



Universidade Federal de Alagoas  
Unidade Acadêmica Centro de Tecnologia  
Curso de Engenharia Civil  
Cidade Universitária – Campus A. C. Simões  
Tabuleiro dos Martins – CEP 57072-970 – Maceió – Alagoas

---



## **Memorial de Cálculo Detalhado**

*Análise preliminar de vibrações livre em estruturas offshore com ênfase em  
estruturas do tipo Jaqueta*

Francisco de Assis Viana Binas Júnior

Maceió – AL  
Agosto de 2017



Universidade Federal de Alagoas  
Unidade Acadêmica Centro de Tecnologia  
Curso de Engenharia Civil  
Cidade Universitária – Campus A. C. Simões  
Tabuleiro dos Martins – CEP 57072-970 – Maceió – Alagoas



## **Memorial de Cálculo Detalhado**

*Análise preliminar de vibrações livre em estruturas offshore com ênfase em  
estruturas do tipo Jaqueta*

Francisco de Assis Viana Binas Júnior

Memorial de cálculo detalhado,  
solicitado pelo professor Eduardo Nobre  
Lages, para acompanhamento do  
aprendizado por parte do aluno  
(Francisco de Assis V. B. Jr. - ouvinte)  
na disciplina de Análise Estrutural de  
Sistemas Marítimos.

Maceió – AL  
Agosto de 2017

## SUMÁRIO

1. Introdução .....	4
2. Conceitos Básicos referentes ao problema em estudo.....	5
2.1 Matriz de Rigidez.....	6
2.2 Matriz de Massa .....	6
3. Exemplo de referência.....	7
4. Exemplo proposto .....	9
5. Conclusões .....	12
REFERÊNCIAS .....	12

## 1. Introdução

Os sistemas estruturais *offshore* tiveram seu início por volta do século XIX com estruturas de madeira e lâmina d'água de apenas 3 metros, estas estruturas já realizavam a extração do petróleo. Já no Brasil tal tecnologia só começou a ser implantada em meados da década de 60, já com uma lâmina d'água de 80 metros, tal fato demonstra o avanço contínuo em tal tecnologia, uma vez que a exploração *offshore* passou a se tornar a opção mais viável economicamente, uma vez que as reservas em terra vêm diminuindo.

O uso de plataformas fixas em sistemas *offshore* possui limites de lâmina d'água de aproximadamente 400 metros, como é possível ver na **Figura 1**, que contém as maiores estruturas deste tipo já construídas.

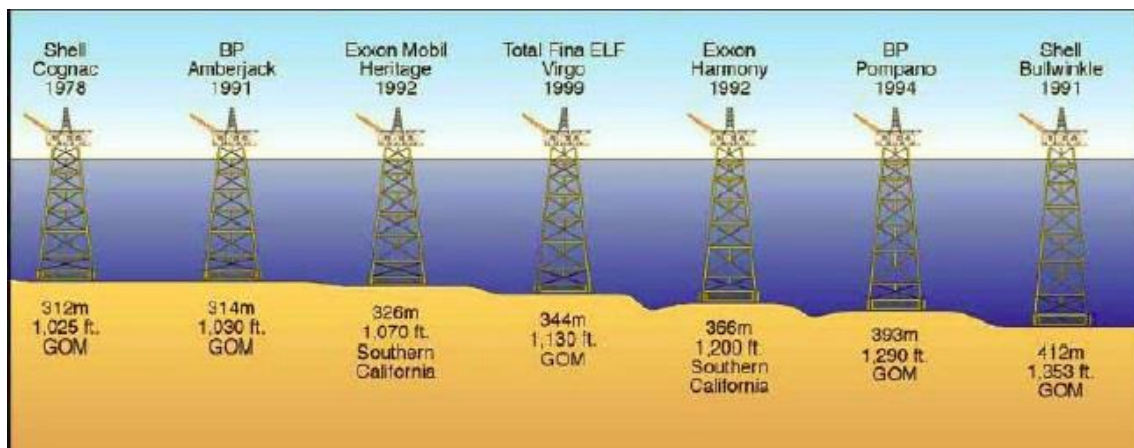


Figura 1 - Maiores plataformas fixas já construídas

Tais estruturas são compostas por elementos tubulares de aço treliçados. Tais elementos são fixados ao leito do mar com o auxílio de estacas cravadas à percussão ou através de vibração. Uma estrutura como esta recebe o nome de Jaqueta e possuem em sua preponderância apenas esforços axiais de tração e compressão.

Tendo em vista a natureza do problema em estudo, no caso, a análise de estruturas fixas *offshore*, faz-se necessário uma análise dinâmica do problema, uma vez que respostas dinâmicas se aproximam muito mais do comportamento real da estrutura e por tais estruturas estarem sujeitas a ações que também variam com o tempo como as ondas e correntezas do mar.

Partindo-se do pressuposto, e solicitado, que pretendesse realizar uma análise preliminar de estruturas sujeitas a ações periódicas, para tal estudo é necessário

inicialmente calcular as frequências naturais da estrutura e seus respectivos modos naturais de vibração. Ou seja, consiste no estudo da vibração livre da estrutura, uma vez que o sistema vibra apenas devido as condições iniciais do problema, sendo assim não se considera a força externa neste momento.

## 2. Conceitos Básicos referentes ao problema em estudo

Através da segunda Lei de Newton, em que a taxa de variação da quantidade de movimento é igual a força atuante no elemento, pode-se escrever a equação do movimento de um elemento da forma

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\boldsymbol{\delta}}(t) + \mathbf{C} \cdot \dot{\boldsymbol{\delta}}(t) + \mathbf{K} \cdot \boldsymbol{\delta}(t) = \mathbf{F}(t)$$

sendo  $\mathbf{M}$  a matriz de massa,  $\mathbf{C}$  o amortecimento,  $\mathbf{K}$  a matriz de rigidez,  $\mathbf{F}$  o vetor de forças,  $\boldsymbol{\delta}$ ,  $\dot{\boldsymbol{\delta}}$ , e  $\ddot{\boldsymbol{\delta}}$  o deslocamento, a velocidade, e aceleração da estrutura respectivamente.

Entretanto o amortecimento pode ser dado por

$$\mathbf{C} = \alpha \cdot \mathbf{M} + \beta \cdot \mathbf{K}$$

Com isto, nota-se que o amortecimento é proporcional à matriz de massa e a de rigidez, por este motivo os modos de vibração calculados com o problema amortecido são iguais aos não amortecidos. Tais modos de vibração são calculados assumindo que o sistema vibra devido apenas as condições iniciais, sendo assim, não se considera a ação de nenhuma força externa de excitação, e por este motivo o movimento recebe o nome de vibração livre. Com tais considerações é possível rescrever a equação do movimento para a forma

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\boldsymbol{\delta}}(t) + \mathbf{K} \cdot \boldsymbol{\delta}(t) = \mathbf{0}$$

A solução de tal equação considerando que o objeto parte do repouso ( $\dot{\boldsymbol{\delta}}(t) = \mathbf{0}$ ) e possui uma configuração deformada inicial ( $\boldsymbol{\delta}(t) = \bar{\boldsymbol{\delta}}$ ) é dada por

$$\boldsymbol{\delta}(t) = \bar{\boldsymbol{\delta}} \cdot \cos(\omega_0 \cdot t)$$

sendo  $\omega_0$  a frequência natural do sistema.

Substituindo esta equação e a sua derivada segunda na equação do movimento chega-se a

$$(-\omega_0^2 \cdot \mathbf{M} + \mathbf{K}) \cdot \bar{\boldsymbol{\delta}} \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) = \mathbf{0}$$

Observa-se que isto caracteriza-se uma problema de autovalor e autovetor generalizado. Em que os autovalores representam as frequências naturais e os seus

respectivos autovetores representam os modos de vibração do sistema. O máximo número de modos de vibração é igual ao número de graus de liberdade que a estrutura possui, tal número é dependente do grau de discretização dado a estrutura, ou seja, quanto maior a discretização maior será o número de graus de liberdade e consequentemente maior será o número máximo de modos de vibração.

## 2.1 Matriz de Rigidez

Para sistemas sujeitos a apenas tração e compressão uma boa aproximação para a determinação de sua rigidez se dá por considerar apenas a rigidez axial da barra, sendo assim despreza-se a contribuição da rigidez por flexão.

A rigidez axial de uma barra é dependente da área de sua seção transversal ( $A$ ), seu módulo de elasticidade ( $E$ ) e seu comprimento ( $L$ ), de modo que tal valor pode ser deduzido através da energia de deformação do elemento e o trabalho realizado por uma força aplicada ao elemento. Desta forma a rigidez axial para um elemento é dada por  $\frac{E \cdot A}{L}$ , para um sistema com dois graus de liberdade por nó a rigidez do elemento é dada por uma matriz e é necessário a realização de uma rotação da contribuição de rigidez, uma vez que é necessário que a matriz de rigidez se encontre no sistema global de referência. Sendo assim, a matriz de rigidez de um elemento treliçado é dada por

$$K = \frac{E \cdot A}{L} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\theta) \cdot \cos(\theta) & \cos(\theta) \cdot \sin(\theta) & -\cos(\theta) \cdot \cos(\theta) & -\cos(\theta) \cdot \sin(\theta) \\ \cos(\theta) \cdot \sin(\theta) & \sin(\theta) \cdot \sin(\theta) & -\cos(\theta) \cdot \sin(\theta) & -\sin(\theta) \cdot \sin(\theta) \\ -\cos(\theta) \cdot \cos(\theta) & -\cos(\theta) \cdot \sin(\theta) & \cos(\theta) \cdot \cos(\theta) & \cos(\theta) \cdot \sin(\theta) \\ -\cos(\theta) \cdot \sin(\theta) & -\sin(\theta) \cdot \sin(\theta) & \cos(\theta) \cdot \sin(\theta) & \sin(\theta) \cdot \sin(\theta) \end{bmatrix}$$

## 2.2 Matriz de Massa

A matriz de massa permite representar os coeficientes de força de inércia que surgem durante o processo de análise dinâmica e pode ser expressa de duas maneiras, que são a matriz de massa consistente e a matriz de massa concentrada. Estas por sua vez dependem da densidade da barra ( $\rho$ ), da área de sua seção transversal ( $A$ ) e de seu comprimento ( $L$ ). De modo a matriz de massa consistente é calculada por

$$M = \frac{\rho \cdot A \cdot L}{6} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Já a matriz de massa concentrada pode ser calculada por

$$M = \frac{\rho \cdot A \cdot L}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tais matrizes consideram elementos de barra com 2 graus de liberdade por nó.

### 3. Exemplo de referência

Gao (2006) em seu artigo obtém as frequências naturais e os respectivos modos de vibração para a estrutura presente na **Figura 2**.

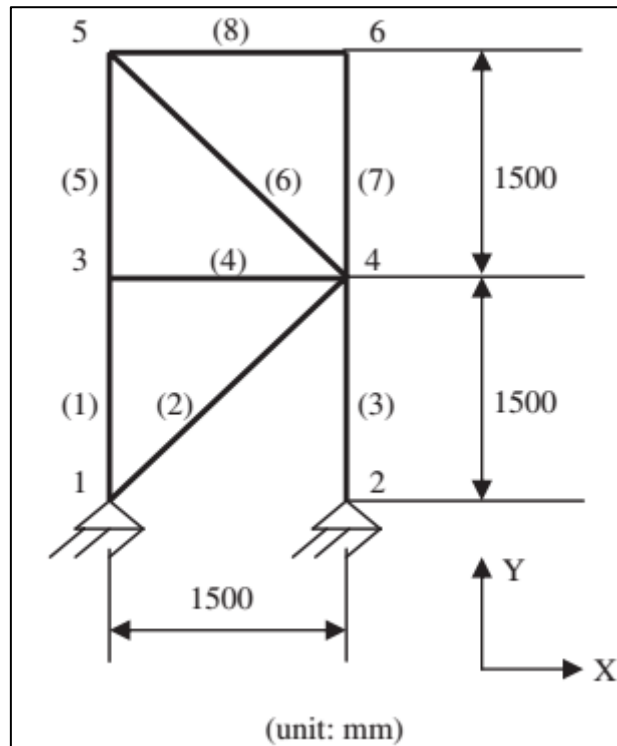


Figura 2 - Treliça de referência

O qual possui para todas as barras módulo de elasticidade de  $6,894 \cdot 10^4$  Mpa, densidade de  $2,714 \cdot 10^3$  kg/m<sup>3</sup>, área da seção transversal de  $4 \cdot 10^{-4}$  m<sup>2</sup>.

Para tal estrutura, calcula-se todas as frequências naturais e seus respectivos modos de vibração ao resolver o problema de valor principal generalizado envolvendo a matriz de rigidez e a matriz de massa, sendo esta considerada como consistente e concentrada, por fim compara-se tais resultados a fim de se entender a influência que a consideração do tipo matriz de massa acarreta na resposta. As informações de entrada de tal exemplo constam no arquivo “*fmnv\_ex1.m*”, e utiliza-se a rotina presente no arquivo “*fmnv.m*” para o cálculo das frequências e modos naturais de vibração, para

plotagem da resposta utiliza-se a rotina presente no arquivo “*fmnv\_plot.m*”. A resposta obtida é apresenta nas

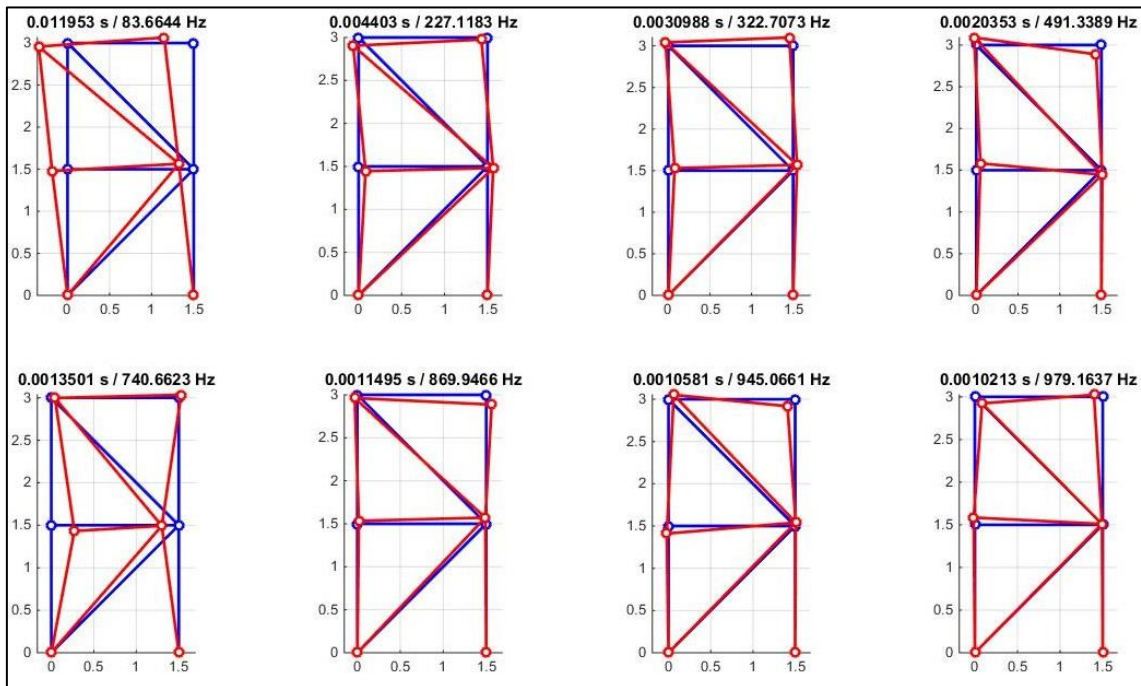


Figura 3 - Resposta obtida para a matriz de massa consistente

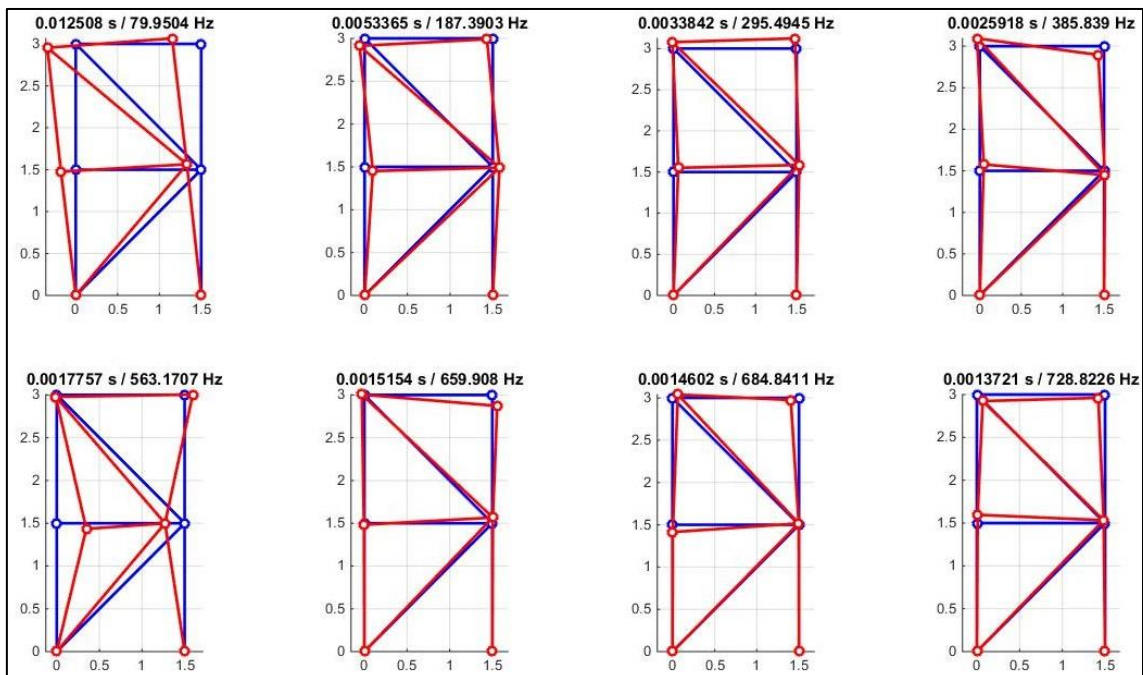


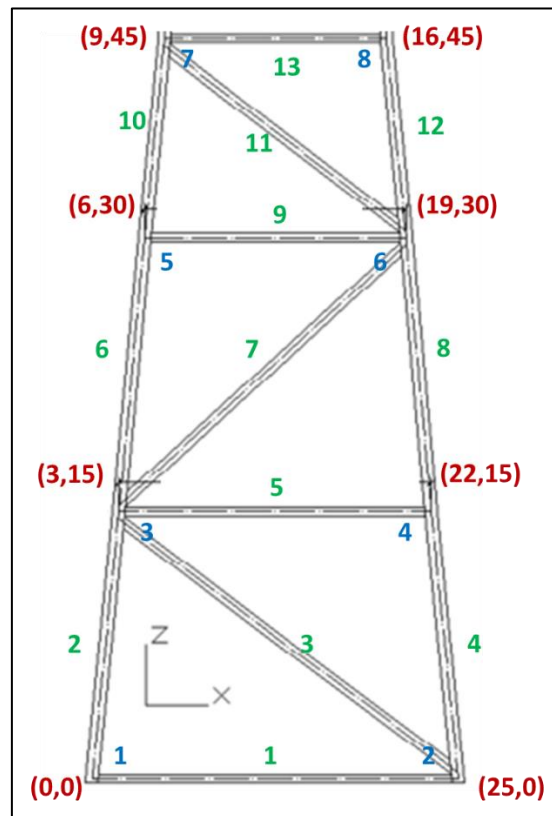
Figura 4 - Resposta obtida para a matriz de massa concentrada

Observa-se que no geral as frequências naturais obtidas com matriz de massa concentrada foram menores que as obtidas com matriz de massa consistente. Tal simulação foi realizada para validação da implementação realizada, de modo que ao compara com a resposta fornecida por Gao (2006) obtêm-se congruência na resposta.



#### 4. Exemplo proposto

Para avaliar a influência do uso da matriz de massa consistente e concentrada nas frequências e nos modos naturais de vibração inspirou-se na estrutura proposta por ORSINI (2013), de modo que se simulou a estrutura com a geometria definida pela **Figura 5**.



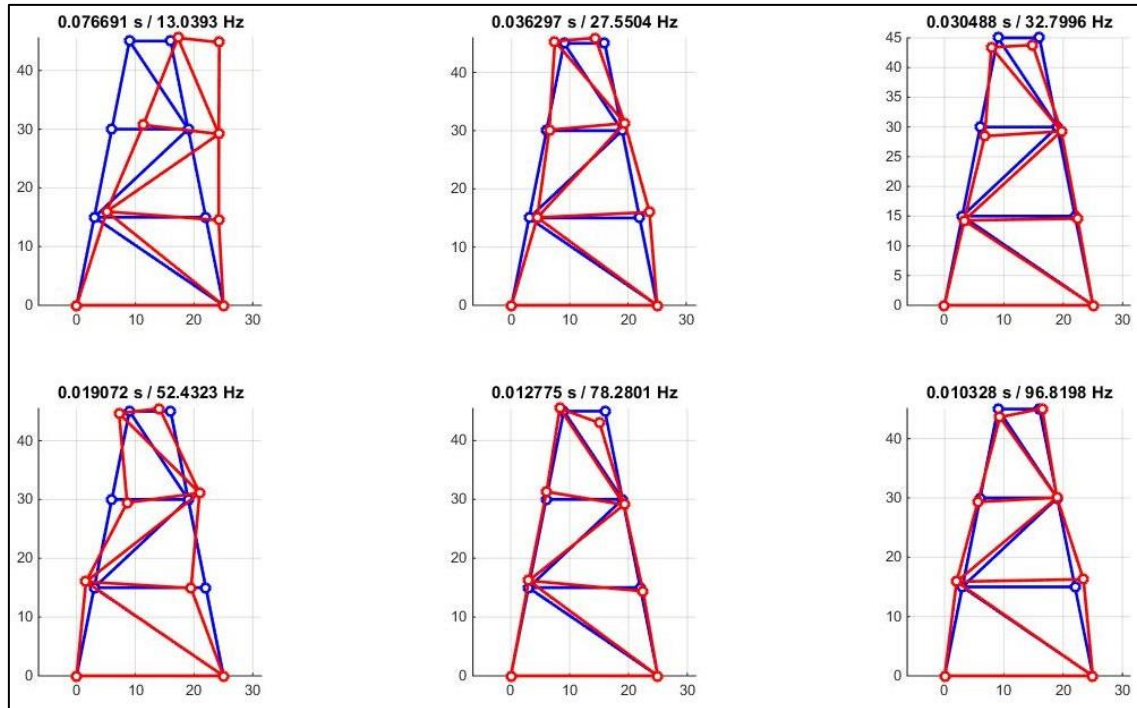
*Figura 5 - Jaqueta proposta*

Na **Figura 5** destaca-se em vermelho as coordenadas dos nós, em azul os identificadores dos nós e em verde os identificadores dos elementos. Tal estrutura possui as demais informações necessárias para o cálculo apresentadas na **Tabela 1**. Na estrutura apresentada os nós 1 e 2 estão fixos em x e em y restringindo o deslocamento para tais direções, os demais nós estão livres, tal fato leva à conclusão que tal estrutura possui 12 graus de liberdade, sendo assim possui 12 frequências naturais e 12 modos de vibração. As informações de entrada de tal exemplo encontram-se no arquivo “*fmnv\_ex2.m*”,

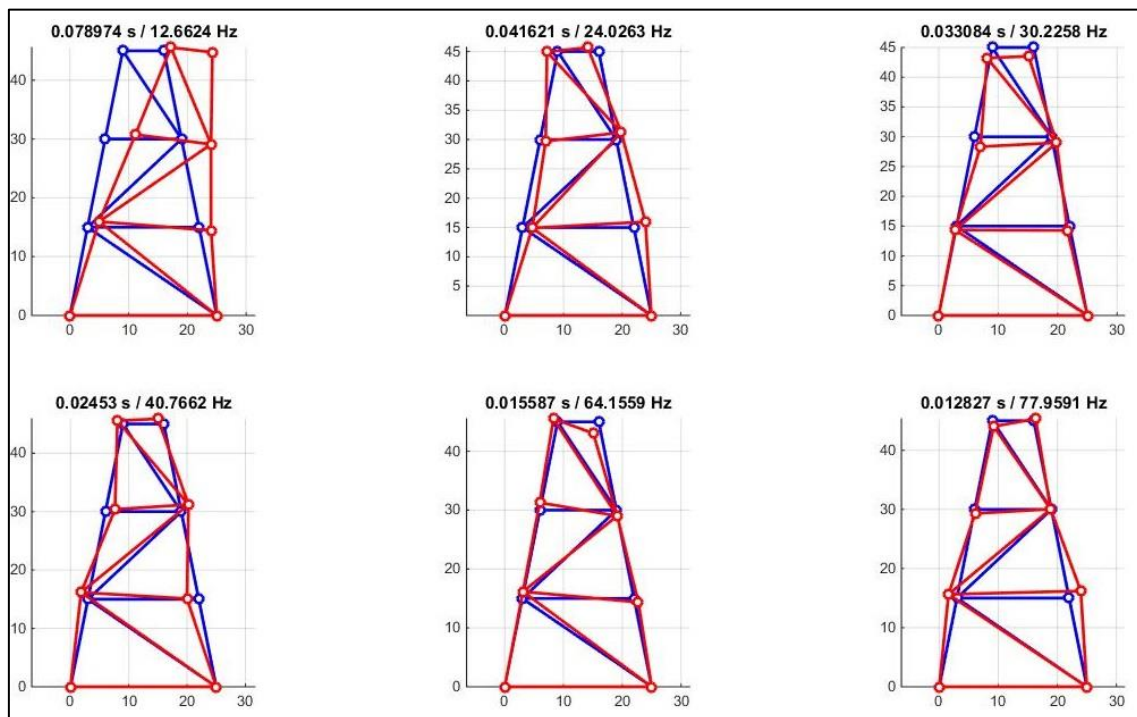
*Tabela 1 - Dados do exemplo proposto*

Parâmetros	Valor	Unidade
Módulo de Elasticidade	200000	Mpa
Densidade	$2,714 \cdot 10^3$	kg/m <sup>3</sup>
Área da seção transversal	$3,74 \cdot 10^{-2}$	m <sup>2</sup>

Decidiu-se por apresentar de forma gráfica as 6 primeiras frequências naturais e seus respectivos modos de vibração para as duas considerações da matriz de massa, através da **Figura 6** e da **Figura 7**. Já todas as frequências naturais do sistema estão presentes na **Tabela 2**.



*Figura 6 - Resposta obtida para a matriz de massa consistente*



*Figura 7 - Resposta obtida para a matriz de massa concentrada*

*Tabela 2 - Resultados encontrados para o exemplo proposto*

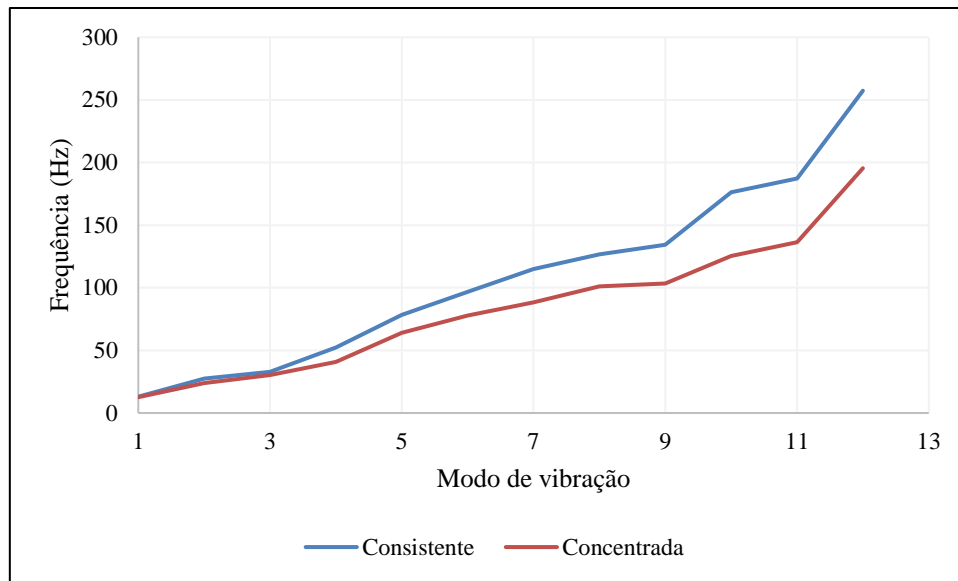
<b>Frequência Natural (Hz)</b>	
<b>Matriz de Massa Consistente</b>	<b>Matriz de Massa Concentrada</b>
13,0393	12,6624
27,5504	24,0263
32,7996	30,2258
52,4323	40,7662
78,2801	64,1559
96,8198	77,9591
115,031	88,3676
126,6236	101,1861
134,3767	103,4214
176,3542	125,4314
187,2625	136,3939
257,3626	195,4775

Tendo em vista que propõem-se avaliar a influência do uso da matriz de massa consistente e concentrada nas frequências naturais e nos seus respectivos modos de vibração, calcula-se o erro relativo médio percentual entre as respostas obtidas assumindo a resposta para a matriz de massa consistente como certa avalia-se o erro que se impõe a estrutura após o uso da matriz de massa concentrada. Tal erro encontra-se apresentado na **Tabela 3**.

*Tabela 3 - Erro relativo médio entre as duas respostas obtidas*

<b>Erro (%)</b>
2,890493
12,79147
7,847047
22,24983
18,04316
19,48021
23,17932
20,08907
23,03621
28,8753
27,16433
24,04588

É comum apresentar as frequências naturais para cada modo de vibração em forma de gráfico, sendo assim é possível visualizar as frequências naturais para os 12 modos de vibração da estrutura através da **Figura 8**.



*Figura 8 - Frequências naturais do sistema proposto*

## 5. Conclusões

Com os casos simulados observa-se que para a primeira frequência natural a escolha da matriz de massa fornece um erro relativo pequeno quando comparado com as demais frequências naturais do sistema, que por sua vez apresentarem um erro relativo médio similar. Observa-se também que todos os valores de frequências natural considerando a matriz de massa concentrada resultaram em valores menores que o valor para matriz de massa consistente, isto leva ao raciocínio de que a consideração da matriz de massa como concentrada provoca um superdimensionamento da estrutura. Pois com a diminuição da frequência o período aumenta, sendo mais fácil existir uma ação com carregamento dinâmico com período próximo a este.

## REFERÊNCIAS

Gao, W. **Interval natural frequency and mode shape analysis for truss structures with interval parameters**. Finite Elements in Analysis and Design, ELSEVIER, 2006.

ORSINI, F. **Análise Não Linear de Plataformas Fixas Offshore do Tipo Jaqueta de Aço: Estudo e Aplicação do Método Quasi-Estático Pushover**. Rio Janeiro: Dissertação de Mestrado, COPPE, UFRJ, 2013.