MOwNiT

March 21, 2024

1 Laboratorium 03

1.1 Interpolacja

Iga Antonik, Helena Szczepanowska

2 Zadanie 1

Istnieje dokładnie jeden wielomian ósmego stopnia, który interpoluje podane w treści zadania dziewięć punktów, natomiast sam wielomian może być reprezentowany na różne sposoby.

Rozważamy następujące zbiory funkcji bazowych j(t), j = 1,...,9 :

$\varphi j(t) = t^{j-1}$ (1)

$\varphi j(t) = (t - 1900)^{j-1}$ (2)

$\varphi j(t) = (t - 1940)^{j-1}$ (3)

$\varphi j(t) = ((t - 1940)/40)^{j-1}$ (4)

(a) Dla każdego z czterech zbiorów funkcji bazowych utwórz macierz Vander- monde'a.

(b) Oblicz współczynnik uwarunkowania każdej z powyższch macierzy, używa- jąc funkcji numpy.linalg.cond.

(c) Używając najlepiej uwarunkowanej bazy wielomianów, znajdź współczyn- niki wielomianu interpolacyjnego dla danych z zadania. Narysuj wielomian interpolacyjny. W tym celu użyj schematu Hornera i oblicz na przedziale [1900,1990] wartości wielomianu w odstępach jednorocznych. Na wykresie umieść także węzły interpolacji.

(d) Dokonaj ekstrapolacji wielomianu do roku 1990. Porównaj otrzymaną war- tość z prawdziwą wartością dla roku 1990, wynoszącą 248 709 873. Ile wynosi błąd względny ekstrapolacji dla roku 1990?

(e) Wyznacz wielomian interpolacyjny Lagrange'a na podstawie 9 węzłów in- terpolacji podanych w zadaniu. Oblicz wartości wielomianu w odstępach jednorocznych.

(f) Wyznacz wielomian interpolacyjny Newtona na podstawie tych samych wę- złów interpolacji i oblicz wartości wielomianu w odstępach jednorocznych.

(g) Zaokrąglij dane podane w tabeli do jednego miliona. Na podstawie takich danych wyznacz wielomian interpolacyjny ósmego stopnia, używając naj- lepiej uwarunkowanej bazy z podpunktu (c). Porównaj wyznaczone współ- czynniki z współczynnikami obliczonymi w podpunkcie (c). Wyjaśnij otrzy- many wynik.

2.1 Rozwiązanie

2.1.1 Biblioteki

[ ]:
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

Dane:

[ ]:
```
years = np.array([1900, 1910, 1920, 1930, 1940, 1950, 1960, 1970, 1980])
population = np.array([76212168, 92228496, 106021537, 123202624, 132164569,␣
 ↪151325798, 179323175, 203302031, 226542199])

j = np.arange(9)
```

Funkcje bazowe:

[ ]:
```
def phi1(t,i):
    return t ** i

def phi2(t,i):
    return (t - 1900) ** i

def phi3(t,i):
    return (t - 1940) ** i

def phi4(t,i):
    return ((t - 1940) / 40) ** i

T_phi = [phi1,phi2,phi3,phi4]
```

Tworzenie macierzy Vandermonde'a:

[ ]:
```
V1 = np.array([[phi1(t,i) for i in j] for t in years ])
V2 = np.array([[phi2(t,i) for i in j] for t in years ])
V3 = np.array([[phi3(t,i) for i in j] for t in years ])
V4 = np.array([[phi4(t,i) for i in j] for t in years ])

T_V = [V1,V2,V3,V4]
```

Wyliczanie współczynników uwarunkowania:

[ ]:
```
cond_V1 = np.linalg.cond(V1)
cond_V2 = np.linalg.cond(V2)
cond_V3 = np.linalg.cond(V3)
cond_V4 = np.linalg.cond(V4)
```

```python
print("Współczynniki uwarunkowania:")
print("(1) ", cond_V1)
print("(2) ", cond_V2)
print("(3) ", cond_V3)
print("(4) ", cond_V4)
```

```
Współczynniki uwarunkowania:
(1)  4.044398246625838e+26
(2)  6211148482504961.0
(3)  9315536040586.037
(4)  1605.4437004786669
```

Wyznaczenie najmniejszego współczynnika:

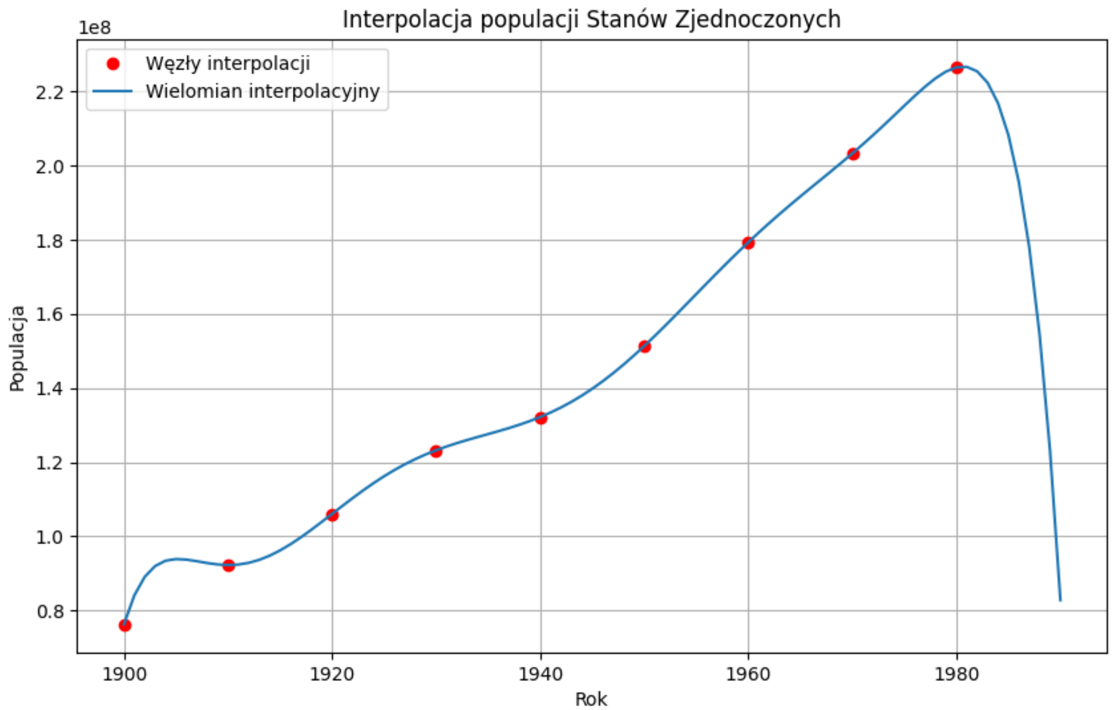
[ ]:
```python
T_cond = [cond_V1,cond_V2,cond_V3,cond_V4]
min_cond = min(T_cond)
```

Wyliczanie wielomianu interpolacyjnego:

[ ]:
```python
best_V = T_V[T_cond.index(min_cond)]
phi = T_phi[T_cond.index(min_cond)]



B = lambda t: np.array([phi(t,i) for i in j]) # B - baza
coefficients = np.linalg.solve(best_V, population.T) # A - współczynniki␣
↪wielomianu interpolacyjnego
p = lambda t: B(t) @ coefficients.T

# Wartości wielomianu na przedziale [1900, 1990] w odstępach jednorocznych
all_years = np.arange(1900, 1991)
interpolated_population = np.array([p(x) for x in all_years])
```

Wykres:

[ ]:
```python
plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.plot(years, population, 'ro', label='Węzły interpolacji')
plt.plot(all_years, interpolated_population, label='Wielomian interpolacyjny')
plt.xlabel('Rok')
plt.ylabel('Populacja')
plt.title('Interpolacja populacji Stanów Zjednoczonych')
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()
```



Wyliczenie ekstrapolacji wielomianu i błędu względnego dla 1990 roku:

[ ]:
```
extrapolated_population = p(1990)
true_value_1990 = 248709873
error = abs(extrapolated_population - true_value_1990) / true_value_1990 * 100

print("Wartość ekstrapolowana dla roku 1990:", extrapolated_population)
print("Prawdziwa wartość dla roku 1990:", true_value_1990)
print("Błąd względny ekstrapolacji dla roku 1990:", error, "%")
```

```
Wartość ekstrapolowana dla roku 1990: 82749140.99999835
Prawdziwa wartość dla roku 1990: 248709873
Błąd względny ekstrapolacji dla roku 1990: 66.72864651416619 %
```

Wyliczenie wielomianu interpolacyjnego Lagrange'a:

$$\ell_j(t) = \frac{\prod_{k=1,k\neq j}^{n}(t - t_k)}{\prod_{k=1,k\neq j}^{n}(t_j - t_k)} \qquad j = 1, \ldots, n$$

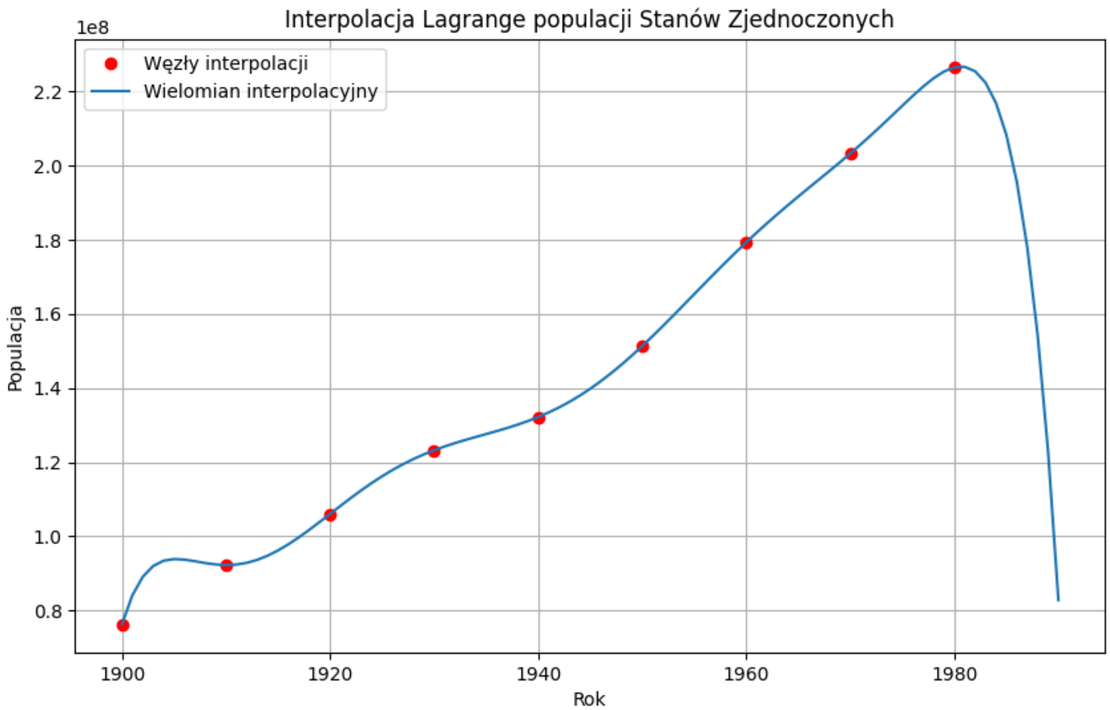
$$\ell_j(t_i) = \begin{cases} 1 & \text{if } i = j \\ 0 & \text{if } i \neq j \end{cases}, \qquad i, j = 1, \ldots, n$$

$$p_{n-1}(t) = y_1\ell_1(t) + y_2\ell_2(t) + \cdots + y_n\ell_n(t)$$

[ ]:
```
l = lambda t, j: np.prod(t-years[years!=years[j]])/np.prod(years[j]-years[years!=years[j]])
p_lagerange = lambda t: np.sum([population[j] * l(t, j) for j in range(9)])
interpolated_population_lagrange = np.array([p_lagerange(t) for t in all_years])
```

Wykres:

[ ]:
```
plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.plot(years, population, 'ro', label='Węzły interpolacji')
plt.plot(all_years, interpolated_population_lagrange, label='Wielomian interpolacyjny')
plt.xlabel('Rok')
plt.ylabel('Populacja')
plt.title('Interpolacja Lagrange populacji Stanów Zjednoczonych')
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()
```



Wyliczenie wielomianu interpolacyjnego Newtona:

$$\pi_j(t) = \prod_{k=1}^{j-1} (t - t_k) \quad j = 1, \ldots, n$$

$$\pi_j(t_i) = 0 \quad \text{for } i < j$$

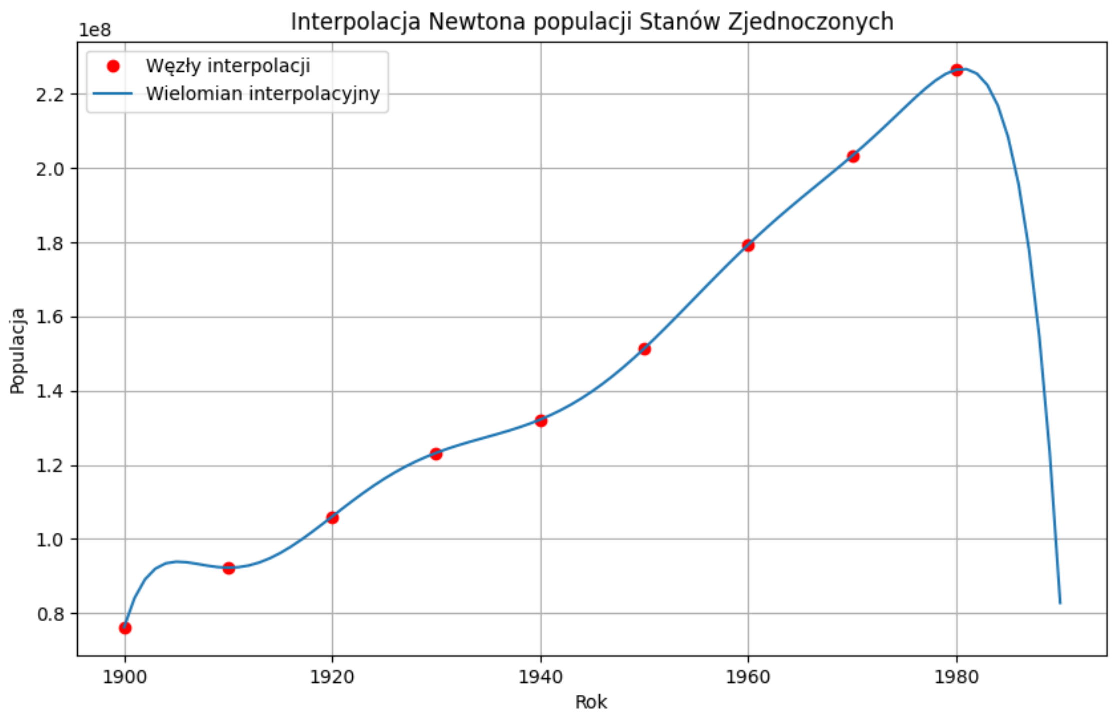
$$\begin{aligned} p_{n-1}(t) =& x_1\pi_1(t) + x_2\pi_2(t) + \cdots + x_n\pi_n(t) \\ =& x_1 + x_2(t - t_1) + x_3(t - t_1)(t - t_2) + \ldots \\ &+ x_n(t - t_1)(t - t_2)\ldots(t - t_{n-1}) \end{aligned}$$

[ ]:
```
l_n = lambda t, j: np.prod(t-years[years<years[j]])

def x(i, j):
    if i == j: return population[i]
```

```
    return (x(i+1, j) - x(i, j-1))/(years[j] - years[i])

X = [x(0, i) for i in range(9)]
p_n = lambda t: np.sum([X[j] * l_n(t, j) for j in range(9)])

def horner(base, coefficients):
    n = len(coefficients) - 1
    W = coefficients[-1]
    for i in range(n-1, -1, -1):
        W = W*base[i] + coefficients[i]
    return W

interpolated_population_newton = np.array([p_n(t) for t in all_years])
```

Wykres:

```
[ ]: plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.plot(years, population, 'ro', label='Węzły interpolacji')
plt.plot(all_years, interpolated_population_newton, label='Wielomian␣
 ↪interpolacyjny')
plt.xlabel('Rok')
plt.ylabel('Populacja')
plt.title('Interpolacja Newtona populacji Stanów Zjednoczonych')
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()
```



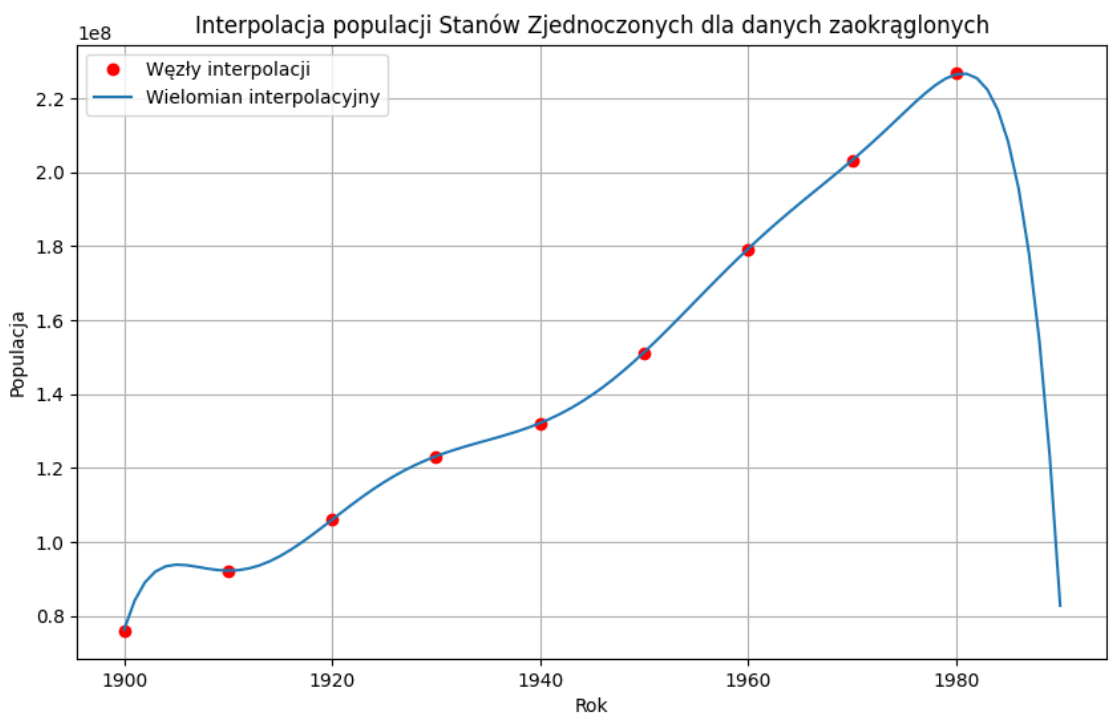
Wyliczenie wielomiamu interpolacyjnego dla danych zaokrąglonych:

```
[ ]: population_rounded = np.round(population / 1e6) * 1e6
print(population_rounded)
coefficients_rounded = np.linalg.solve(best_V, population_rounded)

p_rounded = lambda t: B(t) @ coefficients.T
interpolated_population_rounded = np.array([p_rounded(x) for x in all_years])
```

```
[7.60e+07 9.20e+07 1.06e+08 1.23e+08 1.32e+08 1.51e+08 1.79e+08 2.03e+08
 2.27e+08]
```

Wykres:

```
[ ]: plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.plot(years, population_rounded, 'ro', label='Węzły interpolacji')
plt.plot(all_years, interpolated_population_rounded, label='Wielomian␣
 ↪interpolacyjny')
plt.xlabel('Rok')
plt.ylabel('Populacja')
plt.title('Interpolacja populacji Stanów Zjednoczonych dla danych␣
 ↪zaokrąglonych')
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()
```



Porównanie współczynników wielomianów interpolacyjnych dla danych zwykłych i zaokrąglonych:

```
[ ]: abs_coefficients_difference = np.abs(coefficients_rounded - coefficients)
print("Oryginalne współczynniki: ", coefficients,"\n")
print("Współczynniki dla danych zaokrąglonych: ", coefficients_rounded,"\n")
print("Wartość bezwzględna róznicy współczynników: ",␣
↪abs_coefficients_difference)
```

```
Oryginalne współczynniki:  [ 1.32164569e+08  4.61307656e+07  1.02716315e+08
1.82527130e+08
 -3.74614715e+08 -3.42668456e+08  6.06291250e+08  1.89175576e+08
 -3.15180235e+08]

Współczynniki dla danych zaokrąglonych:  [ 1.32000000e+08  4.59571429e+07
1.00141270e+08  1.81111111e+08
 -3.56755556e+08 -3.38488889e+08  5.70311111e+08  1.86920635e+08
 -2.94196825e+08]

Wartość bezwzględna róznicy współczynników:  [  164569.00000003
173622.71904778  2575044.9444446   1416019.06666657
 17859159.33333355  4179566.93333346 35980138.66666675  2254940.6476191
 20983409.77777779]
```

Porównanie wartości wielomianów interpolacyjnych dla Lagrange'a i Newtona:

```
[ ]: polynomial_difference = np.abs(interpolated_population_lagrange -␣
↪interpolated_population_newton)
print(polynomial_difference)
```

```
[0.00000000e+00 0.00000000e+00 0.00000000e+00 4.47034836e-08
 1.49011612e-08 0.00000000e+00 1.49011612e-08 2.98023224e-08
 1.49011612e-08 0.00000000e+00 0.00000000e+00 2.98023224e-08
 0.00000000e+00 1.49011612e-08 2.98023224e-08 0.00000000e+00
 0.00000000e+00 1.49011612e-08 1.49011612e-08 0.00000000e+00
 0.00000000e+00 1.49011612e-08 1.49011612e-08 0.00000000e+00
 1.49011612e-08 0.00000000e+00 1.49011612e-08 0.00000000e+00
 1.49011612e-08 1.49011612e-08 0.00000000e+00 2.98023224e-08
 0.00000000e+00 2.98023224e-08 0.00000000e+00 0.00000000e+00
 2.98023224e-08 1.49011612e-08 1.49011612e-08 0.00000000e+00
 0.00000000e+00 1.49011612e-08 5.96046448e-08 2.98023224e-08
 2.98023224e-08 0.00000000e+00 2.98023224e-08 2.98023224e-08
 5.96046448e-08 2.98023224e-08 0.00000000e+00 2.98023224e-08
 2.98023224e-08 2.98023224e-08 5.96046448e-08 0.00000000e+00
 2.98023224e-08 8.94069672e-08 5.96046448e-08 0.00000000e+00
 2.98023224e-08 5.96046448e-08 8.94069672e-08 2.98023224e-08
 5.96046448e-08 5.96046448e-08 1.19209290e-07 2.98023224e-08
 8.94069672e-08 0.00000000e+00 5.96046448e-08 2.98023224e-08
```

```
 5.96046448e-08 1.19209290e-07 1.49011612e-07 1.78813934e-07
 8.94069672e-08 5.96046448e-08 8.94069672e-08 2.38418579e-07
 2.98023224e-08 2.98023224e-07 5.96046448e-08 1.78813934e-07
 5.36441803e-07 1.19209290e-07 1.31130219e-06 2.26497650e-06
 1.66893005e-06 1.19209290e-06 0.00000000e+00]
```

2.2 Wnioski

Analizując wykresy obliczonych wielomianów interpolacyjnych można wysnuć wniosek, że każdy z wielomianów daje niemal identyczne wyniki. Po wyliczeniu wartości bezwzględnej z różnicy wartości tych wielomianów w poszczególnych latach dla Lagrange'a i Newtona można zauważyć, że wartości różnią się lecz bardzo nieznacznie.

Ekstrapolacja wielomianu dla roku 1990 znacznie odbiega od faktycznej liczebności populacji w tym czasie, a błąd względny jest zdecydowanie za duży. Świadczy to o tym, że predykcje liczebności za pomocą wyliczonego wielomianu interpolacyjnego bedą niepoprawne.

Po zaokrągleniu danych opisujących liczebność populacji współczynniki różnią się od tych wyliczonych dla danych bardziej dokładnych, jednak w tym przypadku nie wpływa to na wynik.

2.3 Bibliografia

https://heath.cs.illinois.edu/scicomp/notes/cs450_chapt07.pdf

https://math.libretexts.org/Courses/Angelo_State_University/Mathematical_Computing_with_Python/3%3A

prezentacja Interpolation Marcin Kuta