Домашнє завдання 5.
студентки групи ПМО-21
Кравець Ольги
З збірника Філіппова

№511.

$$y'' + y' - 2y = 0$$

Характеристичний многочлен: $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$

Корені характеристичного многочлена: $\lambda_1 = 1; \ \lambda_2 = -2$

ФСР $\lambda_k \longmapsto e^{\lambda_k x}$; $\quad \lambda_1 = 1 \rightsquigarrow y_1 = e^x$

$\lambda_2 = -2 \rightsquigarrow y_2 = e^{-2x}$

Загальний розв'язок лінійного однорідного р-ня:

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-2x}$$

№512.

$$y'' + 4y' + 3y = 0$$

Характеристичний многочлен: $\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0$

Корені характерист. многочлена: $\lambda_1 = -1; \ \lambda_2 = -3$

$\lambda_1 = -1 \rightsquigarrow y_1 = e^x$

$\lambda_2 = -3 \rightsquigarrow y_2 = e^{-3x}$

Загал. розв. лін. однор. р-ня: $y = c_1 e^x + c_2 e^{-3x}$

№513.

$$y'' - 2y' = 0$$

Характерист. многочлен: $\lambda^2 - 2\lambda = 0; \ \lambda(\lambda - 2) = 0$

Корені хар. многочлена: $\lambda_1 = 2; \ \lambda_2 = 0$

$\lambda_1 = 2 \rightsquigarrow y_1 = e^{2x}$

$\lambda_2 = 0 \rightsquigarrow y_2 = e^{0 \cdot x} = 1$

Зал. розв. лін. однор. р-ня: $y = c_1 e^{2x} + c_2$

N514.

$2y'' - 5y' + 2y = 0$

Характерист. многочлен: $2\lambda^2 - 5\lambda + 2 = 0$; $(\lambda - 2)(2\lambda - 1) = 0$

Корені хар. многочл.: $\lambda_1 = 2$; $\lambda_2 = \frac{1}{2}$

$\lambda_1 = 2 \rightsquigarrow y = e^{2x}$

$\lambda_2 = \frac{1}{2} \rightsquigarrow y = e^{\frac{x}{2}}$

Зал. розв. лін. однор. р-ня: $\boxed{y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{x/2}}$

N515.

$y'' - 4y' + 5y = 0$

Характ. многочлен: $\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$

$D = 16 - 4 \cdot 5 = -4$

$\sqrt{D} = \sqrt{-4} = 2i$

$\lambda_1 = \frac{4 - 2i}{2} = 2 - i$

$\lambda_2 = \frac{4 + 2i}{2} = 2 + i$

$\lambda_1 = \overline{\lambda_2}$

ФСР (комплексна): $z_1 = e^{(2-i)x}$, $z_2 = e^{(2+i)x}$

Будуємо дійснозначну ФСР:

$z_1 = u + iv \rightsquigarrow y_1 = u = \operatorname{Re} z_1$, $y_2 = v = \operatorname{Im} z_1$

$z_1 = e^{2x - ix} = e^{2x} \cdot e^{-ix}$

$z_2 = e^{2x + ix} = e^{2x} \cdot e^{ix}$

$z = e^{2x} \cdot e^{-ix} + e^{2x} \cdot e^{ix} = e^{2x}(\cos x - i\sin x) + e^{2x}(\cos x + i\sin x) =$

$= e^{2x}(\sin x + \cos x)$

$y_1 = e^{2x}\sin x$; $y_2 = e^{2x}\cos x$

$y = c_1 e^{2x}\sin x + c_2 e^{2x}\cos x = e^{2x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x)$

$\boxed{y = e^{2x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x)}$

N516.

$y'' + 2y' + 10y = 0$

$P(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 10$

$\lambda^2 + 2\lambda + 10 = 0$

$D = 4 - 40 = -36$

$\sqrt{D} = \sqrt{-36} = 6i$

$\lambda_1 = -\dfrac{2 + 6i}{2} = -1 + 3i$

$\lambda_2 = -\dfrac{2 - 6i}{2} = -1 + 3i$

$\lambda_1 = \overline{\lambda_2} \quad ; \quad k = 1$

$y_1 = \dfrac{\sin 3x}{e^x} \; ; \; y_2 = \dfrac{\cos 3x}{e^x}$

Загал. розв'язок:

$$y = \dfrac{c_1 \sin 3x}{e^x} + \dfrac{c_2 \cos 3x}{e^x}$$

N523.

$4y'' + 4y' + y = 0$

$P(\lambda) = 4\lambda^2 + 4\lambda + 1 = 0$

$(2\lambda + 1)^2 = 0$

$\lambda = -\dfrac{1}{2}$

$\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = -\dfrac{1}{2}$ — корінь кратності 2

ФСР: $y_1 = e^{-\frac{1}{2}x} , y_2 = e \cdot x \cdot e^{-\frac{1}{2}x}$

Загальний розв'язок:

$$y = (c_1 + c_2 x) e^{-\frac{1}{2}x}$$

№524.

$$y^{V} - 6y^{IV} + 9y''' = 0$$

$$P(\lambda) = \lambda^5 - 6\lambda^4 + 9\lambda^3 = 0$$

$$\lambda^3(\lambda^2 - 6\lambda + 9) = 0$$

Корені: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0,\quad \lambda_4 = \lambda_5 = 3;$

$\lambda = 0$ - корінь кратності 3

$\lambda = 3$ - корінь кратності 2

ФСР: $\quad y_1 = y_2 = y_3 = c_1 + c_2 x + c_3 x^2$

$$y_4 = y_5 = (C_4 x + C_5)e^{3x}$$

Загальний розв'язок:

$$y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 x e^{3x} + C_5 e^{3x}$$

№525.

$$y^{V} - 10y''' + 9y' = 0$$

$$P(\lambda) = \lambda^5 - 10\lambda^3 + 9\lambda = 0$$

$$\lambda(\lambda^4 - 10\lambda^2 + 9) = 0$$

$$\lambda(\lambda^2 - 1)(\lambda^2 - 9) = 0$$

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_{2,3} = \pm 1, \quad \lambda_{4,5} = \pm 3$$

ФСР: $y_1 = 1, \quad y_2 = e^x, \quad y_3 = e^{-x}, \quad y_4 = e^{3x}, \quad y_4 = e^{-3x}$

Загал. розв.:

$$y = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^x + C_4 e^{3x} + C_5 e^{-3x}$$

№526.

$$y^{IV} + 2y'' + y = 0$$

$$P(\lambda) = \lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0$$

$$(\lambda^2 + 1)^2 = 0; \quad \lambda_{1,2,3,4} = \pm i \quad - \text{корінь кратності } 2$$

ФСР: $y_1 = \sin x, \quad y_2 = x\sin x, \quad y_3 = \cos x, \quad y_4 = x\cos x$

Загал. розв.:

$$y = (C_1 + x C_2)\sin x + (C_3 + x C_4)\cos x$$

№ 533.

$$y'' - 2y' - 3y = e^{4x}$$

Лінійне неоднорідне рівняння:

$$y'' - 2y' - 3y = e^{4x}$$

Лінійне однорідне рівняння:

$$y'' - 2y' - 3y = 0$$

$P(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0 \rightsquigarrow (\lambda - 3)(\lambda + 1) = 0 \rightsquigarrow \lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = -1$

$\lambda_1 = 3 \rightsquigarrow y_1 = e^{3x}$

$\lambda_2 = -1 \rightsquigarrow y_2 = e^{x}$

$y_0 = c_1 e^{3x} + c_2 e^{x}$ — загал. розв. однор. р-ня

λ_1	λ_2	μ	r	s
3	-1	4	0	0

$y_* = a e^{4x} \rightsquigarrow y'' - 2y' - 3y = e^{4x}$

$16 a e^{4x} - 8 a e^{4x} - 3 a e^{4x} \equiv e^{4x}$

$16 - 8 - 3 = 1 \rightsquigarrow a = \dfrac{1}{5} \rightsquigarrow y_* = \dfrac{e^{4x}}{5}$

Загал. розв. лін. неоднор. р-ня:

$$y = y_* + y_0 = c_1 e^{3x} + c_2 e^{x} + \frac{e^{4x}}{5}$$

$$y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{x} + \frac{e^{4x}}{5}$$

№534.

$$y'' + y = 4xe^x$$

Однор. р-ня: $y'' + y = 0$

$$P(\lambda) = \lambda^2 + 1 = 0; \quad \lambda = \pm i; \quad \rightsquigarrow \begin{array}{l} \lambda_1 = i \\ \lambda_2 = -i \end{array} \rightrightarrows \begin{array}{l} y_1 = \sin x \\ y_2 = \cos x \end{array}$$

$$y_0 = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

Частковий розв. неоднор. р-ня:

λ_1	λ_2	M	r	s
i	$-i$	1	0	1

$$\rightsquigarrow y_* = e^x(ax + b) \rightsquigarrow e^x ax + e^x b$$

$$y'_* = ae^x + (ax + b)e^x = e^x(ax + b + a)$$

$$y''_* = ae^x + e^x(ax + a + b) = e^x(ax + b + 2a)$$

$$y'' + y' = 4xe^x \quad \rightsquigarrow \quad e^x(2ax + 2b + 2a) = 4xe^x \Big| \cdot \frac{1}{e^x}$$

$$2ax + 2b + 2a = 4x$$

$$\begin{cases} 2a = 4 \\ 2a + 2b = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} a = 2, \\ b = -2 \end{cases}$$

$$y_* = (2x - 2)e^x$$

Загал. розв. неоднор. р-ня є сумою загал. розв. однор. і часткового розв. неоднор.:

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + 2(x - 1)e^x$$

№535.

$y'' - y = 2e^x - x^2$

Однор. р-ня: $y'' - y = 0$

$P(\lambda) = \lambda^2 - 1 = 0 \rightsquigarrow (\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0 \rightsquigarrow \lambda_1 = 1 \rightsquigarrow y_1 = e^x$
$\lambda_2 = -1 \rightsquigarrow y_2 = e^x$

$y_0 = c_1 e^x + c_2 \cdot e^{-x}$

Частковий розв. неоднор. р-ня:

λ_1	λ_2	μ	r	s
1	-1	1	0	0

$\rightsquigarrow y_* = x^s e^{\lambda x}$

$y'' - y = 2e^x$

$y'' - y = -x^2$

$y_1 = a_0 x e^x, \quad y_2 = b_0 x^2 + b_1 x + b_2$

$2 a_0 e^x \equiv 2 e^x$

$2b_0 - b_0 x^2 - b_1 x - b_2 \equiv -x^2$

$\rightsquigarrow$
$a_0 = 1 \qquad 2b_0 - b_2 = 0$
$b_0 = 1 \qquad b_2 = 2$
$-b_1 = 0$
$y_1 = x e^x, \quad y_2 = x^2 + 2$

$y_* = x e^x + x^2 + 2$

Загал. розв. неоднор. р-ня:

$y = x e^x + c_1 e^x + c_2 e^{-x} + x^2 + 2$

№536.

$$y'' + y' - 2y = 3xe^x$$

Лінійне однорід. рння: $y'' + y' - 2y = 0$

$P(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \rightsquigarrow \lambda_1 = -2 \rightsquigarrow y_1 = e^{-2x}$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \lambda_2 = 1 \rightsquigarrow y_2 = e^x$

$$y_0 = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x$$

Частковий розв. неоднор. р-ня

$y_* = y_{*1} + y_{*2};$

$y_* = e^x ax + xe^x bx$

$y' = e^x ax + e^x a + 2xe^x b + e^x x^2 b$

$y'' = e^x ax + e^x a + e^x a + 2e^x b + 2xe^x b + 2xe^x b + e^x x^2 b =$

$\quad = e^x ax + 2e^x a + 2e^x b + 4xe^x b + e^x x^2 b$

$e^x ax + 2e^x a + 2e^x b + 4xe^x b + e^x x^2 b + e^x ax + e^x a + 2xe^x b +$

$\quad + e^x x^2 b + 2e^x ax + 2xe^x bx = 3xe^x \;/\; \dfrac{1}{e^x}$

$3a + 2b + 4xb + 2xb = 3x$

$6bx + 3a + 2b = 3x$

$\begin{cases} 6b = 3 \\ 3a + 2b = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} b = \dfrac{1}{2} \\ a = -\dfrac{1}{3} \end{cases}; \quad y_* = \left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{3}\right) xe^x$

$$y_* = e^x \left(\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x}{3}\right);$$

Загальний розв.:

$y = y_0 + y_* = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x + e^x \left(\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x}{3}\right)$

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x + e^x \left(\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x}{3}\right)$$

№537.

$$y'' - 3y' + 2y = \sin x$$

Однор. р-ня: $y'' - 3y' + 2y = 0$

$P(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \rightsquigarrow \begin{matrix} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 2 \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{matrix} y_1 = e^x \\ y_2 = e^{2x} \end{matrix}$

$$y_0 = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$$

Частковий розв неоднор р-ня:

$y_* = a\cos x + b\sin x$

$y_*' = -a\sin x + b\cos x$

$y_*'' = -a\cos x - b\sin x$; $y'' - 3y' + 2y = \sin x \rightsquigarrow$

$\rightsquigarrow -a\cos x - b\sin x + 3a\sin x - 3b\cos x + 2a\cos x + 2b\sin x = \sin x$

$a\cos x + b\sin x + 3a\sin x - 3b\cos x = \sin x$

$\begin{cases} a - 3b = 0 \\ b + 3a = 1 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} a = 3b \\ b + 9b = 1 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} a = 3b \\ 10b = 1 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} a = \frac{3}{10} = 0,3 \\ b = \frac{1}{10} = 0,1 \end{cases}$

$$y_* = 0,3\cos x + 0,1\sin x$$

Загал. розв.:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + 0,3\cos x + 0,1\sin x$$

N582.

$$y'' - 2y' + y = 0$$
$$y(2) = 1$$
$$y'(2) = -2$$

Лінійне однор. р-ня: $y'' - 2y' + y = 0$

$P(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \;\Rightarrow\; (\lambda - 1)^2 = 0, \qquad \lambda_{1,2} = 1$

$y = (c_1 + c_2 x)e^x = c_1 e^x + x e^x c_2$

$y' = c_1 e^x + c_2 e^x + x e^x c_2 \;;\quad x = 2; \; y = 1; \; y' = -2 :$

$1 = c_1 e^2 + 2 e^2 c_2$

$-2 = c_1 e^2 + c_2 e^2 + 2 e^2 c_2 \quad ^{= 3e^2 c_2}$

$3 = 2e^2 c_2 - c_2 e^2 - 2 e^2 c_2 = -c_2 e^2$

$c_2 = -3 e^{-2}$

$c_1 e^2 = 1 + 2 e^2 3 e^{-2} = 1 + 6 = 7$

$c_1 = 7 e^{-2}$

$y = e^{-2}(7 - 3x)e^x = (7 - 3x)e^{x-2}$

$$\boxed{y = 7 e^{x-2} - 3x e^{x-2}}$$

N583.

$$y'' + y = 4e^x$$
$$y(0) = 4$$
$$y'(0) = -3$$

Лін. однор. р-ня: $y'' + y = 0; \quad \lambda^2 + 1 = 0; \quad \lambda_{1,2} = \pm i$

$y_0 = c_1 \cos x + c_2 \sin x$

Частковий розв. лін. неоднор. р-ня: $y_* = a e^x;$

$y'' = a e^x \;;\quad 2a e^x = 4 e^x / : e^x$

$2a = 4$

$a = 2 \;\Rightarrow\; y_* = 2 e^x$

Загал. розв.: $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + 2 e^x$

$x = 0; \; y = 4; \; y' = -3 :\quad \begin{cases} 4 = c_1 + 2 \\ -3 = c_1 + 2 \end{cases} \Rightarrow c_1 = -5; \; c_2 = 2 \;;\quad y = -5\sin x + 2\cos x + 2e^x$

N 584.

$$y'' - 2y' = 2e^x$$
$$y(1) = -1$$
$$y'(1) = 0$$

Лін. однор. р-ня: $y'' - 2y' = 0$

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda = 0$$

$$\lambda(\lambda - 2) = 0 \implies \lambda_1 = 0, \ \lambda_2 = 2$$

$$y_0 = C_1 + C_2 e^{2x}$$

Частковий розв. лін. неоднор. р-ня:

$$y_* = a e^x$$
$$y' = a e^x$$
$$y'' = a e^x$$

$$-a e^x = 2e^x \implies a = -2 \implies y_* = -2e^x$$

Загал. розв.:

$$y = C_1 + C_2 e^{2x} - 2e^x$$

$$y' = 2C_2 e^{2x} - 2e^x$$

$x = 1$

$y = -1$

$y' = 0$

$$\begin{cases} -1 = C_1 + C_2 e^2 - 2e \\ 0 = 2C_2 e^2 - 2e \end{cases} \implies \begin{array}{l} C_2 = \dfrac{1}{e} \\ C_1 = e - 1 \end{array}$$

$$2C_2 e^2 = 2e$$
$$C_2 e^2 = e$$
$$C_2 = \frac{e}{e^2} = \frac{1}{e}$$

$$y = e - 1 + \frac{e^{2x}}{\frac{1}{e}} - 2e^x = e - 1 + e^{2x-1} - 2e^x$$

$$\boxed{y = e - 1 + e^{2x-1} - 2e^x}$$