Simulación y bisimulación

Marzo 2025

Estudiante Emanuel Nicolás Herrador

Simulación

La simulación es una relación entre estados. Dos estados s, s' están relacionados por una relación de simulación R si cada vez que s propone hacer una acción a y moverse a un estado t, s' puede imitar con otra transición que hace una acción a y llegar a un estado t' que también está relacionado por R. Es decir, si de un lado propongo hacer una acción, entonces del otro lado se tiene que poder imitar de manera tal que sigamos simulando.

Notar que no se pide nada de la vuelta, o sea que s' podría tener muchas más transiciones dado que solo se busca que simule a s.

Formalmente, decimos que, sea $\mathcal{S} = (S, s_0, E, \to)$ un sistema de transiciones etiquetadas (i.e., $\to \subseteq S \times E \times S$ y s_0 estado inicial), una relación $R \subseteq S \times S$ es una simulación si:

$$\forall (s, s') \in R \ \forall a \in E, \Big(\forall t, \Big(s \overset{a}{\to} t \Rightarrow \exists t' : s' \overset{a}{\to} t' \wedge (s', t') \in R\Big)\Big)$$

> *Nota*: cuando hablemos de una relación de simulación o bisimulación entre dos sistemas de transición $(S_1, s_0^1, E, \to_1)$ y $(S_2, s_0^2, E, \to_2)$, consideraremos sin pérdida de generalidad que S_1, S_2 son disjuntos y que ambos sistemas comparten el mismo conjunto de etiquetas E.
>
> De este modo, tomaremos el nuevo sistema formado por $(S_1 \cup S_2, s_x, E, \to_1 \cup \to_2)$ (notar que s_x marca que puede ser cualquier estado) y si queremos encontrar una simulación, tenemos que ver una relación $R \subseteq (S_1 \cup S_2) \times (S_1 \cup S_2)$ tal que $(s_0^1, s_0^2) \in R$.

Este paso, en sí, es mera formalidad pero nos sirve para entender que cuando tenemos dos sistemas distintos podemos considerarlo como uno solo no conexo. Esto se hace dado que todas las definiciones, para mayor sencillez, serán dadas en base a un solo sistema.

Bisimulación

Para que una relación R sea una bisimulación, se requiere que R y R^{-1} sean simulaciones. Es decir, se está pidiendo que si s' ahora propone hacer una acción a, es s quien tiene que imitarla.

Formalmente, $R \subseteq S \times S$ es una bisimulación si R, R^{-1} son simulaciones.

En la bisimulación, lo que se propone para el "juego de imitación", es que en cualquier momento se puede cambiar el rol de quién es el que propone la nueva acción. De este modo, resulta más sencillo analizar dos sistemas para encontrar una bisimulación o un contraejemplo cambiando los roles.

Bisimulación débil

Consideraremos ahora solo las *transiciones observables*. Es decir, formalmente definimos:

$$s \overset{s}{\Rightarrow} t = \begin{cases} s \left(\overset{\tau}{\to}\right)^* t & \text{si } a = \tau \\ s \left(\overset{\tau}{\to}\right)^* \overset{a}{\to} \left(\overset{\tau}{\to}\right)^* t & \text{si } a \neq \tau \end{cases}$$

Es decir, en términos del *juego*, ahora el que imita va a poder usar todas las acciones sigilosas (τ) que quiera.