| | |
|---|---|
| **Розпочато** | понеділок 28 грудень 2020 09:00 |
| **Стан** | Завершено |
| **Завершено** | понеділок 28 грудень 2020 11:00 |
| **Витрачено часу** | 1 година 59 хв |
| **Оцінка** | **38,0** з можливих 50,0 (**76**%) |

Питання **1**

Завершено

Балів 1,4 з 2,0

- Рівність вигляду $G(t, x, \dot{x}, \ddot{x}, \ldots, x^{(n)}) = 0$, в якій [t] – незалежна змінна, $G$ – [відома] функція [багатьох змінних] та $x$ – [шукана] функція [однієї змінної], називаємо ***звичайним диференціальним рівнянням***, якщо
  - ○ функція $x$ ефективно залежить від часу $t$;
  - ◉ функція $G$ ефективно залежить від похідних функції $x$;
  - ○ функція $G$ не залежить від $x$;
  - ○ функція $G$ ефективно залежить від першої похідної шуканої функції.

- Яка з рівностей не є диференціальним рівнянням?
  - ○ $x^n(t) = \dot{x}(t) + 1$
  - ○ $\dot{x}(t) = x(t) + \int\limits_0^1 s\,ds$
  - ◉ $\sin^2 \dot{x}(t) + x(t) = t^2 + \cos^2 \dot{x}(t)$
  - ○ $\dot{x}(t) = x(t) \cdot x(t-2)$
  - ○ $\sin^2 \dot{x}(t) + x(t) = t^2 - \cos^2 x(t)$.

Питання **2**

Завершено

Балів 2,0 з 2,0

- Функцію $x = \varphi(t)$ називаємо ***розв'язком диференціального рівняння*** $n$***-го порядку*** $F(t, x, \dot{x}, \ddot{x}, \ldots, x^{(n)}) = 0$, якщо
  - ○ $\varphi$ – монотонна і перетворює рівняння в тотожність за змінною $x$;
  - ○ $F$ – неперервна за усіма змінними, а $\varphi$ – неперервно диференційовна;
  - ○ $\varphi$ є неперервно диференційовна і перетворює рівняння в тотожність за змінною $t$
  - ◉ $\varphi$ має неперервні похідні до порядку $n$ і перетворює рівняння в тотожність за змінною $t$;.

- Встановіть відповідність між диференціальними рівняннями та їхніми розв'язками.

  A. $y^{(4)} = y + 2\pi$. B. $xy''' = y'' + 4$. C. $\sin y' = 1 - \cos 2y'$.

  1. $y = 3x + \pi$. 2. $y = x^3 - 2x^2 + x$. 3. $y = 2\pi x - 3$. 4. $y = \cos x + 2e^{-x} - 2\pi$.

  A [4] B [2] C [3]

Питання **3**

Завершено

Балів 2,0 з 2,0

- Якщо неперервно диференційовна функція $v$ є потенціалом векторного поля $(m(x,y), n(x,y))$ (потенціалом для пари функцій $m(x,y)$ та $n(x,y)$), то виконується третя умова, серед запропонованих нижче

$$dm = dn, \quad dv = v_x\,dx + v_y\,dy, \quad dv = m\,dx + n\,dy, \quad dv = m_y\,dx + n_x\,dy.$$

- Диференціальне рівняння вигляду $m(x,y)\,dx + n(x,y)\,dy = 0$ називаємо ***рівнянням в повних диференціалах***, якщо
  - виконується умова $m_x = n_y$;
  - вираз $m(x,y)\,dx + n(x,y)\,dy$ є повним диференціалом функції $m$;
  - вираз $m(x,y)\,dx + n(x,y)\,dy$ є повним диференціалом деякої функції;
  - вираз $m(x,y)\,dx + n(x,y)\,dy$ є повним диференціалом функції $n$.

- Рівняння $m(x,y)\,dx + n(x,y)\,dy = 0$ буде рівнянням в повних диференціалах в деякому прямокутнику, тоді і лише тоді, коли в цьому прямокутнику виконується умова
  $m_x = n_y$ $m_y = n_x$ $m_x = n_x$ $m_y = n_y$.

- Яке з диференціальних рівнянь є рівняння в повних диференціалах?
  - $(e^y + 2xy)\,dx = (e^x + y^2)\,dy$;
  - $(y-x)e^y\,dx - (x+y)e^x\,dy = 0$;
  - $(e^x - 2xy)\,dx = (x^2 - e^y)\,dy$ .

Питання **4**

Завершено

Балів 1,6 з 2,0

- Як ми називаємо такі лінійні диференціальні рівняння першого порядку?
  - $y' + p(x)y = 0$ – лінійне однорідне у стандартній формі
  - $a(x)y' + b(x)y + c(x) = 0$ – лінійне неоднорідне загального вигляду
  - $y' + p(x)y = q(x)$ – лінійне неоднорідне у стандартній формі.

- Загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння завжди можна записати так
  $y = C^2m(x)$ $y = Cm(x)$ $y = m(x) + C$ $y = e^{Cm(x)}$,

  де $m$ – відома функція, а $C$ – довільна дійсна стала.

- Загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння є сумою загального розв'язку лінійного однорідного рівняння та часткового розв'язку лінійного неоднорідного рівняння.

- Серед диференціальних рівнянь
  $x^2y' = x^3 - y\ln x, \quad x^2y' + \ln x^2 = y, \quad xy' = \ln x + \ln y, \quad y' = x\ln y^2 - x^2$
  лише четверте та друге є лінійними рівняннями.

Питання **5**

Завершено

Балів 0,8 з 2,0

- Розв'язок диференціального рівняння $\dot{x} = f(t,x)$ називаємо ***глобальним***, якщо
  - він визначений на усій числові осі;
  - він визначений на найширшому інтервалі, поза яким він не існує;
  - він визначений в околі кожної точки.

- Нехай $x$ - глобальний розв'язок рівняння $\dot{x} = f(t,x)$, визначений на скінченному чи нескінченному інтервалі $I = (a,b)$. Тоді виконується кожна з двох альтернатив
  - або $b = +\infty$, або число $b$ – скінченна і тоді розв'язок $x$ має нескінченну праву границю, коли $t$ прямує до a-0;
  - або $a = -\infty$, або число $a$ – скінченне і тоді розв'язок $x$ має скінченну ліву границю, коли $t$ прямує до a+0.

**Питання 6**
Завершено
Балів 0,6 з 2,0

- Якщо функція $v = v(t, x)$ – неперервною за обома змінними та неперервнодиферинційованою за змінною $x$, то задача Коші $\dot{x} = v(t, x)$, $x(a) = b$ має єдиний розв'язок, який визначений в околі точки a .

- Задача Коші $\dot{x} = v(t, x)$, $x(a) = b$ є еквівалентною інтегральному рівнянню
  - ○ $x(t) = a + \int_b^t v(s, x(s))\,ds$
  - ◉ $x(t) = b + \int_a^t v(s, x(s))\,ds$
  - ○ $x(t) = b + \int_a^b v(s, x(s))\,ds,$

  а послідовні наближення Пікара розв'язку задачі знаходимо за рекурентними формулами
  - ◉ $x_n(t) = b + \int_a^t v(s, x_{n+1}(s))\,ds$
  - ○ $x_{n+1}(t) = a + \int_b^t v(s, x_n(s))\,ds$
  - ○ $x_n(t) = b + \int_a^t v(s, x_{n-1}(s))\,ds$

  для $n = 1, 2, \ldots$, а нульове наближення є таким
  - ◉ $x_0(t) = a$
  - ○ $x_0(t) = b$
  - ○ $x_0(t) = 0$
  - ○ $x_0(t) = v(a, b).$

- Друге наближення Пікара для розв'язку задачі Коші $\dot{x} = 6t + x, \quad x(0) = 2$ має вигляд
  $x_2(t) = t^3 +$ ___ $t^2 +$ ___ $t +$ ___ .

**Питання 7**
Завершено
Балів 1,0 з 2,0

Виберіть твердження, які є правильними для лінійного однорідного рівняння $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y + a_n y = 0$ зі сталими коефіцієнтами та його характеристичного многочлена $P(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n$.

Виберіть одну або декілька відповідей:

- [x] Функція $xe^{\lambda_0 x}$ є розв'язком рівняння другого порядку лише тоді, коли $\lambda_0$ є простим коренем многочлена $P$.
- [ ] Якщо $\lambda_0$ – двократний корінь многочлена $P$, то рівняння має розв'язки $e^{\lambda_0 x}$ та $e^{\lambda_0 x^2}$.
- [ ] Якщо $\lambda_0$ – трикратний корінь многочлена $P$, то число $P''(\lambda_0)$ є відмінним від нуля.
- [x] Якщо $\lambda_0$ – корінь многочлена $P$, то рівняння має розв'язок $e^{\lambda_0 x}$.
- [ ] Якщо многочлен $P$ має комплексний корінь $\lambda_0 = \alpha + i\beta$, то рівняння має розв'язок $e^{\beta x} \sin \alpha x$.
- [ ] Якщо $\lambda_0$ – простий корінь многочлена $P$, то число $P'(\lambda_0)$ є відмінним від нуля.
- [x] Рівняння третього порядку не може мати розв'язку вигляду $x^3 e^{\lambda_0 x}$.
- [x] Якщо $\lambda_0$ – двократний корінь многочлена $P$, то рівняння має розв'язки $e^{\lambda_0 x}$ та $xe^{\lambda_0 x}$.

**Питання 8**
Завершено
Балів 0,0 з 2,0

Які з тверджень є правильними для розв'язків лінійної однорідної системи $\dot{x} = Ax$, де $A$ – квадратна матриця порядку $n$?

Виберіть одну або декілька відповідей:

- [x] Якщо $\alpha$ – власне значення матриці $A$ , то система має розв'язок $e^{\alpha t}$.
- [ ] Власний вектор матриці $A$ є розв'язком системи.
- [ ] Довільна лінійна комбінація розв'язків є знову розв'язком системи.
- [x] Приєднаний вектор матриці $A$ є одним з розв'язків системи.
- [ ] Якщо $\alpha$ – власне значення матриці $A$ з власним вектором $u$, то система має розв'язок $e^{\alpha t} u$.
- [x] Різниця двох розв'язків системи є знову її розв'язком.
- [x] Сталий вектор завжди є розв'язком однорідної системи.
- [ ] Система має не більше $n$ лінійно незалежних розв'язків.

Питання **9**
Завершено
Балів 1,6 з 2,0

- Систему диференціальних рівнянь $\dot{x} = f(t, x)$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, називаємо ***динамічною системою***, якщо
  - її права частина $f$ не залежить явно від часу $t$;
  - її права частина $f$ не залежить від шуканих функцій $x_1, \ldots, x_n$;
  - її права частина $f$ динамічно змінюється з часом;
  - її права частина $f$ є сталою вздовж розв'язків.

- Яка з систем диференціальних рівнянь є динамічною системою?
  - $\dot{x} = xy + e^t, \quad \dot{y} = x + y$
  - $\dot{x}_1 = x_1 - 1, \quad \dot{x}_2 = x_2 + 2$
  - $\dot{u} = v, \quad \dot{v} = t.$

- ***Особливою точкою (станом рівноваги)*** динамічної системи $\dot{x} = f(x)$ називаємо таку точку $x_0$, в якій
  - векторне поле $f$ відмінне від нуля;
  - перетинаються траєкторії;
  - векторне поле $f$ обертається в нуль;
  - векторне поле $f$ є сталим.

- Динамічна система з фазовим простором $\mathbb{R}^2$
  $$\begin{cases} \dot{x}_1 = (x_1 + 1)^2 + x_2^2 - 1 \\ \dot{x}_2 = (x_1 - 2)^2 + x_2^2 - 1 \end{cases}$$
  - не має особливих точок
  - має лише одну особливу точку
  - має дві особливі точки.

Питання **10**
Завершено
Балів 2,0 з 2,0

- ***Траєкторією*** динамічної системи $\dot{x} = v(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, називаємо
  - криву у фазовому просторі без точок самоперетину;
  - криву у розширеному фазовому просторі, яка є графіком розв'язку;
  - стаціонарний розв'язок динамічної системи;
  - криву у фазовому просторі, запараметризовану розв'язком динамічної системи;
  - розв'язок динамічної системи, який є періодичною функцією.

- Неперервно диференційовну функцію $U = U(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, відмінну від сталої, називаємо ***першим інтегралом*** динамічної системи $\dot{x} = v(x)$, якщо
  - вона є стаціонарним розв'язком системи;
  - вона є сталою вздовж траєкторій динамічної системи;
  - вона залишається сталою в околі особливих точок;
  - вона є інтегровна вздовж розв'язків системи.

- Перевірте, яка з функцій є першим інтегралом динамічної системи
  $$\begin{cases} \dot{x} = z, \\ \dot{y} = y - z, \\ \dot{z} = z - 1. \end{cases}$$
  - $U = yz + x;$
  - $U = z - x + \ln|z - 1|;$
  - $U = y - z + \ln|y - 1|.$

Питання **11**

Завершено

Балів 5,0 з 5,0

## Завдання A

**Завдання вимагає повного письмового розв'язку**

---

Знайдіть розв'язок задачі Коші $x^2y' = 16x^2 + xy + y^2, \quad y(1) = 0.$

---

1. Диференціальне рівняння в цьому завданні – це
   - ○ рівняння із відокремленими змінними;
   - ◉ однорідне рівняння;
   - ○ рівнянням Бернуллі;
   - ○ рівняння, жодного з перелічених вище типів.
2. Рівняння можна звести до [рівняння із відокремленими змінними ▾], застосувавши заміну
   - ◉ $v = y/x;$
   - ○ $v = 16x^2 + y^2;$
   - ○ $v = 4x + y;$
   - ○ $v = xy.$
3. Загальний розв'язок диференціального рівняння має вигляд
   - ○ $y = \operatorname{tg}(4x + C);$
   - ○ $y = \sin \ln |Cx|;$
   - ○ $y = \ln x - 4x + C;$
   - ◉ $y = 4x \operatorname{tg}(4 \ln |x| + C).$
4. Розв'язком задачі Коші є функція
   - ○ $y = \operatorname{tg}(4x - 4);$
   - ○ $y = \sin \ln x;$
   - ◉ $y = 4x \operatorname{tg}(4 \ln x);$
   - ○ $y = \ln x - 4x + 4.$

Питання **12**

Завершено

Балів 5,0 з 5,0

## Завдання B

**Завдання вимагає повного письмового розв'язку**

---

Знайдіть розв'язок задачі Коші $xy' + x^5y^2 \cos x + 4y = 0, \quad y(\pi) = \dfrac{1}{4\pi^4}.$

---

1. Диференціальне рівняння в цьому завданні – це
   - ○ рівняння із відокремленими змінними;
   - ○ лінійне рівняння;
   - ○ однорідне рівняння;
   - ◉ рівняння Бернуллі;
   - ○ рівняння, жодного з перелічених вище типів.
2. Рівняння можна звести до [лінійного рівняння ▾], застосувавши заміну
   - ○ $v = y/x;$
   - ○ $v = y^2;$
   - ○ $v = y^2 \cos x;$
   - ◉ $v = 1/y.$
3. Загальний розв'язок диференціального рівняння має вигляд
   - ◉ $x^4y(\sin x + C) = 1, \quad y = 0;$
   - ○ $x^4y = \sin x + C, \quad y = 0;$
   - ○ $y = x^4(\sin x + C), \quad y = 0;$
   - ○ $y = \sin x + Cx^4, \quad y = 0.$
4. Розв'язком задачі Коші є функція, яка задана формулою [1 ▾].

$$1.\ \ y = \frac{1}{x^4(\sin x + 4)}. \quad 2.\ \ y = \frac{\sin x + 1}{4x^4}. \quad 3.\ \ y = (\sin x + 4)x^4. \quad 4.\ \ y = \sin x + \frac{x^4}{4\pi^8}.$$

Питання **13**

Завершено

Балів 3,0 з 5,0

## Завдання C

### Завдання вимагає повного письмового розв'язку

Розв'яжіть неявне рівняння $6y'^6(y - xy') = 1.$

1. Рівняння в цьому завданні є [рівнянням Клеро] і його загальний вигляд
   - ○ $y = a(y)y' + b(y);$
   - ○ $y' + a(x)y = b(x);$
   - ◉ $y = xy' + b(y');$
   - ○ $y = a(x)y' + b(y').$

2. Графіками розв'язків цього рівняння є [прямі], які задані формулою [4].

   1. $y = (Cx + 6C)^2.$ 2. $y = Cx + 6C^6.$ 3. $y = \dfrac{C}{x} + 6C^6.$ 4. $y = Cx + \dfrac{1}{6C^6}.$

3. Це рівняння також має особливий розв'язок
   ◉ $y = x^{\frac{6}{7}} - \frac{1}{7}x^{\frac{7}{6}};$ ○ $y = \frac{7}{6}x^7;$ ○ $y = \frac{7}{6}x^{\frac{6}{7}};$ ○ $y = 7\left(\frac{x}{6}\right)^{\frac{6}{7}}.$

4. ***Особливим*** називаємо такий розв'язком неявного рівняння, який в [кожній] точці свого графіка [торкається графіка] іншого розв'язку рівняння, причому в [жодному] околі цієї точки графіки [не збігаються].

Питання **14**

Завершено

Балів 5,0 з 5,0

## Завдання D

### Завдання вимагає повного письмового розв'язку

Знайдіть розв'язок задачі Коші $y'' - y' - 6y = 2(3 - 4x)e^{2x}, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 2.$

1. Лінійне однорідне рівняння має фундаментальну систему розв'язків
   ○ $e^{2x}, e^{-3x}$ ○ $e^{-2x}, xe^{3x}$ ◉ $e^{-2x}, e^{3x}$ ○ $e^{-2x}, 1.$

2. Частковий розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді
   ○ $y_* = ae^x$ ○ $y_* = ax + b$ ○ $y_* = axe^x$ ◉ $y_* = (ax + b)e^{2x}$

   і він є таким

   ○ $y_* = 6e^{2x}$ ◉ $y_* = 2xe^{2x}$ ○ $y_* = -8xe^{2x}$ ○ $y_* = 6 - 8x.$

3. Загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння є [сумою] загального розв'язку лінійного [однорідного] рівняння та [часткового] розв'язку лінійного [неоднорідного] рівняння, тому
   - ○ $y = C_1xe^x + C_2e^{-2x} + C_3e^{3x}$
   - ◉ $y = 2xe^{2x} + C_1e^{-2x} + C_2e^{3x}$
   - ○ $y = 6e^{2x} + C_1e^{-2x} + C_2xe^{3x}$
   - ○ $y = 6 - 8x + C_1e^{2x} + C_2e^{-3x}.$

4. Розв'язком задачі Коші є функція

   ○ $6e^{-2x} - 6e^{3x};$ ○ $6e^{-2x} + 2xe^{2x};$ ◉ $2xe^{2x};$ ○ $1 - 8x - e^{-3x}.$

Питання **15**

Завершено

Балів 2,3 з 5,0

## Завдання E

**Завдання вимагає повного письмового розв'язку**

---

Розв'яжіть систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 5x_1 - 2x_2 + 8, \\ \dot{x}_2 = 5x_1 - x_2 + 9. \end{cases}$$

---

1. Нехай $\dot{x} = Ax + b$ – векторний запис системи. Власні значення матриці $A$ є [комплексно спряженими], а саме, $\lambda_1 =$ [2+i] та $\lambda_2 =$ [2-i] .
2. Серед перелічених векторів-функцій

$$u(t) = e^{2t}\begin{pmatrix} 2\cos t \\ 3\cos t + \sin t \end{pmatrix}, \quad v(t) = e^{t}\begin{pmatrix} 2\cos 2t \\ 3\sin 2t - \cos 2t \end{pmatrix}, \quad w(t) = e^{2t}\begin{pmatrix} 2\sin t \\ 3\sin t - \cos t \end{pmatrix}, \quad y(t) = e^{2t}\begin{pmatrix} 2\sin 2t \\ 3\cos 2t + \sin 2t \end{pmatrix}$$

пара векторів [ ] та [ ] утворюють фундаментальну систему розв'язків.

3. Частковий розв'язок неоднорідної системи з вектором правих частин $b = ($ [8] , [9] $)$ треба шукати у вигляді
   - ○ $x_* = (a_1 t + b_1, a_2 t + b_2)$;
   - ◉ $x_* = (a_1, a_2)$;
   - ○ $x_* = e^t(a_1 \sin t, a_2 \cos t)$;
   - ○ $x_* = e^t(a_1 \sin t + b_1 \cos t, a_2 \sin t + b_2 \cos t)$.
4. Загальний розв'язок неоднорідної системи має вигляд
   - ○ $x_1 = e^t(c_2 - c_1)\cos 2t + t - 4, \quad x_2 = e^t\big(2c_1 \cos 2t + (3c_1 + c_1)\sin 2t\big) - t$;
   - ○ $x_1 = e^{2t}(c_1 \sin t + c_2 \cos t) + e^{t}\sin t, \quad x_2 = e^{2t}\big((3c_1 - c_2)\cos t + (c_1 + 3c_2)\sin t\big)$;
   - ○ $x_1 = e^{2t}(2c_1 \cos t + 2c_2 \sin t) - 2, \quad x_2 = e^{2t}\big((3c_1 - c_2)\cos t + (c_1 + 3c_2)\sin t\big) - 1$.

Питання **16**

Завершено

Балів 4,6 з 5,0

## Завдання F

**Завдання вимагає повного письмового розв'язку з малюнками фазових портретів**

---

Опишіть фазовий портрет динамічної системи

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x^2 + y, \\ \dot{y} = y - 2x. \end{cases}$$

в околах її особливих точок.

---

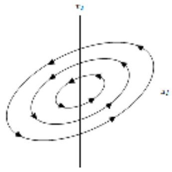
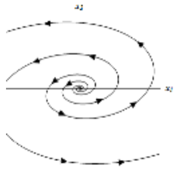
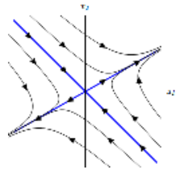
1. Динамічна система має дві особливі точки – [(0,0)] та [(-1,-2)] *(впишіть координати точок у форматі* (x,y)*)*.
2. Нехай $u = (u_1, u_2)$ – нові координати в околі особливої точки, а $\dot{u} = Au$ – лінеаризація динамічної системи в околі цієї точки. Серед матриць

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

лише [друга] та [четверта] матриці є лінеаризаціями нашої динамічної системи в околі станів рівноваги.

3. Знайдіть власні значення і власні вектори матриць лінеаризацій.
4. Намалюйте фазові портрети в околі кожної точки рівноваги. Один зі станів рівноваги – [фокус] , а інший – [сідло] .

Типова динаміка системи в околі цих станів зображена на малюках [(b)] та [(d)] відповідно.

(a)  (b)  (c)  (d)