0. Означення множини: відкритої, замкненої, зв'язної, області.
Множину *D* в R^n називають:
а) *відкритою,* якщо кожна точка цієї множини міститься в D разом з деякою кулею з центром в цій точці;
б) *замкненою*, якщо вона містить всі свої межові точки, тобто $\partial D \subset D$;
в) *зв'язною,* якщо кожні її дві точки можна сполучити ламаною, яка повністю лежить в D;
г) область - це відкрита і зв'язна множина в просторі R^n

0. Означення просторів: неперервних функцій, неперервно диференційовних функцій.
1) якщо $M \subset R^n$, то $C(M) = \{u: M \to R | \forall x_0 \in M \lim\limits_{M \in x \to x_0} u(x) = u(x_0)\}$
2) якщо $M \in N$, то $C^m(< a, b >)$

0. Що таке ліво- та правостороння похідна?
Якщо існує скінченна границя $\lim\limits_{\Delta x \to +0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$, то цю границю називають правосторонньою похідною функції $y = f(x)$ у точці x_0і позначають $f_+'(x_0)$. (лівостороння прямує до -0).

0. Яка заміна змінних на площині називається невиродженою?
$\xi = \boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), \boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$є невиродженою =>$\frac{D(\xi,\eta)}{D(x,y)} = \text{визначник}|\xi' x\, \xi' y;\ \eta' x\, \eta' y| \neq 0 \text{ в } D$

0. Означення того, що функція задовольняє умову Ліпшиця.
$\boldsymbol{f}: \boldsymbol{D} \to \boldsymbol{R}$задовольняє в *D* ум. Л.за змінною *y*, якщо існує таке число L>0, що для всіх $(x, y_1), (x, y_2) \in D$виконується нерівність $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$

0. Теорема про достатні умови того, що функція задовольняє умову Ліпшиця.
Якщо функція f(x,y) у випуклій області G має обмежену часткову похідну по y, то $f \in Lip_y(G)$.

Деякі загальні питання теорії диференціальних рівнянь

1. Означення диференціального рівняння порядку n.
Співвідношення вигляду $G(x, y(x), y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0$ між незалежною змінною x, невідомою функцією y(x) та її похідними до порядку n включно, називається *звичайним диференціальним рівнянням n-го порядку*, якщо похідна $y^{(n)}$дійсно є в рівнянні.

2. Вигляд диференціального рівняння першого порядку в нормальній формі.
Рівняння $y' = f(x, y)$називається *диференціальним рівнянням 1-го порядку в нормальній формі.*

3. Що таке розв'язок диференціального рівняння першого порядку в нормальній формі?
Нехай D - множина з R^2. Функція $y = \varphi(x)$, x є <a,b> називається *розв'язком диф. рів. 1-го порядку в нормальній формі* на проміжку <a,b> якщо:

$$1) \varphi \in \mathrm{C}^1(< a, b >);$$
$$2) \forall x \in < a, b >: (x, \varphi(x)) \in D;$$
$$3) \forall x \in < a, b > : \varphi'(x) = f(x, \varphi(x));$$

4. Вигляд диференціального рівняння першого порядку в симетричній формі.
Вираз $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ називається *диф. рів. 1-го порядку в симетричній формі.*

5. Що таке розв'язок диференціального рівняння першого порядку в симетричній формі?
Функція $y = \varphi(x)$, x є <a,b> називається *розвязком диф. рів. 1-го порядку в симетричній формі* на проміжку <a,b> якщо:

$$1) \varphi \in \mathrm{C}^1(< a, b >);$$
$$2) \forall y \in < a, b >: (\varphi(x), y) \in D;$$
$$3) \forall y \in < a, b > : M(\varphi(x), y)\varphi'(y)dy + N(\varphi(y), y)dy = 0.$$

6. Означення загального розв'язку диференціального рівняння першого порядку.
Однопараметричну сім'ю функцй$y = \varphi(x, C), x \in I_C;$ де параметр C пробігає деяку множину P⊂R, називаємо загальним розв'язком ДР, якщо
1) для всіх C є P функіяφ є розвязком ДР на I_C

2) для кожного розвязку z ДР існують такі C_0 є Р та $I_{C_0} \subset R$,
що z(x) ≡ $\varphi(x, C_0)$ для всіх x є I_{C_0}.

7. Що таке інтеграл диференціального рівняння першого порядку?
Функцію $U = U(x, y)$з областю визначення $\Omega \subset R^2$та множиною значень $R \subset R$^1 називаємо *інтегралом диф. рів.*$y' = f(x, y)$ чи $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$, якщо: 1)$\Omega \subset D$;2) $\forall\ C \in R$ рівність $U(x, y) = C$ неявно задає розвязок $y = \varphi(x)$ на деякому інтервалі $I \subset R$^1.

8. Означення загального інтегралу диференціального рівняння першого порядку.
Запис вигляду U(x,y) = C називається загальним інтегралом ДР.

9. Що таке поле напрямків диференціального рівняння першого порядку в нормальній формі?
Нехай $D \subset R^2$- область, $f: D \to R$ - деяка функція. Візьмемо $y' = f(x, y)$.В кожній точці $(x, y) \in D$ побудуємо вектор, нахилений під кутом ψдо осі $\underline{OX}$, де $tg\psi = f(x, y)$. Сукупність таких векторів називається *полем напрямків диф. рів*. $y' = f(x, y)$.

10. Що таке поле напрямків диференціального рівняння першого порядку в симетричній формі?
Нехай M, N Є C(D). У кожній точці (x, y) Є D побудуємо вектор, нахилений під кутом ψдо осі $\underline{OX}$, де tg$\psi = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$якщо N(x,y) != 0, і вертикальний вектор, якщо N(x,y)=0
Сукупність таких векторів назвемо полем напрямків рівняння M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0

11. Що таке інтегральна крива диференціального рівняння першого порядку?
Крива q, яка в кожній своїй точці дотикається до відповідного вектора поля напрямків називається інтегральною кривою рівняння$y' = f(x, y)$.

Інтегровні типи звичайних диференціальних рівнянь

12. Вигляд рівняння на відшукання первісної.
$f: < a, b > \to R$^1; $y\ ' = f(x)$

13. Теорема про вигляд загального розв'язку рівняння на відшукання первісної.
Якщо $f \in C(< a, b >)$, то ф-ла $y = \int_{x_0}^{x} f(\xi)d\xi + C$
визначає загальний р-ок р-ня $y\ ' = f(x)$

14. Означення рівняння з відокремленими змінними.
Рівняння: K(x)dx + L(y)dy = 0; де $K: < a, b > \to R$^1, $L: < \alpha, \beta > \to R$^1 називається диф. рівнянням з відокремленими змінними

15. Теорема про вигляд загального інтегралу рівняння з відокремленими змінними.
Якщо K Є C(<a, b>), L Є C(<α, β>), то формула
$\int_{x_0}^{x}$ K(ξ)dξ + $\int_{y_0}^{y}$ L(η)dη = C
де x_0Є<a, b>,y_0Є <α, β>, а C - довільна стала, задає загальний інтеграл рівняння.

16. Означення рівняння з відокремлюваними змінними.
Рівняння, яке можна записати у вигляді:
y' = f(x)g(y), де x є <a, b>, або
M_1(x)M_2(y)dx + N_1(x)N_2(y)dy = 0, де x є <a, b> та y є<a, b>, називається рівнянням з відокремлюваними змінними (відповідно в нормальній та симетричній формі).

17. Які рівняння зводяться до рівнянь з відокремлюваними змінними?
1) $y' = f(ax + by + c)$
2) $y' = f(\frac{y}{x})$

18. Означення однорідної функції виміру к.
Функція G = G(x, y) називається однорідною функцією виміру k є R, якщо
G(tx, ty) = t^kG(x, y) для всіх t > 0.

19. Вигляд однорідного рівняння.
y' = f($\frac{y}{x}$).

20.Вигляд рівняння, права частина якого є функцією від дробово-лінійного виразу.
y' = f($(a_1x + b_1y + c_1)$/$(a_2x + b_2y + c_2)$)

21.Означення узагальнено однорідного рівняння.
Д.р. y' = f(x, y) чи M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 називається узагальнено однорідним диф. р-ням, якщо заміна y(x) ~> z(x), де y = z^α, при деякому α ! $= 0{,}1$ зводить це р-ня до однорідного.

22.Означення рівняння в повних диференціалах.
Р-ня вигляду M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0, називається р-ням в повних диференціалах, якщо існує така функція u(x,y), що du(x,y) = M(x,y)dx + N(x,y)dy

23.Теорема про необхідні та достатні умови того, що рівняння є рівнянням в повних диференціалах.
Нехай D = {(x,y)є R^2| $a < x < b$, $\alpha < y < \beta$}, M, N, $\frac{\partial M}{\partial y}$, $\frac{\partial N}{\partial x}$єC(D), |M|+|N|>0 в D. Тоді р-няM(x,y)dx + N(x,y)dy = 0, (x, y)ϵD є р-ням в повних диференціалах тоді і тільки тоді коли виконується умова $\frac{\partial M}{\partial y}$-$\frac{\partial N}{\partial x} \equiv 0$

24. Що таке інтегрувальний множник?
Функція $\mu = \mu(x, y)$, $(x, y) \in D$, називається *інтегрувальним множником* для рівняння $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$, якщо $\mu \neq 0$ і рівняння $\mu(x, y)M(x, y)dx + \mu(x, y)N(x, y)dy = 0$ є рівнянням в повних диференціалах.

26. Означення лінійного рівняння першого порядку
Д.р. назив *лінійним диференціальним рівнянням першого порядку,* якщо його можна записати у вигляді $y' = a(x)y + b(x)$

28. Вигляд рівняння Бернуллі
Диференціальне рівняння називається *рівнянням Бернуллі,* якщо його можна записати у вигляді $y' = a(x)y + b(x)y^{\alpha}$,де $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0; 1\}$.

29. Сформулюйте закон Мальтуса
Нехай $u = u(t)$-*чисельність популяції.* Функція u задовільняє *закон Мальтуса* $u' = \varepsilon u$, де $\varepsilon = \varepsilon(u, t)$-*істинна швидкість збільшення чисельності популяції.*

30. Вигляд рівняння Фархюльста
Диференціальне рівняння вигляду $u' = \varkappa u - \frac{\varkappa}{\kappa} u^{2}$, називається *рівнянням Ферхюльста*

32. Вигляд рівняння балансу доходу економіки.
$\boldsymbol{Y' = \frac{1 - a(t)}{K(t)} Y - \frac{b(t) - E(t)}{K(t)}}$, де Y(t) — національний дохід, E(t) — державні витрати, K(t) — норма акселерації, a(t) — коефіцієнт схильності до споживання (0<a(t)<1), а b(t) — автономне (скінченне) споживання.

35. Зв'язок між струмом і напругою реохорда, котушки і конденсатора.
Реохорд (металева струна) служить для зміни опору, тобто, для обмеження струму. Зв'язок між I та U: $U_{\alpha\beta}(t) = R_{\alpha\beta} I_{\alpha\beta}(t)$, де $R_{\alpha\beta} = R_{\beta\alpha} > 0$ - стала (опір реохорда).

Котушка - додатковий опір: $U_{\alpha\beta}(t) = L_{\alpha\beta} \frac{d}{dt} I_{\alpha\beta}(t)$, де $L_{\alpha\beta} = L_{\beta\alpha} > 0$ - стала (індуктивність котушки)

Конденсатор (дві пластини) - це прилад для накопичення електричного заряду. $I_{\alpha\beta}(t) = C_{\alpha\beta} \frac{d}{dt} U_{\alpha\beta}(t)$, де $C_{\alpha\beta} = C_{\beta\alpha} > 0$ - стала (ємність конденсатора).

Інтегральні рівняння Вольтерра

37.Означення інтегрального рівняння Вольтера
Співвідношення вигляду $y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt$ яке зв'язує незалежну змінну x, невідому функцію $y(x)$та інтеграл від якогось виразу назив р-ям Вольтера 2-го роду.

38. Що таке розв'язок інтегрального рівняння Вольтерра.
$y = \varphi(x)$ називається розв'язком інтегрального рівнння Вольтера на $< a, b >$, якщо:
1) $x_0 \in < a, b >$; 2) $\forall x \in < a, b >: (x, \varphi(x)) \in D$; 3) $\varphi \in C(< a, b >)$;4) $\forall x \in < a, b >: \varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt$

39. Теорема Пікара для інтегральних рівнянь.
Якщо $f \in C(D) \cap Lip_y(D)$, то інтегральне р-ня Вольтера $\forall (x_0, y_0) \in D$ має єдиний розв'язок визначений на проміжку $[x_0 - h, x_0 + h], h > 0$.

40. Формула послідовних наближень розв'язку інтегрального рівняння Вольтерра.
$\boldsymbol{\varphi_0(x) = y_0}$;

$$\boldsymbol{\varphi_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t)\varphi_{n-1}(t)dt,} \qquad \boldsymbol{n} \in N$$

Задача Коші для звичайного диференціального рівняння першого порядку, розв'язаного стосовно похідної

41. Як ставиться задача Коші для диференціального рівняння 1-го порядку в нормальній формі?
Нехай $D \subset R^2, (x_0, y_0) \in D, f: D \to R$. Задача Коші:
$y' = f(x, y)$,
$y(x_0) = y_0$

42. Що таке розв'язок задачі Коші для диференціального рівняння 1-го порядку в нормальній формі?
Функція y=$\varphi(x)$ наз. розвязком задачі Коші на проміжку <a,b>, якщо:
1) $x \in < a, b >$;
2)$\varphi \in C^1(< a, b >)$;
3)$\forall x \in < a, b >: (x, \varphi(x)) \in D$;
4)$\forall x \in < a, b >: \varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$;
5)$\varphi(x_0) = y_0$;

43. Лема про зв'язок інтегрального рівняння та задачі Коші для диференціального рівняння.
Якщо $f \in C(D)$, то задача Коші $y' = f(x, y), y(x_0) = y_0$ є еквівалентною до інтегрального рівняння $y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt, x \in < a, b >$.

44. Теорема Пікара для диференціального рівняння 1-го порядку в нормальній формі.
Якщо $f \in C(D) \cap Lip_y(D)$ то $\forall (x_0, y_0) \in D$ з. Коші має єдиний розв'язок визначений на деякому $I_h = [x_0 - h, x_0 + h]$ де h>0.

45. Теорема Пеано для диференціального рівняння 1-го порядку в нормальній формі.
Якщо $f \in C(\Pi_{a,b}(x_0, y_0))$, то задачі Коші $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$має р-ок визначений на $I_h = [x_0 - h, x_0 + h]$, де $h = min\{a, \frac{b}{M}\}, a\ M = max_{(x_0, y_0)} |f(x, y)|$ для $(x, y) \in \Pi_{a,b}(x_0, y_0)$

46. Що таке відрізок Пеано?
Відрізок $I_h = [x_0 - h, x_0 + h]$, де $h = min\{a, \frac{b}{M}\}, a\ M = max_{(x_0, y_0)} |f(x, y)|$ для $(x, y) \in \Pi_{a,b}(x_0, y_0)$ називається відрізком Пеано для задачі Коші $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$.

47. Лема Гронуолла-Беллмана.
Нехай $u \in C([a, b])$, $x_0 \in [a, b]$, $C, L \geq 0$- сталі. Якщо $\forall x \in [a, b]$ виконується нерівність $|u(x)| \leq C + L|\int_{x_0}^{x} |u(\xi)|d\xi|$ то $\forall x \in [a, b]: |u(x)| \leq C * e^{L|x - x_0|}$

48. Теорема єдиності розв'язку задачі Коші для диференціального рівняння 1-го порядку в нормальній формі.
Якщо $f \in C(D) \cap Lip_y(D)$, то задача Коші ($y' = f(x,y), y(x_0) = y_0$) не може мати на $< a, b >$більше одного розв'язку.

49. Означення продовження розв'язку задачі Коші для диференціального рівняння.
Якщо $y = \varphi(x)$ - розв'язок задачі Коші на $< a, b >$, а $y = \psi(x)$ - розв'язок задачі на $x\epsilon < a, b + \varepsilon >$ і, крім того,
1) $\varepsilon > 0$;
2) $\forall x \in < a, b >: \varphi(x) = \psi(x)$,
то ψ називається продовженням розв'язку φ вправо.

50. Означення непродовжувального розв'язку задачі Коші для диференціального рівняння.
Функція $y = \varphi(x)$ назив непродовжувальним розвязком задачі Коші, якщо φ не можна продовжити ні вліво, ні вправо.

51. Теорема про продовження розв'язку задачі Коші для диференціального рівняння 1-го порядку в нормальній формі.
Якщо $f \in C(D)$, то $\forall(x_0, y_0) \in D$ р-ок φзадачі Коші $y' = f(x,y), y(x_0) = y_0$можна продовжити на інтервал (ξ, η), який: 1) $\lim\limits_{x\to\eta-0} |\varphi(x)| = +\infty$або 2) $\lim\limits_{x\to\eta-0} dist(\varphi(x), \vartheta D) = 0, \vartheta D$-межа області D. Аналогічні співвідношення при $x \to \xi + 0$ виконуються і для точки ξ.

52. Теорема про існування непродовжувального розв'язку задачі Коші для диференціального рівняння 1-го порядку в нормальній формі.
Якщо $f \in C(D)$, то для кожної точки $(x_0, y_0) \in D$ існує непродовжувальний розв'язок задачі Коші.

53. Теорема про єдиністьнепродовжувального розв'язку задачі Коші для диференціального рівняння 1-го порядку в нормальній формі.
Якщо $f \in C(D) \cap Lip_y(D)$, то задача Коші має єдиний непродовжувальний розв'язок.

Неявні диференціальні рівняння першого порядку

54. Що таке неявне диференціальне рівняння 1-го порядку?
Диференційне рівняння вигляду *F(x,y,y')=0, F cCG, GcR^3* називається неявним д.р.

55. Означення розв'яку неявного диференціального рівняння 1-го порядку?
Функція *y=φ(x)* називається розв'язком неявного д.р. *F(x,y,y')=0, F cCG, GcR^3* якщо
1) *φ є C1*(<a,b>) ;
2) ∀*x* є *<a,b>:(x,φ(x),φ'(x))* є G;
3) ∀*x* є *<a,b>:F(x,φ(x),φ'(x))=0* .

56. Як ставиться задача Коші для неявного диф.рівняння 1-го порядку?
Для задачі Коші потрібно задавати такі умови:$y(x_0) = y_{0,}\ y'(x_0) = y_{1,}$,також має виконуватися рівність $F(x_0, y_0, y_1) = 0$.

57.Теорема існування та єдиності розв'язку задачі Коші для неявного диф.рівняння 1-го порядку?
Нехай $(x_0, y_0, y_1)\epsilon\ \boldsymbol{G}$, *F ϵ C(G)* і виконується умови:
1)$F(x_0, y_0, y_1) = 0$,
2)$F'_y, F'_{y'}$,- неперервні функції в деякому околі точки(x_0, y_0, y_1) ;
3)$F'_{y1}(x_0, y_0, y_1) \neq 0$,
то задача Коші має єдиний розвязок y= *φ(x)*,визначений інтервалі $I_h = [x_0 - h, x_0 + h]$ де h>0

58. Що таке звичайні точки неявного диференціального рівняння 1-ого порядку?
Точки (x_0, y_0)в яких існує єдиний розвязок задачі Коші для *F(x,y,y')=0*, називаються звичайними точками цього рівняння.

59. Що таке особливі точки неявного диференціального рівняння 1-го порядку?
Точки площини хОу, в яких порушується єдиність розв'язку задачі Коші.

60. Що таке особлива інтегральна крива неявного диференціального рівняння 1-го порядку?
Особлива інтегральна крива - це крива утворена з особливих точок.

61. Що таке особливий розв'язок неявного диференціального рівняння 1-го порядку?
Розв'язок неявного ДР $F(x, y, y') = 0$, який в кожній своїй точці дотикається до графіка якогось іншого розв'язку цього ж рівняння називається *особливим розв'язком.*

62. Як знайти дискримінантні криві неявного диференціального рівняння 1-го порядку?
$\{F(x, y, y') = 0;\ F'_{y'}(x, y, y') = 0.\}$ Щоб знайти криві, потрібно знайти з 1-го рівнняння системи y' і підставити у 2-ге рівняння цієї системи. Якщо отримана рівність задає на площині хОу якусь криву, то ця крива називається *дискримінантною кривою* рівняння $F(x, y, y') = 0$; вона підозріла на особливий розв'язок.

63. Загальний вигляд рівняння Лагранжа. У чому полягає особливість цього рівняння?
$y = x\varphi(y') + \psi(y')$. Особливість: розв'язуючи це рівняння за допомогою методу введення параметра, всередині отримаємо просте лінійне рівняння.

64. Загальний вигляд рівняння Клеро. У чому полягає особливість цього рівняння?
$y = xy' + \psi(y')$.Особливість: розв'язуючи це рівняння за допомогою методу введення параметра, всередині отримаємо просте лінійне рівняння.

9. Загальний вигляд системи звичайних диференціальних рівнянь.

$$\begin{cases} G_1\left(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(\alpha_1)}, \dots, y_n, y_n', \dots, y_n^{(\alpha_n)}\right) = 0 \\ \dots \\ G_n\left(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(\alpha_1)}, \dots, y_n, y_n', \dots, y_n^{(\alpha_n)}\right) = 0 \end{cases}$$ – система ЗДР порядку a; $a = a_1 + .. + a_n$

10. Означення нормальної системи звичайних диференціальних рівнянь.

Система вигляду $\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, \dots, y_n) \\ \dots \\ y_n' = f_n(x, y_1, \dots, y_n) \end{cases}$ називається нормальною системою звичайних диференціальних рівнянь(порядку n).

11. Означення розв'язку нормальної системи звичайних диференціальних рівнянь.

Набір функцій $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ називається розв'язком нормальної системи звичайних диференціальних рівнянь на $< a, b >$, якщо

1) $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in C^1(< a, b >)$;

2)$\forall x \in < a, b >: \left(x, \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)\right) \in D$;

3)$\forall x \in < a, b > \ \forall i \in \{1, \dots, n\}: \varphi_i'(x) = f_i(x, \varphi_1(x), \dots., \varphi_n(x))$;

12.Як ставиться задача Коші для нормальних систем?

Задача Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь полягає у тому, щоб знайти такий розв'язок, що задовольняє початкові умови $y_1(x_0) = y_1^0, \dots, y_n(x_0) = y_n^0$. Де $(x_0, y_1^0, \dots, y_n^0) \in D$.

14. Означення того, що вектор-функція$\vec{f}(x, y)$: $\mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$задовольняє умову Ліпшиця за змінною $\vec{y}$.

Вектор-ф-ція $\vec{f} = \vec{f}(x, y)$: $\mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ задов. В D умову Ліпшиця за змінною $\vec{y}$, якщо $(\exists L_1 > 0)\left(\forall \left(x, \overrightarrow{y_1}\right), \left(x, \overrightarrow{y_2}\right) \in D\right)\left|f\left(x, \overrightarrow{y_1}\right) - f\left(x, \overrightarrow{y_2}\right)\right| \leqslant L * \left|\overrightarrow{y_1} - \overrightarrow{y_2}\right|$.

15. Теорема Пікара для нормальної системи?

Якщо $f_{1,} .. f_n \in C(D) \cap Lip_{\vec{y}}(D)$,то $\forall \left(x_{0,} \overrightarrow{y_0}\right) \in D$ існує єдиний р-ок $\vec{y}(x_0) = \overrightarrow{y_0}$,який визначений на інтервалі $[x_0 - h, x_0 + h]$,де h>0-число.

16. Вигляд системи Бейлі.

$$\begin{cases} u_1' = -\gamma_{12}u_1u_2 \\ u_2' = -u_2(\mu_2 - \gamma_{12}u_1) \\ u_3' = \mu_2 u_2 \end{cases}$$

17. Загальний вигляд рівняння n -го порядку, розв'язаного відносно старшої похідної.

$y^{(n)} = f(x, y, y', .., y^{(n-1)})$ (4)

18. Означення розв'язку рівняння n -го порядку, розв'язаного відносно старшої похідної.

ф-цію $y = \phi(x)$ назив. р-ком р-ня вищого порядку на проміжку

$\langle a, b\rangle$, якщо

1)$\phi \in C^n(\langle a, b\rangle)$;

2)$\forall x \in \langle a, b\rangle$: $\left(x, \phi(x), \phi'(x), .., \phi^{(n-1)}(x)\right) \in D$;

3)$\forall x \in \langle a, b\rangle$: $\phi^{(n)}(x) = f\left(x, \phi(x), \phi'(x), .., \phi^{(n-1)}(x)\right)$.

19. Записати нормальну систему, якій еквівалентне рівняння n-го порядку, розв'язаного відносно старшої похідної.

$$\begin{cases} y'_1 = y_{2,} \\ y'_2 = y_{3,} \\ . \\ . \\ y'_{n-1} = y_n, \\ y'_n = f(x, y_{1,} .., y_n) \end{cases}$$

20. Як ставиться задача Коші для рівняння n -го порядку, розв'язаного відносно старшої похідної?

Задача коші для рівн. вищого порядку (4) розвязного стосовно старшої похідної полягає в тому щоб знайти р-ок р-ня (4) , який задов. Умови :$y(x_0) = y_{01}, y'(x_0) = y_{02}, y^{(n-1)}(x_0) = y_{0n}$.

21. Теорема Пікара для рівнянь n-го порядку.

Якщо $f \in C(D) \cap Lip_{\bar{y}}(D)$,то $\forall(x_{0,}y_0) \in D \exists!$Р-ок зад.коші ,

$y(x_0) = y_{01}, y'(x_0) = y_{02}, y^{(n-1)}(x_0) = y_{0n}$ визначений на деякому відрізку $[x_0 - h, x_0 + h], h > 0$.

22. Види рівнянь вищого порядку (рівняння, що не містить незалежної змінної, рівняння, що не містить невідомої функції, однорідне рівняння вищого порядку, узагальнено однорідне рівняння вищого порядку) та методи пониження їх порядку.

Рівняння, що не містить незалежної змінної – заміна $y' = u(y),\ y'' = uu'$, ….Знижує порядок на 1.

Рівняння, що не містить невідомої функції – заміна $y' = z(x),\ y'' = z'', \dots, y^{(n)} = z^{(n-1)}$. Знижує порядок на 1.

Однорідне рівняння вищого порядку – заміна $y' = y(x)z(x),\ y'' = y(z^2 + z'), \dots, y^{(n)} = y\omega(z, z', \dots, z^{(n-1)})$. Знижує порядок на 1.

Узагальнено однорідне рівняння вищого порядку – заміна $x = e^t, y = z(t)e^{at}$ (при x>0). Знижує порядок на 1.

23. Загальний вигляд ЛОР та ЛНОР n -го порядку.

$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$ - ЛОР

$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$ – ЛНОР,

якщо $\forall x \in < a, b >:\ a_n(x) \neq 0$ і $f \neq 0$

24. Що таке коефіцієнти та вільний член ЛНОР n -го порядку?

Ф-ії $a_0, a_1, \dots, a_n$ назив. коеф. рівняння $a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$, функція $f = f(x)$ називається вільним членом цього рівняння.

26. Теорема про існування та єдиність розв'язку задачі Коші для ЛНОР n -го порядку?

Якщо $a_0, a_1, \dots, a_n, f \in C(< a, b >)$, то для кожної точки $\left(x_{0,}\gamma_1, \dots, \gamma_n\right) \in < a, b > \times R^n$ існує єдиний розв'язок з.Коші, визначений на всьому проміжку.

27. Вигляд лінійного диференціального оператора n-го порядку.

Якщо $\forall x \in < a, b >: \ a_n(x) \neq 0$, то вираз $L[y] = a_n(x)y^{(n)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y$ називається лінійним диференціальним оператором порядку n.

28. Теорема про властивості лінійного диференціального оператора n -го порядку.

1) $L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2]$; 2) $\forall\, C \ \in$ C: $L[C_y] = CL[y]$

29. Теорема про властивості лінійних комбінацій розв'язків ЛОР n-го порядку.

1) Якщо y_1, y_2- розв'ящки ЛОР, то $y_1 + y_2$- розв'язок ЛОР; 2)Якщо y_1- розв'язок ЛОР, $C \in$ C, то C_{y_1}- розв'язок.

30. Теорема про комплекснозначні розв'язки ЛОР.

Ф-ія $g = u + iv$ є комплексним розв'язком ЛОР на <a,b> тоді і тільки тоді, коли u та v є дійсними розв'язками ЛОР на <a,b>.

31.Означення того, що функції є лінійно залежними.

Набір ф-цій $y_1, y_2, \dots, y_k$ наз. лінійно незалежним (ЛН) набором ф-цій на <a,b> , якщо: $\forall\, p_1, \dots, p_k$ - числа : $p_1\, y_1(x) + \ldots + \ p_k\, y_k(x) = 0\,;\ \forall x \ \in\ < a, b > \ \Rightarrow\ p_1 = \ldots = \ p_k = 0$

32.Означення того, що функції лінійно незалежними.

Набір ф-цій $y_1, y_2, \dots, y_k$ наз. лінійно залежним(ЛЗ) набором ф-цій на <a,b> , якщо: $\exists\, p_1, \dots, p_k$ - числа : $|p_1| + \ldots + |p_k| > 0$, що $p_1\, y_1(x) + \ldots + \ p_k\, y_k(x) = 0$ – виконується.

33.Що таке фундаментальна система розв'язків ЛОР *n* -го порядку?

Набір $y_1, y_2, \dots, y_k$ ЛН розв'язків ЛОР $a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$ наз. фундаментальною системою розв'язків (ФСР) ЛОР.

34.Теорема про існування фундаментальної системи розв'язків ЛОР *n-го* порядку.

Якщо виконується умова $\forall x \in < a, b >: \ a_n(x) \neq 0$ то ЛОР має безліч ФСР.

35.Що таке визначник Вронського набору функцій $\varphi_1(x) \dots \varphi_n(x)$: *R1* —> R1?

Нехай $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ - деякі ф-ції. Тоді w(n) = $\begin{bmatrix} \varphi_1(x) & & \varphi_n(x) \\ \varphi_1{}'(x) & \cdots & \varphi_n{}'(x) \\ \varphi_1{}''(x) & & \varphi_n{}''(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1{}^{(n-1)}(x) & \cdots & \varphi_n{}^{(n-1)}(x) \end{bmatrix}$ – визначник Вронського.

36.Теорема про властивості визначника Вронського набору функцій $\varphi_1(x) \dots \varphi_n(x)$: *R1* —> R1

Властивості визначника Вронського:

1) $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ - ЛЗ на <a, b> $\Rightarrow \forall x \in < a, b >: w(x) = 0$

2) Якщо $a_1, \dots, a_n \ \in C(< a\,, b >)$, $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ - розв. ЛОР, то

   $\alpha)\ \varphi_1, \dots, \varphi_k$ - ЛЗ на <a , b> $\Leftrightarrow \forall x \in < a, b > w(x) = 0$

   $\beta)\ \varphi_1, \dots, \varphi_k$ - ЛН на <a , b> $\Rightarrow \exists x \in < a, b > w(x) \neq 0$

37.Яка структура загального розв'язку ЛОР *n* -го порядку?

Якщо $a_0, \dots, a_n \ \in C(< a\,, b >)$, виконується $\forall x \in < a, b >: \ a_n(x) \neq 0$, $y_1, y_2, \dots, y_n$ - ФСР ЛОР, то загальний розв. ЛОР має вигляд: $y(x) = \ C_1y_1(x) + \ldots + \ C_ny_n(x)$, де $C_1, \dots, C_n$ – довільні сталі.

38.Яка структура загального розв'язку ЛНОР *n* -го порядку?

Якщо $a_0, \dots, a_n, \ f \ \in C(< a\,, b >)$, викон. $y^{(n-1)}(x) = \ y_n; y_1, y_2, \dots, y_n$ - ФСР ЛОР, то загальний розв ЛНОР $a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$ має вигляд:

$y(x) = \ C_1y_1(x) + \ldots + \ C_ny_n(x) + \ \tilde{y}(x)$, де $C_1, \dots, C_n$ – довільні сталі, $\tilde{y}(x)$ – який –небудь частковий розв'язок ЛНОР.

39.Теорема про метод варіації сталих для ЛНОР *n* -го порядку.

Якщо $a_0, \dots, a_n, \ f \ \in C(< a\,, b >)$, викон. умова $\forall x \in < a, b >: \ a_n(x) \neq 0$; $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ - ФСР ЛОР, то частковий розв. ЛНОР можна знайти у вигляді: $\tilde{y}(x) = \ C_1(x)\varphi_1(x) + \ldots + \ C_n(x)\varphi_n(x)$, де невідомі $C_1, \dots, C_n$ завжди можна знайти з певної системи р-нь.

40. Загальний вигляд ЛОР *n* -го порядку зі сталими коефіцієнтами та характеристичне рівняння для нього.

Загальний вигляд ЛОР *n* -го порядку зі сталими коефіцієнтами має вигляд:

$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y \quad = 0,$

де $a_0, a_1, \ldots, a_n \in R, a_n \neq 0, f \in C(< a, b >)$

Характеристичне рівняння: $P(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0 = 0$

41. Формула зсуву для лінійного диференціального оператора *n* -го порядку.

Лема про формулу зсуву для лінійного диф. оператора n–го порядку:

Якщо $\mu \in$ C, $\pi \in C^n(< a, b >)$, де P(λ) – харак. р-ня то,

$L[g(x)e^{\mu x}] = e^{\mu x}(g(x)P(\mu) + g'(x)\frac{P(\mu)}{1!} + \ldots + g^{(n)}(x)\frac{P^{(n)}(\mu)}{n!}),$ x $\in < a, b >$

42. Лема про розв'язок ЛОР *n*-го порядку зі сталими коефіцієнтами, що відповідає дійсному кореню *Л* Є *Я* характеристичного рівняння з кратністю *к =* 1.

Якщо $\boldsymbol{\lambda}$ – дійсний корінь характеристичного рівняння, то функція $e^{\lambda x}$ є дійснозначним розв'язком ЛОР

43. Лема про розв'язок ЛОР *n* -го порядку зі сталими коефіцієнтами, що відповідає комплексному кореню *λ єC* характеристичного рівняння з кратністю *к* — 1.

Якщо $\boldsymbol{\lambda} - \alpha \pm i\beta$ - пара комплексно спряжених коренів харак. р-ня, то функції $e^{ax} \cos \beta x,\ e^{ax} \sin \beta x$ є лінійно незалежними дійсно значними розвязками ЛОР

44. Лема про розв'язок ЛОР *n* -го порядку зі сталими коефіцієнтами, що відповідає дійсному кореню *λ* є *Я* характеристичного рівняння з кратністю *к* > 1.

Якщо $\boldsymbol{\lambda}$ – дійсний корінь характеристичного рівняння кратності k ≥ 2, то функція

$e^{\lambda x}, x\, e^{\lambda x}, \ldots, x^{k-1}\, e^{\lambda x}$ є лінійно незалежним дійсним розв'язком ЛОР

45. Лема про розв'язок ЛОР *n* -го порядку зі сталими коефіцієнтами, що відповідає комплексному кореню *ЛєС* характеристичного рівняння з кратністю *к* > 1.

Якщо $\boldsymbol{\lambda} - \alpha \pm i\beta$ - пара комплексно спряжених розв'язків кратності k ≥ 2 харак. р-ня, то функції $e^{ax} \cos \beta x,\ e^{ax} \sin \beta x\ ,\ xe^{ax} \cos \beta x,\ xe^{ax} \sin \beta x\ , \ldots, x^{k-1} e^{ax} \cos \beta x,\ x^{k-1} e^{ax} \sin \beta x$ є лінійно незалежними дійснозначними розвязками ЛОР

46. Теорема про вигляд часткового розв'язку ЛНОР *n*-го порядку зі сталими коефіцієнтами у випадку, коли вільний член рівняння є квазімногочленом.

Якщо вільний член рівняння ЛНОР н-го порядку з сталими коеф. має вигляд

f(x) = $e^{ax} P_m(x)$, де $P_m(x) = \ b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_1 x \quad + b_0,\ b_m \neq 0$

то існує частковий розвязок ЛНОР у вигляді $z(x) = \ x^k e^{ax} Q_m(x)$.

У формулі $Q_m(x) = q_m x^m + q_{m-1} x^{m-1} + \ldots + q_1 x \quad + q_0$

Многочлен з невідомими коефіцієнтами $q_0, \ldots, q_m$,які однозначно визначаються з деякої алгребриїчної системи рівнянь, k – кратності a як кореня характеристичного рівняння , зокрема , якщо P(a) = 0, та k = 0, якщо P(a)≠0

47. Теорема про вигляд часткового розв'язку ЛНОР *n*-го порядку зі сталими коефіцієнтами у випадку, коли вільний член рівняння є тригонометричним квазімногочленом.

Якщо вільний член ЛНОР має вигляд $f(x) = e^{ax}(P^1_{m_1}(x) \cos \beta x + \ P^2_{m_2}(x) \sin \beta x), \alpha, \beta \ \in R$

$P^1_{m_1}(x) = \ b_{m_1} x^{m_1} + \ldots + b_1 x \quad + b_0, P^2_{m_2}(x) = c_{m_2} x^{m_2} + \ldots + c_1 x \quad + c_0$

$b_{m_1}, \ldots\ b_{1,}\ b_0 \ \in R, c_{m_2}, \ldots\ c_{1,}\ c_0 \ \in R,\ b_{m_1} \ \neq 0, c_{m_2} \ \neq 0$ то існує частковий розвязок ЛНОР у вигляді $z = \ x^k e^{ax}(Q^1_m(x) cos\beta x + Q^2_m(x) sin\beta x)$. Тут Q^1_m, Q^2_m – многочлен степення m з невизначиними дійсними коефіцієнтами, які однозначно знаходяться з деякої алгебричної системии рівнянь, m = max$\{m_1, m_2\}$, k – кратність числа a+iβ як розвязку характеристичного рівняння ЛНОР, якщо $P(\alpha + i\beta) = 0$ та k=0, $P(\alpha + i\beta) \neq 0$

48. Що таке однорідне та неоднорідне рівняння Ейлера та характеристичне рівняння для нього?

Лінійне рівняння з змінними коефіцієнтами вигляду

$a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 x \quad y' + a_0 y \quad = f(x), x > 0$

Де $a_0, a_1, \ldots, a_n \in R, a_n \neq 0$ називається рівнянням Ейлера n -го порядку: однорідним при $f \equiv 0$ та неоднорідним при $f\ ! \equiv 0$

Характеристичне рівння для рівняння Ейлера:

$$a_n\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{\lambda}-\mathbf{1})\dots(\boldsymbol{\lambda}-(\boldsymbol{n}-\mathbf{1}))+\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{n}-\mathbf{1}}\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{\lambda}-\mathbf{1})\dots(\boldsymbol{\lambda}-(\boldsymbol{n}-\mathbf{2}))+\ldots+\boldsymbol{a}_{\mathbf{2}}\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{\lambda}-\mathbf{1})+\boldsymbol{a}_{\mathbf{1}}\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{a}_{\mathbf{0}}=\mathbf{0}$$

51. Загальний вигляд нормальної СЛОР та СЛНОР.

Система називається СЛОР , якщо$f_1 \equiv f_i \equiv f_n \equiv 0$ і СЛНОР у всіх інших випадках.

52. Що таке матриця, вільний член лінійної системи?

Квадратна матриця-функція $\begin{matrix} a_{11} \dots & a_{1n} \\ a_{n1} \dots & a_{nn} \end{matrix}$ назив. Матрицею системи , а вектор-фунцкія $\vec{f} = \begin{matrix} f_1 \\ f_i \\ f_n \end{matrix}$ називається вільним членом системи

53. *Теорема про існування та єдиність розв'язку задачі Коші для СЛНОР.*

Якщо $a_{ij}, f_i \in \langle a, b \rangle$; $i, j \in \langle a, b \rangle$
то для всіх,$t_0 \in \langle a, b \rangle$
та $w^0 \in \mathbb{R}$ задача Коші має єдиний розвязок визначений на всьому проміжку $\langle a, b \rangle$

54.Загальний вигляд лінійного векторного оператора 1 порядку

$$L_1\left[\overrightarrow{w^1}\,(t)\right] = \vec{w}(t) - A(t)\vec{w}(t), t \in \langle a, b \rangle$$

55. *Теорема про властивості лінійного векторного диференціального оператора 1-го порядку.*

теорема про властивості лін. Вект. Оператора :

1)

$$L_1\left[\vec{w}^1 + \vec{w}^2\right] = L_1\left[\vec{w}^1\right] + L_1[\vec{w}^2]$$

2)Якщо C — число , то

$$L_1\left[C\vec{w}^1\right] = CL_1[\vec{w}^1]$$

56. *Теорема про властивості лінійних комбінацій розв'язків СЛОР.*

Якщо $\vec{w}^1, \vec{w}^2$ - розвязки СЛОР , то $\vec{w}^1 + \vec{w}^2$- також розвязки СЛОР
Якщо $\vec{w}^1$- розвязок СЛОР , то $C\overrightarrow{w^1}$ - також розвязок СЛОР , де C — число.

57. Означення того, що функції $\boldsymbol{\vec{w}^1}, \dots, \boldsymbol{\vec{w}^n}: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R^n}$ є лінійно незалежними.
Вектор-функції $\vec{w}^1 = \vec{w}^1(t), \dots, \vec{w}^n = \vec{w}^n(t), t \in < a, b >$, називаються лінійно незалежними на $< a, b >$, якщо існують такі числа $p_1, \dots, p_n$ $(|p_1| + \dots + |p_n| \neq 0)$, що $\forall t \in \langle a, b \rangle$: $p_1\vec{w}^1(t) + \dots + p_n\vec{w}^n \neq 0$

59.Що таке визначник Вронського набору вектор-функцій $\boldsymbol{\vec{w}^1}, \dots, \boldsymbol{\vec{w}^n}: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R^n}$?
Якщо $\vec{w}^1, \dots, \vec{w}^n$ - вектор-функції на $\langle a, b \rangle$, то скалярна функція $W(t) = \det(matr[\vec{w}^1(t), \dots, \vec{w}^n(t)])$, $t \in \langle a, b \rangle$, називається визначником Вронського набору вектор-функцій $\vec{w}^1, \dots, \vec{w}^n$.

60.Теорема про властивості визначника Вронського набору вектор-функцій
Нехай $a_{ij} \in C(\langle a, b \rangle)$, $i, j = \overline{1, n}$, вектор-функції $\vec{w}^1, \dots, \vec{w}^n$ є розвязками СЛОР на $\langle a, b \rangle$, W – їхній визначник Вронського. Тоді такі твердження еквівалентні:

1) $\vec{w}^1, \dots, \vec{w}^n$ - лінійно-залежні вектор-функції на $\langle a, b \rangle$.
2) $W \equiv 0$ на $\langle a, b \rangle$.
3) $\exists\, \hat{t} \in \langle a, b \rangle$: $W(\hat{t}) = 0$.

61.Загальний вигляд матричного рівняння?
$\dot{Y}(t) = \mathrm{A(t)Y(t)}$, $t \in \langle a, b \rangle$, де $Y(t) = matr[\vec{w}^1(t), \dots, \vec{w}^n(t)]$ – невідома матриця функція. $\dot{Y}(t) = matr\left[\vec{w}^1(t), \dots, \vec{w}^n(t)\right] = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[Y(t + h) - Y(t)]$.

62.Означення розв’язку матричного рівняння?

Матриця - функція $Y = \gamma(t)$ називається розвязком матричного рівняння на проміжку $\langle a,b\rangle$, якщо

1) елементи матриці γ належать простору $C^1(\langle a,b\rangle)$;

2) $\forall t \in \langle a,b\rangle : \dot{\gamma}(t) = A(t)\gamma(t).$

63. Що таке фундаментальна система розв’язків СЛОР?

Набір вектор-функцій $\vec{w}^1, \dots, \vec{w}^n$ називатимемо фундаментальною системою розвязків(ФСР) СЛОР на $\langle a,b\rangle$, якщо:

1) $\vec{w}^1, \dots, \vec{w}^n$ – розвязки СЛОР на $\langle a,b\rangle$

2) вектор-функції $\vec{w}^1, \dots, \vec{w}^n$ – лінійно-незалежні на $\langle a,b\rangle$

64.Що таке фундаментальна матриця СЛОР?

1.Матриця-функція $\Phi = \Phi(t) = matr[\vec{w}^1(t), \dots, \vec{w}^n(t)], t \in \langle a,b\rangle$, називається фундаментальною матрицею (ФМ) СЛОР якщо $\vec{w}^1(t), \dots, \vec{w}^n(t)$ є ФСР СЛОР на $\langle a,b\rangle$.

2. Фундаментальною матрицею(ФМ) СЛОР на проміжку $\langle a,b\rangle$ називається розвязок $Y = \Phi(t)$ матричного рівняння на $\langle a,b\rangle$ який задовольняє умову $\forall t \in \langle a,b\rangle$: $\det \Phi(t) \neq 0$

65. Теорема про існування фундаментальної матриці СЛОР.

Якщо $a_{ij} \in C(\langle a,b\rangle)$, $i,j = \overline{1,n}$, то СЛОР має на проміжку $\langle a,b\rangle$ має безліч ФСР(чи ФМ).

66. Яка структура загального розв'язку СЛОР?

Теорема. Нехай $a_{ij} \in C(\langle a,b\rangle)$, $i,j = \overline{1,n}$. Якщо $\Phi = \Phi(t)$ є ФМ СЛОР на $\langle a,b\rangle$, то формула $\vec{w} = \Phi(t)\vec{C}, t \in \langle a,b\rangle$, де $\vec{C} = colon(C_1, \dots, C_n) \in R^n$, задає загальний розвязок СЛОР.

67. Яка структура загального розв'язку СЛНОР?

Теорема. Нехай $a_{ij} \in C(\langle a,b\rangle)$, $i,j = \overline{1,n}$. Якщо $\Phi = \Phi(t)$ є ФМ СЛОР на $\langle a,b\rangle$, $\vec{z}$ – частковий розвязок СЛНОР, то формула $\vec{w} = \Phi(t)\vec{C} + \vec{z}(t), t \in \langle a,b\rangle$, де $\vec{C} = colon(C_1, \dots, C_n) \in R^n$, задає загальний розвязок СЛОР.

68. Теорема про метод варіації сталих для СЛНОР

Нехай $a_{ij} \in C(\langle a,b\rangle)$, $i,j = \overline{1,n}$. Якщо матриця-функція $\Phi = \Phi(t)$ є ФМ СЛОР, то частковий розвязок неоднорідної системи можна знайти у вигляді $\vec{z}(t) = \Phi(t)\vec{C}(t), t \in \langle a,b\rangle$, де $\vec{C}(t) = colon\big(C_1(t), \dots, C_n(t)\big)$ - деяка вектор функція.

69. Загальний вигляд СЛОР зі сталими коефіцієнтами та її характеристичного рівняння.

$\dot{\vec{w}}$(t) = A$\vec{w}$(t) - СЛОР

det *(A- λ E) = 0 - характеристичне рівняння*

70.Який вигляд має розв’язок СЛОР зі сталими коефіцієнтами, що відповідає дійсному власному значенню ЛеЯ матриці цієї системи коли алгебрична та геометрична кратності співпадають і дорівнюють 1 ?

$$w_j = C_j \gamma^j e^{\lambda_j t}$$

71.Який вигляд має розв’язок СЛОР зі сталими коефіцієнтами, що відповідає дійсному власному значенню Л є Я матриці цієї системи коли алгебрична та геометрична кратності не співпадають?

$$w_j = \left[\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} t^{k-m} + \dots + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}\right] e^{\lambda_j t}$$

72.Який вигляд має розв’язок СЛОР зі сталими коефіцієнтами, що відповідає комплексному власному значенню Л єС матриці цієї системи коли алгебрична і геометрична кратності рівні 1?

$$w_j = C_1^j \operatorname{Re}\left(\gamma^j e^{(\alpha_j + i\beta_j)t}\right) + C_2^j \operatorname{Im}\left(\gamma^j e^{(\alpha_j + i\beta_j)t}\right)$$

73.Теорема про вигляд часткового розв'язку СЛНОР зі сталими коефіцієнтами у випадку, коли вільний член рівняння є векторним квазімногочленом.

Якщо вільний член СЛНОР має вигляд $\vec{f}(t) = e^{\alpha t}\,\vec{P}_m(t)$, де $\alpha \in R$, $\vec{P}_m$ - вектор, координатами якого є многочлени степеня m ,то існує частковий розв"язок СЛНОР у вигляді :

$$\vec{z}(t) = e^{\alpha t}\vec{Q}_{m+k}(t) ,$$

де k- алгебраїчна краність α ,якщо α - корінь характеристичного рівняння, k =0 ,якщо α - не корінь характеристичного рівняння, $\vec{Q}_{m+k}(t)$ - вектор-многочлен степеня m + k з невідомими коефіцієнтами

74.Теорема про вигляд часткового розв'язку СЛНОР зі сталими коефіцієнтами у випадку, коли вільний член рівняння є векторним тригонометричним квазімногочленом.

Якщо вільний член СЛНОР має вигляд $\vec{f}(t) = e^{\alpha t}\left(\vec{P}^1_{m_1}(t)\cos\beta t + \vec{P}^2_{m_2}(t)\sin\beta t\right)$, де $\alpha, \beta \in R$,

$\vec{P}^1_{m_1}(t)$ - векторний многочлен степеня m_1, $\vec{P}^2_{m2}(t)$ - вектор многочлен степеня m_2, то існує частковий розв"язок СЛНОР у вигляді :

$$\vec{z} = e^{\alpha t}\left(\vec{Q}^1_{m+k}(t)\cos\beta t + \vec{Q}^2_{m+k}(t)\sin\beta t\right) ,$$

де k – алгебраїчна кратність $\alpha + i\beta$, якщо $\alpha + i\beta$ - власне значення A, k=0 ,якщо $\alpha + i\beta$ - не є власним значенням A, m = max{m_1, m_2}, $\vec{Q}^1{}_{m+k}(t)$, $\vec{Q}^2{}_{m+k}(t)$ - вектор многочлен степеня m + k з невідомими коефіцієнтами