Диференціальні рівняння

ПЕРЕХІД ПО ТЕСТУ

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16

Показати одну сторінку за раз

Завершити перегляд

Розпочато	понеділок 21 грудень 2020 09:00
Стан	Завершено
Завершено	понеділок 21 грудень 2020 11:00
Витрачено часу	1 година 59 хв
Оцінка	**28,4** з можливих 50,0 (**57**%)

Питання **1**
Завершено
Балів 1,4 з 2,0
Відмітити питання

- Рівність вигляду $F(t,x,\dot x,\ddot x,\dots,x^{(n)})=0$, в якій функція [багатьох змінних] F – [відома], функція [однієї змінної] x – [шукана] та [t] – незалежна змінна, називаємо ***звичайним диференціальним рівнянням***, якщо
  - функція F не залежить від x;
  - функція F ефективно залежить від якоїсь з похідних шуканої функції;
  - функція F ефективно залежить від x;
  - функція F ефективно залежить від найстаршої похідної шуканої функції.
- Яка з рівностей є диференціальним рівнянням?
  - $x^3(t)=x(t)+1$
  - $\sin^2\dot x(t)+x(t)=t^2+\cos^2\dot x(t)$
  - $\dot x(t)=\int_0^t sx(s)\,ds$
  - $\sin^2\dot x(t)+x(t)=t^2-\cos^2\dot x(t)$
  - $\ddot x(t)=x(t-1)$.

Питання **2**
Завершено
Балів 1,8 з 2,0
Відмітити питання

- ***Порядком*** звичайного диференціального рівняння $F(t,x,\dot x,\ddot x,\dots,x^{(n)})=0$ називаємо
  - найменший порядок похідної шуканої функції, яка ефективно входить у рівняння;
  - число n, якщо похідна $x^{(n)}$ ефективно входить у рівняння;
  - найвищий степінь незалежної змінної, який містить рівняння;
  - суму порядків похідних шуканої функції.
- Який порядок мають диференціальні рівняння?
  - $(\ddot x+\dot x)^2-2\ddot x\dot x=tx-\ddot x^2$ [другий]
  - $(\ddot x+\dot x)^2-2\ddot x\dot x=tx+\ddot x^2$ [перший]
  - $(\ddot x+\dot x)^2-2\ddot x\dot x=tx+\dddot x^2$ [перший]

Питання **3**
Завершено
Балів 2,0 з 2,0
Відмітити питання

- Якщо неперервно диференційовна функція v є потенціалом векторного поля $(m(x,y),n(x,y))$ (потенціалом для пари функцій $m(x,y)$ та $n(x,y)$), то виконується [третя] умова, серед запропонованих нижче

$$dm=dn,\quad dv=v_x\,dx+v_y\,dy,\quad dv=m\,dx+n\,dy,\quad dv=m_y\,dx+n_x\,dy.$$

- Диференціальне рівняння вигляду $m(x,y)\,dx+n(x,y)\,dy=0$ називаємо ***рівнянням в повних диференціалах***, якщо
  - виконується умова $m_x=n_y$;
  - вираз $m(x,y)\,dx+n(x,y)\,dy$ є повним диференціалом функції m;
  - вираз $m(x,y)\,dx+n(x,y)\,dy$ є повним диференціалом деякої функції;
  - вираз $m(x,y)\,dx+n(x,y)\,dy$ є повним диференціалом функції n.
- Рівняння $m(x,y)\,dx+n(x,y)\,dy=0$ буде рівнянням в повних диференціалах в деякому прямокутнику, тоді і лише тоді, коли в цьому прямокутнику виконується умова
  - $m_x=n_y$
  - $m_y=n_x$
  - $m_x=n_x$
  - $m_y=n_y$.
- Яке з диференціальних рівнянь є рівняння в повних диференціалах?
  - $(e^y-e^x)\,dx+(e^x+e^y)\,dy=0$;
  - $(e^y+2xy)\,dx=(e^x+y^2)\,dy$;
  - $(y-x)e^y\,dx=(x+y)e^x\,dy$;
  - $(e^x+2xy)\,dx+(e^y+x^2)\,dy=0$.

Питання **4**
Завершено
Балів 1,8 з 2,0
Відмітити питання

- Функцію $g=g(x,y)$ називаємо ***однорідною степеня однорідності s***, якщо
  - $g(\alpha x, \alpha y)=s\, g(x, y)$ для усіх x, y та $s>0$;
  - $g(\alpha x, \alpha y)= \alpha^s g(x, y)$ для усіх x, y та $\alpha>0$;
  - $g(\alpha x, \alpha y)= s^\alpha g(x, y)$ для усіх x, y та $\alpha>0$.
- Якого степеня однорідності є функції?
  - $f(t,x)=\dfrac{3x^2-2t^2}{5t^3}$ [-1]
  - $f(t,x)=\ln x^3-3\ln t+1$ [0]
  - $f(t,x)=\dfrac{2x-3t}{tx^2}$ [-2]
- Диференціальне рівняння першого порядку $y'=f(x,y)$ називаємо ***однорідним рівнянням,*** якщо
  - f є однорідною функцією додатного степеня однорідності;
  - f є однорідною функцією степеня однорідності 0;
  - f є однорідною функцією.
- В кожній з півплощин [x>0] та [x<0] однорідне диференціальне рівняння за допомогою заміни змінних [u=x/t] зводиться до рівняння [рівняння із відокремленими змінними].
- Яке з диференціальних рівнянь є однорідним?
  - $y'+\ln x^2=y$
  - $y'=x^2\ln y^2-x^2$
  - $y'=y-y^2\ln x$
  - $xy'=y(\ln x-\ln y)$.

Питання **5**
Завершено
Балів 0,4 з 2,0
Відмітити питання

- Розв'язок диференціального рівняння $\dot x=f(t,x)$ називаємо ***глобальним***, якщо
  - він визначений на усій числові осі;
  - він визначений на найширшому інтервалі, поза яким він не існує;
  - він визначений в околі кожної точки.
- Нехай x - глобальний розв'язок рівняння $\dot x=f(t,x)$, визначений на скінченному чи нескінченному інтервалі $I=(a,b)$. Тоді виконується кожна з двох альтернатив
  - або число b – [нескінченне], або число b – [скінченне] і тоді розв'язок x має [нескінченну] границю, коли t прямує до [b- 0];
  - або число a – [мінус нескінченність], або число a – [скінченне] і тоді розв'язок x має [нескінченну] границю, коли t прямує до [a+ 0].

Питання **6**
Завершено
Балів 2,0 з 2,0
Відмітити питання

- Якщо функція $v=v(t,x)$ – [неперервна] за обома змінними та [неперервно диференційовна] за змінною x, то задача Коші $x'=v(t,x),\quad x(a)=b$ має [єдиний] розв'язок, який визначений [в околі точки a].
- Задача Коші $x'=v(t,x)$, $x(a)=b$ є еквівалентною інтегральному рівнянню
  - $x(t)=a+\int\limits_b^t v(s, x(s))\,ds$;
  - $x(t)=b+\int\limits_a^b v(s, x(s))\,ds$;
  - $x(t)=b+\int\limits_a^t v(s, x(s))\,ds$;
  - $v(t,x(t))=b+\int\limits_a^t x(s)\,ds$.
- Якому з інтегральних рівняння є еквівалентною задача Коші $\dot z=\cos z$, $z(2)=1$?
  - $z(t)=2+\int\limits_1^t\cos z(s)\,ds$
  - $z(t)=1+\int\limits_2^t\cos z(s)\,ds$
  - $z(t)=1-\int\limits_1^2\cos z(s)\,ds$.

Питання **7**
Завершено
Балів 0,5 з 2,0
Відмітити питання

Які з тверджень є правильними для розв'язків лінійного однорідного рівняння $$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)y+a_n(x)y=0?$$

Виберіть одну або декілька відповідей:
- Довільна лінійна комбінація розв'язків є його розв'язком.
- Добуток довільного розв'язку цього рівняння на число є знову його розв'язком.
- Стала функція завжди є його розв'язком.
- Тотожно нульова функція завжди є його розв'язком.
- Сума двох розв'язків цього рівняння є знову його розв'язком.
- Частка двох розв'язків цього рівняння є знову його розв'язком.
- Добуток двох розв'язків цього рівняння є знову його розв'язком.
- Сума розв'язку цього рівняння і довільної сталої є знову його розв'язком.

Питання **8**
Завершено
Балів 0,0 з 2,0
Відмітити питання

Геометричною кратністю власного значення λ матриці A називаємо

Виберіть одну відповідь:
- максимальну кількість лінійно незалежних власних векторів матриці A.
- мінімальну кількість лінійно незалежних власних векторів матриці A.
- максимальну кількість лінійно незалежних власних векторів матриці A, що відповідають власному значенню λ.
- кратність числа λ як кореня визначника матриці A.
- кратність числа λ як кореня характеристичного визначника $\det(A-\lambda E)=0$.

Питання **9**
Завершено
Балів 0,0 з 2,0
Відмітити питання

- Систему диференціальних рівнянь $\dot{x}=f(t,x)$, $x=(x_1,\dots,x_n)$, називаємо ***динамічною системою***, якщо
  - її права частина f не залежить від шуканих функцій $x_1, \dots,x_n$;
  - її права частина f не залежить явно від часу t;
  - її права частина f динамічно змінюється з часом;
  - її права частина f є сталою вздовж розв'язків.
- ***Особливою точкою*** динамічної системи $\dot{x}=f(x)$ називаємо таку точку x_0, в якій
  - векторне поле f відмінне від нуля;
  - перетинаються траєкторії;
  - векторне поле f обертається в нуль;
  - векторне поле f є сталим.

Питання **10**
Завершено
Балів 0,0 з 2,0
Відмітити питання

Гамільтоновою системою з гамільтоніаном $H=H(x,y)$ називаємо динамічну систему вигляду

Виберіть одну відповідь:
- $\dot{x}=\frac{\partial H}{\partial y}, \quad \dot{y}=-\frac{\partial H}{\partial x}$
- $\dot{x}=-\frac{\partial H}{\partial y}, \quad \dot{y}=-\frac{\partial H}{\partial x}$
- $\dot{x}=\frac{\partial H}{\partial y}, \quad \dot{y}=\frac{\partial H}{\partial x}$
- $\dot{x}=\frac{\partial H}{\partial y}-\frac{\partial H}{\partial x}, \quad \dot{y}=\frac{\partial H}{\partial y}+\frac{\partial H}{\partial x}$

Питання **11**
Завершено
Балів 1,0 з 5,0
Відмітити питання

Завдання A

Завдання вимагає повного письмового розв'язку

Знайдіть розв'язок задачі Коші $y'=(9x+y)^2, \;\; y(0)=0$.

---

1. Диференціальне рівняння в цьому завданні – це
   - рівняння із відокремленими змінними;
   - однорідне рівняння;
   - рівнянням Бернуллі;
   - рівняння, жодного з перелічених вище типів.
2. Рівняння можна звести до [рівняння із відокремленими змінними], застосувавши заміну
   - $v=y/x$;
   - $v=9x+y$;
   - $v=9x-y$;
   - $y'=v^2$.
3. Загальний розв'язок диференціального рівняння має вигляд
   - $y=3\,\mathrm{tg}\,3x+C$;
   - $y=C\cos 3x+3x$;
   - $y=3\,\mathrm{tg}\,(3x+C)-9x$;
   - $y=\ln(3x+C)-3x$.
4. Розв'язком задачі Коші є функція
   - $3\,\mathrm{tg}\,3x-9x$;
   - $3\,\mathrm{tg}\,3x$;
   - $\ln(3x+2)-3x$;
   - $9x$.

Питання **12**
Завершено
Балів 5,0 з 5,0
Відмітити питання

Завдання B

Завдання вимагає повного письмового розв'язку

Розв'язати задачу Коші $(xy'-3)\ln x=2y, \;\; y(e)=2$.

---

1. Якщо лінійне неоднорідне рівняння в цьому завданні записати у стандартному вигляді $y'+a(x)y=b(x)$, то права частина матиме вигляд
   - $b(x)=\ln x$;
   - $b(x)=\frac3x$;
   - $b(x)=x\ln x$;
   - $b(x)=\frac x3$.
2. Загальний розв'язок відповідного лінійного однорідного рівняння є таким
   - $y_0=C\ln^2x$;
   - $y_0=C\ln x$;
   - $y_0=\ln x+C$;
   - $y_0=C\ln|\ln x|$.
3. Загальний розв'язок неоднорідного рівняння має вигляд
   - $y=C\ln x+3\ln^2 x$;
   - $y=C\ln^2 x-3\ln x$;
   - $y=\ln x+C+2\ln|\ln x|$;
   - $y=C\ln|\ln x|-2x$.
4. Розв'язком задачі Коші є функція
   - $5\ln^2 x$;
   - $\ln x+3\ln|\ln x|$;
   - $\ln x(5\ln x-3)$;
   - $\ln|\ln x|-2x$.

Питання **13**
Відповіді не було
Макс. оцінка до 5,0
Відмітити питання

Завдання C

Завдання вимагає повного письмового розв'язку

Розв'яжіть неявне рівняння $y+\frac12y'^2=(x+1)y'$.

---

1. Рівняння в цьому завданні є [ ] і його загальний вигляд
   - $y=a(y)y'+b(y)$;
   - $y'+a(x)y=b(x)$;
   - $y=xy'+b(y')$;
   - $y=a(x)y'+b(y')$.
2. Рівняння має однопараметричну сім'ю розв'язків
   - $y=C x-\frac12C^2-C$;
   - $y=C x-\frac12C^2+C$;
   - $y=C$;
   - $y=C x-\frac12C^2-2C$.
3. Це рівняння також має особливий розв'язок
   - $y= \frac12x^2-x+\frac12$;
   - $y= \frac12x^2+2x+2$;
   - $y= \frac12x^2-2x+2$;
   - $y= \frac12x^2+x+\frac12$.
4. ***Особливим*** називаємо такий розв'язком неявного рівняння, який в [ ] точці свого графіка [ ] іншого розв'язку рівняння, причому в [ ] околі цієї точки графіки [ ].

Питання **14**
Завершено
Балів 4,7 з 5,0
Відмітити питання

Завдання D

Завдання вимагає повного письмового розв'язку

Знайдіть розв'язок задачі Коші $y''-7y'+10y=16e^{x},\quad y(0)=4,\; y'(0)=4$.

---

1. Лінійне однорідне рівняння має фундаментальну систему розв'язків
   - e^{-2x}, e^{-5x}
   - e^{2x}, e^{5x}
   - e^{2x}, xe^{5x}
   - e^{2x}, $5x$.
2. Частковий розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді
   - $y_*=ae^x$
   - $y_*=(ax+b)e^x$
   - $y_*=ax+b$
   - $y_*=axe^x$

   і він є таким
   - $y_*=4e^x$
   - $y_*=4xe^x$
   - $y_*=4x-16$
   - $y_*=(4x-16)e^x$.
3. Загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння є [сумою] часткового розв'язку лінійного [неоднорідного] рівняння та [повного] розв'язку лінійного [однорідного] рівняння, тому
   - $y=(4x-16)e^{x}+C_1e^{2x}+C_2e^{5x}$
   - $y=C_1xe^{x}+C_2e^{2x}+C_3xe^{5x}$
   - $y=4e^{x}+C_1e^{2x}+C_2e^{5x}$
   - $y=4x-16+C_1e^{-2x}+C_2e^{-5x}$.
4. Розв'язком задачі Коші є функція
   - $(4x-16)e^{x}+4e^{5x}$;
   - $2e^{2x}+4xe^{x}$;
   - $4e^{x}$;
   - $4x-16+e^{-5x}$.

Питання **15**
Завершено
Балів 4,3 з 5,0
Відмітити питання

Завдання E

Завдання вимагає повного письмового розв'язку

Розв'яжіть систему диференціальних рівнянь
$\begin{cases}\dot{x}_1=3x_1-x_2-1, \\ \dot{x}_2=13x_1-x_2-11.\end{cases}$

---

1. Нехай $\dot{x}=Ax+b$ – векторний запис системи. Власні значення матриці A є [комплексно спряженими], а саме, $\lambda_1=$ [1-3i] та $\lambda_2=$ [1+3i].
2. Серед перелічених векторів-функцій
   $$u(t)=e^{t} \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t -3\sin t \end{pmatrix}, \quad v(t)=e^{t} \begin{pmatrix} \cos 3t \\ 2\cos 3t+3\sin 3t \end{pmatrix},\quad w(t)=e^{t} \begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t+3\cos t \end{pmatrix}, \quad y(t)=e^{t} \begin{pmatrix} \sin 3t \\ 2\sin 3t-3\cos 3t \end{pmatrix}$$
   пара векторів [v] та [y] утворюють фундаментальну систему розв'язків.
3. Частковий розв'язок неоднорідної системи з вектором правих частин $b=\big($ [-1] , [-11] $\big)$ треба шукати у вигляді
   - $x_*=(a_1t+b_1,a_2t+b_2)$;
   - $x_*=(a_1,a_2)$;
   - $x_*=e^t(a_1\sin t,a_2\cos t)$;
   - $x_*=e^t(a_1\sin t+b_1\cos t,a_2\sin t+b_2\cos t)$.
4. Загальний розв'язок неоднорідної системи має вигляд
   - $x_1=e^t(c_1\cos 3t+c_2\sin 3t)+1,\;\; x_2=e^t\big((2c_1-3c_2)\cos 3t+(3c_1+2c_2)\sin 3t\big)+2$;
   - $x_1=e^t(-c_1\cos 2t-c_2\sin 2t)+t,\;\; x_2=e^t\big((c_1-c_2)\cos 2t+(c_1+c_2)\sin 2t\big)+3t$;
   - $x_1=e^t(c_1\sin t-c_2\cos t)+1,\;\; x_2=e^t\big((c_1+3c_2)\cos t+(c_2-3c_1)\sin t\big)-2$.

Питання **16**
Завершено
Балів 3,6 з 5,0
Відмітити питання

Завдання F

Завдання вимагає повного письмового розв'язку з малюнками фазових портретів

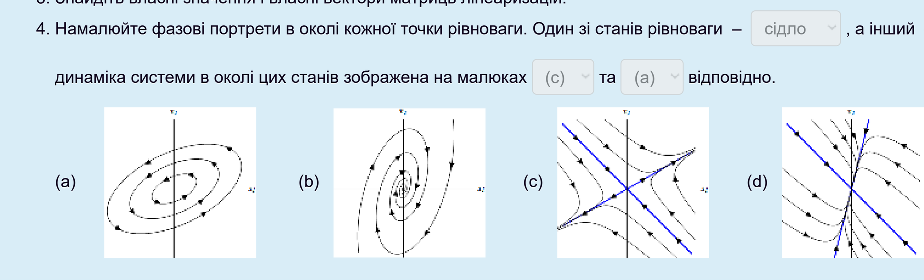
Опишіть фазовий портрет динамічної системи

$$\begin{cases}
\dot{x}=(x-1)(y-1), \\
\dot{y}=(x-2)(y-2).
\end{cases}$$

в околах її особливих точок.

---

1. Динамічна система має дві особливі точки – [(1, 2)] та [(2, 1)] *(формат відповіді* (x,y)*)*.
2. Нехай $u=(u_1, u_2)$ – нові координати в околі особливої точки, а $\dot{u}=Au$ – лінеаризація динамічної системи в околі цієї точки. Серед матриць
   $$\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \quad\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \quad\begin{pmatrix} 0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}, \quad\begin{pmatrix} 1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$$
   лише [друга] та [третя] матриці є лінеаризаціями нашої динамічної системи в околі станів рівноваги.
3. Знайдіть власні значення і власні вектори матриць лінеаризацій.
4. Намалюйте фазові портрети в околі кожної точки рівноваги. Один зі станів рівноваги – [сідло], а інший – [центр]. Типова динаміка системи в околі цих станів зображена на малюках [(c)] та [(a)] відповідно.



Завершити перегляд