Laboratorium 05

Aproksymacja

Iga Antonik, Helena Szczepanowska

Zadanie 1

Wykonaj aproksymację średniokwadratową punktową populacji Stanów Zjednoczonych w przedziale [1900,1980] wielomianami stopnia m dla 0 ≤ m ≤ 6.

- (a) Dla każdego m dokonaj ekstrapolacji wielomianu do roku 1990. Porównaj otrzymaną wartość z prawdziwą wartością dla roku 1990, wynoszącą 248 709 873. Ile wynosi błąd względny ekstrapolacji dla roku 1990? Dla jakiego m błąd względny był najmniejszy?

- (b) Zbyt niski stopień wielomianu oznacza, że model nie jest w stanie uwzględnić zmienności danych (duże obciążenie). Zbyt wysoki stopień wielomianu oznacza z kolei, że model uwzględnia szum lub błędy danych (duża wariancja), co w szczególności obserwowaliśmy w przypadku interpolacji. Wielomian stopnia m posiada k = m + 1 parameterów. Stopień wielomianu, m, jest hiperparametrem modelu. Do wyboru optymalnego stopnia wielomianu można posłużyć się kryterium informacyjnym Akaikego (ang. Akaike information criterion):

$$AIC = 2k + nln(\sum_{i=1}^{n} \frac{(y_i - p(x_i))^2}{n})$$

gdzie y_i (i = 1, . . . , n) oznacza prawdziwą liczbę osób w roku x_i, natomiast p(x_i) liczbę osób przewidywaną przez model, tzn wartość wielomianu p(x). Ponieważ rozmiar próbki jest niewielki (dane z dziewięciu lat, n = 9), n/k < 40, należy użyć wzoru ze składnikiem korygującym:

$$AICc = AIC + \frac{2k(k+1)}{n-k-1}$$

Mniejsze wartości kryterium oznaczają lepszy model. Czy wyznaczony w ten sposób stopień m, odpowiadający najmniejszej wartości AICc, pokrywa się z wartością z poprzedniego podpunktu?

Rozwiązanie

Biblioteki

```
In [ ]: import numpy as np
        import matplotlib.pyplot as plt
```

Dane populacyjne

```
In [ ]: years = np.array([1900, 1910, 1920, 1930, 1940, 1950, 1960, 1970, 1980])
        population = np.array([76212168, 92228496, 106021537, 123202624, 132164569, 151325798, 1793231
        year_1990_true = 248709873
```

Stopienie wielomianu aproksymującego

```
In [ ]: m_values = np.arange(7)
```

Obliczanie macierzy S i wektora T

$$S_k = \sum_{i=0}^{m} x_i^k,\ k = 0, 1, \ldots, 2n$$

$$T_k = \sum_{i=0}^{m} x_i^k y_i,\ k = 0, 1, \ldots n$$

```
In [ ]: def calculate_S(years, m):
            n = len(years)
            S = np.zeros((m+1, m+1))
            for i in range(m+1):
                for j in range(m+1):
                    S[i][j] = np.sum(years ** (i+j))
            return S

        def calculate_T(years, population, m):
            n = len(years)
            T = np.zeros(m+1)
            for i in range(m+1):
                T[i] = np.sum(years ** i * population)
            return T
```

Rozwiązanie układu równań i wyznaczenie funkcji

$$\begin{bmatrix} S_0 & S_1 & \ldots & S_n \\ S_1 & S_2 & \ldots & S_{n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ S_n & S_{n+1} & \ldots & S_{2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \ldots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_0 \\ T_1 \\ \ldots \\ T_n \end{bmatrix}$$

```
In [ ]: def solve_equations(S, T):
            coefficients = np.linalg.solve(S, T)
            return coefficients


        def p(coefficients,x):
            return np.sum(coefficients*(x**np.arange(len(coefficients))))
```

Ekstrapolacja do roku 1990

```
In [ ]: def extrapolate_to_1990(coefficients, year):
            return p(coefficients,year)
```

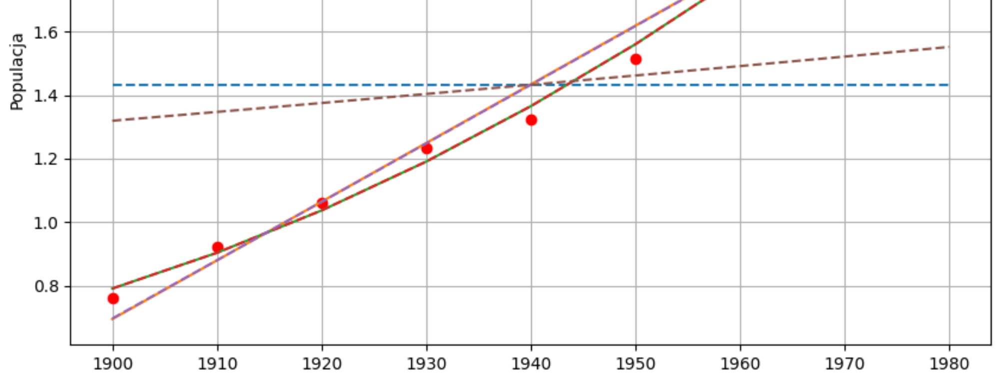
Obliczenia dla kazdego m

```
In [ ]: S = []
        T = []
        coefficients = []
        population_1990_approx =[]
        relative_error_1990 =[]
        y_values = []

        for m in m_values:
            S.append(calculate_S(years, m))
            T.append(calculate_T(years, population, m))
            coefficients.append(solve_equations(S[m], T[m]))
            population_1990_approx.append(extrapolate_to_1990(coefficients[m], 1990))

            # Obliczenie błędu względnego ekstrapolacji
            relative_error_1990.append(np.abs(population_1990_approx[m] - year_1990_true) / year_1990_
            print("Wynik ekstrapolacji populacji w roku 1990 (przybliżony) dla m = ", m," : ", round(p
            print("Błąd względny ekstrapolacji dla roku 1990: ", round(relative_error_1990[m],2),"% \n
            y_values.append([p(coefficients[m],year) for year in years] )
```

```
Wynik ekstrapolacji populacji w roku 1990 (przybliżony) dla m =  0  :  143369177.44
Błąd względny ekstrapolacji dla roku 1990:  42.35 %

Wynik ekstrapolacji populacji w roku 1990 (przybliżony) dla m =  1  :  235808109.03
Błąd względny ekstrapolacji dla roku 1990:  5.19 %

Wynik ekstrapolacji populacji w roku 1990 (przybliżony) dla m =  2  :  254712944.65
Błąd względny ekstrapolacji dla roku 1990:  2.41 %

Wynik ekstrapolacji populacji w roku 1990 (przybliżony) dla m =  3  :  254715483.19
Błąd względny ekstrapolacji dla roku 1990:  2.41 %

Wynik ekstrapolacji populacji w roku 1990 (przybliżony) dla m =  4  :  236154819.21
Błąd względny ekstrapolacji dla roku 1990:  5.05 %

Wynik ekstrapolacji populacji w roku 1990 (przybliżony) dla m =  5  :  158239299.36
Błąd względny ekstrapolacji dla roku 1990:  36.38 %

Wynik ekstrapolacji populacji w roku 1990 (przybliżony) dla m =  6  :  -2.0345135030630925e+17
Błąd względny ekstrapolacji dla roku 1990:  81802683625.28 %
```

Wykres

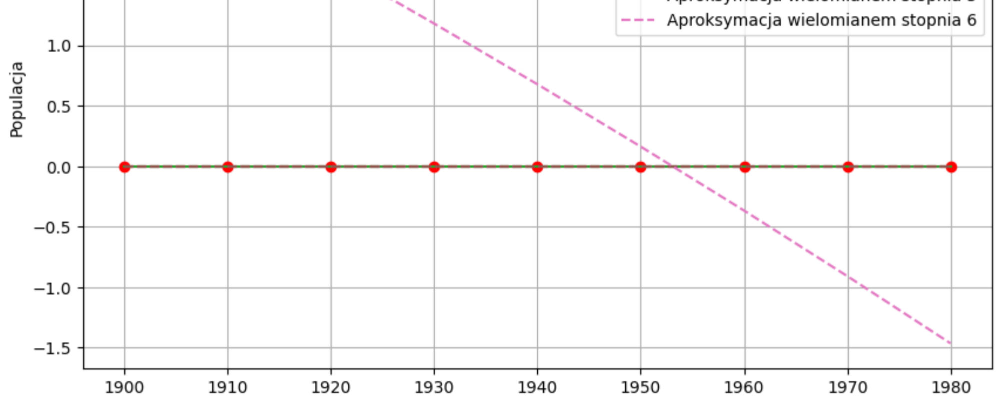
```
In [ ]: plt.figure(figsize=(10, 6))
        plt.plot(years, population, 'ro', label='Dane populacyjne')
        for m in m_values:
            if m == 6: break
            elif m != 1 and m != 2:
                plt.plot(years, y_values[m], label='Aproksymacja wielomianem stopnia {}'.format(m), li

            else:
                plt.plot(years, y_values[m], label='Aproksymacja wielomianem stopnia {}'.format(m))
        plt.xlabel('Rok')
        plt.ylabel('Populacja')
        plt.title('Aproksymacja populacji przy użyciu metody najmniejszych kwadratów')
        plt.legend()
        plt.grid(True)
        plt.show()
```



Za równo za małe wartości m jak i za wysokie prowadzą do bardzo niedokładnych funkcji. Zbyt niski stopień wielomianu oznacza, że model nie jest w stanie uwzględnić zmienności danych . Zbyt wysoki stopień wielomianu oznacza z kolei, że model uwzględnia szum lub błędy danych.

Wykres z uwzględnieniem m = 6

```
In [ ]: plt.figure(figsize=(10, 6))
        plt.plot(years, population, 'ro', label='Dane populacyjne')
        for m in m_values:
            if m != 1 and m != 2:
                plt.plot(years, y_values[m], label='Aproksymacja wielomianem stopnia {}'.format(m), li

            else:
                plt.plot(years, y_values[m], label='Aproksymacja wielomianem stopnia {}'.format(m))
        plt.xlabel('Rok')
        plt.ylabel('Populacja')
        plt.title('Aproksymacja populacji przy użyciu metody najmniejszych kwadratów uwzględniając m =
        plt.legend()
        plt.grid(True)
        plt.show()
```



Jak widać na powyzszym wykresie aproksymacja wielomianem stopnia 6 całkowicie odbiega od oczekiwanego wyniku.

Funkcje obliczająca AIC i AICc

```
In [ ]: def calculate_AIC(y, y_hat, n, k):
            residual_sum_squares = np.sum((y - y_hat) ** 2)
            AIC = 2 * k + n * np.log(residual_sum_squares / n)
            return AIC

        def calculate_AICc(AIC, n, k):
            AICc = AIC + (2 * k * (k + 1)) / (n - k - 1)
            return AICc
```

Obliczanie optymalnego stopnia wielomianu

```
In [ ]: # Wartości początkowe
        n = len(years)
        AICc_min = np.inf
        AIC_min = np.inf
        best_m_AICc = None
        best_m_AIC = None
        AIC_tab = []
        AICc_tab = []


        for m in m_values:
            k = m + 1
            y_hat =[p(coefficients[m], year) for year in years]
            AIC = calculate_AIC(population, y_hat, n, k)
            AICc = calculate_AICc(AIC, n, k)
            AIC_tab.append(AIC)
            AICc_tab.append(AICc)
            if AIC < AIC_min:
                AIC_min = AIC
                best_m_AIC = m
            if AICc < AICc_min:
                AICc_min = AICc
                best_m_AICc = m

        min_error = min(relative_error_1990)
        best_m_a = 0
        for m in m_values:
            if relative_error_1990[m] == min_error:
                best_m_a = m
                break

        print("Optymalny stopień wielomianu wyznaczony w pkt a:", best_m_a)
        print("Optymalny stopień wielomianu wyznaczony za pomocą AICc:", best_m_AICc)
        print("Optymalny stopień wielomianu wyznaczony za pomocą AIC:", best_m_AIC)
        print("Wartość AIC dla optymalnego stopnia:", round(AIC_min,2))
        print("Wartość AICc dla optymalnego stopnia:", round(AICc_min,2))
```

```
Optymalny stopień wielomianu wyznaczony w pkt a: 2
Optymalny stopień wielomianu wyznaczony za pomocą AICc: 2
Optymalny stopień wielomianu wyznaczony za pomocą AIC: 2
Wartość AIC dla optymalnego stopnia: 274.65
Wartość AICc dla optymalnego stopnia: 279.45
```

Wnioski

Wartość błędu względnego ekstrapolacji dla roku 1990 różniła się w zależności od stopnia wielomianu. W przypadku tego konkretnego zbioru danych, większy stopień wielomianu nie zawsze prowadził do lepszej ekstrapolacji. Błąd względny był najmniejszy dla n równego 2, więc ekstrapolacja wielomianu do 1990 roku była najdokładnieksza dla m = 2. Kryterium informacyjne Akaikego również wskazało, ze optymalnym stopniem wielomianu jest m = 2. Zgadza się to rowniez z wartoscia wskazana przez kryterium w którym uwzględniliśmy składnik korygujący.

Zadanie 2

Wykonaj aproksymację średniokwadratową ciągłą funkcji $f(x) = \sqrt{2}$ w przedziale [0,2] wielomianem drugiego stopnia, używając wielomianów Czebyszewa. Aproksymacja ta jest tańszym obliczeniowo zamiennikiem aproksymacji jednostajnej.

Rozwiązanie

Biblioteki

```
In [ ]: import numpy as np
        from scipy.integrate import quad
        import matplotlib.pyplot as plt
```

Funkcja do aproksymacji po przeskalowaniu do odpowiedniej dziedziny [0,2]

```
In [ ]: def rescale(x):
            return (x + 1)

        def f_rescaled(x):
            return np.sqrt(rescale(x))

        def weight_function(x):
            return (1 - x**2)**(-1/2)
```

Obliczanie wyrazów wolnych z uzyciem wielomianu Czebyszewa

$$\begin{bmatrix} \langle\phi_0, \phi_0\rangle & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \langle\phi_1, \phi_1\rangle & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \langle\phi_n, \phi_n\rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \ldots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle f, \phi_0\rangle \\ \langle f, \phi_1\rangle \\ \ldots \\ \langle f, \phi_n\rangle \end{bmatrix}$$

$$c_k = \frac{\langle f, \phi_k\rangle}{\langle\phi_k, \phi_k\rangle}$$

$$\langle T_j, T_j\rangle = \begin{cases} \pi & \text{if } j = 0 \\ \pi/2 & \text{if } j > 0 \end{cases}$$

```
In [ ]: def chebyshev_coefficient(f, n):
            integrand = lambda x: f(x) * np.cos(n * np.arccos(x)) * weight_function(x)
            coefficient = (2 / np.pi) * quad(integrand, -1, 1)[0] if n > 0 else (1 / np.pi) * quad(int
            return coefficient

        c0 = chebyshev_coefficient(f_rescaled, 0)
        c1 = chebyshev_coefficient(f_rescaled, 1)
        c2 = chebyshev_coefficient(f_rescaled, 2)

        print(round(c0,2),round(c1,2),round(c2,2))
```

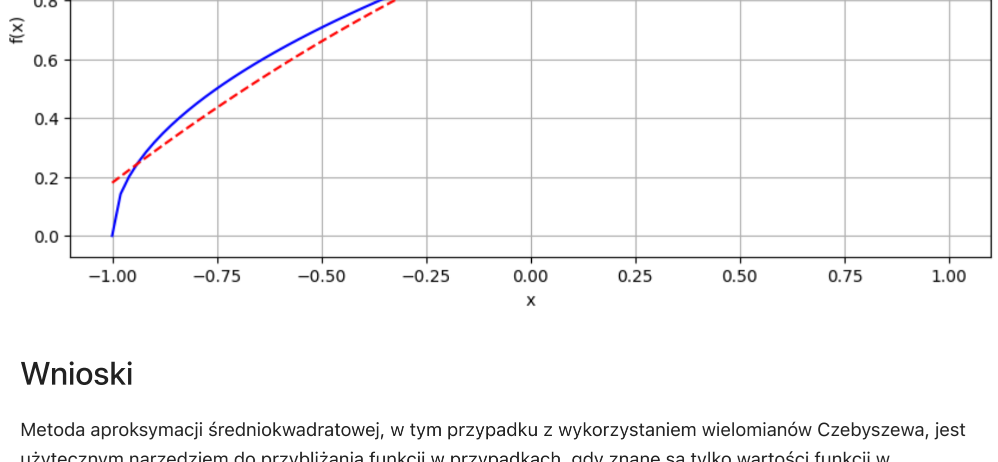
```
0.9 0.6 -0.12
```

Obliczanie wartości wielomianu aproksymacyjnego w przedziale [0, 2]

```
In [ ]: def approximated_function(x):
            return c0 +c1 * np.cos(np.arccos(x)) + c2 * np.cos(2 * np.arccos(x))
```

Wykres

```
In [ ]: x_values = np.linspace(-1, 1, 100)
        y_true = f_rescaled(x_values)
        y_approx = approximated_function(x_values)

        plt.figure(figsize=(10, 5))
        plt.plot(x_values, y_true, label='Original Function', color='blue')
        plt.plot(x_values, y_approx, label='Chebyshev Approximation', color='red', linestyle='--')
        plt.title('Comparison of Original Function and Chebyshev Approximation')
        plt.xlabel('x')
        plt.ylabel('f(x)')
        plt.legend()
        plt.grid(True)
        plt.show()
```



Wnioski

Metoda aproksymacji średniokwadratowej, w tym przypadku z wykorzystaniem wielomianów Czebyszewa, jest użytecznym narzędziem do przybliżania funkcji w przypadkach, gdy znane są tylko wartości funkcji w określonych punktach. Wielomian aproksymacyjny może być używany do analizy i przewidywania zachowania funkcji w obszarach, gdzie nie są dostępne dokładne dane, ale można je przybliżyć na podstawie znanych wartości węzłów interpolacji.

Bibliografia

http://home.agh.edu.pl/~funika/mownit/lab3/aproksymacja.pdf

Metody Obliczeniowe w Nauce i Technice 5. Aproksymacja Marian Bubak, Katarzyna Rycerz

prezentacja Approximation Marcin Kuta