Іспит з диференціальних рівнянь
студента групи ПМІ-23
Петришина Максима

А) Знайдіть розвязок задачі Коші
$y' = (9x+y)^2, \quad y(0)=0$

Заміна:

$z = 9x+y$
$z' = 9 + y'$ або $y' = z' - 9$
$z' - 9 = z^2$
$z' = z^2 + 9$

рівняння з відокр. змінними

$\frac{dz}{dx} = z^2+9; \quad \frac{dz}{z^2+9} = dx; \quad \int \frac{dz}{z^2+9} = \int dx$

$\frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{z}{3} = x + C; \quad \frac{z}{3} = \operatorname{tg} 3(x+C); \quad z = 3 \operatorname{tg} 3(x+C)$

$9x + y = 3 \operatorname{tg} 3(x+C)$

$\underline{y = 3 \operatorname{tg} 3(x+C) - 9x}$, — загальний розвязок

Умова $x=0, \; y=0$

$0 = 3 \operatorname{tg} 3C$

$\operatorname{tg} 3C = 0; \quad C = 0 + \pi k$

$\underline{y = 3 \operatorname{tg} 3x - 9x}$, — розвязок задачі Коші

13) Розвязати задачу Коші $(xy'-3)\ln x = 2y$, $y(e) = 2$

$(xy'-3)\ln x = 2y \quad y(e) = 2$

$xy'\ln x - 3\ln x = 2y$

$xy'\ln x - 2y = 3\ln x$

$y' - \frac{1}{x\ln x}2y = \frac{3}{x}$ – це лінійне неоднорідне

Однорідне лінійне

$y' - \frac{1}{x\ln x}2y = 0$

$y' = \frac{1}{x\ln x}2y$; $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\ln x}2y$

$\frac{dy}{y} = 2\frac{1}{\ln x}\frac{dx}{x}$; $\int\frac{dy}{y} = 2\int(\ln x)^{-1}d(\ln x)$

$\ln|y| = 2\ln|\ln|x|| + \ln|C|$

$\ln|y| = \ln(|(\ln|x|)^2|\cdot C)$; $y = C(\ln|x|)^2$

$y_0 = C\ln^2 x$ – загальний розвязок лінійного однорідного

Розвязок неоднорідного

$y' - \frac{1}{x\ln x}2y = \frac{3}{x}$

Шукаємо у вигляді:

$y = C(x)\cdot\ln^2 x$

Тоді $y' = C'\ln^2 x + C\cdot 2\ln x\frac{1}{x}$

Підставляємо в р-ня

$C'\ln^2 x + C2\ln x\cdot\frac{1}{x} - \frac{1}{x\ln x}\cdot 2C\ln^2 x = \frac{3}{x}$

$C'\cdot\ln^2 x = \frac{3}{x}$; $C' = \ln^{-2}x\cdot\frac{3}{x}$; $C = \int\ln^{-2}x\cdot\frac{3}{x}dx = 3\int(\ln x)^{-2}d(\ln x) =$

$= -3\ln(x)^{-1} + C_1 = -\frac{3}{\ln x} + C_1$

Загальний розвязок неоднорідного

$y = \left(-\frac{3}{\ln x} + C_1\right)\cdot(\ln x)^2$

$$y = -3\ln x + C_1 \ln^2 x$$

Умова $x = e$, $y = 2$

Тоді $2 = -3\ln e + C_1 \ln^2 e$

$$2 = -3 + C_1$$

$$C_1 = 5$$

Розвязок задачі Коші

$$y = -3\ln x + 5\ln^2 x$$

$$y = \ln x(5\ln x - 3)$$

c) Розвʼяжіть неявне рівняння $y - y'^2 = (x-2)y'$

$y - (y')^2 = (x-2)y'$

$y = (x-2)y' + (y')^2$

$y = xy' + (y')^2 - 2y'$ — це р-ня Клеро

Заміна : $\underline{y' = p\ ,\ dy = p\,dx}$

$y = xp + p^2 - 2p$

Диференціюємо

$dy = p\,dx + x\,dp + 2p\,dp - 2\,dp$

$p\,dx = p\,dx + x\,dp + 2(p-1)\,dp$

$(x + 2(p-1))\,dp = 0$

$x = 2(1-p)$ $\qquad$ $p = C$

$x = 2(1-p)$

$y = xp + p^2 - 2p$

$y = 2(1-p)\cdot p + p^2 - 2p$

$y = \cancel{2p} - 2p^2 + p^2 - \cancel{2p}$; $\quad y = -p^2$

$\begin{cases} x = 2(1-p) \to p = 1 - \frac{x}{2} \\ y = -p^2 \end{cases}$ $\quad y = -(1 - \frac{x}{2})^2$ — особливий розвʼязок

Загальний розвʼязок

$y = xp + p^2 - 2p$

Оскільки $dp = 0$ і $p = C$, маємо:

$y = Cx + C^2 - 2C$

Д) Знайдіть розв'язок задачі Коші

$y''-6y'+8y=(9x-12)e^x, \quad y(0)=0, \quad y'(0)=3$

Однорідне

$y''-6y'+8y=0$

Характеристичне

$\lambda^2-6\lambda+8=0$

$D=36-32=4$

$\lambda_{1,2}=\dfrac{6\pm2}{2}; \quad \lambda_1=4 \quad \lambda_2=2$

Заг. розв. однорідного р-ня:

$\boxed{y_0=C_1e^{4x}+C_2e^{2x}}$

Частковий розв'язок неоднорідного шукаємо у вигляді:

$y_ч=(ax+b)e^x$

$y'_ч=ae^x+(ax+b)e^x$

$y''_ч=ae^x+ae^x+(ax+b)e^x$

$y''_ч=e^x(2a+b+ax)$

Підставляємо у р-ня

$y''-6y'+8y=(9x-12)e^x$

$e^x(2a+b+ax)-6e^x(a+ax+b)+8(ax+b)e^x=(9x-12)e^x$

$2a+b+ax-6a-6b-6ax+8ax+8b=9x-12$

Прирівнюємо коефіцієнти при степенях x

$3a=9 \quad \boxed{a=3}$

$-4a+3b=-12 \quad \boxed{b=0}$

Загальний розв'язок неоднорідного $y=y_0+y_ч$

$\boxed{y=C_1e^{4x}+C_2e^{2x}+3xe^x}$

Умови $x=0$, $y=0$, $y'=3$

Знайдемо похідну розв'язку

$y'=4C_1e^{4x}+2C_2e^{2x}+3xe^x+3e^x$

Підставивши умову, одержимо:

$\begin{cases}0=C_1+C_2\\3=4C_1+2C_2+3\end{cases} \quad \begin{cases}C_1=0\\C_2=-2C_1\end{cases}$

$C_1=0 \quad C_2=0$

Розв. задачі Коші:

$\boxed{y=3xe^x}$

E) Розвяжіть систему диф. рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 3x_1 + 2x - 9 \\ \dot{x}_2 = -4x_1 - x_2 + 7 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} -9 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Власні числа

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ -4 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(\lambda - 3)(1 + \lambda) + 8 = 0$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$$

$$D = 4 - 20 = -16$$

$$\sqrt{D} = 4i$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm 4i}{2} = 1 \pm 2i$$

$e^t \cos 2t$, $e^t \sin 2t$

$e^t \cos 2t$ $e^t \sin 2t$

7) Опишіть фазовий портрет динамічної
системи

$\dot{x} = (x-3)(y-2)$
$\dot{y} = (x-1)(y-1)$

$A(3;1)$
$B(1;2)$

$\dot{x} = xy - 2x - 3y + 6$
$\dot{y} = xy - y - x + 1$

$\frac{df_1}{dx} = y-2 \qquad \frac{df_1}{dy} = x-3$

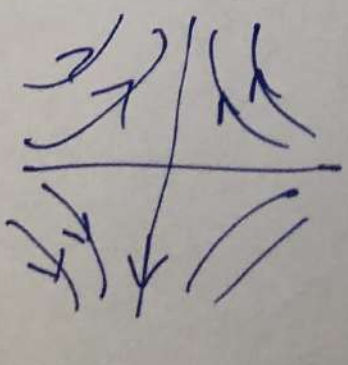
$\frac{df_2}{dx} = y-1 \qquad \frac{df_2}{dy} = x-1$

$\begin{pmatrix} y-2 & x-3 \\ y-1 & x-1 \end{pmatrix}$

1) т. A $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\lambda = -1$ $\lambda = 2 \Rightarrow$ сідло

$\lambda = -1$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = 0$ $\alpha = 1$, $\beta = 0$ $h_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\lambda = 2$ $\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = 0$ $h_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$



– c

7. B $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\lambda_1 = \sqrt{2}i$

$\lambda_2 = -\sqrt{2}i$

$h_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2}i \\ 1 \end{pmatrix}$ $h_2 \begin{pmatrix} -\sqrt{2}i \\ 1 \end{pmatrix}$