

# Teoria de Automatas y Lenguajes Formales

Unidad 1 — Sesión 9 (Mar 20-ene-2026): Pumping lemma (regular) — estructura y patrones

Docente: Helder Octavio Fernandez Guzman

- Objetivo: usar el **pumping lemma** como **herramienta de descarte** para probar que un lenguaje **no es regular**.
- Ruta:
  - ① Enunciado y lectura correcta del lema.
  - ② Plantilla de demostracion por contradiccion.
  - ③ Ejemplo guiado + actividad (argumento corto tipo examen).

# Que SI y que NO te da el pumping lemma

Periodo 1/6

Si

Si  $L$  es regular, entonces **existe** un numero  $p$  (pumping length) con una propiedad de bombeo.

No

- No sirve para *probar* que un lenguaje es regular.
- Si una cadena “bombea”, eso **no** implica que  $L$  sea regular.

Uso principal: probar **no regular** por contradiccion.

## Pumping lemma (regulares)

Si  $L$  es regular, entonces existe  $p \geq 1$  tal que toda cadena  $w \in L$  con  $|w| \geq p$  puede escribirse como  $w = xyz$  cumpliendo:

- ①  $|xy| \leq p$
- ②  $|y| \geq 1$
- ③  $\forall i \geq 0 : xy^i z \in L$

**Lectura clave:** “para toda  $w$  suficientemente larga, existe una descomposicion  $xyz$  que bombea”.

# Que significa “bombar” aqui?

Periodo 2/6

- Dada una descomposicion  $w = xyz$ , **bombar** significa reemplazar  $y$  por  $y^i$ :

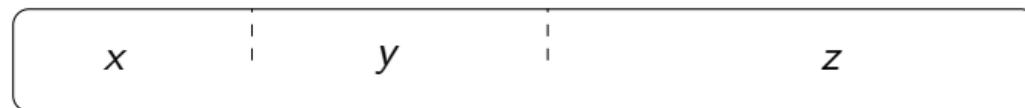
$$w_i = xy^i z, \quad i \geq 0.$$

- **Bombar hacia abajo:**  $i = 0$  (*quitas* el bloque  $y$ ).
- **Bombar hacia arriba:**  $i = 2, 3, \dots$  (*repites* el bloque  $y$ ).
- Intuicion: en un AFD, al leer una cadena larga se repite algun estado (hay un **ciclo**); ese ciclo es lo que se “repite” cuando bombeas.

# Como leer las restricciones (sin confundirse)

Periodo 2/6

- $|xy| \leq p \Rightarrow y$  esta **dentro de los primeros  $p$  simbolos** de  $w$ .
- $|y| \geq 1 \Rightarrow y$  no puede ser  $\epsilon$ .
- $xy^iz \in L$  para todo  $i \geq 0 \Rightarrow$  puedes probar contradiccion eligiendo un  $i$  (comun: 0 o 2).



# Plantilla para probar NO regular (por contradiccion)

Periodo 2/6

- ① Supongamos que  $L$  es regular. Entonces existe  $p$ .
- ② Elegir una cadena  $w \in L$  con  $|w| \geq p$  (diseñada para forzar el argumento).
- ③ Considerar **cualquier** descomposicion  $w = xyz$  con  $|xy| \leq p$  y  $|y| \geq 1$ .
- ④ Usar  $|xy| \leq p$  para describir la forma de  $y$ .
- ⑤ Elegir un  $i$  (0 o 2) tal que  $xy^iz \notin L$ .
- ⑥ Contradiccion  $\Rightarrow L$  no es regular.

# Checklist rapido (argumento corto tipo examen)

Periodo 3/6

- Elegi  $w$  en funcion de  $p$  y explique por que  $w \in L$ .
- Para **toda** descomposicion valida, describi  $y$  (usando  $|xy| \leq p$ ).
- Bombee con  $i = 0$  o  $i = 2$  y mostre por que sale de  $L$ .
- Cierre: “contradiccion, luego  $L$  no es regular”.

# Actividad guiada (caso de practica): $L = \{0^n1^n : n \geq 0\}$

Periodo 3/6

- $\Sigma = \{0, 1\}$ .
- Intuicion: requiere “contar” la misma cantidad de 0s y 1s.
- Objetivo: escribir una demostracion corta usando la plantilla.

## Paso 1-2: elegir $w$ segun $p$

Periodo 4/6

- Supongamos  $L$  regular  $\Rightarrow$  existe  $p$ .
- Elegimos:

$$w = 0^p 1^p.$$

- Se cumple:  $w \in L$  y  $|w| = 2p \geq p$ .

## Paso 3–4: forma de $y$

Periodo 4/6

- Sea  $w = xyz$  con  $|xy| \leq p$  y  $|y| \geq 1$ .
- Como los **primeros  $p$  simbolos** de  $w$  son 0s, entonces:

$$y = 0^k \quad \text{con } k \geq 1.$$

Idea: bombear  $y$  cambia la cantidad de 0s pero deja igual la de 1s.

## Paso 5–6: bombear y contradiccion

Periodo 4/6

- Tomemos  $i = 0$ :

$$xy^0z = xz = 0^{p-k}1^p.$$

- En  $xz$  hay menos 0s que 1s, por tanto  $xz \notin L$ .
- Contradiccion con el lema  $\Rightarrow L$  no es regular.

## Segundo ejemplo (muy corto): palindromos en $\{0, 1\}^*$

Periodo 5/6

- $L_{pal}$  = cadenas que se leen igual al derecho y al revés.
- Elección típica:  $w = 0^p 1 0^p$  (palíndromo).
- Con  $|xy| \leq p$ ,  $y$  cae dentro del bloque inicial de 0s.
- Bombeo rompe la simetría  $\Rightarrow$  sale de  $L_{pal}$ .

Nota: este ejemplo se usa como referencia de “patrón”; el argumento completo se ejercita en la actividad.

# Errores tipicos (para evitarlos)

Periodo 5/6

- Escoger  $w$  que no depende de  $p$  (no fuerza el argumento).
- Elegir una descomposicion especifica (debes cubrir **cualquier**  $xyz$  valido).
- Olvidar usar  $|xy| \leq p$  para acotar donde cae  $y$ .
- Concluir “bombea”  $\Rightarrow$  “es regular” (incorrecto).

## Tu reto (en pares)

Completa el argumento para  $L = \{0^n 1^n : n \geq 0\}$  usando 6 líneas (plantilla).

- Producto esperado: un texto corto y consistente (no importa el estilo, si la lógica está bien).
- Extra (si terminas): decide si el pumping lemma puede demostrar que “termina en 01” es regular.

# Cierre: que entra al parcial (en este tema)

Periodo 6/6

- Capacidad evaluable: reconocer cuando un lenguaje **no** es regular y justificarlo con un argumento guiado.
- En examen: se espera una demostracion breve, no una pagina.
- Si dudas: vuelve a la plantilla (supongo regular, elijo  $w$ , analizo y, bombeo, contradiccion).