Львівський національний університет

Лекція 1

Лінійні системи із змінними коефіцієнтами

Зміст

Об'єктом дослідженні цієї лекції будуть системи лінійних диференціальних рівнянь першого порядку із змінними коефіцієнтами:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}(t)\,x_1 + a_{12}(t)\,x_2 + \dots + a_{1n}(t)\,x_n + b_1(t), \\ \dot{x}_2 = a_{21}(t)\,x_1 + a_{22}(t)\,x_2 + \dots + a_{2n}(t)\,x_n + b_2(t), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dot{x}_n = a_{n1}(t)\,x_1 + a_{n2}(t)\,x_2 + \dots + a_{nn}(t)\,x_n + b_n(t), \end{cases}$$

де відомі функції a_{ij} та b_i називаються відповідно *коефіцієнтами* та *правими частина* системи. Припустимо, що ці функції визначені на інтервалі $\mathcal{I} = (a, b)$ часової осі $\mathbb{R}_t$, який може бути як скінченний, так і необмежений. Невідомими є функції x_i, і задача полягає у їх знаходженні.

Введемо матрицю $A(t) = \big(a_{ij}(t)\big)_{i,j=1}^n$, складену з коефіцієнтів системи, та вектор-стовпець $b(t) = (b_1(t), b_2(t), \dots, b_n(t))^\top$, сформований з правих частин. Тоді систему можна записати у векторному вигляді

$$\dot{x} = A(t)\,x + b(t), \quad t \in \mathcal{I}, \tag{1}$$

де вектор $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^\top$ є шуканим. Систему (1) називатимемо *лінійною неоднорідною системою*, на відміну від системи

$$\dot{x} = A(t)\,x, \quad t \in \mathcal{I}, \tag{2}$$

в якій вектор правих частин є нульовим, і яку називатимемо *однорідною*.

Тут і надалі вважатимемо, що відображення

$$A(\cdot)\colon \mathcal{I} \to M(n, \mathbb{R}), \qquad b(\cdot)\colon \mathcal{I} \to \mathbb{R}^n$$

є неперервними на інтервалі $\mathcal{I}$, що звичайно рівносильно неперервності всіх коефіцієнтів a_{ij} та правих частин b_i.

Означення 1. Вектор $x = \varphi(t)$ називається *розв'язком* системи (1) на інтервалі $\mathcal{I}$, якщо

(i) φ є відображенням класу $C^1(\mathcal{I})$;
(ii) φ задовольняє всі рівняння системи на $\mathcal{I}$, тобто перетворює їх в тотожності за змінною t.

Тут і далі в цій лекції ми трактуємо $C^1(\mathcal{I})$ як простір неперервно диференційовних відображень $f\colon \mathcal{I} \to \mathbb{R}^n$.

1. Апріорні властивості розв'язків

Наступна леми дасть змогу описати кілька фундаментальних властивостей розв'язків, які притаманні лише лінійним системам.

Лема 1 (про апріорну оцінку розв'язку)**.** *Нехай $x = \varphi(t)$ – розв'язок лінійної неоднорідної системи (1) на скінченному інтервалі $\mathcal{I}$, довжину якого позначимо $|\mathcal{I}|$. Тоді для кожного $\tau \in \mathcal{I}$ виконується нерівність*

$$\|\varphi(t)\| \leqslant \left(\|\varphi(\tau)\| + \beta|\mathcal{I}|\right) e^{\alpha|t-\tau|}, \qquad t \in \mathcal{I}, \tag{3}$$

при умові, що існують скінченні величини

$$\alpha = \max_{t\in\mathcal{I}} \|A(t)\|, \qquad \beta = \max_{t\in\mathcal{I}} \|b(t)\|.$$

Доведення. Підставивши φ в систему (1), отримаємо тотожність

$$\dot\varphi(t) = A(t)\varphi(t) + b(t), \qquad t \in \mathcal{I}.$$

Проінтегруємо її в межах від τ до t:

$$\varphi(t) - \varphi(\tau) = \int_\tau^t A(s)\varphi(s)\, ds + \int_\tau^t b(s)\, ds.$$

Далі перенесемо доданок $\varphi(\tau)$ праворуч і оцінимо норму в $\mathbb{R}^n$ вектора $\varphi(t)$:

$$\begin{aligned}\|\varphi(t)\| &\leqslant \|\varphi(\tau)\| + \left\|\textstyle\int_\tau^t A(s)\varphi(s)\, ds\right\| + \left\|\textstyle\int_\tau^t b(s)\, ds\right\| \leqslant \\ &\leqslant \|\varphi(\tau)\| + \left|\textstyle\int_\tau^t \|A(s)\|\cdot\|\varphi(s)\|\, ds\right| + \left|\textstyle\int_\tau^t \|b(s)\|\, ds\right| \leqslant \\ &\leqslant \|\varphi(\tau)\| + \alpha\left|\textstyle\int_\tau^t \|\varphi(s)\|\, ds\right| + \beta\left|\textstyle\int_\tau^t\, ds\right| \leqslant \\ &\leqslant \|\varphi(\tau)\| + \beta|\mathcal{I}| + \alpha\left|\textstyle\int_\tau^t \|\varphi(s)\|\, ds\right|.\end{aligned}$$

Тут ми скористались лемою про векторний інтеграл та відомою оцінкою для лінійного відображення $\|Af\| \leqslant \|A\|\,\|f\|$. Отже, ми отримали нерівність

$$\|\varphi(t)\| \leqslant \|\varphi(\tau)\| + \beta|\mathcal{I}| + \alpha\left|\int_\tau^t \|\varphi(s)\|\, ds\right|.$$

Скористаємося лемою Ґронуола, поклавши у цьому твердженні $u(t) = \|\varphi(t)\|$, $a = \alpha$ та $b = \|\varphi(\tau)\| + \beta|\mathcal{I}|$. Зауважимо, що функція u є неперервною та невід'ємною за властивістю норми. Тоді те, що стверджує лема Ґронуола, збігається з оцінкою (3). □

Наслідок 1. *Нехай $x = \psi(t)$ – розв'язок лінійної однорідної системи (2) на скінченному інтервалі $\mathcal{I}$. Тоді для кожного $\tau \in \mathcal{I}$ виконується двостороння оцінка*

$$\|\psi(\tau)\|\, e^{-\alpha|t-\tau|} \leqslant \|\psi(t)\| \leqslant \|\psi(\tau)\|\, e^{\alpha|t-\tau|}, \qquad t \in \mathcal{I}. \tag{4}$$

Доведення. У випадку однорідної системи вектор правих частин b є нульовим, тобто $\beta = 0$. Тому нерівність (3) набуває вигляду

$$\|\psi(t)\| \leqslant \|\psi(\tau)\|\, e^{\alpha|t-\tau|}. \tag{5}$$

Оскільки обидва моменти часу t та τ в нерівності (5) є довільними точками інтервалу $\mathcal{I}$, то поміняємо їх місцями:

$$\|\psi(\tau)\| \leqslant \|\psi(t)\|\, e^{\alpha|\tau-t|}.$$

Звідси матимемо, що $\|\psi(\tau)\|\, e^{-\alpha|t-\tau|} \leqslant \|\psi(t)\|$. □

Наслідок 2. *Якщо розв'язок $x = \psi(t)$ лінійної однорідної системи (2) перетворюється в нуль у деякий момент часу $t = \tau$, то ψ – тривіальний розв'язок, тобто: $\psi(\tau) = 0 \Rightarrow \psi(t) = 0$ для всіх $t \in \mathcal{I}$.*

Доведення. Справді, тоді $\|\psi(\tau)\| = 0$ і з наслідку 1 матимемо, що $\|\psi(t)\| = 0$ для всіх $t \in \mathcal{I}$. Отже, з властивості норми випливає, що розв'язок ψ є тривіальним. □

Тепер розглянемо задачу Коші:

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)\, x + b(t), \quad t \in \mathcal{I} \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{6}$$

де t_0 належить інтервалу $\mathcal{I}$, а x_0 – деякий вектор з $\mathbb{R}^n$.

Теорема 1.1 (про глобальне існування та єдиності розв'язку)**.** *Якщо відображення $A(\cdot)\colon \mathcal{I} \to M(n,\mathbb{R})$, $b(\cdot)\colon \mathcal{I} \to \mathbb{R}^n$ є неперервними, то для кожного набору початкових даних $(t_0, x_0) \in \mathcal{I} \times \mathbb{R}^n$ розв'язок задачі Коші (6) існує на всьому інтервалі $\mathcal{I}$ і він є єдиним.*

Доведення. Лінійна система (1) є частковим випадком загальної (нелінійної) системи $\dot{x} = f(t, x)$, для якої існування та єдиність локального розв'язку задачі Коші гарантується умовами: (i) відображення f є неперервним; (ii) при кожному фіксованому t відображення $f(t,\cdot)$ є локально ліпшицевим за просторовою групою змінних.

В нашому випадку неперервність відображення $f(t,x) = A(t)\,x + b(t)$ випливає безпосередньо з неперервності матриці коефіцієнтів та вектора правих частин. Але з лінійної структури f також слідує і властивість локальної ліпшицевості. Справді, для вибраного моменту часу $t = \tau$ і довільних векторів $x, y \in \mathbb{R}^n$ маємо

$$\|f(\tau,x)-f(\tau,y)\| = \|A(\tau)\,x+b(\tau)-A(\tau)\,y-b(\tau)\| = \|A(\tau)(x-y)\| \leqslant \|A(\tau)\|\,\|x-y\|,$$

а тому $f(\tau,\cdot)$ є ліпшицевою на всьому просторі $\mathbb{R}^n$ зі сталою Ліпшиця $\|A(\tau)\|$. Отже, в деякому околі точки t_0 існує єдиний розв'язок $x = \varphi(t)$ задачі (6), який можна однозначно продовжити до максимального, за яким ми збережемо позначення φ.

Залишилося довести, що цей розв'язок визначений на всьому інтервалі $\mathcal{I}$. Припустимо, що це не так, і розв'язок φ не продовжується, наприклад, праворуч до межі інтервалу $\mathcal{I}$. Тоді існує точка t_* – правий кінець інтервалу існування цього розв'язку, і t_* є внутрішньою точкою $\mathcal{I}$. Згідно теореми про структуру максимального розв'язку

$$\lim_{t\to t_*-0}\|\varphi(t)\| = \infty. \tag{7}$$

А з іншого боку, згідно апріорної оцінки (3) на скінченному інтервалі $(t_0, t_*) \subset \mathcal{I}$ маємо

$$\|\varphi(t)\| \leqslant (\, \|\varphi(t_0)\| + \beta|t-t_0|\,)\; e^{\alpha|t-t_0|}, \tag{8}$$

де числа α і β є також скінченними, бо норми $\|A(t)\|$ та $\|b(t)\|$ як неперервні функції є обмеженими на $[t_0, t_*]$. Отже, з врахуванням (8) маємо

$$\overline{\lim_{t\to t_*-0}}\,\|\varphi(t)\| \leqslant \lim_{t\to t_*-0}(\|\varphi(t_0)\|+\beta|t-t_0|)\,e^{\alpha|t-t_0|} = (\|\varphi(t_0)\|+\beta|t_*-t_0|)\,e^{\alpha|t_*-t_0|},$$

тобто верхня границя є обмеженою, що суперечить (7). Значить, $\varphi(t)$ визначений для усіх часів $t \in \mathcal{I}$, таких що $t \geqslant t_0$. Доведення для $t \leqslant t_0$ проводиться аналогічно. □

2. Лінійні однорідні системи. Структура загального розв'язку

Спершу розглянемо лінійну однорідну систему (2) і вкажемо на фундаментальний зв'язок між лінійністю відображення $A(\cdot)$ та структурою її загального розв'язку.

Теорема 1.2. *На множині $\mathbb{X}(\mathcal{I})$ усіх розв'язків лінійної однорідної системи (2), що визначені на $\mathcal{I}$, можна ввести структуру лінійного простору.*

Доведення. Оскільки згідно означення 1 розв'язки системи є неперервно диференційовними функціями, то очевидно, що $\mathbb{X}(\mathcal{I})$ є підмножиною лінійного простору $C^1(\mathcal{I})$. Отже, достатньо перевірити замкненість $\mathbb{X}(\mathcal{I})$ стосовно лінійних операцій – множення на скаляри та поточкового додавання відображень. Нехай φ та ψ елементи $\mathbb{X}(\mathcal{I})$. Покажемо, що їх лінійна комбінація $g = \lambda\varphi + \mu\psi$ з довільними дійсними λ та μ теж належить множині $\mathbb{X}(\mathcal{I})$, тобто є розв'язком однорідної системи. Справді, оскільки для всіх $t \in \mathcal{I}$ виконуються тотожності $\dot\varphi(t) = A(t)\varphi(t)$ та $\dot\psi(t) = A(t)\psi(t)$, то

$$\dot g = \frac{d}{dt}(\lambda\varphi + \mu\psi) = \lambda\dot\varphi + \mu\dot\psi = \lambda A(t)\varphi + \mu A(t)\psi = A(t)(\lambda\varphi + \mu\psi) = A(t)g$$

також для всіх $t \in \mathcal{I}$. Отже, $g \in \mathbb{X}(\mathcal{I})$, що і треба було довести. Зауважимо, що в доведені ми використали лінійність операції диференціювання та операції множення на матрицю A. □

Зауваження 1. Ця теорема є реалізацією загального принципу для лінійних задач математики: *нехай $T\colon V \to W$ – лінійне відображення векторних просторів V і W, тоді його ядро $\ker T = \{v \in V : Tv = 0\}$ є лінійним підпростором в V.* У нашому випадку лінійне відображення має вигляд $T = \frac{d}{dt} - A(t)$ і діє з простору $C^1(\mathcal{I})$ в простір $C(\mathcal{I})$, а підпростір $\mathbb{X}(\mathcal{I})$ – це його ядро.

Теорема 1.3. *Нехай $\mathbb{X}(\mathcal{I})$ – лінійний простір розв'язків однорідної системи. Тоді $\dim \mathbb{X}(\mathcal{I}) = n$, де n – порядок системи, тобто розмір матриці $A(\cdot)$.*

Доведення. Достатньо довести, що лінійні простори $\mathbb{X}(\mathcal{I})$ та $\mathbb{R}^n$ є ізоморфними, бо скінченновимірні ізоморфні простори мають однакову вимірність. Введемо відображення $T\colon X \to \mathbb{R}^n$, яке кожному розв'язку φ ставить у відповідність його значення $\varphi(\tau)$ у деякій фіксованій точці τ інтервалу $\mathcal{I}$:

$$\mathbb{X}(\mathcal{I}) \ni \varphi(t) \longmapsto T\varphi = \varphi(\tau) \in \mathbb{R}^n.$$

Без сумніву, T– лінійне відображення. Воно буде ізоморфізмом тоді і лише тоді, коли $\operatorname{Ker} T = \{0\}$ та $\operatorname{Im} T = \mathbb{R}^n$. Але ці дві рівності є переформулюванням теореми існування та єдиності розв'язку для задачі Коші

$$\dot{x} = A(t)\,x, \quad t \in \mathcal{I}, \qquad x(\tau) = \xi. \tag{9}$$

Справді, до ядра T належать лише ці розв'язки системи, які задовольняють умову $\varphi(\tau) = 0$. Але згідно наслідку 2 таким може бути лише нульовий розв'язок, тобто ядро $\operatorname{Ker} T$ є тривіальним. З другого боку, згідно теореми 1.1 для кожного вектора $\xi \in \mathbb{R}^n$ на інтервалі $\mathcal{I}$ існує розв'язок ψ задачі (9), тобто $T\psi = \xi$. Отже, для кожного $\xi \in \mathbb{R}^n$ існує прообраз $\psi \in \mathbb{X}(\mathcal{I})$ при відображенні T, що завершує доведення. □

***Означення* 2.** База в лінійному просторі $\mathbb{X}(\mathcal{I})$, тобто набір n лінійно незалежних розв'язків однорідної системи (2) називається *фундаментальною системою розв'язків.*

Нагадаємо, що лінійна незалежність елементів $f_1, \ldots, f_m$ в просторі $C^1(\mathcal{I})$ означає таке: *якщо $\alpha_1 f_1(t) + \cdots + \alpha_m f_m(t) = 0$ для всіх $t \in \mathcal{I}$, то всі сталі $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ є нульовими.*

***Зауваження* 2.** Взагалі кажучи, з лінійної незалежності відображень

$$f_i\colon \mathcal{I} \to \mathbb{R}^n, \qquad i = 1, \ldots, m$$

в просторі $C^1(\mathcal{I})$ не слідує "поточкова" лінійна незалежність в $\mathbb{R}^n$ векторів $f_i(\tau)$ для кожного $\tau \in \mathcal{I}$. Так вектори

$$f_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f_2(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R}$$

є лінійно залежні в $\mathbb{R}^n$ при кожному t, але вони вочевидь лінійно незалежні як елементи простору $C^1(\mathbb{R})$. Хоча обернене твердження є правильне: якщо вектори $f_i(\tau)$ є лінійно незалежні в $\mathbb{R}^n$ для кожного $\tau \in \mathcal{I}$, то відображення $f_i : \mathcal{I} \to \mathbb{R}^n$ – лінійно незалежні в $C^1(\mathcal{I})$.

Водночас, для розв'язків лінійної системи з лінійної незалежності на множині $\mathcal{I}$ слідує "поточкова" незалежність, і навпаки. Це ми доведемо в наступному параграфі.

Теорема 1.4. *Нехай $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ – фундаментальна система розв'язків однорідної системи (2), тоді загальний розв'язок цієї системи має вигляд*

$$\varphi(t) = c_1\,\varphi_1(t) + c_2\,\varphi_2(t) + \ldots + c_n\,\varphi_n(t), \qquad t \in \mathcal{I} \tag{10}$$

де $c_1, c_2, \ldots, c_n$ – довільні сталі.

Доведення. В лінійному просторі $\mathbb{X}(\mathcal{I})$ кожен вектор має однозначне зображення через елементи бази. □

3. Визначник Вронського. Формула Ліувіля

Тепер запропонуємо зручний інструмент для перевірки чи набір з n довільних розв'язків розв'язків $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ однорідної системи є фундаментальною системою. Складемо з цих розв'язків матрицю

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} \psi_{11}(t) & \psi_{12}(t) & \dots & \psi_{1n}(t) \\ \psi_{21}(t) & \psi_{11}(t) & \cdots & \psi_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_{n1}(t) & \psi_{n2}(t) & \dots & \psi_{nn}(t) \end{pmatrix},$$

де через ψ_{ij} ми позначили i-ю координатою розв'язку ψ_j, тобто вектори ψ_j є *стовпцями* цієї матриці. Матриця Ψ є неперервно диференційовною, бо такими є всі її елементи ψ_{ij}. Нагадаємо, що похідна матриці визначається як границя різницевого відношення:

$$\dot{\Psi}\,(t) = \lim_{h\to 0} h^{-1}\left(\Psi(t+h) - \Psi(t)\right)$$

і є матрицею, складеною з похідних її елементів ψ_{ij}.

Лема 2. *Матриця Ψ є розв'язком матричного диференціального рівняння*

$$\dot{X}(t) = A(t)\,X(t), \qquad t \in \mathcal{I}, \tag{11}$$

де X – квадратна матриця порядку n.

Доведення. Тотожність $\dot{\Psi}\,(t) = A(t)\,\Psi(t)$ випливає безпосередньо з означення матриці Ψ. Справді, j-й стовпець $\dot{\Psi}\,(t)$ є похідною $\dot{\psi}_j(t)$, а відповідний стовпець добутку $A(t)\Psi(t)$ має вигляд $A(t)\psi_j(t)$. Ці стовпці тотожно рівні на $\mathcal{I}$, бо ψ_j – розв'язок однорідної системи. □

***Означення* 3.** Функція $W(t) = \det \Psi(t)$ називається *визначником Вронського*[†] набору розв'язків $\psi_1, \dots, \psi_n$.

Наступна формула має важливе значення в теорії лінійних систем.

Теорема 1.5 (формула Ліувіля)**.** *Визначник Вронського W довільного набору розв'язків однорідної системи задовольняє рівність*

$$W(t) = W(\tau)\, e^{\int_\tau^t \operatorname{tr} A(s)\, ds}$$

для довільних t і τ з інтервалу $\mathcal{I}$. Тут $\operatorname{tr} A = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$ – слід матриці.

Спершу доведемо одну відому формулу для матриць.

Лема 3. *Нехай B – квадратна матриця з $M(n, \mathbb{R})$. Справедлива формула*

$$\det(I + \varepsilon B) = 1 + \varepsilon \operatorname{tr} B + O(\varepsilon^2), \tag{12}$$

коли число ε прямує до нуля. Тут I – одинична матриця.

[†] Польський математик Ю. Вронський (J. Wroński) впровадив цей визначник у 1810 р., перша публікація датується 1812 роком.

Доведення. Нехай $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n$ – власні значення матриці B, пронумеровані із врахуванням їх кратності. Нагадаємо, що тоді

$$\operatorname{tr} B = \nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_n, \quad \det B = \nu_1 \, \nu_2 \dots \nu_n. \tag{13}$$

Зауважимо, що в загальному випадку числа ν_k є комплексними, але слід та визначник матриці $B \in M(n, \mathbb{R})$ завжди є дійсними.

Очевидно, що числа $1 + \varepsilon \, \nu_1, \dots, 1 + \varepsilon \, \nu_n$ є власними значеннями матриці $I + \varepsilon B$. Справді, ненульовий розв'язок y алгебраїчної системи $By = \nu y$ буде водночас і розв'язком системи $(I + \varepsilon B) \, y = (1 + \varepsilon\nu) y$, і навпаки. Отже,

$$\det(I + \varepsilon B) \overset{(13)}{=} \prod_{k=1}^{n} (1 + \varepsilon \nu_k) = 1 + \varepsilon \, (\nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_n) + O(\varepsilon^2) = 1 + \varepsilon \operatorname{tr} B + O(\varepsilon^2),$$

коли ε прямує до нуля. □

Доведення формули Ліувіля. Нехай W є визначником матриці Ψ. Матричне диференціальне рівняння (11) для Ψ можна записати так:

$$\lim_{h \to 0} h^{-1} \left(\Psi(t + h) - \Psi(t) \right) = A(t) \, \Psi(t),$$

для кожного $t \in \mathcal{I}$, звідки

$$\Psi(t + h) = (I + hA(t)) \, \Psi(t) + o(h), \quad h \to 0.$$

Оскільки відображення $\det \colon M(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ є неперервним, то

$$W(t + h) = \det \Psi(t + h) = \det\Big(\big(I + hA(t)\big) \Psi(t) \Big) + o(h), \quad h \to 0.$$

Тепер скористаємося тим, що визначник добутку матриць є добутком визначників співмножників, а також лемою 3:

$$W(t + h) = \det\big(I + hA(t)\big) W(t) + o(h) \overset{(12)}{=} \big(1 + h \operatorname{tr} A(t)\big) W(t) + o(h), \quad h \to 0.$$

Сформуємо з останньої рівності різницеве відношення для W:

$$\frac{W(t + h) - W(t)}{h} = \operatorname{tr} A(t) \, W(t) + o(1), \quad h \to 0.$$

Перейшов до границі, отримаємо диференціальне рівняння для визначника Вронського

$$\frac{dW}{dt} = \operatorname{tr} A(t) \, W(t), \qquad t \in \mathcal{I}.$$

Формула Ліувіля – це зображення розв'язку цього рівняння. Справді, якщо загальний розв'язок записати у вигляді

$$W(t) = C e^{\int_\tau^t \operatorname{tr} A(s) \, ds},$$

то при $t = \tau$ отримаємо, що $C = W(\tau)$. □

Наслідок 3. *Якщо визначник Вронського обертається в нуль хоча б в одній точці, то він тотожно дорівнює нулю на $\mathcal{I}$. Крім того, якщо W відмінний від нуля хоча б в одній точці, то він відмінний від нуля скрізь на $\mathcal{I}$.*

Доведення. Перша частина твердження є очевидною, а друга випливає з додатності експоненти. □

Теорема 1.6 (критерій фундаментальності). *Набір розв'язків $\psi_1, \dots, \psi_n$ однорідної системи буде фундаментальною системою розв'язків тоді і лише тоді, коли його визначник Вронського $W = \det \Psi$ є відмінний від нуля принаймні в одній точці інтервалу $\mathcal{I}$.*

Доведення. Нехай $\{\psi_j\}_{j=1}^n$ – фундаментальна система розв'язків, а τ – деяка точка інтервалу I. Покажемо, що матриця $\Psi(\tau)$ є невиродженою. Якщо це не так, то її стовпці $\psi_j(\tau)$ повинні бути лінійно залежними в $\mathbb{R}^n$. Отже, існує лінійна комбінація $\beta_1\psi_1(\tau)+\dots+\beta_n\psi_n(\tau) = 0$ зі сталими β_j, серед яких є ненульові. Розглянемо розв'язок однорідної системи $\varphi(t) = \beta_1\psi_1(t)+\dots+\beta_n\psi_n(t)$. Оскільки за побудовою $\varphi(\tau) = 0$, то φ – тривіальний розв'язок згідно наслідку 2. Ми отримали суперечність, що $\{\psi_j\}_{j=1}^n$ є фундаментальною системою розв'язків, оскільки $\beta_1\psi_1(t) + \dots + \beta_n\psi_n(t) = 0$ для всіх $t \in \mathcal{I}$, причому серед сталих β_j є ненульові. Отже, число $W(\tau) = \det \Psi(\tau)$ є відмінним від нуля.

Якщо тепер визначник Вронського відмінний від нуля в точці τ, то він ненульовий в кожній точці $\mathcal{I}$. Значить, вектори $\{\psi_j(t)\}_{j=1}^n$ є лінійно незалежні в $\mathbb{R}^n$ для кожного $t \in \mathcal{I}$, а, отже, вони лінійно незалежні в просторі $\mathbb{X}(\mathcal{I})$ (див. зауваження 2). □

***Зауваження* 3.** Тепер можна запропонувати метод побудови фундаментальної системи розв'язків. Нехай вектори $a_1, \dots, a_n$ утворюють базу в $\mathbb{R}^n$. Зазвичай, використовують стандартну базу. Тоді розв'яжемо n задач Коші

$$\dot{x} = A(t)\,x, \quad x(\tau) = a_j, \qquad j = 1, \dots, n.$$

Розв'язки $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$ цих задач утворюють базу в $\mathbb{X}(\mathcal{I})$, бо їх визначник Вронського відмінний від нуля при $t = \tau$. Однак, цей метод важко назвати конструктивним, оскільки знайти розв'язки задач Коші в класі елементарних функцій чи інтегралів від них вдається рідко.

4. Фундаментальна матриця та оператор Коші

Нехай $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ – фундаментальна система розв'язків. Складемо з неї матрицю $\Phi(t) = (\varphi_{ij}(t))_{i,j=1}^n$.

***Означення* 4.** Матриця $\Phi(t)$, стовпцями якої є вектори фундаментальної системи розв'язків, називається *фундаментальною матрицею* лінійної однорідної системи (2).

Поняття "фундаментальна система розв'язків" та "фундаментальна матриця", зрозуміло, є рівносильними, однак матричний запис бази у просторі $\mathbb{X}(\mathcal{I})$ є зручнішим. Зокрема, це дозволяє спростити вигляд багатьох формул.

Фундаментальна матриця володіє такими властивостями.

***Властивість* 1.** *Фундаментальна матриця Φ є невиродженим розв'язком матричного рівняння* (11), *тобто*

$$\dot{\Phi}\,(t) = A(t)\,\Phi(t), \tag{14}$$

$$\det \Phi(t) \neq 0 \tag{15}$$

для всіх $t \in \mathcal{I}$.

Це випливає безпосередньо з результатів попереднього параграфу.

Властивість 2. *Загальний розв'язок однорідної системи* (2) *має вигляд*

$$\varphi(t) = \Phi(t)\, c, \tag{16}$$

де Φ *– фундаментальна матриця, а* c *– довільний вектор з* $\mathbb{R}^n$*.*

Формула (16) є іншим записом векторної рівності (10), у якій довільні сталі $c_1, \ldots, c_n$ треба трактувати як координати вектора-стовпця c.

Нам далі знадобиться формула диференціювання оберненої матриці.

Лема 4 (про похідну оберненої матриці)**.** *Нехай* $H\colon \mathcal{I} \to M(n, \mathbb{R})$ *відображення класу* C^1*. Тоді*

$$\frac{d}{dt}(H^{-1}) = -H^{-1}\dot{H}\ H^{-1}. \tag{17}$$

Доведення. Оскільки $H^{-1}(t)H(t) = I$, то $\frac{d}{dt}(H^{-1}(t)H(t)) = 0$. Звідси маємо $\frac{d}{dt}(H^{-1})H + H^{-1}\frac{dH}{dt} = 0$, а отже, $\frac{d}{dt}(H^{-1}) = -H^{-1}\dot{H}\ H^{-1}$. □

Оскільки існує безліч баз у просторі розв'язків $\mathbb{X}(\mathcal{I})$, то існує і безліч фундаментальних матриць лінійної системи (2). Наступна властивість конкретизує характер цієї неоднозначності.

Властивість 3. *Нехай* Φ *– фундаментальна матриця лінійної системи* (2)*. Тоді будь-яка інша фундаментальна матриця* Ψ *цієї системи має вигляд* $\Psi(t) = \Phi(t)B$*, де* B *– стала невироджена матриця.*

Доведення. Те, що кожна матриця $\Phi(t)B$ є знову фундаментальною, отримується безпосередньою перевіркою умов (14). Покажемо, що цим множина фундаментальних матриць вичерпується.

Достатньо довести, що матриця $\Phi^{-1}(t)\Psi(t)$ є сталою, бо невиродженою вона є. Покажемо, що $\frac{d}{dt}(\Phi^{-1}\Psi)(t) = 0$. Справді, скориставшись властивістю 1, отримаємо

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\Phi^{-1}\Psi) &= \frac{d}{dt}(\Phi^{-1})\Psi + \Phi^{-1}\dot{\Psi} \overset{(17)}{=} -\Phi^{-1}\dot{\Phi}\,\Phi^{-1}\Psi + \Phi^{-1}\dot{\Psi} \overset{(14)}{=} \\ &= -\Phi^{-1}A\Phi\,\Phi^{-1}\Psi + \Phi^{-1}A\Psi = -\Phi^{-1}\big(A\Psi - A\Psi\big) = 0.\end{aligned}$$

Отже, $\Phi^{-1}(t)\Psi(t) = B$, де B – деяка стала невироджена матриця. □

Наслідок 4. *Для кожного* τ *з інтервалу* $\mathcal{I}$ *існує така фундаментальна матриця* Φ*, що*

$$\Phi(\tau) = I. \tag{18}$$

Доведення. Справді, якщо фундаментальна матриця Ψ не задовольняє умову (18), то покладемо $\Phi(t) = \Psi(t)\Psi^{-1}(\tau)$. □

Кажуть теж, що матриця Φ *є нормованою в точці* τ.

Означення 5. Сім'я фундаментальних матриць $\{U(t,\tau)\}_{\tau\in\mathcal{I}}$, яка задовольняє умову

$$U(\tau, \tau) = I \tag{19}$$

для кожного $\tau \in \mathcal{I}$, називається *оператором Коші* (матрицею Коші) однорідної системи.

Така сім'я завжди існує. Справді, як і при доведенні наслідку, покладемо
$$U(t,\tau)=\Phi(t)\Phi^{-1}(\tau). \tag{20}$$
Зауважимо, що U не залежить від вибору Φ. Кожна інша фундаментальна матриця Ψ за властивістю 3 має вигляд $\Psi(t)=\Phi(t)B$, а тому
$$\Psi(t)\Psi^{-1}(\tau)=\big(\Phi(t)B\big)\cdot\big(\Phi(\tau)B\big)^{-1}=\Phi(t)BB^{-1}\Phi(\tau)^{-1}=\Phi(t)\Phi^{-1}(\tau)$$
для кожної невиродженої матриці B.

Лема 5. *Оператор Коші $U\colon \mathcal{I}\times\mathcal{I}\to M(n,\mathbb{R})$ має такі властивості*
$$U(t,s)\,U(s,\tau)=U(t,\tau), \tag{21}$$
$$U^{-1}(t,\tau)=U(\tau,t)\quad \textit{або}\quad U(\tau,t)\,U(t,\tau)=I, \tag{22}$$
$$\frac{d}{dt}U(t,\tau)=A(t)\,U(t,\tau), \tag{23}$$
$$\frac{d}{d\tau}U(t,\tau)=-U(t,\tau)\,A(\tau) \tag{24}$$
для всіх $t,\tau,s\in\mathcal{I}$.

Доведення. Перші дві рівності можна перевірити безпосередньо, скориставшись зображенням (20). Справді,
$$U(t,s)\,U(s,\tau)=\Phi(t)\Phi^{-1}(s)\Phi(s)\Phi^{-1}(\tau)=\Phi(t)\Phi^{-1}(\tau)=U(t,\tau),$$
$$U^{-1}(t,\tau)=\big(\Phi(t)\Phi^{-1}(\tau)\big)^{-1}=\Phi(\tau)\Phi^{-1}(t)=U(\tau,t).$$
Рівняння (23) – це формула (14) для фундаментальної матриці $U(\cdot,\tau)$ при фіксованому τ. Що стосується (24), то
$$\tfrac{d}{d\tau}U(t,\tau)\overset{(22)}{=}\tfrac{d}{d\tau}U^{-1}(\tau,t)\overset{(17)}{=}-U^{-1}(\tau,t)\,\tfrac{d}{d\tau}U(\tau,t)\,U^{-1}(\tau,t)=$$
$$\overset{(22),(23)}{=}-U(t,\tau)\,A(\tau)U(\tau,t)\,U(t,\tau)\overset{(22)}{=}-U(t,\tau)\,A(\tau).$$
□

В теорії випадкових процесів тотожність (21) називається рівняння Колмогорова-Чепмена, а рівняння (23), (24) – відповідно прямим та оберненим рівняннями Колмогорова. Властивості оператора Коші мають прозорий зміст.

Нехай система (2) описує деякий реальний процес (фізичний, економічний, біологічний і т. п.). Правда, у нас цей процес не випадковий, а детермінований. Позначимо через $x_t\in\mathbb{R}^n$ стан цього процесу в момент часу t. Оператор Коші $U(t,\tau)$ описує еволюцію процесу $x_\tau\rightsquigarrow x_t$ зі стану x_τ в стан x_t з моменту часу τ до моменту t, що записуємо як $x_t=U(t,\tau)\,x_\tau$. Тоді рівняння Колмогорова-Чепмена констатує, що дві послідовні у часі еволюції $x_\tau\rightsquigarrow x_s$, $x_s\rightsquigarrow x_t$ процесу є рівносильними одній $x_\tau\rightsquigarrow x_t$, що природно. Рівність (22) означає, що після переходу $x_\tau\rightsquigarrow x_t$ завжди можна повернутися до попереднього стану за цей же час $|t-\tau|$, а ще, що оператор $U^{-1}(t,\tau)$ описує еволюцію процесу "назад" — в минуле. Пряме та обернене рівняння Колмогорова – це власне закон еволюції процесу в обох напрямках часу відповідно.

Походження терміну "оператор Коші" пояснює наступне, тепер вже очевидне твердження.

Теорема 1.7. *Розв'язок задачі Коші $\dot{x} = A(t)\,x$, $x(t_0) = x_0$ має зображення*

$$x(t) = U(t, t_0)\,x_0, \qquad t \in \mathcal{I}.$$

Хоча лінійна система має безліч фундаментальних матриць, кожна така матриця однозначно ідентифікує систему, для якої вона є матричним розв'язком.

Теорема 1.8 (про побудову лінійної системи за відомою фундаментальною матрицею)**.** *Нехай $\Phi(t)$ – неперервно диференційовна і невироджена матриця, визначена на інтервалі $\mathcal{I}$. Тоді існує єдина лінійна система $\dot{x} = A(t)\,x$ з неперервною на $\mathcal{I}$ матрицею $A(t)$, для якої $\Phi(t)$ є фундаментальною матрицею.*

Доведення. Згідно (14) повинна існувати така матриця $A(t)$, що $\Phi(t)$ задовольнятиме матричне рівняння $\dot{\Phi}\,(t) = A(t)\Phi(t)$ при $t \in \mathcal{I}$. Оскільки матриця $\Phi(t)$ за умовою теореми є невиродженою, то $A(t) = \dot{\Phi}\,(t)\Phi^{-1}(t)$. Крім того, $A(t)$ є неперервною як добуток двох неперервних матриць. □

5. Лінійні неоднорідні системи

Повернемося до вивчення неоднорідної системи (1). Для неоднорідних задач діє ще один загальний принцип лінійної математики:

нехай $T\colon V \to W$ – лінійне відображення векторних просторів V, W, тоді множина усіх розв'язків рівняння $Tv = w$ має вигляд

$$v = v_* + \ker T,$$

де v_* – будь-який відомий розв'язок цього рівняння для $w \in W$.

Отже, розв'язки неоднорідної задачі утворюють в V лінійний многовид, отриманим зсувом підпростору $\ker T$ на вектор v_*. Зокрема, *різниця двох розв'язків неоднорідної задачі є розв'язком однорідної.* Справді, якщо v_1 та v_2 – два розв'язки рівняння $Tv = w$, то $v_j = v_* + u_j$ для деяких $u_j \in V$. Тоді

$$v_2 - v_1 = (v_* + u_1) - (v_* + u_2) = u_1 - u_2 \in V.$$

Наступна теорема є реалізацією описаного вище принципу.

Теорема 1.9. *Нехай $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ – фундаментальна система розв'язків однорідної системи (2), а ψ – частковий розв'язок неоднорідної системи (1). Тоді загальний розв'язок неоднорідної системи має вигляд*

$$x(t) = \psi(t) + c_1\,\varphi_1(t) + c_2\,\varphi_2(t) + \ldots + c_n\,\varphi_n(t), \qquad t \in \mathcal{I} \tag{25}$$

де $c_1, c_2, \ldots, c_n$ – довільні сталі.

Доведення. Кожна функція вигляду (25) є розв'язком неоднорідної системи, оскільки

$$\dot{x} = \dot{\psi} + \sum_{i=1}^{n} c_i\,\dot{\varphi}_i \overset{(1),(2)}{=} A(t)\,\psi + b(t) + \sum_{i=1}^{n} c_i\,A(t)\varphi_i =$$

$$= A(t)\left(\psi + \sum_{i=1}^{n} c_i\,\varphi_i\right) + b(t) = A(t)\,x + b(t).$$

Залишилось показати, що цим вичерпуються всі розв'язки (1). Нехай x – довільний розв'язок неоднорідної системи, тоді різниця двох розв'язків x та ψ неоднорідної системи є розв'язком однорідної, і вона має однозначне зображення

$$x(t) - \psi(t) = \beta_1\, \varphi_1(t) + \ldots + \beta_n\, \varphi_n(t)$$

в базі простору $\mathbb{X}(\mathcal{I})$ для деякого набору сталих β_i, що завершує доведення. □

Зауваження 4. В цьому місці доречно зауважити, що єдиність розв'язку задачі Коші (6) можна довести без використання відповідної теореми для нелінійних систем (див. теорему 1.1). Нове доведення опирається на той факт, що різниця двох розв'язків неоднорідної задачі є розв'язком однорідної, і є стандартним для більшості лінійних задач.

Нехай φ та ψ — два *різні* розв'язки задачі (6), тоді їх різниця $g = \varphi - \psi$ не дорівнює тотожно нулю на $\mathcal{I}$. Крім того, g є розв'язком однорідної системи (9) і обертається в нуль при $t = t_0$, бо $\varphi(t_0) = \psi(t_0) = x_0$. Оскільки $g(t_0) = 0$, то розв'язок g є тривіальним за наслідком 2, що суперечить припущенню про два різних розв'язки.

Як ми вже зауважили, для систем із змінними коефіцієнтами немає конструктивного методу побудови фундаментальної системи розв'язків. Зазвичай, її просто не існує в класі елементарних функцій. Однак, у випадках, коли така система є, частковий розв'язок ψ із попередньої теореми можна знайти шляхом інтегрування відомих функцій.

Теорема 1.10 (метод варіації сталих)**.** *Нехай Φ – фундаментальна матриця лінійної однорідної системи* (2) *на інтервалі $\mathcal{I}$. Тоді існує частковий розв'язок лінійної неоднорідної системи* (1) *вигляду*

$$\psi(t) = \Phi(t) \int_{\tau}^{t} \Phi^{-1}(s)\, b(s)\, ds, \tag{26}$$

або з використанням оператора Коші —

$$\psi(t) = \int_{\tau}^{t} U(t,s)\, b(s)\, ds.$$

Тут τ – фіксована точка інтервалу $\mathcal{I}$.

Доведення. Скористаємося ідеєю, яка покладена в основу метода варіації сталої для лінійного неоднорідного рівняння. Оскільки загальний розв'язок однорідної системи має вигляд $x(t) = \Phi(t)c$, то частковий розв'язок неоднорідної спробуємо знайти у вигляді

$$\psi(t) = \Phi(t)\, \alpha(t), \tag{27}$$

де α – покищо невідома вектор-функція. Підставимо (27) у систему (1):

$$\frac{d}{dt}\big(\Phi(t)\, \alpha(t)\big) = A(t)\Phi(t)\, \alpha(t) + b(t),$$
$$\dot{\Phi}\,(t)\, \alpha(t) + \Phi(t)\, \dot{\alpha}(t) = A(t)\Phi(t)\, \alpha(t) + b(t),$$
$$\Big(\dot{\Phi}\,(t) - A(t)\Phi(t)\Big)\, \alpha(t) + \Phi(t)\, \dot{\alpha}(t) = b(t).$$

Згідно властивості 1 фундаментальної матриці остання рівність набуде вигляду $\Phi(t)\,\dot\alpha(t) = b(t)$. Оскільки матриця Φ є невиродженою на $\mathcal{I}$, то

$$\dot\alpha(t) = \Phi^{-1}(t)\,b(t).$$

Отже, вектор α знаходимо інтегруванням

$$\alpha(t) = \int\limits_{\tau}^{t} \Phi^{-1}(s)\,b(s)\,ds,$$

а підставивши цей інтеграл у (27), отримуємо формулу (26). □

Теорема 1.11 (формула розв'язку задачі Коші)**.** *Нехай x – розв'язок задачі Коші $\dot x = A(t)\,x + b(t)$, $x(t_0) = x_0$ на інтервалі $\mathcal{I}$. Тоді він має вигляд*

$$x(t) = U(t,t_0)\,x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} U(t,s)\,b(s)\,ds, \tag{28}$$

де U – оператор Коші лінійної однорідної системи (2).

Доведення. На підставі теорем 1.9, 1.10 кожен розв'язок неоднорідної системи можна записати у вигляді

$$x(t) = \Phi(t)\,c + \int\limits_{t_0}^{t} U(t,s)\,b(s)\,ds.$$

Скориставшись початковою умовою, отримаємо $x_0 = \Phi(t_0)\,c$, тобто

$$c = \Phi^{-1}(t_0)\,x_0.$$

Залишилось згадати, що $U(t,t_0) = \Phi(t)\,\Phi^{-1}(t_0)$. □

6. Комплексні розв'язки лінійні систем

Описана вище теорія лінійних систем була побудована на векторних просторах над полем $\mathbb{R}$. Таку ж теорію можна побудувати і над полем комплексних чисел $\mathbb{C}$. Нехай $:\mathcal{I} \to M(n,\mathbb{C})$ – неперервне відображення в простір матриць з комплексними коефіцієнтами, а $b\colon \mathcal{I} \to \mathbb{C}^n$ – неперервна комплекснозначна вектор-функція. Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\dot z = A(t)\,z + b(t), \qquad t \in \mathcal{I}, \tag{29}$$

де вектор $z\colon \mathcal{I} \to \mathbb{C}$ є шуканим. Означення *комплексного розв'язку* $z = z(t)$ таке ж як і означення 1 для дійснозначного. Лише тотожності, в які розв'язок $z(t)$ перетворює рівняння системи, розуміються як рівності в полі комплексних чисел. Лінійну систему (29) коротко називатимемо *комплексною*, на відміну від системи (1), про яку говоритимемо, що вона *дійсна*.

Комплексну систему можна звести до еквівалентної дійсної, правда, ця матиме вдвічі більший порядок. Справді, зобразимо всі величина через їх дійсні та уявні частини: $A(t) = A_1(t) + iA_2(t)$, $b(t) = b_1(t) + ib_2(t)$, $z(t) = u(t) + iv(t)$, де i – уявна одиниця. Тоді

$$\dot u + i\dot v = (A_1 + iA_2)(u + iv) + b_1 + ib_2.$$

Далі, виділивши дійсну та уявну частину, матимемо

$$\begin{cases} \dot u = A_1(t)\,u - A_2(t)\,v + b_1(t), \\ \dot v = A_2(t)\,u + A_1(t)\,v + b_2(t). \end{cases} \tag{30}$$

Ми отримали лінійну систему $\dot x = \mathcal{A}(t)\,x + f(t)$ з дійсними матрицею коефіцієнтів та вектором правих частин

$$\mathcal{A}\colon \mathcal{I} \to M(2n,\mathbb{R}), \qquad f\colon \mathcal{I} \to \mathbb{R}^{2n}$$

стосовно невідомого дійсного вектора $x = (u,v)^{\perp}$. Тут

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A_1 & -A_2 \\ A_2 & A_1 \end{pmatrix}, \qquad f = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

Зрозуміло, що тепер і дійсна система може мати комплексні розв'язки.

Лема 6. *Нехай $z(t)$ — комплексний розв'язок дійсної системи (1). Тоді його дійсна частина $u(t) = \operatorname{Re} z(t)$ є розв'язком цієї ж неоднорідної системи (1), а уявна $v(t) = \operatorname{Im} z(t)$ — розв'язком відповідної однорідної системи (2). Зокрема, якщо $z(t)$ — комплексний розв'язок однорідної системи (2), то обидві функції $u(t)$, $v(t)$ — також розв'язки однорідної системи (2).*

Доведення. Якщо систему (1) трактувати все-таки як комплексну систему (29), то для останньої $A_1 = A$, $A_2 = 0$, $b_1 = b$, $b_2 = 0$. А тоді система (30) набуває вигляду

$$\begin{cases} \dot u = A(t)\,u + b(t), \\ \dot v = A(t)\,v. \end{cases}$$

Звідси випливають всі твердження леми. □

Отже, комплексні розв'язки, взагалі кажучи, не дають нічого нового для вивчених у попередніх параграфах дійсних систем. Однак, далі ми неодноразово застосовуватимемо цю лему там, де використання комплексних чисел буде неминучим.