Розпочато	понеділок 21 грудень 2020 09:03
Стан	Завершено
Завершено	понеділок 21 грудень 2020 11:00
Витрачено часу	1 година 56 хв
Оцінка	28,9 з можливих 50,0 (58%)

Питання 1
Завершено
Балів 1,4 з 2,0

- Рівність вигляду $F(t, x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots, x^{(n)}) = 0$, в якій функція [багатьох змінних] F – [відома], функція [однієї змінної] x – [шукана] та [t] – незалежна змінна, називаємо ***звичайним диференціальним рівнянням***, якщо
  - ○ функція x ефективно залежить від часу t;
  - ○ функція F не залежить від x;
  - ◉ функція F ефективно залежить від якоїсь з похідних шуканої функції;
  - ○ функція F ефективно залежить від найстаршої похідної шуканої функції.
- Яка з рівностей є диференціальним рівнянням?
  - ○ $x^n(t) = x(t) + 1$
  - ○ $\dot{x}(t) = \int_0^t sx(s)\,ds$
  - ○ $\sin^2 \dot{x}(t) + x(t) = t^2 + \cos^2 \dot{x}(t)$
  - ○ $\sin^2 \dot{x}(t) + x(t) = t^2 - \cos^2 \dot{x}(t)$
  - ◉ $\ddot{x}(t) = x(t-1)$.

Питання 2
Завершено
Балів 1,6 з 2,0

- ***Порядком*** звичайного диференціального рівняння $F(t, x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots, x^{(n)}) = 0$ називаємо
  - ○ найменший порядок похідної шуканої функції, яка ефективно входить у рівняння;
  - ◉ число n, якщо похідна $x^{(n)}$ ефективно входить у рівняння;
  - ○ найвищий степінь незалежної змінної, який містить рівняння;
  - ○ суму порядків похідних шуканої функції.
- Який порядок мають диференціальні рівняння?
  - $(\ddot{x} - \dot{x})^2 = \ddot{x}^2 - 2\dot{x}\ddot{x} + tx$ [другий]
  - $(\ddot{x} + \dot{x})^2 = \ddot{x}^2 - 2\dot{x}\ddot{x} + tx$ [другий]
  - $(\ddot{x} + \dot{x})^2 = \ddot{x}^2 + 2\dot{x}\ddot{x} + t\dddot{x}$ [третій]

Питання 3
Завершено
Балів 2,0 з 2,0

- Якщо неперервно диференційовна функція v є потенціалом векторного поля $(m(x,y), n(x,y))$ (потенціалом для пари функцій $m(x,y)$ та $n(x,y)$), то виконується [перша] умова, серед запропонованих нижче

$$dv = m\,dx + n\,dy, \quad dv = v_x\,dx + v_y\,dy, \quad dm = dn, \quad dv = m_y\,dx + n_x\,dy.$$

- Диференціальне рівняння вигляду $m(x,y)\,dx + n(x,y)\,dy = 0$ називаємо ***рівнянням в повних диференціалах***, якщо
  - ◉ існує така функція v, що виконується рівність $dv = m\,dx + n\,dy$,;
  - ○ виконується умова $m_x = n_y$;
  - ○ вираз $m(x,y)\,dx + n(x,y)\,dy$ є повним диференціалом функції n;
  - ○ вираз $m(x,y)\,dx + n(x,y)\,dy$ є повним диференціалом функції m.
- Рівняння $m(x,y)\,dx + n(x,y)\,dy = 0$ буде рівнянням в повних диференціалах в деякому прямокутнику, тоді і лише тоді, коли в цьому прямокутнику виконується умова
  - ○ $m_x = n_y$ ○ $m_x = n_x$ ○ $m_y = n_y$ ◉ $m_y = n_x$.
- Яке з диференціальних рівнянь є рівняння в повних диференціалах?
  - ○ $(e^y - e^x)\,dx + (e^x + e^y)\,dy = 0$;
  - ◉ $(e^x + 2xy)\,dx + (e^y + x^2)\,dy = 0$;
  - ○ $(e^y + 2xy)\,dx = (e^x + y^2)\,dy$;
  - ○ $(y - x)e^y\,dx = (x + y)e^x\,dy$.

Питання 4
Завершено
Балів 1,8 з 2,0

- Функцію $g = g(x, y)$ називаємо ***однорідною степеня однорідності*** s, якщо
  - ○ $g(\alpha x, \alpha y) = sg(x, y)$ для усіх x, y та $s > 0$;
  - ◉ $g(\alpha x, \alpha y) = \alpha^s g(x, y)$ для усіх x, y та $\alpha > 0$;
  - ○ $g(\alpha x, \alpha y) = s^\alpha g(x, y)$ для усіх x, y та $\alpha > 0$.

- Якого степеня однорідності є функції?

  $f(t, x) = \dfrac{3x^2 - 2t^2}{5t^3}$ [-1]

  $f(t, x) = \ln x^3 - 3 \ln t + 1$ [0]

  $f(t, x) = \dfrac{2x - 3t}{tx^2}$ [-2]

- Диференціальне рівняння першого порядку $y' = f(x, y)$ називаємо ***однорідним рівнянням,*** якщо
  - ○ f є однорідною функцією додатного степеня однорідності;
  - ◉ f є однорідною функцією степеня однорідності 0;
  - ○ f є однорідною функцією.

- В кожній з півплощин [x>0] та [x<0] однорідне диференціальне рівняння за допомогою заміни змінних [u=tx] зводиться до рівняння [рівняння із відокремленими змінними].

- Яке з диференціальних рівнянь є однорідним?
  - ○ $y' + \ln x^2 = y$
  - ○ $y' = x^2 \ln y^2 - x^2$
  - ○ $y' = y - y^2 \ln x$
  - ◉ $xy' = y(\ln x - \ln y)$.

Питання 5
Завершено
Балів 0,4 з 2,0

- Розв'язок диференціального рівняння $\dot{x} = f(t, x)$ називаємо ***глобальним***, якщо
  - ○ він визначений на усій числові осі;
  - ◉ він визначений на найширшому інтервалі, поза яким він не існує;
  - ○ він визначений в околі кожної точки.

- Нехай x - глобальний розв'язок рівняння $\dot{x} = f(t, x)$, визначений на скінченному чи нескінченному інтервалі $I = (a, b)$. Тоді виконується кожна з двох альтернатив
  - або число b – [+∞ (+нескінченність)], або число b – [скінченна] і тоді розв'язок x має [нескінченну] границю, коли t прямує до [-0];
  - або число a – [-∞ (-нескінченність)], або число a – [скінченна] і тоді розв'язок x має [нескінченну] границю, коли t прямує до [+0].

Питання 6
Відповіді не було
Макс. оцінка до 2,0

- Якщо функція $v = v(t,x)$ – [ ] за обома змінними та [ ] за змінною x, то задача Коші $x' = v(t,x), \quad x(a) = b$ має [ ] розв'язок, який визначений [ ].

- Задача Коші $x' = v(t,x), x(a) = b$ є еквівалентною інтегральному рівнянню
  - ○ $x(t) = a + \int\limits_b^t v(s, x(s))\,ds;$
  - ○ $x(t) = b + \int\limits_a^t v(s, x(s))\,ds;$
  - ○ $x(t) = b + \int\limits_a^b v(s, x(s))\,ds;$
  - ○ $v(t, x(t)) = b + \int\limits_a^t x(s)\,ds.$

- Якому з інтегральних рівняння є еквівалентною задача Коші $\dot z = \cos(tz), z(1) = 2$?
  - ○ $z(t) = 2 + \int\limits_1^t \cos(sz(s))\,ds$
  - ○ $z(t) = 1 + \int\limits_2^t \cos(sz(s))\,ds$
  - ○ $z(t) = 2 + \int\limits_1^2 \cos(sz(s))\,ds.$

Питання 7
Завершено
Балів 2,0 з 2,0

Які з тверджень є неправильними для розв'язків лінійного однорідного рівняння

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y + a_n(x)y = 0?$$

Виберіть одну або декілька відповідей:
- [x] Стала функція завжди є його розв'язком.
- [ ] Добуток довільного розв'язку цього рівняння на число є знову його розв'язком.
- [x] Сума розв'язку цього рівняння і довільної сталої є знову його розв'язком.
- [x] Частка двох розв'язків цього рівняння є знову його розв'язком.
- [x] Добуток двох розв'язків цього рівняння є знову його розв'язком.
- [ ] Тотожно нульова функція завжди є його розв'язком.
- [ ] Довільна лінійна комбінація розв'язків є його розв'язком.
- [ ] Сума двох розв'язків цього рівняння є знову його розв'язком.

Питання 8
Завершено
Балів 0,0 з 2,0

Геометричною кратністю власного значення λ матриці A називаємо

Виберіть одну відповідь:
- ◉ кратність числа λ як кореня характеристичного визначника $\det(A - \lambda E) = 0.$
- ○ кратність числа λ як кореня визначника матриці $A.$
- ○ максимальну кількість лінійно незалежних власних векторів матриці $A.$
- ○ максимальну кількість лінійно незалежних власних векторів матриці A, що відповідають власному значенню $\lambda.$
- ○ мінімальну кількість лінійно незалежних власних векторів матриці $A.$

Питання 9
Відповіді не було
Макс. оцінка до 2,0

- Систему диференціальних рівнянь $\dot x = f(t,x), x = (x_1, \ldots, x_n),$ називаємо ***динамічною системою***, якщо
  - ○ її права частина f не залежить від шуканих функцій $x_1, \ldots, x_n;$
  - ○ її права частина f динамічно змінюється з часом;
  - ○ її права частина f не залежить явно від часу $t;$
  - ○ її права частина f є сталою вздовж розв'язків.

- ***Особливою точкою*** динамічної системи $\dot x = f(x)$ називаємо таку точку x_0, в якій
  - ○ векторне поле f обертається в нуль;
  - ○ векторне поле f відмінне від нуля;
  - ○ перетинаються траєкторії;
  - ○ векторне поле f є сталим.

Питання 10
Завершено
Балів 0,0 з 2,0

Гамільтоновою системою з гамільтоніаном $H = H(x, y)$ називаємо динамічну систему вигляду

Виберіть одну відповідь:

- $\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y}, \quad \dot{y} = \frac{\partial H}{\partial x}$
- $\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y}, \quad \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x}$
- $\dot{x} = -\frac{\partial H}{\partial y}, \quad \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x}$
- $\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial x}, \quad \dot{y} = \frac{\partial H}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial x}$

Питання 11
Завершено
Балів 5,0 з 5,0

Завдання А

Завдання вимагає повного письмового розв'язку

Знайдіть розв'язок задачі Коші $y' = (x+y)^2, \quad y(0) = 0.$

---

1. Диференціальне рівняння в цьому завданні – це
   - рівняння із відокремленими змінними;
   - однорідне рівняння;
   - рівнянням Бернуллі;
   - рівняння, жодного з перелічених вище типів.
2. Рівняння можна звести до [рівняння із відокремленими змінними], застосувавши заміну
   - $v = y/x;$
   - $v = x + y;$
   - $v = x - y;$
   - $y' = v.$
3. Загальний розв'язок диференціального рівняння має вигляд
   - $y = \operatorname{tg} x + C;$
   - $y = C\cos x + 2x;$
   - $y = \operatorname{tg}(x + C) - x;$
   - $y = \ln(x + C) - x.$
4. Розв'язком задачі Коші є функція
   - $\operatorname{tg} x - x;$
   - $\operatorname{tg} x;$
   - $\ln(x + 1) - x;$
   - $2x.$

Питання 12
Завершено
Балів 5,0 з 5,0

Завдання B

Завдання вимагає повного письмового розв'язку

Розв'язати задачу Коші $(xy'-1)\ln x = 2y, \quad y(e)=1.$

---

1. Якщо лінійне неоднорідне рівняння в цьому завданні записати у стандартному вигляді $y'+a(x)y=b(x)$, то права частина матиме вигляд
   - ○ $b(x)=\ln x;$ ◉ $b(x)=\frac{1}{x};$ ○ $b(x)=x\ln x;$ ○ $b(x)=\frac{x}{2}.$

2. Загальний розв'язок відповідного лінійного однорідного рівняння є таким
   - ◉ $y_0=C\ln^2 x;$
   - ○ $y_0=C\ln x;$
   - ○ $y_0=\ln x+C;$
   - ○ $y_0=C\ln|\ln x|.$

3. Загальний розв'язок неоднорідного рівняння має вигляд
   - ○ $y=C\ln x+\ln^2 x;$
   - ◉ $y=C\ln^2 x-\ln x;$
   - ○ $y=\ln x+C+2\ln|\ln x|;$
   - ○ $y=C\ln|\ln x|-x.$

4. Розв'язком задачі Коші є функція
   - ○ $\ln^2 x;$ ○ $\ln x+2\ln|\ln x|;$ ◉ $\ln x(2\ln x-1);$ ○ $\ln|\ln x|-x.$

Питання 13
Завершено
Балів 5,0 з 5,0

Завдання C

Завдання вимагає повного письмового розв'язку

Розв'яжіть неявне рівняння $y+\frac{1}{4}y'^2=(x-1)y'.$

---

1. Рівняння в цьому завданні є [рівнянням Клеро] і його загальний вигляд
   - ○ $y=a(y)y'+b(y);$
   - ○ $y'+a(x)y=b(x);$
   - ◉ $y=xy'+b(y');$
   - ○ $y=a(x)y'+b(y').$

2. Рівняння має однопараметричну сім'ю розв'язків
   - ○ $y=Cx-C^2-4C;$
   - ◉ $y=Cx-\frac{1}{4}C^2-C;$
   - ○ $y=C;$
   - ○ $y=C^2x-\frac{1}{2}C^2+C.$

3. Це рівняння також має особливий розв'язок
   - ○ $y=-x^2+4x-4;$
   - ○ $y=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}x+1;$
   - ○ $y=-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x-1;$
   - ◉ $y=x^2-2x+1.$

4. ***Особливим*** називаємо такий розв'язком неявного рівняння, який в [кожній] точці свого графіка [торкається графіка] іншого розв'язку рівняння, причому в [жодному] околі цієї точки графіки [не збігаються].

Питання 14
Завершено
Балів 3,7 з 5,0

Завдання D

Завдання вимагає повного письмового розв'язку

Знайдіть розв'язок задачі Коші $y'' - 5y' + 6y = 4xe^x, \quad y(0) = 3,\ y'(0) = 5.$

---

1. Лінійне однорідне рівняння має фундаментальну систему розв'язків
   - e^{-2x}, e^{-3x}
   - e^{2x}, e^{3x}
   - e^{2x}, xe^{3x}
   - $e^{2x}, 0.$

2. Частковий розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді
   - $y_* = ae^x$
   - $y_* = (ax+b)e^x$
   - $y_* = ax + b$
   - $y_* = axe^x$

   і він є таким
   - $y_* = 12e^x$
   - $y_* = 3xe^x$
   - $y_* = 3x + 4$
   - $y_* = (2x+3)e^x.$

3. Загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння є [сумою] часткового розв'язку лінійного [неоднорідного] рівняння та [повного загального] розв'язку лінійного [однорідного] рівняння, тому
   - $y = (2x+3)e^x + C_1e^{2x} + C_2e^{3x}$
   - $y = C_1(2x+3)e^x + C_2e^{2x} + C_3e^{3x}$
   - $y = 12e^x + C_1e^{2x} + C_2xe^{3x}$
   - $y = 3x + 4 + C_1e^{-2x} + C_2e^{-3x}.$

4. Розв'язком задачі Коші є функція
   - $3e^{2x} + 4e^{3x};$
   - $3e^{2x} + 2xe^x;$
   - $(2x+3)e^x;$
   - $3x + 4 + e^{-3x}.$

Питання 15
Завершено
Балів 1,0 з 5,0

Завдання E

Завдання вимагає повного письмового розв'язку

Розв'яжіть систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 3x_1 + 2x_2 - 9, \\ \dot{x}_2 = -4x_1 - x_2 + 7. \end{cases}$$

---

1. Нехай $\dot{x} = Ax + b$ – векторний запис системи. Власні значення матриці A є [комплексно спряженими], а саме, $\lambda_1 =$ [1-2i] та $\lambda_2 =$ [1+2i].

2. Серед перелічених векторів-функцій

$$u(t) = e^t\begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t - 3\sin t \end{pmatrix}, \quad v(t) = e^t\begin{pmatrix} -\cos 2t \\ \cos 2t + \sin 2t \end{pmatrix}, \quad w(t) = e^t\begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t + 3\cos t \end{pmatrix}, \quad y(t) = e^t\begin{pmatrix} -\sin 2t \\ \sin 2t - \cos 2t \end{pmatrix}$$

   пара векторів [ ] та [ ] утворюють фундаментальну систему розв'язків.

3. Частковий розв'язок неоднорідної системи з вектором правих частин $b = ($ [ ], [ ] $)$ треба шукати у вигляді
   - $x_* = (a_1t + b_1, a_2t + b_2);$
   - $x_* = (a_1, a_2);$
   - $x_* = e^t(a_1\sin t, a_2\cos t);$
   - $x_* = e^t(a_1\sin t + b_1\cos t, a_2\sin t + b_2\cos t).$

4. Загальний розв'язок неоднорідної системи має вигляд
   - $x_1 = e^t(c_2 - c_1)\cos 2t + t - 4, \quad x_2 = e^t\big(2c_1\cos 2t + (3c_1 + c_1)\sin 2t\big) - t;$
   - $x_1 = e^t(-c_1\cos 2t - c_2\sin 2t) + 1, \quad x_2 = e^t\big((c_1 - c_2)\cos 2t + (c_1 + c_2)\sin 2t\big) + 3;$
   - $x_1 = e^t(c_1\sin t - c_2\cos t) + 1, \quad x_2 = e^t\big((c_1 + 3c_2)\cos t + (c_2 - 3c_1)\sin t\big) - 2.$

Питання 16

Відповіді не було

Макс. оцінка до 5,0

Завдання F

Завдання вимагає повного письмового розв'язку з малюнками фазових портретів

Опишіть фазовий портрет динамічної системи

$$\begin{cases} \dot{x} = (x-1)(y-1), \\ \dot{y} = (x-2)(y-2). \end{cases}$$

в околах її особливих точок.

---

1. Динамічна система має дві особливі точки – та *(формат відповіді* (x,y)*).*
2. Нехай $u = (u_1, u_2)$ – нові координати в околі особливої точки, а $\dot{u} = Au$ – лінеаризація динамічної системи в околі цієї точки. Серед матриць

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

   лише та матриці є лінеаризаціями нашої динамічної системи в околі станів рівноваги.

3. Знайдіть власні значення і власні вектори матриць лінеаризацій.
4. Намалюйте фазові портрети в околі кожної точки рівноваги. Один зі станів рівноваги – , а інший – .

   Типова динаміка системи в околі цих станів зображена на малюках та відповідно.