Teoria de Automatas y Lenguajes Formales

Unidad 1 — Sesion 9 (Mar 20-ene-2026): Pumping lemma (regular) — estructura, intuicion y patrones

Docente: Helder Octavio Fernandez Guzman

Sesion 9: ruta del dia

Periodo 1/6

- Objetivo: usar el **pumping lemma** como **herramienta de descarte** para justificar que un lenguaje **no es regular**.
- Ruta:
  1. Enunciado y lectura correcta del lema.
  2. Vocabulario y restricciones (sin confundirse).
  3. Intuicion visual (ciclos en AFD) + ejemplo regular ilustrativo.
  4. Ejemplo guiado (no regular) + actividad.

Que SI y que NO te da el pumping lemma

Periodo 1/6

Si

Si L es regular, entonces **existe** un numero p (pumping length / longitud de bombeo) con una propiedad de bombeo.

No

- No sirve para *probar* que un lenguaje es regular.
- Si una cadena "bombea", eso **no** implica que L sea regular.

Uso principal: probar **no regular** por contradiccion.

Enunciado (version operativa)

Periodo 2/6

Pumping lemma (regulares)

Si L es regular, entonces existe $p \geq 1$ tal que toda cadena $w \in L$ con $|w| \geq p$ puede escribirse como $w = xyz$ cumpliendo:

1. $|xy| \leq p$
2. $|y| \geq 1$
3. $\forall i \geq 0 : \; xy^iz \in L$

Lectura clave: "si L fuera regular, siempre se puede encontrar un bloque y (al inicio de w) que se puede repetir o quitar sin salir de L".

Vocabulario y notacion (S9)

Periodo 2/6

Termino / simbolo	**Significado (lectura natural)**
p (pumping length / longitud de bombeo)	Numero que "acota" el prefijo donde cae y si L fuera regular.
$w \in L$, $\|w\| \geq p$	Cadena elegida (en funcion de p) para forzar el argumento.
$w = xyz$	Descomposicion de w en tres partes: prefijo x, bloque y, sufijo z.
$\|xy\| \leq p$	El bloque y esta **dentro de los primeros** p **simbolos** de w.
$\|y\| \geq 1$	y no puede ser vacio (ϵ).
Bombear (xy^iz)	Repetir o quitar el bloque y variando $i \geq 0$.
Bombear abajo / arriba	$i = 0$ (quitar y) / $i \geq 2$ (repetir y).
Contradiccion	Suponer "regular" y producir algun i que hace $xy^iz \notin L$.

Que significa "bombear" aqui?

Periodo 2/6

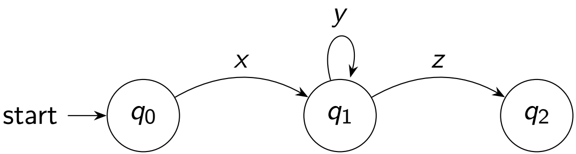
- Dada una descomposicion $w = xyz$, **bombear** significa reemplazar y por y^i:

$$w_i = xy^i z, \qquad i \geq 0.$$

- **Bombear hacia abajo:** $i = 0$ (*quitas* el bloque y).
- **Bombear hacia arriba:** $i = 2, 3, \ldots$ (*repites* el bloque y).
- Intuicion: en un AFD, al leer una cadena larga se repite algun estado (hay un **ciclo**); ese ciclo es lo que se "repite" cuando bombeas.

Intuicion visual: en un AFD aparece un ciclo (bloque repetible)

Periodo 2/6

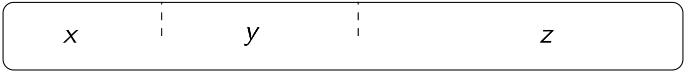


Lectura: al procesar una cadena larga, el AFD puede repetir un estado. Ese "recorrido que vuelve" es el bloque y que puede repetirse (y^i).

Como leer las restricciones (sin confundirse)

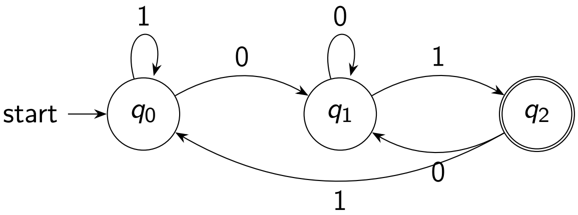
Periodo 2/6

- $|xy| \leq p \Rightarrow y$ esta **dentro de los primeros** p **simbolos** de w.
- $|y| \geq 1 \Rightarrow y$ no puede ser ϵ.
- $xy^iz \in L$ para todo $i \geq 0 \Rightarrow$ para contradiccion eliges un i (comun: 0 o 2).



Ejemplo regular ilustrativo: $L = \{w \in \{0,1\}^* : w \text{ termina en } 01\}$

Periodo 3/6



Cadenas IN (acepta):

- 01
- 101
- 00001

Cadenas NOT IN (rechaza):

- ϵ
- 0
- 10
- 111

Este ejemplo sirve para ver "ciclos" en AFD y practicar lectura/validacion con cadenas.

Plantilla para probar NO regular (por contradiccion)

Periodo 3/6

1. Supongamos que L es regular. Entonces existe p.
2. Elegir una cadena $w \in L$ con $|w| \geq p$ (diseñada para forzar el argumento).
3. Considerar **cualquier** descomposicion $w = xyz$ con $|xy| \leq p$ y $|y| \geq 1$.
4. Usar $|xy| \leq p$ para describir la forma de y.
5. Elegir un i (0 o 2) tal que $xy^iz \notin L$.
6. Contradiccion $\Rightarrow$ L no es regular.

Periodo 3/6

- Elegi w en funcion de p y explique por que $w \in L$.
- Para **toda** descomposicion valida, describi y (usando $|xy| \leq p$).
- Bombee con $i = 0$ o $i = 2$ y mostre por que sale de L.
- Cierre: "contradiccion, luego L no es regular".

Actividad guiada: $L = \{0^n 1^n : n \geq 0\}$

Periodo 3/6

- $\Sigma = \{0, 1\}$.
- Intuicion: requiere "contar" la misma cantidad de 0s y 1s.
- Objetivo: escribir una demostracion corta usando la plantilla.

Paso 1–2: elegir w segun p

Periodo 4/6

- Supongamos L regular $\Rightarrow$ existe p.
- Elegimos:

$$w = 0^p 1^p.$$

- Se cumple: $w \in L$ y $|w| = 2p \geq p$.

Paso 3–4: forma de y

Periodo 4/6

- Sea $w = xyz$ con $|xy| \leq p$ y $|y| \geq 1$.
- Como los **primeros** p **simbolos** de w son 0s, entonces:

$$y = 0^k \quad \text{con } k \geq 1.$$

Idea: bombear y cambia la cantidad de 0s pero deja igual la de 1s.

Paso 5–6: bombear y contradiccion

Periodo 4/6

- Tomemos $i = 0$:
$$xy^0z = xz = 0^{p-k}1^p.$$
- En xz hay menos 0s que 1s, por tanto $xz \notin L$.
- Contradiccion con el lema $\Rightarrow$ L **no es regular**.

Segundo ejemplo guiado: palindromos en $\{0,1\}^*$

Periodo 5/6

- $L_{pal} =$ cadenas que se leen igual al derecho y al reves.
- Intuicion: comparar "primera mitad" con "segunda mitad" requiere memoria no finita.
- Usaremos pumping para producir una cadena bombeada que rompe la simetria.

Palindromos: elegir w segun p

Periodo 5/6

- Supongamos L_{pal} regular $\Rightarrow$ existe p.
- Elegimos un palindromo:

$$w = 0^p\,1\,0^p.$$

- Se cumple: $w \in L_{pal}$ y $|w| = 2p + 1 \geq p$.

0^p	1	0^p

Palindromos: forma de y y bombeo

- Sea $w = xyz$ con $|xy| \leq p$ y $|y| \geq 1$.
- Como los primeros p simbolos de w son 0s, $y = 0^k$ con $k \geq 1$.
- Bombeamos con $i = 0$: $xy^0z = xz$ elimina k ceros **solo** del lado izquierdo.
- Resultado: la cadena ya no es simetrica $\Rightarrow xz \notin L_{pal}$.
- Contradiccion $\Rightarrow L_{pal}$ **no es regular**.

Errores tipicos (para evitarlos)

Periodo 5/6

- Escoger w que no depende de p (no fuerza el argumento).
- Elegir una descomposicion especifica (debes cubrir **cualquier** xyz valido).
- Olvidar usar $|xy| \leq p$ para acotar donde cae y.
- Confundir el objetivo: el pumping lemma se usa como **descarte** para justificar no regularidad.

Actividad en clase (trabajo guiado)

Periodo 6/6

Tu reto

Completa el argumento para $L = \{0^n 1^n : n \geq 0\}$ usando 6 lineas (plantilla).

- Producto esperado: un texto corto y consistente (la logica es lo importante).
- Extra (si terminas): valida el AFD de "termina en 01" con 4 cadenas nuevas.

Cierre: ideas clave del dia

Periodo 6/6

- El pumping lemma se usa como **herramienta de descarte**: si logras contradiccion, L no es regular.
- El corazon del argumento:
  1. suponer regular $\Rightarrow$ existe p,
  2. elegir w en funcion de p,
  3. cubrir cualquier descomposicion valida xyz,
  4. usar $|xy| \leq p$ para ubicar y,
  5. elegir i (0 o 2) y salir de L.
- Visualmente: en AFD hay **ciclos** (bloques repetibles); en no regulares, el bombeo rompe la estructura.