

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
ЛЬВІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ІВАНА ФРАНКА  
Факультет прикладної математики та інформатики  
Кафедра програмування



**ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 11-12**

Виконала:  
студентка групи ПМОм-11  
Кравець Ольга

Львів 2025

## Алгоритми і скінченні автомати

### Завдання 1

Побудувати автомат Мура для такої задачі. Задані три цілі числа  $p, q, r$ . Переставити їх місцями так, щоб виконувалась умова:  $p \leq q \leq r$ .

*Алгоритм задачі:*

1. Прочитати три числа:  $p, q, r$ .
2. Визначити перестановку чисел, яка відповідає умові  $p \leq q \leq r$ .
3. Перейти у стан, що відповідає цій перестановці.
4. У відповідному стані видати відсортовану трійку.

*Операції:*

- Порівняння чисел:  $p \leq q, q \leq r, p \leq r, r \leq q$  тощо.
- Виведення впорядкованої трійки у відповідному стані.

*Перелік станів автомата:*

Є 6 можливих перестановок трьох чисел, але враховуючи, що ми переставляємо їх для виконання умови  $p \leq q \leq r$ , результат завжди буде один — відсортована трійка.

$Q = \{S, A1, A2, A3, A4, A5, A6\}$

$S$  – початковий стан (читання  $p, q, r$ )

$A1: p \leq q \leq r \rightarrow$  виводимо  $p, q, r$

$A2: p \leq r \leq q \rightarrow$  виводимо  $p, r, q$

$A3: q \leq p \leq r \rightarrow$  виводимо  $q, p, r$

$A4: q \leq r \leq p \rightarrow$  виводимо  $q, r, p$

$A5: r \leq p \leq q \rightarrow$  виводимо  $r, p, q$

$A6: r \leq q \leq p \rightarrow$  виводимо  $r, q, p$

*Умови переходів:*

У стані  $S$  читаємо  $p, q, r$  (з  $S$  в один із  $A1$ - $A6$ ). Далі — серія перевірок:

- якщо  $p \leq q$  і  $q \leq r \rightarrow A1$

- якщо  $p \leq r \wedge r \leq q \rightarrow A2$
- якщо  $q \leq p \wedge p \leq r \rightarrow A3$
- якщо  $q \leq r \wedge r \leq p \rightarrow A4$
- якщо  $r \leq p \wedge p \leq q \rightarrow A5$
- якщо  $r \leq q \wedge q \leq p \rightarrow A6$

*Граматика визначень:*

Вхід: трійка цілих чисел  $\langle \text{input} \rangle ::= p, q, r \in \mathbb{Z}$

Вихід: перестановка  $\{p, q, r\}$ , що задовольняє  $p \leq q \leq r$

*Функція переходу ( $\delta$ ):*

$\delta: Q \times \{\text{порівняльні умови}\} \rightarrow Q$

*Вихідна функція автомата ( $\lambda$ ):*

$\lambda(q) = \text{результат у стані } q$

*Таблиця переходів:*

Поточний стан	Умова переходу	Наступний стан	Вихід (у стані)
S	$p \leq q \wedge q \leq r$	A1	p, q, r
S	$p \leq r \wedge r \leq q$	A2	p, r, q
S	$q \leq p \wedge p \leq r$	A3	q, p, r
S	$q \leq r \wedge r \leq p$	A4	q, r, p
S	$r \leq p \wedge p \leq q$	A5	r, p, q
S	$r \leq q \wedge q \leq p$	A6	r, q, p

*Приклад обробки:*

Вхід:  $p = 3, q = 1, r = 2$

Кроки:

1. Перехід зі стану S на основі умови:

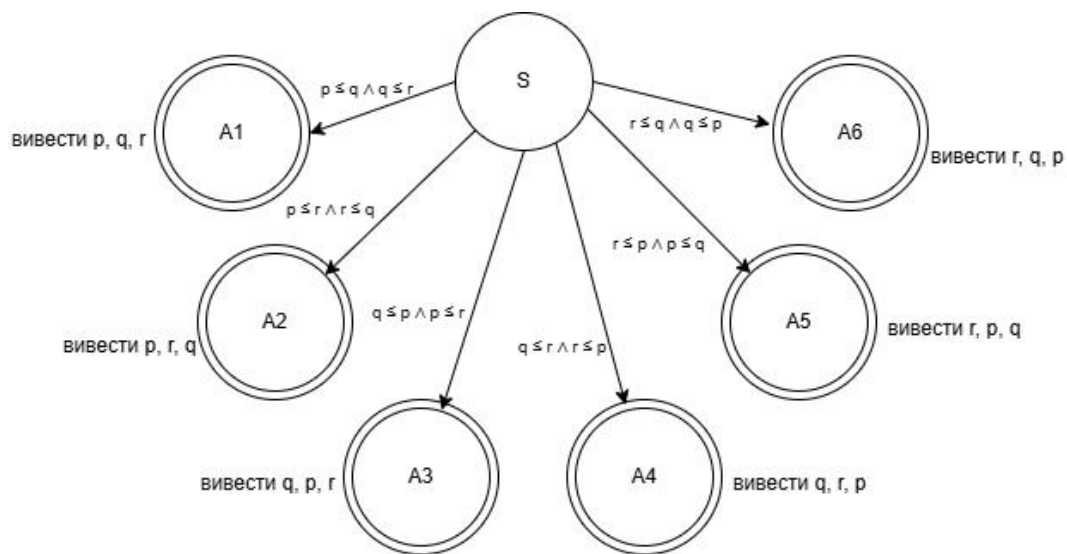
а) Перевірка:  $q \leq p \leq r \rightarrow \text{істина}$

б) Отже, обирається стан A3

2. У стані A3 результат:

$\lambda(A3) = q, p, r$   
 $= 1, 3, 2$

Вихід: 1, 3, 2



## Завдання 2

**Задача на будову та сама, що й для завдання 1, але реалізувати автоматом Мілі.**

*Алгоритм задачі:*

1. Зчитати числа  $p, q, r$ .
2. На основі порівнянь  $p, q, r$  зробити один перехід.
3. У переході до нового стану вивести впорядковану трійку.
4. Автомат завершує роботу.

*Операції:*

- Вхід: три цілі числа  $p, q, r$
- На основі порівнянь виконується одна з 6 перестановок
- Виведення впорядкованої трійки (на переході автомата)

*Перелік станів автомата:*

Оскільки в Мілі дія відбувається на ребрі, а не в стані, станів треба менше. Використаємо:

$S$  — початковий стан

End — завершальний стан (єдиний)

*Умови переходів:*

(Усі з початкового стану  $S$  до завершального End):

Умова	Вихід
$p \leq q \wedge q \leq r$	p, q, r
$p \leq r \wedge r \leq q$	p, r, q
$q \leq p \wedge p \leq r$	q, p, r
$q \leq r \wedge r \leq p$	q, r, p
$r \leq p \wedge p \leq q$	r, p, q
$r \leq q \wedge q \leq p$	r, q, p

Граматика визначень:

$\langle \text{вхід} \rangle ::= p, q, r \in \mathbb{Z}$

$\langle \text{вихід} \rangle ::=$  впорядкована трійка  $(p, q, r)$  така, що  $p \leq q \leq r$

Функція переходу ( $\delta$ ):

$\delta: Q \times \Sigma \rightarrow Q$

➤  $Q = \{S, \text{End}\}$

➤  $\Sigma$  — множина можливих порівнянь p, q, r

Вихідна функція автомата ( $\lambda$ ):

$\lambda: (Q \times \Sigma) \rightarrow \text{Output}$

Вихід залежить від умови переходу:

➤  $\lambda(S, p \leq q \wedge q \leq r) = \text{“вивести } p, q, r\text{”}$

➤  $\lambda(S, r \leq q \wedge q \leq p) = \text{“вивести } r, q, p\text{”}$

Таблиця переходів:

Звідки	Куди	Умова переходу	Вихід під час переходу
S	End	$p \leq q \wedge q \leq r$	вивести p, q, r
S	End	$p \leq r \wedge r \leq q$	вивести p, r, q
S	End	$q \leq p \wedge p \leq r$	вивести q, p, r
S	End	$q \leq r \wedge r \leq p$	вивести q, r, p
S	End	$r \leq p \wedge p \leq q$	вивести r, p, q
S	End	$r \leq q \wedge q \leq p$	вивести r, q, p

Приклад обробки:

Вхід: p = 2, q = 5, r = 3

Кроки:

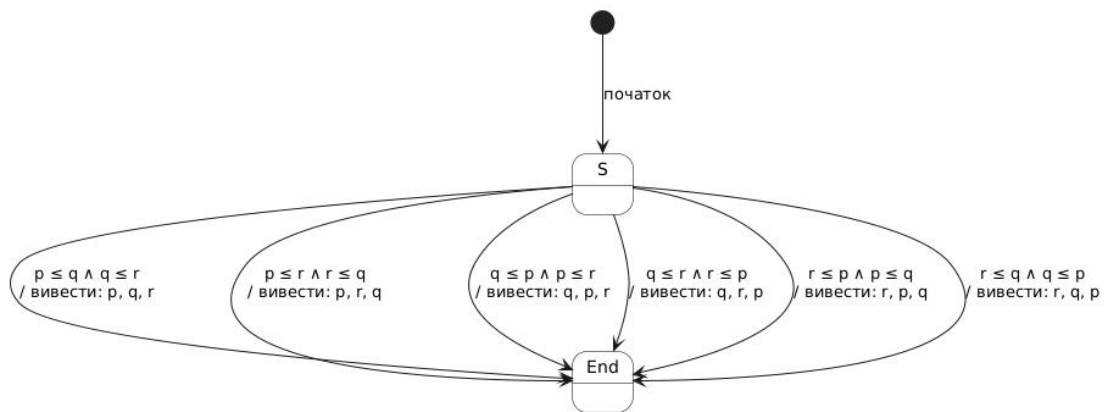
1. У стані S перевіряємо умови:  $p \leq r \leq q \rightarrow$  істина

2. Відбувається перехід:

$$\delta(S, p \leq r \leq q) = \text{End}$$

$$\lambda(S, p \leq r \leq q) = p, r, q = 2, 3, 5$$

Вихід: 2, 3, 5



### Завдання 3

**Запис арифметичного виразу складається з послідовності цілих чисел і знаків арифметичних операцій + чи −, записаних між кожною парою чисел. Послідовність закінчується крапкою. Скласти суміщений автомат Мура і Мілі для обчислення такого виразу.**

*Алгоритм задачі:*

1. Зчитати перше число — записати його у result.
2. Повторювати:
  - Зчитати + або − — запам'ятати як op.
  - Зчитати наступне число x.
  - Обчислити  $\text{result} = \text{result op } x$ .
3. Якщо зчитано крапку (.) — завершити, вивести result.

*Операції:*

- Зчитування числа → збереження його в результат
- При зчитуванні + або − → зберегти поточну операцію
- Зчитати наступне число → додати/відняти до/від результату

- Крапка (.) → завершити обчислення

*Перелік станів автомата:*

$Q = \{ S, \text{ReadNum}, \text{ReadOp}, \text{Calc}, \text{End} \}$

- S — старт (очікуємо перше число)
- ReadNum — читаємо число
- ReadOp — чекаємо + або –
- Calc — обчислюємо дію
- End — кінець (крапка)

*Умови переходів:*

Стан	Символ на вході	Наступний стан	Дія (операція або збереження)
S	цифра	ReadNum	result := x
ReadNum	“+”	ReadOp	op := “+”
ReadNum	“–”	ReadOp	op := “–”
ReadNum	“.”	End	вивести result
ReadOp	цифра	Calc	x := нове число
Calc	(безумовно)	ReadNum	result := result op x

*Граматика визначень:*

<вираз> ::= <ціле> { (+|-) <ціле> } .

<ціле> ::= послідовність цифр

*Функція переходу ( $\delta$ ):*

Поточний стан	Умова	Наступний стан	Дія (Мілі / Мура)
S	цифра	ReadNum	результат = число (Мура)
ReadNum	“+”	ReadOp	op = “+” (Мілі)
ReadNum	“–”	ReadOp	op = “–” (Мілі)
ReadOp	цифра	Calc	зберегти число (Мілі)
Calc	–	ReadNum	результат += або – число (Мура)
ReadNum	“.”	End	Вивести результат (Мура)

*Вихідна функція автомата ( $\lambda$ ):*

- У стані S / ReadNum: ініціалізація результату
- У стані Calc: застосування операції до результату

➤ У стані End: вивід результату

*Таблиця переходів:*

Поточний стан	Вхідний символ	Наступний стан	Дія	Тип (Мура/Мілі)
S	цифра	ReadNum	result := x	Мура
ReadNum	+	ReadOp	op := “+”	Мілі
ReadNum	–	ReadOp	op := “–”	Мілі
ReadNum	.	End	вивести result	Мура
ReadOp	цифра	Calc	x := число	Мілі
Calc	Λ	ReadNum	result := result op x	Мура

Λ - перехід без зовнішнього входу (автоматично після обчислення).

*Приклад обробки:*

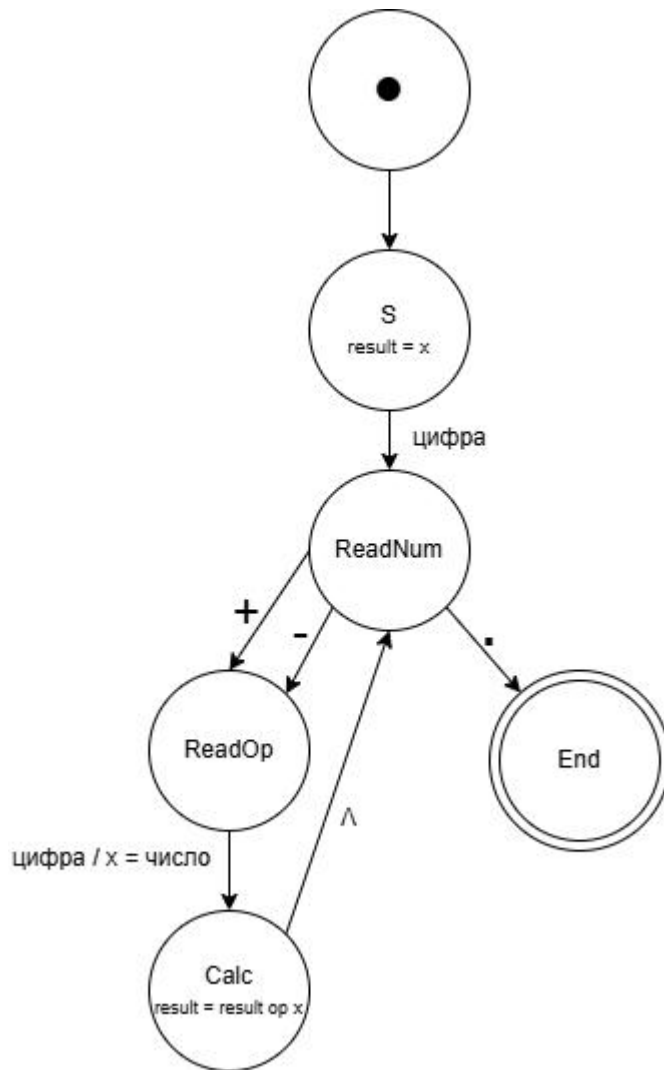
Вхід: 10 + 5 - 3.

Кроки:

Стан	Вхід	Операція	Результат
S	10	result := 10	10
ReadNum	“+”	op := “+”	
ReadOp	5	result += 5	15
ReadNum	“–”	op := “–”	
ReadOp	3	result -= 3	12
ReadNum	“.”	print(result)	<b>12</b>

Вихід: 12





#### Завдання 4

**Побудувати автомат М типу розпізнавача, який приймає цілі числа без знака, в записі яких є хоча б одна цифра 4, але не на першому місці.**

*Алгоритм задачі:*

1. Прочитати перший символ:
  - а) Якщо це 4 → відхиляємо (неприйнятне).
  - б) Інакше → переходимо до перевірки наступних цифр.
2. Для кожної наступної цифри:
  - а) Якщо це 4 → приймаємо (умова виконана).
  - б) Інакше → продовжити перевірку.

3. Якщо рядок завершено і цифра 4 не з'явилась після першої позиції → відхиляємо.

*Операції:*

- Зчитування символу
- Переходи між станами
- Перевірка умови (чи це 4?, чи перша позиція?)

*Перелік станів автомата:*

- $q_0$  — початковий стан (ще не прочитано жодної цифри)
- $q_1$  — прочитано першу цифру (вона не 4)
- $q_2$  — знайдено цифру 4 не на першій позиції → кінцевий (приймаючий) стан
- $q_E$  — відкидання, якщо перша цифра була 4

*Умови переходів:*

Поточний стан	Вхідний символ	Наступний стан	Умова переходу
$q_0$	4	$q_E$	перший символ = 4
$q_0$	$\neq 4$	$q_1$	перший символ $\neq 4$
$q_1$	4	$q_2$	знайдено 4 після першої позиції
$q_1$	$\neq 4$	$q_1$	повторюємо пошук
$q_2$	будь-яка	$q_2$	залишаємося у прийнятному стані
$q_E$	будь-яка	$q_E$	залишаємося у відхиленому стані

*Граматика визначень:*

- Алфавіт:  $\Sigma = \{0, 1, \dots, 9\}$
- Становий простір:  $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_E\}$
- Початковий стан:  $q_0$
- Приймаючий стан:  $q_2$
- Функція переходу:  $\delta$  (описано нижче)

*Функція переходу ( $\delta$ ):*

- $\delta(q_0, d) =$

- $q_E$ , якщо  $d = 4$
- $q_1$ , якщо  $d \neq 4$
- $\delta(q_1, d) =$ 
  - $q_2$ , якщо  $d = 4$
  - $q_1$ , якщо  $d \neq 4$
- $\delta(q_2, d) = q_2$  (цифра 4 вже знайдена не на першому місці — залишаємося у приймаючому стані)
- $\delta(q_E, d) = q_E$  (залишаємося у відкидаючому стані)

*Фінальний стан:*

$$F = \{q_2\}$$

*Вихідна функція автомата ( $\lambda$ ):*

- $\lambda(q_2) = \text{“так”}$  — прийнято
- $\lambda(q_0, q_1, q_E) = \text{“ні”}$  — відхилено

*Таблиця переходів:*

Поточний стан	Вхідний символ	Наступний стан
$q_0$	4	$q_E$
$q_0$	$\neq 4$	$q_1$
$q_1$	4	$q_2$
$q_1$	$\neq 4$	$q_1$
$q_2$	будь-яка	$q_2$
$q_E$	будь-яка	$q_E$

*Приклад обробки:*

1. Вхід: 432

Кроки:

1.  $q_0$  — перша цифра “4” → перехід у  $q_E$
2.  $q_E$  — це стан відхилення

Вихід: відхилено.

2. Вхід: 1345

Кроки:

1.  $q_0 \rightarrow$  перша цифра “1” → перехід у  $q_1$

2.  $q_1 \rightarrow "3" \rightarrow$  залишаємося в  $q_1$

3.  $q_1 \rightarrow "4" \rightarrow$  перехід у  $q_2$

4.  $q_2$  — це приймаючий стан

Вихід: прийнято.

3. Вхід: 1789

Кроки:

1.  $q_0 \rightarrow "1" \rightarrow q_1$

2.  $q_1 \rightarrow "7", "8", "9" \rightarrow$  немає  $"4" \rightarrow$  не було переходу в  $q_2$

Вихід: відхилено.

### Завдання 5

**Задано ціле число без знака. Побудувати автомат М типу перетворювача для такої задачі. Замінити в записі цілого числа цифри "2" на цифри "6", а в кінець числа дописати цифру "0"**

*Алгоритм задачі:*

1. У стані  $q_0$  ініціалізуємо вихідну змінну R
2. У стані  $q_1$  по кожному символу:
  - а) якщо це  $"2" \rightarrow$  додаємо  $"6"$
  - б) інакше  $\rightarrow$  додаємо символ як є
3. Після завершення (кінець вводу)  $\rightarrow$  дописуємо  $"0"$  і виводимо результат

*Операції:*

- $R := ""$  — ініціалізація вихідного рядка
- Якщо символ  $== "2" \rightarrow R += "6"$
- Інакше  $\rightarrow R +=$  символ
- Після завершення обробки  $\rightarrow R += "0"$
- $\text{print}(R)$  — виведення результату

*Перелік станів автомата:*

- $q_0$  — початковий стан: ініціалізація змінної  $R := ""$
- $q_1$  — основний стан обробки цифр
- $q_F$  — фінальний стан: дописування "0" і вивід результату

Умови переходів:

Поточний стан	Вхідний символ	Наступний стан	Умова переходу
$q_0$	будь-яка цифра	$q_1$	початок обробки
$q_1$	2	$q_1$	символ == "2"
$q_1$	$\neq 2$	$q_1$	символ $\neq$ "2"
$q_1$	кінець	$q_F$	завершення вводу

Граматика визначень:

- Алфавіт:  $\Sigma = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
- Множина станів:  $Q = \{q_0, q_1, q_F\}$
- Початковий стан:  $q_0$
- Кінцевий стан:  $q_F$

Функція переходу ( $\delta$ ):

- $\delta(q_0, d) = q_1$  — при будь-якому  $d$  (перший символ)
- $\delta(q_1, "2") = q_1$
- $\delta(q_1, \neq "2") = q_1$
- $\delta(q_1, \text{EOS}) = q_F$  — EOS = кінець рядка

Фінальний стан:

$q_F$  — тут формується фінальний результат:  $R += "0"$  та  $\text{print}(R)$

Вихідна функція автомата ( $\lambda$ ):

Перехід	$\lambda$ (вихідна операція)
$q_0 \rightarrow q_1$	$R := ""$
$q_1 \rightarrow q_1, \text{символ} = 2$	$R += "6"$
$q_1 \rightarrow q_1, \text{символ} \neq 2$	$R += \text{символ}$
$q_1 \rightarrow q_F$	$R += "0"; \text{print}(R)$

Таблиця переходів:

Стан	Символ = "2"	Символ $\neq$ "2"	Кінець (EOS)
$q_0$	$q_1 / R := ""$	$q_1 / R := ""$	—

q1	q1 / R += "6"	q1 / R += СИМВОЛ	qF / R += "0"; print(R)
qF	—	—	—

*Приклад обробки:*

Вхід: 13220

Обробка:

1 → 1

3 → 3

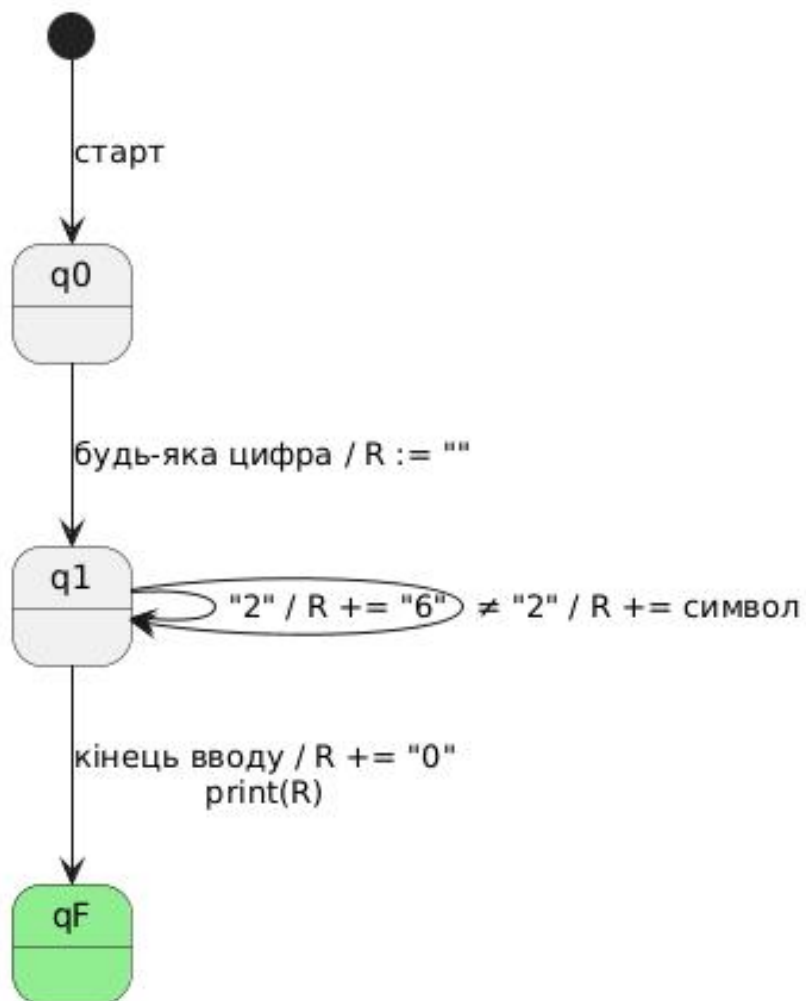
2 → 6

2 → 6

0 → 0

→ R = 13660

→ R += "0" → 136600



## Завдання 6

Скласти суміщений автомат Мура і Мілі для такої задачі.  
Заданий масив цілих чисел  $C$ . Переставити числа в оберненому порядку, після цього поміняти знаки чисел на протилежні.

Алгоритм задачі:

1. Прочитати масив чисел  $C$
2. Зберегти обернену копію  $R = \text{reverse}(C)$
3. Для кожного елемента  $r$  у  $R$ :  $r := -r$
4. Вивести результат

Операції:

- $\text{read}(C)$  — зчитування вхідного масиву
- $R := \text{reverse}(C)$  — переставити числа
- $\text{for } i \text{ in } R: R[i] := -R[i]$  — змінити знаки
- $\text{print}(R)$  — вивести результат

Перелік станів автомата:

Стан	Позначення	Опис
$q_0$	Початковий	Запуск автомата, зчитування вхідного масиву $C$
$q_1$	Проміжний	Формування оберненого масиву $R = \text{reverse}(C)$
$q_2$	Обробка	Прохід по $R$ , зміна знаку кожного числа
$q_F$	Кінцевий	Завершення: вивід масиву $R$

Умови переходів:

Поточний стан	Умова	Наступний стан	Дія
$q_0$	старт	$q_1$	зчитати масив $C$
$q_1$	$C$ зчитано	$q_2$	$R := \text{reverse}(C)$
$q_2$	$i < \text{len}(R)$	$q_2$	$R[i] := -R[i]; i++$
$q_2$	$i == \text{len}(R)$	$q_F$	$\text{print}(R)$

Граматика визначень:

- Алфавіт: множина цілих чисел
- Множина станів:  $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_F\}$

- Початковий стан:  $q_0$
- Кінцевий стан:  $q_F$

Функція переходу ( $\delta$ ):

$\delta(\text{стан}, \text{умова})$	$\rightarrow \text{стан}$
$\delta(q_0, \text{старт})$	$q_1$
$\delta(q_1, \text{C зчитано})$	$q_2$
$\delta(q_2, i < \text{len}(R))$	$q_2$
$\delta(q_2, i == \text{len}(R))$	$q_F$

Фінальний стан:

$q_F$  — після завершення циклу зміни знаків. У цьому стані виконується дія:  $\text{print}(R)$

Вихідна функція автомата ( $\lambda$ ):

- дії на ребрах (Мілі)
- дії в вершинах (Мура)

Стан	Операція
$q_0$	—
$q_1$	$R := \text{reverse}(C)$
$q_2$	$R[i] := -R[i]$
$q_F$	$\text{print}(R)$

Таблиця переходів:

Стан	Умова	Наступний стан	Операція
$q_0$	старт	$q_1$	$\text{read}(C)$
$q_1$	зчитано	$q_2$	$R := \text{reverse}(C)$
$q_2$	$i < \text{len}(R)$	$q_2$	$R[i] := -R[i]; i++$
$q_2$	$i == \text{len}(R)$	$q_F$	$\text{print}(R)$

Приклад обробки:

Вхід:  $C = [3, -1, 0, 5]$

Кроки:

1. Зчитування  $C \rightarrow q_0$
2. Обернений масив:  $R = [5, 0, -1, 3] \rightarrow q_1$
3. Зміна знаків  $\rightarrow [-5, 0, 1, -3] \rightarrow q_2$



4. Вивід результату  $\rightarrow \text{print}([-5, 0, 1, -3]) \rightarrow qF \rightarrow R += "0" \rightarrow 136600$

Вихід:  $[-5, 0, 1, -3]$

