§3. Лінійні рівняння першого порядку. Рівняння Бернуллі

1. Диференціальне рівняння вигляду

$$y' = a(x)y + b(x), \tag{3.1}$$

де $a \not\equiv 0$, b – неперервні на $(x_1, x_2) \subset \mathbb{R}$ функції, називатимемо *лінійним диференціальним рівнянням першого порядку.* При $b \not\equiv 0$ (3.1) називається *лінійним неоднорідним рівнянням.* Якщо $b \equiv 0$, то рівняння (3.1) називається *лінійним однорідним* диференціальним рівнянням першого порядку.

Для того щоб розв'язати неоднорідне рівняння (3.1), можна використати *метод варіації сталої*:

1) розв'язати відповідне однорідне рівняння, тобто рівняння

$$y' = a(x)y \tag{3.2}$$

(воно є рівнянням з відокремлюваними змінними і його загальний розв'язок має вигляд

$$y(x) = Ce^{\int_{x_0}^{x} a(t)\,dt}, \tag{3.3}$$

де $x_0 \in (x_1, x_2)$ – фіксована точка);

2) записати загальний розв'язок рівняння (3.1) у вигляді

$$y = \varphi(x)e^{\int_{x_0}^{x} a(t)\,dt}, \tag{3.4}$$

де φ – нова невідома функція;

3) знайти функцію φ, підставивши для цього (3.4) в (3.1).

2. Диференціальне рівняння вигляду

$$y' = a(x)y + b(x)y^{\alpha}, \tag{3.5}$$

де a і b – неперервні функції на $(x_1, x_2) \subset \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\alpha \neq 0, \quad \alpha \neq 1,$$

називається *рівнянням Бернуллі.*

Для того щоб розв'язати рівняння Бернуллі, треба обидві його частини поділити на y^α і зробити заміну $y(x) \rightsquigarrow z(x)$, де

$$z = y^{1-\alpha}. \tag{3.6}$$

Отримаємо рівняння, яке є лінійним стосовно невідомої функції z. При $\alpha > 0$ розв'язком (3.5) буде також функція $y = 0$.

Аудиторні вправи

Розв'язати рівняння:
1.5.4. ***1.5.5.*** ***1.5.6.*** ***1.5.7.*** ***1.5.16.*** ***1.5.17.*** ***1.5.18.***

Домашнє завдання

Розв'язати рівняння:
1.5.2. ***1.5.9.*** ***1.5.12.*** ***1.5.13.*** ***1.5.19.*** ***1.5.27.*** ***1.5.29.***

§4. Рівняння в повних диференціалах. Інтегрувальний множник

1. Диференціальне рівняння

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0 \tag{4.1}$$

називається *рівнянням в повних диференціалах*, якщо його ліва частина є повним диференціалом деякої функції $U = U(x,y)$. Щоб розв'язати рівняння (4.1), треба знайти цю функцію U. Тоді загальний інтеграл рівняння (4.1) можна записати у вигляді

$$U(x,y) = C, \tag{4.2}$$

де C – довільна стала з множини значень U.

Якщо функції M, N, $\frac{\partial M}{\partial y}$, $\frac{\partial N}{\partial x}$ – неперервні в деякій однозв'язній області D, то тотожність в D

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \equiv 0 \tag{4.3}$$

є необхідною і достатньою умовою того, щоб рівняння (4.1) було в повних диференціалах. Тоді U шукаємо з системи рівнянь

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = M(x,y), \\ \frac{\partial U}{\partial y} = N(x,y). \end{cases} \tag{4.4}$$

2. Іноді рівняння (4.1), яке не є рівнянням в повних диференціалах, можна звести до рівняння такого типу. *Інтегрувальним множником* для рівняння (4.1) називається функція $\mu = \mu(x, y)$, $\mu \not\equiv 0$, після домноження на яку рівняння (4.1) перетворюється в рівняння в повних диференціалах. Щоб знайти інтегрувальний множник, треба розв'язати рівняння

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} - \frac{\partial(\mu N)}{\partial x} = 0. \tag{4.5}$$

Це зробити можна не завжди. В найпростіших випадках можна вважати, що $\mu = \mu(x)$ або $\mu = \mu(y)$. Не для кожного рівняння існує інтегрувальний множник. Навіть коли він існує, то знайти його буває важко.

Аудиторні вправи

Розв'язати рівняння (або задачу Коші):

1.4.11. ***1.4.5.*** ***4.1(B).*** $3x^2(1+\ln y)\,dx = \left(2y - \dfrac{x^3}{y}\right)dy$.

4.2(B). $dx + (x + e^{-y}y^2)\,dy = 0$.

4.3(B). $\left(\dfrac{y^3}{x^3} - \dfrac{1}{x^2}\right)dy = \dfrac{y}{x^3}\,dx$. ***1.4.17.*** ***1.4.20.***

Домашнє завдання

Розв'язати рівняння:

1.4.1. ***1.4.12.*** ***1.4.13.*** ***1.4.22.*** ***1.4.27.*** ***1.4.28.***

§5. Контрольна робота 1

На першу контрольну роботу виносимо диференціальні рівняння тих типів, які вивчали на заняттях 1-4.