3.2. Зображення графів у вигляді матриць

Одним з найчастіше використовуваних способів є зображення графів у вигляді різних **матриць.**

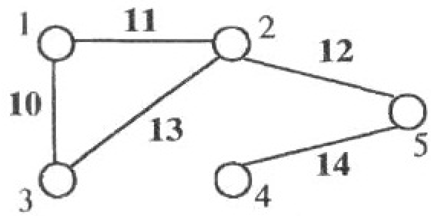

Рис. 9. Граф.

У теорії графів класичним способом зображення графів є **матриця інциденцій**. Це прямокутна матриця розміру n x m, де n - кількість вершин у графі, а m - кількість ребер, елементи якої для неорієнтованого графа визначають за таким правилом

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо вершина } v_i \text{ інцидентна ребру } e_j \\ 0 & \text{у протилежному випадку} \end{cases}$$

Вершина інцидентна ребру, якщо вона є його початком або кінцем.

Так, для графа з рис. 9 матриця інциденцій матиме вигляд:

	10	11	12	13	14
1	1	1	0	0	0
2	0	1	1	1	0
3	1	0	0	1	0
4	0	0	0	0	1
5	0	0	1	0	1

Для орієнтованого графа беруть до уваги факт, що деяка вершина є початком чи кінцем дуги. У цьому випадку елементи матриці інциденцій визначають так:

$$b_{ij} = \begin{cases} -1, & \text{якщо вершина } v_i \text{ починає дугу } e_j \\ 1, & \text{якщо вершина } v_i \text{ закінчує дугу } e_j \\ 0, & \text{якщо ребро не інцидентне вершині} \end{cases}$$

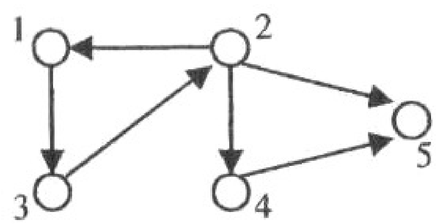

Рис. 10. Граф.

Для графа з рис. 10 матриця інциденцій матиме вигляд:

	(1,3)	(2,1)	(2,4)	(2,5)	(3,2)	(4,5)
1	-1	1	0	0	0	0
2	0	-1	-1	-1	1	0
3	1	0	0	0	-1	0
4	0	0	1	0	0	-1
5	0	0	0	1	0	1

З алгоритмічної точки зору, матриця інциденцій є, напевно, найгіршим способом зображення графів, оскільки вимагає n*m квантів пам'яті, причому більшість з них містять нульові значення. Незручним є і доступ до інформації, оскільки, наприклад, щоб з'ясувати, які вершини суміжні із заданою, треба перебрати всі стовпці у рядку, який відповідає заданій вершині, тобто у гіршому випадку виконати m кроків.

Кращим способом зображення є **матриця суміжності**.

Матрицею суміжності A(G) графа G з n вершинами називається квадратна матриця розміру n x n , елементи якої визначають так:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо} (v_i, v_j) \in E, \text{ тобто вершини суміжні} \\ 0, & \text{у протилежному випадку} \end{cases}$$

Очевидно, що така матриця може бути логічною, де істинне значення позначає наявність ребра, а хибне - його відсутність.

Якщо граф неорієнтований, то матриця суміжності – симетрична відносно головної діагоналі. Наприклад, для графа з рис. 8, матриця суміжності матиме вигляд:

	1	2	3	4	5
1	0	1	1	1	0
2	1	0	1	0	1
3	1	1	0	0	0
4	1	0	0	0	1
5	0	1	0	1	0

З матриці суміжності неорієнтованого графа можна отримати деякі цікаві властивості графа. Зокрема таку, що сума одиниць у кожному рядку або в кожному стовпці дорівнює степеневі відповідної вершини.

Якщо матрицю піднести до квадрата, то на головній діагоналі будуть степені відповідних вершин.

Має місце теорема про те, що елемент $a_{ij}(p)$ p-го степеня матриці суміжності **A**, дорівнює кількості маршрутів довжини p, що з'єднують вершини v_i, та v_j.

Цікавими є коди, отримані з матриці суміжності.

Оскільки матриця A симетрична, то можна розглядати лише її верхню трикутну частину **A'**. Змінюючи нумерацію вершин, для одного і того ж графа отримуємо різні числа. Найбільше з них визначається для графа однозначно і називається *кодом Харарі*. Код Харарі визначає граф однозначно, тому деякі задачі, наприклад, задачу визначення ізоморфізму двох графів, можна звести до порівняння відповідних кодів. Нумерація вершин (і матриця суміжності), яка відповідає коду Харарі, називається канонічною і використовується під час перелічення чи генерування графів із заданими властивостями.

Для орієнтованого графа – матриця суміжності не симетрична. Наприклад, для орієнтованого графа, зображеного на рис. 10 матриця матиме вигляд:

	1	2	3	4	5
1	0	0	1	0	0
2	1	0	0	1	1
3	0	1	0	0	0
4	0	0	0	0	1
5	0	0	0	0	0

Якщо ребра чи дуги графа мають певне навантаження, то для зображення графа з вагами можна використати модифіковану матрицю суміжності, елементи якої визначають за таким правилом:

$$a_{ij} = \begin{cases} w_{ij}, & \text{якщо } (v_i, v_j) \in E, \text{ а } w_{ij} \text{ - вага дуги } (v_i, v_j) \\ 0, & \text{у протилежному випадку} \end{cases}$$

Значення 0 — це значення, яке не позначає ваги, а вказує на відсутність дуги між вершинами.

На рис. 11 зображено навантажений орієнтований граф (навантаження виділено).

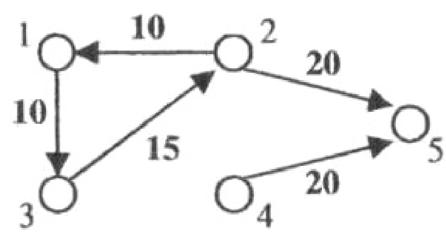

Рис. 11. Навантажений орієнтований граф.

Матриця суміжності у цьому випадку виглядатиме так:

	1	2	3	4	5
1	0	0	10	0	0
2	10	0	0	0	20
3	0	15	0	0	0
4	0	0	0	0	20
5	0	0	0	0	0

Основною перевагою матриці суміжності є те, що використовуючи прямий доступ до елементів матриці, за один крок (з константною оцінкою) можна дати відповідь на питання, чи є дві вершини суміжними (чи існує між ними ребро).

Недоліком є те, що незалежно від того чи матриця розріджена чи заповнена обсяг пам'яті для її збереження є n^2, якщо окремий елемент матриці зберігається в окремому кванті. Якщо взяти до уваги, що для збереження окремого елемента використовується один біт, то можна запакувати в один квант кілька елементів, але для опрацювання потрібно розпаковувати їх, що вимагає додаткових затрат. Тому використання матриці суміжності для зображення графа означає, що алгоритм опрацювання матиме оцінку у гіршому випадку $O(n^2)$.

Ще одним способом зображення графа у вигляді матриці є використання матриці досяжності. **Матрицею досяжності** R(G) графа G з *n* вершинами називають квадратну матрицю розміру *n x n*, елементи якої визначають так:

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо вершина } v_j \text{ може бути досягнута з вершини } v_i \\ 0, & \text{у протилежному випадку} \end{cases}$$

Для орієнтованого графа з рис. 10 матриця досяжності матиме вигляд:

	1	2	3	4	5
1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	1
3	1	1	1	1	1
4	0	0	0	0	1
5	0	0	0	0	0

Матриця досяжності має такі ж розміри, як суміжності, проте використовується значно рідше.