Іспит з диф. рівнянь
студента групи ПМ1-23 Завдання А
Кісь Юрій

- Знайдіть розв'язок задачі Коші

$$y' = (9x+y)^2, \quad y(0)=0$$

Зведу дане рівняння до р-ня з відокремленими змінними із заміною $v = 9x+y$, $y = v-9x$, $y' = v'-9$

$$v'-9 = v^2$$

$$\frac{dv}{dx} = v^2+9 \rightsquigarrow \int \frac{dv}{v^2+9} = \int dx$$

$$\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{v}{3} = x + C \quad /\cdot 3$$

$$\operatorname{arctg}\frac{v}{3} = 3x + C$$

$$\frac{v}{3} = \operatorname{tg}(3x+C) \quad /\cdot 3$$

$$v = 3\operatorname{tg}(3x+C)$$

Обернена заміна $v = 9x+y$: $y = 3\operatorname{tg}(3x+C) - 9x$

Розв'яжу задачу Коші $y(0)=0$:

$$0 = 3\operatorname{tg} C$$

$$C = 0 \quad (\text{взагалі кажучи } C = \pi n, n \in \mathbb{Z})$$

В-дь: $y = 3\operatorname{tg}3x - 9x$

$$\begin{cases} 3 = 3 + c_1 + c_2 \\ 5 = 5 + 2c_1 + 3c_2 \end{cases} \Rightarrow c_1 = c_2 = 0$$

Розв'язком задачі Коші є $(2x+3)e^x$

Завдання 8 Розв'язати задачу Коші

$(xy' - 3)\ln x = 2y$

$xy' - 3 = \frac{2y}{\ln x}$

$xy' - \frac{2y}{\ln x} = 3 \quad /:x$

$y' - \frac{2y}{x \cdot \ln x} = \frac{3}{x}$

Лінійне неоднорідне р-ня.

Розв'яжу відпов. однорідне

$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x \cdot \ln x}$

$\int \frac{dy}{y} = 2\int \frac{dx}{x \cdot \ln x}$

$\ln|y| = 2\ln|\ln x| + \ln|c|$

$y_0 = c \cdot \ln^2 x$

Знайду частковий розв'язок:

$y_* = \mathcal{L}(x) \cdot \ln^2 x$

$\mathcal{L}'(x) = \frac{b(x)}{\varphi(x)} = \frac{3}{x \cdot \ln^2 x}$

$\mathcal{L}(x) = -\frac{3}{\ln x}$

$y_* = -3\ln x$

Загальний розв'язок $y = y_0 + y_*$:

$y = c\ln^2 x - 3\ln x$

Задача Коші $y(e) = 2$

$c\ln^2 e - 3\ln e = 2$

$c - 3 = 2$

$c = 5$

В-дь: $y = 5\ln^2 x - 3\ln x = \ln x(5\ln x - 3)$

Завдання С   Розв'яжіть неявне рівняння

$$y + \frac{1}{2} y'^2 = (x+1) y'$$

Це рівняння Клеро $y = (x+1) y' - \frac{1}{2} y'^2$

$$y = x y' - \frac{1}{2} y'^2 + y'$$

Її сім'я розв'язків: $y = cx - \frac{1}{2} c^2 + c$

Пошук особ. розв.   Заміна $y' = p$, $dy = p\,dx$

$$y = xp - \frac{1}{2} p^2 + p$$

$$dy = x\,dp + p\,dx - p\,dp + dp$$

$$\cancel{p\,dx} = x\,dp + \cancel{p\,dx} - p\,dp + dp$$

$$(x - p + 1)\,dp = 0$$

$$\begin{cases} x = p - 1 \;/\; p = x+1 \\ y = xp - \frac{1}{2} p^2 + p \end{cases} \rightarrow y = p^2 - p - \frac{1}{2} p^2 + p = \frac{1}{2} p^2$$

$$\boxed{y = \frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{2}}$$

Завдання D Знайдіть розв'язок задачі Коші

$$y'' - 5y' + 6y = 4xe^x \quad , y(0) = 3 \, , \, y'(0) = 5$$

Розв'яжу спершу відповідне лінійне однор.

$y'' - 5y' + 6y = 0 \qquad \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$

$\lambda_1 = 3 \qquad \lambda_2 = 2$

Загальний р-ок: $\qquad y_1 = e^{3x} \qquad y_2 = e^{2x}$

$y_0 = c_1 e^{3x} + c_2 e^{2x}$

Знайдемо частковий розв'язок:

λ_1	λ_2	μ	r	s
2	3	1	0	1

Вигляд част. розв. $y_* = (ax + b)e^x \qquad y' = e^x(ax + a + b)$

$y'' = e^x(ax + 2a + b)$

$e^x(ax + 2a - b) - 5e^x(ax + a + b) + 6(ax + b)e^x \equiv 4xe^x \; /: e^x$

$ax + 2a - b - 5ax - 5a - 5b + 6ax + 6b \equiv 4x$

$2ax - 3a \equiv 4x$

$a = 2 \quad b = 3 \qquad y_* = (2x + 3)e^x$

Заг. розв'язок: $y = (2x + 3)e^x + c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$

$y' = (2x + 5)e^x + 2c_1 e^{2x} + 3c_2 e^{3x}$

Задача Коші $y(0) = 3 \; , \; y'(0) = 5$

Завдання Е Розв. систему диф. рівнянь

$$\begin{cases} x_1' = 4x_1 + x_2 - 2 \\ x_2' = -10x_1 - 2x_2 + 6 \end{cases}$$

$$x' = Ax + b$$

$$x' = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -10 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Для даного A : $\lambda_1 = 1 - i$ та $\lambda_2 = 1 + i$

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 3+i & 1 \\ -10 & -3+i \end{pmatrix}$$

$$h_1 = \begin{pmatrix} \frac{-3+i}{10} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$h_2 = \begin{pmatrix} \frac{-3-i}{10} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\psi(t) = e^{t} \cdot e^{-i} \begin{pmatrix} \frac{-3-i}{10} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$e^{-i} = \sin t - i\cos t$$

Пошук точки рівноваги

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 = 2 \\ +10x_1 + 2x_2 = 6 \end{cases} \qquad x_1 = 1, \quad x_2 = -2$$

Лінійний зсув

$$\begin{cases} u = x_1 - 1 \\ v = x_2 + 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{u} = 4u + v \\ \dot{v} = -10u + 2v \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -10 & -2 \end{pmatrix}$$

Завдання F Описати фазовий портрет динам. системи

$$\begin{cases} x' = (x-1)(y-2) \\ y' = (x-3)(y-1) \end{cases}$$ в околах її особливих точок.

Знайду особливі точки

$$\begin{cases} (x-1)(y-2) = 0 & x = 1 \text{ або } y = 2 \\ (x-3)(y-1) = 0 & x = 3 \text{ або } y = 1 \end{cases}$$

Дві особливі точки $(1, 1)$ та $(3, 2)$

$$\begin{cases} x' = xy - y - 2x + 2 = f_1(x, y) \\ y' = xy - 3y - x + 3 = f_2(x, y) \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} y-2 & x-1 \\ y-1 & x-3 \end{pmatrix}$$

a) лінеаризація в точці $(1, 1)$

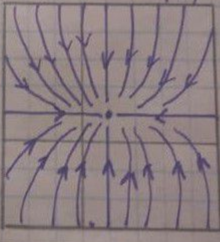
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$ Власні значення: $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -1$

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad h_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$

Це стійкий вузол.



б) лінеаризація в точці (3, 2)

$$A=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix} \qquad \lambda_1=\sqrt{2} \quad \lambda_2=-\sqrt{2}$$

$$\lambda_1 \begin{pmatrix}-\sqrt{2} & 2\\ 1 & -\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} \qquad h_1=\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\ 1\end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 \begin{pmatrix}\sqrt{2} & 2\\ 1 & \sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} \qquad h_2=\begin{pmatrix}-\sqrt{2}\\ 1\end{pmatrix}$$

$\lambda_2 < 0 < \lambda_1$ це сідло