Екзаменаційна робота
студентки групи ПМО-21
Кравець Ольги

Завдання 4. $x^2 y' = 16x^2 + xy + y^2$, $y(1) = 0$

$$y' = 16 + \frac{y}{x} + \frac{y}{x^2}$$

$$y = xv; \quad v = \frac{y}{x}; \quad dy = xv' + v$$

$$xv' + \cancel{v} = 16 + \cancel{v} + v^2$$

$$xv' = 16 + v^2$$

$$v' = \frac{16 + v^2}{x} \Rightarrow \frac{dv}{dx} = \frac{16 + v^2}{x}$$

$$\int \frac{dv}{16 + v^2} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \frac{1}{4} \cdot \operatorname{arctg} \frac{v}{4} = \ln|x| + C$$

$$y = 4x \operatorname{tg}(4 \ln x + C)$$

Задача Коші: $4 \operatorname{tg} C = 0$

$$\operatorname{tg} C = 0$$

$$C = 0$$

$$y = 4x \operatorname{tg}(4 \ln x)$$

Відповідь: $y = 4x \operatorname{tg}(4 \ln x)$

Завдання 8. $xy' + x^4y^2\cos x + 3y = 0, \quad y(\pi) = \frac{1}{3\pi^3}$

$$y' + x^3\cos x\, y^2 + \frac{3y}{x} = 0$$

$$y' + \frac{3y}{x} = -x^3y^2\cos x \;/\cdot\frac{1}{y^3}$$ – р-ня Бернуллі

$$\frac{y'}{y^2} + \frac{3}{xy} = -x^3\cos x$$

$y=0$; $\quad u = \frac{1}{y}, \quad y = \frac{1}{u}; \; u' = -\frac{y'}{y^2}; \; y' = -u'y^2$

$$\frac{3u}{x} - u' = -x^3\cos x \;/\cdot(-1)$$

$$u' - \frac{3u}{x} = x^3\cos x$$

$$u' - \frac{3u}{x} = 0 \Rightarrow u' = \frac{3u}{x}; \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{3u}{x}$$

$$du = \frac{3u\,dx}{x}; \quad \int\frac{du}{u} = \int\frac{3\,dx}{x} \Rightarrow \ln|u| = 3\ln|x| + c$$

$u = e^c\cdot x^3; \quad u = cx^3; \quad c = v; \; u' = v'x^3 + 3vx^2$

$u = vx^3; \quad v'x^3 = x^3\cos x \;/ : x^3$

$$\frac{dv}{dx} = \cos x \Rightarrow \int dv = \int\cos x\,dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v = \sin x + c; \quad u = x^3(\sin x + c)$$

$$\frac{1}{y} = x^3\sin x + cx^3; \quad x^3y(\sin x + c) = 1;$$

Задача Коші:

$$\frac{\pi^3}{3} = \frac{1}{\pi^3 c} \Rightarrow c = \frac{3}{\pi^6}$$

$$y = \frac{1}{x^3\sin x + \frac{3x^3}{\pi^6}}$$

Відповідь: $y = \dfrac{1}{x^3\sin x + \frac{3x^3}{\pi^6}}$

Завдання С. $2y'^2(y-xy')=1$

$y'=p$, $dy=p\,dx$; $y'=\frac{dy}{dx}$; $2p^2(y-xp)=1$;

$y=\frac{1}{2p^2}+\frac{2xp^3}{2p^2}$; $y=px+\frac{1}{2p^2}$

$$dy=\frac{p^4dx+p^3x\,dp-dp}{p^3}$$

$$p\,dx=\frac{p^4dx+p^3x\,dp-dp}{p^3} \Rightarrow p\,dx=\frac{p^4dx}{p^3}+\frac{p^3x\,dp}{p^3}-\frac{dp}{p^3}$$

$$\cancel{p\,dx}=\cancel{p\,dx}+x\,dp-\frac{dp}{p^3}$$

$$x\,dp-\frac{dp}{p^3}=0$$

$$\left(x-\frac{1}{p^3}\right)dp=0 \Rightarrow (p^3x-1)\,dp=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow dp=0 \Rightarrow \int 1\,dp=\int 0\,dx \Rightarrow p=C \rightsquigarrow$$

$$\Rightarrow y=cx+\frac{1}{2c^2} \rightsquigarrow y=\frac{2c^3x+1}{2c^2}$$

$$p^3x-1=0$$

$$p^3x=1;\quad p^3=\frac{1}{x};\quad p=\sqrt[3]{\frac{1}{x}}$$

$$\begin{cases} x=\frac{1}{p^3} \\ y=px+\frac{1}{2p^2} \end{cases} \rightsquigarrow y=\sqrt{\frac{1}{x}}\cdot x+\frac{1}{2\cdot\left(\sqrt{\frac{1}{x}}\right)^2} \Rightarrow y=x^{\frac{2}{3}}+\frac{x^{1/3}}{7}$$

Відповідь: $y=cx+\frac{1}{2c^2}$

Завдання Д. | $y'' - 2y' - 3y = -4xe^x$; $y(0)=0$, $y'(0)=1$

1. Розв. лін. однор. р-ня:

$y'' - 2y' - 3y = 0$; $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \Rightarrow (\lambda-3)(\lambda+1)=0$

$\lambda_1 = 3 \rightsquigarrow y_1 = c_1 e^{3x}$

$\lambda_2 = -1 \rightsquigarrow y_2 = c_2 e^{-x}$

$y_0 = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-x}$ – загал. розв. однор. р-ня

ФСР: $y_1 = e^{3x}$, $y_2 = e^{-x}$

2. Частковий розв'язок для $-4xe^x$:

λ_1	λ_2	μ	r	s
3	-1	1	0	0

$y_* = (ax+b)e^x$

$y_*' = (ax+b+a)e^x$

$y_*'' = (ax+b+2a)e^x$

$-4axe^x - 4be^x = -4xe^x$

$\begin{cases} -4a = -4 \\ -4b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases}$

$y_* = (x+0)e^x \rightsquigarrow y_* = xe^x$

3. Загальний розв. лін. неоднор. р-ня:

$y = y_* + y_0 = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-x} + xe^x$

4. Задача Коші:

$y(0)=0$: $\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ -c_1 + 3c_2 + \cancel{1} = \cancel{1} \end{cases} \rightsquigarrow c_2 = 0\ c_1 = 0$

$y'(0) = 1$;

$y = xe^x$

Відповідь: $y = xe^x$

Завдання Е.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 6x_1 - 5x_2 + 2 \\ \dot{x}_2 = 4x_1 - 2x_2 + 4 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \qquad B(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda E) = \lambda^2 - 4\lambda + 8 = 0; \qquad \begin{matrix} \lambda_1 = \alpha + i\beta \\ \lambda_2 = \alpha - i\beta \end{matrix}$$

$$D < 0$$

$$\lambda_1 = -2i + 2 \qquad \lambda_1 = \overline{\lambda_2}$$
$$\lambda_2 = 2i + 2$$

$$\lambda_{1,2} = 2i + 2: \quad \begin{pmatrix} 4-2i & -5 \\ 4 & -2i-4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (4-2i)\alpha - 5\beta = 0 \\ (-2i-4)\alpha + 4\beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 5 \\ \beta = 4 - 2i \end{cases} \rightsquigarrow h = \begin{pmatrix} 5 \\ 4-2i \end{pmatrix}$$

$$\psi(t) = e^{(2i+2)t} \begin{pmatrix} 5 \\ 4-2i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5(ie^{2t}\sin 2t + e^{2t}\cos 2t) \\ (4-2i)(ie^{2t}\sin 2t + e^{2t}\cos 2t) \end{pmatrix}$$

$$\varphi_1(t) = \operatorname{Re}\psi(t) = 5C_1 e^{2t}\sin 2t + 5C_2 e^{2t}\cos 2t$$
$$\varphi_2(t) = \operatorname{Im}\psi(t) = c_1(4e^{2t}\sin 2t - 2e^{2t}\cos 2t) + c_2(2e^{2t}\sin 2t + 4e^{2t}\cos$$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t)$$

Відповідь: $\begin{cases} x(t) = 5C_1 e^{2t}\sin 2t + c_2(4e^{2t}\sin 2t - 2e^{2t}\cos 2t) \\ y(t) = 5e^{2t}\cos 2t \, C_1 + C_2(2e^{2t}\sin 2t + 4e^{2t}\cos 2t) \end{cases}$

Завдання F.

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x^2+y \\ \dot{y} = 2x+y \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda E) = \lambda^2 - 3\lambda = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda-3) = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 3$$

$\lambda_1 = 0$: