Питання 9
Завершено
Балів 2,0 з 2,0
Відмітити питання

- Систему диференціальних рівнянь $\dot{x} = f(t, x)$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, називаємо ***динамічною системою***, якщо
  - її права частина $f$ не залежить від шуканих функцій $x_1, \ldots, x_n$;
  - її права частина $f$ динамічно змінюється з часом;
  - її права частина $f$ не залежить явно від часу $t$;
  - її права частина $f$ є сталою вздовж розв'язків.

- ***Особливою точкою*** динамічної системи $\dot{x} = f(x)$ називаємо таку точку $x_0$, в якій
  - векторне поле $f$ обертається в нуль;
  - векторне поле $f$ відмінне від нуля;
  - перетинаються траєкторії;
  - векторне поле $f$ є сталим.

Питання 10
Завершено
Балів 0,0 з 2,0
Відмітити питання

Гамільтоновою системою з гамільтоніаном $H = H(x, y)$ називаємо динамічну систему вигляду

Виберіть одну відповідь:
- $\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial x}, \quad \dot{y} = \frac{\partial H}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial x}$
- $\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y}, \quad \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x}$
- $\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y}, \quad \dot{y} = \frac{\partial H}{\partial x}$
- $\dot{x} = -\frac{\partial H}{\partial y}, \quad \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x}$

Питання **11**

Завершено

Балів 4,5 з 5,0

Відмітити питання

## Завдання А

### Завдання вимагає повного письмового розв'язку

---

Знайдіть розв'язок задачі Коші $y' = (9x+y)^2, \;\; y(0) = 0.$

---

1. Диференціальне рівняння в цьому завданні – це
   - рівняння із відокремленими змінними;
   - однорідне рівняння;
   - рівнянням Бернуллі;
   - рівняння, жодного з перелічених вище типів.
2. Рівняння можна звести до рівняння із відокремленими змінними, застосувавши заміну
   - $v = y/x$;
   - $v = 9x + y$;
   - $v = 9x - y$;
   - $y' = v^2$.
3. Загальний розв'язок диференціального рівняння має вигляд
   - $y = 3\mathrm{tg}\, 3x + C$;
   - $y = C\cos 3x + 3x$;
   - $y = 3\mathrm{tg}\,(3x + C) - 9x$;
   - $y = \ln(3x + C) - 3x$.
4. Розв'язком задачі Коші є функція
   - $3\mathrm{tg}\, 3x - 9x$;
   - $3\mathrm{tg}\, 3x$;
   - $\ln(3x + 2) - 3x$;
   - $9x$.

Питання 12

Завершено

Балів 4,0 з 5,0

Відмітити питання

## Завдання В

### Завдання вимагає повного письмового розв'язку

---

Розв'язати задачу Коші $(xy' - 3)\ln x = 2y, \quad y(e) = 2.$

---

1. Якщо лінійне неоднорідне рівняння в цьому завданні записати у стандартному вигляді $y' + a(x)y = b(x)$, то права частина матиме вигляд
   - $b(x) = \ln x;$
   - $b(x) = \frac{3}{x};$
   - $b(x) = x \ln x;$
   - $b(x) = \frac{x}{3}.$
2. Загальний розв'язок відповідного лінійного однорідного рівняння є таким
   - $y_0 = C\ln^2 x;$
   - $y_0 = C\ln x;$
   - $y_0 = \ln x + C;$
   - $y_0 = C\ln|\ln x|.$
3. Загальний розв'язок неоднорідного рівняння має вигляд
   - $y = C\ln x + 3\ln^2 x;$
   - $y = C\ln^2 x - 3\ln x;$
   - $y = \ln x + C + 2\ln|\ln x|;$
   - $y = C\ln|\ln x| - 2x.$
4. Розв'язком задачі Коші є функція
   - $5\ln^2 x;$
   - $\ln x + 3\ln|\ln x|;$
   - $\ln x(5\ln x - 3);$
   - $\ln|\ln x| - 2x.$

Завершено

Балів 4,7 з 5,0

Відмітити питання

## Завдання С

### Завдання вимагає повного письмового розв'язку

---

Розв'яжіть неявне рівняння $y - y'^2 = (x-2)y'$.

---

1. Рівняння в цьому завданні є [лінійним рівнянням] і його загальний вигляд
   - $y = a(y)y' + b(y)$;
   - $y' + a(x)y = b(x)$;
   - $y = xy' + b(y')$;
   - $y = a(x)y' + b(y')$.
2. Рівняння має однопараметричну сім'ю розв'язків
   - $y = Cx + C^2 - C$;
   - $y = Cx + C^2 - 2C$;
   - $y = C$;
   - $y = C^2x + C^2 + 2C$.
3. Це рівняння також має особливий розв'язок
   - $y = -x^2 + 4x - 4$;
   - $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + 1$;
   - $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x - 1$;
   - $y = -\frac{1}{4}x^2 + x - 1$.
4. ***Особливим*** називаємо такий розв'язком неявного рівняння, який в [кожній] точці свого графіка [торкається графіка] іншого розв'язку рівняння, причому в [жодному] околі цієї точки графіки [не збігаються].

Питання **14**

Відповіді не було

Макс. оцінка до 5,0

Відмітити питання

## Завдання D

### Завдання вимагає повного письмового розв'язку

---

Знайдіть розв'язок задачі Коші $y'' - 5y' + 6y = 4xe^x, \quad y(0) = 3,\ y'(0) = 5.$

---

1. Лінійне однорідне рівняння має фундаментальну систему розв'язків
   - $e^{-2x}, e^{-3x}$
   - $e^{2x}, e^{3x}$
   - $e^{2x}, xe^{3x}$
   - $e^{2x}, 0.$

2. Частковий розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді
   - $y_* = ae^x$
   - $y_* = (ax+b)e^x$
   - $y_* = ax + b$
   - $y_* = axe^x$

   і він є таким
   - $y_* = 12e^x$
   - $y_* = 3xe^x$
   - $y_* = 3x + 4$
   - $y_* = (2x+3)e^x.$

3. Загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння є _____ часткового розв'язку лінійного _____ рівняння та _____ розв'язку лінійного _____ рівняння, тому
   - $y = (2x+3)e^x + C_1e^{2x} + C_2e^{3x}$
   - $y = C_1(2x+3)e^x + C_2e^{2x} + C_3e^{3x}$
   - $y = 12e^x + C_1e^{2x} + C_2xe^{3x}$
   - $y = 3x + 4 + C_1e^{-2x} + C_2e^{-3x}.$

4. Розв'язком задачі Коші є функція
   - $3e^{2x} + 4e^{3x};$
   - $3e^{2x} + 2xe^{x};$
   - $(2x+3)e^{x};$
   - $3x + 4 + e^{-3x}.$

Питання 15

Завершено

Балів 0,0 з 5,0

Відмітити питання

## Завдання Е

### Завдання вимагає повного письмового розв'язку

---

Розв'яжіть систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 4x_1 + x_2 - 2, \\ \dot{x}_2 = -10x_1 - 2x_2 + 6. \end{cases}$$

---

1. Нехай $\dot{x} = Ax + b$ – векторний запис системи. Власні значення матриці $A$ є [дійсними та різними], а саме, $\lambda_1 =$ [ ] та $\lambda_2 =$ [ ].

2. Серед перелічених векторів-функцій

$$u(t) = e^t \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t - 3\sin t \end{pmatrix}, \quad v(t) = e^t \begin{pmatrix} -\cos t \\ 2\cos t + 3\sin t \end{pmatrix}, \quad w(t) = e^t \begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t + 3\cos t \end{pmatrix}, \quad y(t) = e^t \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

пара векторів [ ] та [ ] утворюють фундаментальну систему розв'язків.

3. Частковий розв'язок неоднорідної системи з вектором правих частин $b = ($ [ ] , [ ] $)$ треба шукати у вигляді

- $x_* = (a_1 t + b_1, a_2 t + b_2)$;
- $x_* = (a_1, a_2)$;
- $x_* = e^t(a_1 \sin t, a_2 \cos t)$;
- $x_* = e^t(a_1 \sin t + b_1 \cos t, a_2 \sin t + b_2 \cos t)$.

4. Загальний розв'язок неоднорідної системи має вигляд

- $x_1 = e^t(c_2 - c_1)\cos t + t - 4, \quad x_2 = e^t\big(2c_1 \cos t + (3c_1 + c_1)\sin t\big) - t$;
- $x_1 = e^t\big((c_1 + 3)\sin t + c_2 \cos t\big), \quad x_2 = e^t\big((c_1 + 2)\cos t + (c_2 - 3c_1)\sin t\big)$;
- $x_1 = e^t(c_1 \sin t - c_2 \cos t) + 1, \quad x_2 = e^t\big((c_1 + 3c_2)\cos t + (c_2 - 3c_1)\sin t\big) - 2$.

Питання **16**

Відповіді не було

Макс. оцінка до 5,0

Відмітити питання

## Завдання F

### Завдання вимагає повного письмового розв'язку з малюнками фазових портретів

---

Опишіть фазовий портрет динамічної системи

$$\begin{cases} \dot{x} = (x-1)(y-2), \\ \dot{y} = (x-3)(y-1). \end{cases}$$

в околах її особливих точок.

---

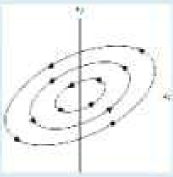
1. Динамічна система має дві особливі точки – та *(формат відповіді* (x,y)*)*.
2. Нехай $u = (u_1, u_2)$ – нові координати в околі особливої точки, а $\dot{u} = Au$ – лінеаризація динамічної системи в околі цієї точки. Серед матриць

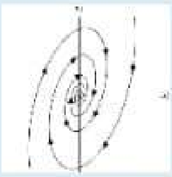
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

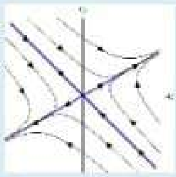
   лише та матриці є лінеаризаціями нашої динамічної системи в околі станів рівноваги.

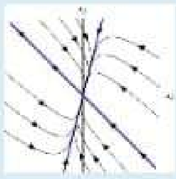
3. Знайдіть власні значення і власні вектори матриць лінеаризацій.
4. Намалюйте фазові портрети в околі кожної точки рівноваги. Один зі станів рівноваги – , а інший – .

   Типова динаміка системи в околі цих станів зображена на малюках та відповідно.

(a) 

(b) 

(c) 

(d) 

# Диференціальні рівняння

## Завдання A

## Завдання B

## Завдання C

## Завдання D

## Завдання E

## Завдання F

**Питання 1**
Завершено
Балів 1,4 з 2,0
Відмітити питання

- Рівність вигляду $F(t, x, \dot{x}, \ddot{x}, \ldots, x^{(n)}) = 0$, в якій функція [багатьох змінних] $F$ – [відома], функція [однієї змінної] $x$ – [шукана] та [t] – незалежна змінна, називаємо ***звичайним диференціальним рівнянням***, якщо
  - функція $x$ ефективно залежить від часу $t$;
  - функція $F$ не залежить від $x$;
  - функція $F$ ефективно залежить від якоїсь з похідних шуканої функції;
  - функція $F$ ефективно залежить від найстаршої похідної шуканої функції.
- Яка з рівностей є диференціальним рівнянням?
  - $x^n(t) = x(t) + 1$
  - $\dot{x}(t) = \int_0^t s x(s)\, ds$
  - $\sin^2 \dot{x}(t) + x(t) = t^2 + \cos^2 \dot{x}(t)$
  - $\sin^2 \dot{x}(t) + x(t) = t^2 - \cos^2 \dot{x}(t)$
  - $\ddot{x}(t) = x(t-1)$.

**Питання 2**
Завершено
Балів 1,6 з 2,0
Відмітити питання

- ***Порядком*** звичайного диференціального рівняння $F(t, x, \dot{x}, \ddot{x}, \ldots, x^{(n)}) = 0$ називаємо
  - найменший порядок похідної шуканої функції, яка ефективно входить у рівняння;
  - число $n$, якщо похідна $x^{(n)}$ ефективно входить у рівняння;
  - найвищий степінь незалежної змінної, який містить рівняння;
  - суму порядків похідних шуканої функції.
- Який порядок мають диференціальні рівняння?
  - $(\ddot{x} - \dot{x})^2 = \ddot{x}^2 - 2\dot{x}\ddot{x} + tx$ [другий]
  - $(\ddot{x} + \dot{x})^2 = \ddot{x}^2 - 2\dot{x}\ddot{x} + tx$ [другий]
  - $(\ddot{x} + \dot{x})^2 = \ddot{x}^2 + 2\dot{x}\ddot{x} + t\dddot{x}$ [третій]

Питання 3
Завершено
Балів 2,0 з 2,0
Відмітити питання

- Якщо неперервно диференційовна функція $v$ є потенціалом векторного поля $(m(x, y), n(x, y))$ (потенціалом для пари функцій $m(x, y)$ та $n(x, y)$), то виконується [друга] умова, серед запропонованих нижче

$$dm = dn, \quad dv = m\,dx + n\,dy, \quad dv = v_x\,dx + v_y\,dy, \quad dv = m_y\,dx + n_x\,dy.$$

- Диференціальне рівняння вигляду $m(x, y)\,dx + n(x, y)\,dy = 0$ називаємо ***рівнянням в повних диференціалах***, якщо
  - виконується умова $m_x = n_y$;
  - вираз $m(x, y)\,dx + n(x, y)\,dy$ є повним диференціалом функції $n$;
  - вираз $m(x, y)\,dx + n(x, y)\,dy$ є повним диференціалом функції $m$
  - існує потенціал для пари функцій $m(x, y)$ та $n(x, y)$ .

- Рівняння $m(x, y)\,dx + n(x, y)\,dy = 0$ буде рівнянням в повних диференціалах в деякому прямокутнику, тоді і лише тоді, коли в цьому прямокутнику виконується умова
  - $m_x = n_y$
  - $m_y = n_x$
  - $m_x = n_x$
  - $m_y = n_y$.

- Яке з диференціальних рівнянь є рівняння в повних диференціалах?
  - $(e^y - e^x)\,dx + (e^x + e^y)\,dy = 0$;
  - $(e^y + 2xy)\,dx = (e^x + y^2)\,dy$;
  - $(e^x + 2xy)\,dx + (e^y + x^2)\,dy = 0$;
  - $(y - x)e^y\,dx = (x + y)e^x\,dy$ .

Питання **4**

Завершено

Балів 1,6 з 2,0

Відмітити питання

- Функцію $g = g(x, y)$ називаємо ***однорідною степеня однорідності*** $s$, якщо
  - $g(\alpha x, \alpha y) = sg(x, y)$ для усіх $x, y$ та $s > 0$;
  - $g(\alpha x, \alpha y) = \alpha^s g(x, y)$ для усіх $x, y$ та $\alpha > 0$;
  - $g(\alpha x, \alpha y) = s^\alpha g(x, y)$ для усіх $x, y$ та $\alpha > 0$.

- Якого степеня однорідності є функції?

  $f(t, x) = \dfrac{3x^2 - 2t^2}{5t^3}$ 2

  $f(t, x) = \ln x^3 - 3\ln t + 1$ 0

  $f(t, x) = \dfrac{2x - 3t}{tx^2}$ -2

- Диференціальне рівняння першого порядку $y' = f(x, y)$ називаємо ***однорідним рівнянням,*** якщо
  - $f$ є однорідною функцією додатного степеня однорідності;
  - $f$ є однорідною функцією степеня однорідності $0$;
  - $f$ є однорідною функцією.

- В кожній з півплощин x>0 та x<0 однорідне диференціальне рівняння за допомогою заміни змінних u=tx зводиться до рівняння рівняння із відокремленими змінними.

- Яке з диференціальних рівнянь є однорідним?
  - $y' + \ln x^2 = y$
  - $y' = x^2 \ln y^2 - x^2$
  - $y' = y - y^2 \ln x$
  - $xy' = y(\ln x - \ln y)$.

Питання **5**

Завершено

Балів 0,4 з 2,0

Відмітити питання

- Розв'язок диференціального рівняння $\dot{x} = f(t, x)$ називаємо ***глобальним***, якщо
  - він визначений на усій числові осі;
  - він визначений на найширшому інтервалі, поза яким він не існує;
  - він визначений в околі кожної точки.

- Нехай $x$ - глобальний розв'язок рівняння $\dot{x} = f(t, x)$, визначений на скінченному чи нескінченному інтервалі $I = (a, b)$. Тоді виконується кожна з двох альтернатив
  - або число $b$ – +нескінченність, або число $b$ – скінченна і тоді розв'язок $x$ має нескінченну границю, коли $t$ прямує до -0;
  - або число $a$ – -нескінченність, або число $a$ – скінченна і тоді розв'язок $x$ має нескінченну границю, коли $t$ прямує до +0.

Питання 6

Відповіді не було

Макс. оцінка до 2.0

Відмітити питання

- Якщо функція $v = v(t, x)$ – ______ за обома змінними та ______ за змінною $x$, то задача Коші $x' = v(t, x), \quad x(a) = b$ має ______ розв'язок, який визначений ______.

- Задача Коші $x' = v(t, x)$, $x(a) = b$ є еквівалентною інтегральному рівнянню
  - $x(t) = a + \int\limits_b^t v(s, x(s))\, ds$;
  - $x(t) = b + \int\limits_a^b v(s, x(s))\, ds$;
  - $x(t) = b + \int\limits_a^t v(s, x(s))\, ds$;
  - $v(t, x(t)) = b + \int\limits_a^t x(s)\, ds$.

- Якому з інтегральних рівняння є еквівалентною задача Коші $\dot{z} = \cos z$, $z(2) = 1$?
  - $z(t) = 2 + \int\limits_1^t \cos z(s)\, ds$
  - $z(t) = 1 + \int\limits_2^t \cos z(s)\, ds$
  - $z(t) = 1 - \int\limits_1^2 \cos z(s)\, ds$.

Питання 7
Завершено
Балів 0,0 з 2,0
Відмітити питання

Які з тверджень є правильними для розв'язків лінійного однорідного рівняння

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y + a_n(x)y = 0?$$

Виберіть одну або декілька відповідей:

- [x] Добуток двох розв'язків цього рівняння є знову його розв'язком.
- [x] Частка двох розв'язків цього рівняння є знову його розв'язком.
- [x] Стала функція завжди є його розв'язком.
- [ ] Тотожно нульова функція завжди є його розв'язком.
- [ ] Сума двох розв'язків цього рівняння є знову його розв'язком.
- [x] Сума розв'язку цього рівняння і довільної сталої є знову його розв'язком.
- [ ] Довільна лінійна комбінація розв'язків є його розв'язком.
- [ ] Добуток довільного розв'язку цього рівняння на число є знову його розв'язком.

Питання 8
Завершено
Балів 0,0 з 2,0
Відмітити питання

Геометричною кратністю власного значення $\lambda$ матриці $A$ називаємо

Виберіть одну відповідь:

- ( ) мінімальну кількість лінійно незалежних власних векторів матриці $A$.
- ( ) максимальну кількість лінійно незалежних власних векторів матриці $A$.
- ( ) максимальну кількість лінійно незалежних власних векторів матриці $A$, що відповідають власному значенню $\lambda$.
- ( ) кратність числа $\lambda$ як кореня визначника матриці $A$.
- (•) кратність числа $\lambda$ як кореня характеристичного визначника $\det(A - \lambda E) = 0$.