Іспит з диференціальних рівнянь
студента групи ПМІ-23
Солдиського Андрія

$\boxed{A}$ $y' = (9x+y)^2 \qquad y(0)=0$

$v = 9x+y \qquad v(x)' = y'(x)+9$

$y' = v'-9 = v^2 \Rightarrow v' = v^2+9$

$\int \frac{dv}{v^2+9} = \int dx \Rightarrow \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{v}{3} = x+C \quad , C\in\mathbb{R}$

$\frac{v}{3} = tg(3x+c) \Rightarrow v = 3tg(3x+c) = 9x+y \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{y = 3tg(3x+c) - 9x}$

Задача Коші: $y(0) = 3tg\,C = 0 \Rightarrow C = n\pi, n\in\mathbb{Z}$

$y = 3tg(3x+n\pi) - 9x = 3tg(3x) - 9x$

Відповідь: $y = 3tg(3x) - 9x$

$\boxed{В}$ $(xy'-3)\ln x = 2y \qquad y(e)=2$

$$x\ln x\cdot y' - 3\ln x = 2y$$

$$y' - \frac{2}{x\ln x}y = \frac{3}{x}$$

1. Розв'язуємо лінійне однорідне рівняння:

$$y' - \frac{2}{x\ln x}y = 0$$

$$y' = \frac{2}{x\ln x}y \Rightarrow \int\frac{dy}{y} = \int\frac{2\,dx}{x\ln x} \quad \text{або} \quad (y=0)$$

$$\int\frac{dy}{y} = 2\int\frac{d\ln x}{\ln x} \Rightarrow \ln|y| = 2\ln|\ln x| + \ln|C| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{y_0 = C\ln^2 x} \quad (y_0=0 \text{ досягається при } C=0)$$

2. Шукаємо частковий розв'язок лін. неодн. р-ня:

$$y_* = \alpha(x)\cdot\ln^2 x \qquad \alpha'(x) = \frac{b(x)}{\varphi(x)} = \frac{3}{x\ln^2 x}$$

$$\alpha(x) = \int\frac{3\,dx}{x\ln^2 x} = 3\int\frac{d\ln x}{\ln^2 x} = -3\frac{1}{\ln x} = -\frac{3}{\ln x}$$

$$y_* = \alpha(x)\cdot\ln^2 x = -\frac{3}{\ln x}\cdot\ln^2 x = -3\ln x$$

3. Загальний розв'язок (сума розв'язку ЛОР і часткового)

$$y = y_0 + y_* = C\ln^2 x - 3\ln x$$

4. Задача Коші

$$y(e) = C\ln^2 e - 3\ln e = C - 3 = 2 \Rightarrow C = 5$$

$$y = 5\ln^2 x - 3\ln x = \ln x(5\ln x - 3)$$

Відповідь: $y = \ln x(5\ln x - 3)$

$\boxed{C}$

$$y + \frac{1}{2}y'^2 = (x+1)y'$$

$$y = xy' + \left(y' - \frac{1}{2}y'^2\right)$$

Параметр: $p = y'$ $\quad dy = p\,dx$

$$y = xp + p - \frac{p^2}{2}$$

$$dy = p\,dx + x\,dp + (1-p)\,dp$$

$$0 = (1 - p + x)\,dp$$

$1 - p + x = 0$

$p = x + 1$

$\cancel{y' = x+1}$

$\cancel{dy = (x+1)dx}$

$\cancel{y = \frac{x^2}{2} + x + C}$

$x = p - 1$

$$y = p^2 - p + p - \frac{p^2}{2} = \frac{p^2}{2} = \frac{(x+1)^2}{2} = \frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{2}$$

$dp = 0 \Rightarrow p = C$

$$y = Cx + C - \frac{C^2}{2}$$

Відповідь:

$$\begin{cases} y = Cx + C - \frac{C^2}{2} \\ y = \frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{2} \end{cases}$$ – особливий розвʼязок

$\boxed{D}$ $y''-7y'+10y=16e^x$, $y(0)=4$ $y'(0)=4$

1. Розв'язуємо (лін. однр. р-ня):

$y''-7y'+10y=0$

$\lambda^2-7\lambda+10=0$ – Характеристичний многочлен

$(\lambda-5)(\lambda-2)=0$

$\lambda_1=2$ $\lambda_2=5$

ФСР: $y_1=e^{2x}$ $y_2=e^{5x}$

Загальний розв'язок (лін. комбінація y_1 і y_2):

$y_0=C_1e^{2x}+C_2e^{5x}$, $C_1, C_2 \in R$

2. Частковий розв'язок

λ_1	λ_2	μ	r	s
2	5	1	0	0

$y_* = ae^x$

$y_*''-7y_*'+10y_*=16e^x \Rightarrow ae^x-7ae^x+10ae^x=16e^x$

$4a=16 \Rightarrow a=4 \Rightarrow \underline{y_*=4e^x}$

3. Загальний розв'язок (лін. неодн. р-ня):

$y=y_0+y_* = C_1e^{2x}+C_2e^{5x}+4e^x$

4. Задача Коші:

$\begin{cases} y(0)=4 \\ y'(0)=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y(0)=C_1+C_2+4=4 \\ y'(0)=2C_1+5C_2+4=4 \end{cases}$ $\begin{cases} C_1+C_2=0 \\ 2C_1+5C_2=0 \end{cases}$ $\begin{cases} C_1= \\ C_2= \end{cases}$

Відповідь: $y=4e^x$

E $\begin{cases} \dot{x}_1 = 3x_1 - x_2 - 1 \\ \dot{x}_2 = 13x_1 - x_2 - 11 \end{cases}$ $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 13 & -1 \end{pmatrix}$ $b(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ -11 \end{pmatrix}$

$\det(A - \lambda E) = \lambda^2 - 2\lambda + 10 = 0$

$D < 0 \Rightarrow$ $\lambda_1 + \lambda_2 = 2\alpha = 2 \Rightarrow \alpha = 1$

$\lambda_1 = \alpha + i\beta$ $\lambda_1\lambda_2 = |\lambda_1|^2 = \alpha^2 + \beta^2 = 10$

$\lambda_2 = \alpha - i\beta$ $\beta = \pm 3$

$\underline{\lambda_1 = 1 + i \cdot 3}$ $\underline{\lambda_2 = 1 - i3}$

$\underline{\lambda_1 = \overline{\lambda_2}}$

Розвʼязуємо однорідну систему:

1. $\lambda_1 = 1 + 3i$

$$\begin{pmatrix} 2-3i & -1 \\ 13 & -2-3i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow (2-3i)\alpha = \beta \quad \underline{h = \begin{pmatrix} 1 \\ 2-3i \end{pmatrix}}$$

$$\varphi(t) = e^{(1+3i)t}\begin{pmatrix} 1 \\ 2-3i \end{pmatrix} = e^t(\cos 3t + i\sin 3t)\begin{pmatrix} 1 \\ 2-3i \end{pmatrix} =$$

$$= e^t\begin{pmatrix} \cos 3t + i\sin 3t \\ 2\cos 3t + 3\sin 3t + i(2\sin 3t - 3\cos 3t) \end{pmatrix}$$

$$\varphi_1(t) = \operatorname{Re}\varphi(t) = e^t\begin{pmatrix} \cos 3t \\ 2\cos 3t + 3\sin 3t \end{pmatrix}$$

$$\varphi_2(t) = \operatorname{Im}\varphi(t) = e^t\begin{pmatrix} \sin 3t \\ 2\sin 3t - 3\cos 3t \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_{1o} \\ x_{2o} \end{pmatrix} = c_1 e^t\begin{pmatrix} \cos 3t \\ 2\cos 3t + 3\sin 3t \end{pmatrix} + c_2 e^t\begin{pmatrix} \sin 3t \\ 2\sin 3t - 3\cos 3t \end{pmatrix} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} x_{1o} = e^t(c_1\cos 3t + c_2\sin 3t) \\ x_{2o} = e^t(c_1(2\cos 3t + 3\sin 3t) + c_2(2\sin 3t - 3\cos 3t)) \end{cases}$$

2. Частковий розвʼязок неоднорідної системи:

λ_1	λ_1	μ	r	s
$1+3i$	$1-3i$	0	0	0

$$\begin{cases} x_{1*}(t) = a \\ x_{2*}(t) = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 3a - b - 1 \\ 0 = 13a - b - 11 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$$

$X_{1*}(t) = 1 \qquad X_{2*}(t) = 2$

3. Загальний розв'язок сума однор. і частного:

$X = X_0 + X_*$

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{10} \\ X_{20} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X_{1*} \\ X_{2*} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = c_1 e^t \begin{pmatrix} \cos 3t \\ 2\cos 3t + 3\sin 3t \end{pmatrix} + c_2 e^t \begin{pmatrix} \sin 3t \\ 2\sin 3t - 3\cos 3t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Відповідь:

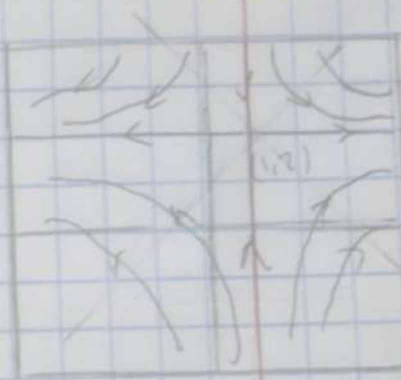
$$\begin{cases} x_1 = e^t(c_1 \cos 3t + c_2 \sin 3t) + 1 \\ x_2 = e^t\left((2c_1 - 3c_2)\cos 3t + (3c_1 + 2c_2)\sin 3t\right) + 2 \end{cases}$$

F

$$\begin{cases} \dot{x} = (x-1)(y-1) \\ \dot{y} = (x-2)(y-2) \end{cases}$$

1. Особливі точки

$$\begin{cases} (x-1)(y-1)=0 \\ (x-2)(y-2)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1,2) \\ (2,1) \end{cases} \text{ - особливі точки}$$



2. $$\begin{cases} \dot{x} = xy - x - y + 1 = f_1(x,y) \\ \dot{y} = xy - 2x - 2y + 4 = f_2(x,y) \end{cases}$$

• $(1,2)$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(1,2)}{\partial x} & \frac{\partial f_1(1,2)}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(1,2) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(1,2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = u_1 \\ \dot{u}_2 = -u_2 \end{cases}$$

$$\boxed{\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = -1 \quad h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad h_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

сідло A3-A4

• $(2,1)$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda E) = \lambda^2 + 1 = 0$$

$$\boxed{\lambda_1 = i \quad \lambda_2 = -i \quad h = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}}$$

центр