2. Основні поняття

Графом G = (V, E) називають сукупність двох множин: скінченої непорожньої множини V **вершин** (vertex) і скінченої множини E **ребер** (edge), які з'єднують пари вершин. Ребра зображаються невпорядкованими парами вершин (u,v). Граф зручно зображати діаграмами (кресленнями), причому один і той самий граф можна зобразити по-різному. На діаграмах вершини зображають точками, а ребра – відрізками прямих чи кривих.

Алгоритми побудови креслень, які дотримуються різних природних обмежень, інтенсивно досліджували, що привело до цікавих застосувань. Одним з найпростіших обмежень є вимога того, щоб ребра не перетинались. Планарний граф (planar graph) належить до тих, які можна побудувати без перетину ребер. Наприклад, нехай граф задано за допомогою двох множин: множини вершин $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ та множиною ребер $E = \{(v_1, v_2),(v_1, v_3),(v_2, v_3),(v_2, v_4),(v_3, v_4)\}$. Цей граф можна зобразити, наприклад, діаграмами на рис. 1 та рис. 2. Елементи множини вершин є мітками вершин.

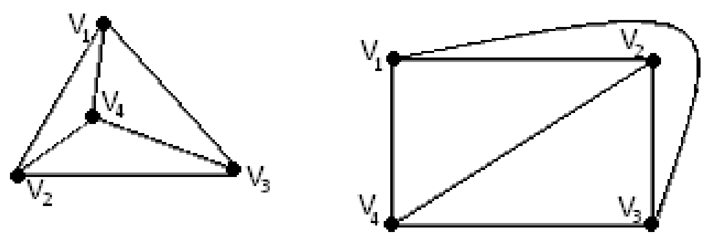

Рис. 1, 2. Зображення графа.

У графі можуть бути **петлі** (self-loop) — ребра, що починаються і закінчуються в одній вершині, а також повторювані ребра (кратні, або паралельні). Якщо в графі немає петель і кратних ребер, то такий граф називають **простим** (simple graph). Якщо граф містить кратні ребра, то граф називають **мультиграфом** (multi graph). Ребра вважаються **неорієнтованими** в тому сенсі, що пари (u, v) та (v,u) вважаються одним і тим самим ребром. **Підграфом** (subgraph) називають підмножину ребер деякого графа (і зв'язаних з ними вершин), які утворюють граф. Якщо виділити деяку підмножину вершин графа і всі ребра графа, які з'єднують пари вершин з цієї підмножини, то таку підмножину називають **індукованим підграфом**, асоційованим з цими вершинами.

В деяких застосуваннях треба враховувати додаткову інформацію про предметну область, і відстані між точками повинні бути витримані у певному масштабі. Такі графи називають **евклідовими графами**.

Якщо досліджувати лише властивості з'єднань у графі, то відмітки вершин розглядаються для зручності позначень, а два графи вважаються однаковими, якщо вони відрізняються лише мітками вершин. Два графи називають **ізоморфними** (isomorphic), якщо можна поміняти мітки вершин так, щоб набір ребер цього графа став ідентичним до набору вершин другого графа. Виявлення ізоморфізму двох графів є складною обчислювальною задачею. Складність задачі полягає в тому, що існує $V!$ способів позначення вершин. Приклад ізоморфних графів зображено на рис. 3.

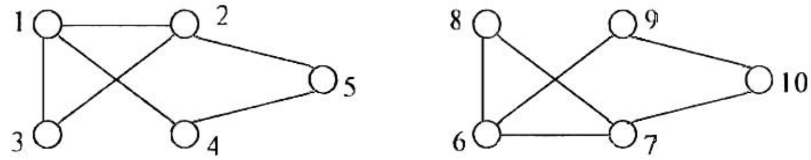

Рис. 3. Ізоморфні графи.

Іноді необхідно розглядати впорядковані пари в множині E. Наприклад, у графах, використовуваних у Web чи для складання розкладів. У цьому випадку ребра називають орієнтованими (directed graphs), а відповідні графи **орієнтованими**. Під час роботи з орієнтованими графами елементи множини V зазвичай називають **вузлами**, а елементи E – **дугами**. Нехай d – дуга орієнтованого графа d=(u,v); вузол u називається початком (source) дуги, а v – кінцем (destination) (кажуть також, що дуга виходить з u і входить у v). Дуги на діаграмах зображають відрізками зі стрілками. Наприклад, нехай орієнтований граф задано множинами $E=\{(v_1, v_1),(v_1, v_2),(v_2, v_1),(v_1, v_3),(v_4, v_3)\}$ та $V=\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ Його можна зобразити діаграмою так як на рис. 4.

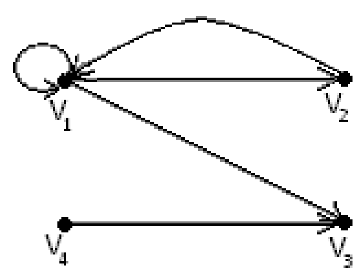

Рис. 4. Орієнтований граф.

Іноді доцільно розглядати неорієнтований граф, як орієнтований граф, у якого є два орієнтовані ребра (по одному в кожному напрямку).

Дуже часто в практичних застосуваннях ребрам або дугам надають певної ваги для того, щоб моделювати деякі величини, наприклад, час, відстань, вартість. **Граф з вагою** (зважений граф) – це такий граф, ребрам чи дугам якого поставлено у відповідність деякі значення (зокрема, числові).

Дві вершини u та v є **суміжними** (adjacent), якщо в G існує ребро (u,v). Про ребро говорять, що воно **інцидентне** (incident on) вершинам u та v. Вершина інцидентна дузі, якщо вона є її кінцем. Ребра e_i та e_j – суміжні, якщо в них існує спільна кінцева вершина. Кількість дуг, які входять у вершину x, називають **півстепенем входу вершини** x і позначають $deg^+(x)$. Кількість дуг, які виходять з вершини x, називають **півстепенем виходу вершини** x і позначають $deg^-(x)$. Загальна кількість дуг, інцидентних вершині x, називають **степенем вершини** і позначають deg (x).

$$\deg(x) = \deg^+(x) + \deg^-(x)$$

Якщо deg(x) = 1, то вершина x називається **кінцевою**(висячою). Якщо deg(x)=0, то вершина x – **ізольована**.

Має місце теорема про те, що сума степенів вершин дорівнює подвоєній кількості ребер (| E | – потужність множини ребер)

$$\sum_{i=1}^{n} \deg(v_i) = 2|E|$$

Маршрутом, або шляхом (path) в графі з вершини v_1 у вершину v_n називають скінчену послідовність вершин: $W = v_1, v_2, \dots, v_n$, таких, що кожна наступна вершина (після першої), є суміжною з попередньою, тобто $(v_i, v_{i+1}) \in E(G)$ для кожного i, $1 < i < n - 1$. Маршрут називають **замкнутим**, якщо $v_1 = v_n$; інакше маршрут відкритий. Маршрут називають **простим шляхом**, якщо жодна вершина (і, отже, жодне з ребер) не з'являється в ньому більше одного разу. **Циклом** (cycle) називають простий шлях, у якого перша та остання вершина одна і та ж.

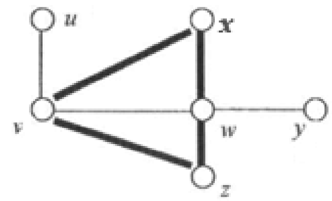

Рис. 5. Граф.

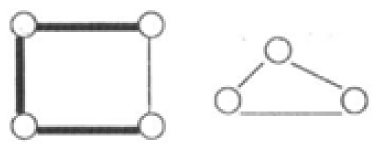

Рис. 6. Двокомпонентний граф.

Наприклад, для графа, зображеного на рис. 5, маємо:
маршрут u, v, x, w, y, w, z, v, w, v, u;
простий шлях u, v, x, w, z;
цикл (на малюнку виділено) v, x, w, z, v.

Іноді використовують термін циклічний шлях для позначення шляху, у якому перша і остання вершина одна і та ж. Для циклу, який містить всі вершини графа, використовують термін **контур** (tour).

Еквівалентне визначення розглядає маршрут як послідовність ребер, яка з'єднує сусідні вершини. Довжина маршруту, шляху чи циклу визначається кількістю ребер, які їх утворюють. Наприклад, довжина маршруту з попереднього прикладу дорівнює 10. Кожна окрема вершина є шлях довжини 0. У простому графі шлях повинен складатись принаймні з двох вершин, а цикл — з трьох. Два **шляхи не перетинаються**,якщо вони не містять спільних вершин.

Граф називається зв'язним (connected graph), якщо для довільних двох вершин існує шлях з однієї вершини в іншу. Інакше граф називають **незв'язним**. У незв'язному графі максимальні зв'язні підграфи називаються компонентами. Наприклад, на рис. 6 зображено двокомпонентний граф. Термін **максимальний зв'язний підграф** означає, що не існує шляху з вершини такого підграфа у довільну іншу вершину графа, який би містився у графі. Зв'язний ациклічний граф називається **деревом** (tree). **Каркасне дерево** (spanning tree) зв'язного графа є підграф, який містить всі першини цього графа і є деревом. **Каркасним лісом** (spanning forest) графа є підграф, який містить всі вершини іграфа і при цьому є лісом. Наприклад, на рис.6 каркасне дерево першої компоненти графа виділено.

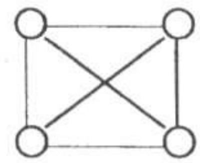

Рис. 7. Повний граф.

Графи, у яких всі вершини суміжні, називають **повними графами**. У цих графах присутні всі ребра (рис. 7). Повний граф називають **клікою**. Можна визначити **доповнення графа** G конструктивно, взявши повний граф, який має стільки вершин, скільки початковий граф G, та видаливши з нього всі ребра графа G.

Об'єднанням двох графів є граф, отриманий об'єднанням множини ребер цих графів. Об'єднання графа та його доповнення є повний граф. Усі графи, які мають *n*вершин є підграфами повного графа з *n* вершинами. Загальну кількість графів з *n* вершинами обчислюють за формулою $2^{n(n-1)/2}$. Більшість графів з практичних задач містять невелику частину з всіх можливих ребер. Граф вважають насиченим (dense), якщо кількість ребер пропорційна n^2, і розрідженим (sparse) у протилежному випадку. Інформація про те, який граф — розріджений чи насичений – важлива для вибору ефективного алгоритму обробки цього графа.

Дводольний граф (bipartite graph) – це граф, множину вершин якого можна розділити на такі дві підмножини, що довільне ребро з'єднує вершину з однієї підмножини лише з вершиною з іншої підмножини, тобто вершини можна розбити на дві підмножини, які не перетинаються (рис. 8).

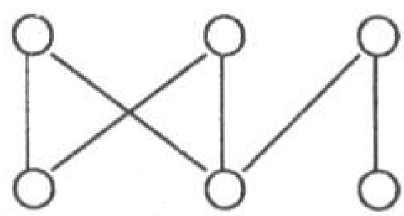

Рис. 8. Дводольний граф.

Дводольні графи можуть бути використані для зображення моделі задач пошуку відповідності. Орієнтований граф називають сильнозв'язним, якщо для будь-якої пари вершин, кожну з них можна досягнути з іншої (тобто існує шлях від однієї вершини до іншої).

Шлях називається ейлеровим, якщо він містить всі дуги графа рівно по одному разу. **Шлях називається гамільтоновим**, якщо кожна вершина входить у нього рівно один раз. Для опрацювання графів існує великий набір різноманітних алгоритмів, у яких графи треба певним способом представити у пам'яті комп'ютера. Таке зображення залежить від виду графа чи алгоритму розв'язування задачі.