Date

Домашняя работа № 1

1.6. $y = \sin(x+C)$ $\quad y^2 + y'^2 = 1$

$y' = \cos(x+C)$

$\sin^2(x+C) + \cos^2(x+C) = 1$

$1 \equiv 1$

Б-до: є розв'язком

1.7. $y = ax^2 + bx$ $\quad x(x-2)y'' - (x^2-2)y' + 2(x-1)y = 0$

$y' = 2ax + b$

$y'' = 2a$

$x(x-2)2a - (x^2-2)(2ax+b) + 2(x-1)(ax^2+bx) = 0$

$2ax^2 - 4ax - 2ax^3 - bx^2 + 4ax + 2b + 2ax^3 + 2bx^2 - 2ax^2 - 2bx = 0$

$bx^2 + 2b - 2bx = 0$

Б-до: при $b=0$, ф-ція є розв. д.р.
при $b \neq 0$, ф-ція не є розв. д.р.

1.8. $xy' + y = y^2$ $\quad y(1) = 0{,}5$

$x\frac{dy}{dx} + y = y^2 \mid \cdot dx$

$x\,dy + y\,dx = y^2\,dx$

Date

$x\,dy = y(y-1)\,dx \quad | : x \quad | : y(y-1)$

$\int \frac{dy}{y(y-1)} = \int \frac{dx}{x}$

$\int \frac{dy}{y(y-1)} = -\ln|y| + \ln|y-1| + C_1$

$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C_2$

$-\ln|y| + \ln|y-1| = \ln|x| + C$ - розв. р-ня

$dx = 0$

$x = C_1 \rightarrow y'$ - не існує

$x = 0 \rightarrow y'$ - не існує

$y(y-1) = 0$

$y = 0 \qquad y = 1$

$\underbrace{y' = 0 \quad y' = 0}$

розв. р-ня

$y(1) = 0{,}5$

$-\ln|y(1)| + \ln|y(1)-1| - \ln|1| = C$

$-\ln 0{,}5 + \ln 0{,}5 - \ln 1 = C$

$C = 0$

Date

1.2.12. $(xy^2+x)dx+(y-x^2y)dy=0$

$(xy^2+x)dx=-(y-x^2y)dy$

$x(y^2+1)dx=-y(1-x^2)dy \mid :(y^2+1) \mid :(1-x^2)$

$\int \frac{x\,dx}{1-x^2}=\int -\frac{y\,dy}{y^2+1}$

$\int \frac{x\,dx}{1-x^2}=-\frac{1}{2}\ln|1-x^2|+C_1$

$-\int \frac{y\,dy}{y^2+1}=-\frac{1}{2}\ln(y^2+1)+C_2$

$-\frac{1}{2}\ln|1-x^2|+C_1=-\frac{1}{2}\ln(y^2+1)+C_2$

$-\frac{1}{2}\ln|1-x^2|=-\frac{1}{2}\ln(y^2+1)+C$

$y^2+1=0$ $\quad$ $1-x^2=0$

$y^2=0$ $\quad$ $x=1$ $\quad$ $x=-1$

$\varnothing$ $\quad$ не є розв. р-ня

1.2.13. $z'=10^{x+z}$

$z'=10^x\cdot 10^z$

$\frac{dz}{dx}=10^x\cdot 10^z \mid \cdot dx$

$dz=10^x 10^z dx \mid :10^z$

$\int \frac{dz}{10^z}=\int 10^x dx$

Date

$$\int \frac{dz}{10^z} = -\frac{1}{\ln 10 \cdot 10^z} + C_1$$

$$\int 10^x dx = \frac{10^x}{\ln 10} + C_2$$

$$-\frac{1}{\ln 10 \cdot 10^z} = \frac{10^x}{\ln 10} + C$$

$dx = 0$

$z' = \frac{dz}{dx}$ - не розв.

$10^z = 0$

$z \in \varnothing$

1.3.2. $y' = \sqrt{4x + 2y - 1}$

Заміна: $4x + 2y - 1 = z$

$z' = 4 + 2y'$

$y' = \frac{z' - 4}{2}$

$\frac{z' - 4}{2} = \sqrt{z}$

$\frac{z'}{2} = \frac{\sqrt{z} + 2}{1} \mid \cdot 2$

$z' = 2(\sqrt{z} + 2)$

$\frac{z'}{\sqrt{z} + 2} = 2$

Date

$\frac{dz}{\sqrt{z}+2} = 2dx$

$2\sqrt{z} - 4\ln(\sqrt{z}+2) = 2x + C$

Повернемось до заміни:

$2\sqrt{4x+2y-1} - 4\ln|\sqrt{4x+2y-1}+2| = 2x + C$

1.3.14. $(\underset{1}{x} - \underset{1}{y} - \underset{2}{\sqrt{xy}})dx - \underset{1}{x}dy = 0$ - однор. р-ня

$(x - y - \sqrt{xy})dx = x\,dy$

Заміна: $\frac{y}{x} = z$, $y = zx$

$dy = x\,dz + z\,dx$

$(x - zx - \sqrt{x^2 z})dx = x(x\,dz + z\,dx) \mid :x$

$(1 - z - \sqrt{z})dx - (x\,dz + z\,dx)$

$(1 - z - \sqrt{z})dx - x\,dz - z\,dx = 0$

$(1 - \sqrt{z} - 2z)dx - x\,dz = 0 \mid :x \mid : 1 - \sqrt{z} - 2z$

$\int \frac{dx}{x} - \int \frac{dz}{1 - \sqrt{z} - 2z} = 0$

$\ln|x| + 2\left(\frac{\ln|\sqrt{z}+1|}{3} + \ln|2\sqrt{z} - 1|\right) = C$

Перевірка:

$x = 0$

$0 = 0$

розв.

$1 - \sqrt{z} - 2z = 0$

$z = \frac{1}{4}$ $\quad y = \frac{x}{4}$

$\frac{x}{4}dx - \frac{x}{4}dx = 0$ - розв

Date

1.3.15 $xy' - y = (x+y)\ln\left(\frac{x+y}{x}\right)$ - однор. р-ня

Заміна: $\frac{y}{x} = z$, $y = zx$

$y' = z'x + z$

$x(z'x + z) - zx = (x + zx)\ln\left(\frac{x+zx}{x}\right)$

$x(z'x + z - z) = x(1+z)\ln(1+z) \mid :x$

$z'x = (1+z)\ln(1+z)$

$\frac{dz}{dx} \cdot x = (1+z)\ln(1+z) \mid dx \mid :x \mid (1+z)\ln(1+z)$

$$\int \frac{dz}{(1+z)\ln(1+z)} = \int \frac{dx}{x}$$

$\ln(\ln|1+z|) - \ln|x| = C$

$\ln(\ln|1+\frac{y}{x}|) - \ln|x| = C$ - розв. р-ня

Перевірка:

$x = 0$ - не розв., y' не існує

$dx = 0$ - не розв.

$(1+z)\ln(1+z) = 0$

$z = -1 \quad \ln(1+z) = 0$

$y = -x \qquad z = 0, y = 0 \quad 0 \equiv x\ln 1$ - розв.

1.3.16. $(2y-2x)dx+(y-3x)dy=0$ - однор. р-ня

Заміна: $z=\frac{y}{x}$, $y=zx$

$dy=xdz+zdx$

$(2zx-2x)dx+(zx-3x)(xdz+zdx)=0 \mid :x$

$(2z-2)dx+(z-3)(xdz+zdx)=0$

$(2z-2)dx+(z-3)xdz+(z-3)zdx=0$

$(z^2-z-2)dx+(z-3)xdz=0 \mid : z^2-z-2 \mid :x$

$\int\frac{dx}{x}+\int\frac{z-3}{z^2-z-2}dz=0$

$\ln|x|+\frac{4}{3}\ln|z+1|-\frac{1}{3}\ln|z-2|+C$

$\ln|x|+\frac{4}{3}\ln\left|\frac{y}{x}+1\right|-\frac{1}{3}\ln\left|\frac{y}{x}-2\right|+C$

Перевірка!

$y=0$

$0+ydy=0$ - не годиться, не розв.

$z^2-z-2=0$

$z_1=2 \qquad z_2=-1$

$y=2x \qquad y=-x \qquad -4xdx+4xdy=0$

$dx=dy$

розв.

$4xdx-4xdy=0$

$dx=dy$ - розв.