Іспит з диференціальних рівнянь
студента групи ПМі-24
Копина Ілля

E) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - 13x_2 + 10 \\ \dot{x}_2 = x_1 - 3x_2 \end{cases}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -13 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & -13 \\ 1 & -3-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda + 10$$

$$\lambda_1 = \overline{\lambda_2} = -1 - 3i$$

λ_1:

$$\begin{pmatrix} 2+3i & -13 \\ 1 & -2+3i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = 0$$

$$\alpha + \beta(-2+3i) = 0$$

$$\alpha = (2-3i)\beta \qquad h_1 = \begin{pmatrix} 2-3i \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$h_1 = \overline{h_2}$$

λ_2:

$$\varphi(t) = e^{(-1-3i)t} \begin{pmatrix} 2+3i \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= e^{-t}(\cos(3t) + i\sin(3t)) \begin{pmatrix} 2+3i \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= e^{-t}\begin{pmatrix} 2\cdot\cos(3t) - 3(\sin(3t)) + 2i\sin(3t) + 3i\cos(3t) \\ \cos(3t) + i(\sin(3t)) \end{pmatrix}$$

$$\varphi_1 = \begin{pmatrix} 2\cos(3t) - 3(\sin(3t)) \\ \cos(3t) \end{pmatrix} - u(t)$$

$$\varphi_2 = \begin{pmatrix} 2\sin(3t) + 3\cos(3t) \\ \sin(3t) \end{pmatrix} - y(t)$$

λ_1	λ_2	u	r	s
$-1-3i$	$-1+3i$	0	0	0

$x_* = a$

$y_* = b$

$$\begin{cases} 0 = a - 13b + 10 \\ 0 = a - 3b \end{cases}$$

$0 = -10b + 10 \Rightarrow b = 1, \quad a = 3$

F) $\begin{cases} \dot{x} = x + y^2 \\ \dot{y} = x^2 + y \end{cases}$

$\begin{cases} x + y^2 = 0 \\ x^2 + y = 0 \end{cases}$ $\quad x = 0, y = 0 \quad x = 0, y = 0 \;\Big|\; x = -1, y = \pm 1 \quad x = \pm 1, y = -1$

Точки - $(0,0)$ та $(-1; -1)$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = 1 \qquad \frac{\partial f_1}{\partial y} = 2y$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = 2x \qquad \frac{\partial f_2}{\partial y} = 1$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2y \\ 2x & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \text{ та } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2 = 0$$

$\lambda_1 = \lambda_2 = 1$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = 0$$

$$0 + 0 = 0 \qquad h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$kg = 2 - 0 = 2$ | Нестійкий дикритичний вузол C_1

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$$

$\lambda_1 = -1 \quad , \quad \lambda_2 = 3$

λ_1 :

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = 0$$

$$2\alpha = 2\beta$$

$$\alpha = \beta \qquad h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda_2: \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = 0$

$-2\alpha - 2\beta = 0$

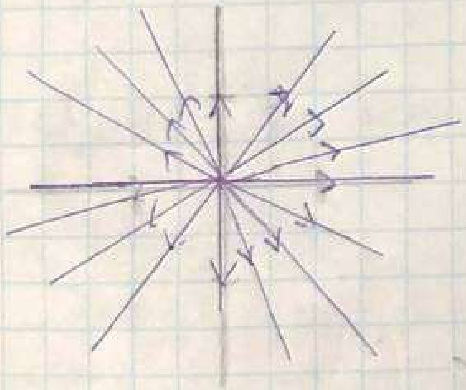
$-2\alpha = 2\beta$

$-\alpha = \beta$

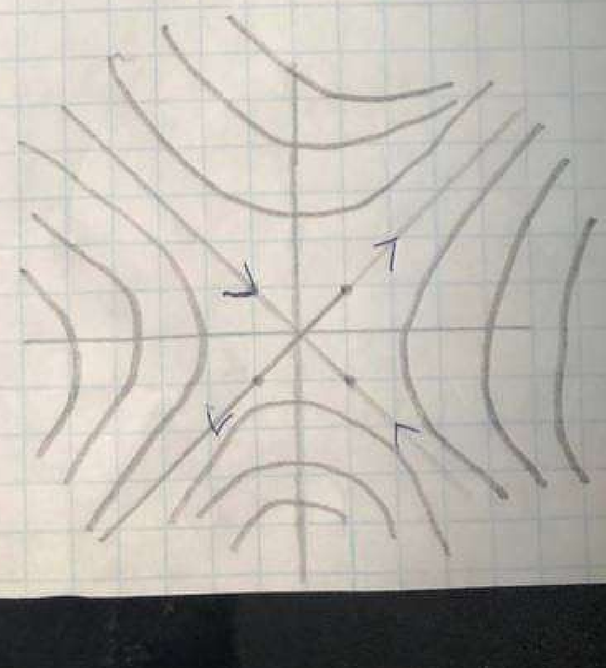
$h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\boxed{\text{Сідло} - A_3}$

Дикритичний вузол:



Сідло :



D) $y'' + 6y' + 8y = 3\cdot(3x+5)\cdot e^{-x}$,

$y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$

1) Розв'язуємо лінійне однорідне рівняння:

$\lambda^2 + 6\lambda + 8 = 0$

$\lambda_1 = -4 \qquad \lambda_2 = -2$

$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$

$y_1 = e^{-4x} \qquad y_2 = e^{-2x} \Rightarrow y_0 = C_1\cdot e^{-4x} + C_2 e^{-2x}$

загальний розв'язок

2) Шукаємо частковий розв'язок:

λ_1	λ_2	M	r	S
-4	-2	-1	0	1

$y_* = a_1 e^{-x} + a_2\cdot e^{-x} x$

$a_1 e^{-x} + a_2(-2e^{-x} + e^{-x}x) + 6(-a_1 e^{-x} + a_2 e^{-x} - a_2 e^{-x} x) +$

$+8(a_1 e^{-x} + a_2 e^{-x} x) = 15 e^{-x} + 9 e^{-x} x$

$(3a_1 + 4a_2) e^{-x} + 3a_2 e^{-x} x = 15 e^{-x} + 9 e^{-x} x$

$$\begin{cases} 3a_1 + 4a_2 = 15 \\ 3a_2 = 9 \end{cases}$$

$a_1 = 1, \quad a_2 = 3$

$y_* = e^{-x} + 3e^{-x} x$

3) Загальний розв'язок:

$y = e^{-x} + 3e^{-x} x + C_1 e^{-4x} + C_2 e^{-2x}$

$y' = 2e^{-x} - 3e^{-x} x - 4C_1 e^{-4x} - 2C_2 e^{-2x}$

$$\begin{aligned} y'(0) = 2 &\Rightarrow \\ y(0) = 1 &\Rightarrow \end{aligned} \begin{cases} -4C_1 - 2C_2 + 2 = 2 \\ C_1 + C_2 + 1 = 1 \end{cases}$$

$C_1 = 0, \quad C_2 = 0 \quad \boxed{y = e^{-x}(3x+1)}$