Іспит з диференціальних рівнянь
студента групи ПМ1-23
Червоного Павла

$\boxed{C}$

$$y + \frac{1}{4}y'^2 = (x-1)y'$$

$$\frac{1}{4}y'^2 - (x-1)y' + y = 0$$

$$D = [-(x-1)]^2 - 1 =$$

$$\cancel{\frac{1}{4}y'^2 - xy' + y' + y = 0}$$

$$y = (x-1)y' - \frac{1}{4}y'^2$$ р-ие Клеро

$$y' = p \qquad dy = p\,dx$$

$$y = (x-1)p - \frac{1}{4}p^2 = px - p - \frac{1}{4}p^2$$

$$dy = \left(x - 1 - \frac{1}{2}p\right)dp$$

$$p\,dx = \left(x - 1 - \frac{p}{2}\right)dp$$

$\boxed{F}$

$$\begin{cases} \dot{x} = (x-1)(y-2) \\ \dot{y} = (x-3)(y-1) \end{cases}$$

Шукаємо особливі точки

$$\begin{cases} (x-1)(y-2)=0 \\ (x-3)(y-1)=0 \end{cases}$$

$x=1$ або $y=2$

Якщо $x=1$ то $-2y+2=0$

$y=1$

Якщо $y=2$ то $x=3$

Отже точку $(1;1)$ та $(3;2)$

$f_1(x,y) = (x-1)(y-2) = xy-y-2x+2$

$f_2(x,y) = (x-3)(y-1) = xy-3y-x+3$

$$f_x = \begin{pmatrix} \frac{df_1}{dx} & \frac{df_1}{y} \\ \frac{df_2}{d_x} & \frac{df_2}{dy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y-2 & x-1 \\ y-1 & x-3 \end{pmatrix}$$

Лінеаризація в точці $(1;1)$

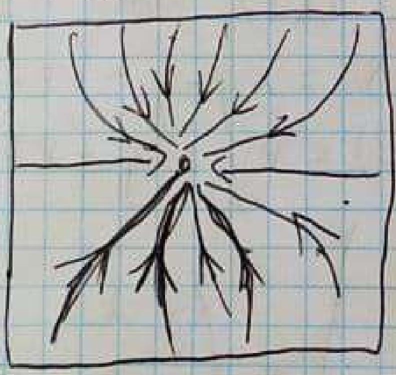
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \det(A - \lambda E) = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$$

$$\lambda_1 = -1$$
$$\lambda_2 = -2$$

$$\boxed{\lambda_1 = -1} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\lambda_2 = -2} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow h_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ — це стійкий вузол



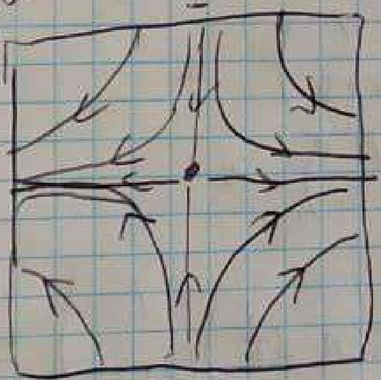
Лінер. в. т. (3;2)

$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\lambda_1 = \sqrt{2}$ $\lambda_2 = -\sqrt{2}$

$\boxed{\lambda_1 = \sqrt{2}}$ $\begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 2 \\ 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = 0$ $h_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

$\boxed{\lambda_2 = -\sqrt{2}}$ $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = 0$ $h_2 = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 < 0 < \lambda_1$ — сідло



$\boxed{E}$ $\begin{cases} \dot{x}_1 = 3x_1 - x_2 - 1 \\ \dot{x}_2 = 13x_1 - x_2 - 11 \end{cases}$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 13 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda E) = \lambda^2 - 2\lambda + 10 = 0$$

$$\lambda_1 = 1 - 3i \qquad \lambda_2 = 1 + 3i$$

$\boxed{\lambda_1 = 1 - 3i}$ $\begin{pmatrix} 2+3i & -1 \\ 13 & -2-3i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = 0$

$$(2+3i)\alpha = \beta \qquad h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2+3i \end{pmatrix}$$

$$\varphi(t) = e^{(1-3i)t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2+3i \end{pmatrix} =$$

$$= e^{t} \cdot e^{-3it} \begin{pmatrix} 1 \\ 2+3i \end{pmatrix} =$$

$$= e^{t} (\cos 3t - i \sin 3t) \begin{pmatrix} 1 \\ 2+3i \end{pmatrix} =$$

$$= e^{t} \begin{pmatrix} \cos 3t - i \sin 3t \\ 2\cos 3t + 3\sin 3t + 3i\cos 3t - 2i \sin 3t \end{pmatrix} =$$

$$= e^{t}\begin{pmatrix} \cos 3t \\ 2\cos 3t + 3\sin 3t \end{pmatrix} + i \cdot e^{t}\begin{pmatrix} +\sin 3t \\ -3\cos 3t + 2\sin 3t \end{pmatrix}$$

$$\varphi_1(t) = e^{t}\begin{pmatrix} \cos 3t \\ 2\cos 3t + 3\sin 3t \end{pmatrix}$$

$$\varphi_2(t) = e^{t}\begin{pmatrix} +\sin 3t \\ -3\cos 3t + 2\sin 3t \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x(t) = e^{t}(C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t) \\ y(t) = e^{t}\big(C_1(2\cos 3t + 3\sin 3t) + \\ \qquad + C_2(3\cos 3t - 2\sin 3t)\big) \end{cases}$$