1.Звичайне Диференціальне рівняння

Означення 1. Співвідношення вигляду

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0,$$

де $y = y(x)$ – шукана функція, а F – відома функція, називається звичайним диференціальним рівнянням, при умові, що F ефективно залежить хоча б від однієї похідної функції y.

2.Порядок Диференціального рівняння

Означення 2. Порядком диференціального рівняння $F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$ називають найвищий порядок похідної шуканої функції y, з яким вона ефективно входить у рівняння.

3.Означення розв’язку дифернціального рівняння

Означення 3. Функція $y = y(x)$, визначена на інтервалі $I = (a, b)$, називається розв'язком диференціального рівняння $F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$ n-го порядку, якщо

- $y = y(x)$ є n раз неперервно диференційовною функцією на I;
- при підстановці $y = y(x)$ до рівняння, воно перетворюється у тотожність за змінною x на інтервалі I, тобто

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n)}(x)) \equiv 0, \ \forall x \in I.$$

4.Загальний роз'язок рівняння -множина усіх розв'язків

Означення 4. Множину усіх розв'язків диференціального рівняння називатимемо його загальним розв'язком. Кожен конкретний елемент цієї множини називатимемо частинним розв'язком.

5.Рівняння з відокремленими змінними

Рівняння із відокремленими змінними

Означення. Диференціальне рівняння вигляду

$$y' = f(x)g(y) \quad \text{або} \quad y' = \frac{f(x)}{g(y)},$$

в якому права частина є добутком або часткою двох функцій різних змінних, називатимемо рівнянням із відокремленими змінними.

6.Однорідне рівняння

Означення. Диференціальне рівняння

$$y' = f(x, y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

називатимемо однорідним, якщо функція $f = f(x,y)$ є однорідною нульового степеня, тобто

$$f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y)$$

для всіх $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ та $\lambda > 0$.

Зауваження. Якщо рівняння $y' = f(x,y)$ є однорідним, то його можна записати у вигляді $y' = h\left(\frac{y}{x}\right)$.

Як впізнати однорідне рівняння?

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$$

$$y' = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$$

Якщо функції P та Q – однорідні з однаковим степенем однорідності

$$P(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n P(x,y), \quad Q(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n Q(x,y),$$

то рівняння є однорідним.

7.Лінійне неоднорідне рівняння

Означення. Диференціальне рівняння вигляду

$$y' + a(x)\,y = b(x), \qquad (1)$$

в якому a та b – відомі функції, а $y = y(x)$ – шукана функція, називаємо лінійним неоднорідним рівнянням першого порядку.

$a = a(x)$ – коефіцієнт рівняння

$b = b(x)$ – права частина рівняння

Якщо у рівнянні (1) покласти $b = 0$, то рівняння

$$y' + a(x)\,y = 0 \qquad (2)$$

називаємо лінійним однорідним рівнянням.

Стандартний вигляд лінійного неоднорідного рівняння

ліва частина	права частина
$y' + a(x)y$	$= b(x)$
лише додатки, які містять y чи y'	лише відома функція змінної x

8.Повні диференціали

Означення. Диференціальне рівняння (1) називатимемо рівнянням в повних диференціалах, якщо існує така функція $U=U(x,y)$ класу C^1, що

$$dU(x,y) = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy.$$

Функцію U називаємо тоді потенціалом.

9.Рівняння Бернуллі

Рівняння Бернуллі

$$y' + a(x)y = b(x)y^m, \quad m \neq 0,\ m \neq 1$$

10.Теорема існування та єдиності

Теорема (існування та єдиності).

Нехай функція $f = f(x, y)$ має властивості

- f – неперервна в області Ω;
- для кожного x функція $f(x, \cdot)$ є неперервно диференційовною за змінною y.

Тоді для кожної пари $(x_0, y_0) \in \Omega$ початкових умов в деякому околі $[x_0 - h, x_0 + h]$ точки x_0 існує розв'язок задачі Коші

$$y' = f(x, y),\ (x, y) \in \Omega;\ y(x_0) = y_0$$

і цей розв'язок єдиний.

11.Умова Ліпшиця

Означення. Кажемо, що функція $f = f(x, y)$ задовольняє умову Ліпшиця в Ω за змінною y, якщо існує така стала $L > 0$, що

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L\, |y_1 - y_2|$$

для усіх точок $(x, y_1), (x, y_2)$ з обл. Ω.

12.Теорема Пеано

Теорема існування Пеано.

Якщо функція $f = f(x, y)$ є неперервною в області Ω, то через кожну точку $(x_0, y_0) \in \Omega$ проходить принаймні один розв'язок рівняння

$$y' = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega,$$

13.Глобальні розв'язки

Глобальні розв'язки та їхня структура.

Означення. Розв'язок $y = y(x)$, визначений на максимально можливому інтервалі (a, b), називаємо глобальним розв'язком.

Теорема (про структуру глобального розв'язку). Нехай $y : (a, b) \to \mathbb{R}$ – глобальний розв'язок рівняння $y' = f(x, y)$. Тоді справедливі альтернативи:

- або $a = -\infty$, або a-скінченне і $\lim\limits_{x \to a+0} y(x) = \infty$;
- або $b = +\infty$, або b-скінченне і $\lim\limits_{x \to b-0} y(x) = \infty$.

14. Особливий розв'язок

Особливі розв'язки неявних рівнянь

Означення. Розв'язок $y = \zeta(x)$ неявного рівняння $F(x, y, y') = 0$ називаємо особливим, якщо в кожній точці $(x_0, \zeta(x_0))$ його графіка до нього торкається графік іншого розв'язку рівняння, який не збігається з ζ в жодному околі т. x_0.

15.Рівняння Лагранжа(Неявне)

Рівняння Лагранжа: $y = a(y')x + b(y')$.

16.Рівняння Клеро(Неявне)

Рівняння Клеро: $y = xy' + b(y')$.

17.Рівняння високого порядку

Означення. Диференціальне рівняння вигляду

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$$

називаємо рівнянням n-го порядку, яке розв'язане стосовно старшої похідної.

18.Лінійне рівняння зі змінними коеф

Означення. Рівняння вигляду

$$y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x) y' + a_n(x) y = b(x),$$

в якому функції $a_1, \dots, a_n$ та b є відомими, а функція y є шуканою, називаємо лінійним рівнянням n-го порядку зі змінними коефіцієнтами.

$a_k = a_k(x)$ – коефіцієнти рівняння

$b = b(x)$ – права частина рівняння

$$L\left(x, \frac{d}{dx}\right) = \frac{d^n}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1}(x)\frac{d}{dx} + a_n(x)$$

$$L\left(x, \frac{d}{dx}\right) y = b.$$

19.Перший метод пониження степеня

Перший метод пониження порядку

Нехай диференціальне рівняння

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

не залежить від шуканої функції y, тобто

$$F(x, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

Понизити порядок тоді можна заміною

$$u = y'.$$

Тоді $u' = y'', \dots, u^{(n-1)} = y^{(n)}$, а отже

$$F(x, u, u', \dots, u^{(n-1)}) = 0.$$

20.Другий метод пониження степення

Другий метод пониження порядку

Якщо рівняння $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ не залежить явно від незалежної змінної x, що його порядок можна понизити, ввівши заміну $y' = v(y)$.

Тут одночасно замінюємо і шукану функцію $y \mapsto v$, і незалежну змінну $x \mapsto y$.

Якщо $F(y, y', y'') = 0$, що заміна $y' = v(y)$ дає: $y'' = \frac{d}{dx}(v(y(x))) = v'(y) \cdot y' = v v'$,

$$F(y, v, vv') = 0.$$

21.Третій метод пониження степеня

Третій метод пониження порядку

Припустимо, що диференціальне рівняння $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ має таку властивість

$$F(x, \lambda y, \lambda y', \dots, \lambda y^{(n)}) = \lambda^s F(x, y, y', \dots, y^{(n)}),$$

тобто функція $F(x, z_0, z_1, \dots, z_n)$ є однорідною за групою змінних $z_0, \dots, z_n$.

Тоді порядок рівняння можна понизити заміною $y' = yz$, де $z = z(x)$ – нова шукана функція.

$$y'' = (yz)' = yz' + y'z = yz' + yz^2 = y(z' + z^2)$$

$$F(x, y, y', y'') = F(x, y, yz, y(z'+z^2)) = y^s F(x, 1, z, z'+z^2) = 0.$$