

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

LA MARCHE ALÉATOIRE DE L'ÉLÉPHANT

MÉMOIRE

PRÉSENTÉ

COMME EXIGENCE PARTIELLE

DE LA MAÎTRISE EN MATHÉMATIQUES

PAR

CÉLESTIN MOUAFO

JUIN 2025

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier toutes les personnes qui m'ont aidé à réaliser ce mémoire.

Merci à mon père Mouafo Fendju Pierre, qui m'a toujours encouragé et poussé de l'avant dans le but de réaliser mes rêves.

Je remercie la professeure Hélène Guérin, ma directrice de mémoire, pour son savoir faire, son dévouement, son temps et sa patience ; elle m'a fait confiance et a contribué à me rendre meilleur dans la recherche.

Un merci particulier à ma chère et tendre femme Nicole Kamdem et à mes 2 enfants Yvan Mouafo et Yvana Mouafo qui ont accepté de me partager avec ce projet qui est très important pour moi.

Pour terminer, je tiens à remercier chaleureusement tous les professeurs qui vont lire ce mémoire dans le but de l'évaluer.

Merci.

TABLE DES MATIÈRES

TABLE DES FIGURES	vi
NOTATION	vii
RÉSUMÉ	viii
INTRODUCTION	1
0.1 Marche aléatoire simple	1
0.1.1 Définition	1
0.1.2 Propriétés	2
0.1.3 Généralisation	2
0.2 La marche aléatoire de l'éléphant	3
0.2.1 Présentation de la marche aléatoire de l'éléphant	3
0.2.2 Loi des pas de la marche de l'éléphant	4
CHAPITRE 1 MARTINGALES ET MARCHE ALÉATOIRE DE L'ÉLÉPHANT	8
1.1 Les martingales et leur comportement asymptotique	8
1.1.1 Martingale associée à la marche de l'éléphant	11
1.1.2 Comportement asymptotique de la martingale associée à la marche de l'éléphant	12
1.2 Principaux résultats	21
1.2.1 Convergence de la suite $\frac{S_n}{n}$ dans le cas diffusif	23
1.2.2 Convergence de la suite $\frac{S_n}{\sqrt{n} \log n}$ dans le cas critique	24
1.2.3 Convergence de la suite $\frac{S_n}{n^{2p-1}}$ dans le cas super diffusif	28
CHAPITRE 2 MODÈLE D'URNE DE TYPE POLYA ASSOCIÉ À LA MARCHE ALÉATOIRE DE L'ÉLÉPHANT	37
2.1 Modèle d'urne de type Polya associé à la marche aléatoire de l'éléphant	37
2.1.1 Présentation du modèle d'urne	37

2.1.2	Connexion avec la marche aléatoire de l'éléphant	37
2.1.3	Étude du modèle d'urne de type Pólya	38
2.2	Modèles standards de la marche aléatoire de l'éléphant et leurs connexions aux modèles d'urne de type polya	40
2.2.1	Cas diffusif ($0 \leq p < \frac{3}{4}$)	42
2.2.2	Cas critique ($p = \frac{3}{4}$).	46
2.2.3	Cas super diffusif ($\frac{3}{4} < p \leq 1$)	47
CHAPITRE 3	EXTENSIONS	49
3.1	Cas de la marche aléatoire de l'éléphant en dimension $d \geq 2$	49
3.2	Cas de la marche aléatoire renforcée	50
3.3	Le cas de la marche aléatoire de l'éléphant avec mémoire renforcée	50
3.4	Le cas de la marche aléatoire de l'éléphant modifiée	51
3.5	Le cas où l'éléphant ne peut se souvenir au plus que de ses r derniers pas seulement	52
3.5.1	Présentation	52
3.5.2	Loi des pas de l'éléphant à mémoire finie	54
3.5.3	Étude du comportement asymptotique de la marche de l'éléphant à mémoire finie.	56
3.5.4	Quelques simulations dans le cas $r = 5$	57
3.5.5	Quelques simulations et propriétés dans le cas $r = 1$	58
CONCLUSION	60
ANNEXE A	CODES R POUR LES SIMULATIONS	61
A.1	Code R pour Figure 1.1	61
A.2	Code R pour Figure 1.2	62
A.3	Code R pour Figure A.3	62
A.4	Code R pour la figure 1.4	63

A.5	Code R pour la figure 1.5	64
A.6	Code R pour la figure 1.6	66
A.7	Code R pour la figure 2.1	67
A.8	Tous les codes R dans cette section sont pour le cas où l'éléphant ne peut se souvenir que d'un nombre constant et fini r de ses derniers pas	68
A.8.1	Code R pour la figure 3.1	68
A.8.2	Code R pour la figure 3.2	69
BIBLIOGRAPHIE		70

TABLE DES FIGURES

Figure 1.1	Simulation d'une trajectoire de la marche de l'éléphant dans le cas diffusif	20
Figure 1.2	5 trajectoires de S_n	20
Figure 1.3	Cinq trajectoires de $M_n = a_n S_n$	21
Figure 1.4	Cinq trajectoires de $\frac{S_n}{n}$ dans le cas diffusif	25
Figure 1.5	Cinq trajectoires de $\frac{S_n}{\sqrt{n \log n}}$ dans le cas critique	27
Figure 1.6	Comparaison de l'histogramme de $\frac{S_n}{\sqrt{n \log n}}$ avec une courbe gaussienne dans le cas critique	27
Figure 1.7	Histogramme de $\frac{S_n}{n^{2p-1}}$ cas super diffusif	30
Figure 2.1	Convergence de $\frac{S_{[tn]}}{\sqrt{n}}$ vers une loi gaussienne dans le cas diffusif	43
Figure 3.1	Trajectoire de S_n à mémoire finie	57
Figure 3.2	Cinq trajectoires de S_n à mémoire finie	57
Figure 3.3	Cinq de $\frac{S_n}{n}$ de mémoire de taille 5	57
Figure 3.4	Cinq trajectoires de $\frac{S_n}{\sqrt{n \log n}}$ de mémoire de taille 5	58
Figure 3.5	Trajectoire de S_n de mémoire de taille 1	59
Figure 3.6	Flux de 5 trajectoires de S_n à mémoire de taille 1	59

NOTATION

Symboles

\rightsquigarrow signifie suivre la loi.

Lois de probabilité

$R(q) : X \rightsquigarrow R(q)$ signifie que la variable aléatoire X suit la loi Rademacher de paramètre $q \in [0, 1]$:
 $\mathbb{P}(X = 1) = q$ et $\mathbb{P}(X = -1) = 1 - q$.

$B(n, p) : X \rightsquigarrow B(n, p)$ signifie que la variable aléatoire X suit la loi Binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [0, 1]$: $\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$, $k = 0, \dots, n$.

$Uniforme(1, \dots, n) : U \rightsquigarrow Uniforme(1, \dots, n)$ signifie que la variable aléatoire U suit la loi uniforme sur $\{1, \dots, n\}$: $\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{n}$, $k = 1, \dots, n$.

Fonctions spéciales

Gamma : pour tout $x > 0$, $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} \exp(-t) dt$. On a $\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n) = (n - 1)!$.

$(x)_k$: pour $x \in \mathbb{R}$ et $k \geq 0$, on définit le symbole de Pochhammer comme Pochhammer symbols $(x)_k = x(x + 1) \dots (x + k - 1)$.

${}_3F_2$: pour a, b, c, d, e , et z des nombres réels; k est un entier supérieur ou égal à 1, on définit la fonction hypergéométrique généralisé comme

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k (c)_k}{(k!) (d)_k (e)_k} z^k = {}_3F_2 \left(\begin{matrix} a, & b, & c \\ d, & e \end{matrix} \middle| z \right) = {}_3F_2(a, b, c, d, e; z)$$

.

Nombres

p, q sont des nombres réels compris entre 0 et 1.

a, t, s sont des scalaires.

r, n, k sont des nombres entiers naturels.

A représente une matrice.

Ensembles

L^2 désigne l'ensemble des classes d'équivalences pour la relation « d'égalité presque sûr » des v.a réelles de carrés intégrables.

RÉSUMÉ

Notre étude de la marche aléatoire de l'éléphant commence par l'étude de la marche aléatoire simple. La marche aléatoire simple est telle que à chaque étape du processus, le mobile se déplace soit vers la droite avec probabilité $\frac{1}{2}$, soit vers la gauche avec probabilité $\frac{1}{2}$. Les pas de la marche aléatoire simple sont tous indépendants et identiquement distribués (*i.i.d.*).

Ensuite, nous présentons la loi des pas de l'éléphant ; il faut noter que les pas dans la marche aléatoire de l'éléphant ne sont plus *i.i.d.*

À l'aide de la théorie des martingales, nous étudions la convergence de cette marche de l'éléphant. Bien qu'après notre étude nous ayons constaté que cette marche diverge, dans nos principaux résultats, nous observons que bien renormalisée, cette marche admet une limite quand le temps converge vers l'infini.

Nous avons ensuite fait un parallèle entre la marche de l'éléphant et un modèle d'urne de type Pólya adapté. Nous poursuivons notre étude en présentant d'autres modèles de marches de l'éléphant et leurs modèles d'urnes associés ; comme par exemple : la marche aléatoire renforcée, et la marche aléatoire modifiée. Nous avons aussi fait une brève étude de la marche de l'éléphant en dimension $d \geq 2$.

Nous terminons notre travail par l'étude du cas d'une marche aléatoire ayant une mémoire, mais contrairement à la marche de l'éléphant qui doit se souvenir de tous ses pas à chaque instant, celle-ci nécessite seulement le souvenir d'un nombre fini $r \in \mathcal{N}$ et constant de ses derniers pas à chaque étape du processus de la marche.

INTRODUCTION

Le modèle de la marche aléatoire de l'éléphant que nous étudions ici a été introduit pour la première fois par Schütz et Trimper en 2004, (Schütz et Trimper, 2004). Dans ce modèle, le processus de la marche est tel que le choix du pas suivant se fait toujours de manière uniforme dans la suite des pas précédents. L'article de Bercu (Bercu, 2017) est l'un des nombreux articles qui présente l'étude de cette marche. Dans la thèse de Laulin (Laulin, 2022), une étude plus détaillée et plus approfondie de cette marche est aussi faite. D'après l'article (Bercu, 2017), la marche aléatoire de l'éléphant avec une grande mémoire apparaît de façon naturelle dans des domaines tels que la mathématiques appliquées, la physique théorique et l'informatique. Il existe plusieurs modèles de marches aléatoires ; la marche abordée dans ce mémoire se fait en dimension 1, à temps discret, et l'éléphant conserve toute sa mémoire tout au long du processus de sa marche. Avant d'étudier la marche aléatoire de l'éléphant, nous allons commencer par l'étude de la marche aléatoire simple.

0.1 Marche aléatoire simple

Cette section repose sur la thèse de Lucile Laulin, (Laulin, 2022).

0.1.1 Définition

La marche aléatoire simple est un processus aléatoire qui consiste à faire une suite de pas qui sont totalement indépendants les uns des autres, et tous issus de la même loi.

Dans une marche aléatoire simple, le mobile débute son mouvement à partir d'un point initial, qu'on appelle origine, et se déplace vers la droite avec une probabilité $1/2$, ou vers la gauche avec une probabilité $1/2$. Le mobile répète ensuite cette action à chaque instant de manière totalement indépendante des pas précédents. La trajectoire du mobile ici parcourt la droite des nombres entiers relatifs \mathbb{Z} .

Pour tout entier $n \geq 0$, la position S_{n+1} du mobile à l'instant $n + 1$ est donnée par la relation de récurrence

$$S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$$

avec X_{n+1} la variable aléatoire représentant le $(n + 1)$ ième pas. La famille (X_n) des pas est une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (*iid*) de loi de Rademacher de paramètre $\frac{1}{2}$,

notée $R(\frac{1}{2})$. Ainsi, nous avons :

$$X_{n+1} = \begin{cases} +1 & \text{avec probabilité } \frac{1}{2}, \\ -1 & \text{avec probabilité } \frac{1}{2}. \end{cases}$$

0.1.2 Propriétés

Étant donné que dans la marche aléatoire simple la famille des pas (X_n) est (*iid*), alors on peut appliquer la loi des grands nombres (*LGN*) et le théorème central limite (*TCL*) (voir le livre de Foata et Fuchs, (Foata et Fuchs, 2004)). Nous avons donc

$$\begin{aligned} \frac{S_n}{n} &\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p.s} E(X_1) = 0, \\ \frac{S_n}{\sqrt{n}} &\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathbb{N}(0, 1), \end{aligned}$$

où $\mathbb{N}(0, 1)$ représente la loi gaussienne centrée réduite.

0.1.3 Généralisation

Considérons une marche aléatoire avec des pas (*iid*) de loi de Rademacher $R(p)$, $0 \leq p \leq 1$, c'est à dire :

$$X_{n+1} = \begin{cases} +1 & \text{avec probabilité } p, \\ -1 & \text{avec probabilité } 1 - p. \end{cases}$$

Dans ce cas, la *LGN* et le *TCL* assurent que :

$$\begin{aligned} \frac{S_n}{n} &\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p.s} E(X_1) = 2p - 1, \\ \frac{S_n - (2p - 1)n}{\sqrt{4p(1 - p)n}} &\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathbb{N}(0, 1). \end{aligned}$$

Dans le cadre des marches aléatoires à pas indépendants, la loi de la position S_{n+1} à l'instant $n + 1$ n'est influencée que par la position S_n à l'instant n et par le pas X_{n+1} , qui est indépendant de S_n . Par conséquent,

(S_n) est une chaîne de Markov. Plus précisément, pour tout $x, y_0, \dots, y_{n-1}, y$ entiers relatifs, on a :

$$P(S_{n+1} = x | S_0 = y_0, \dots, S_{n-1} = y_{n-1}, S_n = y) = P(S_{n+1} = x | S_n = y) \\ = \begin{cases} p & \text{si } x = y + 1, \\ 1 - p & \text{si } x = y - 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

0.2 La marche aléatoire de l'éléphant

Cette section repose sur la thèse de Lucile Laulin, (Laulin, 2022).

0.2.1 Présentation de la marche aléatoire de l'éléphant

Selon une expression bien connue, les éléphants auraient une bonne mémoire, et se souviendraient de tous les endroits où ils sont passés au cours de leur vie. Dans le modèle de la marche aléatoire de l'éléphant introduit par Schütz et Trimper en 2004, (Schütz et Trimper, 2004), le choix du pas suivant se fait toujours dans la suite des pas précédents ; et donc les pas ne sont plus indépendants les uns des autres.

Désignons par S_n la position de l'éléphant à un instant n donné. L'éléphant débute sa marche à l'origine. Nous introduisons deux paramètres q et p , où

- $q \in [0, 1]$ est le paramètre du premier pas de l'éléphant, et
- $p \in [0, 1]$ est le paramètre de mémoire.

À l'instant $n = 0$, l'éléphant est à l'origine $S_0 = 0$. À l'instant $n = 1$, la position de l'éléphant est : $S_1 = X_1$ avec X_1 une variable de Rademacher de paramètre q :

$$X_1 = \begin{cases} +1 & \text{avec probabilité } q, \\ -1 & \text{avec probabilité } 1 - q. \end{cases}$$

À l'instant $n = 2$, la position de l'éléphant est : $S_2 = S_1 + X_2$, avec

$$X_2 = \begin{cases} +X_1 & \text{avec probabilité } p, \\ -X_1 & \text{avec probabilité } 1 - p. \end{cases}$$

On remarque que le pas X_2 est à valeurs dans $\{-1, +1\}$.

Pour tout $n \geq 1$, la position et le pas de l'éléphant sont donnés à l'aide des pas précédents. À l'instant $n + 1$, la position de l'éléphant sera : $S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$.

avec :

$$X_{n+1} = \begin{cases} +X_{U_{n+1}} & \text{avec probabilité} = p, \\ -X_{U_{n+1}} & \text{avec probabilité} = 1 - p. \end{cases}$$

avec $U_{n+1} \rightsquigarrow \text{Uniforme}(1, \dots, n)$. La variable uniforme U_{n+1} est choisie indépendamment des variables $\{X_k\}_{1 \leq k \leq n}$. Ainsi, $\mathbb{P}(U_{n+1} = k) = 1/n$, pour tout $k \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Dans la section qui suit, nous allons déterminer la loi des pas de l'éléphant. Cette loi nous sera très utile dans l'étude des modèles d'urnes de type Pólya associés à la marche aléatoire de l'éléphant.

Remarque 0.1 *Les propriétés de la marche aléatoire simple ne peuvent pas s'appliquer à la marche aléatoire de l'éléphant, car dans la marche aléatoire de l'éléphant, les pas ne sont pas (iid).*

0.2.2 Loi des pas de la marche de l'éléphant

Dans la proposition suivante, on donne la loi des pas de la marche de l'éléphant. Je détaille la preuve, celle-ci n'étant pas présente dans les articles sur la marche de l'éléphant que j'ai étudiés.

Proposition 0.2 *Les pas (X_n) de la marche de l'éléphant sont des variables à valeurs dans $\{-1, +1\}$, dont la loi est donnée par induction par $\mathbb{P}(X_1 = +1) = q$, et pour $n \geq 1$,*

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = +1) = (1 - p) + \frac{2p - 1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(X_k = +1). \quad (0.1)$$

Pour démontrer cette proposition, nous aurons besoin du lemme suivant

Lemme 0.3 *Pour tous événements A, B, C , on a*

$$\mathbb{P}(A \cap B | C) = \mathbb{P}(A | B \cap C) \mathbb{P}(B | C). \quad (0.2)$$

Preuve. En effet, $\mathbb{P}(A \cap B|C) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B \cap C)}{\mathbb{P}(C)}$, et $\mathbb{P}(A \cap B|C) = \left(\frac{\mathbb{P}(A \cap B \cap C)}{\mathbb{P}(B \cap C)} \right) \left(\frac{\mathbb{P}(B \cap C)}{\mathbb{P}(C)} \right)$.

Il suffit de développer (0.2) pour trouver l'égalité. \square

Preuve. Démonstration de la proposition 0.2 On va d'abord détailler le calcul pour $n = 2$, puis on va étudier le cas général.

- *Cas $n=2$: déterminons $\mathbb{P}(X_2 = 1)$.*

D'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_2 = 1) &= \mathbb{P}(X_2 = 1|X_1 = 1)\mathbb{P}(X_1 = 1) + \mathbb{P}(X_2 = 1|X_1 = -1)\mathbb{P}(X_1 = -1) \\ &= \mathbb{P}(X_2 = 1|X_1 = 1)q + \mathbb{P}(X_2 = 1|X_1 = -1)(1 - q),\end{aligned}$$

car $\mathbb{P}(X_1 = 1) = q$ et $\mathbb{P}(X_1 = -1) = 1 - q$. De plus, comme nous savons que :

$$X_2 = \begin{cases} +X_1 & \text{avec probabilité } p, \\ -X_1 & \text{avec probabilité } 1 - p, \end{cases}$$

on déduit que : $\mathbb{P}(X_2 = 1) = pq + (1 - p)(1 - q) = (1 - p) + (2p - 1)q$. On retrouve bien la formule (0.1) pour X_2 .

On remarque facilement que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_2 = -1) &= 1 - \mathbb{P}(X_2 = 1) = 1 - (pq + (1 - p)(1 - q)) = 1 - pq - 1 + q + p - pq \\ &= p + q - 2pq.\end{aligned}$$

- *Cas n général : déterminons $\mathbb{P}(X_{n+1} = 1)$.*

Posons $z = \mathbb{P}(X_{n+1} = 1|X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n)$. D'après la formule des probabilités totales, on remarque que

$$\begin{aligned}z &= \mathbb{P}(X_{n+1} = 1, U_{n+1} \in \{1, 2, 3, \dots, n\}|X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n) \\ &= \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(X_{n+1} = 1, U_{n+1} = k|X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n).\end{aligned}$$

Introduisons maintenant les événements $A = \{X_{n+1} = 1\}$ et $B = \{U_{n+1} = k\}$. En utilisant la relation des

probabilités conditionnelles (0.2), on obtient

$$\begin{aligned}
z &= \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(X_{n+1} = 1, U_{n+1} = k | X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n) \\
&= \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(X_{n+1} = 1 | U_{n+1} = k, X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) \mathbb{P}(U_{n+1} = k | X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) \\
&= \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(X_{n+1} = 1 | U_{n+1} = k, X_k = x_k) \times \frac{1}{n},
\end{aligned}$$

car par hypothèse, la variable U_{n+1} est indépendant de (X_1, \dots, X_n) . Par ailleurs, si $x_k = 1$, alors

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = 1 | U_{n+1} = k; X_k = 1) = \mathbb{P}(X_{n+1} = X_k | U_{n+1} = k; X_k = 1) = p,$$

et si $x_k = -1$, alors

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = 1 | U_{n+1} = k; X_k = -1) = \mathbb{P}(X_{n+1} = -X_k | U_{n+1} = k; X_k = -1) = 1 - p.$$

Or nous savons que pour tout évènement A quelconque,

$$\mathbb{E}[\mathbb{1}_A] = \mathbb{P}(A).$$

Ainsi, on a

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = 1 | X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{X_{n+1}=1} | X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n].$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\mathbb{P}(X_{n+1} = 1 | X_1, \dots, X_n)] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[\mathbb{1}_{X_{n+1}=1} | X_1, \dots, X_n]] \\
&= \mathbb{E}[\mathbb{1}_{X_{n+1}=1}] = \mathbb{P}(X_{n+1} = 1).
\end{aligned}$$

D'après les calculs précédents, nous déduisons que :

$$\begin{aligned}
z &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (p \mathbb{1}_{x_k=1} + (1-p) \mathbb{1}_{x_k=-1}) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (p \mathbb{1}_{x_k=1} + (1-p)(1 - \mathbb{1}_{x_k=1})) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (p \mathbb{1}_{x_k=1} + (1-p) - (1-p)(1 - \mathbb{1}_{x_k=1})) \\
&= \frac{1}{n} \times n(1-p) + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n p \mathbb{1}_{x_k=1} - \frac{1-p}{n} \sum_{k=1}^n p \mathbb{1}_{x_k=1} \\
&= (1-p) + \frac{2p-1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{x_k=1}.
\end{aligned} \tag{0.3}$$

On rappelle que $z = \mathbb{P}(X_{n+1} = 1 | X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n)$. On peut ainsi déduire que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{n+1} = 1) &= \mathbb{E} [\mathbb{P}(X_{n+1} = 1 | X_1, \dots, X_n)] \\ &= (1 - p) + \frac{2p - 1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[\mathbb{1}_{X_k=1}] \\ &= (1 - p) + \frac{2p - 1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(X_k = 1).\end{aligned}$$

□

Le but du chapitre suivant est d'étudier la convergence de la marche de l'éléphant. Pour cela, nous allons utiliser un théorème de convergence pour les martingales.

CHAPITRE 1

MARTINGALES ET MARCHE ALÉATOIRE DE L'ÉLÉPHANT

Il existe différentes façons d'étudier la marche de l'éléphant. Dans cette section, nous allons nous intéresser à l'approche martingale de la marche. Et pour cela, nous allons tout d'abord faire quelques rappels de la théorie des martingales.

1.1 Les martingales et leur comportement asymptotique

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité.

Définition 1.1 *La suite (\mathcal{F}_n) est une filtration si les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

1. $\forall n, \mathcal{F}_n$ est une tribu telle que $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}$,
2. $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$.

Définition 1.2 *Une suite $(X_n)_{n \geq 0}$ est une (\mathcal{F}_n) -martingale si les trois conditions suivantes sont satisfaites :*

- 1) $\forall n, \mathbb{E}[|X_n|] < +\infty$; c'est à dire X_n est intégrable,
- 2) X_n est \mathcal{F}_n -mesurable,
- 3) $\forall n \geq 0, \mathbb{E}[X_{n+1} | \mathcal{F}_n] = X_n$.

Dans ce mémoire, L^2 désigne l'ensemble des classes d'équivalences pour la relation « d'égalité presque sûr » des v.a réelles de carrés intégrables (c'est à dire $\mathbb{E}[X^2] < +\infty$).

Nous allons construire une martingale, notée (M_n) , à partir de la marche de l'éléphant ; ensuite, à l'aide de la théorie des martingales, nous allons étudier le comportement asymptotique de M_n .

Le théorème suivant est tiré du livre de David Williams, (David, 1991).

Théorème 1.3 (Théorème de convergence des martingales) *Soit (M_n) une martingale telle que $M_n \in L^2$, pour tout $n \geq 0$. Alors, nous avons que :*

(M_n) est bornée dans L^2 si et seulement si $\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{E}[(M_k - M_{k-1})^2] < +\infty$.

Et quand ceci est obtenu, il existe alors une variable M_∞ telle que

$$M_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p.s.} M_\infty \quad \text{et dans } L^2.$$

Vérifions si S_n est une martingale

On rappelle que la position de l'éléphant est donnée par

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i,$$

où les pas (X_n) ont été introduits dans la section 0.2.1. Posons

$$\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

la filtration naturelle de la marche de l'éléphant. Nous voulons construire une martingale à partir de la marche de l'éléphant. Commençons par vérifier si S_n est une (\mathcal{F}_n) -martingale ou non.

i) Nous savons déjà que (S_n) est (\mathcal{F}_n) -mesurable ; car toute l'information sur les pas précédents de l'éléphant est connue et contenue dans (\mathcal{F}_n) .

ii) S_n est intégrable pour tout n car :

$$S_n = \sum_{k=1}^n X_k$$

et $\mathbb{E}[|S_n|] \leq \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[|X_k|] \leq n$. Ainsi, (S_n) est (\mathcal{F}_n) -mesurable et intégrable.

iii) Évaluons $\mathbb{E}[S_{n+1}|\mathcal{F}_n]$: on a

$$\mathbb{E}[S_{n+1}|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[S_n + X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[S_n|\mathcal{F}_n] + \mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = S_n + \mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n],$$

car $\mathbb{E}[S_n|\mathcal{F}_n] = S_n$ puisque (S_n) est (\mathcal{F}_n) -mesurable. Ainsi, pour conclure, il nous suffira de déterminer $\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n]$. On rappelle que

$$X_{n+1} = \begin{cases} +X_{U_{n+1}} & \text{avec probabilité } p, \\ -X_{U_{n+1}} & \text{avec probabilité } 1 - p, \end{cases}$$

où U_{n+1} est une variable uniforme sur $\{1, 2, \dots, n\}$ indépendante de $(X_k)_{1 \leq k \leq n}$. Comme X_{n+1} est à valeur dans $\{-1, +1\}$, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] &= \mathbb{P}(X_{n+1} = 1|\mathcal{F}_n) - \mathbb{P}(X_{n+1} = -1|\mathcal{F}_n) \\ &= \mathbb{P}(X_{n+1} = 1|\mathcal{F}_n) - [1 - \mathbb{P}(X_{n+1} = 1|\mathcal{F}_n)] \\ &= 2\mathbb{P}(X_{n+1} = 1|\mathcal{F}_n) - 1.\end{aligned}$$

Nous avons déjà démontré dans l'équation (0.3) que $\mathbb{P}(X_{n+1} = 1|\mathcal{F}_n) = (1-p) + \frac{2p-1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{X_k=1}$.

On déduit

$$\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = 2 \left[(1-p) + \frac{2p-1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{X_k=1} \right] - 1. \quad (1.1)$$

Nous allons maintenant exprimer S_n en fonction de $\sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{X_k=1}$ et de n . On a

$$\begin{aligned}S_n &= \sum_{k=1}^n X_k = \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{X_k=1} - \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{X_k=-1} \\ &= \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{X_k=1} - \sum_{k=1}^n (1 - \mathbb{1}_{X_k=1}) \\ &= 2 \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{X_k=1} - n.\end{aligned}$$

On déduit que $\sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{X_k=1} = \frac{n+S_n}{2}$, que nous allons remplacer dans l'expression (1.1) de $\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n]$.

Ainsi, on obtient finalement

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] &= 2 \left((1-p) + \frac{2p-1}{n} \frac{n+S_n}{2} \right) - 1 \\ &= 2(1-p) + \frac{2p-1}{n} (n+S_n) - 1 \\ &= \left(\frac{2p-1}{n} \right) S_n.\end{aligned} \quad (1.2)$$

On déduit ainsi que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[S_{n+1}|\mathcal{F}_n] &= S_n + \frac{2p-1}{n} S_n \\ &= \left(1 + \frac{2p-1}{n} \right) S_n \\ &\neq S_n.\end{aligned} \quad (1.3)$$

On voit bien que (S_n) n'est pas une (\mathcal{F}_n) -martingale. Cependant on va essayer de construire une martingale à partir de (S_n) ; et ensuite utiliser le théorème de convergence des martingales pour étudier le comportement asymptotique de la marche de l'éléphant.

1.1.1 Martingale associée à la marche de l'éléphant

Cette section repose sur l'article (Bercu, 2017). Nous allons détailler les différentes étapes à suivre pour construire une martingale à partir de la marche de l'éléphant; car l'article (Bercu, 2017) ne fait pas toutes ces étapes.

Posons $M_n = a_n S_n$ et

$$\gamma_n = 1 + \frac{2p-1}{n}.$$

Nous souhaitons trouver une suite de réels (a_n) tels que $\mathbb{E}[a_{n+1}S_{n+1}|\mathcal{F}_n] = a_n S_n$, afin que $M_n = a_n S_n$ soit une (\mathcal{F}_n) -martingale.

Comme $\mathbb{E}[a_{n+1}S_{n+1}|\mathcal{F}_n] = a_{n+1}\mathbb{E}[S_{n+1}|\mathcal{F}_n]$, alors M_n est une martingale si $a_{n+1}\mathbb{E}[S_{n+1}|\mathcal{F}_n] = a_n S_n$. D'après le calcul (1.3), on doit alors avoir

$$a_{n+1}\gamma_n S_n = a_n S_n.$$

Nous avons donc l'égalité suivante : $\frac{a_{n+1}}{a_n} = (\gamma_n)^{-1}$.

Écrivons a_n en fonction de γ_k et $a_1 = 1$.

$$\begin{aligned} a_n &= \left(\frac{a_n}{a_{n-1}}\right) \cdot \left(\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\right) \cdot \left(\frac{a_{n-2}}{a_{n-3}}\right) \dots \left(\frac{a_2}{a_1}\right) \cdot \left(\frac{a_1}{1}\right) \\ &= (\gamma_{n-1})^{-1} \cdot (\gamma_{n-2})^{-1} \cdot (\gamma_{n-3})^{-1} \dots (\gamma_2)^{-1} \cdot (\gamma_1)^{-1} \cdot \frac{a_1}{1} \\ &= \prod_{k=1}^{n-1} \gamma_k^{-1} \times a_1 \\ &= \prod_{k=1}^{n-1} \gamma_k^{-1}, \end{aligned}$$

en posant $a_1 = 1$.

On définit par conséquent $a_n = \prod_{k=1}^{n-1} \gamma_k^{-1}$, avec $a_1 = 1$. Vérifions donc que $M_n = a_n S_n$ est bien une

(\mathcal{F}_n) -martingale. En effet, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[M_{n+1}|\mathcal{F}_n] &= a_{n+1}\mathbb{E}[S_{n+1}|\mathcal{F}_n] \\ &= a_{n+1}\gamma_n S_n = a_n S_n = M_n.\end{aligned}$$

Ceci nous permet de conclure :

Proposition 1.4 *Le processus (M_n) avec $M_n = a_n S_n$, où $a_1 = 1$ et pour $n \geq 2$*

$$a_n = \prod_{k=1}^{n-1} \gamma_k^{-1} \quad \text{avec } \gamma_k = 1 + \frac{2p-1}{k}, \quad (1.4)$$

est une (\mathcal{F}_n) -martingale.

1.1.2 Comportement asymptotique de la martingale associée à la marche de l'éléphant

Dans cette section, nous allons utiliser le théorème 1.3 pour étudier la convergence de M_n .

i) On introduit, pour $n \geq 1$, les incréments et la variation quadratique de M

$$\begin{aligned}\Delta M_n &= M_n - M_{n-1}, \\ < M >_n &= \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[(\Delta M_k)^2 | \mathcal{F}_{k-1}].\end{aligned}$$

On remarque que $\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{E}[(M_k - M_{k-1})^2] = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}[< M >_n] = \mathbb{E}\left[\lim_{n \rightarrow +\infty} < M >_n\right]$, par le théorème de convergence monotone pour la seconde égalité.

Nous définissons ϵ_n tel que $\Delta M_n = a_n \epsilon_n$, ce implique que $\epsilon_n = \frac{\Delta M_n}{a_n}$ et donc

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n a_k \epsilon_k &= \sum_{k=1}^n \Delta M_k \\ &= \sum_{k=1}^n (M_k - M_{k-1}) \\ &= -M_0 + M_n = M_n,\end{aligned}$$

car $S_0 = 0$.

ii) Dans le théorème 1.3, on retrouve l'expression $\mathbb{E}[(\Delta M_n)^2 | \mathcal{F}_{n-1}]$ que nous nous proposons d'évaluer.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(\Delta M_n)^2 | \mathcal{F}_{n-1}] &= \mathbb{E}[(M_n - M_{n-1})^2 | \mathcal{F}_{n-1}] \\ &= \mathbb{E}[(M_n)^2 | \mathcal{F}_{n-1}] + (M_{n-1})^2 - 2(M_{n-1})\mathbb{E}[M_n | \mathcal{F}_{n-1}].\end{aligned}$$

Étant donné que M_{n-1} est mesurable par rapport à \mathcal{F}_{n-1} , on a $\mathbb{E}[(M_{n-1})^2|\mathcal{F}_{n-1}] = (M_{n-1})^2$.

De plus, $2\mathbb{E}[M_n \cdot M_{n-1}|\mathcal{F}_{n-1}] = 2M_{n-1}\mathbb{E}[M_n|\mathcal{F}_{n-1}]$. Par hypothèse (M_n) étant une (\mathcal{F}_n) -martingale, nous avons $\mathbb{E}[M_n|\mathcal{F}_{n-1}] = M_{n-1}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(\Delta M_n)^2|\mathcal{F}_{n-1}] &= \mathbb{E}[(M_n)^2|\mathcal{F}_{n-1}] + (M_{n-1})^2 - 2(M_{n-1}) \cdot (M_{n-1}) \\ &= \mathbb{E}[(M_n)^2|\mathcal{F}_{n-1}] - (M_{n-1})^2.\end{aligned}\tag{1.5}$$

Nous allons nous servir du fait que $M_n = a_n S_n$, et $S_n = S_{n-1} + X_n$ pour calculer $\mathbb{E}[(M_n)^2|\mathcal{F}_{n-1}]$.

On a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(M_n)^2|\mathcal{F}_{n-1}] &= \mathbb{E}[(a_n)^2(S_n)^2|\mathcal{F}_{n-1}] \\ &= (a_n)^2\mathbb{E}[(S_{n-1} + X_n)^2|\mathcal{F}_{n-1}] \\ &= (a_n)^2[\mathbb{E}[(S_{n-1})^2|\mathcal{F}_{n-1}] + \mathbb{E}[(X_n)^2|\mathcal{F}_{n-1}] + 2\mathbb{E}[(S_{n-1}) \cdot (X_n)|\mathcal{F}_{n-1}]].\end{aligned}$$

Étant donné que S_{n-1} est mesurable par rapport à \mathcal{F}_{n-1} , $\mathbb{E}[(S_{n-1})^2|\mathcal{F}_{n-1}] = (S_{n-1})^2$. De plus, on a $(X_n)^2 = 1$ car les pas sont à valeurs dans $\{-1, +1\}$. Ainsi,

$$\mathbb{E}[(M_n)^2|\mathcal{F}_{n-1}] = (a_n)^2 [(S_{n-1})^2 + 1 + 2S_{n-1} \cdot \mathbb{E}[X_n|\mathcal{F}_{n-1}]].\tag{1.6}$$

Calculons maintenant calculer $\mathbb{E}[X_n|\mathcal{F}_{n-1}]$. D'après l'équation (1.2), nous savons déjà que :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_n|\mathcal{F}_{n-1}] &= \frac{2p-1}{n-1} S_{n-1} \\ &= (\gamma_{n-1} - 1) S_{n-1}.\end{aligned}$$

En remplaçant cette formule dans l'équation (1.6) de $\mathbb{E}[(M_n)^2|\mathcal{F}_{n-1}]$, nous obtenons

$$\mathbb{E}[(M_n)^2|\mathcal{F}_{n-1}] = (a_n)^2 [(S_{n-1})^2 + 1 + 2(\gamma_{n-1} - 1)(S_{n-1})^2],\tag{1.7}$$

et via l'équation (1.5), on a finalement

$$\mathbb{E}[(\Delta M_n)^2|\mathcal{F}_{n-1}] = (a_n)^2 [(S_{n-1})^2 + 1 + 2(\gamma_{n-1} - 1)(S_{n-1})^2] - (a_{n-1})^2 (S_{n-1})^2.$$

Ce qui termine l'évaluation de $\mathbb{E}[(\Delta M_n)^2|\mathcal{F}_{n-1}]$.

1.1.2.1 Propriétés de ϵ_n

Nous avons introduit $\epsilon_n = \frac{\Delta M_n}{a_n}$ en i) ci-dessus. On en déduit que :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(\epsilon_n)^2 | \mathcal{F}_{n-1}] &= \mathbb{E} \left[\left(\frac{\Delta M_n}{a_n} \right)^2 | \mathcal{F}_{n-1} \right] \\ &= (S_{n-1})^2 + 1 + 2(S_{n-1})^2(\gamma_{n-1} - 1) - (\gamma_{n-1})^2(S_{n-1})^2 \\ &= 1 - (S_{n-1})^2(\gamma_{n-1} - 1)^2.\end{aligned}$$

De plus, comme $\gamma_{n-1} - 1 = \frac{2p-1}{n-1}$, alors

$$\mathbb{E}[(\epsilon_n)^2 | \mathcal{F}_{n-1}] = 1 - (2p-1)^2 \left(\frac{S_{n-1}}{n-1} \right)^2. \quad (1.8)$$

Proposition 1.5 *Les propriétés suivantes sont vérifiées :*

- i) si $p = 1/2$, alors $\mathbb{E}[(\epsilon_n)^2 | \mathcal{F}_{n-1}] = 1$.
- ii) $\sup_{n \geq 1} \mathbb{E}[(\epsilon_n)^2 | \mathcal{F}_{n-1}] \leq 1$.

Preuve.

i) Évident à partir des expressions (1.8).

ii) En effet, pour tout $n \geq 1$, on a $-1 \leq \frac{S_{n-1}}{n-1} \leq 1$, et le terme $(2p-1)^2 \left(\frac{S_{n-1}}{n-1} \right)^2$ est positif, alors

$$\mathbb{E}[(\epsilon_n)^2 | \mathcal{F}_{n-1}] = 1 - (2p-1)^2 \left(\frac{S_{n-1}}{n-1} \right)^2 \leq 1.$$

□

Afin d'utiliser le théorème 1.3 pour étudier la convergence de M_n , nous allons examiner la série suivante :

$\langle M \rangle_n = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[(\Delta M_k)^2 | \mathcal{F}_{k-1}]$, avec $\Delta M_k = a_k \epsilon_k$. D'après l'expression (1.8), on a

$$\begin{aligned}\langle M \rangle_n &= \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[(\Delta M_k)^2 | \mathcal{F}_{k-1}] = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[(a_k \epsilon_k)^2 | \mathcal{F}_{k-1}] \\ &= \sum_{k=1}^n (a_k)^2 \mathbb{E}[(\epsilon_k)^2 | \mathcal{F}_{k-1}] \\ &= \sum_{k=1}^n (a_k)^2 \left[1 - (2p-1)^2 \left(\frac{S_{k-1}}{k-1} \right)^2 \right] \\ &= \sum_{k=1}^n (a_k)^2 - (2p-1)^2 \sum_{k=1}^n (a_k)^2 \left(\frac{S_{k-1}}{k-1} \right)^2.\end{aligned} \quad (1.9)$$

Remarque 1.6 Pour tout $k \geq 1$,

$$a_k = \frac{\Gamma(k)\Gamma(2p)}{\Gamma(k+2p-1)},$$

avec $a_k = \prod_{i=1}^{k-1} \gamma_i^{-1}$, et $\gamma_i = 1 + \frac{2p-1}{i}$.

Preuve. On procède par récurrence. Pour $k = 1$, on a $a_1 = \prod_{i=1}^0 \gamma_i^{-1} = 1$; car le produit est vide.

Pour $k = 2$, on a

$$a_2 = \prod_{i=1}^1 \gamma_i^{-1} = \frac{1}{2p} = \frac{\Gamma(2)\Gamma(2p)}{\Gamma(2+2p-1)} = \frac{\Gamma(2)\Gamma(2p)}{\Gamma(2p+1)} = \frac{\Gamma(2p)}{2p\Gamma(2p)}.$$

Supposons que $a_k = \frac{\Gamma(k)\Gamma(2p)}{\Gamma(k+2p-1)}$, et montrons que $a_{k+1} = \frac{\Gamma(k+1)\Gamma(2p)}{\Gamma(k+1+2p-1)}$.

En effet,

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= a_k \gamma_k^{-1} = \frac{\Gamma(k)\Gamma(2p)}{\Gamma(k+2p-1)} \frac{k}{k+2p-1} \\ &= \frac{k\Gamma(k)\Gamma(2p)}{(k+2p-1)\Gamma(k+2p-1)} = \frac{\Gamma(k+1)\Gamma(2p)}{\Gamma(k+1+2p-1)}. \end{aligned}$$

Ce qui démontre bien que $a_k = \frac{\Gamma(k)\Gamma(2p)}{\Gamma(k+2p-1)}$. \square

1.1.2.2 Étude de la convergence de $\langle M \rangle_n$

Commençons par énumérer les trois conditions à respecter pour que $\langle M \rangle_n$ converge :

i) Par définition, $\langle M \rangle_n$ est positive car il s'agit d'une somme de carrés.

ii) $\langle M \rangle_{n+1} = \langle M \rangle_n + \mathbb{E}[(\Delta M_{n+1})^2 | \mathcal{F}_n]$; et donc, $\langle M \rangle_n$ est croissante. De plus, d'après (1.9),

$\forall n \geq 1$, on a que

$$(1 - (2p-1)^2) \sum_{k=1}^n (a_k)^2 \leq \langle M \rangle_n \leq \sum_{k=1}^n (a_k)^2.$$

iii) Donc, la série $\langle M \rangle_n$ converge si et seulement si $V_n = \sum_{k=1}^n (a_k)^2$ converge.

À l'aide de la formule de Stirling, nous allons réécrire a_k ; cela nous permettra d'étudier plus facilement la convergence de $\sum_{k=1}^n (a_k)^2$.

On rappelle la formule de Stirling :

$$\Gamma(x+1) \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi x} \left(\frac{x}{e}\right)^x.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\Gamma(k) &\underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi(k-1)} \left(\frac{k-1}{e} \right)^{k-1} \\
\Gamma(k+2p-1) &\underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi(k+2p-2)} \left(\frac{k+2p-2}{e} \right)^{k+2p-2} \\
\frac{\Gamma(k)}{\Gamma(k+2p-1)} &\underset{+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2\pi(k-1)}}{\sqrt{2\pi(k+2p-2)}} \left(\frac{(\frac{k-1}{e})^{k-1}}{(\frac{k+2p-2}{e})^{k+2p-2}} \right) \\
&\underset{+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{(k-1)}}{\sqrt{(k+2p-2)}} \left(\frac{(k-1)^{k-1}}{e^{k-1}} \frac{e^{k+2p-2}}{(k+2p-2)^{k+2p-2}} \right) \\
&\underset{+\infty}{\sim} \left(\frac{(k-1)^{k-1} e^{2p-1}}{(k+2p-2)^{k+2p-2}} \right),
\end{aligned}$$

car

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{k-1}}{\sqrt{k+2p-2}} = 1.$$

Nous poursuivons en examinant le rapport suivant : $\frac{(k-1)^{k-1}}{(k+2p-2)^{k+2p-2}}$.

Rappel sur les séries de Riemann :

Soit α un nombre réel. La série $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$ (p-séries).

On remarque que

$$\begin{aligned}
\frac{(k-1)^{k-1}}{(k+2p-2)^{k+2p-2}} &= \frac{(k-1)^{k-1}}{(k+2p-2)^{k-1} (k+2p-2)^{2p-1}} \\
&= \left(\frac{k-1}{k+2p-2} \right)^{k-1} \frac{1}{(k+2p-2)^{2p-1}} \\
&= e^{(k-1) \ln(\frac{k-1}{k+2p-2})} \frac{1}{(k+2p-2)^{2p-1}}.
\end{aligned}$$

Or le développement de Taylor d'ordre 1 de la fonction $\ln(1+x)$ au voisinage de 0 est la suivante : $\ln(1+x) = x + O(x)$. Donc, on a :

$$\begin{aligned}
\ln\left(\frac{k-1}{k+2p-2}\right) &= \ln\left(1 + \frac{1-2p}{k+2p-2}\right) \\
&\underset{+\infty}{\sim} \frac{1-2p}{k+2p-2},
\end{aligned}$$

car

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1-2p}{k+2p-2} = 0.$$

On a donc

$$\begin{aligned}
\left(\frac{k-1}{k+2p-2} \right)^{k-1} &\underset{+\infty}{\sim} e^{(k-1) \left(\frac{1-2p}{k+2p-2} \right)} \\
&\underset{+\infty}{\sim} e^{(1-2p)},
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(k)}{\Gamma(k+2p-1)} &\underset{+\infty}{\sim} e^{(1-2p)} e^{(2p-1)} \left(\frac{1}{k+2p-2}\right)^{2p-1} \\ &\underset{+\infty}{\sim} \left(\frac{1}{k+2p-2}\right)^{2p-1} \\ &\underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{(k)^{2p-1}}. \end{aligned}$$

Comme $a_k = \frac{\Gamma(k)\Gamma(2p)}{\Gamma(k+2p-1)}$, on déduit alors

$$(a_k)^2 \underset{+\infty}{\sim} \frac{(\Gamma(2p))^2}{(k)^{4p-2}}.$$

Et d'après la propriété sur les séries de Riemann, $\sum_{k=1}^n (a_k)^2$ converge si $\alpha = 4p-2 > 1$; c'est à dire $p > \frac{3}{4}$.

Maintenant, nous allons utiliser le théorème 1.3 de convergence pour conclure l'étude de la convergence de la martingale $(M_n)_{n \geq 0}$. On rappelle que $\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{E}[(M_k - M_{k-1})^2] = \mathbb{E}\left[\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle M \rangle_n\right]$, et d'après l'équation (1.9), on a

$$\langle M \rangle_n = \sum_{k=1}^n (a_k)^2 - (2p-1)^2 \sum_{k=1}^n (a_k)^2 \left(\frac{S_{n-1}}{n-1}\right)^2.$$

Plus concrètement, étudions la convergence de $V_n = \sum_{k=1}^n (a_k)^2$ pour toutes les valeurs possibles de p .

Étant donné que la suite $(\langle M \rangle_n)_{n \geq 0}$ est croissante, positive et avec

$$(1 - (2p-1)^2)V_n \leq \langle M \rangle_n \leq V_n,$$

il nous suffira d'étudier la convergence de V_n pour conclure l'étude de la convergence de $\langle M \rangle_n$.

1. Cas 1 : $\frac{3}{4} < p \leq 1$, cas d'un régime super diffusif. On sait d'après les calculs précédents que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k)^2 < \infty.$$

De plus, on remarque que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\Gamma(k)\Gamma(2p)}{\Gamma(k+2p-1)}\right)^2 \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\Gamma(k+1)\Gamma(2p)}{\Gamma(k+2p)}\right)^2 \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k!k!k!)\Gamma(2p)\Gamma(2p)}{(k!)\Gamma(k+2p)\Gamma(k+2p)} 1^k, \end{aligned}$$

car $\Gamma(k+1) = k!$ pour tout k entier positif.

Lemme 1.7 On note pour $x \in \mathbb{R}$ et $k \geq 0$

$$(x)_k = x(x+1)(x+2)(x+3) \dots (x+k-1),$$

avec la convention $(x)_0 = 1$. On a $\frac{\Gamma(2p)}{\Gamma(k+2p)} = \frac{1}{(2p)_k}$.

Preuve. En effet,

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(2p)}{\Gamma(k+2p)} &= \frac{\Gamma(2p)}{\Gamma(k+2p-1+1)} \\ &= \frac{\Gamma(2p)}{(k+2p-1)\Gamma(k+2p-1)} \\ &= \frac{\Gamma(2p)}{(k+2p-1)\Gamma(k+2p-2+1)} \\ &= \frac{\Gamma(2p)}{(k+2p-1)(k+2p-2)\Gamma(k+2p-2)} \\ &= \frac{\Gamma(2p)}{(k+2p-1)(k+2p-2) \dots (2p+k-k)\Gamma(2p)} \\ &= \frac{1}{(k+2p-1)(k+2p-2) \dots (2p+k-k)} \\ &= \frac{1}{(2p)(2p+1)(2p+2) \dots (2p+k-1)} \\ &= \frac{1}{(2p)_k}. \end{aligned}$$

□

On peut alors réécrire

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1)_k (1)_k (1)_k \Gamma(2p) \Gamma(2p)}{(k!) \Gamma(k+2p) \Gamma(k+2p)} 1^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1)_k (1)_k (1)_k}{(k!) (2p)_k (2p)_k} 1^k \\ &= {}_3F_2 \left(\begin{matrix} 1, & 1, & 1 \\ 2p, & 2p \end{matrix} \middle| 1 \right), \end{aligned}$$

où ${}_3F_2$ est la fonction hypergéométrique généralisée définie de la façon suivante :

Soit a, b, c, d, e , et z des nombres réels ; k est un entier supérieur ou égal à 1. On a

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k (c)_k}{(k!) (d)_k (e)_k} z^k = {}_3F_2 \left(\begin{matrix} a, & b, & c \\ d, & e \end{matrix} \middle| z \right) = {}_3F_2(a, b, c, d, e; z).$$

Donc dans le cas super diffusif, (V_n) converge ; ce qui implique aussi que $(\langle M \rangle_n)$ converge, et donc la martingale (M_n) converge p.s. et dans L^2 d'après le théorème 1.3.

2. Cas 2 : Régime critique, $p = \frac{3}{4}$, nous admettons le résultat (A.9) de l'article de (Bercu, 2017) :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{V_n}{\log n} = \frac{\pi}{4}.$$

D'après l'équation (1.9), nous pouvons écrire que $(1 - (1 - 2p)^2)V_n \leq (\langle M \rangle_n)$. Comme

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = +\infty,$$

on déduit

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle M \rangle_n = +\infty,$$

ce qui implique que $\langle M \rangle_n$ ne converge pas aussi.

3. Cas 3 : Régime diffusif, $0 \leq p < \frac{3}{4}$, nous admettons aussi le résultat (A.8) de l'article de (Bercu, 2017) :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{V_n}{n^{3-4p}} = \frac{(\Gamma(2p))^2}{3-4p}.$$

Comme $(1 - (1 - 2p)^2)V_n \leq (\langle M \rangle_n)$, d'après l'équation (1.9), et comme

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = +\infty,$$

on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle M \rangle_n = +\infty,$$

ce qui implique que $\langle M \rangle_n$ ne converge pas aussi.

Pour conclure cette section, nous avons démontré les résultats suivants.

Proposition 1.8 *Les propriétés suivantes sont vérifiées :*

1. *Le processus de la marche aléatoire $(S_n)_{n \geq 0}$ de l'éléphant n'est pas une martingale. Par contre, le processus $(M_n)_{n \geq 0}$, avec $M_n = a_n S_n$ et a_n défini par (1.4), est une martingale.*
2. *Lorsque le paramètre de mémoire $p \in (\frac{3}{4}, 1]$, la martingale $(M_n)_{n \geq 0}$ converge p.s. et dans L^2 .*

Le graphe de la Figure 1.1 est une simulation d'une trajectoire de la marche de l'éléphant avec les paramètres : $q = 0.3$, $p = 0.45$, $n = 5000$. Le code R pour la Figure 1.1 est fourni en annexe A.1.

Afin de visualiser la divergence de la marche de l'éléphant, nous présentons dans la figure 1.2 une simulation

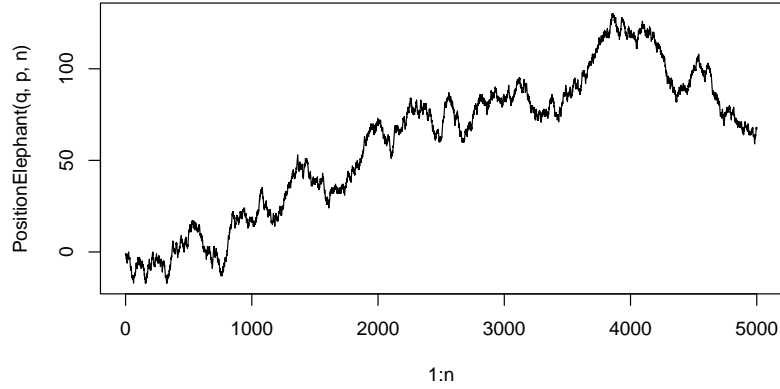


FIGURE 1.1 Simulation d'une trajectoire de la marche de l'éléphant dans le cas diffusif

de 5 trajectoires de paramètres $N = 5$, $n = 5000$, $p = 0.45$ et $q = 0.3$, tous sur le même graphique (voir code R en annexe A.2) .

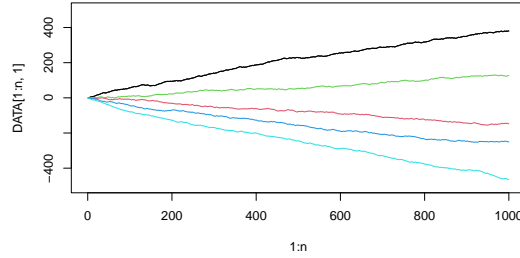


FIGURE 1.2 5 trajectoires de S_n

Cependant, pour visualiser la convergence de $M_n = a_n S_n$ vers une variable aléatoire, dans le cas super diffusif, nous allons simuler 5 trajectoires de M_n avec a_n défini par (1.4) et $p > 3/4$. On observe la convergence pour chacune des trajectoires de M_n ; mais la limite n'est pas la même pour les trajectoires. Ce qui confirme la convergence de M_n vers une variable aléatoire. La figure 1.3 suivante est une simulation de 5 trajectoires de M_n avec les paramètres $n = 30000$, $p = 0.85$ et $q = 0.3$, (voir code R en annexe A.3) .

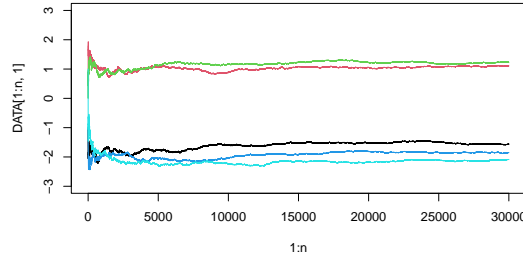


FIGURE 1.3 Cinq trajectoires de $M_n = a_n S_n$

1.2 Principaux résultats

Cette section repose sur l'article de (Bercu, 2017).

Nous avons associé à la marche de l'éléphant une martingale qui converge lorsque $p > 3/4$. Cependant, quand $p \leq 3/4$, on ne sait pas très bien ce qui se passe. Nous allons présenter ici des résultats plus précis de convergence et nous allons aussi faire leurs preuves. Pour cela nous allons utiliser les deux théorèmes suivants tirés du livre de Duflo, (Duflo, 1997).

On se place sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, muni d'une filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$. Tout d'abord on rappelle la notion de domination.

Définition 1.9 *Pour toutes suites (w_n) et (u_n) , $w_n = O(u_n)$ si et seulement s'il existe une constante $C > 0$ et un rang $n_0 \geq 0$ tels que $\forall n \geq n_0, w_n \leq C u_n$.*

On rappelle que la variation quadratique de M , notée $\langle M \rangle$, d'une martingale $(M_n)_{n \geq 0}$ est défini par

$$\langle M \rangle_n = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[(M_k - M_{k-1})^2 | \mathcal{F}_{k-1}].$$

Théorème 1.10 (Théorème 1.3.15 dans (Duflo, 1997)) *Supposons que M_n est une martingale de carré intégrale. On note $\langle M \rangle_n$ son crochet et on pose $\langle M \rangle_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle M \rangle_n$.*

1. *Sur l'événement $\{\langle M \rangle_\infty < \infty\}$, il existe une variable aléatoire M_∞ finie telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} M_n = M_\infty$ p.s.*

2. Sur l'événement $\{\langle M \rangle_\infty = \infty\}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{M_n}{\langle M \rangle_\infty} = 0$. Plus précisément, pour tout $\lambda > 0$, on a p.s.

$$\frac{M_n}{\langle M \rangle_\infty} = O\left(\sqrt{\frac{(\log \langle M \rangle_n)^{1+\lambda}}{\langle M \rangle_n}}\right).$$

Théorème 1.11 (Théorème 1.3.24 dans (Duflo, 1997)) Supposons que (ϵ_n) est une suite de variables de carré intégrable adaptée à la filtration \mathbb{F} vérifiant les conditions suivantes

- il existe une variable aléatoire C positive finie telle que $\sup_{n \geq 0} \mathbb{E}[(\epsilon_{n+1})^2 | \mathcal{F}_n] \leq C$, et
- $\mathbb{E}[\epsilon_{n+1} | \mathcal{F}_n] = 0$.

Considérons une suite (ϕ_n) de variables aléatoires adaptée à la filtration \mathbb{F} .

Posons $V_n = \sum_{k=1}^n (\phi_k)^2$ et $M_n = \sum_{k=1}^n \phi_{k-1} \epsilon_k$ et $M_n^* = \sup_{k \leq n} |M_k|$.

Alors on a :

1. $(V_{n-1})^{-\frac{1}{2}} M_n$ est de carré intégrable, et si C est une constante finie, alors

$$\mathbb{E}[(M_n^*)^2] = O(\mathbb{E}[V_{n-1}]).$$

2. sur l'événement $\{V_\infty < \infty\}$, $(M_n)_{n \geq 0}$ converge p.s.
3. sur l'événement $\{V_\infty = \infty\}$, on a une loi des grands nombres :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{M_n}{V_{n-1}} = 0 \quad p.s.$$

La vitesse de convergence de cette loi des grands nombres peut être spécifiée comme suit :

- 3a. $\forall \lambda > 0$, on a : $|M_n|^2 = O((\log V_{n-1})^{1+\lambda} V_{n-1})$ et

$$\sum |M_n|^2 |\phi_n|^2 \left(V_n V_{n-1} (\log V_n)^{1+\lambda} \right)^{-1} < \infty.$$

- 3b. Si C est une constante, et si $\exists \ell > 2$ tel que $\sup_{n \geq 0} (\mathbb{E}[|\epsilon_{n+1}|^\ell | \mathcal{F}_n]) < \infty$, alors on a

$$|M_n|^2 = O((\log V_{n-1}) V_{n-1}),$$

$$\sum_{k=1}^n |M_k|^2 |\phi_k|^2 (V_{k-1} V_k)^{-1} = O(\log V_n).$$

On considère la filtration naturelle $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ de la marche de l'éléphant : $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \dots, X_n)$. On rappelle que la martingale associée à la marche de l'éléphant est définie par $M_n = a_n S_n$, avec $a_1 = 1$ et

$$a_n = \prod_{k=1}^{n-1} \gamma_k^{-1} \quad \text{avec } \gamma_k = 1 + \frac{2p-1}{k}.$$

De plus, en introduisant $\epsilon_n = \frac{\Delta M_n}{a_n}$ avec $\Delta M_n = M_n - M_{n-1}$, d'après la proposition 1.5, on a

$$\mathbb{E}[\epsilon_{n+1}|\mathcal{F}_n] = 0 \quad \text{et} \quad \sup_{n \geq 1} \mathbb{E}[(\epsilon_n)^2|\mathcal{F}_{n-1}] \leq 1.$$

Par définition de $(\epsilon_n)_{n \geq 1}$ et comme $M_0 = 0$, on remarque facilement que

$$M_n = \sum_{k=1}^n a_k \epsilon_k.$$

Par conséquent, la martingale $(M_n)_{n \geq 0}$ satisfait les hypothèses du théorème 1.11, avec $(\phi_n)_{n \geq 1}$ suite déterministe donnée par $\phi_n = a_{n+1}$.

1.2.1 Convergence de la suite $\frac{S_n}{n}$ dans le cas diffusif

Dans cette section nous allons démontrer le théorème suivant :

Théorème 1.12 *Dans le cas diffusif, $0 \leq p < \frac{3}{4}$, on a la limite suivante :*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n} = 0 \quad p.s.$$

Preuve. Nous savons que $\langle M \rangle_n \leq V_n$ où $V_n = \sum_{k=1}^n (a_k)^2$, et nous avons admis que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{V_n}{n^{3-4p}} = \frac{(\Gamma(2p))^2}{3-4p} := \ell, \quad (1.10)$$

ce qui implique que $V_\infty = +\infty$. D'après le théorème 1.11, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{M_n}{V_n} = 0 \quad p.s.$$

D'après la limite (1.10), ceci implique que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{M_n}{n^{3-4p}} = 0 \quad p.s.$$

Comme la suite (ϵ_n) est uniformément bornée dans L^4 (voir proposition 1.16 plus bas), d'après le théorème 1.11-3b, on a

$$|M_n|^2 = O((\log V_n)V_n),$$

ce qui implique $\frac{M_n^2}{V_n} = O(\log V_n)$. Il existe donc une constante $K > 0$ tel que $\frac{M_n^2}{V_n} \leq K \log V_n$.

D'après la limite (1.10), $V_n = O(n^{3-4p})$ et donc $\log V_n = O(\log n)$. De plus, il existe $C > 0$ tel que pour n assez grand $\frac{V_n}{n^{3-4p}} \leq C$.

Or,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{M_n}{n^{3-4p}} = 0 \quad p.s.$$

On a donc pour n assez grand

$$\frac{M_n^2}{n^{3-4p}} = \frac{M_n^2}{V_n} \frac{V_n}{n^{3-4p}} \leq \frac{M_n^2}{V_n} \cdot C \leq C \cdot K \cdot \log V_n.$$

D'où $\frac{M_n^2}{n^{3-4p}} = O(\log V_n)$, et donc $\frac{M_n^2}{n^{3-4p}} = O(\log n)$.

Par ailleurs,

$$\frac{M_n^2}{n^{3-4p}} = \frac{a_n^2 S_n^2}{n^{3-4p}} = \frac{S_n^2}{n} \frac{a_n^2}{n^{2-4p}}.$$

Or $a_n = \frac{\Gamma(n)\Gamma(2p)}{\Gamma(n+2p-1)}$. En utilisant la formules de Stirling, on sait que $a_n^2 \underset{+\infty}{\sim} \frac{Cste}{n^{2-4p}}$. Donc, comme $\frac{M_n^2}{n^{3-4p}} = O(\log n)$ et

$$\frac{S_n^2}{n} = \frac{M_n^2}{n^{3-4p}} \left(\frac{a_n^2}{n^{2-4p}} \right)^{-1},$$

on déduit que $\frac{S_n^2}{n} = O(\log n)$. Ainsi, on a

$$\frac{S_n^2}{n^2} = O\left(\frac{\log n}{n}\right),$$

avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log n}{n} = 0$, et donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n^2}{n^2} = 0 \quad p.s.$$

qui implique

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n} = 0 \quad p.s.$$

□

Dans la Figure 1.4, on observe une simulation de trajectoires de la suite $\frac{S_n}{n}$ avec les paramètres $q = 0, 3$, $p = 0, 45$, et $n = 5000$ (Code R pour la figure 1.4 en annexe) :

1.2.2 Convergence de la suite $\frac{S_n}{\sqrt{n \log n}}$ dans le cas critique

Dans le cas critique nous allons démontrer le comportement suivant de la marche de l'éléphant.

Théorème 1.13 Dans le cas critique, $p = \frac{3}{4}$, on a la limite suivante :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{\sqrt{n \log n}} = 0.$$

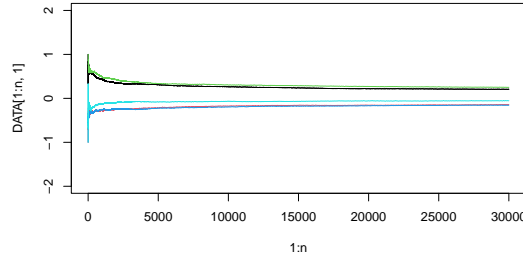


FIGURE 1.4 Cinq trajectoires de $\frac{S_n}{n}$ dans le cas diffusif

Preuve. On admet que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{V_n}{\log n} = \frac{\pi}{4}.$$

D'après la proposition 1.16 qui montre que la suite (ϵ_n) est uniformément bornée dans L^4 (voir plus bas), on peut déduire d'après le théorème 1.11-3b. que $\frac{M_n^2}{\log n} = O(\log \log n)$. Par ailleurs, comme $a_n = \frac{\Gamma(n)\Gamma(2p)}{\Gamma(n+2p-1)} = \frac{\Gamma(n)\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(n+\frac{1}{2})}$ pour $p = 3/4$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} na_n^2 = \frac{\pi}{4},$$

ce que nous allons démontrer à la fin de cette preuve.

On déduit,

$$\frac{M_n^2}{\log n} = \frac{a_n^2 S_n^2}{\log n} = \frac{S_n^2}{n \log n} (na_n^2) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{S_n^2}{n \log n} \frac{\pi}{4}.$$

Par conséquent, $\frac{S_n^2}{n \log n} = O(\log \log n)$, ce qui implique $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n^2}{n(\log n)^2} = 0$ et donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{\sqrt{n} \log n} = 0.$$

Il nous reste à démontrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} na_n^2 = \frac{\pi}{4}.$$

On rappelle que $a_n = \frac{\Gamma(n)\Gamma(2p)}{\Gamma(n+2p-1)} = \frac{\Gamma(n)\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(n+\frac{1}{2})}$ pour $p = \frac{3}{4}$. Ainsi que la formule de Stirling :

$$\forall x \in \mathbf{R}_+, \quad \Gamma(x+1) \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi x} \left(\frac{x}{e}\right)^x.$$

Par conséquent, comme $\Gamma(x) = \Gamma(x+1)/x$,

$$\Gamma(n) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{n}} \left(\frac{n}{e}\right)^n \quad \text{et} \quad \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{n + \frac{1}{2}}} \left(\frac{n + \frac{1}{2}}{e}\right)^{n + \frac{1}{2}}.$$

On fait le rapport des deux expressions :

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n + \frac{1}{2})} &\underset{+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{n}} \frac{\sqrt{n + \frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{n}{e}\right)^n \left(\frac{e}{n + \frac{1}{2}}\right)^{n + \frac{1}{2}} \\ &\underset{+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{n + \frac{1}{2}}}{\sqrt{n}} \frac{e^{n + \frac{1}{2}}}{e^n} \frac{n^n}{(n + \frac{1}{2})^{n + \frac{1}{2}}}. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Examinons l'expression : $\frac{n^n}{(n + \frac{1}{2})^{n + \frac{1}{2}}}$. On a

$$\begin{aligned} \frac{n^n}{(n + \frac{1}{2})^{n + \frac{1}{2}}} &= \left(\frac{n}{n + \frac{1}{2}}\right)^n \frac{1}{(n + \frac{1}{2})^{\frac{1}{2}}} = e^{\log\left(\frac{n}{n + \frac{1}{2}}\right)^n} \frac{1}{(n + \frac{1}{2})^{\frac{1}{2}}} \\ &= e^{n \log\left(\frac{n}{n + \frac{1}{2}}\right)} \frac{1}{(n + \frac{1}{2})^{\frac{1}{2}}}. \end{aligned}$$

Nous savons que $\log\left(\frac{n}{n + \frac{1}{2}}\right) = -\log\left(\frac{n + \frac{1}{2}}{n}\right) = -\log\left(1 + \frac{1}{2n}\right)$.

Or le développement de Taylor à l'ordre 1 de la fonction $\ln(1 + x)$ au voisinage de 0 est la suivante :

$$\ln(1 + x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + O(x).$$

Par conséquent, $\log\left(1 + \frac{1}{2n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$, et donc $n \log\left(1 + \frac{1}{2n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2}$. On déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{n \log\left(\frac{n}{n + \frac{1}{2}}\right)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n \log\left(1 + \frac{1}{2n}\right)} = e^{-\frac{1}{2}}.$$

De l'estimation (1.11), on déduit que $\frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n + \frac{1}{2})} \underset{+\infty}{\sim} e^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{n + \frac{1}{2}}}$, et

$$\begin{aligned} a_n &\underset{+\infty}{\sim} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\sqrt{n + \frac{1}{2}}}. \\ a_n^2 &\underset{+\infty}{\sim} \frac{(\Gamma\left(\frac{3}{2}\right))^2}{n + \frac{1}{2}}. \\ na_n^2 &\underset{+\infty}{\sim} \left(\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\right)^2 \frac{n}{n + \frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} na_n^2 = \left(\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 = \frac{\pi}{4},$$

car $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$. Ceci termine la démonstration du théorème 1.13. \square

Dans la Figure 1.5, on observe une simulation de trajectoires de la suite $\frac{S_n}{\sqrt{n \log n}}$ avec les paramètres $q = 0, 3$, $p = 0, 75$, et $n = 10000$ (Code R en annexe) :

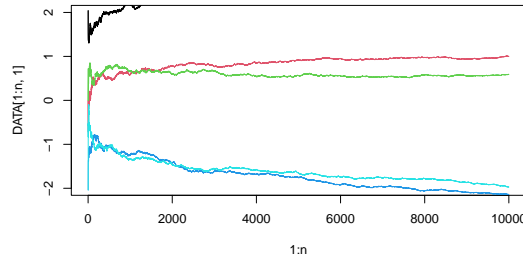


FIGURE 1.5 Cinq trajectoires de $\frac{S_n}{\sqrt{n \log n}}$ dans le cas critique

Dans l'article de Bercu, (Bercu, 2017), il est aussi démontré le résultat suivant de type théorème central limite :

Théorème 1.14 . Pour tout entier naturel n , nous avons la convergence en loi suivante :

$$\frac{S_n}{\sqrt{n \log n}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathbb{N}(0, 1).$$

Dans la Figure 1.6, on illustre cette convergence en loi de $\frac{S_n}{\sqrt{n \log n}}$ vers la loi normale pour les paramètres $q = 0, 3, p = 0, 75$, et $n = 5000$ (Code R en annexe) :

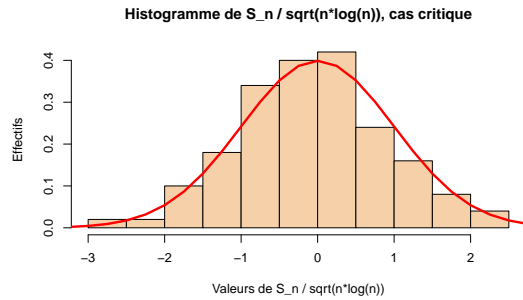


FIGURE 1.6 Comparaison de l'histogramme de $\frac{S_n}{\sqrt{n \log n}}$ avec une courbe gaussienne dans le cas critique

La courbe en rouge de la figure 1.6 est celle d'une loi normale centrée réduite. Cette courbe permet de visualiser la convergence de $\frac{S_n}{\sqrt{n \log n}}$ vers une loi normale centrée réduite dans le cas critique.

1.2.3 Convergence de la suite $\frac{S_n}{n^{2p-1}}$ dans le cas super diffusif

Nous étudions enfin le comportement limite de la marche de l'éléphant pour des paramètres de mémoire plus grand que $3/4$, i.e. dans le cas super diffusif.

Théorème 1.15 Dans le cas super diffusif, $\frac{3}{4} < p \leq 1$, il existe une variable aléatoire L telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n^{2p-1}} = L \quad p.s.$$

Nous avons aussi que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E} \left[\left| \frac{S_n}{n^{2p-1}} - L \right|^4 \right] = 0.$$

Preuve.

1. Nous allons commencer par démontrer que $a_n = \frac{\Gamma(n)\Gamma(2p)}{\Gamma(n+2p-1)}$ vérifie

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{2p-1} a_n = \Gamma(2p).$$

D'après la formule de Stirling, on a

$$\Gamma(n) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{n}} \left(\frac{n}{e}\right)^n \quad \text{et} \quad \Gamma(n+2p-1) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{n+2p-1}} \left(\frac{n+2p-1}{e}\right)^{n+2p-1}.$$

On fait le rapport des deux expressions :

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n+2p-1)} &\underset{+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{n}} \frac{\sqrt{n+2p-1}}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{n}{e}\right)^n \left(\frac{e}{n+2p-1}\right)^{n+2p-1} \\ &\underset{+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{n+2p-1}}{\sqrt{n}} \frac{e^{n+2p-1}}{e^n} \frac{n^n}{(n+2p-1)^{n+2p-1}} \\ &\underset{+\infty}{\sim} e^{2p-1} \frac{n^n}{(n+2p-1)^{n+2p-1}} \\ &\underset{+\infty}{\sim} e^{2p-1} \left(\frac{n}{n+2p-1}\right)^n \left(\frac{1}{n+2p-1}\right)^{2p-1}. \end{aligned}$$

Examinons l'expression $\left(\frac{n}{n+2p-1}\right)^n$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{n}{n+2p-1}\right)^n &= e^{\log\left(\frac{n}{n+2p-1}\right)^n} \\ &= e^{-n \log\left(1+\frac{2p-1}{n}\right)} \\ &\underset{+\infty}{\sim} e^{-(2p-1)}. \end{aligned}$$

Donc, $\frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n+2p-1)} \underset{+\infty}{\sim} e^{2p-1} e^{-(2p-1)} \left(\frac{1}{n+2p-1}\right)^{2p-1}$, et

$$\begin{aligned} a_n &\underset{+\infty}{\sim} \frac{\Gamma(2p)}{(n+2p-1)^{2p-1}} \\ n^{2p-1} a_n &\underset{+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{n+2p-1}\right)^{2p-1} \Gamma(2p), \end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{2p-1} a_n = \Gamma(2p).$$

2. Démontrons donc que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n^{2p-1}} = L$$

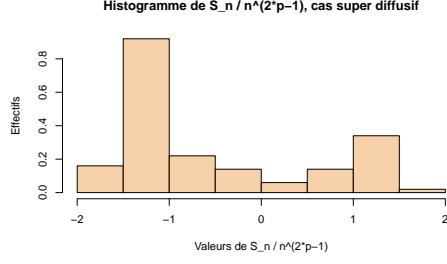
D'après la proposition 1.8, nous savons déjà que dans le cas super diffusif la martingale $(M_n)_{n \geq 0}$ converge p.s. et dans L^2 . Il existe donc une variable $M_\infty \in L^2$ telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} M_n = M_\infty = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \epsilon_k < +\infty.$$

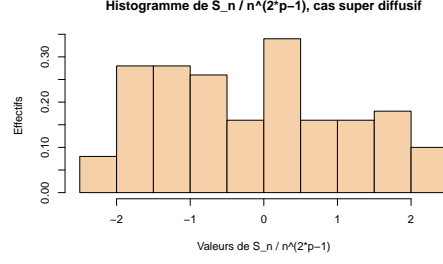
Comme $M_n = a_n S_n$ et $a_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\Gamma(2p)}{n^{2p-1}}$, on déduit qu'il existe une variable $L \in L^2$ telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n^{2p-1}} = L.$$

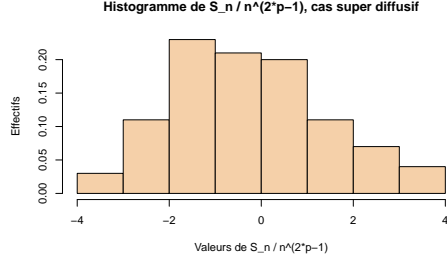
Les figures 1.7 représentent quelques histogrammes de $\frac{S_n}{n^{2p-1}}$ pour différentes valeurs de p et q dans le cas super diffusif. Ces histogrammes ont été réalisés à partir de 100 simulations de $\frac{S_n}{n^{2p-1}}$ pour $n = 10000$. On observe notamment que plus p est proche de 1 plus la loi est proche de la loi initiale. En effet, quand $p = 1$, l'éléphant ne fait que répéter le premier pas.



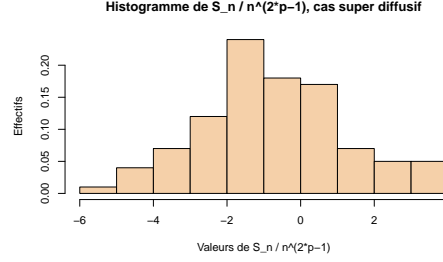
$$p = 0,95 \text{ et } q = 0,3$$



$$p = 0,90 \text{ et } q = 0,4$$



$$p = 0,85 \text{ et } q = 0,2$$



$$p = 0,80 \text{ et } q = 0,2$$

FIGURE 1.7 Histogramme de $\frac{S_n}{n^{2p-1}}$ cas super diffusif

3. Pour démontrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E} \left[\left| \frac{S_n}{n^{2p-1}} - L \right|^4 \right] = 0,$$

il nous suffira de montrer que (M_n) est borné sur L^4 ; c'est à dire $\sup_{n \geq 1} \mathbb{E}[|(M_n)^4|] < +\infty$. Nous avons déjà définie ϵ_n dans la section 1.1.2. Dans notre démonstration, nous allons utiliser l'expression de M_n qui est fonction de ϵ_n suivante : $M_n = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \epsilon_k$. C'est la raison pour laquelle, nous énonçons la proposition 1.16 qui donne quelques propriétés utiles de ϵ_n .

Proposition 1.16 Les propriétés suivantes sont vérifiées :

i)

$$\mathbb{E}[(\epsilon_n)^4 | \mathcal{F}_{n-1}] = 1 - 3(2p-1)^4 \left(\frac{S_{n-1}}{n-1} \right)^4 + 2(2p-1)^2 \left(\frac{S_{n-1}}{n-1} \right)^2. \quad (1.12)$$

ii) Si $p = 1/2$, alors $\mathbb{E}[(\epsilon_n)^4 | \mathcal{F}_{n-1}] = 1$.

iii) $\sup_{n \geq 1} (\mathbb{E}[(\epsilon_n)^4 | \mathcal{F}_{n-1}]) \leq 4/3$.

Preuve.

i) Calcul de $\mathbb{E}[(\epsilon_n)^4 | \mathcal{F}_{n-1}]$.

Par définition, $\epsilon_n = \frac{\Delta M_n}{a_n} = \frac{M_n - M_{n-1}}{a_n}$. Par un simple développement, nous avons :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(\Delta M_n)^4 | \mathcal{F}_{n-1}] &= \mathbb{E}[(M_n - M_{n-1})^4 | \mathcal{F}_{n-1}] \\ &= \mathbb{E}[(M_n)^4 - 4(M_n)^3 M_{n-1} + 6(M_n)^2 (M_{n-1})^2 - 4M_n (M_{n-1})^3 + (M_{n-1})^4 | \mathcal{F}_{n-1}] \\ &= \mathbb{E}[(M_n)^4 | \mathcal{F}_{n-1}] - 4M_{n-1} \mathbb{E}[(M_n)^3 | \mathcal{F}_{n-1}] + 6(M_{n-1})^2 \mathbb{E}[(M_n)^2 | \mathcal{F}_{n-1}] - 3(M_{n-1})^4.\end{aligned}$$

Nous allons calculer chaque terme de cette dernière égalité séparément, puis ensuite faire la somme. Tout d'abord, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(M_n)^4 | \mathcal{F}_{n-1}] &= (a_n)^4 \mathbb{E}[(S_n)^4 | \mathcal{F}_{n-1}] \\ &= (a_n)^4 \mathbb{E}[(S_{n-1} + X_n)^4 | \mathcal{F}_{n-1}] \\ &= (a_n)^4 \mathbb{E}[(S_{n-1})^4 + 4(S_{n-1})^3 X_n + 6(S_{n-1})^2 (X_n)^2 + 4S_{n-1} (X_n)^3 + (X_n)^4 | \mathcal{F}_{n-1}].\end{aligned}$$

Du coup, en tenant compte du fait que $(X_n)^2 = (X_n)^4 = 1$, on a

$$\mathbb{E}\left[\left(\frac{M_n}{a_n}\right)^4 | \mathcal{F}_{n-1}\right] = (S_{n-1})^4 + 4(S_{n-1})^3 \mathbb{E}[X_n | \mathcal{F}_{n-1}] + 6(S_{n-1})^2 + 4S_{n-1} \mathbb{E}[(X_n)^3 | \mathcal{F}_{n-1}] + 1.$$

Or, d'après (1.2), on sait que $\mathbb{E}[X_n | \mathcal{F}_{n-1}] = (\gamma_{n-1} - 1)S_{n-1} = \mathbb{E}[(X_n)^3 | \mathcal{F}_{n-1}]$. Et donc, on déduit

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\left(\frac{M_n}{a_n}\right)^4 | \mathcal{F}_{n-1}\right] &= (S_{n-1})^4 + 4(S_{n-1})^3 (\gamma_{n-1} - 1)S_{n-1} + 6(S_{n-1})^2 + 4(\gamma_{n-1} - 1)(S_{n-1})^2 + 1 \\ &= (S_{n-1})^4 (4\gamma_{n-1} - 3) + (S_{n-1})^2 (4\gamma_{n-1} + 2) + 1.\end{aligned}$$

Ensuite, calculons $-4M_{n-1} \mathbb{E}[(M_n)^3 | \mathcal{F}_{n-1}]$.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(M_n)^3 | \mathcal{F}_{n-1}] &= (a_n)^3 \mathbb{E}[(S_n)^3 | \mathcal{F}_{n-1}] \\ &= (a_n)^3 \mathbb{E}[(S_{n-1} + X_n)^3 | \mathcal{F}_{n-1}] \\ &= (a_n)^3 \mathbb{E}[(S_{n-1})^3 + 3(S_{n-1})^2 X_n + 3S_{n-1} (X_n)^2 + (X_n)^3 | \mathcal{F}_{n-1}] \\ &= (a_n)^3 (S_{n-1})^3 + 3(S_{n-1})^2 \mathbb{E}[X_n | \mathcal{F}_{n-1}] + 3S_{n-1} + \mathbb{E}[X_n | \mathcal{F}_{n-1}].\end{aligned}$$

En utilisant à nouveau (1.2), on obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(M_n)^3 | \mathcal{F}_{n-1}] &= (a_n)^3 [(S_{n-1})^3 + 3(S_{n-1})^2 (\gamma_{n-1} - 1)S_{n-1} + 3S_{n-1} + (\gamma_{n-1} - 1)S_{n-1}] \\ &= (a_n)^3 [(S_{n-1})^3 (3\gamma_{n-1} - 2) + (\gamma_{n-1} + 2)S_{n-1}].\end{aligned}$$

Donc,

$$-4M_{n-1}\mathbb{E}[(M_n)^3|\mathcal{F}_{n-1}] = -4a_{n-1}S_{n-1}(a_n)^3[(S_{n-1})^3(3\gamma_{n-1} - 2) + (\gamma_{n-1} + 2)(S_{n-1})],$$

et on déduit

$$\begin{aligned} \frac{-4M_{n-1}\mathbb{E}[(M_n)^3|\mathcal{F}_{n-1}]}{(a_n)^4} &= \frac{-4a_{n-1}[(S_{n-1})^4(3\gamma_{n-1} - 2) + (\gamma_{n-1} + 2)(S_{n-1})^2]}{a_n} \\ &= -4\gamma_{n-1}[(S_{n-1})^4(3\gamma_{n-1} - 2) + (\gamma_{n-1} + 2)(S_{n-1})^2] \\ &= (S_{n-1})^4[-12(\gamma_{n-1})^2 + 8\gamma_{n-1}] - (S_{n-1})^2[4(\gamma_{n-1})^2 + 8\gamma_{n-1}], \end{aligned}$$

car $\frac{a_{n-1}}{a_n} = \gamma_{n-1}$. Nous poursuivons en calculant le terme suivant : $6(M_{n-1})^2\mathbb{E}[(M_n)^2|\mathcal{F}_{n-1}]$.

Nous savons par (1.7) déjà que :

$$\mathbb{E}[(M_n)^2|\mathcal{F}_{n-1}] = (a_n)^2[1 + (S_{n-1})^2(2\gamma_{n-1} - 1)].$$

Par conséquent, toujours en utilisant $\frac{a_{n-1}}{a_n} = \gamma_{n-1}$,

$$\begin{aligned} \frac{6(M_{n-1})^2\mathbb{E}[(M_n)^2|\mathcal{F}_{n-1}]}{(a_n)^4} &= \frac{6(a_{n-1})^2(S_{n-1})^2(a_n)^2[1 + (S_{n-1})^2(2\gamma_{n-1} - 1)]}{(a_n)^4} \\ &= \frac{6(a_{n-1})^2(S_{n-1})^2[1 + (S_{n-1})^2(2\gamma_{n-1} - 1)]}{(a_n)^2} \\ &= 6(\gamma_{n-1})^2(S_{n-1})^2[1 + (S_{n-1})^2(2\gamma_{n-1} - 1)] \\ &= 6(\gamma_{n-1})^2(S_{n-1})^2 + 12(\gamma_{n-1})^3(S_{n-1})^4 - 6(\gamma_{n-1})^2(S_{n-1})^4. \end{aligned}$$

Le dernier terme à calculer est : $-3(M_{n-1})^4$. On a

$$\frac{-3(M_{n-1})^4}{(a_n)^4} = -3(\gamma_{n-1})^4(S_{n-1})^4.$$

Enfin, on sait que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(\epsilon_n)^4|\mathcal{F}_{n-1}] &= \mathbb{E}\left[\left(\frac{\Delta M_n}{a_n}\right)^4|\mathcal{F}_{n-1}\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\left(\frac{M_n}{a_n}\right)^4|\mathcal{F}_{n-1}\right] - 4\frac{M_{n-1}\mathbb{E}[(M_n)^3|\mathcal{F}_{n-1}]}{(a_n)^4} + 6\frac{(M_{n-1})^2\mathbb{E}[(M_n)^2|\mathcal{F}_{n-1}]}{(a_n)^4} \\ &\quad - 3\frac{(M_{n-1})^4}{(a_n)^4}. \end{aligned}$$

On a précédemment démontré que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left[\left(\frac{M_n}{a_n} \right)^4 | \mathcal{F}_{n-1} \right] &= (S_{n-1})^4 (4\gamma_{n-1} - 3) + (S_{n-1})^2 (4\gamma_{n-1} + 2) + 1 \\
\frac{-4M_{n-1} \mathbb{E}[(M_n)^3 | \mathcal{F}_{n-1}]}{(a_n)^4} &= (S_{n-1})^4 [(-12(\gamma_{n-1})^2 + 8\gamma_{n-1})] - (S_{n-1})^2 [(4(\gamma_{n-1})^2 + 8\gamma_{n-1})] \\
\frac{6(M_{n-1})^2 \mathbb{E}[(M_n)^2 | \mathcal{F}_{n-1}]}{(a_n)^4} &= 6(\gamma_{n-1})^2 (S_{n-1})^2 + 12(\gamma_{n-1})^3 (S_{n-1})^4 - 6(\gamma_{n-1})^2 (S_{n-1})^4 \\
\frac{-3(M_{n-1})^4}{(a_n)^4} &= -3(\gamma_{n-1})^4 (S_{n-1})^4.
\end{aligned}$$

Lorsqu'on somme, on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(\epsilon_n)^4 | \mathcal{F}_{n-1}] &= 1 - 3(S_{n-1})^4 [(\gamma_{n-1})^4 - 4(\gamma_{n-1})^3 + 6(\gamma_{n-1})^2 + 4\gamma_{n-1} - 1] \\
&\quad + 2(S_{n-1})^2 [(\gamma_{n-1})^2 - 2\gamma_{n-1} + 1] \\
&= 1 - 3(S_{n-1})^4 [\gamma_{n-1} - 1]^4 + 2(S_{n-1})^2 [\gamma_{n-1} - 1]^2.
\end{aligned}$$

Or $\gamma_{n-1} - 1 = \frac{2p-1}{n-1}$, et donc on a bien

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(\epsilon_n)^4 | \mathcal{F}_{n-1}] &= 1 - 3(S_{n-1})^4 \left[\frac{2p-1}{n-1} \right]^4 + 2(S_{n-1})^2 \left[\frac{2p-1}{n-1} \right]^2 \\
&= 1 - 3(2p-1)^4 \left(\frac{S_{n-1}}{n-1} \right)^4 + 2(2p-1)^2 \left(\frac{S_{n-1}}{n-1} \right)^2.
\end{aligned}$$

ii) Évidemment à partir de l'expression (1.12).

iii) En effet, il suffit de remplacer $p = \frac{1}{2}$ dans (1.12) pour trouver 1.

iv) En posant $q = (2p-1)^2 \left(\frac{S_{n-1}}{n-1} \right)^2$, nous avons d'après (1.12)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(\epsilon_n)^4 | \mathcal{F}_{n-1}] &= 1 - 3(2p-1)^4 \left(\frac{S_{n-1}}{n-1} \right)^4 + 2(2p-1)^2 \left(\frac{S_{n-1}}{n-1} \right)^2 \\
&= 1 + (2p-1)^2 \left(\frac{S_{n-1}}{n-1} \right)^2 \left[2 - 3(2p-1)^2 \left(\frac{S_{n-1}}{n-1} \right)^2 \right] \\
&\leq 1 + q(2-3q).
\end{aligned}$$

Comme $p \in [0, 1]$ et $0 \leq \left(\frac{S_{n-1}}{n-1} \right)^2 \leq 1$, on remarque que $q = (2p-1)^2 \left(\frac{S_{n-1}}{n-1} \right)^2$ vérifie $q \in [0, 1]$.

Introduisons la fonction f définie sur $[0, 1]$ et à valeur dans \mathbb{R} et définie par $f(q) = q(2-3q)$. La fonction dérivée de f de f est $f'(q) = 2 - 6q$. On déduit facilement que $\forall q \in [0, 1]$, $f(q) \leq \frac{1}{3}$.

Comme $\mathbb{E}[(\epsilon_n)^4 | \mathcal{F}_{n-1}] \leq 1 + q(2-3q)$, on a alors que $\mathbb{E}[(\epsilon_n)^4 | \mathcal{F}_{n-1}] \leq 1 + \frac{1}{3} \leq \frac{4}{3}$.

□

Vérifions que la martingale $(M_n)_{n \geq 0}$ est bornée dans L^2 . Comme $M_n = \sum_{k=1}^n a_k \epsilon_k$, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(M_{n+1})^2 | \mathcal{F}_{n-1}] &= \mathbb{E}[(M_n + a_{n+1} \epsilon_{n+1})^2 | \mathcal{F}_{n-1}] \\ &= (a_{n+1})^2 \mathbb{E}[(\epsilon_{n+1})^2 | \mathcal{F}_n] + \mathbb{E}[(M_n)^2 | \mathcal{F}_n] + 2a_{n+1} \mathbb{E}[\epsilon_{n+1} M_n | \mathcal{F}_n] \\ &= (a_{n+1})^2 \mathbb{E}[(\epsilon_{n+1})^2 | \mathcal{F}_n] + \mathbb{E}[(M_n)^2 | \mathcal{F}_n] \\ &\leq (a_{n+1})^2 + (M_n)^2, \end{aligned}$$

car $\sup_{n \geq 1} \mathbb{E}[(\epsilon_{n+1})^2 | \mathcal{F}_n] \leq 1$ et $\mathbb{E}[\epsilon_{n+1} | \mathcal{F}_n] = 0$. En prenant l'espérance, on déduit que,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(M_{n+1})^2] &\leq (a_{n+1})^2 + \mathbb{E}[(M_n)^2] \\ \mathbb{E}[(M_n)^2] &\leq (a_n)^2 + \mathbb{E}[(M_{n-1})^2] \\ \mathbb{E}[(M_{n-1})^2] &\leq (a_{n-1})^2 + \mathbb{E}[(M_{n-2})^2] \\ \mathbb{E}[(M_{n-2})^2] &\leq (a_{n-2})^2 + \mathbb{E}[(M_{n-3})^2] \\ &\vdots \\ \mathbb{E}[(M_2)^2] &\leq (a_2)^2 + \mathbb{E}[(M_1)^2] \\ \mathbb{E}[(M_1)^2] &\leq (a_1)^2 + \mathbb{E}[(M_0)^2]. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(M_n)^2] &\leq (a_n)^2 + (a_{n-1})^2 + (a_{n-2})^2 + \dots + (a_2)^2 + (a_1)^2 + \mathbb{E}[(M_0)^2] \\ &\leq \sum_{k=1}^n (a_k)^2, \end{aligned}$$

car $\mathbb{E}[(M_0)^2] = 0$. Et donc, $\sup_{n \geq 1} \mathbb{E}[(M_n)^2] \leq \sum_{k=1}^{\infty} (a_k)^2$

Et nous savons que :

$$\sup_{n \geq 1} \mathbb{E}[(M_n)^2] \leq \sum_{k=1}^{\infty} (a_k)^2 = {}_3F_2 \left(\begin{matrix} 1, & 1, & 1 \\ & 2p, & 2p \end{matrix} \middle| 1 \right) < +\infty.$$

Ceci montre que M_n est bornée dans L^2 .

Il nous reste à montrer que M_n est bornée dans L^4 . On remarque facilement que

$$(M_{n+1})^4 = (a_{n+1}\epsilon_{n+1} + M_n)^4$$

$$\mathbb{E}[(M_{n+1})^4|\mathcal{F}_n] = \sum_{l=0}^4 \binom{4}{l} (a_{n+1})^l (M_n)^{4-l} \mathbb{E}[(\epsilon_{n+1})^l|\mathcal{F}_n].$$

De plus nous savons d'après les calculs précédents (voir les équations (1.8) et (1.12)), que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(\epsilon_{n+1})^0|\mathcal{F}_n] &= 1 \\ \mathbb{E}[\epsilon_{n+1}|\mathcal{F}_n] &= 0 \\ \mathbb{E}[(\epsilon_{n+1})^2|\mathcal{F}_n] &= 1 - (\gamma_n - 1)^2 (S_n)^2 \leq 1 \\ \mathbb{E}[(\epsilon_{n+1})^3|\mathcal{F}_n] &= 2(2p - 1) \frac{S_n}{n} [(2p - 1)^2 (\frac{S_n}{n})^2 - 1] \leq 0 \\ \mathbb{E}[(\epsilon_{n+1})^4|\mathcal{F}_n] &\leq \frac{4}{3} \\ |S_n| &\leq n \\ (2p - 1)^2 \left(\frac{S_n}{n}\right)^2 - 1 &\leq 0. \end{aligned}$$

On a montré, en utilisant le binôme de Newton pour développer l'expression $\mathbb{E}[(M_{n+1})^4|\mathcal{F}_n]$, que :

$$\mathbb{E}[(M_{n+1})^4|\mathcal{F}_n] \leq \frac{4}{3}(a_{n+1})^4 + 6(a_{n+1})^2(M_n)^2 + (M_n)^4$$

En prenant l'espérance, nous avons :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(M_{n+1})^4] &\leq \frac{4}{3}(a_{n+1})^4 + 6(a_{n+1})^2 \mathbb{E}[(M_n)^2] + \mathbb{E}[(M_n)^4] \\ \mathbb{E}[(M_n)^4] &\leq \frac{4}{3}(a_n)^4 + 6(a_n)^2 \mathbb{E}[(M_{n-1})^2] + \mathbb{E}[(M_{n-1})^4] \\ \mathbb{E}[(M_{n-1})^4] &\leq \frac{4}{3}(a_{n-1})^4 + 6(a_{n-1})^2 \mathbb{E}[(M_{n-2})^2] + \mathbb{E}[(M_{n-2})^4] \\ \mathbb{E}[(M_{n-2})^4] &\leq \frac{4}{3}(a_{n-2})^4 + 6(a_{n-2})^2 \mathbb{E}[(M_{n-3})^2] + \mathbb{E}[(M_{n-3})^4] \\ &\vdots \\ \mathbb{E}[(M_2)^4] &\leq \frac{4}{3}(a_2)^4 + 6(a_2)^2 \mathbb{E}[(M_1)^2] + \mathbb{E}[(M_1)^4] \\ \mathbb{E}[(M_1)^4] &\leq \frac{4}{3}(a_1)^4 + 6(a_1)^2 \mathbb{E}[(M_0)^2] + \mathbb{E}[(M_0)^4]. \end{aligned}$$

Ce qui nous permet d'obtenir :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(M_n)^4] &\leq \frac{4}{3} \sum_{k=1}^n (a_k)^4 + 6 \sum_{k=1}^n (a_k)^2 \mathbb{E}[(M_{k-1})^2] \\ \mathbb{E}[(M_n)^4] &\leq 6 \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k)^2\right) \sum_{k=1}^{\infty} (a_k)^2 < +\infty, \end{aligned}$$

car

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k)^2 = {}_3F_2 \left(\begin{matrix} 1, & 1, & 1 \\ 2p, & 2p \end{matrix} \middle| 1 \right) < +\infty.$$

Ainsi nous avons $\sup_{n \geq 1} \mathbb{E}[(M_n)^4] < +\infty$ et donc (M_n) est bornée dans L^4 .

□

CHAPITRE 2

MODÈLE D'URNE DE TYPE POLYA ASSOCIÉ À LA MARCHÉ ALÉATOIRE DE L'ÉLÉPHANT

Cette section repose sur la thèse de Lucile Laulin, (Laulin, 2022).

2.1 Modèle d'urne de type Polya associé à la marche aléatoire de l'éléphant

2.1.1 Présentation du modèle d'urne

On considère une urne composée de boules rouges et de boules bleues. On note (U_n) la composition d'une urne à l'instant n . Ainsi, à l'instant $n \in \mathbb{N}$, la composition de l'urne sera donnée par le vecteur $U_n = (R_n, B_n)$; avec R_n comme étant le nombre de boules rouge à l'instant n , et B_n le nombre de boules bleue à l'instant n .

On suppose qu'à l'instant $n = 1$, la composition de l'urne est $(1, 0)$ avec probabilité q , ou $(0, 1)$ avec probabilité $1 - q$.

Par la suite, à tout instant $n \geq 2$, une boule est tirée uniformément et de façon aléatoire de l'urne, on note sa couleur; puis, simultanément, on remet dans l'urne la boule dont on vient de noter la couleur avec une autre boule soit de même couleur avec probabilité p , soit de couleur différente avec probabilité $1 - p$.

2.1.2 Connexion avec la marche aléatoire de l'éléphant

La connexion avec la marche aléatoire de l'éléphant est la suivante : soit S_n la position de l'éléphant à l'instant n . On a $S_0 = 0$ à l'instant initial.

Théorème 2.1 *Pour $n \geq 1$, on a l'égalité en loi suivante : $S_n \stackrel{\mathcal{L}}{=} R_n - B_n$.*

Preuve. Posons $W_n = R_n - B_n$. Nous voulons montrer que $S_n \stackrel{\mathcal{L}}{=} W_n$.

On pose $i_0 = R_0$, et $j_0 = B_0$; on a que $i_0 + j_0 = n$.

$\mathbb{P}(U_{n+1} = (i, j) | U_n = (i_0, j_0)) = 0$, si $(i, j) \neq (i_0, j_0 + 1)$ ou $(i, j) \neq (i_0 + 1, j_0)$.

Ainsi,

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}(U_{n+1} = (i_0 + 1, j_0) | U_n = (i_0, j_0)) \\
&= \mathbb{P}(\text{Tirer une boule rouge, se rappeler de sa couleur} | U_n = (i_0, j_0)) \\
&\quad + \mathbb{P}(\text{Tirer une boule bleue, ne pas se rappeler de sa couleur} | U_n = (i_0, j_0)) \\
&= \frac{i_0}{n}p + \frac{j_0}{n}(1-p) \\
&= \frac{i_0}{n}p + \frac{n-i_0}{n}(1-p) \\
&= 1-p + \frac{i_0}{n}(2p-1).
\end{aligned}$$

On remarque ainsi que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(W_{n+1} = W_n + 1 | W_n = k) &= \mathbb{P}(U_{n+1} = (i_0 + 1, j_0) | U_n = (i_0, j_0) \text{ avec } 2i_0 = n + k \text{ et } 2j_0 = n - k) \\
&= 1-p + \frac{i_0}{n}(2p-1).
\end{aligned}$$

Par ailleurs, on sait que

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}(S_{n+1} = S_n + 1 | S_n = k) \\
&= \mathbb{P}(X_{n+1} = 1 | \text{avoir fait } i_0 \text{ pas à droite et } j_0 \text{ pas à gauche avec } 2i_0 = n + k \text{ et } 2j_0 = n - k) \\
&= 1-p + \frac{i_0}{n}(2p-1).
\end{aligned}$$

Comme $W_{n+1} \in \{W_n + 1, W_n - 1\}$ et $\mathbb{P}(W_{n+1} = W_n + 1 | W_n = k) = \mathbb{P}(S_{n+1} = S_n + 1 | S_n = k)$, alors, nous avons bien $S_n \stackrel{\mathcal{L}}{=} W_n$. \square

Remarque 2.2 U_n est un processus markovien ; car l'étape $n+1$ ne dépend que de l'étape n . Mais S_n n'est pas markovien, car l'étape $n+1$ dépend de tous les étapes précédents de 1 à n . Par contre, (S_n, n) est un processus de Markov.

2.1.3 Étude du modèle d'urne de type Pólya

Pour étudier le modèle d'urne associé à la marche aléatoire de l'éléphant, nous allons nous intéresser à la décomposition spectrale de l'espérance de la matrice de remplacement \mathcal{A} . Dans le cas où on remet la boule de même couleur, la matrice de remplacement \mathcal{A} est égale à :

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

avec probabilité p , mais si on remet la boule de couleur différente, la matrice de remplacement \mathcal{A} est égale à

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

avec probabilité $1 - p$. Par conséquent, son espérance est égale à

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\mathcal{A}] &= p \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + (1 - p) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} p & 1 - p \\ 1 - p & p \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

En effet, on constate que la valeur du processus d'urne à l'instant n est donné par la relation

$$U_{n+1} = U_n + \mathcal{A}_{n+1} \begin{pmatrix} \epsilon_{n+1} \\ 1 - \epsilon_{n+1} \end{pmatrix},$$

où $(\mathcal{A}_n)_{n \geq 1}$ est une suite de matrice indépendantes de même loi que \mathcal{A} et $\epsilon_{n+1} = 1$ si la boule tirée à l'instant n est rouge ; et $\epsilon_{n+1} = 0$ si la boule tirée est bleue. Les variables $(\mathcal{A}_n)_{n \geq 0}$ et $(\epsilon_n)_{n \geq 1}$ sont indépendantes.

On a donc

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \epsilon_{n+1} \\ 1 - \epsilon_{n+1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{avec probabilité } \frac{R_n}{n} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{avec probabilité } \frac{B_n}{n}. \end{aligned}$$

2.1.3.0.1 Valeurs propres et vecteurs propres de l'espérance de la matrice de remplacement $\mathbb{E}[\mathcal{A}]$.

Nous allons utiliser les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice : $\mathbb{E}[\mathcal{A}]$ pour déterminer le comportement asymptotique de l'urne.

Les deux valeurs propres de $\mathbb{E}[\mathcal{A}]$ sont : $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 2p - 1$.

Les deux vecteurs propres unitaires, associés aux valeurs propres λ_1 et λ_2 , sont respectivement : $v_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et le vecteur $v_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Dans la théorie des urnes, il est connu que le comportement asymptotique de l'urne dépend de la position du rapport $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ par rapport à $\frac{1}{2}$. On remarque que

- Si $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{1}{2}$, alors ceci correspond à la phase de transition d'un régime diffusif à un régime super diffusif (où $p = \frac{3}{4}$) dans la marche aléatoire de l'éléphant, c'est à dire au régime critique.
- Si $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} < \frac{1}{2}$, alors cela correspond au cas diffusif dans la marche aléatoire de l'éléphant.
- Si $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} > \frac{1}{2}$, alors cela correspond au cas super diffusif dans la marche aléatoire de l'éléphant.

2.2 Modèles standards de la marche aléatoire de l'éléphant et leurs connections aux modèles d'urne de type polya

Cette section repose sur l'article de Baur et Bertoin (Baur et Bertoin, 2016). Nous allons aussi utiliser les deux théorèmes suivants de l'article de Janson (Janson, 2004). Cet article est un article de niveau plus complexe, et nous allons juste présenter les résultats qui nous intéressent.

On note $\mathbb{D}([0, +\infty[)$ l'ensemble des fonctions continues à droite avec limites à gauche (càdlàg). On l'appelle *espace de Skorokhod*.

Nous introduisons les valeurs des notions qui sont utilisées dans le théorème 2.3 dans le cas de la marche de l'éléphant :

1. B qui est défini par (2.14) de l'article de Janson (Janson, 2004) est égale à $B = \frac{1}{2}I$, où I est la matrice identité de taille 2×2 .
2. $\lambda_1 = 1$ désigne la valeur propre dominante et $\lambda_2 = 2p - 1$ la seconde valeur propre de la matrice $\mathbb{E}[\mathcal{A}]$.
3. $\Sigma_{II,d} := P_{\lambda_2} B P_{\lambda_2}^*$ est donnée par (2.17) de l'article de Janson (Janson, 2004); où $*$ la conjugaison de Hermite et P_{λ_2} est une projection sur l'espace propre E_{λ_2} de la matrice $\mathbb{E}[\mathcal{A}]$.
4. Soit \mathcal{A} la matrice de remplacement et $s \geq 0$. Nous définissons les fonctions Φ et Ψ suivantes : $\Phi(s, \mathcal{A}) = \int_0^s \exp(t\mathcal{A}) dt$; et $\Psi(s, \mathcal{A}) = \exp(s\mathcal{A}) - \lambda_1 v_1 a' \Phi(s, \mathcal{A})$; λ_1 désigne la première valeur propre de la matrice $\mathbb{E}[\mathcal{A}]$, et v_1 le vecteur propre associé à λ_1 , a' est la transposée de a , et a désigne le vecteur colonne formé de 1.

Nous énonçons les théorèmes issu de l'article de Janson (Janson, 2004) sous leur forme général. On les appliquera à notre cas particulier de la marche de l'éléphant. Notamment, comme la matrice de remplacement $\mathbb{E}[\mathcal{A}]$ est diagonalisable dans notre cas, on a $d_{\lambda_2} = 0$.

Théorème 2.3 (Théorème 3.31 dans (Janson, 2004)) *On suppose que les conditions de A1. à A6. ci-dessous sont vérifiées.*

A1. Soit le vecteur $\epsilon_i = (\epsilon_{i1}, \epsilon_{i2}, \dots, \epsilon_{iq})$ un vecteur aléatoire de taille q tels que $\epsilon_{ij} \geq 0$ pour $j \neq i$ et $\epsilon_{ii} \geq -1$

A2. $\mathbb{E}[(\epsilon_{ij})^2] < +\infty$ pour tout $i, j = 1, 2, \dots, q$.

A3. La plus grande valeur propre réelle de la matrice $\mathbb{E}[\mathcal{A}]$ est $\lambda_1 > 0$.

A4. La plus grande valeur propre réelle λ_1 de la matrice $\mathbb{E}[\mathcal{A}]$ est simple.

A5. Il existe une position i telle que $U_{0i} > 0$, c'est à dire que dans les modèles d'urne, on commence le processus avec au moins une boule.

A6. Pour toute valeur propre λ , on a : $\Re(\lambda) < \lambda_1$

Alors quand $n \rightarrow +\infty$, on a les 2 cas suivants :

(i) Si $\Re(\lambda_2) < \frac{1}{2}\lambda_1$, alors dans $\mathbb{D}([0, +\infty[)$, on a la convergence en loi

$$\left(n^{-\frac{1}{2}}(U_{\lfloor tn \rfloor} - xn\lambda_1 v_1); t \geq 0 \right) \xRightarrow{n \rightarrow +\infty} V(x),$$

où $V(x)$ est un vecteur de processus gaussien continu de dimension d tel que $V(0) = 0$, $\mathbb{E}[V(x)] = 0$, et pour $0 < x \leq y$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[V(x)V'(y)] = \\ \int_{-\lambda_1^{-1} \ln x}^{+\infty} \Psi(s + \lambda_1^{-1} \ln x, \mathbb{E}[\mathcal{A}]) B \Psi(s + \lambda_1^{-1} \ln y, \mathbb{E}[\mathcal{A}])' (\exp - \lambda_1 s) \lambda_1 ds - x \lambda_1^2 v_1 v_1', \end{aligned}$$

où v' représente le vecteur transposé de v .

(ii) Si $\lambda_2 = \frac{1}{2}\lambda_1$ et $\Lambda_{II} = \{\lambda_2\}$, alors avec $d := d_{\lambda_2}$ dans $\mathbb{D}([0, +\infty[)$, on a la convergence en loi suivante :

$$(\ln n)^{-d-\frac{1}{2}} \left(n^{-\frac{x}{2}} (U_{\lfloor n^x \rfloor} - n^x \lambda_1 v_1) \right) \xRightarrow{n \rightarrow +\infty} V(x)$$

où $V(x)$ est un vecteur de processus Gaussien continu de dimension d tel que $V(0) = 0$, et pour $0 < x \leq y$, $\mathbb{E}[V(x)] = 0$ et

$$\mathbb{E}[V(x)V'(y)] = C(d, x, y)(\lambda_1)^{-2d} (I - 2v_1 a' P_{\lambda_2}) \Sigma_{II, d} (I - 2P'_{\lambda_2} a v_1')$$

$$\text{avec } C(d, x, y) = \sum_{j=0}^d \frac{2d+1}{2d+1-j} \binom{d}{j} (y-x)^j x^{2d+1-j}.$$

Théorème 2.4 (Théorème 3.26 dans (Janson, 2004)) On suppose que les conditions de A1. à A6. ci-dessus sont vérifiées. On suppose aussi que

$$\Re(\lambda_2) > \frac{1}{2}\lambda_1.$$

On pose $d := \text{Max}\{d_\lambda : \Re(\lambda) = \Re(\lambda_2)\}$. On pose $\Lambda'_{III} = \{\lambda_2\}$, $d = 0$ et $a.\epsilon_i = m$ pour tout i . On a aussi $\lambda_1 = m$ et $a.X_0 = \alpha_0$.

Alors, \widetilde{W} est relié à W et W_{λ_2} par la relation suivante :

$$W_{\lambda_2} = \left(\frac{W}{m}\right)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} C \widetilde{W},$$

avec \widetilde{W} et W indépendants; et $\frac{W}{m} \sim \Gamma(\frac{\alpha_0}{m})$, et $C = 1$ si $\lambda_2 \in \mathbb{R}$, et $C = \frac{1}{2}$ sinon, c'est à dire λ_2 n'appartient pas à \mathbb{R} .

En particulier les moments sont reliés, pour tout vecteur u et $k \geq 0$, par

$$\mathbb{E}[u \widetilde{W}]^k = C^{-k} \frac{\Gamma(\frac{\alpha_0}{m})}{\Gamma(\frac{\alpha_0 + k \lambda_2}{m})} \mathbb{E}[u W_{\lambda_2}]^k.$$

2.2.1 Cas diffusif ($0 \leq p < \frac{3}{4}$).

Théorème 2.5 Soit $0 \leq p < \frac{3}{4}$. Alors quand $n \rightarrow +\infty$, on a la convergence en loi suivante :

$$\left(\frac{S_{\lfloor tn \rfloor}}{\sqrt{n}}; t \geq 0\right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} (W_t; t \geq 0),$$

où $W = (W_t, t \geq 0)$ est un processus gaussien continu et à valeur dans \mathbb{R} tel que $W_0 = 0$, $\mathbb{E}[W_t] = 0$ pour tout $t \geq 0$ et, pour $0 < s \leq t$,

$$\mathbb{E}[W_t W_s] = \frac{s}{3 - 4p} \left(\frac{t}{s}\right)^{2p-1}.$$

Dans la Figure 2.1, on observe la convergence de

$$\left(\frac{S_{\lfloor tn \rfloor}}{\sqrt{n}}; t \geq 0\right)$$

vers une loi gaussien pour les paramètres $q = 0, 3$, $p = 0, 45$, $t = 1$ et $n = 5000$ (Code R en annexe) :

Remarque 2.6 Si $p = \frac{1}{2}$, alors $\mathbb{E}[W_t] = 0$ pour tout $t \geq 0$ et $\mathbb{E}[W_t]^2 = s$; on a donc

$$W_t \sim \mathcal{N}(0, s).$$

En fait, W est un mouvement Brownien standard.

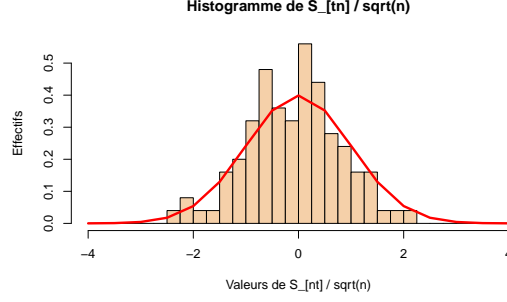


FIGURE 2.1 Convergence de $\frac{S_{[tn]}}{\sqrt{n}}$ vers une loi gaussienne dans le cas diffusif

Preuve. Nous allons appliquer le théorème 2.3 (i), issu de (Janson, 2004). Comme

$$\Re(\lambda_2) < \frac{1}{2}\lambda_1,$$

on a la convergence en loi suivante :

$$\left(n^{\frac{-1}{2}}(X_{[tn]} - tn\lambda_1 v_1); t \geq 0 \right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} (V_t; t \geq 0)$$

où $V = (V_t, t \geq 0)$ est un processus gaussien continu à valeurs dans \mathbb{R}^2 tel que $V_0 = 0$, $\mathbb{E}[V_t] = 0$ pour tout $t \geq 0$.

Dans notre cas, $\lambda_1 = 1$ et $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. D'après les formules (5.6) dans (Janson, 2004), nous avons que :

$$\mathbb{E}[V_s V_t'] = ms \Sigma_I \left(\frac{t}{s} \right)^{m-1} \mathbb{E}[\mathcal{A}],$$

où $0 < s \leq t$

et nous admettons pour Σ_I défini en (2.15) de (Janson, 2004) que $\Sigma_I = \frac{1}{4(3-4p)} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Nous allons calculer explicitement $\mathbb{E}[V_s V_t']$. On commence par le calcul de $\exp\left(\frac{t}{s}\right)^{m-1} \mathbb{E}[\mathcal{A}]$. On a

$$\lambda_1 = 1 \neq \lambda_2 = 2p - 1,$$

la matrice $\mathbb{E}[\mathcal{A}]$ est donc diagonalisable, ce qui nous permet d'écrire $\mathbb{E}[\mathcal{A}] = PDP^{-1}$ avec

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2p - 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

On a donc

$$\begin{aligned}\exp \mathbb{E}[\mathcal{A}] &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\mathbb{E}[\mathcal{A}])^k}{k!} \\ \exp z\mathbb{E}[\mathcal{A}] &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(z\mathbb{E}[\mathcal{A}])^k}{k!} \\ (\mathbb{E}[\mathcal{A}])^k &= (PDP^{-1})^k \\ (z\mathbb{E}[\mathcal{A}])^k &= z^k(PDP^{-1})^k.\end{aligned}$$

Pour $k = 2$,

$$\begin{aligned}(\mathbb{E}[\mathcal{A}])^2 &= (PDP^{-1})^2 \\ &= (PDP^{-1})(PDP^{-1}) \\ &= PDDP^{-1} \\ &= PD^2P^{-1},\end{aligned}$$

avec

$$D^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (2p-1)^2 \end{pmatrix}.$$

De même, nous en déduisons que $(\mathbb{E}[\mathcal{A}])^k = PD^kP^{-1}$ avec

$$D^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (2p-1)^k \end{pmatrix},$$

ainsi que $(z\mathbb{E}[\mathcal{A}])^k = z^k(PD^kP^{-1})$.

Par conséquent, on a

$$\begin{aligned}\exp (\mathbb{E}[\mathcal{A}]) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\mathbb{E}[\mathcal{A}])^k}{k!} \\ &= P \exp(D) P^{-1},\end{aligned}$$

avec

$$\exp(D) = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1^k}{k!} & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(2p-1)^k}{k!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp(1) & 0 \\ 0 & \exp(2p-1) \end{pmatrix}$$

De même,

$$\begin{aligned}\exp (z\mathbb{E}[\mathcal{A}]) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(z\mathbb{E}[\mathcal{A}])^k}{k!} \\ &= P \exp(zD) P^{-1},\end{aligned}$$

avec

$$\exp(zD) = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k (2p-1)^k}{k!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp(z) & 0 \\ 0 & \exp(z(2p-1)) \end{pmatrix}.$$

En posant $z = \ln \frac{t}{s}$, on obtient

$$\begin{aligned} \exp(z\mathbb{E}[\mathcal{A}]) &= \exp\left(\ln\left(\frac{t}{s}\right)\mathbb{E}[\mathcal{A}]\right) \\ &= P \exp\left(\ln\left(\frac{t}{s}\right)D\right)P^{-1}, \end{aligned}$$

avec

$$\exp\left(\ln\left(\frac{t}{s}\right)D\right) = \begin{pmatrix} \frac{t}{s} & 0 \\ 0 & \left(\frac{t}{s}\right)^{2p-1} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

On se rappelle que $\mathbb{E}[V_s V_t'] = m s \Sigma_I \left(\frac{t}{s}\right)^{m-1} \mathbb{E}[\mathcal{A}]$

Dans le cas présent, $m = 1$, $\mathbb{E}[\mathcal{A}] = (\mathbb{E}[\mathcal{A}])'$ car $\mathbb{E}[\mathcal{A}]$ est symétrique et $\lambda_1 = 1$. Donc, $\mathbb{E}[V_s V_t'] = s \Sigma_I \left(\frac{t}{s}\right) \mathbb{E}[\mathcal{A}]$, avec $\Sigma_I = \frac{1}{4(3-4p)} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Il faut se souvenir que $e^{\ln(\frac{t}{s})\mathbb{E}[\mathcal{A}]} = (e^{\ln(\frac{t}{s})})^{\mathbb{E}[\mathcal{A}]} = \left(\frac{t}{s}\right)^{\mathbb{E}[\mathcal{A}]}$. En utilisant les expressions de $\exp\left(\ln\left(\frac{t}{s}\right)D\right)$ et de P , et en faisant un simple produit de matrices, nous obtenons :

$$\mathbb{E}[V_s V_t'] = \frac{s}{4(3-4p)} \left(\frac{t}{s}\right)^{2p-1} \mathbb{B},$$

avec

$$\mathbb{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dans le Théorème 2.3 (i), le vecteur V est de dimension 2 car $V \in \mathbb{R}^2$. C'est aussi la raison pour laquelle dans l'expression de $\mathbb{E}[V_s V_t']$, la matrice \mathbb{B} apparaît.

Dans le Théorème 2.5, $W \in \mathbb{R}$, donc $\dim W = 1$. D'après donc le théorème 2.3 (i), le vecteur $U_n = \begin{pmatrix} U_n^1 \\ U_n^2 \end{pmatrix}$, correctement renormalisé, converge en loi vers $V = \begin{pmatrix} V^1 \\ V^2 \end{pmatrix}$.

On introduit la fonction continue $f : \begin{matrix} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & f(x) = x - y \end{matrix}$.

Comme $\frac{U_n}{n^{1/2}}$ converge aussi en loi vers V , $f\left(\frac{U_n}{n^{1/2}}\right) = \frac{U_n^1 - U_n^2}{n^{1/2}} = \frac{S_n}{n^{1/2}}$ converge aussi en loi vers $f(V) = V^1 - V^2$.

Ainsi, on peut conclure aisément que

$$\left(\frac{S_{\lfloor tn \rfloor}}{\sqrt{n}}; t \geq 0 \right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} (W_t; t \geq 0)$$

avec $W_t = V_t^1 - V_t^2 \in \mathbb{R}$.

Pour finir, calculons $\mathbb{E}[W_t W_s]$. On a $V_s = \begin{pmatrix} V_s^1 \\ V_s^2 \end{pmatrix}$ et $V_t' = (V_t^1, V_t^2)$. Donc,

$$\mathbb{E}[V_s V_t'] = \begin{pmatrix} \mathbb{E}[V_s^1 V_t^1] & \mathbb{E}[V_s^1 V_t^2] \\ \mathbb{E}[V_s^2 V_t^1] & \mathbb{E}[V_s^2 V_t^2] \end{pmatrix}$$

avec $\mathbb{E}[V_s V_t'] = \frac{s}{4(3-4p)} \left(\frac{t}{s}\right)^{2p-1} \mathbb{B}$ et $\mathbb{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Pour trouver les coefficients de la matrice $\mathbb{E}[V_s V_t']$, il suffit de faire l'égalité des deux matrices. Comme $W_t = V_t^1 - V_t^2$, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[W_t W_s] &= \mathbb{E}[(V_t^1 - V_t^2)(V_s^1 - V_s^2)] \\ &= \mathbb{E}[V_t^1 V_s^1] - \mathbb{E}[V_t^1 V_s^2] - \mathbb{E}[V_t^2 V_s^1] + \mathbb{E}[V_t^2 V_s^2]. \end{aligned}$$

□

Remarque 2.7 L'étape initiale $n = 1$ de la marche aléatoire de l'éléphant n'influence pas le comportement à long terme de la marche ; car un mouvement brownien W_t étant entièrement défini par la donnée de $\mathbb{E}[W_t]$ et $\mathbb{E}[W_s W_t]$

2.2.2 Cas critique ($p = \frac{3}{4}$).

Théorème 2.8 . Soit $p = \frac{3}{4}$.

Alors quand $n \rightarrow +\infty$, on a la convergence en loi suivante sur $\mathbb{D}([0, +\infty[)$:

$$\left(\frac{S_{\lfloor n^t \rfloor}}{\sqrt{\ln n n^{\frac{t}{2}}}}; t \geq 0 \right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} (B_t; t \geq 0)$$

où $B = (B_t, t \geq 0)$ est un mouvement brownien standard de dimension 1.

Preuve. . D'après le théorème 2.3 (ii), nous avons la convergence en loi suivante :

$$(\ln n)^{-\frac{1}{2}} \left(n^{\frac{-t}{2}} (U_{\lfloor n^t \rfloor} - n^t \lambda_1 v_1); t \geq 0 \right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} V = (V_t; t \geq 0)$$

où V est un vecteur de processus gaussien continu à valeurs dans \mathbb{R}^2 tel que $V(0) = 0$, $\mathbb{E}[V_t] = 0$ et

$$\mathbb{E}[V_s V_t'] = C(d, s, t) (\lambda_1)^{-2d} (I - 2v_1 a' P_{\lambda_2}) \Sigma_{II,d} (I - 2P_{\lambda_2}' a v_1')$$

et $C(d, s, t) = \sum_{j=0}^d \frac{2d+1}{2d+1-j} \binom{d}{j} (t-s)^j s^{2d+1-j} = s$ (car dans notre cas $d = 0$). Comme $\lambda_1 = 1$ et $2v_1 a' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, nous obtenons que, pour $0 < s \leq t$, $\mathbb{E}[V_s V_t'] = \frac{s}{4} \mathbb{B}$ avec $\mathbb{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Ainsi, comme pour le théorème 2.5, on peut conclure aisément que

$$\left(\frac{S_{\lfloor n^t \rfloor}}{(\sqrt{\ln n}) n^{\frac{t}{2}}}; t \geq 0 \right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} (B_t; t \geq 0).$$

□

Comme pour le Théorème 2.5, nous pouvons faire la remarque suivante :

Remarque 2.9 L'étape initiale $n = 1$ de la marche aléatoire de l'éléphant n'influence pas le comportement à long terme de la marche ; car un mouvement brownien W_t étant entièrement défini par la donnée de $\mathbb{E}[W_t]$ et $\mathbb{E}[W_s W_t]$. On ne retrouve pas le paramètre du premier pas q dans aucune de ces expressions.

2.2.3 Cas super diffusif ($\frac{3}{4} < p \leq 1$)

Théorème 2.10 . Soit $a = 2p - 1 \in [\frac{1}{2}; 1]$.

Alors quand $n \rightarrow +\infty$, on a la convergence en loi suivante :

$$\left(\frac{S_{\lfloor tn \rfloor}}{n^a}; t \geq 0 \right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} (t^a Y; t \geq 0)$$

où Y est une variable aléatoire non nulle.

Preuve. D'après le Théorème 3.24 dans (Janson, 2004), $\Lambda'_{III} = \{2p - 1\}$, et il y a la convergence presque sûr suivante :

$$(n^{-a} (X_{\lfloor tn \rfloor} - tn \lambda_1 v_1); t \geq 0) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p.s.} (t^a \widetilde{W}; t \geq 0)$$

où $\widetilde{W} = (\widetilde{W}_1, \widetilde{W}_2)$ est un vecteur aléatoire non nul appartenant à l'espace de la valeur propre E_{λ_2} :
 $\widetilde{W} \in \{v \in \mathbb{R}^2 : v = \beta(1, -1) \text{ avec } \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$.

Posons $Y = \widetilde{W}_1 - \widetilde{W}_2$. On a donc comme pour le théorème 2.5, la convergence presque sûr suivante :

$$\left(\frac{S_{\lfloor tn \rfloor}}{n^a}; t \geq 0 \right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p.s.} (t^a Y; t \geq 0).$$

□

Remarque 2.11 Contrairement aux cas précédents, la distribution de Y dépend du paramètre q du premier pas X_1 . En effet, le théorème 2.4 (Janson, 2004) indique que

$$\mathbb{E}[Y] = \frac{2q-1}{\Gamma(2p)} \quad \text{et} \quad \mathbb{E}[Y^2] = \frac{1}{(4p-3)\Gamma(4p-2)}.$$

CHAPITRE 3

EXTENSIONS

3.1 Cas de la marche aléatoire de l'éléphant en dimension $d \geq 2$

Toutes nos analyses précédentes étaient basées sur le fait que l'éléphant se déplaçait en ligne droite ; on était donc en dimension 1.

Supposons maintenant que l'éléphant se déplace dans le plan, alors on sera en dimension 2.

En dimension 1, dans le modèle d'urne associé à la marche aléatoire de l'éléphant, l'urne contenait deux boules de couleurs différentes ; en dimension 2, l'urne aura 4 boules de 4 couleurs différentes pour modéliser les quatres directions : Nord, Sud, Est, Ouest. Nous déduisons donc qu'en dimension d , le nombre de couleurs différentes des boules dans l'urne sera $2d$.

Plaçons nous dans le cas de la dimension $d = 2$.

Soit X_n la position de l'éléphant à l'instant n et U_n la composition de l'urne à l'instant n .

À l'instant $n = 1$, on a X_1 qui est la position de l'éléphant et $U_1 = (1, 0, 0, 0)$ qui est la composition de l'urne.

À l'instant $n \geq 2$, on choisit dans l'urne une boule $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ uniformément et de façon aléatoire.

On remet la boule dans l'urne et avec probabilité p , on ajoute une boule de même couleur, avec probabilité

$\frac{1-p}{3}$ on ajoute une boule de couleur d'une des autres trois couleurs. Soit \mathcal{A} la matrice de remplacement. On aura $\mathcal{A} \in \{J^4, J, J^2, J^3\}$

Avec

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On remarque que $J^4 = I$, où I est la matrice identité

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\mathcal{A}] &= pI + \frac{1-p}{3}J + \frac{1-p}{3}J^2 + \frac{1-p}{3}J^3 \\ &= \begin{pmatrix} p & \frac{1-p}{3} & \frac{1-p}{3} & \frac{1-p}{3} \\ \frac{1-p}{3} & p & \frac{1-p}{3} & \frac{1-p}{3} \\ \frac{1-p}{3} & \frac{1-p}{3} & p & \frac{1-p}{3} \\ \frac{1-p}{3} & \frac{1-p}{3} & \frac{1-p}{3} & p \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Les valeurs propres de $\mathbb{E}[\mathcal{A}]$ sont $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \frac{4p-1}{3}$.

La phase transitoire arrive quand $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{1}{2}$, c'est à dire quand $p = \frac{5}{8}$.

3.2 Cas de la marche aléatoire renforcée

Au début de la marche, on se donne au préalable une suite de variables aléatoires réelles $T = (T_n)_{n \geq 1}$ i.i.d. de loi quelconque (pas forcément la loi de Rademacher, qui utilisée pour le modèle de base de la marche de l'éléphant).

Soit R_n la position du marcheur à l'instant n et Y_n le pas à l'instant n . On définit la marche $R_n = \sum_{i=1}^n Y_i$, avec

$$Y_{n+1} = \begin{cases} Y_{U_n} & \text{avec probabilité} = a, \\ T_{n+1} & \text{avec probabilité} = 1 - a, \end{cases}$$

où U_n est un variable uniforme sur $\{1, \dots, n\}$ indépendantes de Y_1, \dots, Y_n .

À l'instant $n = 0$, $R_0 = 0$. C'est la position initiale qui est l'origine de la marche.

À $n = 1$, $R_1 = T_1 = Y_1$. À $n = 2$, $R_2 = Y_1 + Y_2$, avec

$$Y_2 = \begin{cases} Y_1 = T_1 & \text{avec probabilité} = a, \\ T_2 & \text{avec probabilité} = 1 - a. \end{cases}$$

Et ainsi de suite. Par conséquent, avec probabilité a le marcheur répète un pas précédemment effectué (choisi de façon uniforme) et avec probabilité $1 - a$ il effectue un nouveau pas choisi de façon indépendante du passé.

3.3 Le cas de la marche aléatoire de l'éléphant avec mémoire renforcée

1. Description de la marche.

Soit $r \in \mathbb{N}$, r est le paramètre de renforcement de la mémoire.

L'éléphant débute sa marche étant à l'origine. Dans un premier temps, il fait un premier pas vers la gauche ou la droite. Ensuite, pour les pas suivants, il choisit uniformément de façon aléatoire un pas parmi les pas précédents et fait exactement un nombre r de pas identiques à celui choisit parmi les pas précédents ; enfin, il fera un pas supplémentaire qui sera avec probabilité p l'un des pas parmi les r pas qu'il vient de faire, et avec probabilité $1 - p$ il fera le contraire de l'un des pas parmi les r pas qu'il vient de faire.

2. Le modèle d'urne associé.

À $n = 1$, une boule est mise dans l'urne.

À $n \geq 2$, on tire une boule de l'urne ; puis, on remet simultanément dans l'urne la boule tirée avec un nombre r boules de même couleur. Par la suite, on lance une pièce de monnaie (*pile*, *face*). Soit p la probabilité d'obtenir *pile* et $(1 - p)$ celle d'obtenir *face*.

Si le lancer de la pièce donne *pile*, alors avec probabilité p on ajoute dans l'urne une boule de même couleur que celle tirée (même couleur que les a précédentes), et avec probabilité $(1 - p)$ on ajoute dans l'urne une boule de couleur contraire.

3. Espérance de la matrice de remplacement.

Soit ϵ_p une variable aléatoire qui suit une loi de bernoulli de paramètre $p \in [0, 1]$:

$$\epsilon_p \sim \mathcal{B}(p).$$

La matrice de remplacement est

$$\mathcal{A} = rI + \epsilon_p I + (1 - \epsilon_p)J,$$

avec

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'espérance de la matrice de remplacement est donc

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\mathcal{A}] &= rI + pI + (1 - p)J \\ &= \begin{pmatrix} r + p & 1 - p \\ 1 - p & r + p \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

3.4 Le cas de la marche aléatoire de l'éléphant modifiée

1. Description.

L'éléphant débute sa marche à l'origine en faisant un pas vers la droite, ou en restant fixe sur place

sans bouger. En fait, à tout instant n le déplacement de l'éléphant se fait soit vers la droite, soit en restant immobile. Il n'y a pas de déplacement vers la gauche.

2. Modèle d'urne associé

Dans ce cas, nous allons supposer que l'urne contient des boules de 2 couleurs : rouge et invisible. La couleur rouge correspond à un déplacement vers la droite, et la couleur invisible correspond au cas où l'éléphant reste fixe.

Le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ correspond à un déplacement vers la droite, et le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ quand l'éléphant reste immobile.

3. La matrice de remplacement \mathcal{A} .

Soit \mathcal{A} la matrice de remplacement. On a $\mathcal{A} = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec probabilité p , et $\mathcal{A} = J_1 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ avec probabilité $(1 - p)$. Par conséquent, l'espérance de la matrice de remplacement est donnée par :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\mathcal{A}] &= pI + (1 - p)J_1 \\ &= \begin{pmatrix} p & 0 \\ 1 - p & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

3.5 Le cas où l'éléphant ne peut se souvenir au plus que de ses r derniers pas seulement

Soit $r \in \mathbb{N}$.

3.5.1 Présentation

Dans cette partie, l'éléphant n'est capable de se souvenir que de ses r derniers pas les plus récents effectués. À l'instant $n = 0$, l'éléphant est à l'origine $S_0 = 0$. À l'instant $n = 1$, la position de l'éléphant est : $S_1 = X_1$ avec X_1 une variable de Rademacher de paramètre $q \in [0, 1]$:

$$X_1 = \begin{cases} +1 & \text{avec probabilité } q, \\ -1 & \text{avec probabilité } 1 - q. \end{cases}$$

À l'instant $n = 2$, la position de l'éléphant est : $S_2 = S_1 + X_2$, avec

$$X_2 = \begin{cases} +X_1 & \text{avec probabilité } p, \\ -X_1 & \text{avec probabilité } 1 - p. \end{cases}$$

X_2 est à valeurs dans $\{-1, +1\}$.

Pour chacun des instants $n \in \{1, 2, 3, \dots, r, r+1\}$, la position de l'éléphant est : $S_n = S_{n-1} + X_n$ avec

$$X_n = \begin{cases} +X_{U_n} & \text{avec probabilité } = p, \\ -X_{U_n} & \text{avec probabilité } = 1 - p. \end{cases}$$

avec $0 \leq p \leq 1$ et $U_n \rightsquigarrow \text{Uniforme}\{1, 2, \dots, n-1\}$. La variable uniforme U_n est choisit indépendamment des variables X_k . Ainsi, $\mathbb{P}(U_n = k) = \frac{1}{n-1}$, pour tout $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$.

Pour tout $n \geq (r+2)$, la position et le pas de l'éléphant seront donnés par les deux expressions suivantes : la position de l'éléphant sera : $S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$ avec

$$X_{n+1} = \begin{cases} +X_{U_{n+1}} & \text{avec probabilité } = p, \\ -X_{U_{n+1}} & \text{avec probabilité } = 1 - p. \end{cases}$$

avec $0 \leq p \leq 1$ et $U_{n+1} \rightsquigarrow \text{Uniforme}\{n - (r-1), \dots, n-3, n-2, n-1, n\}$. La variable uniforme U_{n+1} est choisie indépendamment des variables X_k . Ainsi, $\mathbb{P}(U_{n+1} = k) = \frac{1}{r}$, pour tout $k \in \{n - (r-1), \dots, n-3, n-2, n-1, n\}$.

Remarque 3.1 Nous constatons ici que les pas de la marche forment une chaîne de Markov de mémoire égale à r ; car le pas suivant n'est fonction que des r pas précédents.

Remarque 3.2 Toute chaîne de Markov, de mémoire égale à $r \in \mathbb{N}$, peut s'écrire comme une chaîne de Markov de mémoire égale à 1.

Preuve. Soit (Z_n) une chaîne de Markov de mémoire égale à $r \in \mathbb{N}$. Alors nous avons, pour $n \geq r$,

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(Z_{n+1} = z | Z_1 = z_1, Z_2 = z_2, \dots, Z_n = z_n) \\ &= \mathbb{P}(Z_{n+1} = z | Z_{n-(r-1)} = z_{n-(r-1)}, \dots, Z_{n-1} = z_{n-1}, Z_n = z_n) \\ &= \mathbb{P}(Z_{n+1} = z, Z_n = z_n, Z_{n-1} = z_{n-1} \dots, Z_{n-(r-2)} = z_{n-(r-2)} | Z_{n-(r-1)} = z_{n-(r-1)}, \dots, Z_n = z_n). \end{aligned}$$

Posons : $W_n = \begin{pmatrix} Z_{n-r+1} \\ Z_{n-r+2} \\ \dots \\ Z_{n-1} \\ Z_n \end{pmatrix}$. Nous pouvons donc écrire,

$$\mathbb{P}(Z_{n+1} = z | Z_1 = z_1, Z_2 = z_2, \dots, Z_n = z_n) = \mathbb{P}(W_{n+1} = \begin{pmatrix} z_{n-(r-2)} \\ z_{n-(r-1)} \\ \dots \\ z_n \\ z \end{pmatrix} | W_n = \begin{pmatrix} z_{n-r+1} \\ z_{n-r+2} \\ \dots \\ z_{n-1} \\ z_n \end{pmatrix})$$

On retrouve bien une chaîne de Markov de mémoire égale à 1. \square

3.5.2 Loi des pas de l'éléphant à mémoire finie

Proposition 3.3 Les pas (X_n) de la marche de l'éléphant à mémoire finie, de taille r , sont des variables à valeurs dans $\{-1, +1\}$, dont la loi est donnée par induction par $\mathbb{P}(X_1 = +1) = q$, et pour $n \in \{1, 2, \dots, r, (r+1)\}$,

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = +1) = (1-p) + \frac{2p-1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(X_k = +1). \quad (3.1)$$

Pour $n \geq (r+2)$

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = +1) = (1-p) + \frac{2p-1}{r} \sum_{k=n-4}^n \mathbb{P}(X_k = +1). \quad (3.2)$$

Pour démontrer cette proposition, nous aurons besoin de la proposition 0.2 énoncée dans l'introduction.

Preuve. Nous allons faire la démonstration pour $n \geq (r+2)$, car nous avons déjà fait la démonstration pour $n \in \{1, 2, \dots, (r+1)\}$ dans la preuve de la proposition 0.2.

Posons $z = \mathbb{P}(X_{n+1} = 1 | X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n)$. D'après la formule des probabilités totales,

on remarque que

$$\begin{aligned}
z &= \mathbb{P}(X_{n+1} = 1 | X_{n-(r-1)} = x_{n-(r-1)}, \dots, X_{n-3} = x_{n-3}, X_{n-2} = x_{n-2}, X_{n-1} = x_{n-1}, X_n = x_n) \\
&= \mathbb{P}(X_{n+1} = 1, U_{n+1} \in \{n - (r - 1), \dots, n - 2, n - 1, n\} | X_{n-(r-1)} = x_{n-(r-1)}, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}, X_n = x_n) \\
&= \sum_{k=(n-(r-1))}^n \mathbb{P}(X_{n+1} = 1, U_{n+1} = k | X_{n-(r-1)} = x_{n-(r-1)}, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}, X_n = x_n).
\end{aligned}$$

Introduisons maintenant les événements $A = \{X_{n+1} = 1\}$ et $B = \{U_{n+1} = k\}$. En utilisant la relation des probabilités conditionnelle (0.2), on obtient

$$\begin{aligned}
z &= \sum_{k=(n-(r-1))}^n \mathbb{P}(X_{n+1} = 1 | U_{n+1} = k, X_{n-(r-1)} = x_{n-(r-1)}, \dots, X_n = x_n) \\
&\quad \times \mathbb{P}(U_{n+1} = k | X_{n-(r-1)} = x_{n-(r-1)}, \dots, X_n = x_n) \\
&= \sum_{k=(n-(r-1))}^n \mathbb{P}(X_{n+1} = 1 | U_{n+1} = k, X_k = x_k) \times \frac{1}{r},
\end{aligned}$$

car par hypothèse, la variable U_{n+1} est indépendant de (X_1, \dots, X_n) . Par ailleurs, si $1 = x_k$, alors

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = 1 | U_{n+1} = k; X_k = 1) = \mathbb{P}(X_{n+1} = X_k | U_{n+1} = k; X_k = 1) = p,$$

et si $1 = -x_k$, alors

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = 1 | U_{n+1} = k; X_k = -1) = \mathbb{P}(X_{n+1} = -X_k | U_{n+1} = k; X_k = -1) = 1 - p.$$

Or nous savons que pour tout événement A quelconque,

$$\mathbb{E}[\mathbb{1}_A] = \mathbb{P}(A).$$

Ainsi, on a

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = 1 | X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{X_{n+1}=1} | X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n].$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\mathbb{P}(X_{n+1} = 1 | X_1, \dots, X_n)] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[\mathbb{1}_{X_{n+1}=1} | X_1, \dots, X_n]] \\
&= \mathbb{E}[\mathbb{1}_{X_{n+1}=1}] = \mathbb{P}(X_{n+1} = 1).
\end{aligned}$$

D'après les calculs précédents, nous déduisons que :

$$\begin{aligned}
z &= \frac{1}{r} \sum_{k=(n-4)}^n (p\mathbb{1}_{X_k=1} + (1-p)\mathbb{1}_{X_k=-1}) \\
&= \frac{1}{r} \sum_{k=(n-(r-1))}^n (p\mathbb{1}_{X_k=1} + (1-p)(1 - \mathbb{1}_{X_k=1})) \\
&= \frac{1}{r} \sum_{k=(n-(r-1))}^n (p\mathbb{1}_{X_k=1} + (1-p) - (1-p)\mathbb{1}_{X_k=1}) \\
&= \frac{1}{r} \times r(1-p) + \frac{1}{r} \sum_{k=(n-(r-1))}^n p\mathbb{1}_{X_k=1} - \frac{1-p}{r} \sum_{k=(n-(r-1))}^n p\mathbb{1}_{X_k=1} \\
&= (1-p) + \frac{2p-1}{r} \sum_{k=(n-(r-1))}^n \mathbb{1}_{X_k=1}.
\end{aligned}$$

On rappelle que

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = 1) = \mathbb{E}[\mathbb{P}(X_{n+1} = 1 | X_{n-(r-1)}, \dots, X_{n-1}, X_n)].$$

On peut ainsi déduire que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_{n+1} = 1) &= (1-p) + \frac{2p-1}{r} \sum_{k=(n-(r-1))}^n \mathbb{E}[\mathbb{1}_{X_k=1}] \\
&= (1-p) + \frac{2p-1}{r} \sum_{k=(n-(r-1))}^n \mathbb{P}(X_k = 1).
\end{aligned}$$

□

3.5.3 Étude du comportement asymptotique de la marche de l'éléphant à mémoire finie.

Avant de commencer l'étude du comportement asymptotique de la marche de l'éléphant, nous nous proposons de simuler une trajectoire de S_n , puis 5 trajectoires de S_n sur un même graphique. Cela va nous permettre de visualiser la convergence ou la divergence de cette marche.

Dans la Figure 3.1, on observe une simulation d'une trajectoire de la marche de l'éléphant avec les paramètres suivant : $q = 0.3$, $p = 0.45$, $n = 5000$, $r = 5$ (Code R fournit en annexe).

Dans la figure 3.2, on observe une simulation de 5 trajectoires de la marche de l'éléphant avec les paramètres suivants : $n = 10000$, $N = 5$, $p = 0.9$, $q = 0.45$, et $r = 5$ sur le même graphique.

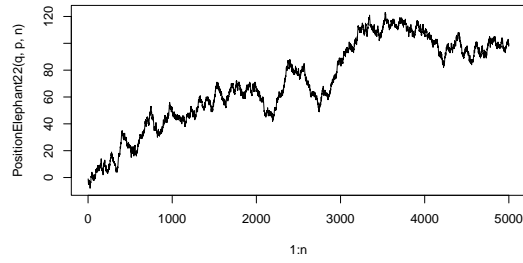


FIGURE 3.1 Trajectoire de S_n à mémoire finie

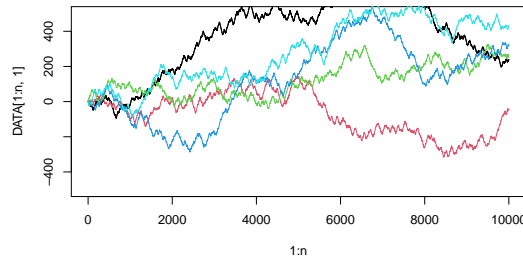


FIGURE 3.2 Cinq trajectoires de S_n à mémoire finie

Remarque 3.4 *En observant les deux trajectoires ci-dessus simulées, on est poussé à croire que la marche de l'éléphant diverge.*

3.5.4 Quelques simulations dans le cas $r = 5$

Dans la figure 3.3, on observe une simulation de la trajectoire $\frac{S_n}{n}$ avec les paramètres suivants : $n = 5000$, $r = 5$, $p = 0.45$ et $q = 0.3$. Une observation de la figure 3.3 nous permet d'énoncer la conjecture suivante :

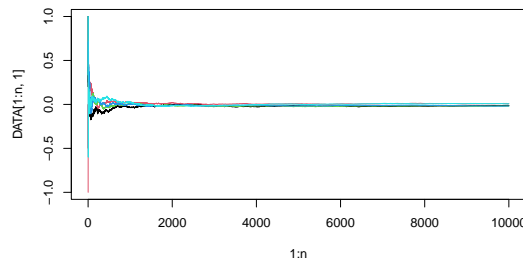


FIGURE 3.3 Cinq de $\frac{S_n}{n}$ de mémoire de taille 5

Conjecture 3.5 Dans le cas diffusif, $0 \leq p < \frac{3}{4}$, on a la limite, au sens presque sûr, suivante :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n} = 0$$

Dans la figure 3.4, on observe une simulation de la trajectoire $\frac{S_n}{\sqrt{n \log n}}$ avec les paramètres suivants : $n = 10000$, $r = 5$, $p = 0.75$ et $q = 0.3$.

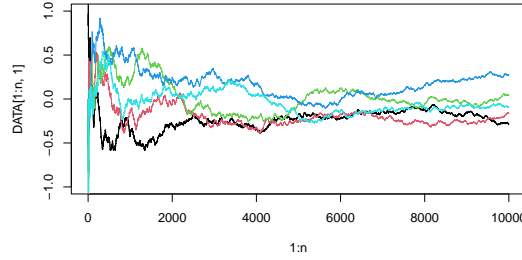


FIGURE 3.4 Cinq trajectoires de $\frac{S_n}{\sqrt{n \log n}}$ de mémoire de taille 5

Une observation de la figure 3.4 nous permet d'énoncer la conjecture suivante :

Conjecture 3.6 Dans le cas critique, $p = \frac{3}{4}$, on a la limite, au sens presque sûr, suivante :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{\sqrt{n \log n}} = 0$$

3.5.5 Quelques simulations et propriétés dans le cas $r = 1$

Dans cette sous section, nous avons restreint notre étude de la convergence au cas où la mémoire de l'éléphant est de taille $r = 1$. Ainsi, à chaque étape n du processus, l'éléphant ne peut choisir que le pas précédent pour faire le pas suivant. En effet, après avoir choisit le pas précédent, l'éléphant va le reproduire à l'étape suivante avec probabilité p , ou reproduire son contraire avec probabilité $1 - p$.

Afin de visualiser ce processus, nous nous proposons de simuler une trajectoire et un flux de 5 trajectoires de la marche de l'éléphant dans ce cas de figure.

Dans la figure 3.5, on observe une simulation de la trajectoire S_n avec les paramètres suivants : $n = 5000$, $r = 1$, $p = 0.45$ et $q = 0.3$.

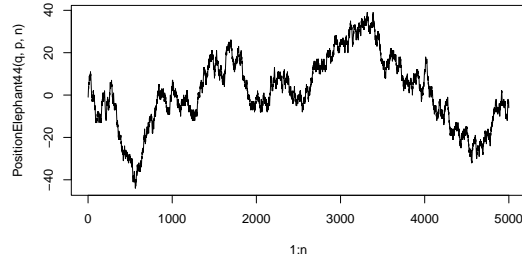


FIGURE 3.5 Trajectoire de S_n de mémoire de taille 1

Afin d'avoir une idée sur la convergence ou la divergence de S_n , nous vous présentons une simulation d'un flux de 5 trajectoires suivante. Dans la figure 3.6, on observe une simulation d'un flux de 5 trajectoires de S_n avec les paramètres suivants : $n = 10000$, $r = 1$, $N = 5$, $p = 0.9$ et $q = 0.45$; où N est le nombre de trajectoires à simuler.

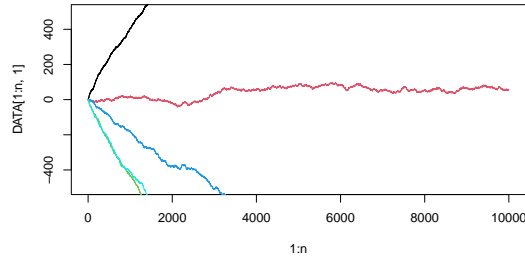


FIGURE 3.6 Flux de 5 trajectoires de S_n à mémoire de taille 1

Une observation de la figure 3.6 nous permet d'énoncer la conjecture suivante :

Conjecture 3.7 *Le processus d'une marche aléatoire de l'éléphant de mémoire égale à 1 est un processus qui diverge.*

CONCLUSION

Nous avons étudié la marche aléatoire de l'éléphant en nous intéressant au modèle introduit par Schütz et Trimper en 2004, (Schütz et Trimper, 2004). Au terme de notre étude, il en ressort que cette marche diverge. Nous avons aussi présenté plusieurs graphiques qui illustrent la divergence de cette marche aléatoire de l'éléphant. Néanmoins, comme nous l'avons démontré dans nos principaux résultats, lorsque cette marche est bien renormalisée, elle converge. Nous avons terminé notre étude en présentant d'autres modèles de marches aléatoires.

ANNEXE A

CODES R POUR LES SIMULATIONS

A.1 Code R pour Figure 1.1

Le code R ci-dessous va simuler une trajectoire de la marche aléatoire de l'éléphant dans le cas diffusif avec les paramètres suivants : $q = 0.3$, $p = 0.45$, $n = 5000$

```
1 # Partie 1: Le premier pas
2 x<-function(q) {
3   u<-runif(1)
4   if (u<=q) return(+1)
5   else return(-1)
6 }
7
8 # Partie 2: une trajectoire
9 PositionElephant<-function(q,p,n) {
10  PasElephant<-vector() ## vecteur des pas
11  PositionElephant<-vector() ## vecteur vide qui va contenir les positions
12  PasElephant[1]<-x(q)
13  PositionElephant[1]=PasElephant[1]
14  for (i in 2:n) {
15    indice<-sample(1:(i-1),1) ## choix uniforme d'un pas
16    PasElephant[i]=PasElephant[indice]*x(p)
17    PositionElephant[i]=PositionElephant[i-1]+PasElephant[i]
18  }
19 }
20
21 return(PositionElephant)
22 }
23
24 ## Partie 3: Graphe d'une trajectoire
25 q=0.3
26 p=0.45
27 n=5000
28 plot(1:n,PositionElephant(q,p,n),type = "l" )
```

A.2 Code R pour Figure 1.2

Afin de visualiser la divergence de la marche de l'éléphant, le code R ci-dessous va simuler 5 trajectoires de cette marche toujours dans le cas diffusif tous sur le même graphique, avec les paramètres suivants : $N = 5$, $q = 0.45$, $p = 0.9$, $n = 1000$. Dans ce code nous utilisons la fonction de la section A.1.

```
1 ##### Partie 1 : Generer cinq trajectoires
2 DATA<-replicate(N,PositionElephant(q,p,n) )
3 DATA ## 5 vecteurs de 1000 positions de la marche
4
5 plot(1:n,DATA[1:n,1],type = "l", ylim=c(-500,500) )
6 for (j in 1:N) {
7
8   lines(1:n,DATA[1:n,j],col=j )
9 }
```

A.3 Code R pour Figure A.3

Le code R ci-dessous va simuler une trajectoire de M_n dans le cas super diffusif avec les paramètres suivants : $q = 0.3$, $p = 0.85$, $n = 30000$. Dans ce code nous utilisons la fonction de la section A.1

```
1 ## CODE R : Pour  $M_m = a_n * S_n$  ##
2 ## Partie 1 :Le premier pas
3 x<-function(q) {
4   u<-runif(1)
5   if (u<=q) return(+1)
6   else return(-1)
7 }
8
9 ## Partie 2 : trajectoire de  $M_n$ 
10 M_n<-function(q,p,n) {
11   Pas<-vector() ## vecteur des pas
12   Position<-vector() ## vecteur des positions
13   constante<-vector() ## la constante qui multiplie  $M_n$ 
14   M_n<-vector() ## le vecteur  $M_n = a_n * S_n$ 
15
16   Pas[1]<-x(q)
17   Position[1]=Pas[1]
18   constante[1]=1
```

```

19 M_n[1]=Position[1]
20
21 for (i in 2:n) {
22     indice<-sample(1:(i-1),1)
23     Pas[i]=Pas[indice]*x(p)
24     Position[i]=Position[i-1]+Pas[i]
25     constante[i]= (i-1) / (i-1 + 2*p -1)
26     M_n[i]= Position[i] * prod(constante)
27
28 }
29
30 return(M_n)
31 }
32
33 ## Partie 3 : trajectoire M_n
34 q=0.3
35 p=0.85
36 n=30000
37 plot(1:n,M_n(q,p,n),type = "l" )
38
39 ## Partie 4 : 5 trajectoires de M_n ##
40 N<-5
41 q<-0.3
42 p=0.85
43 n<-30000
44 DATA<-replicate(N,M_n(q,p,n))
45 DATA
46
47 plot(1:n,DATA[1:n,1],type = "l", ylim=c(-3,3) )
48 for (j in 1:N) {
49
50     lines(1:n,DATA[1:n,j],col=j )
51 }

```

A.4 Code R pour la figure 1.4

Bien que la marche de l'éléphant soit divergente, lorsqu'elle est bien renormalisée, elle converge. À titre d'exemple, le code R ci-dessous permet de simuler 5 trajectoires de $\frac{S_n}{n}$ dans le cas diffusif avec les para-

mètres suivants : $q = 0.3$, $p = 0.45$, $n = 5000$ (Ici, la marche a été re-normalisée par n). Dans ce code nous utilisons la fonction de la section A.1.

```

1 PositionElephant_1<-function(q,p,n){
2
3     PositionElephant_1<-PositionElephant(q,p,n) / seq(1,n,1)
4
5     return(PositionElephant_1)
6
7     ##### Graphe d'une trajectoire #####
8 q=0.3
9 p=0.45
10 n=5000
11
12 PositionElephant_1(0.3,0.45,5000)
13
14 plot(1:n,PositionElephant_1(q,p,n),type = "l" )
15
16 #### Flux de 5 Trajectoires #####
17 N<-5
18 q<-0.45
19 p=0.9
20 n<-30000
21 DATA<-replicate(N,PositionElephant_1(q,p,n))
22 DATA
23
24 plot(1:n,DATA[1:n,1],type = "l", ylim=c(-2,2) )
25 for (j in 1:N) {
26
27     lines(1:n,DATA[1:n,j],col=j )
28 }

```

A.5 Code R pour la figure 1.5

Le code R suivant montre une deuxième renormalisation de la marche aléatoire de l'éléphant par $\sqrt{n} \log(n)$ qui converge avec les paramètres suivants : $q = 0.3$, $p = 0.75$, $n = 10000$. Dans ce code nous utilisons la fonction de la section A.1.

```

1 PositionElephant_2<-function(q,p,n){

```



```

2
3  a<-vector()
4
5  for (i in 1:n) {
6      a[i]<-log(i)*sqrt(i)
7  }
8
9  PositionElephant_2<-PositionElephant(q,p,n) / a
10
11  return(PositionElephant_2)
12 }
13
14 q=0.3
15 p=0.75
16 n=10000
17
18 PositionElephant_2(0.3,0.75,10000)
19
20 plot(1:n,PositionElephant_2(q,p,n),type = "l" )
21
22
23 ##### Flux de 5 trajectoires #####
24
25 N<-5
26 q<-0.45
27 p=0.9
28 n<-10000
29 DATA<-replicate(N,PositionElephant_2(q,p,n))
30 DATA
31
32 plot(1:n,DATA[1:n,1],type = "l", ylim=c(-2,2) )
33 for (j in 1:N) {
34
35     lines(1:n,DATA[1:n,j],col=j )
36 }

```

A.6 Code R pour la figure 1.6

Le code R suivant est pour la Figure 1.6 avec les paramètres suivants : $q = 0.3$, $p = 0.75$, $n = 5000$, $N = 100$. Ce code permet de visualiser la convergence en loi de $\frac{S_n}{\sqrt{n \log n}}$ dans le cas critique. Dans ce code nous utilisons la fonction de la section A.1.

```
1
2 PositionElephant_5<-function(q,p,n,N){
3
4   c<-vector()
5
6   for (i in 1:N) {
7     c[i]<-PositionElephant(q,p,n)[n] / sqrt(n*log(n))
8   }
9
10  return(c)
11 }
12
13 q=0.3
14 p=0.75
15 n=5000
16 N=100
17
18
19 PositionElephant_5(0.3,0.75,5000,100)
20
21 plot(1:N,PositionElephant_5(q,p,n,N),type = "l" )
22
23 hist(PositionElephant_5(q,p,n,N),breaks=seq(-4,4,0.25),freq=F,col = "#F5D0A9" ,xlab = "
    Valeurs de S_n / sqrt(n*log(n))", ylab = "Effectifs", main = " Histogramme de S_n /
    sqrt(n*log(n)), cas super diffusif ")
24
25 r<-seq(-4,4,0.5)
26 r
27
28 lines(r,dnorm(r,0,1), col = "red",lwd=3) # Superposer la ligne
```

A.7 Code R pour la figure 2.1

Le code R suivant est pour la Figure 2.1 avec les paramètres suivants : $q = 0.3$, $p = 0.45$, $n = 5000$, $N = 100$, $t = 1$ Ce code permet de visualiser la convergence en loi de $\frac{S_{[tn]}}{\sqrt{n}}$ dans le cas critique. Dans ce code nous utilisons la fonction de la section A.1.

```
1
2 ## La limite de S_[nt]/ sqrt(n)  quand n-> +infini = W_t ##
3
4 PositionElephant_3<-function(q,p,n,N,t){
5
6   b<-vector()
7
8   for (i in 1:N) {
9     b[i]<-PositionElephant(q,p,n)[n] / sqrt(n)
10
11   }
12
13   return(b)
14 }
15
16 q=0.3
17 p=0.45
18 n=5000
19 N=100
20 t=1
21
22 PositionElephant_3(0.3,0.45,5000,100,1)
23
24 plot(1:N,PositionElephant_3(q,p,n,N,t),type = "l" )
25
26 hist(PositionElephant_3(q,p,n,N,t),breaks=seq(-4,4,0.25),freq=F,col = "#F5D0A9" ,xlab =
27   "Valeurs de S_[nt] / sqrt(n)", ylab = "Effectifs", main = " Histogramme de S_[tn]
28   / sqrt(n) ")  ## arrange avec les label
29
30
31 lines(r,dnorm(r,0,1), col = "red",lwd=3) # Superposer la ligne
```

A.8 Tous les codes R dans cette section sont pour le cas où l'éléphant ne peut se souvenir que d'un nombre constant et fini r de ses derniers pas

A.8.1 Code R pour la figure 3.1

Le code R ci-dessous va simuler pour un r donné une trajectoire de la marche aléatoire de l'éléphant dans le cas diffusif avec les paramètres suivants : $q = 0.3$, $p = 0.45$, $n = 5000$, $r = 5$. Dans ce code nous utilisons la fonction de la section A.1.

```
1
2 ## Partie 1 :Le premier pas
3 x<-function(q) {
4   u<-runif(1)
5   if (u<=q) return(+1)
6   else return(-1)
7 }
8
9 ## Partie 2 : trajectoire des pas
10 PositionElephant22<-function(q,p,n){
11   PasElephant22<-vector()
12   PositionElephant22<-vector()
13   PasElephant22[1]<-x(q)
14   PositionElephant22[1]=PasElephant22[1]
15   for (i in 2:6) {
16     indice<-sample(1:(i-1),1)
17     PasElephant22[i]=PasElephant22[indice]*x(p)
18     PositionElephant22[i]=PositionElephant22[i-1]+PasElephant22[i]
19   }
20 }
21
22 for (i in 7:n) {
23   indice<-sample((i-5):(i-1),1)
24   PasElephant22[i]=PasElephant22[indice]*x(p)
25   PositionElephant22[i]=PositionElephant22[i-1]+PasElephant22[i]
26 }
27 }
28
29 return(PositionElephant22)
30 }
31
```

```

32
33 ## Graphe d'une trajectoire ##
34 q=0.3
35 p=0.45
36 n=5000
37 plot(1:n,PositionElephant22(q,p,n),type = "l" )

```

A.8.2 Code R pour la figure 3.2

Le code R ci-dessous va permettre de simuler 5 trajectoires de la marche de l'éléphant. Pour cela, nous allons utiliser le code R de la sous-section A.8.1

```

1 N<-5
2 q<-0.45
3 p=0.9
4 n<-10000
5 DATA<-replicate(N,PositionElephant22(q,p,n))
6 DATA
7
8 plot(1:n,DATA[1:n,1],type = "l", ylim=c(-500,500) )
9 for (j in 1:N) {
10
11   lines(1:n,DATA[1:n,j],col=j )
12 }

```

BIBLIOGRAPHIE

- Baur, E. et Bertoin, J. (2016). Elephant random walks and their connection to pólya-type urns. *Phys. Rev. E*, 94, 052134. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevE.94.052134>. Récupéré de <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.94.052134>
- Bercu, B. (2017). A martingale approach for the elephant random walk. *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical*, 51(1), 015201. <http://dx.doi.org/10.1088/1751-8121/aa95a6>. Récupéré de <https://dx.doi.org/10.1088/1751-8121/aa95a6>
- David, W. (1991). *Probability with Martingales*. Cambridge Mathematical Textbooks.
- Duflo, M. (1997). *Random Iteration Model*. Springer.
- Foata, D. et Fuchs, A. (2004). *Processus stochastiques*. Dunod.
- Janson, S. (2004). Functional limit theorems for multitype branching processes and generalized pólya urns. *Stochastic Processes and their Applications*, 110(2), 177–245. <http://dx.doi.org/https://doi.org/10.1016/j.spa.2003.12.002>. Récupéré de <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0304414903001790>
- Laulin, L. (2022). *About the elephant random walk*. (Thèse de doctorat). Université de Bordeaux.
- Schütz, G. M. et Trimper, S. (2004). Elephants can always remember : Exact long-range memory effects in a non-markovian random walk. *Phys. Rev. E*, 70, 045101. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevE.70.045101>. Récupéré de <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.70.045101>