Fundamentos de Grafos

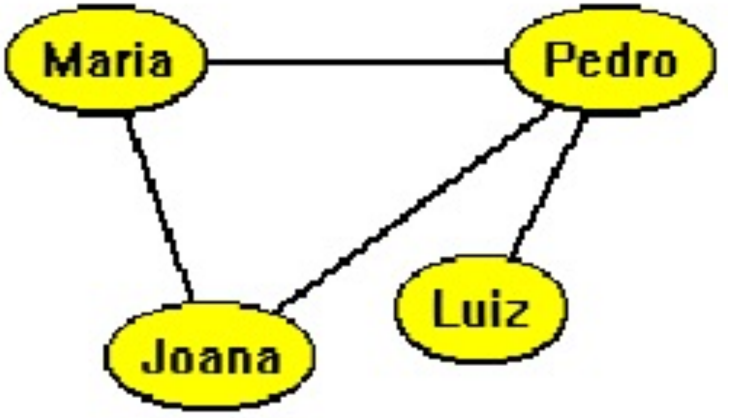
Prof. Martín Vigil
Adaptado de prof. Ricardo Moraes

Definição de Grafo

- Formalmente um grafo é dado por G (V, A), onde:
  - **V** - conjunto não-vazio: **vértices ou nodos**;
  - **A** - conjunto de pares ordenados de elementos distintos de V: **arestas**
    - a=(v,w), onde v e w Є V

O que é um grafo?

- G1
- V = {Maria, Pedro, Joana, Luiz}
- A = {(Maria,Pedro),
  (Joana, Maria),
  (Pedro, Luiz),
  (Joana, Pedro)}



G1

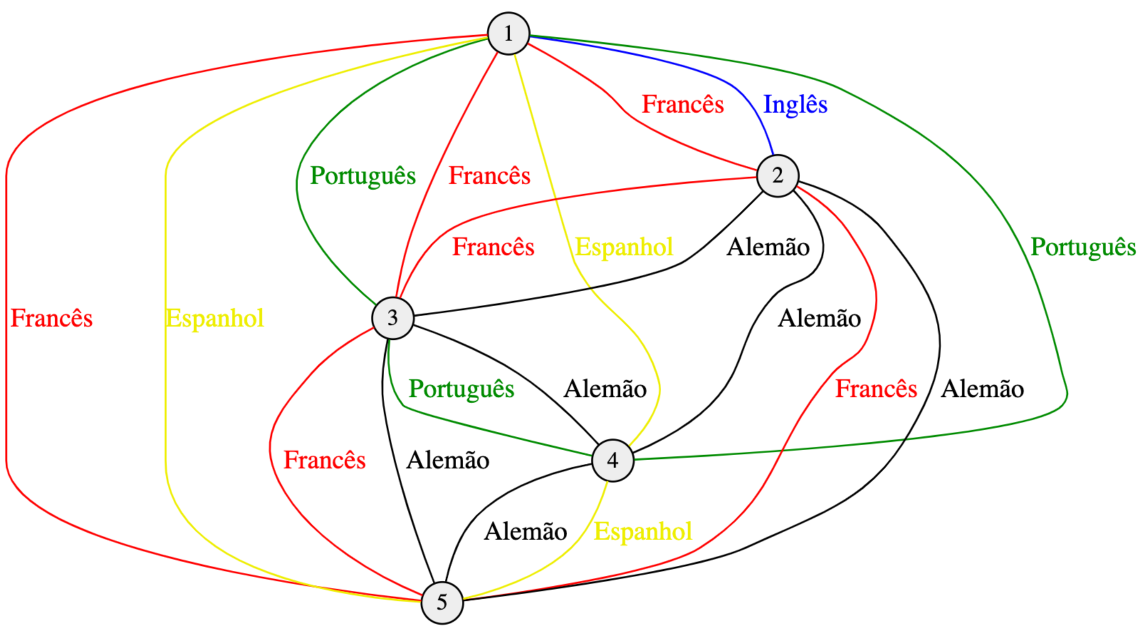
Exercício 02

- Cinco turistas se encontram em um bar de Ararangúá e começam a conversar, cada um falando de cada vez, com um só companheiro da mesa. O conhecimento de línguas dos turistas é mostrado na tabela a seguir.
- **Construa um grafo** que represente todas as possibilidades de cada turista dirigir a palavra a outro, sendo compreendido.

Turista	Inglês	Francês	Português	Alemão	Espanhol
1	X	X	X		X
2	X	X		X	
3		X	X	X	
4			X	X	X
5		X		X	X

Exercício 02

Turista	Inglês	Francês	Português	Alemão	Espanhol
1	X	X	X		X
2	X	X		X	
3		X	X	X	
4			X	X	X
5		X		X	X



Revisão

- O que é um Grafo?
- O que é um Vértice?
- O que é uma Aresta?
- Para que serve um Grafo?

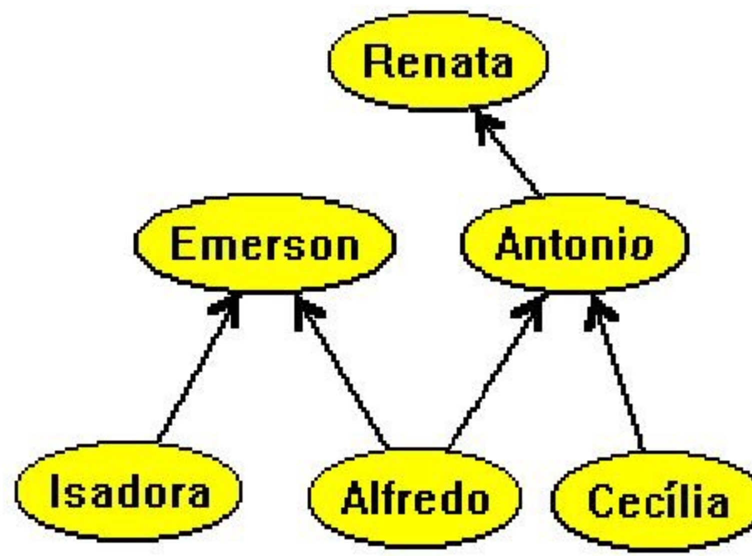
Dígrafo ou Grafo Orientado ou Grafo Dirigido

- Vimos grafos simples: arestas sem orientação
- Dígrafo: arestas têm orientação
- Considere, agora, o grafo definido por:
  - V = {p | p é uma pessoa da família Castro}
  - A = { (v,w) | < v é pai/mãe de w > }

Dígrafo - Exemplo

- V = { Emerson, Isadora, Renata, Antonio, Rosane, Cecília, Alfredo }
- A = {(Isadora, Emerson), (Antonio, Renata), (Alfredo, Emerson), (Cecília, Antonio), (Alfredo, Antonio)}

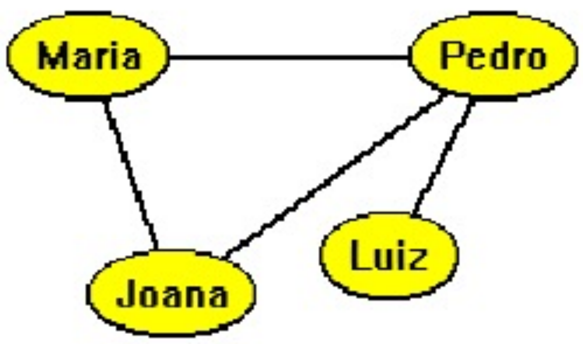
- A relação definida por A não é simétrica pois se <v é pai/mãe de w>, não é o caso de <w é pai/mãe de v>.



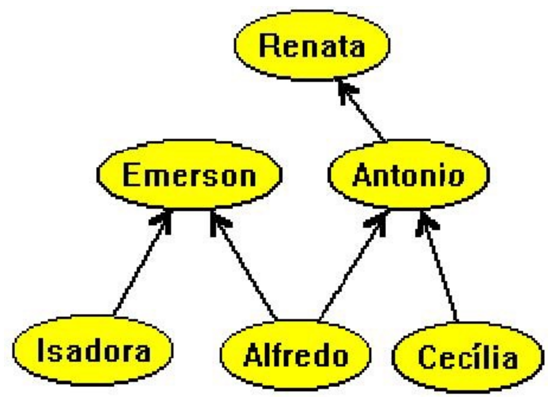
G2

Ordem

- A ordem de um grafo G é dada pela cardinalidade do conjunto de vértices, ou seja, pelo **número de vértices** de G.



G1

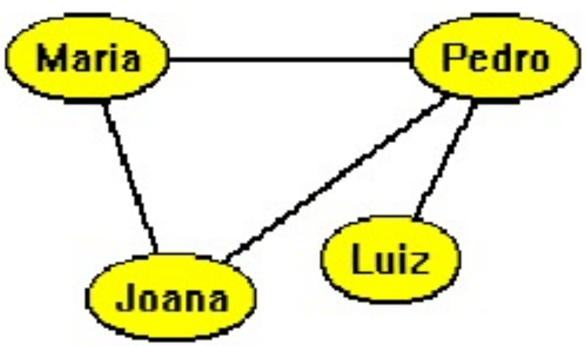


G2

- Ordem(G1)=4 ordem(G2)=6

Adjacência

- Em um **grafo simples** (a exemplo de G1) dois vértices v e w são adjacentes (ou vizinhos) se há uma aresta e=(v,w) em G.
- Esta aresta é dita ser incidente a ambos, v e w.
- É o caso dos vértices Maria e Pedro:



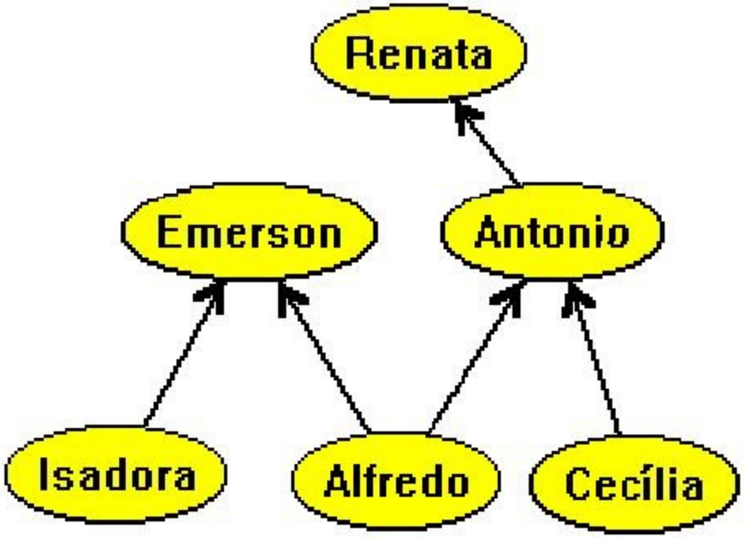
G1

Adjacência

- No caso do grafo ser dirigido, a adjacência (vizinhança) é especializada em:
  - Sucessor: um vértice w é sucessor de v se há um arco que parte de v e chega em w.
  - Antecessor: um vértice v é antecessor de w se há um arco que parte de v e chega em w.

Adjacência

- Emerson e Antonio são sucessores de Alfredo.
- Alfredo e Cecília são antecessores de Antonio.

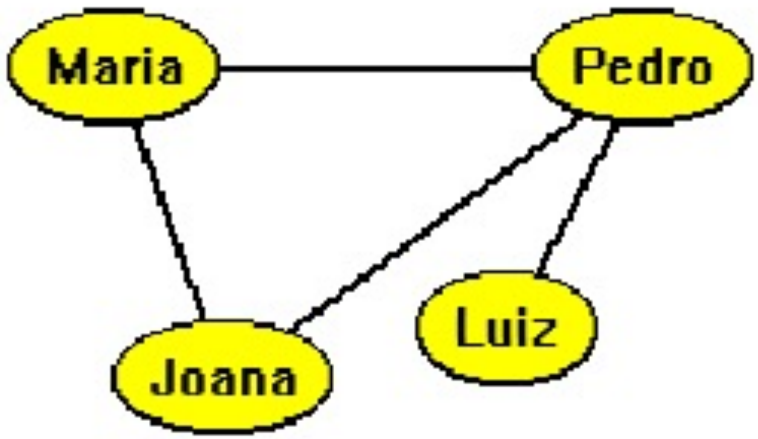


G2

Grau

- O grau de um vértice é dado pelo número de arestas que lhe são incidentes. Por exemplo:

- Grau(Pedro)=3
- Grau(Maria)=2



G1

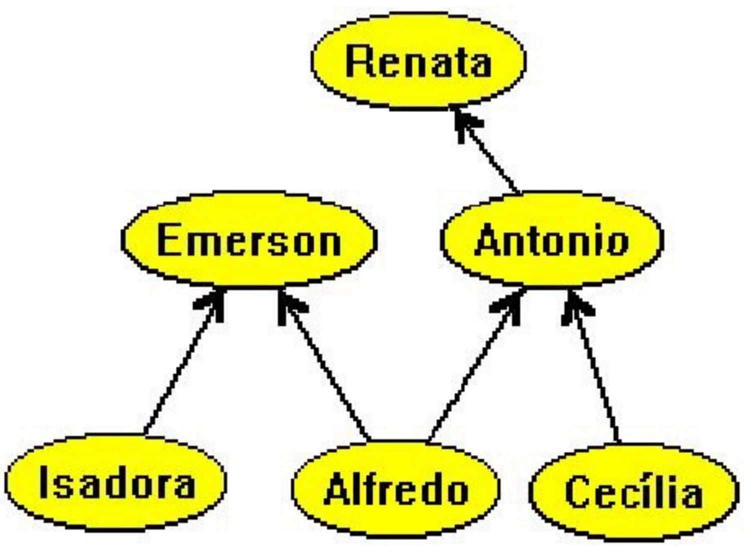
Grau – Grafo Orientado

- **Grau de emissão**: o grau de emissão de um vértice v corresponde ao número de arcos que partem de v.

- **Grau de recepção**: o grau de recepção de um vértice v corresponde ao número de arcos que chegam a v.

Grau – Grafo Orientado

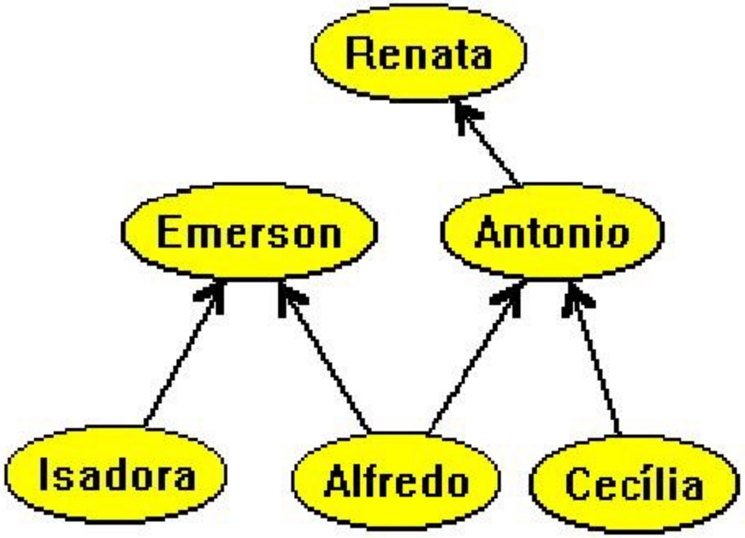
- GrauDeEmissão(Antonio) = 1
- GrauDeEmissao(Alfredo) = 2
- GrauDeEmissao(Renata) = 0



G2

Grau – Grafo Orientado

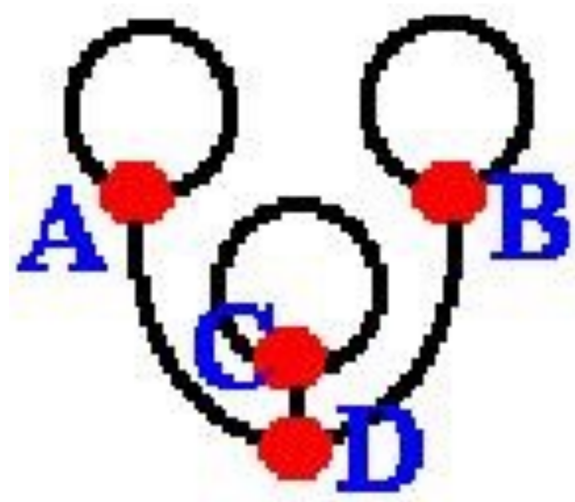
- GrauDeRecepção(Antonio) = 2
- GrauDeRecepção(Alfredo) = 0
- GrauDeRecepção(Renata) = 1



G2

Laço

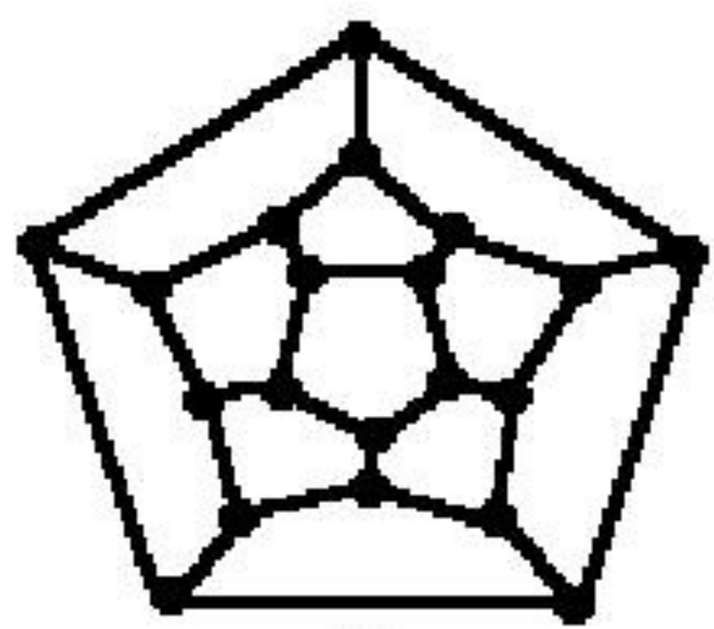
- Um laço é uma aresta ou arco do tipo e=(v,v), ou seja, que relaciona um vértice a ele próprio.
- No exemplo há três ocorrências de laços para um grafo não orientado.



G3

Grafo Regular

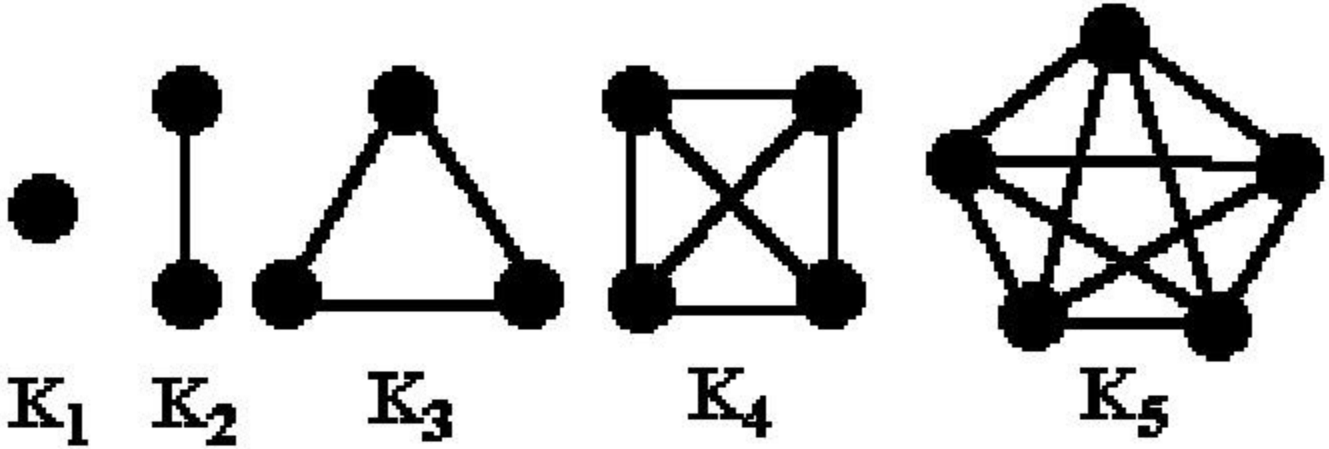
- Um grafo é dito ser regular quando todos os seus vértices tem o mesmo grau.
- O G3, é dito ser um grafo regular-3 pois todos os seus vértices tem grau 3.



G4

Grafo Completo

- Um grafo é dito ser completo quando há uma aresta entre cada par de seus vértices.
- Estes grafos são designados por Kn, onde n é a ordem do grafo.



G4.1

Grafo Bipartido

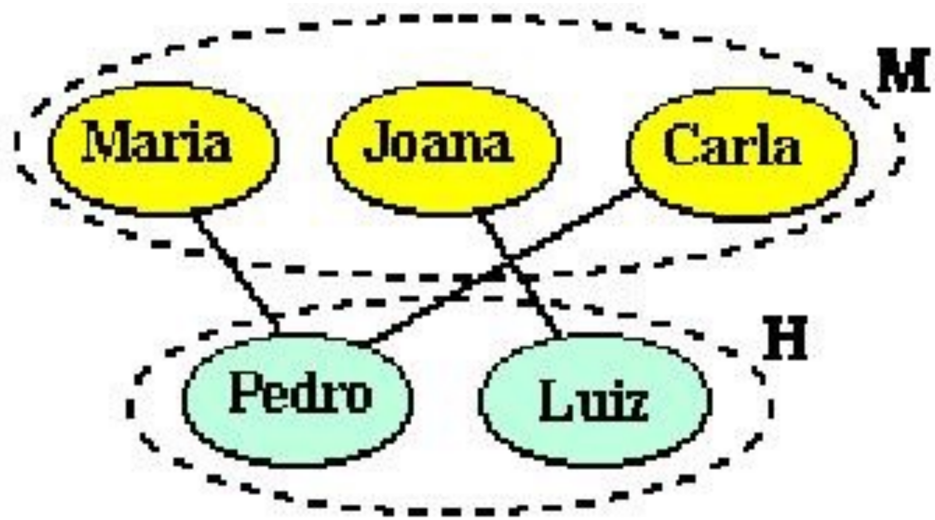
- Um grafo é dito ser bipartido quando seu conjunto de vértices V puder ser particionado em dois subconjuntos V1 e V2, tais que toda aresta de G une um vértice de V1 a outro de V2.
- Exemplo:
  - Sejam os conjuntos
    - H={h | h é um homem} e
    - M={m | h é um mulher}

Grafo Bipartido

- Grafo G(V,A) onde:

V = H U M

A = {(v,w) | (v ∈ H e w ∈ M)
ou (v ∈ M e w ∈ H) e
<v foi namorado de w>}



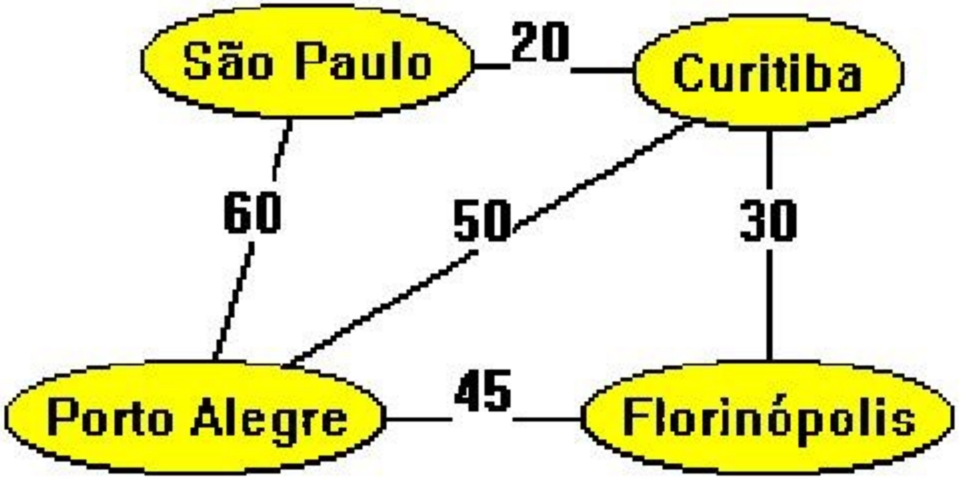
G5

Grafo Valorado ou Ponderado

- Um grafo G(V,A) é dito ser valorado quando existe uma ou mais funções relacionando V e/ou A com um conjunto de números.

Grafo Valorado ou Ponderado

- V = {v | v é uma cidade com aeroporto}
- A = {(v,w,t) | <há linha aérea ligando v a w, sendo t o tempo esperado de voo>}

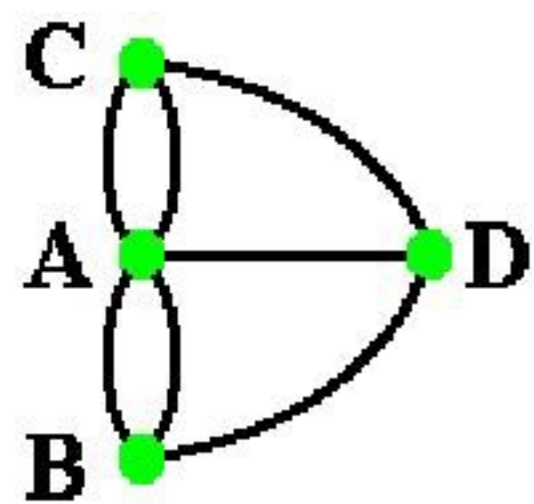


G7

Multigrafo

- Um grafo G(V,A) é dito ser um multigrafo quando existem múltiplas arestas entre pares de vértices de G.

- G8 = há duas arestas entre os vértices A e C e entre os vértices A e B, caracterizando-o como um multigrafo.

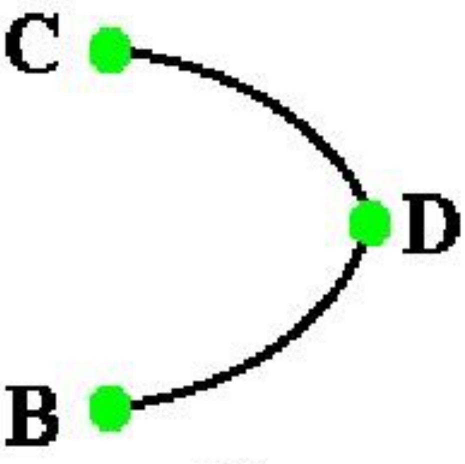


G8

Subgrafo

- Um grafo Gs(Vs, Es) é dito ser subgrafo de um grafo G(V,E) quando Vs⊂V e As ⊂ A.

- O G9 é subrafo de G8.



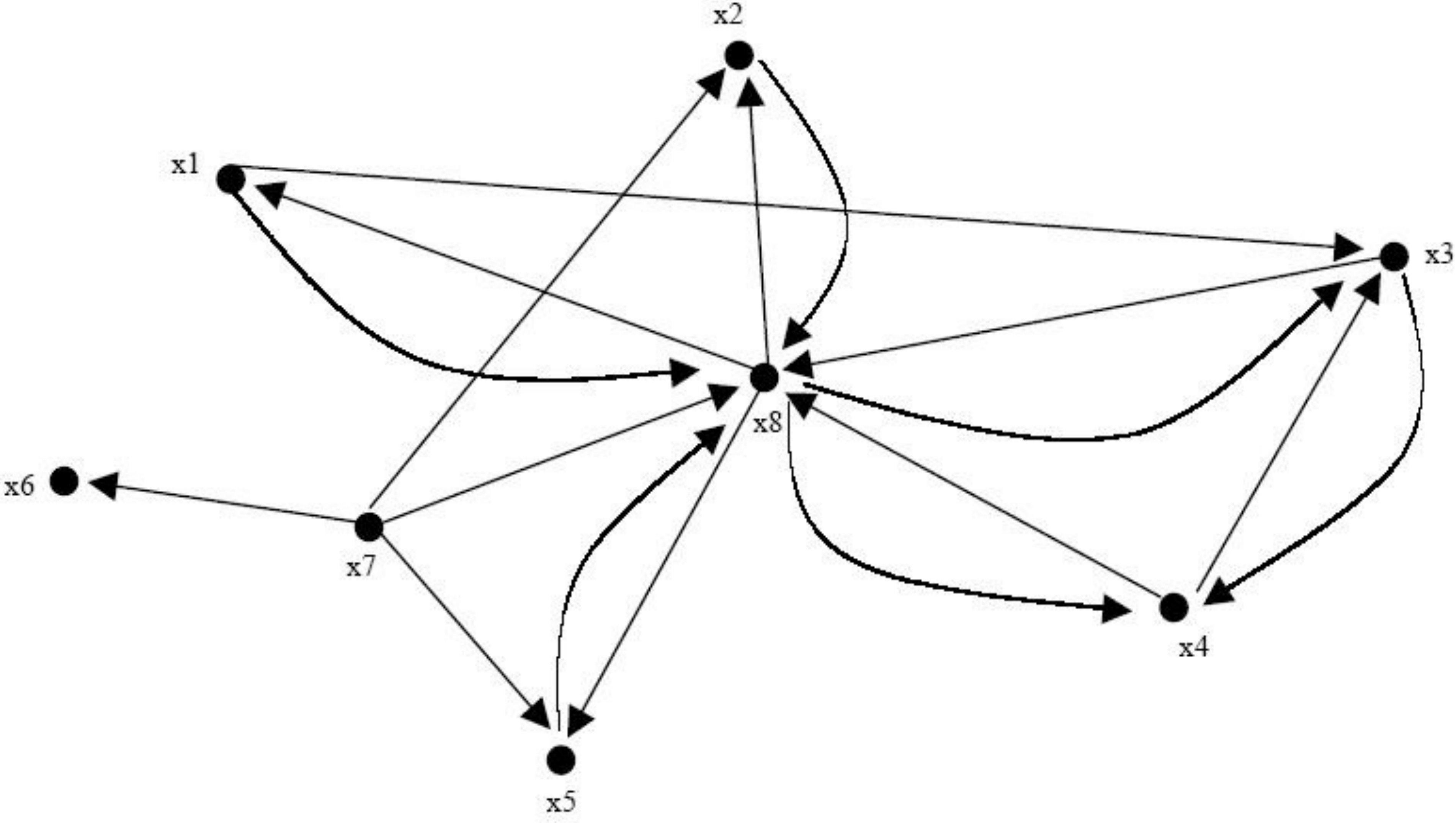
G9

Exercício 03

- O grafo a seguir representa as respostas colhidas em uma turma de crianças de escola na faixa de 7 anos, face à pergunta: “Quais são os colegas de quem você mais gosta?”

- Expresse, usando a notação conveniente, os seguintes fenômenos observáveis no grafo:
  - a) posições de liderança;
  - b) amizades recíprocas;
  - c) criança com problemas de relacionamento;
  - d) criança arredia.

Exercício 03 (cont)



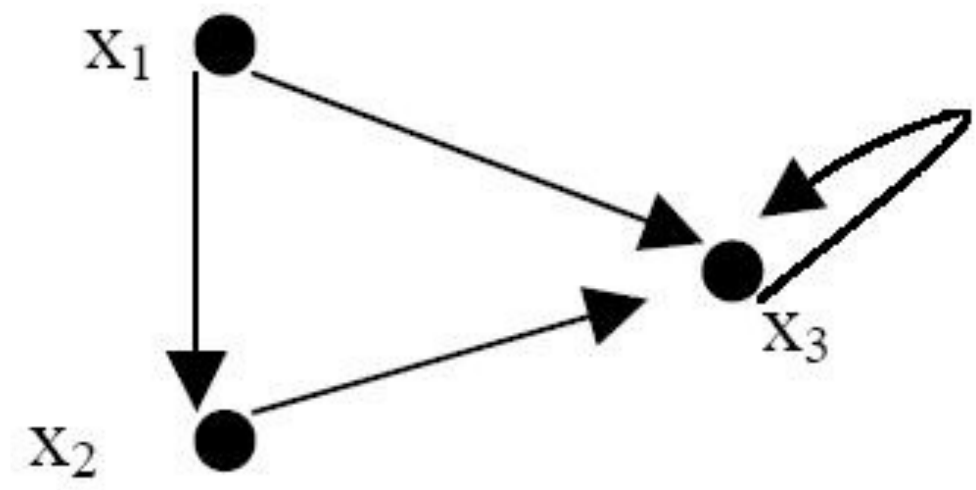
Representação de grafos

- Alternativas
  - Matriz de Adjacência
  - Listas de Adjacência
  - Matriz de Incidência

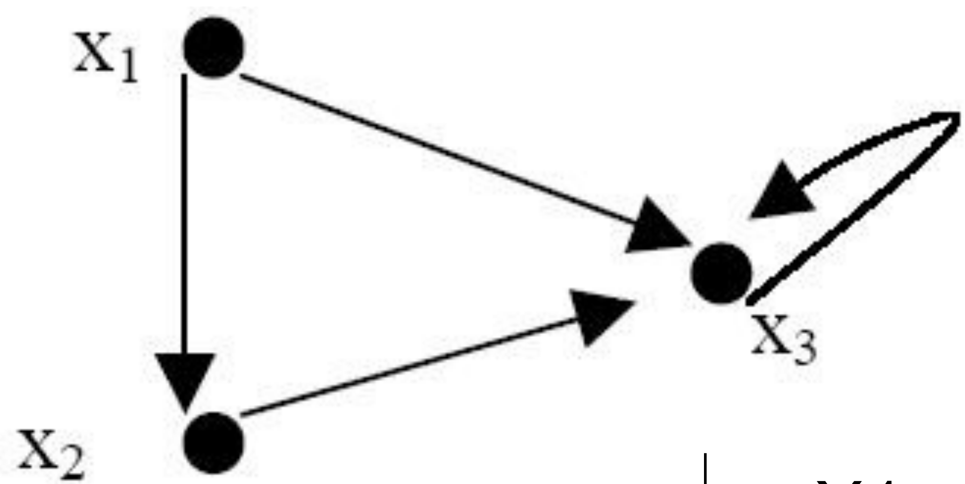
Matriz de Adjacência

- Ou Matriz Quadrada (n X n)
- É a matriz mais comumente usada

$$a_{ij} = 1 \Leftrightarrow \exists\ (x_i, x_j)$$
$$a_{ij} = 0 \Leftrightarrow \nexists\ (x_i, x_j)$$

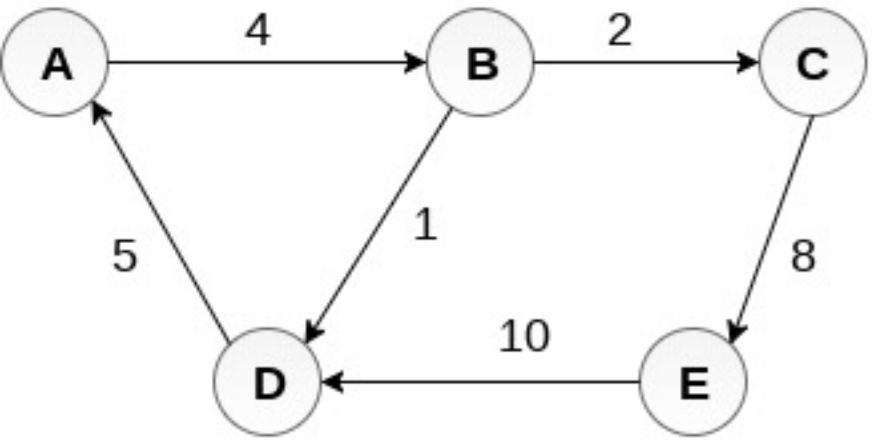


Matriz de Adjacência: exemplo



	X1	X2	X3
X1	0	1	1
X2	0	0	1
X3	0	0	1

Matriz de adjacência: exemplo

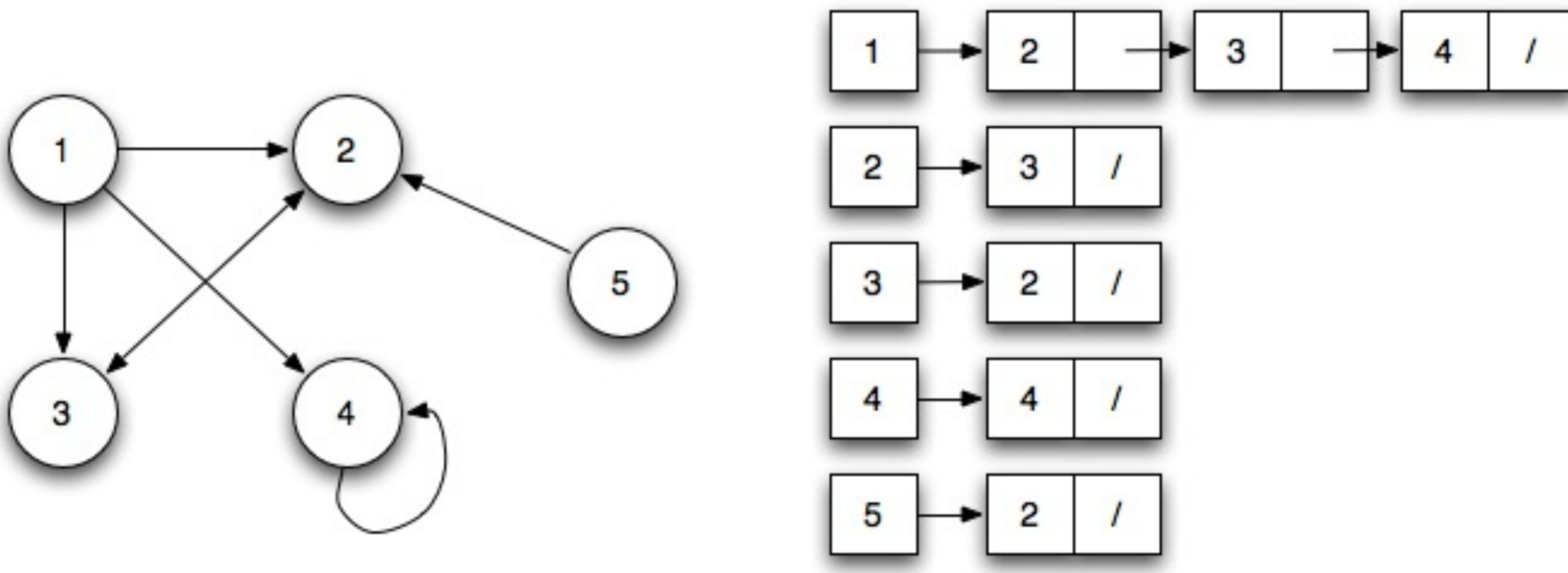


$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

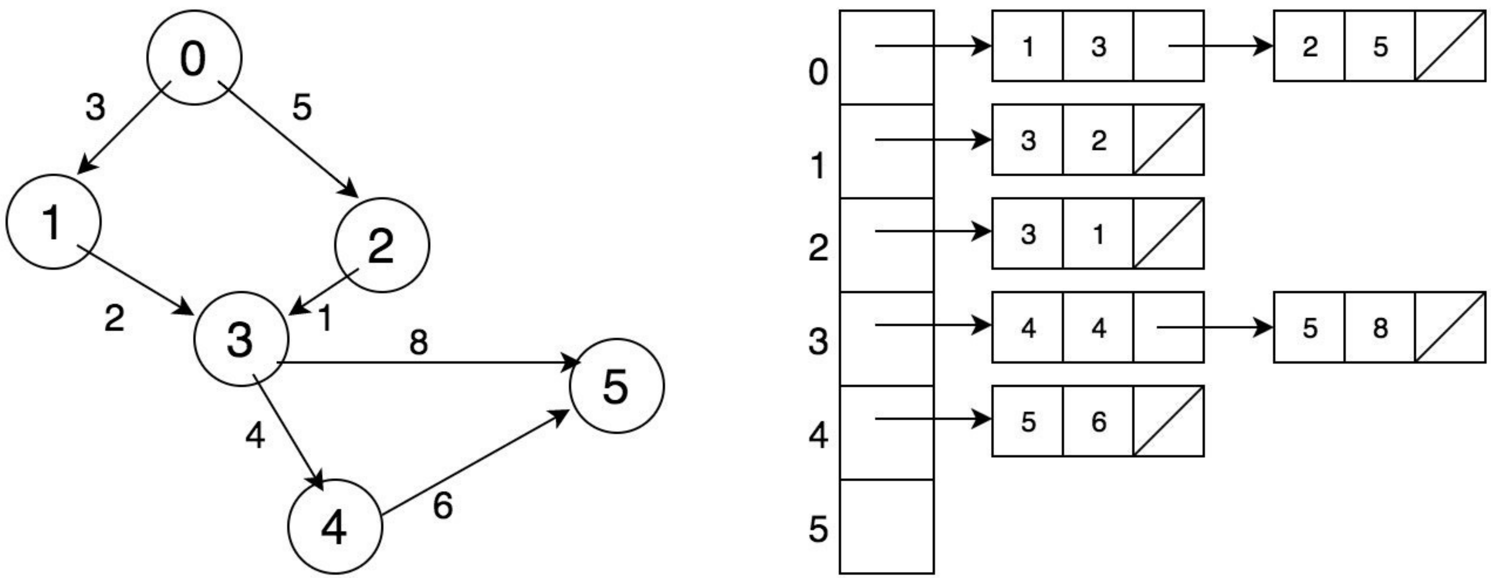
Lista de adjacência

- Adequada para grafos esparsos
- Consiste em um array Adj de |V| listas
- Para cada u ∈ V, Adj[u] é uma lista contendo os vértices adjacentes a u.
- A ordem das listas é arbitrária

Lista de adjacência: exemplo

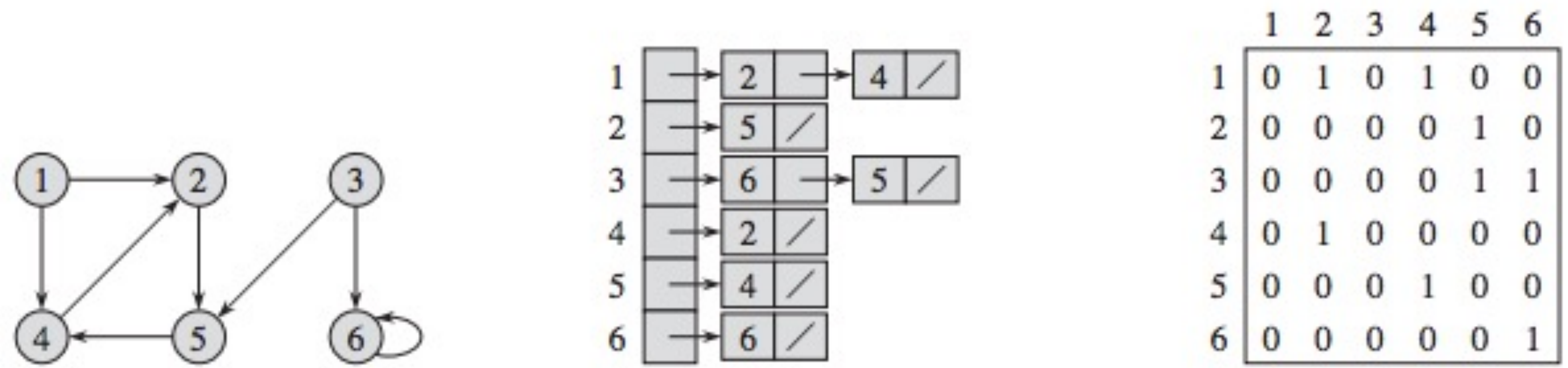


Lista de adjacência: exemplo



www.kodefork.com

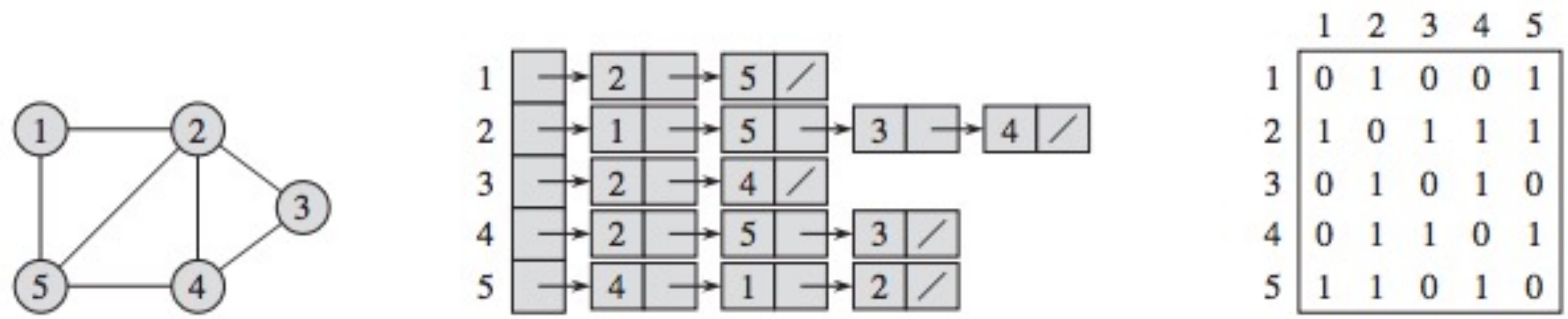
Lista vs. matrix



(a) (b) (c)

Listas são mais eficientes para grafos esparsos

Lista vs. matrix

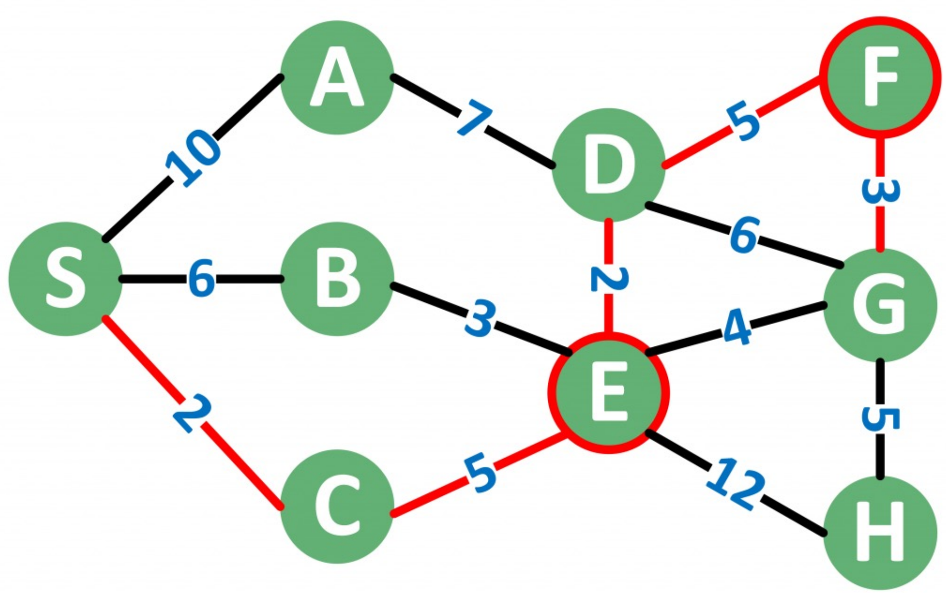


(a) (b) (c)

Matrizes podem ser mais eficientes para grafos não direcionados

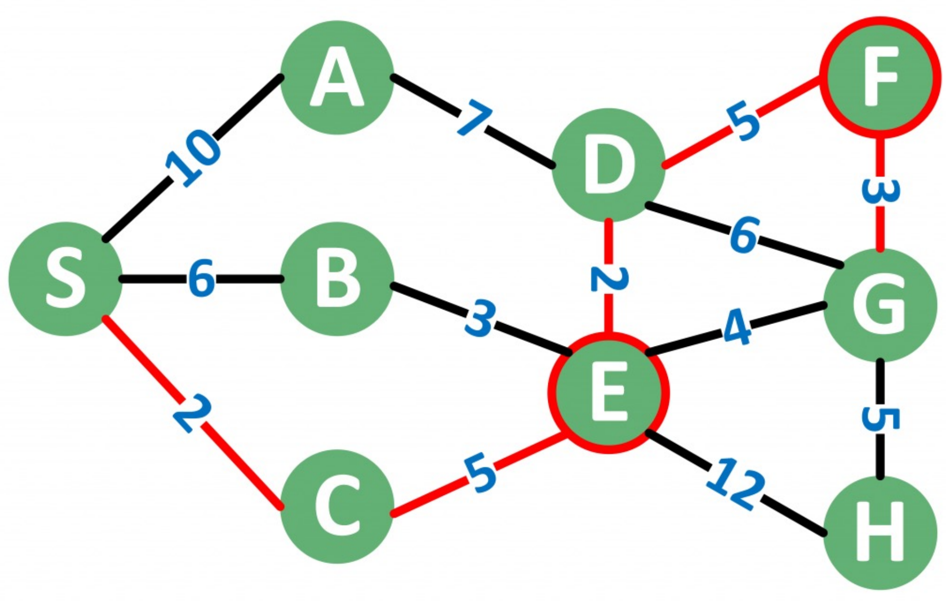
Caminho em um grafo G(V,A)

- O caminho entre vértices x, y ∈ V é uma sequência de vértices *adjacentes* v_1, v_2, ..., v_n ∈ V, onde v_1 = x e v_n = y.



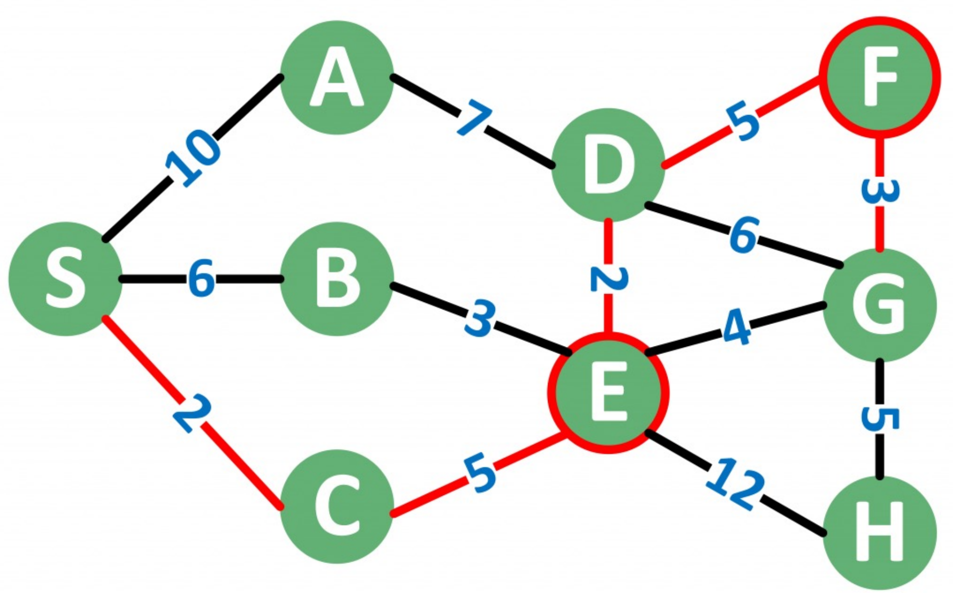
Caminho em um grafo G(V,A)

- Se G ponderado, o peso do caminho é o somatório dos pesos das arestas do caminho



Grafo G(V,A) conexo

- Existe um caminho entre qualquer par de vértices de G



Grafo G(V,A) desconexo

- Pelo menos um par de vértices sem caminho.