un conjunto es un numero. En particular esto nos dice que el numero 0 y el conjunto $\emptyset$ son objetos distintos. Otro tipo de objeto matematico muy importante para la matematica discreta son los *simbolos*. No discutiremos que es un simbolo sino que aceptaremos este concepto en forma primitiva. Tambien constituyen un tipo de objeto matematico las *palabras*, las cuales intuitivamente hablando son juxtaposiciones de simbolos. Otro tipo de objeto matematico muy importante son los *pares ordenados* o 2-*uplas*, es decir los objetos de la forma (a, b), donde a y b son objetos matematicos cualesquiera. Tambien son objetos matematicos y de distinta naturaleza las 3-*uplas*, las 4-*uplas* y en general las n-*uplas* para n un numero natural mayor o igual a 2. Cabe destacar que en nuestro enfoque no habra 1-uplas. Sin envargo, si bien hay una sola 0-*upla*, ella constituye un tipo de objeto matematico distinto a los antes mencionados. El ultimo tipo de objeto matematico que consideraremos es aquel de las *infinituplas*.

Tenemos entonces dividido nuestro universo matematico en las distintas categorias de objetos:

$$\begin{array}{l} \text{NUMERO} \\ \text{CONJUNTO} \\ \text{PALABRA} \\ 0-\text{UPLA} \\ 2-\text{UPLA} \\ 3-\text{UPLA} \\ \quad\vdots \\ \text{INFINITUPLA} \end{array}$$

(Notar que los simbolos quedan contenidos en la categoria de las palabras). Es importante entender que las anteriores categorias o tipos de objetos son disjuntas entre si, es decir nunca un numero sera una palabra o una palabra sera una 3-upla etc. Esto nos permite definir una funcion Ti la cual a un objeto matematico le asigna su tipo de objeto matematico segun la lista anterior. Por ejemplo:

$$\begin{aligned}
Ti(\pi) &= \text{NUMERO} \\
Ti(\mathbf{N}) &= \text{CONJUNTO} \\
Ti(\mathcal{P}(\mathbf{N})) &= \text{CONJUNTO} \\
Ti((1,2,3)) &= 3\text{−UPLA} \\
Ti(\emptyset) &= \text{CONJUNTO} \\
Ti(\varepsilon) &= \text{PALABRA} \\
Ti(\Diamond) &= 0\text{−UPLA} \\
Ti(\alpha) &= \text{PALABRA, si } \alpha \text{ es un simbolo} \\
Ti(f) &= \text{CONJUNTO, si } f \text{ es una funcion}
\end{aligned}$$

El concepto de funcion

Asumiremos que el lector tiene una idea intuitiva del concepto de funcion. Daremos aqui una definicion matematica de dicho concepto. Una *funcion* es un conjunto f de pares ordenados con la siguiente propiedad

(F) Si $(x,y) \in f$ y $(x,z) \in f$, entonces $y = z$.

Por ejemplo, si tomamos $f = \{(x,x^2) : x \in \omega\}$ se puede ver facilmente que f cumple la propiedad (F). Dada una funcion f, definamos

$$\begin{aligned}
D_f = &\text{ dominio de } f = \{x : (x,y) \in f \text{ para algun } y\} \\
I_f = &\text{ imagen de } f = \{y : (x,y) \in f \text{ para algun } x\}
\end{aligned}$$

A veces escribiremos $\mathrm{Dom}(f)$ y $\mathrm{Im}(f)$ para denotar, respectivamente, el dominio y la imagen de una funcion f. Como es usual dado $x \in D_f$, usaremos $f(x)$ para denotar al unico $y \in I_f$ tal que $(x,y) \in f$. Notese que $\emptyset$ es una funcion y que $D_\emptyset = I_\emptyset = \emptyset$. Por ejemplo para $f = \{(x,x^2) : x \in \omega\}$ se tiene que $D_f = \omega$ y $I_f = \{y : y = x^2 \text{ para algun } x \in \omega\}$. Ademas notese que $f(x) = x^2$, para cada $x \in D_f$.

Escribiremos $f : S \subseteq A \to B$ para expresar que f es una funcion tal que $D_f = S \subseteq A$ y $I_f \subseteq B$. Tambien escribiremos $f : A \to B$ para expresar que f es una funcion tal que $D_f = A$ y $I_f \subseteq B$. En tal contexto llamaremos a B *conjunto de llegada*. Por supuesto B no esta determinado por f ya que solo debe cumplir $I_f \subseteq B$.

Muchas veces para definir una funcion f, lo haremos dando su dominio y su regla de asignacion, es decir especificaremos en forma precisa que conjunto es el dominio de f y ademas especificaremos en forma presisa quien es $f(x)$ para cada x de dicho dominio. Obviamente esto determina por completo a la funcion f ya que $f = \{(x, f(x)) : x \in D_f\}$. Por ejemplo si decimos que f es la funcion dada por:

$$D_f = \omega$$
$$f(x) = 23x^2$$

nos estaremos refiriendo a la funcion $\{(x, 23x^2) : x \in \omega\}$. Tambien escribiremos

$$\begin{array}{rcl} f : \omega & \rightarrow & \omega \\ x & \rightarrow & 23x^2 \end{array}$$

para describir a f. Es decir, a veces para hacer mas intuitiva aun la descripcion de la funcion, tambien incluiremos un conjunto de llegada de dicha funcion y a la regla de asignacion la escribiremos usando una flecha. Para dar otro ejemplo, si escribimos sea f dada por:

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbf{N} & \rightarrow & \omega \\ x & \rightarrow & \left\{ \begin{array}{cc} x+1 & \text{si } x \text{ es par} \\ x^2 & \text{si } x \text{ es impar} \end{array} \right. \end{array}$$

estaremos diciendo que f es la funcion

$$\{(x, x+1) : x \text{ es par y } x \in \mathbf{N}\} \cup \{(x, x^2) : x \text{ es impar y } x \in \mathbf{N}\}$$

Igualdad de funciones

Sean f y g dos funciones. Ya que las mismas son conjuntos, tendremos que f sera igual a g si y solo si para cada par (a, b), se tiene que $(a, b) \in f$ sii $(a, b) \in g$. Muchas veces sera util el siguiente criterio de igualdad de funciones:

Lemma 1 *Sean f y g funciones. Entonces $f = g$ sii $D_f = D_g$ y para cada $x \in D_f$ se tiene que $f(x) = g(x)$*

Ejercicio 3: (S) Pruebe el lema anterior

Ejercicio 4: V o F o I, justifique.

(a) Si

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbf{N} & \rightarrow & \omega \\ x & \rightarrow & x^3 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rcl} g : \mathbf{N} & \rightarrow & \mathbf{R} \\ x & \rightarrow & x^3 \end{array}$$

entonces $f = g$

(b) Si

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbf{N} & \rightarrow & \omega \\ x & \rightarrow & x^3 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rcl} g : \mathbf{N} & \rightarrow & \omega \\ x & \rightarrow & x^4/x \end{array}$$

entonces $f = g$

(c) Si f es una funcion y $z \in D_f$, entonces $Ti(z) = $ CONJUNTO

(d) $\mathrm{Dom}((1,2)) = \{1\}$

(e) $\mathrm{Dom}(\{(1,2)\}) + 1 = 2$

(f) Si f es una funcion, entonces $D_f = \{a : (a,b) \in f\}$

(g) Si $f : A \to B$, entonces $D_f \subseteq A$

(h) Si $f : A \to B$, entonces $I_f = B$

(i) Si f es una función y $g \subseteq f$, entonces g es una función

Funcion identidad

Dado un conjunto A, a la funcion

$$\begin{array}{ccc} A & \to & A \\ a & \to & a \end{array}$$

La denotaremos con Id_A y la llamaremos la funcion *identidad sobre* A. Notese que $Id_A = \{(a,a) : a \in A\}$.

Composicion de funciones

Dadas funciones f y g definamos la funcion $f \circ g$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} D_{f \circ g} &= \{e \in D_g : g(e) \in D_f\} \\ f \circ g(e) &= f(g(e)) \end{aligned}$$

Notar que $f \circ g = \{(u,v) :$ existe z tal que $(u,z) \in g$ y $(z,v) \in f\}$.

Ejercicio 5: Pruebe que $f \circ g \neq \emptyset$ si y solo si $I_g \cap D_f \neq \emptyset$ (esto nos dice que que muchas veces sucedera que $f \circ g = \emptyset$)

La *funcion sucesor* es definida por

$$\begin{array}{rcl} Suc : \omega & \to & \omega \\ n & \to & n+1 \end{array}$$

La *funcion predecesor* es definida por

$$\begin{array}{rcl} Pred : \mathbf{N} & \to & \omega \\ n & \to & n-1 \end{array}$$

Ejercicio 6: V o F o I, justifique

(a) $Pred = Pred \circ (Pred \circ Suc)$

(b) $Pred \circ (Suc \circ Pred) = Pred$

(c) $Pred \circ (Suc \circ \{(x,x) : x \in \mathbf{N}\}) = Pred \circ Suc$

(d) $\emptyset \circ f = f \circ \emptyset = \emptyset$ cualquiera sea la funcion f

(e) $Suc \circ x = Suc$

(f) $Suc \circ 4 = 5$

(g) Si $f : D_f \subseteq \omega \to \omega$ y $g : D_g \subseteq \omega \to \omega$, entonces $D_{f \circ g} = \{x \in \omega : x \in D_g \text{ y } I_g \subseteq D_f\}$

Funciones inyectivas, suryectivas y biyectivas

Una funcion f es *inyectiva* cuando no se da que $f(a) = f(b)$ para algun par de lementos distintos $a, b \in D_f$. Dada una funcion $f : A \to B$ diremos que f es *suryectiva* cuando $I_f = B$. Debe notarse que el concepto de suryectividad depende de un conjunto de llegada previamente fijado, es decir que no tiene sentido hablar de la suryectividad de una funcion f si no decimos respecto de que conjunto de llegada lo es. Muchas veces diremos que una funcion f es *sobre* para expresar que es suryectiva.

Dada una funcion $f : A \to B$ diremos que f es *biyectiva* cuando f sea inyectiva y suryectiva. Notese que si $f : A \to B$ es biyectiva, entonces podemos definir una nueva funcion $f^{-1} : B \to A$, de la siguiente manera:

$$f^{-1}(b) = \text{ unico } a \in A \text{ tal que } f(a) = b$$

La funcion f^{-1} sera llamada la *inversa de f*. Notese que $f \circ f^{-1} = Id_B$ y $f^{-1} \circ f = Id_A$.

Ejercicio 7: V o F o I, justifique.

(a) Una función f es inyectiva si $f(x) = f(y)$ cada vez que $x = y$

(b) $F : A \to B$ es suryectiva sii para cada $a \in A$ existe un $b \in B$ tal que $b = F(a)$

Ejercicio 8: Dar una biyeccion entre $\mathbf{N}$ y ω. Idem entre ω y $\{x \in \omega : x \text{ es par}\}$

1. Dar una funcion inyectiva de ω^2 en ω
2. Dar una funcion sobreyectiva de ω en ω^5

Lemma 2 *Supongamos $f : A \to B$ y $g : B \to A$ son tales que $f \circ g = Id_B$ y $g \circ f = Id_A$. Entonces f y g son biyectivas, $f^{-1} = g$ y $g^{-1} = f$.*

Ejercicio 9: (S) Haga una prueba del lema anterior