

**Розпочато** понеділок 28 грудень 2020 09:00

**Стан** Завершено

**Завершено** понеділок 28 грудень 2020 11:00

**Витрачено часу** 1 година 59 хв

**Оцінка** 38,0 з можливих 50,0 (76%)

### Питання 1

Завершено

Балів 1,4 з 2,0

- Рівність вигляду  $G(t, x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots, x^{(n)}) = 0$ , в якій  $t$  – незалежна змінна,  $G$  – відома функція багатьох змінних та  $x$  – шукана функція однієї змінної, називаємо **звичайним диференціальним рівнянням**, якщо
  - ☐ функція  $x$  ефективно залежить від часу  $t$ ;
  - ☒ функція  $G$  ефективно залежить від похідних функції  $x$ ;
  - ☐ функція  $G$  не залежить від  $x$ ;
  - ☐ функція  $G$  ефективно залежить від першої похідної шуканої функції.
- Яка з рівностей не є диференціальним рівнянням?
  - ☐  $x^n(t) = \dot{x}(t) + 1$
  - ☐  $\dot{x}(t) = x(t) + \int_0^1 s ds$
  - ☒  $\sin^2 \dot{x}(t) + x(t) = t^2 + \cos^2 \dot{x}(t)$
  - ☐  $\dot{x}(t) = x(t) \cdot x(t - 2)$
  - ☐  $\sin^2 \dot{x}(t) + x(t) = t^2 - \cos^2 x(t)$ .

### Питання 2

Завершено

Балів 2,0 з 2,0

- Функцію  $x = \varphi(t)$  називаємо **розв'язком диференціального рівняння  $n$ -го порядку**  $F(t, x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots, x^{(n)}) = 0$ , якщо
  - ☐  $\varphi$  – монотонна і перетворює рівняння в тотожність за змінною  $x$ ;
  - ☐  $F$  – неперервна за усіма змінними, а  $\varphi$  – неперервно диференційовна;
  - ☐  $\varphi$  є неперервно диференційовна і перетворює рівняння в тотожність за змінною  $t$
  - ☒  $\varphi$  має неперервні похідні до порядку  $n$  і перетворює рівняння в тотожність за змінною  $t$ ;
- Встановіть відповідність між диференціальними рівняннями та їхніми розв'язками.
 

A.  $y^{(4)} = y + 2\pi$ .    B.  $xy''' = y'' + 4$ .    C.  $\sin y' = 1 - \cos 2y'$ .

1.  $y = 3x + \pi$ .    2.  $y = x^3 - 2x^2 + x$ .    3.  $y = 2\pi x - 3$ .    4.  $y = \cos x + 2e^{-x} - 2\pi$ .

A     B     C

## Питання 3

Завершено

Балів 2,0 з 2,0

- Якщо неперервно диференційовна функція  $v$  є потенціалом векторного поля  $(m(x, y), n(x, y))$  (потенціалом для пари функцій  $m(x, y)$  та  $n(x, y)$ ), то виконується  умова, серед запропонованих нижче

$$dm = dn, \quad dv = v_x dx + v_y dy, \quad dv = m dx + n dy, \quad dv = m_y dx + n_x dy.$$

- Диференціальне рівняння вигляду  $m(x, y) dx + n(x, y) dy = 0$  називаємо **рівнянням в повних диференціалах**, якщо
  - ☐ виконується умова  $m_x = n_y$ ;
  - ☐ вираз  $m(x, y) dx + n(x, y) dy$  є повним диференціалом функції  $m$ ;
  - ☒ вираз  $m(x, y) dx + n(x, y) dy$  є повним диференціалом деякої функції;
  - ☐ вираз  $m(x, y) dx + n(x, y) dy$  є повним диференціалом функції  $n$ .
- Рівняння  $m(x, y) dx + n(x, y) dy = 0$  буде рівнянням в повних диференціалах в деякому прямокутнику, тоді і лише тоді, коли в цьому прямокутнику виконується умова
  - ☐  $m_x = n_y$
  - ☒  $m_y = n_x$
  - ☐  $m_x = n_x$
  - ☐  $m_y = n_y$ .
- Яке з диференціальних рівнянь є рівнянням в повних диференціалах?
  - ☐  $(e^y + 2xy) dx = (e^x + y^2) dy$ ;
  - ☐  $(y - x)e^y dx - (x + y)e^x dy = 0$ ;
  - ☒  $(e^x - 2xy) dx = (x^2 - e^y) dy$ .

## Питання 4

Завершено

Балів 1,6 з 2,0

- Як ми називаємо такі лінійні диференціальні рівняння першого порядку?
  - $y' + p(x)y = 0$  –
  - $a(x)y' + b(x)y + c(x) = 0$  –
  - $y' + p(x)y = q(x)$  – .
- Загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння завжди можна записати так
  - ☐  $y = C^2 m(x)$
  - ☐  $y = C m(x)$
  - ☒  $y = m(x) + C$
  - ☐  $y = e^{Cm(x)}$ ,
 де  $m$  – відома функція, а  $C$  – довільна дійсна стала.
- Загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння є  загального розв'язку лінійного однорідного рівняння та  розв'язку лінійного  рівняння.
- Серед диференціальних рівнянь  $x^2 y' = x^3 - y \ln x$ ,  $x^2 y' + \ln x^2 = y$ ,  $xy' = \ln x + \ln y$ ,  $y' = x \ln y^2 - x^2$  лише  та  є лінійними рівняннями.

## Питання 5

Завершено

Балів 0,8 з 2,0

- Розв'язок диференціального рівняння  $\dot{x} = f(t, x)$  називаємо **глобальним**, якщо
  - ☐ він визначений на усій числовій осі;
  - ☒ він визначений на найширшому інтервалі, поза яким він не існує;
  - ☐ він визначений в околі кожної точки.
- Нехай  $x$  – глобальний розв'язок рівняння  $\dot{x} = f(t, x)$ , визначений на скінченному чи нескінченному інтервалі  $I = (a, b)$ . Тоді виконується кожна з двох альтернатив
  - або  $b = +\infty$ , або число  $b$  –  і тоді розв'язок  $x$  має   границю, коли  $t$  прямує до ;
  - або  $a = -\infty$ , або число  $a$  –  і тоді розв'язок  $x$  має   границю, коли  $t$  прямує до .

### Питання 6

Завершено

Балів 0,6 з 2,0

- Якщо функція  $v = v(t, x)$  – неперервною за обома змінними та неперервнодиференційованою за змінною  $x$ , то задача Коші  $\dot{x} = v(t, x)$ ,  $x(a) = b$  має єдиний розв'язок, який визначений в околі точки  $a$ .

- Задача Коші  $\dot{x} = v(t, x)$ ,  $x(a) = b$  є еквівалентною інтегральному рівнянню

☒  $x(t) = a + \int_b^t v(s, x(s)) ds$ 
☐  $x(t) = b + \int_a^t v(s, x(s)) ds$ 
☐  $x(t) = b + \int_a^b v(s, x(s)) ds$ ,

а послідовні наближення Пікара розв'язку задачі знаходимо за рекурентними формулами

☒  $x_n(t) = b + \int_a^t v(s, x_{n-1}(s)) ds$ 
☐  $x_{n+1}(t) = a + \int_b^t v(s, x_n(s)) ds$ 
☒  $x_n(t) = b + \int_a^t v(s, x_{n-1}(s)) ds$

для  $n = 1, 2, \dots$ , а нульове наближення є таким

☒  $x_0(t) = a$ 
☒  $x_0(t) = b$ 
☐  $x_0(t) = 0$ 
☐  $x_0(t) = v(a, b)$ .

- Друге наближення Пікара для розв'язку задачі Коші  $\dot{x} = 6t + x$ ,  $x(0) = 2$  має вигляд

$x_2(t) = t^3 + \boxed{\phantom{00}} t^2 + \boxed{\phantom{00}} t + \boxed{\phantom{00}}.$

### Питання 7

Завершено

Балів 1,0 з 2,0

Виберіть твердження, які є правильними для лінійного однорідного рівняння  $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$  зі сталими коефіцієнтами та його характеристичного многочлена  $P(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n$ .

Виберіть одну або декілька відповідей:

- ☒ Функція  $x e^{\lambda_0 x}$  є розв'язком рівняння другого порядку лише тоді, коли  $\lambda_0$  є простим коренем многочлена  $P$ .
- ☐ Якщо  $\lambda_0$  – двократний корінь многочлена  $P$ , то рівняння має розв'язки  $e^{\lambda_0 x}$  та  $e^{\lambda_0 x^2}$ .
- ☐ Якщо  $\lambda_0$  – трикратний корінь многочлена  $P$ , то число  $P''(\lambda_0)$  є відмінним від нуля.
- ☒ Якщо  $\lambda_0$  – корінь многочлена  $P$ , то рівняння має розв'язок  $e^{\lambda_0 x}$ .
- ☐ Якщо многочлен  $P$  має комплексний корінь  $\lambda_0 = \alpha + i\beta$ , то рівняння має розв'язок  $e^{\beta x} \sin \alpha x$ .
- ☐ Якщо  $\lambda_0$  – простий корінь многочлена  $P$ , то число  $P'(\lambda_0)$  є відмінним від нуля.
- ☒ Рівняння третього порядку не може мати розв'язку вигляду  $x^3 e^{\lambda_0 x}$ .
- ☒ Якщо  $\lambda_0$  – двократний корінь многочлена  $P$ , то рівняння має розв'язки  $e^{\lambda_0 x}$  та  $x e^{\lambda_0 x}$ .

### Питання 8

Завершено

Балів 0,0 з 2,0

Які з тверджень є правильними для розв'язків лінійної однорідної системи  $\dot{x} = Ax$ , де  $A$  – квадратна матриця порядку  $n$ ?

Виберіть одну або декілька відповідей:

- ☒ Якщо  $\alpha$  – власне значення матриці  $A$ , то система має розв'язок  $e^{\alpha t}$ .
- ☐ Власний вектор матриці  $A$  є розв'язком системи.
- ☐ Довільна лінійна комбінація розв'язків є знову розв'язком системи.
- ☒ Приєднаний вектор матриці  $A$  є одним з розв'язків системи.
- ☐ Якщо  $\alpha$  – власне значення матриці  $A$  з власним вектором  $u$ , то система має розв'язок  $e^{\alpha t} u$ .
- ☒ Різниця двох розв'язків системи є знову її розв'язком.
- ☒ Статий вектор завжди є розв'язком однорідної системи.
- ☐ Система має не більше  $n$  лінійно незалежних розв'язків.

## Питання 9

Завершено

Балів 1,6 з 2,0

- Систему диференціальних рівнянь  $\dot{x} = f(t, x)$ ,  $x = (x_1, \dots, x_n)$ , називаємо **динамічною системою**, якщо
  - ☒ її права частина  $f$  не залежить явно від часу  $t$ ;
  - ☐ її права частина  $f$  не залежить від шуканих функцій  $x_1, \dots, x_n$ ;
  - ☐ її права частина  $f$  динамічно змінюється з часом;
  - ☐ її права частина  $f$  є сталою вздовж розв'язків.
- Яка з систем диференціальних рівнянь є динамічною системою?
  - ☐  $\dot{x} = xy + e^t$ ,  $\dot{y} = x + y$
  - ☒  $\dot{x}_1 = x_1 - 1$ ,  $\dot{x}_2 = x_2 + 2$
  - ☐  $\dot{u} = v$ ,  $\dot{v} = t$ .
- Особливою точкою (станом рівноваги)** динамічної системи  $\dot{x} = f(x)$  називаємо таку точку  $x_0$ , в якій
  - ☐ векторне поле  $f$  відмінне від нуля;
  - ☐ перетинаються траєкторії;
  - ☒ векторне поле  $f$  обертається в нуль;
  - ☐ векторне поле  $f$  є сталим.
- Динамічна система з фазовим простором  $\mathbb{R}^2$ 

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (x_1 + 1)^2 + x_2^2 - 1 \\ \dot{x}_2 = (x_1 - 2)^2 + x_2^2 - 1 \end{cases}$$
  - ☐ не має особливих точок
  - ☐ має лише одну особливу точку
  - ☒ має дві особливі точки.

## Питання 10

Завершено

Балів 2,0 з 2,0

- Траєкторією** динамічної системи  $\dot{x} = v(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ , називаємо
  - ☐ криву у фазовому просторі без точок самоперетину;
  - ☐ криву у розширеному фазовому просторі, яка є графіком розв'язку;
  - ☐ стаціонарний розв'язок динамічної системи;
  - ☒ криву у фазовому просторі, запараметризовану розв'язком динамічної системи;
  - ☐ розв'язок динамічної системи, який є періодичною функцією.
- Неперервно диференційовну функцію  $U = U(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ , відмінну від сталої, називаємо **першим інтегралом** динамічної системи  $\dot{x} = v(x)$ , якщо
  - ☐ вона є стаціонарним розв'язком системи;
  - ☒ вона є сталою вздовж траєкторій динамічної системи;
  - ☐ вона залишається сталою в околі особливих точок;
  - ☐ вона є інтегровна вздовж розв'язків системи.
- Перевірте, яка з функцій є першим інтегралом динамічної системи
 
$$\begin{cases} \dot{x} = z, \\ \dot{y} = y - z, \\ \dot{z} = z - 1. \end{cases}$$
  - ☐  $U = yz + x$ ;
  - ☐  $U = z - x + \ln |z - 1|$ ;
  - ☒  $U = y - z + \ln |y - 1|$ .

## Питання 11

Завершено

Балів 5,0 з 5,0

## Завдання А

Завдання вимагає повного письмового розв'язку

Знайдіть розв'язок задачі Коші  $x^2 y' = 16x^2 + xy + y^2$ ,  $y(1) = 0$ .

1. Диференціальне рівняння в цьому завданні – це

- ☐ рівняння із відокремленими змінними;
- ☒ однорідне рівняння;
- ☐ рівнянням Бернуллі;
- ☐ рівняння, жодного з перелічених вище типів.

2. Рівняння можна звести до , застосувавши заміну

- ☒  $v = y/x$ ;
- ☐  $v = 16x^2 + y^2$ ;
- ☐  $v = 4x + y$ ;
- ☐  $v = xy$ .

3. Загальний розв'язок диференціального рівняння має вигляд

- ☐  $y = \operatorname{tg}(4x + C)$ ;
- ☐  $y = \sin \ln |Cx|$ ;
- ☐  $y = \ln x - 4x + C$ ;
- ☒  $y = 4x \operatorname{tg}(4 \ln |x| + C)$ .

4. Розв'язком задачі Коші є функція

- ☐  $y = \operatorname{tg}(4x - 4)$ ;
- ☐  $y = \sin \ln x$ ;
- ☒  $y = 4x \operatorname{tg}(4 \ln x)$ ;
- ☐  $y = \ln x - 4x + 4$ .

## Питання 12

Завершено

Балів 5,0 з 5,0

## Завдання В

Завдання вимагає повного письмового розв'язку

Знайдіть розв'язок задачі Коші  $xy' + x^5 y^2 \cos x + 4y = 0$ ,  $y(\pi) = \frac{1}{4\pi^4}$ .

1. Диференціальне рівняння в цьому завданні – це

- ☐ рівняння із відокремленими змінними;
- ☐ лінійне рівняння;
- ☐ однорідне рівняння;
- ☒ рівняння Бернуллі;
- ☐ рівняння, жодного з перелічених вище типів.

2. Рівняння можна звести до , застосувавши заміну

- ☐  $v = y/x$ ;
- ☐  $v = y^2$ ;
- ☐  $v = y^2 \cos x$ ;
- ☒  $v = 1/y$ .

3. Загальний розв'язок диференціального рівняння має вигляд

- ☒  $x^4 y (\sin x + C) = 1$ ,  $y = 0$ ;
- ☐  $x^4 y = \sin x + C$ ,  $y = 0$ ;
- ☐  $y = x^4 (\sin x + C)$ ,  $y = 0$ ;
- ☐  $y = \sin x + Cx^4$ ,  $y = 0$ .

4. Розв'язком задачі Коші є функція, яка задана формулою .

1.  $y = \frac{1}{x^4(\sin x + 4)}$ .    2.  $y = \frac{\sin x + 1}{4x^4}$ .    3.  $y = (\sin x + 4)x^4$ .    4.  $y = \sin x + \frac{x^4}{4\pi^8}$ .

## Питання 13

Завершено

Балів 3,0 з 5,0

## Завдання С

Завдання вимагає повного письмового розв'язку

Розв'яжіть неявне рівняння  $6y'^6(y - xy') = 1$ .1. Рівняння в цьому завданні є  і його загальний вигляд

- ☐  $y = a(y)y' + b(y);$   
☐  $y' + a(x)y = b(x);$   
☒  $y = xy' + b(y');$   
☐  $y = a(x)y' + b(y').$

2. Графіками розв'язків цього рівняння є , які задані формулою .

1.  $y = (Cx + 6C)^2$ .    2.  $y = Cx + 6C^6$ .    3.  $y = \frac{C}{x} + 6C^6$ .    4.  $y = Cx + \frac{1}{6C^6}$ .

3. Це рівняння також має особливий розв'язок

- ☒  $y = x^{\frac{6}{7}} - \frac{1}{7}x^{\frac{7}{6}};$     ☐  $y = \frac{7}{6}x^{\frac{7}{6}};$     ☐  $y = \frac{7}{6}x^{\frac{6}{7}};$     ☐  $y = 7\left(\frac{x}{6}\right)^{\frac{6}{7}}.$

4. **Особливим** називаємо такий розв'язком неявного рівняння, який в  точці свого графіка  іншого розв'язку рівняння, причому в  околі цієї точки графіки .

## Питання 14

Завершено

Балів 5,0 з 5,0

## Завдання D

Завдання вимагає повного письмового розв'язку

Знайдіть розв'язок задачі Коші  $y'' - y' - 6y = 2(3 - 4x)e^{2x}$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 2$ .

1. Лінійне однорідне рівняння має фундаментальну систему розв'язків

- ☐  $e^{2x}, e^{-3x}$     ☐  $e^{-2x}, xe^{3x}$     ☒  $e^{-2x}, e^{3x}$     ☐  $e^{-2x}, 1$ .

2. Частковий розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді

- ☐  $y_* = ae^x$     ☐  $y_* = ax + b$     ☐  $y_* = axe^x$     ☒  $y_* = (ax + b)e^{2x}$

і він є таким

- ☐  $y_* = 6e^{2x}$     ☒  $y_* = 2xe^{2x}$     ☐  $y_* = -8xe^{2x}$     ☐  $y_* = 6 - 8x$ .

3. Загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння є  загального розв'язку  рівняння та  розв'язку   рівняння, тому

- ☐  $y = C_1xe^x + C_2e^{-2x} + C_3e^{3x}$   
☒  $y = 2xe^{2x} + C_1e^{-2x} + C_2e^{3x}$   
☐  $y = 6e^{2x} + C_1e^{-2x} + C_2xe^{3x}$   
☐  $y = 6 - 8x + C_1e^{2x} + C_2e^{-3x}.$

4. Розв'язком задачі Коші є функція

- ☐  $6e^{-2x} - 6e^{3x};$     ☐  $6e^{-2x} + 2xe^{2x};$     ☒  $2xe^{2x};$     ☐  $1 - 8x - e^{-3x}.$

## Питання 15

Завершено

Балів 2,3 з 5,0

## Завдання Е

Завдання вимагає повного письмового розв'язку

Розв'яжіть систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 5x_1 - 2x_2 + 8, \\ \dot{x}_2 = 5x_1 - x_2 + 9. \end{cases}$$

1. Нехай  $\dot{x} = Ax + b$  – векторний запис системи. Власні значення матриці  $A$  є , а саме,  $\lambda_1 =$  та  $\lambda_2 =$  .

2. Серед перелічених векторів-функцій

$$u(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 2 \cos t \\ 3 \cos t + \sin t \end{pmatrix}, \quad v(t) = e^t \begin{pmatrix} 2 \cos 2t \\ 3 \sin 2t - \cos 2t \end{pmatrix}, \quad w(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 2 \sin t \\ 3 \sin t - \cos t \end{pmatrix}, \quad y(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 2 \sin 2t \\ 3 \cos 2t + \sin 2t \end{pmatrix}$$

пара векторів  та  утворюють фундаментальну систему розв'язків.3. Частковий розв'язок неоднорідної системи з вектором правих частин  $b = (\text{input value } 8, \text{input value } 9)$  треба шукати у вигляді

- ☐  $x_* = (a_1 t + b_1, a_2 t + b_2);$
- ☒  $x_* = (a_1, a_2);$
- ☐  $x_* = e^t(a_1 \sin t, a_2 \cos t);$
- ☐  $x_* = e^t(a_1 \sin t + b_1 \cos t, a_2 \sin t + b_2 \cos t).$

4. Загальний розв'язок неоднорідної системи має вигляд

- ☐  $x_1 = e^t(c_2 - c_1) \cos 2t + t - 4, \quad x_2 = e^t(2c_1 \cos 2t + (3c_1 + c_1) \sin 2t) - t;$
- ☐  $x_1 = e^{2t}(c_1 \sin t + c_2 \cos t) + e^t \sin t, \quad x_2 = e^{2t}((3c_1 - c_2) \cos t + (c_1 + 3c_2) \sin t);$
- ☐  $x_1 = e^{2t}(2c_1 \cos t + 2c_2 \sin t) - 2, \quad x_2 = e^{2t}((3c_1 - c_2) \cos t + (c_1 + 3c_2) \sin t) - 1.$

## Питання 16

Завершено

Балів 4,6 з 5,0

## Завдання F

Завдання вимагає повного письмового розв'язку з малюнками фазових портретів

Опишіть фазовий портрет динамічної системи

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x^2 + y, \\ \dot{y} = y - 2x. \end{cases}$$

в околах її особливих точок.

1. Динамічна система має дві особливі точки –  та  (впишіть координати точок у форматі (x,y)).2. Нехай  $u = (u_1, u_2)$  – нові координати в околі особливої точки, а  $\dot{u} = Au$  – лінеаризація динамічної системи в околі цієї точки. Серед матриць

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

лише  та  матриці є лінеаризаціями нашої динамічної системи в околі станів рівноваги.

3. Знайдіть власні значення і власні вектори матриць лінеаризацій.

4. Намалюйте фазові портрети в околі кожної точки рівноваги. Один зі станів рівноваги – , а інший – .Типова динаміка системи в околі цих станів зображена на малюнках  та  відповідно.