Контрольна робота №3
Кравець Ольги
ПМО-21

① а) $\begin{cases}\dot{x}_1 = -2x_1 \\ \dot{x}_2 = -2x_2\end{cases}$ б) $\begin{cases}\dot{x}_1 = -x_1 + 3x_2 \\ \dot{x}_2 = -2x_1 + 6x_2\end{cases}$

в) $\begin{cases}\dot{x}_1 = x_1 - 3x_3 \\ \dot{x}_2 = 2x_1 - 6x_2\end{cases}$ ② $\begin{cases}\dot{x}_1 = 3x_1 \\ \dot{x}_2 = 3x_2\end{cases}$

а) $\det(A - \lambda E) = (\lambda+2)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -2$

$\begin{pmatrix}-2 & 0 \\ 0 & -2\end{pmatrix}$ $kg(-2) = 2$

б) $\begin{pmatrix}-1 & 3 \\ -2 & 6\end{pmatrix}$

$\det(A - \lambda E) = (\lambda - 5)\lambda = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 5, \ \lambda_2 = 0$

в) $\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 2 & -6\end{pmatrix}$

$\det(A - \lambda E) = (\lambda - 1)(\lambda + 6) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -6$

② $\begin{pmatrix}3 & 0 \\ 0 & 3\end{pmatrix}$

$\det(A - \lambda E) = (\lambda - 3)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 3$

$kg(3) = 2$

(2) а) $\begin{cases} \dot{x} = x - y \\ \dot{y} = xy - x - 2 \end{cases}$

Особливі точки:

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ xy - x - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y \\ y \cdot y - y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y \\ y^2 - y - 2 = 0 \end{cases}$$

$$y^2 - y - 2 = 0 \rightsquigarrow (y+1)(y-2) = 0 \rightsquigarrow \begin{matrix} y = -1 \\ y = 2 \end{matrix}$$

$y = -1 \rightsquigarrow x = -1$ $\quad (-1; -1)$

$y = 2 \rightsquigarrow x = 2$ $\quad (2; 2)$

б) $\begin{cases} \dot{x} = x - 2y + 1 \\ \dot{y} = 4y - 2x - 2 \end{cases}$

Особливі точки:

$$\begin{cases} x - 2y + 1 = 0 \\ 4y - 2x - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2y - 1 \\ 4y - 2(2y - 1) - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2y - 1 \\ \underbrace{4y - 4y + 2 - 2}_{0} = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2y - 1 \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

в) $\begin{cases} \dot{x} = x^2 + y^2 - 1 \\ \dot{y} = (x-2)^2 + y^2 - 1 \end{cases}$

Особл. точки:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ (x-2)^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ y^2 = -x^2 + 4x - 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cancel{x^2} - \cancel{x^2} + 4x - 3 - 1 = 0 \\ y^2 = -x^2 + 4x - 3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

$(1; 0)$

③ $\begin{cases} \dot{x} = 2x \\ \dot{y} = -y \end{cases}$

$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$\det(A - \lambda E) = (\lambda-2)(\lambda+1) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2, \ \lambda_2 = -1$

<u>Розв'язки:</u> $\begin{cases} x(t) = c_1 e^{2t} \\ y(t) = c_2 e^{-t} \end{cases}$

$\left.\begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = 2x \rightsquigarrow dt = \frac{dx}{2x} \\ \frac{dy}{dt} = -y \rightsquigarrow dt = -\frac{dy}{y} \end{array}\right| \rightsquigarrow \frac{dx}{2x} = -\frac{dy}{y}$

$\frac{dx}{2x} = \frac{1}{2} \cdot \ln|x|$

$-\frac{dy}{y} = -\ln|y|$

$-\ln|y| = \frac{1}{2}\ln|x| + \ln|c|$

$-y = \frac{1}{2} x \cdot c$

$y = -\frac{xc}{2}$

$c = \frac{x}{-2y}$

$U(c_1 e^{2t}, c_2 e^{-t}) = \frac{c_1 e^{2t}}{-2 \cdot c_2 e^{-t}}$

$= -\frac{c_1 e^{3t}}{2c_2}$

$U(x, y) = \frac{x}{-2y}$ – перший інтеграл

④ $\begin{cases} \dot{x}_1 = 3x_1 \\ \dot{x}_2 = 2x_1 + x_2 \end{cases}$ $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$\det(A - \lambda E) = (\lambda - 1)(\lambda - 3) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3$

$h_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Тип особливої точки (фазового портрету) — нестійкий вузол (A 1)

⑤ $\begin{cases} \dot{x} = (x-1)(y-2) \\ \dot{y} = (x-2)(y-1) \end{cases}$

Особливі точки:

$\begin{cases} (x-1)(y-2) = 0 \\ (x-2)(y-1) = 0 \end{cases} \Rightarrow$ 2 точки $(1; 2)$, $(2; 1)$

$\begin{cases} xy - 2x - y + 2 = 0 \\ xy - x - 2y + 2 = 0 \end{cases}$

$(x-1)(y-2) = f_1(x_1, x_2) = xy - 2x - y + 2$

$(x-2)(y-1) = f_2(x_1, x_2) = xy - x - 2y + 2$

$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = (y-2) \qquad \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = (x-1)$

$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = (y-1) \qquad \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = x-2$

⑥ $\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 + 3x_2 + 4e^t \\ \dot{x}_2 = x_1 + 4e^t \end{cases}$ $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $b(t) = \begin{pmatrix} 4e^t \\ 4e^t \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$

$x_1(0) = -1$

$x_2(0) = 1$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4e^t \\ 4e^t \end{pmatrix}$$

1. ФСР:

$\det(A - \lambda E) = (\lambda - 3)(\lambda + 1) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 3, \ \lambda_2 = -1$

Власні значення: $\lambda_1 = 3, \ \lambda_2 = -1$

$\boxed{\lambda_1 = 3}$: $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} 3\beta - \alpha = 0 \\ \alpha - 3\beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 3 \\ \beta = 1 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow h_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\boxed{\lambda_2 = -1}$: $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} 3\beta + 3\alpha = 0 \\ \beta + \alpha = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = 1 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow h_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

ФСР: $\varphi_1(t) = \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$, $\varphi_2(t) = \begin{pmatrix} -e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix}$

2. Пошук часткового розв. неоднор. системи:

$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 + 3x_2 + 4e^t \\ \dot{x}_2 = x_1 + 4e^t \end{cases}$ $b(t) = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} e^t$

$\begin{cases} x_*(t) = a e^t \\ y_*(t) = b e^t \end{cases}$ – структура часткового розв'язку

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(ae^t) \equiv 2ae^t + 3be^t + 4e^t \\ \frac{d}{dt}(be^t) \equiv ae^t + 4e^t \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3b - a = 4 \\ b - a = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_*(t) = -4e^t \\ y_*(t) = 0 \end{cases}$$

3. Загальний розв'язок неоднор. системи:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4e^t \\ 0 \end{pmatrix}$$

Відповідь:

$$\begin{cases} x(t) = C_1 \cdot 3e^{3t} - C_2 \cdot e^{-t} - 4e^t \\ y(t) = C_1 \cdot e^{3t} + C_2 \cdot e^{-t} \end{cases}$$