Домашнє завдання 6.
студентки групи ПМО-21
Кравець Ольги
З збірника Філіппова

№787.

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y \\ \dot{y} = y - 4x \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Шукаємо власні знач. матр. A:

$$\begin{vmatrix} \lambda-1 & 1 \\ 4 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-1)-4 = (\lambda-1)^2-4 = (\lambda-3)(\lambda+1) = 0$$

$\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -1$ – власні знач. матр. A

2. Шукаємо власні вектори матриці A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \qquad A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -4 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$\boxed{\lambda_1 = 3}$: $\begin{pmatrix} 1-3 & -1 \\ -4 & 1-3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2\alpha - \beta = 0 \\ -4\alpha - 2\beta = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2\alpha = \beta \\ -2\alpha = \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \alpha = 1 \\ \beta = -2 \end{matrix} \Rightarrow h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\lambda_2 = -1}$: $\begin{pmatrix} 1+1 & -1 \\ -4 & 1+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\alpha - \beta = 0 \\ -4\alpha + 2\beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha = \beta \\ -2\alpha = -\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = 2 \\ \alpha = 1 \end{cases} \Rightarrow h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Пари власних значень та власних векторів:

$\lambda_1 = 3, \; h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}; \qquad \lambda_2 = -1; \; h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

3. Знахд. ФСР та запис. загал. розв.:

$$\lambda, h \mapsto \varphi(t) = e^{\lambda t} h$$

$$\lambda_1 = 3, \; h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \varphi_1(t) = e^{3t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{3t} \\ -2e^{3t} \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = -1, \; h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \varphi_2(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 2e^{-t} \end{pmatrix}$$

ФСР

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} e^{3t} \\ -2e^{3t} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 2e^{-t} \end{pmatrix}$$

В: $\boxed{\begin{cases} x(t) = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-t} \\ y(t) = -2c_1 e^{3t} + 2c_2 e^{-t} \end{cases}}$ – загал. розв.

c_1, c_2 – довільні дійсні сталі

№790.

$$\begin{cases} \dot{x} = x - 3y \\ \dot{y} = 3x + y \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$1 - 2\lambda + \lambda^2 + 9 = 0$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 10 = 0$$

$$D = 1 - 10 = -9 < 0$$

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta; \quad \lambda_2 = \alpha - i\beta$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 2\alpha = 2 \Rightarrow \alpha = 1$$

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \lambda_1 \cdot \bar{\lambda}_1 = |\lambda_1|^2 = \alpha^2 + \beta^2 = 10$$

$$\beta = \pm 3$$

Власні значення: $\lambda_1 = 1 + 3i, \; \lambda_2 = 1 - 3i$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & -3 \\ 3 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

Комплексний власний вектор для $\lambda_1 = 1+3i$:

$$\begin{pmatrix} 1-(1+3i) & -3 \\ 3 & 1-(1+3i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3i & -3 \\ 3 & 3i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad -3i\alpha = 3\beta \qquad \Rightarrow h_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\alpha = i\beta$$

$\lambda_2 = \overline{\lambda_1} = \alpha - i\beta$ - шукати не треба, $h_2 = \overline{h_1} = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$

Дійснознач. ФСР:

$$\lambda_1 = 1+3i, \ h_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \varphi(t) = e^{(1+3i)t}\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$$

Дійсні розв.: $\varphi_1 = Re\varphi, \quad \varphi_2 = Im\,\varphi$

$$\varphi(t) = e^t e^{3it}\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = e^t(\cos 3t + i\sin 3t)\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$\varphi_1(t) = e^t(\cos 3t + i\sin 3t)$$
$$\varphi_2(t) = e^t \cdot i \cdot (\cos 3t + i\sin 3t) = e^t(-\sin 3t + i\cos 3t)$$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t)$$

$$\text{В:} \ \boxed{\begin{cases} x(t) = e^t(c_1\cos 3t + c_2\sin 3t) \\ y(t) = e^t(-c_1\sin 3t + c_2\cos 3t), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \end{cases}}$$

№ 793.

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x - y \\ \dot{y} = 4x - y \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 4 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2 = 0$$
$$\lambda_1, \lambda_2 = 1$$

Власні знач.: $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$

Власний вектор: $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha = \beta \\ 4\alpha = 2\beta \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\alpha = \beta \\ 2\alpha = \beta \end{cases} \Rightarrow \alpha = \frac{\beta}{2} \Rightarrow h = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Інших (лінійно незалежн.) власних векторів немає!

Приєднаний вектор: $Ah = \lambda h$, $Ah_* = \lambda h_* + h$

$(A - \lambda)h = 0$, $(A - \lambda)h_* = h$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha_* - \beta_* = 1/2 \\ 4\alpha_* = 2\beta_* + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha_* = \frac{1}{2} + \beta_* \\ 4\alpha_* = 2\beta_* + 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_* = \frac{1}{4} + \frac{\beta_*}{2} \\ 4\alpha_* = 2\beta_* + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_* = \frac{1 + 2\beta_*}{4} \\ 1 + 2\beta_* = 2\beta_* + 1 \end{cases} \Rightarrow h_* = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Двократному власному значенню $\lambda = 1$ відповідає ланцюг з власного і приєднаного векторів:

$\lambda,\ h \mapsto h_*$

$\varphi_1(t) = e^{\lambda t} h$, $\varphi_2(t) = e^{\lambda t}(th + h_*)$

$$\varphi_1(t) = e^t \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\varphi_2(t) = e^t \left(t \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/4 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = e^t \begin{pmatrix} t/2 + 1/4 \\ t \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 e^t \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^t \begin{pmatrix} t/2 + 1/4 \\ t \end{pmatrix}$$

В: $$\boxed{\begin{cases} x(t) = e^t \left(\frac{c_1}{2} + c_2 (t/2 + 1/4) \right) \\ y(t) = e^t (c_1 + c_2 t), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \end{cases}}$$

№797.

$$\begin{cases} \dot{x} = x - 2y - z \\ \dot{y} = y - x + z \\ \dot{z} = x - z \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & -1 \\ -1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Власні знач. матр. A: $\lambda_1 = 0, \ \lambda_2 = 2, \ \lambda_3 = -1$

Власні вектори:

$\boxed{\lambda_1 = 0}$: $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha - 2\beta - \gamma = 0 \\ -\alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \alpha = \gamma \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{matrix} \alpha = 1; \\ \beta = 0; \\ \gamma = 1; \end{matrix} \Rightarrow h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\boxed{\lambda_2 = 2}$: $\begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} -\alpha - 2\beta - \gamma = 0 \\ -\alpha - \beta + \gamma = 0 \\ \alpha = 3\gamma \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \gamma = 1 \\ \alpha = 3 \\ \beta = -2 \end{matrix} \Rightarrow h_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\boxed{\lambda_3 = -1}$: $\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha - 2\beta - \gamma = 0 \\ -\alpha + 2\beta + \gamma = 0 \\ \alpha = 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{matrix} \alpha = 0 \\ \beta = 1 \\ \gamma = -2 \end{matrix} \Rightarrow h_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Маємо 3 пари власних знач. і власних векторів:

$\lambda_1 = 0, \ h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \lambda_2 = 2, \ h_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \lambda_3 = -1, \ h_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

ФСР:

$\varphi_1(t) = e^0\begin{pmatrix}1\\9\\1\end{pmatrix}$; $\varphi_2(t) = e^{2t}\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}$; $\varphi_3(t) = e^{-t}\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}$

Загал. розв.:

$$\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\\z(t)\end{pmatrix} = c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t) + c_3\varphi_3(t)$$

В:
$$\boxed{\begin{cases} x(t) = c_1 + 3c_2e^{2t} \\ y(t) = -2c_2e^{2t} - c_3e^{-t} \\ z(t) = c_1 + c_2e^{2t} + 2c_3e^{-t}, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R} \end{cases}}$$

№801.

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y - z, \\ \dot{y} = x + y, \\ \dot{z} = 3x + z \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 1 & 1 & 0\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}1-\lambda & -1 & -1\\ 1 & 1-\lambda & 0\\ 3 & 0 & 1-\lambda\end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \quad \lambda_{2,3} = 1 \pm 2i$$

Власні знач.: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1+2i$, $\lambda_3 = \overline{\lambda_2} = 1-2i$

$\boxed{\lambda_1 = 1}$: $\begin{pmatrix}0 & -1 & -1\\ 1 & 0 & 0\\ 3 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -\beta - \gamma = 0 \\ \alpha = 0 \\ 3\gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = -\gamma \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{matrix}\alpha = 0\\ \beta = 1\\ \gamma = -1\end{matrix} \Rightarrow h_1 = \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$

$\boxed{\lambda_2 = 1+2i}$: $\begin{pmatrix}\cancel{1}-\cancel{1}-2i & -1 & -1\\ 1 & \cancel{1}-\cancel{1}-2i & 0\\ 3 & 0 & \cancel{1}-\cancel{1}-2i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2i\alpha - \beta - \gamma = 0 \\ \alpha - 2i\beta = 0 \\ 3\alpha - 2i\gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2i\alpha = \beta+\gamma \\ \alpha = 2i\beta \\ 3\alpha = 2i\gamma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{\beta+\gamma}{-2i} \\ \alpha = 2i\beta \\ \alpha = \frac{2i\gamma}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\beta+\gamma}{-2i} = 2i\beta \\ 2i\beta = \frac{2i\gamma}{3} \\ \frac{\beta+\gamma}{-2i} = \frac{2i\gamma}{3} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \beta+\gamma = 4\beta \\ \cancel{2i}\beta\cdot 3 = \cancel{2i}\gamma \\ 3\gamma+3\beta = 4\gamma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma = 3\beta \\ \gamma = 3\beta \\ \gamma = 3\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \beta = 1 \\ \gamma = 3 \\ \alpha = 2i \end{matrix} \Rightarrow h_2 = \begin{pmatrix} 2i \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

ФСР:

$$\lambda_1 = 1, \quad h_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \varphi_1(t) = e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = \overline{\lambda_3} = 1+2i, \quad h_2 = \begin{pmatrix} 2i \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \varphi_2(t) = \mathrm{Re}\,\varphi(t), \quad \varphi_3(t) = \mathrm{Im}\,\varphi(t)$$

$$\varphi(t) = e^{(1+2i)t}\begin{pmatrix} 2i \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(t) = e^t(\cos 2t + i\sin 2t)\begin{pmatrix} 2i \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = e^t\begin{pmatrix} 2i\cos 2t - 2\sin 2t \\ \cos 2t + i\sin 2t \\ 3\cos 2t + 3i\sin 2t \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi_2(t) = e^t\begin{pmatrix} -2\sin 2t \\ \cos 2t \\ 3\cos 2t \end{pmatrix}$$

$$\varphi_3(t) = e^t\begin{pmatrix} 2\cos 2t \\ \sin 2t \\ 3\sin 2t \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = C_1 e^t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 e^t\begin{pmatrix} -2\sin 2t \\ \cos 2t \\ 3\cos 2t \end{pmatrix} + C_3 e^t\begin{pmatrix} 2\cos 2t \\ \sin 2t \\ 3\sin 2t \end{pmatrix}$$

В:
$$\boxed{\begin{cases} x(t) = e^t(-2C_2\sin 2t + C_3\, 2\cos 2t) \\ y(t) = e^t(C_1 + C_2\cos 2t + C_3\sin 2t) \\ z(t) = e^t(-C_1 + 3C_2\cos 2t + 3C_3\sin 2t), \end{cases}} \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$$

№ 805

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - y - z \\ \dot{y} = 3x - 2y - 3z \\ \dot{z} = 2z - x + y \end{cases}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ 3 & -2-\lambda & -3 \\ -1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \ \lambda_2 = \lambda_3 = 1$$

Власні значення: $\lambda_1 = 0, \ \lambda_2 = \lambda_3 = 1$

$k_a(1) = 2$

$\boxed{\lambda_1 = 0}$: $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{matrix} \alpha = -1 \\ \beta = -3 \\ \gamma = 1 \end{matrix} \Rightarrow h_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\boxed{\lambda_2 = \lambda_3 = 1}$: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{matrix} \alpha = 1 \\ \beta = 1 \\ \gamma = 0 \end{matrix} \ \Big| \ \begin{matrix} \beta = 0; & h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \gamma = 1; & h_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$

$k_g(\lambda) = n - \operatorname{rank}(A - \lambda I); \ k_g(1) = 3 - 1 = 2$

Власні вектори: $\lambda_1 = 0, \ h_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = \lambda_3 = 1, \quad h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad h_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ – лінійно незалежн. вектори

$$\varphi_1(t) = e^0 \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\varphi_2(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi_3(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

В: $$\boxed{\begin{cases} x(t) = -C_1 + e^t C_2 + e^t C_3 \\ y(t) = -3C_1 + e^t C_2 \\ z(t) = C_1 + C_3 e^t, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R} \end{cases}}$$

№809.

$$\begin{cases} \dot{x} = y - 2z - x \\ \dot{y} = 4x + y \\ \dot{z} = 2x + y - z \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & -2 \\ 4 & 1-\lambda & 0 \\ 2 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \quad \lambda_{2,3} = -1$$

Власні значення: $\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = -1$

$\boxed{\lambda_1 = 1}$:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2\alpha + \beta = 2\gamma \\ 4\alpha = 0 \\ 2\alpha + \beta = 2\gamma \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 2\gamma \\ \beta = 2\gamma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 2 \\ \gamma = 1 \end{cases} \Rightarrow h_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\lambda_2 = \lambda_3 = -1}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \beta = 2\gamma \\ 4\alpha = -2\beta \\ 2\alpha = -\beta \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = -2 \\ \gamma = -1 \end{cases} \Rightarrow h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$kg(\lambda) = n - \operatorname{rank}(A - \lambda I)$

$kg(-1) = 3 - 2 = 1 \Rightarrow$ існує лише 1 власний вектор!

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_* \\ \beta_* \\ \gamma_* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \beta_* - 2\gamma_* = 1 \\ 4\alpha_* + 2\beta_* = -2 \\ 2\alpha_* + \beta_* = -1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_* = 0 \\ \beta_* = -1 \\ \gamma_* = -1 \end{cases} \Rightarrow h_2^* = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = 1, \; h_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \varphi_1(t) = e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\varphi_2(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = \lambda_3 = -1, \; h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \mapsto h_2^* = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \mapsto \varphi_3(t) = e^{-t} \left(t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi_3(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} t \\ -2t-1 \\ -t-1 \end{pmatrix}$$

В:
$$\boxed{\begin{cases} x(t) = c_2 e^{-t} + c_3 e^{-t} \cdot t \\ y(t) = 2c_1 e^t - 2c_2 e^{-t} + c_3 e^{-t}(-2t-1) \\ z(t) = c_1 e^t - c_2 e^{-t} + c_3 e^{-t}(-t-1) \end{cases}}$$

№826.

$$\begin{cases} \dot{x} = y + 2e^t \\ \dot{y} = x + t^2 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2e^t \\ t^2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b(t) = \begin{pmatrix} 2e^t \\ t^2 \end{pmatrix}$$

1. <u>ФСР:</u> $\det(A - \lambda I) = 0$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 1 = 0; \; \lambda^2 = 1; \; \lambda = \pm 1$$

$$\lambda_1 = 1;$$

$$\lambda_2 = -1;$$

Власні знач.: $\lambda_1 = 1, \; \lambda_2 = -1$

$\boxed{\lambda_1 = 1}$: $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -\alpha + \beta = 0 \\ \alpha = \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 1 \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\lambda_2 = -1}$: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -\beta \\ \alpha + \beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = -1 \end{cases} \Rightarrow h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

ФСР: $\varphi_1(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix}$, $\varphi_2(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix}$

2. Пошук часткового розв'язку неоднорідної системи

$\begin{cases} \dot{x} = y + 2e^t \\ \dot{y} = x + t^2 \end{cases}$; $b(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} e^t$

$\begin{cases} x_*(t) = (at+b)e^t \\ y_*(t) = (ct+d)e^t \end{cases}$ – структура часткового розв.

λ_1	λ_2	μ	r	s
1	-1	1	0	0

$\begin{cases} a + at + b = ct + d + 2 \\ c + ct + d = dt + b \end{cases}$ $\quad a = c$, $a + b = d + 2$, $c = a$, $c + d = b$ $\quad a + c = 2$, $a = 1$, $c = 1$, $b = d + 1$, $b = d + 1$ $\quad b = 0$, $d = -1$

$\begin{cases} x_*(t) = -t^2 - 2 \\ y_*(t) = -2t \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} te^t - t^2 - 2 \\ (t-1)e^t - 2t \end{pmatrix}$$

В: $\boxed{\begin{aligned} x(t) &= c_1 e^t + c_2 e^{-t} + te^t - t^2 - 2 \\ y(t) &= c_1 e^t - c_2 e^{-t} + (t-1)e^t - 2t \end{aligned}}$

№834.

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 2y \\ \dot{y} = x - 5\sin t \end{cases}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b(t) = \begin{pmatrix} -5\sin t \\ 0 \end{pmatrix}$$

1. $\det(A - \lambda I) = -\lambda + \lambda^2 - 2 = 0; \quad \lambda^2 - \lambda - 2 = 0$

$\lambda_1 = -1; \quad \lambda_2 = 2$

Власні знач.: $\lambda_1 = -1; \quad \lambda_2 = 2$

$\boxed{\lambda_1 = -1}$: $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha = -\beta, \quad h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \varphi_1(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix}$

$\boxed{\lambda_2 = 2}$: $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha = 2\beta \Rightarrow h_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \varphi_2(t) = \begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

2. $\begin{cases} x_*(t) = a\cos t + b\sin t \\ y_*(t) = c\cdot\cos t + d\sin t \end{cases}$

λ_1	λ_2	μ	r	s
-1	2	i	0	0

$$\begin{cases} -a\sin t + b\cos t = a\cos t + b\sin t + 2c\cos t + 2d\sin t \\ -c\sin t + d\cos t = a\cos t + b\sin t - 5\sin t \end{cases}$$

$$\begin{cases} -a = b + 2d \\ b = a + 2c \\ -c = d - 5 \\ d = a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = a \\ b = -3a \\ b = a + 2c \\ b = 5 - c \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 2c = -4a & c = -2a \\ -3a = 5 - c & -3a = 5 + 2a \\ a = -1 & c = 2 \\ b = 3 & d = -1 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} x_*(t) = -\cos t + 3\sin t \\ y_*(t) = 2\cos t - \sin t \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\cos t + 3\sin t \\ 2\cos t - \sin t \end{pmatrix}$$

В: $$\boxed{\begin{cases} x(t) = c_1 e^{-t} + 2c_2 e^{2t} - \cos t + 3\sin t \\ y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t} + 2\cos t - \sin t \end{cases}}$$

№835.

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - 4y \\ \dot{y} = x - 3y + 3e^{t} \end{cases}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad b(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3e^{t} \end{pmatrix}$$

1. $$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -4 \\ 1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = -(3+\lambda)(2-\lambda) + 4 = \lambda^2 + \lambda - 2 = 0; \ \lambda_1 = 1, \ \lambda_2 = -2$$

Власні значення: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$

$\boxed{\lambda_1 = 1}$: $\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \alpha = 4\beta \Rightarrow h_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \varphi_1(t) = \begin{pmatrix} 4e^{t} \\ e^{t} \end{pmatrix}$

$\boxed{\lambda_2 = -2}$: $\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \alpha = \beta \Rightarrow h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \varphi_2(t) = \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ e^{-2t} \end{pmatrix}$

2.

λ_1	λ_2	μ	r	s
1	-2	1	1	0

$\begin{cases} x_*(t) = (at+b)e^{t} \\ y_*(t) = (ct+d)e^{t} \end{cases}$ - структура частков. розв.

$$\begin{cases} a + at + b \equiv 2at + 2b - 4ct - 4d \\ c + ct + d \equiv at + b - 3ct - 3d + 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + b = 2b - 4d \\ a = 2a - 4c \\ c + d = b - 3d + 3 \\ c = a - 3c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 4c \\ a = b - 4d \\ c = b - 4d + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} b = 0 \\ 4a = -4d \\ c = -4d + 3 \end{matrix}$$

$c = 4c + 3$, $\quad c = -1$

$a = -4, d = 1;$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = 0 \\ c = -1 \\ d = 1 \end{cases} \Bigg| \begin{cases} x_* = -4te^{t} \\ y_* = -(t-1)e^{t} \end{cases}$$

В: $$\boxed{\begin{cases} x(t) = 4C_1e^{t} + C_2e^{-2t} - 4te^{t} \\ y(t) = C_1e^{t} + C_2e^{-2t} - (t-1)e^{t} \end{cases}}$$

№851.

$\dot{x} = Ax, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 \\ 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2 = 0; \quad \lambda = 3$$

Вл. знач: $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$

Геометр. кратність:

$\operatorname{rank} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 3 \Rightarrow k_g(3) = 3 - 2 = 1$. Лише один власний вектор!

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 0\alpha + 0\beta = 0 \\ 0\alpha + 0\beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \alpha = 0 \\ \beta = 1 \end{matrix} \text{ або } \begin{matrix} \alpha = 1 \\ \beta = 0 \end{matrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

В: $\boxed{\begin{cases} x(t) = c_1 e^{3t} \\ y(t) = c_2 e^{3t} \end{cases}}$

№866.

$\dot{x} = Ax, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & -1 \\ 1 & -1-\lambda & 0 \\ 3 & -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 = 0, \quad \lambda = 0$$

Власні значення: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

Геометрична кратність

$kg(0) = 3 - 2 = 1$ – лише один власний вектор!

$h \mapsto h_* \longmapsto h_{**}$

$$\boxed{\begin{matrix} (A-\lambda)h = 0 \\ (A-\lambda)h_* = h \\ (A-\lambda)h_{**} = h_* \end{matrix}}$$

Власний вектор h:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha - \gamma = 0 \\ \alpha - \beta = 0 \\ 3\alpha - \beta - \gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha = \gamma \\ \alpha = \beta \\ 3\alpha - \beta - \gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 1 \\ \gamma = 2 \end{cases} \Rightarrow h = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Перший приєднаний вектор h_*

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha - \gamma = 1 \\ \alpha - \beta = 1 \\ 3\alpha - \beta - \gamma = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = -1 \\ \gamma = -1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h_* = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Другий приєднаний вектор h_{**}:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha - \gamma = 0 \\ \alpha - \beta = -1 \\ 3\alpha - \beta - \gamma = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 1 \\ \gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow h_{**} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = 0, \quad h = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \longmapsto h_* = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \longmapsto h_{**} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\varphi_1(t) = e^0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\varphi_2(t) = e^0 \; t\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} t \\ t-1 \\ 2t-1 \end{pmatrix}$$

$$\varphi_3(t) = e^0 \left(\frac{t^2}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{t^2}{2} \\ \frac{t^2}{2} - t + 1 \\ \frac{t^2}{2} \cdot 2 - t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2/2 \\ t^2/2 - t + 1 \\ t^2 - t \end{pmatrix} \Bigg| \cdot 2 = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^2 - 2t + 2 \\ 2t^2 - 2t \end{pmatrix}$$

В:
$$\boxed{\begin{cases} x(t) = c_1 + t\,c_2 + t^2 c_3 \\ y(t) = c_1 + (t-1)\,c_2 + (t^2 - 2t + 2)\,c_3 \\ z(t) = 2c_1 + (2t-1)\,c_2 + (2t^2 - 2t)\,c_3 \end{cases}}$$