Домашнє завдання № 6

6.3. $xy'^2 - 2yy' + x = 0$

$D = 4y^2 - 4x^2$

$y_1' = \dfrac{2y + 2\sqrt{y^2 - x^2}}{2x} = \dfrac{y + \sqrt{y^2 - x^2}}{x}$

$y_2' = \dfrac{y - \sqrt{y^2 - x^2}}{x}$

$y_1' = \dfrac{\cancel{2}y + \cancel{2}\sqrt{y^2 - x^2}}{x}$

$y' = \dfrac{y}{x} + \dfrac{\sqrt{y^2 - x^2}}{x}$

$y' = \dfrac{y}{x} + \sqrt{\dfrac{y^2}{x^2} - 1}$

Заміна: $\dfrac{y}{x} = z,\ y = xz$

$y' = xz' + z$

$xz' + z = z + \sqrt{z^2 - 1}$

$xz' = \sqrt{z^2 - 1}$

$x\dfrac{dz}{dx} = \sqrt{z^2 - 1} \,\Big|\cdot \dfrac{dx}{x}\,\Big|:\sqrt{z^2 - 1}$

$\displaystyle\int \frac{dz}{\sqrt{z^2 - 1}} = \int \frac{dx}{x}$

$\ln|z + \sqrt{z^2 - 1}| = \ln|x| + \ln|C|$

$z + \sqrt{z^2 - 1} = xC$

$\dfrac{y}{x} + \sqrt{\dfrac{y^2}{x^2} - 1} = xC$

$y_2' = \dfrac{y - \sqrt{y^2 - x^2}}{x}$

$y' = \dfrac{y}{x} - \sqrt{\dfrac{y^2}{x^2} - 1}$

Заміна: $\dfrac{y}{x} = z,\ y = xz$

$y' = xz' + z$

$xz' + z = z - \sqrt{z^2 - 1}$

$\displaystyle\int \frac{dz}{\sqrt{z^2 - 1}} = -\int \frac{dx}{x}$

$\ln|z + \sqrt{z^2 - 1}| = -\ln|x| + \ln$

$\dfrac{y}{x} + \sqrt{\dfrac{y^2}{x^2} - 1} = \dfrac{1}{x} C_1$

Перевірка: $x=0$ - не розв.

$dx=0 \Rightarrow x=C_2$ - не розв.

Віднаходж. дискр. кривих:

$$\begin{cases} xy'^2-2yy'+x=0 \quad (*) \\ 2xy'-2y+0=0 \end{cases} \qquad y'=\frac{y}{x}$$

$$x\left(\frac{y}{x}\right)^2-2y\left(\frac{y}{x}\right)+x=0$$

$$\frac{y^2}{x}-\frac{2y^2}{x}+x=0$$

$$-\frac{y^2}{x}+x=0$$

$$\frac{y^2}{x}=x$$

$y^2=x^2$ $\qquad$ $y=\pm x$ - дискр. крива

Перевірка чи є дискр. крива розв. р-ня

$y=x \rightsquigarrow$ р-ня $\qquad x-2y+x=0$

$y'=1$ $\qquad -2y+2x=0$

$y=-x$

$y=x$ - розв.

$y=-x \rightsquigarrow$ р-ня $\qquad x+2y+x=0$

$y'=-1$ $\qquad 2y=-2x$

$y=-x$ - розв.

В-дь: $\frac{y}{x}+\sqrt{\frac{y^2}{x^2}-1}=xC_1$, $\frac{y}{x}+\sqrt{\frac{y^2}{x^2}-1}=\frac{1}{x}C_2$

$y=x$, $y=-x$

Date

2.3.13. $x^2y'^2 = xyy' + 1 \mid : xy'$

$$xy' = y + \frac{1}{xy'}$$

$$y = xy' - \frac{1}{xy'}$$

$y' = p$

$y = xp - \frac{1}{xp}$ - 1-ша г. б-ді

$dy = d\left(xp - \frac{1}{xp}\right)$

$\frac{dy}{dp} = p \Rightarrow dy = pdx$

$pdx = xdp + pdx - \left(-\frac{d(xp)}{x^2p^2}\right)$

$\cancel{pdx} = xdp + \cancel{pdx} + \frac{xdp + pdx}{x^2p^2}$

$xdp + \frac{dp}{xp^2} + \frac{dx}{x^2p} = 0$

$\left(x + \frac{1}{xp^2}\right)dp + \frac{1}{x^2p}dx = 0 \mid \cdot \frac{x^2p}{dp}$

$x^3p + \frac{x}{p} + \frac{dx}{dp} = 0$

$x' = -x^3p - \frac{x}{p} \mid : x^3$

$\frac{x'}{x^3} = -p - \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{p}$

Заміна: $z = \frac{1}{x^2}$ $z' = -2\frac{x'}{x^3}$ $\frac{x'}{x^3} = -\frac{z'}{2}$

$-\frac{z'}{2} = -p - \frac{1}{p}z \mid \cdot (-2)$

$z' = 2p + \frac{2}{p}z$

Date

1) $z' = \frac{2}{p} z$

$\frac{dz}{dp} = \frac{2}{p} z \mid \cdot \frac{dp}{z}$

$\cancel{\frac{dz}{dp}} \int \frac{dz}{z} = \int \frac{2}{p} dp$

$\ln|z| = 2\ln|p| + \ln|C|$

$z = p^2 C$

2) $z = p^2 \varphi(p)$

3) $\cancel{2p\varphi(p)} + \varphi'(p) p^2 = 2p + \cancel{\frac{2}{p} p^2 \varphi(p)}$

$p^2 \varphi'(p) = 2p \mid : p^2$

$\varphi(p) = \int \frac{2}{p} dp = 2\ln|p| + C_1$

$z = p^2 (2\ln|p| + C_1)$

$\frac{1}{x^2} = p^2 (2\ln|p| + C_1)$ - 2-га ч. в-ді;

Перевірка: $x = 0$

$0 = 1$ - не тотож. не розв.

$y' = 0 \Rightarrow y = C_2$

$0 = 1$

$p = 0$ - не розв. $x^3 = 0 \Rightarrow x = 0$

Відшук. дискр. кривих:

$\begin{cases} x^2 y'^2 = xyy' + 1 \\ 2x^2 y' = xy \end{cases}$ (A) $y' = \frac{y}{2x}$

Date

$x^2\left(\frac{y}{2x}\right)^2 = xy\left(\frac{y}{2x}\right)+1$

$\cancel{x^2}\,\frac{y^2}{4\cancel{x^2}} = \cancel{x}\cdot\frac{y^2}{2\cancel{x}}+1$

$\frac{y^2}{4} = \frac{y^2}{2}+1 \quad |\cdot 4$

$y^2 = 2y^2+4$

$-y^2=4$

$y^2=-4$

$y \notin \mathbb{R}$

2.3.14. $yy'^2-(xy+1)y'+x=0$

$yy'^2-xyy'-y'+x=0$

$yy'^2-y'+x(-yy'+1)=0$

$yy'^2-y'=x(yy'-1) \quad |:(yy'-1)$

$y'=x$

$y'=p$ - 1-ma r. b-gi

$dx=dp$

$\frac{dy}{dx}=p \quad dx=\frac{dy}{p}$

$\frac{dy}{p}=dp \quad |\cdot p$

$\int dy=\int p\,dp$

$y=\frac{p^2}{2}+C$ - 2-ca r. b-gi

Date

Перевірка: $yy' = 1$

$p=0 \Rightarrow y'=0 \Rightarrow y = C_1$

$0 \cdot 0 + x = 0$

$x = 0$

не тотож

не розв.

$y\frac{dy}{dx} = 1 \quad | \cdot dx$

$\int y\,dy = \int dx$

$\frac{y^2}{2} = x \quad | \cdot 2$

$y^2 = 2x \Rightarrow y = \pm\sqrt{2x}$

$y = \sqrt{2x} \Rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{2x}}$

$\sqrt{2x}\left(\frac{1}{\sqrt{2x}}\right)^2 - (x\sqrt{2x} + 1)\frac{1}{\sqrt{2x}} + x = 0$

$\frac{\sqrt{2x}}{2x} - \cancel{x} - \frac{1}{\sqrt{2x}} + \cancel{x} = 0$

$\frac{\sqrt{2x}}{2x} = \frac{1}{\sqrt{2x}} \quad | \cdot \sqrt{2x}$

$1 = 1$ -

$0 = 0$ - розв.

$y = -\sqrt{2x} \Rightarrow y' = -\frac{1}{\sqrt{2x}}$

$-\frac{\sqrt{2x}}{2x} - \cancel{x} + \frac{1}{\sqrt{2x}} + \cancel{x} = 0$

$-\frac{\sqrt{2x}}{2x} = -\frac{1}{\sqrt{2x}}$

$1 = 1$

$0 = 0$ - розв.

Відшук. дискр. кривої:

$$\begin{cases} yy'^2-(xy+1)y'+x=0 \\ 2yy'-(yx+1)=0 \end{cases} \quad (*)$$

$$2yy' = xy+1$$
$$y' = \frac{xy+1}{2y}$$

$$y\left(\frac{xy+1}{2y}\right)^2-(xy+1)\left(\frac{xy+1}{2y}\right)+x=0$$

$$y\cdot\frac{x^2y^2+2xy+1}{4y^{\cancel{2}}}-\frac{x^2y^2-2xy-1}{2y}+x=0$$

$$\frac{-x^2y^2-2xy-1}{4y}+x=0$$

$$\frac{-x^2y^2+2xy-1}{4y}=0$$

$$x^2y^2-2xy+1=0$$

$$(xy-1)^2=0$$

$$xy-1=0$$

$y=\frac{1}{x}$ – дискр. крива

Перевірка чи є дискр. крива розв. р-ня:

$y=\frac{1}{x} \rightsquigarrow$ р-ня $\quad \frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)^2-\left(x\cdot\frac{1}{x}+1\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)+x=0$

$y'=-\frac{1}{x^2} \quad \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^2}+x=0$

не тотож.

не розв.

Date

2.3.15. $x(1-y')+y'^2=y'+y \quad |:(1-y')$

$$x+\frac{y'^2}{1-y'}=\frac{y'}{1-y'}+\frac{y}{1-y'}$$

$$x=\frac{y'}{1-y'}-\frac{y'^2}{1-y'}+\frac{y}{1-y'}$$

$$x=y'+\frac{y}{1-y'}$$

$$y'=p$$

$$x=p+\frac{y}{1-p}$$ – 1-ша г. б-ді

$$dx=d\left(p+\frac{y}{1-p}\right)$$

$$y'=p \quad \frac{dy}{dx}=p \rightarrow dx=\frac{dy}{p}$$

$$\frac{dy}{p}=dp+d\left(\frac{y}{1-p}\right)$$

$$\frac{dy}{p}=dp+\frac{dy}{1-p}+\frac{y}{(1-p)^2}dp$$

$$\underbrace{\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{1-p}\right)}_{M}dy-\underbrace{\left(1+\frac{y}{(1-p)^2}\right)}_{N}dp=0$$

$$\frac{\partial M}{\partial p}-\frac{\partial N}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{1-p}\right)-$$

$$-\frac{\partial}{\partial y}\left(1+\frac{y}{(1-p)^2}\right)=-\frac{1}{p^2}-\frac{1}{(1-p)^2}+\frac{1}{(1-p)^2}=$$

$$=-\frac{1}{p^2}\neq 0$$

Знайдемо інтег. м-ник: (★) $| \cdot \mu$

$$\mu\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{1-p}\right)dy-\mu\left(1+\frac{y}{(1-p)^2}\right)dp=0$$

Знайдемо $\mu(p)$:

$$\frac{\partial M}{\partial p}-\frac{\partial N}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial p}\left(\mu(p)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{1-p}\right)\right)-$$

$$-\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu(p)\left(-1+\left(-\frac{y}{(1-p)^2}\right)\right)\right)=\mu'(p)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{1-p}\right)+$$

$$+\mu(p)\left(-\frac{1}{p^2}-\frac{\cancel{1}}{(1-p)^2}\right)+\cancel{\mu(p)\frac{1}{(1-p)^2}}=$$

$$=\mu'(p)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{1-p}\right)+\mu(p)\left(-\frac{1}{p^2}\right)$$

$$\mu'(p)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{1-p}\right)=\mu(p)\left(\frac{1}{p^2}\right)\Big|:\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{1-p}\right)$$

$$\mu'(p)=\mu(p)\frac{1-p}{p-2p^2}$$ у нема — $\mu(p)$ існує

$$\mu'=\frac{1-p}{p-2p^2}\mu$$

$$\frac{d\mu}{dp}=\frac{1-p}{p-2p^2}\mu\Big|\cdot\frac{dp}{\mu}$$

$$\int\frac{d\mu}{\mu}=\int\frac{1-p}{p-2p^2}dp$$

$$\ln|\mu|=\ln|p|-\frac{1}{2}\ln|1-2p|+\ln|C|$$

$$\mu=p(1-2p)^{-\frac{1}{2}}$$ — інтег. м-ник

$$\frac{\partial M}{\partial p}-\frac{\partial N}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{p}{\sqrt{1-2p}}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{1-p}\right)\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{p}{\sqrt{1-2p}}\cdot\right.$$

Date

$$\left(-1-\frac{y}{(1-p)^2}\right)\Bigg) = \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{1}{\sqrt{1-2p}} - \frac{p}{\sqrt{1-2p}\,(1-p)}\right) -$$

$$-\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{p}{\sqrt{1-2p}} - \frac{py}{\sqrt{1-2p}\,(1-p)^2}\right) = -\frac{p}{\sqrt{1-2p}\,(p-1)^2} +$$

$$+\frac{p}{\sqrt{1-2p}\,(p-1)^2} = 0$$

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dy} = \dfrac{1}{\sqrt{1-2p}} - \dfrac{p}{\sqrt{1-2p}\,(1-p)} \\ \dfrac{du}{dp} = -\dfrac{p}{\sqrt{1-2p}} - \dfrac{py}{\sqrt{1-2p}\,(1-p)^2} \end{cases} \quad (\star_1)$$

$$(\star_1)\ \int \frac{du}{dp} = \frac{-(1-p)^5 + y - py - 3p^2y + 3p^3y}{\sqrt{1-2p}\,(1-2p)(1-p)^4} +$$

$$+\varphi(y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-(1-p)^5 + y - py - 3p^2y + 3p^3y}{\sqrt{1-2p}\,(1-2p)(1-p)^4} + \varphi(y)\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-2p}} - \frac{p}{\sqrt{1-2p}\,(1-p)}$$

$$\varphi'(y) = 0;\quad \varphi(y) = C$$

$$\begin{cases} x = p + \dfrac{y}{1-p} \\ \dfrac{\sqrt{1-2p}\,(p^2-3y-1)}{3(p-1)} = C \end{cases}$$

Перевірка: $(1-y') = 0$

$y' = 1$

$y = x + C$

Date

$x(1-1)+1=1+(x+C)$

$C=0$

$y=x$ - нетотожн. не розв.

$p=0$

$y'=0$

$y=C_1$

$x(1-0)+0=0+C_1$

$x=C_1$ - не тотожн. не розв.

Відшук. дискр. кривих:

$$\begin{cases} x(1-y')+y'^2=y'+y \\ x+2y'=1 \end{cases} \quad (\lambda_2) \quad y'=\frac{1-x}{2}$$

$$x\left(1-\frac{1-x}{2}\right)+\left(\frac{1-x}{2}\right)^2=\frac{1-x}{2}+y$$

$y=\frac{x-1}{4}$ - дискр. крива

Перевірка чи є дискр. крива розв. р-ня:

$y=\frac{x-1}{4} \rightsquigarrow$ р-ня $\quad x\left(1-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{16}=\frac{1}{4}+\frac{x-1}{4}$

$y'=\frac{1}{4} \qquad \frac{1}{4}x=\frac{1}{16}$

$x=\frac{1}{4}$ - не тотожн.

не розв.

2.3.16. $y'^3=3(xy'-y)$

$y'^3=3xy'-3y$

$y=xy'-\frac{y'^3}{3}$

$y' = p$

$y = xp - \frac{p^3}{3}$ - 1-ша ч. в-ді

$dy = d(xp) - d\left(\frac{p^3}{3}\right)$

$y' = p \quad \frac{dy}{dx} = p \quad dy = pdx$

$pdx = xdp + pdx - d\left(\frac{p^3}{3}\right)$

$\cancel{pdx} = xdp + \cancel{pdx} - p^2 dp \mid : dp$

$$\begin{cases} x = p^2 \\ y = xp - \frac{p^3}{3} \end{cases}$$

Перевірка : $dp = 0 \Rightarrow p = C_1$

$$\begin{cases} y = xp - \frac{p^3}{3} \\ p = C_1 \end{cases} \Rightarrow y = xC_1 - \frac{C_1^3}{3}$$

Відшук. дискр. кривих:

$$\begin{cases} y'^3 = 3(xy' - y) \quad (*) \\ 3y'^2 = 3x \end{cases}$$

$y'^2 = x \Rightarrow y' = \pm\sqrt{x}$

$y' = \sqrt{x}$

$x\sqrt{x} = 3x\sqrt{x} - 3y$

$2x\sqrt{x} = 3y$

$y = \frac{2}{3}x\sqrt{x}$

$y' = -\sqrt{x}$

$-x\sqrt{x} = -3x\sqrt{x} - 3y$

$3y = -2x\sqrt{x}$

$y = -\frac{2}{3}x\sqrt{x}$

Date

Перевірка чи є дискр. криві розв. р-ня:

$y = \frac{2}{3} x\sqrt{x} \rightsquigarrow$ р-ня
$y' = \sqrt{x}$

$x\sqrt{x} = 3x\sqrt{x} - \frac{2}{3} x\sqrt{x}$
$x\sqrt{x} = \frac{7x\sqrt{x}}{3}$
не тотожн.
не розв.

$y = -\frac{2}{3} x\sqrt{x} \rightsquigarrow$ р-ня
$y' = -\sqrt{x}$

$-x\sqrt{x} = -3x\sqrt{x} + \frac{2}{3} x\sqrt{x}$
$-x\sqrt{x} = -\frac{7x\sqrt{x}}{3}$
не тотожн.
не розв.

2.3.17. $xy' + \sqrt{1-y'^2} - y = 0$

$y = xy' + \sqrt{1-y'^2}$

$y' = p$

$y = xp + \sqrt{1-p^2}$ - 1-ша г. в-ді

$dy = d(xp) + d(\sqrt{1-p^2})$

$y' = p \quad dy = pdx$

$\cancel{pdx} = xdp + \cancel{pdx} + dp\left(-\frac{p}{\sqrt{1-p^2}}\right)$

$x = \frac{p}{\sqrt{1-p^2}}$ - 2-га г. в-ді

$$\begin{cases} y = xp + \sqrt{1-p^2} \\ x = \frac{p}{\sqrt{1-p^2}} \end{cases}$$

Перевірка: $dp = 0 \Rightarrow p = C_1$

Date

$$\begin{cases} y = xp + \sqrt{1-p^2} \\ p = C_1 \end{cases} \Rightarrow y = xC_1 + \sqrt{1-C_1^2}$$

Відшук. дискр. кривих:

$$\begin{cases} xy' + \sqrt{1-y'^2} - y = 0 \\ x - \frac{\cancel{2}y'}{\cancel{2}\sqrt{1-y'^2}} = 0 \end{cases} \quad (*)$$

$$x = \frac{y'}{\sqrt{1-y'^2}} \qquad y' = \pm\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$y' = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \qquad\qquad y' = -\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$x\cdot\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2} - y = 0 \qquad y = \frac{1-x^2}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = y$$

$y = \frac{x^2+1}{\sqrt{1+x^2}}$ → дискр. криві

Перевірка чи є дискр. криві розв. р-ня:

$y = \frac{x^2+1}{\sqrt{1+x^2}}$ ⇝ р-ня $\quad x\cdot\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \sqrt{1-\frac{x^2}{1+x^2}} - \frac{x^2+1}{\sqrt{1+x^2}} = 0$

$y' = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

$0=0$ тотожн., розв.

$y = \frac{1-x^2}{\sqrt{1+x^2}}$ ⇝ р-ня $\quad x + \left(-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) + \sqrt{1-\frac{x^2}{1+x^2}} - \frac{1-x^2}{\sqrt{1+x^2}} = 0$

$y' = -\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

$0=0$ тотожн. розв.