Solucionario — Primer Parcial

Materia: TEORÍA DE AUTÓMATAS Y LENG. FORMALES **Fecha:** 22-01-2026

VERSIÓN A $\Sigma = \{m, n\}$

Parte A — Conceptos (respuestas breves)

(2–4 líneas por ítem; cada uno vale 3 pts en el examen.)

1. Σ^*: conjunto de todas las cadenas finitas sobre Σ (incluye ε). ε: cadena vacía. Ej.: $mnmnn \in \Sigma^*$.
2. AFD: $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ (una transición por símbolo); una cadena se acepta si el **único** recorrido termina en un estado final. AFN: $\Delta : Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \to \mathcal{P}(Q)$; se acepta si **existe** al menos un recorrido que termina en final.
3. ε-cierre(S): estados alcanzables desde S usando solo transiciones ε (incluye S). Es necesario porque el autómata puede "moverse gratis" antes/entre lecturas al simular o convertir.
4. En subconjuntos, un estado del AFD es un conjunto $T \subseteq Q$. Se marca como final si $T \cap F \neq \varnothing$.
5. Para complementar con AFD: el autómata debe ser **completo** (transición definida para todo estado y todo símbolo; si falta, se agrega estado sumidero). Luego se invierten finales/no finales.
6. Producto (intersección) de AFD: estados (p, q); inicial (p_0, q_0); final si $p \in F_1$ y $q \in F_2$.
7. Estados no alcanzables no influyen en el lenguaje reconocido desde el inicial; se eliminan para simplificar (y para minimizar correctamente sin bloques "basura").
8. Dos estados son equivalentes si para toda cadena w producen la misma decisión de aceptación; operacionalmente: no existe w que distinga (uno acepte y el otro rechace).
9. Pumping Lemma (regulares): si L es regular, $\exists p \, \forall w \in L$ con $|w| \geq p \, \exists x, y, z$ tal que $w = xyz$, $|xy| \leq p$, $|y| \geq 1$ y $\forall i \geq 0$, $xy^iz \in L$.
10. La condición $|xy| \leq p$ fuerza que y quede dentro de los primeros p símbolos de w (zona donde el AFD debe repetir un estado), limitando dónde "cae" el bombeo.

Parte B — Desarrollo

Pregunta 1 — Clausura aplicada $A \setminus B$ (25 pts)

Datos: $A = \{w : \#m(w) \text{ es par}\}$, $B = \{w : \text{termina en } nn\}$. Se usa $A \setminus B = A \cap \overline{B}$.

(a) AFD para B: "termina en nn"

Estados: b_0 (no tengo sufijo n relevante), b_1 (último fue n), b_2 (últimos dos fueron nn).
Inicial: b_0. Finales: $\{b_2\}$.

δ_B	m	n
b_0	b_0	b_1
b_1	b_0	b_2
b_2	b_0	b_2

(b) Complemento $\overline{B}$

El AFD es completo. Entonces $F_{\overline{B}} = Q_B \setminus F_B = \{b_0, b_1\}$.

(c) Producto $A \cap \overline{B}$

AFD de A (dado): estados E/O, inicial E, finales $\{E\}$ con transiciones: $\delta_A(E, m) = O$, $\delta_A(E, n) = E$, $\delta_A(O, m) = E$, $\delta_A(O, n) = O$.
Estados del producto: pares $(E/O,\ b_0/b_1/b_2)$ (6 estados).
Inicial: (E, b_0).
Finales del producto: (E, b_0) y (E, b_1) porque $E \in F_A$ y $b_0, b_1 \in F_{\overline{B}}$.
Abreviación: $E0 = (E, b_0)$, $E1 = (E, b_1)$, $E2 = (E, b_2)$, y análogamente $O0, O1, O2$.
Tabla del producto:

	m	n
$E0$	$O0$	$E1$
$E1$	$O0$	$E2$
$E2$	$O0$	$E2$
$O0$	$E0$	$O1$
$O1$	$E0$	$O2$
$O2$	$E0$	$O2$

VERSIÓN B $\Sigma = \{e, o\}$

Parte A — Conceptos (respuestas breves)

(2–4 líneas por ítem; cada uno vale 3 pts en el examen.)

1. Σ^*: conjunto de todas las cadenas finitas sobre Σ (incluye ε). ε: cadena vacía. Ej.: $eoeeoo \in \Sigma^*$.
2. AFD: $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ (una transición por símbolo); una cadena se acepta si el **único** recorrido termina en un estado final. AFN: $\Delta : Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \to \mathcal{P}(Q)$; se acepta si **existe** al menos un recorrido que termina en final.
3. ε-cierre(S): estados alcanzables desde S usando solo transiciones ε (incluye S). Es necesario porque el autómata puede "moverse gratis" antes/entre lecturas al simular o convertir.
4. En subconjuntos, un estado del AFD es un conjunto $T \subseteq Q$. Se marca como final si $T \cap F \neq \varnothing$.
5. Para complementar con AFD: el autómata debe ser **completo** (transición definida para todo estado y todo símbolo; si falta, se agrega estado sumidero). Luego se invierten finales/no finales.
6. Producto (intersección) de AFD: estados (p, q); inicial (p_0, q_0); final si $p \in F_1$ y $q \in F_2$.
7. Estados no alcanzables no influyen en el lenguaje reconocido desde el inicial; se eliminan para simplificar (y para minimizar correctamente sin bloques "basura").
8. Dos estados son equivalentes si para toda cadena w producen la misma decisión de aceptación; operacionalmente: no existe w que distinga (uno acepte y el otro rechace).
9. Pumping Lemma (regulares): si L es regular, $\exists p \, \forall w \in L$ con $|w| \geq p \, \exists x, y, z$ tal que $w = xyz$, $|xy| \leq p$, $|y| \geq 1$ y $\forall i \geq 0$, $xy^iz \in L$.
10. La condición $|xy| \leq p$ fuerza que y quede dentro de los primeros p símbolos de w (zona donde el AFD debe repetir un estado), limitando dónde "cae" el bombeo.

Parte B — Desarrollo

Pregunta 1 — Clausura aplicada $A \setminus B$ (25 pts)

Datos: $A = \{w : \#e(w) \text{ es par}\}$, $B = \{w : \text{termina en } oo\}$. Se usa $A \setminus B = A \cap \overline{B}$.

(a) AFD para B: "termina en oo"

Estados: b_0 (no tengo sufijo o relevante), b_1 (último fue o), b_2 (últimos dos fueron oo).
Inicial: b_0. Finales: $\{b_2\}$.

δ_B	e	o
b_0	b_0	b_1
b_1	b_0	b_2
b_2	b_0	b_2

(b) Complemento $\overline{B}$

El AFD es completo. Entonces $F_{\overline{B}} = Q_B \setminus F_B = \{b_0, b_1\}$.

(c) Producto $A \cap \overline{B}$

AFD de A (dado): estados E/O, inicial E, finales $\{E\}$ con transiciones: $\delta_A(E, e) = O$, $\delta_A(E, o) = E$, $\delta_A(O, e) = E$, $\delta_A(O, o) = O$.
Estados del producto: pares $(E/O,\ b_0/b_1/b_2)$ (6 estados).
Inicial: (E, b_0).
Finales del producto: (E, b_0) y (E, b_1) porque $E \in F_A$ y $b_0, b_1 \in F_{\overline{B}}$.
Abreviación: $E0 = (E, b_0)$, $E1 = (E, b_1)$, $E2 = (E, b_2)$, y análogamente $O0, O1, O2$.
Tabla del producto:

	e	o
$E0$	$O0$	$E1$
$E1$	$O0$	$E2$
$E2$	$O0$	$E2$
$O0$	$E0$	$O1$
$O1$	$E0$	$O2$
$O2$	$E0$	$O2$

(d) Estados finales del producto
$F = \{E0, E1\}$.

(e) 4 pruebas (2 IN, 2 OUT) con traza breve
IN1: $w = \varepsilon$ (#m=0 par, no termina en nn).
Traza: $E0$ (final).
IN2: $w = mmn$ (#m=2 par, termina en mn).
Traza: $E0 \xrightarrow{m} O0 \xrightarrow{m} E0 \xrightarrow{n} E1$ (final).
OUT1: $w = nn$ (#m=0 par, pero termina en nn).
Traza: $E0 \xrightarrow{n} E1 \xrightarrow{n} E2$ (no final).
OUT2: $w = m$ (#m=1 impar).
Traza: $E0 \xrightarrow{m} O0$ (no final).

Pregunta 2 — ε-AFN → AFD por subconjuntos (25 pts)
Datos: $F = \{s_3, s_6\}$ y $\Delta(s_0, \varepsilon) = \{s_1, s_4\}$.
Rama 1: "comienza con nn" ($s_1 \xrightarrow{n} s_2 \xrightarrow{n} s_3$, luego lazo en s_3 con m/n).
Rama 2: "termina en mm" (máquina de sufijo mm con s_4, s_5, s_6).

(a) ε-cierre inicial
ε-cierre$(\{s_0\}) = \{s_0, s_1, s_4\}$.
Estado inicial del AFD: $T_0 = \{s_0, s_1, s_4\}$.

(b) Tabla de subconjuntos (solo alcanzables)
Nombramos conjuntos alcanzables:

$$T_0 = \{s_0, s_1, s_4\} \quad T_1 = \{s_5\} \quad T_2 = \{s_2, s_4\}$$
$$T_3 = \{s_6\} \quad T_4 = \{s_4\} \quad T_5 = \{s_3, s_4\}$$
$$T_6 = \{s_3, s_5\} \quad T_7 = \{s_3, s_6\}$$

Cálculos clave (idea): $\delta_D(T, a) = \varepsilon\text{-cierre}(\bigcup_{s \in T} \Delta(s, a))$; aquí no hay más ε salvo desde s_0.
Tabla final (alcanzables):

	m	n
T_0	T_1	T_2
T_1	T_3	T_4
T_2	T_1	T_5
T_3	T_3	T_4
T_4	T_1	T_4
T_5	T_6	T_5
T_6	T_7	T_5
T_7	T_7	T_5

(c) Estados finales del AFD (criterio)
Final si el conjunto contiene un final del AFN: $T \cap \{s_3, s_6\} \neq \varnothing$.
Por tanto $F_D = \{T_3, T_5, T_6, T_7\}$.

(d) 3 pruebas con traza de conjuntos
1) Entra por "comienza con nn": $w = nn$.
$T_0 \xrightarrow{n} T_2 \xrightarrow{n} T_5$ (final).
2) Entra por "termina en mm": $w = nmm$.
$T_0 \xrightarrow{n} T_2 \xrightarrow{m} T_1 \xrightarrow{m} T_3$ (final).
3) Rechazada: $w = nm$ (no comienza con nn ni termina con mm).
$T_0 \xrightarrow{n} T_2 \xrightarrow{m} T_1$ (no final).

Pregunta 3 — Minimización de AFD (20 pts)
Datos: $F = \{q_0, q_3\}$ y tabla dada.

(a) Alcanzables desde q_0
Desde q_0: con $m \to q_1$, con $n \to q_2$.
Desde q_1: se llega a q_0 y q_3. Desde q_2: se llega a q_4, q_5.
Así, alcanzables: $\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\}$. q_6 no alcanzable.

(b) Partición inicial

$$P_0 = \{\{q_0, q_3\},\ \{q_1, q_2, q_4, q_5\}\}.$$

(c) Refinamiento 1 (separar dentro de finales)
Comparar firmas respecto a P_0:

$$q_0 : (m \to q_1 \in N,\ n \to q_2 \in N) = (N, N)$$

$$q_3 : (m \to q_0 \in F,\ n \to q_3 \in F) = (F, F)$$

Luego se separan:

$$P_1 = \{\{q_0\}, \{q_3\}, \{q_1, q_2, q_4, q_5\}\}.$$

(d) Estados finales del producto
$F = \{E0, E1\}$.

(e) 4 pruebas (2 IN, 2 OUT) con traza breve
IN1: $w = \varepsilon$ (#e=0 par, no termina en oo).
Traza: $E0$ (final).
IN2: $w = eeo$ (#e=2 par, termina en eo).
Traza: $E0 \xrightarrow{e} O0 \xrightarrow{e} E0 \xrightarrow{o} E1$ (final).
OUT1: $w = oo$ (#e=0 par, pero termina en oo).
Traza: $E0 \xrightarrow{o} E1 \xrightarrow{o} E2$ (no final).
OUT2: $w = e$ (#e=1 impar).
Traza: $E0 \xrightarrow{e} O0$ (no final).

Pregunta 2 — ε-AFN → AFD por subconjuntos (25 pts)
Datos: $F = \{s_3, s_6\}$ y $\Delta(s_0, \varepsilon) = \{s_1, s_4\}$.
Rama 1: "comienza con oo" ($s_1 \xrightarrow{o} s_2 \xrightarrow{o} s_3$, luego lazo en s_3 con e/o).
Rama 2: "termina en ee" (máquina de sufijo ee con s_4, s_5, s_6).

(a) ε-cierre inicial
ε-cierre$(\{s_0\}) = \{s_0, s_1, s_4\}$.
Estado inicial del AFD: $T_0 = \{s_0, s_1, s_4\}$.

(b) Tabla de subconjuntos (solo alcanzables)
Nombramos conjuntos alcanzables:

$$T_0 = \{s_0, s_1, s_4\} \quad T_1 = \{s_5\} \quad T_2 = \{s_2, s_4\}$$
$$T_3 = \{s_6\} \quad T_4 = \{s_4\} \quad T_5 = \{s_3, s_4\}$$
$$T_6 = \{s_3, s_5\} \quad T_7 = \{s_3, s_6\}$$

Cálculos clave (idea): $\delta_D(T, a) = \varepsilon\text{-cierre}(\bigcup_{s \in T} \Delta(s, a))$; aquí no hay más ε salvo desde s_0.
Tabla final (alcanzables):

	e	o
T_0	T_1	T_2
T_1	T_3	T_4
T_2	T_1	T_5
T_3	T_3	T_4
T_4	T_1	T_4
T_5	T_6	T_5
T_6	T_7	T_5
T_7	T_7	T_5

(c) Estados finales del AFD (criterio)
Final si el conjunto contiene un final del AFN: $T \cap \{s_3, s_6\} \neq \varnothing$.
Por tanto $F_D = \{T_3, T_5, T_6, T_7\}$.

(d) 3 pruebas con traza de conjuntos
1) Entra por "comienza con oo": $w = oo$.
$T_0 \xrightarrow{o} T_2 \xrightarrow{o} T_5$ (final).
2) Entra por "termina en ee": $w = oee$.
$T_0 \xrightarrow{o} T_2 \xrightarrow{e} T_1 \xrightarrow{e} T_3$ (final).
3) Rechazada: $w = oe$ (no comienza con oo ni termina con ee).
$T_0 \xrightarrow{o} T_2 \xrightarrow{e} T_1$ (no final).

Pregunta 3 — Minimización de AFD (20 pts)
Datos: $F = \{q_0, q_3\}$ y tabla dada.

(a) Alcanzables desde q_0
Desde q_0: con $e \to q_1$, con $o \to q_2$.
Desde q_1: se llega a q_0 y q_3. Desde q_2: se llega a q_4, q_5.
Así, alcanzables: $\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\}$. q_6 no alcanzable.

(b) Partición inicial

$$P_0 = \{\{q_0, q_3\},\ \{q_1, q_2, q_4, q_5\}\}.$$

(c) Refinamiento 1 (separar dentro de finales)
Comparar firmas respecto a P_0:

$$q_0 : (e \to q_1 \in N,\ o \to q_2 \in N) = (N, N)$$

$$q_3 : (e \to q_0 \in F,\ o \to q_3 \in F) = (F, F)$$

Luego se separan:

$$P_1 = \{\{q_0\}, \{q_3\}, \{q_1, q_2, q_4, q_5\}\}.$$

(d) Refinamiento 2 (separar no-finales)
En el bloque $N = \{q_1, q_2, q_4, q_5\}$, firmas hacia P_1:

$$q_1 : (m \to q_0 \in \{q_0\},\ n \to q_3 \in \{q_3\}) \Rightarrow (\{q_0\}, \{q_3\})$$

$$q_2 : (m \to q_4 \in N,\ n \to q_5 \in N) \Rightarrow (N, N)$$
$$q_4 : (m \to q_4 \in N,\ n \to q_5 \in N) \Rightarrow (N, N)$$
$$q_5 : (m \to q_4 \in N,\ n \to q_5 \in N) \Rightarrow (N, N)$$

Así, q_1 se separa y $\{q_2, q_4, q_5\}$ queda junto:

$$P_2 = \big\{\{q_0\}, \{q_3\}, \{q_1\}, \{q_2, q_4, q_5\}\big\}$$

y ya es estable.

(e) AFD mínimo (bloques)
Definir: $A = [q_0]$ (inicial, final), $B = [q_3]$ (final), $C = [q_1]$, $D = [q_2, q_4, q_5]$.
Transiciones (tomando un representante por bloque):

	m	n
A	C	D
B	A	B
C	A	B
D	D	D

(d) Refinamiento 2 (separar no-finales)
En el bloque $N = \{q_1, q_2, q_4, q_5\}$, firmas hacia P_1:

$$q_1 : (e \to q_0 \in \{q_0\},\ o \to q_3 \in \{q_3\}) \Rightarrow (\{q_0\}, \{q_3\})$$

$$q_2 : (e \to q_4 \in N,\ o \to q_5 \in N) \Rightarrow (N, N)$$
$$q_4 : (e \to q_4 \in N,\ o \to q_5 \in N) \Rightarrow (N, N)$$
$$q_5 : (e \to q_4 \in N,\ o \to q_5 \in N) \Rightarrow (N, N)$$

Así, q_1 se separa y $\{q_2, q_4, q_5\}$ queda junto:

$$P_2 = \big\{\{q_0\}, \{q_3\}, \{q_1\}, \{q_2, q_4, q_5\}\big\}$$

y ya es estable.

(e) AFD mínimo (bloques)
Definir: $A = [q_0]$ (inicial, final), $B = [q_3]$ (final), $C = [q_1]$, $D = [q_2, q_4, q_5]$.
Transiciones (tomando un representante por bloque):

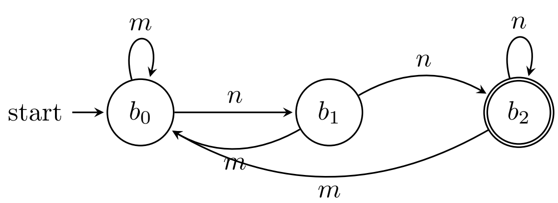
	e	o
A	C	D
B	A	B
C	A	B
D	D	D

Anexo — Representaciones gráficas de autómatas (referencia)

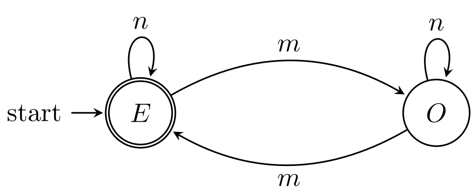
Nota: Los diagramas son una referencia visual del resultado esperado (coherencia sobre prolijidad).

VERSIÓN A $\Sigma = \{m, n\}$

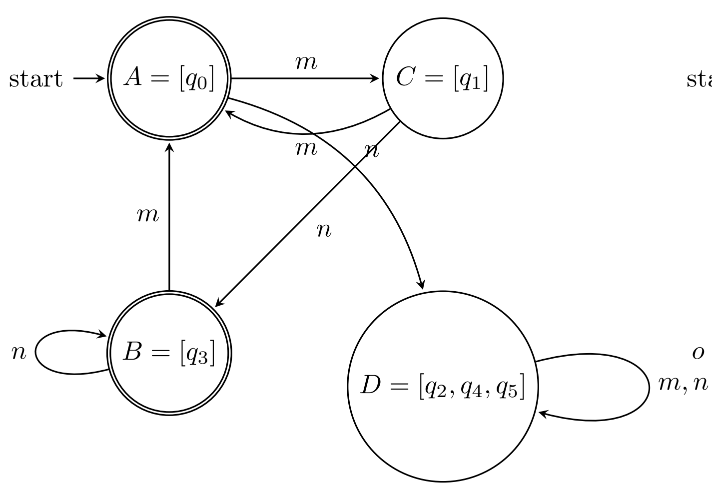
1) AFD para B: "termina en nn"



2) AFD dado para A: "$\#m(w)$ es par"

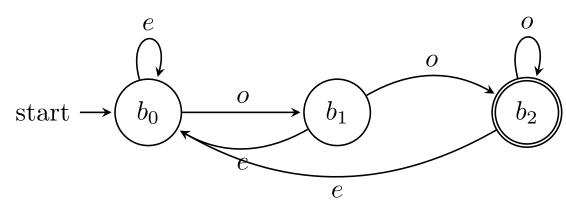


3) AFD mínimo (Pregunta 3) — bloques

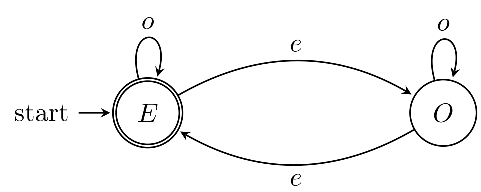


VERSIÓN B $\Sigma = \{e, o\}$

1) AFD para B: "termina en oo"



2) AFD dado para A: "$\#e(w)$ es par"



3) AFD mínimo (Pregunta 3) — bloques