Контрольна робота №2
Кравець Ольги
ПМО-21

① $yy'' = -2y'^2$

Структура рня: $F(y, y', y'') = 0$

Заміна: $y' = v(y)$

$y' = v$; $y'' = vv'$

$vv' \cdot y = -2v^2 \mid \cdot \frac{1}{vy}$

$v' = -\frac{2v}{y} \Rightarrow \frac{dv}{dy} = \frac{-2v}{y} \mid \cdot \frac{dy}{v}$

$\int \frac{dv}{v} = \int -2\frac{dy}{y}$

$\ln v = c_1 - 2\ln y$

$e^{\ln v} = e^{c_1 - 2\ln y}$

$v = \frac{e^{c_1}}{y^2}$; $v = \frac{c_1}{y^2}$

$y' = \frac{c_1}{y^2}$; $\frac{dy}{dx} = \frac{c_1}{y^2} \mid dx \cdot y^2$

$\int y^2 dy = \int c_1 dx$

$\frac{y^3}{3} = c_1 x + c_2$

② $y'' - 2y' - 3y = 7\cos 2x - 4\sin 2x$

$P(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \Rightarrow (\lambda - 3)(\lambda + 1) = 0 \Rightarrow$

$\lambda_1 = 3 \Rightarrow y_1 = e^{3x}$

$\lambda_2 = -1 \Rightarrow y_2 = e^{-x} = \frac{1}{e^x}$

$y_0 = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x}$

Частковий розв. неодноор. р-ня

$y = 7\cos 2x - 4\sin 2x$

$y_* = a\cos 2x + b\sin 2x$

$y'_* = -2a\sin 2x + 2b\cos x$

$y''_* = -4a\cos 2x - 4b\sin 2x$

$(-4a - 7b)\sin 2x + (-4b - 7a)\cos 2x = 7\cos 2x - 4\sin 2x$

$\begin{cases} -4b - 7a = 7 \\ -4a - 7b = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \end{cases}$

$y_* = -\cos 2x$

$y = y_* + y_0 = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x} - \cos 2x$

③ $y'' + 3y' + 2y = 2x$

$y(0) = -1{,}5$

$y'(0) = 1$

$y'' + 3y' + 2y = 0$

$P(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow (\lambda+1)(\lambda+2) = 0 \Rightarrow$

$\lambda_1 = -1 \Rightarrow y_1 = e^{-x} = \frac{1}{e^x}$

$\lambda_2 = -2 \Rightarrow y_2 = e^{-2x} = \frac{1}{e^{2x}}$

$y_0 = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}$

Частковий розв.

$y_* = ax + b$

$y_*' = a$

$y_*'' = 0$

$2ax + 2b + 3a = 2x$

$\begin{cases} 2a = 2 \\ 2b + 3a = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -\frac{3}{2} \end{cases}$

$y_* = x - \frac{3}{2}$

$y = y_0 + y_* = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + x - \frac{3}{2}$

$x = 0$

$y = -\frac{3}{2}$

$y' = 1$

$\begin{cases} -\frac{3}{2} = C_1 + C_2 - \frac{3}{2} \\ 1 = -2C_1 - C_2 + 1 \end{cases} \Rightarrow C = 0 \; C_1 = 0$

$y = x - \frac{3}{2}$

④ $xy'' + 3y' = 15x^2$

$y(-1) = 0$

$y'(-1) = 3$

$y' = v$

$y'' = v'y' = vv'$

$x \cdot vv' + 3 \cdot v = 15x^2$

$xvv' = 15x^2 - 3v$

$vv' = \frac{15x^2 - 3v}{x}$

$v' = \frac{15x^2 - 3v}{xv}$

⑤ $y'' - y' - 2y = 6e^x$

$P(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \Rightarrow (\lambda - 2)(\lambda + 1) = 0$

$\lambda_1 = 2 \Rightarrow y_1 = e^{2x}$

$\lambda_2 = -1 \Rightarrow y_2 = e^{-x} = \frac{1}{e^x}$

$y_* = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}$

Часткові розв.:

$y_0 = \frac{ax}{e^x}$

$y_0' = -\frac{ax - a}{e^x}$; $y_0'' = \frac{ax - 2a}{e^x}$

$-\frac{3a}{e^x} = \frac{6}{e^x} \quad / \cdot e^x$

$-3a = 6$

$a = -2$

$y_0 = -\frac{2x}{e^x}$

$y = y_* + y_0 = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} - \frac{2x}{e^x} =$

$= C_1 e^{2x} - C_2 e^{-x} - 2xe^{-x}$

⑥ $y = xy' - \ln y' + 1$ — р-ня Клеро

Метод введення параметра:

$p = y'$

$p = \frac{dy}{dx}$; $dy = p\,dx$

$y = px - \ln p + 1$

$dy = \frac{dp + p^2 dx + px\,dp}{p}$

$p\,dx = \frac{dp + p^2 dx + px\,dp}{p}$

$p\,dx = p\,dx + x\,dp + \frac{dp}{p}$

$x\,dp + \frac{dp}{p} = 0$

$\left(x + \frac{1}{p}\right) dp = 0$

• $dp = 0 \rightsquigarrow p = c \Rightarrow y = cp - \ln p + 1$

• $\begin{cases} x = -\frac{1}{p} \\ y = px - \ln p + 1 \end{cases} \rightsquigarrow y = \frac{1}{x} \cdot x - \ln\left(\frac{1}{x}\right) + 1 \rightsquigarrow y = 2 + \ln x$

Відповідь: $\begin{cases} y = cx - \ln x + 1, \; c \in \mathbb{R} \\ y = 2 + \ln x - \text{особливий} \end{cases}$