

Задачі до теми 8. Відношення часткового порядку. Застосування

Рекомендовано (стор. 262, 263):

Аудиторне заняття: №№ 40(а, в), 41(а, в), 42(а, в), 43, 44, 45(а, в), 46, 47(а, в), 48, 49, 50, 51, Д_1, Д_3, Д_5 (а, b).

Домашнє завдання: №№ 40(б, г), 41(б), 42(б), 45(б, г), 47(б), Д_2, Д_4, Д_5 (с, d).

ЗАДАЧІ З ПІДРУЧНИКА

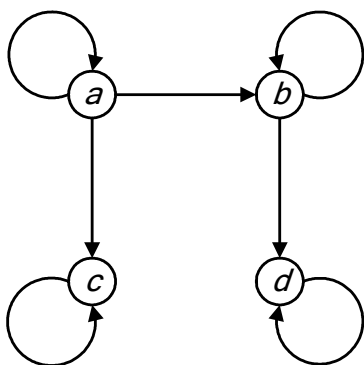
40. На множині цілих чисел Z задано відношення R . У яких випадках множина (Z, R) частково впорядкована:

- а) aRb тоді й лише тоді, коли $a = b$;
- б) aRb тоді й лише тоді, коли $a \neq b$;
- в) aRb тоді й лише тоді, коли $a \geq b$;
- г) aRb тоді й лише тоді, коли a не ділить b ?

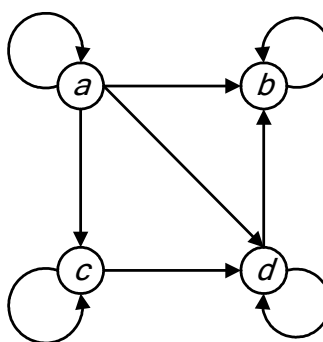
41. Визначити, які з наведених матриць подають відношення часткового порядку:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{в) } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

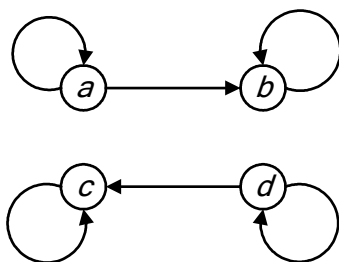
42. Які з наведених графів подають відношення часткового порядку?



a



б



в

43. Нехай (A, R) – частково впорядкована множина. Довести, що множина (A, R^{-1}) також частково впорядкована. Тут R^{-1} – обернене відношення (див. інформацію перед задачею 5).

44. Побудувати діаграму Гассе для відношення „більше чи дорівнює” на множині $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

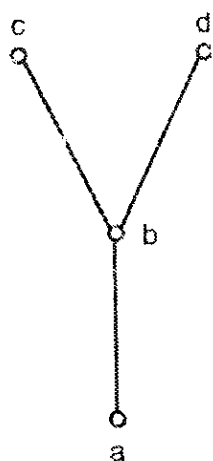
45. Побудувати діаграму Гассе для відношення $R = \{(a, b) \mid a \text{ ділить } b\}$ на множині A :

а) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$; б) $A = \{1, 2, 3, 5, 7, 11, 13\}$;

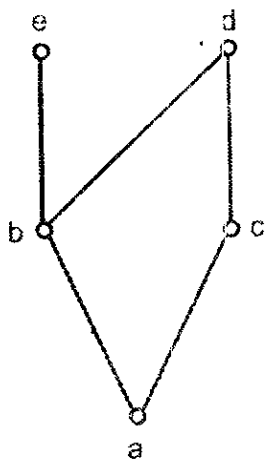
в) $A = \{1, 2, 3, 6, 12, 24, 36, 48\}$; г) $A = \{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64\}$.

46. Побудувати діаграму Гассе для відношення $R = \{(A, B) \mid A \subset B\}$ на булеані $P(A)$, де $A = \{a, b, c\}$ (див. підрозділ 1.12).

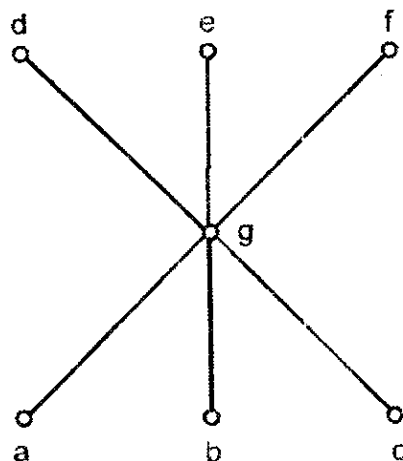
47. Записати всі впорядковані пари відношення часткового порядку з такою діаграмою Гассе:



а)

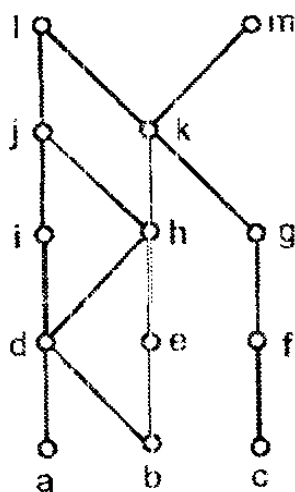


б)



в)

48. Для відношення часткового порядку, поданого діаграмою Гассе, знайти максимальні та мінімальні елементи.



49. Для частково впорядкованої множини (A, R) , де $A = \{3, 5, 9, 15, 24, 45\}$, $R = \{(a, b) \mid a \text{ ділить } b\}$, знайти максимальні та мінімальні елементи.

50. Виконати топологічне сортування для частково впорядкованої множини, заданої діаграмою Гассе із задачі 48.

51. Виконати топологічне сортування для частково впорядкованої множини (A, R) , де $A = \{1, 2, 3, 6, 8, 12, 24, 36\}$, $R = \{(a, b) \mid a \text{ ділить } b\}$.

ДОДАТКОВІ ЗАДАЧІ

Д_1. Дати відповіді на запитання щодо частково впорядкованої множини $(\{3, 5, 9, 15, 24, 45\}, |)$

Зауваження. Для формування відповідей зручно скористатися діаграмою Гассе.

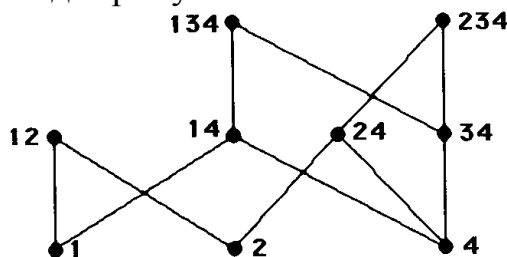
- а) Знайти максимальні елементи.
- б) Знайти мінімальні елементи.
- в) Чи є тут найбільший елемент?
- г) Чи є тут найменший елемент?
- д) Знайти всі верхні грані множини $\{3, 5\}$.
- е) Знайти найменшу верхню грань множини $\{3, 5\}$, якщо вона існує.
- ж) Знайти всі нижні грані множини $\{15, 45\}$.
- з) Знайти найбільшу нижню грань множини $\{15, 45\}$, якщо вона існує.

Д_2. Дати відповіді на запитання щодо частково впорядкованої множини $(\{2, 4, 6, 9, 12, 18, 27, 36, 48, 60, 72\}, |)$

- а) Знайти максимальні елементи.
- б) Знайти мінімальні елементи.
- в) Чи є тут найбільший елемент?
- г) Чи є тут найменший елемент?
- д) Знайти всі верхні грані множини $\{2, 9\}$.
- е) Знайти найменшу верхню грань множини $\{2, 9\}$, якщо вона існує.
- ж) Знайти всі нижні грані множини $\{60, 72\}$.
- з) Знайти найбільшу нижню грань множини $\{60, 72\}$, якщо вона існує.

Д_3. Дати відповіді на запитання щодо частково впорядкованої множини $(\{\{1\}, \{2\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}\}, \subset)$

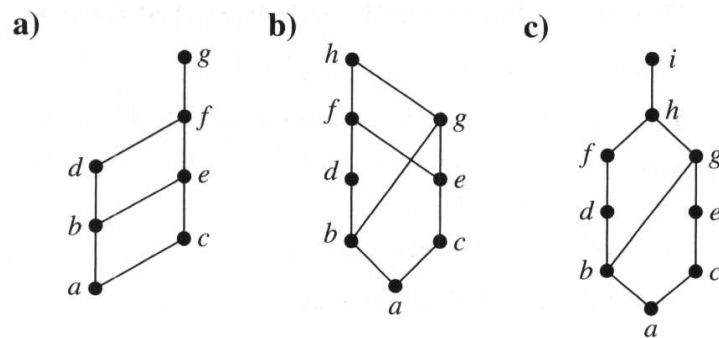
Для полегшення наводимо діаграму Гассе:



Зауваження. На діаграмі використано скорочені позначення: пропущено фігурні дужки і коми. Наприклад, замість $\{1, 3, 4\}$ написано 134.

- а) Знайти максимальні елементи.
- б) Знайти мінімальні елементи.
- в) Чи є тут найбільший елемент?
- г) Чи є тут найменший елемент?
- д) Знайти всі верхні грані множини $\{\{2\}, \{4\}\}$.
- е) Знайти найменшу верхню грань множини $\{\{2\}, \{4\}\}$, якщо вона існує.
- ж) Знайти всі нижні грані множини $\{\{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}\}$.
- з) Знайти найбільшу нижню грань множини $\{\{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}\}$, якщо вона існує.

Д_4. Визначити, чи є наступні множини, задані діаграмами Гассе, решітками.



Д_4. Визначити, чи є наступні множини решітками.

a) $(\{1, 3, 6, 9, 12\}, |)$, **b)** $(\{1, 5, 25, 125\}, |)$, **c)** (\mathbb{Z}, \geq) .

Зауваження. У кожному прикладі нам необхідно вирішити, чи має кожна пара елементів least upper bound (l.u.b.) і greatest lower bound (g.l.b.).

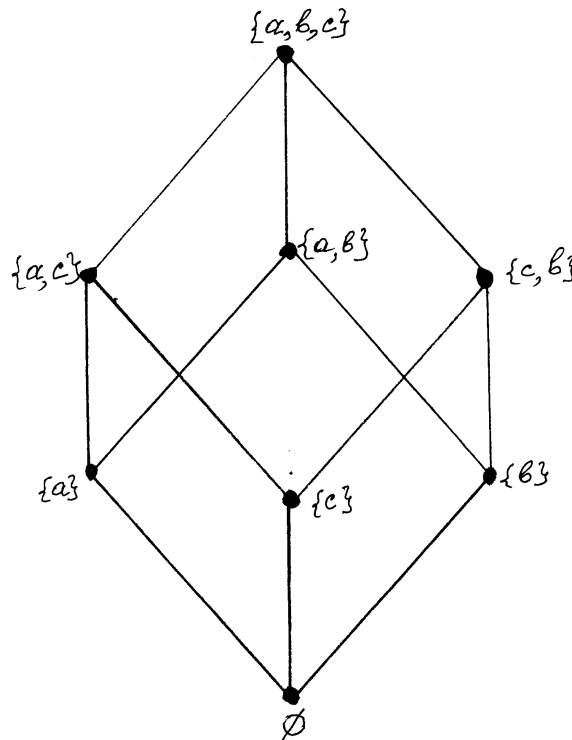
Д_5. У компанії використовується решіткова модель інформаційної безпеки. Класи безпеки подано впорядкованими парами (A, C) . Тут A – рівень повноважень: *необмежено* (0), *конфіденційно* (1), *обмежено* (2), і *за реєстром* (3)., C – категорія. Нехай категорія – це підмножина множини всіх проектів, що розробляються фірмою $\{\text{Гепард}, \text{Антилопа}, \text{Пума}\}$. (У закордонних компаніях назви тварин часто використовують як назви проектів).

- a)** Чи дозволено передавання інформації від $(\text{конфіденційно}, \{\text{Гепард}, \text{Пума}\})$ до $(\text{обмежено}, \{\text{Пума}\})$?
- b)** Чи дозволено передавання інформації від $(\text{обмежено}, \{\text{Гепард}\})$ до $(\text{за реєстром}, \{\text{Гепард}, \text{Антилопа}\})$?
- c)** До яких класів безпеки можна передавати інформацію від класу безпеки $(\text{конфіденційно}, \{\text{Гепард}, \text{Пума}\})$?
- d)** Від яких класів безпеки може поступати інформація до класу безпеки $(\text{обмежено}, \{\text{Антилопа}, \text{Пума}\})$?

ДОВІДКОВИЙ МАТЕРІАЛ: ВКАЗІВКИ, ПОЯСНЕННЯ, РОЗВ'ЯЗКИ

1. Задачі з підручника.

46. Тут діаграма Гассе – тривимірний куб.



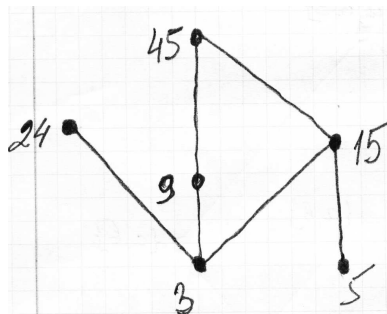
48. Цю задачу можна розширити (відповідний теоретичний матеріал є в лекції; у книзі його немає)

- Знайти максимальні елементи. Елементи l та m – максимальні.
- Знайти мінімальні елементи. Елементи a , b та c – мінімальні.
- Чи є тут найбільший елемент? Найбільшого елемента тут немає, бо жоден з елементів l та m не є більшим за інший.
- Чи є тут найменший елемент? Найменшого елемента тут немає, бо жоден з елементів a та b не є меншим за інший.
- Знайти всі верхні грані множини $\{a, b, c\}$. Нам потрібно знайти елементи з яких є низхідні шляхи до всіх елементів множини $\{a, b, c\}$. Очевидно, такими елементами є k , l та m .
- Знайти найменшу верхню грань множини $\{a, b, c\}$, якщо вона існує. Оскільки k менше ніж кожне з l та m , то k – найменша верхня грань множини $\{a, b, c\}$.
- Знайти всі нижні грані множини $\{f, g, h\}$. Немає жодного елемента, який менше обох елементів g і h . Отже, немає жодної нижньої грані множини $\{f, g, h\}$.
- Знайти найбільшу нижню грань множини $\{f, g, h\}$, якщо вона існує. Оскільки немає жодної нижньої грані, то не може бути і найбільшої нижньої грані.

2. Додаткові задачі

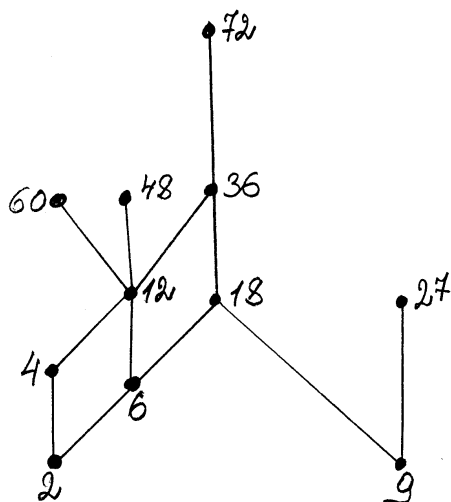
Д_1. Дати відповіді на запитання щодо частково впорядкованої множини $(\{3, 5, 9, 15, 24, 45\}, |)$

Зауваження. Для формування відповідей зручно скористатися діаграмою Гассе.



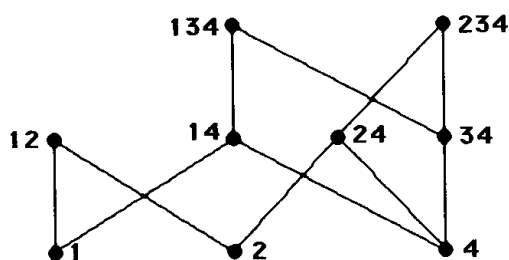
- а) Знайти максимальні елементи. Елементи 24 і 45 – максимальні.
- б) Знайти мінімальні елементи. Елементи 3 і 5 – мінімальні.
- в) Чи є тут найбільший елемент? Тут найбільший елемент такий, який ділиться на всі інші елементи. Є тільки два кандидати на найбільший елемент – це 24 і 45. Але оскільки жоден з них не ділиться на інший, то найбільшого елемента немає.
- г) Чи є тут найменший елемент? Тут найменший елемент має ділити всі інші елементи. Є два кандидати: 3 і 5. Але оскільки жоден з них не ділить інший, то найменшого елемента немає.
- д) Знайти всі верхні грані множини $\{3, 5\}$. Потрібно знайти всі елементи, котрі діляться на 3 і 5. Цим вимогам задовольняють 15 і 45.
- е) Знайти найменшу верхню грань множини $\{3, 5\}$, якщо вона існує. Найменша верхня грань 15, оскільки 15 ділить 45 (див. (д)).
- ж) Знайти всі нижні грані множини $\{15, 45\}$. Потрібно знайти всі елементи, які ділять 15 і 45. Цій вимозі задовольняють 3, 5 і 15.
- з) Знайти найбільшу нижню грань множини $\{15, 45\}$, якщо вона існує. Елемент 15 найбільша нижня грань, бо всі нижні грані – це 3, 5 і 15, а 3 і 5 ділять 15 (див. (ж)).

Д_2. Дати відповіді на запитання щодо частково впорядкованої множини $(\{2, 4, 6, 9, 12, 18, 27, 36, 48, 60, 72\}, |)$



- а) Знайти максимальні елементи. Елементи 27, 48, 60 і 72 – максимальні. Справді, кожний з них не ділить жодне число з множини.
- б) Знайти мінімальні елементи. Елементи 2 і 9 – мінімальні. Кожний інший елемент ділиться на 2 або на 9.
- в) Чи є тут найбільший елемент? Тут найбільшого елемента немає.
- г) Чи є тут найменший елемент? Тут найменшого елемента немає.
- д) Знайти всі верхні грані множини $\{2, 9\}$. Потрібно знайти всі елементи, котрі діляться на 2 і 9. Цим вимогам задовольняють 18, 36 і 72.
- е) Знайти найменшу верхню грань множини $\{2, 9\}$, якщо вона існує. Найменша верхня грань 18, оскільки 18 ділить решту верхніх граней (див. (д)).
- ж) Знайти всі нижні грані множини $\{60, 72\}$. Потрібно знайти всі елементи, які ділять 60 і 72. Цій вимозі задовольняють 2, 4, 6 і 12.
- з) Знайти найбільшу нижню грань множини $\{60, 72\}$, якщо вона існує. Елемент 12 – найбільша нижня грань, бо всі нижні грані – це 2, 4 і 6 – ділять 12 (див. (ж)).

Д_3. Дати відповіді на запитання щодо частково впорядкованої множини $(\{\{1\}, \{2\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}\}, \subset)$



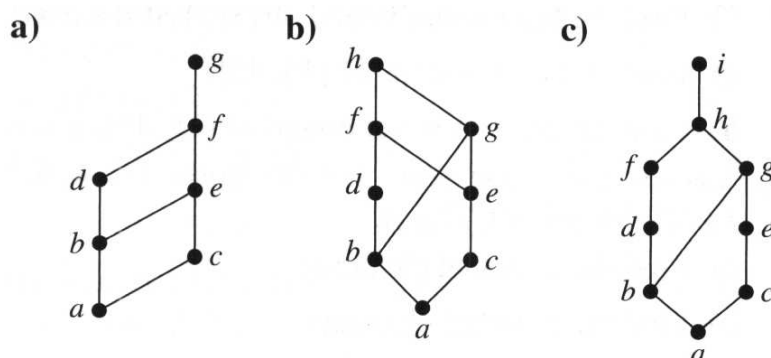
Зауваження. На діаграмі використано скорочені позначення: пропущено фігурні дужки і коми. Наприклад, замість $\{1, 3, 4\}$ написано 134.

- а) Знайти максимальні елементи. Максимальні елементи на діаграмі Гассе не мають ребер угору; це $\{1, 2\}$, $\{1, 3, 4\}$ і $\{2, 3, 4\}$.
- б) Знайти мінімальні елементи. Мінімальні елементи на діаграмі Гассе не мають ребер униз; це $\{1\}$, $\{2\}$ і $\{4\}$.
- в) Чи є тут найбільший елемент? Найбільшого елемента тут немає, бо є більше ніж один максимальний елемент, жоден з яких не є більшим, ніж інші.
- г) Чи є тут найменший елемент? Найменшого елемента тут немає, бо є більше ніж один мінімальний елемент, жоден з яких не є меншим, ніж інші.
- д) Знайти всі верхні грані множини $\{\{2\}, \{4\}\}$. Верхні грані – це множини, які містять $\{2\}$ і $\{4\}$ як підмножини, тобто це множини, які містять 2 і 4 як елементи. На діаграмі це підмножини, до яких є висхідні шляхи як від $\{2\}$, так і від $\{4\}$. Це, очевидно, $\{2, 4\}$ і $\{2, 3, 4\}$.
- е) Знайти найменшу верхню грань множини $\{\{2\}, \{4\}\}$, якщо вона існує. У (д) ми знайшли верхні грані – це $\{2, 4\}$ і $\{2, 3, 4\}$. Оскільки $\{2, 4\}$ менше ніж $\{2, 3, 4\}$ (у сенсі, що $\{2, 4\}$ є підмножиною $\{2, 3, 4\}$), то $\{2, 4\}$ – найменша верхня грань.

ж) Знайти всі нижні грані множини $\{\{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}\}$. Для того, щоб множина M була нижньою гранню $\{1, 3, 4\}$ і $\{2, 3, 4\}$, M має бути підмножиною обох цих множин, тобто M має бути підмножиною їхнього перетину $\{3, 4\}$. Таких підмножин дві: $\{3, 4\}$ і $\{4\}$. На діаграмі це вершини на шляхах униз від $\{1, 3, 4\}$ і $\{2, 3, 4\}$.

з) Знайти найбільшу нижню грань множини $\{\{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}\}$, якщо вона існує. Найбільша нижня грань – це нижня грань, яка є більшою за будь-яку іншу нижню грань. У (ж) ми знайшли дві нижні грані: $\{3, 4\}$ і $\{4\}$. Очевидно, що $\{3, 4\}$ – найбільша нижня грань.

Д_4. Визначити, чи є наступні множини, задані діаграмами Гассе, решітками.



a) Це решітка. Якщо ми хочемо знайти least upper bound (l.u.b.) або greatest lower bound (g.l.b.) двох елементів на вертикальній лінії діаграми Гассе, то просто беремо верхній або нижній елементи цієї лінії, відповідно. Якщо два елементи розташовані на різних вертикальних лініях, то для знаходження l.u.b. ми рухаємося діагональною лінією вгору від елемента зліва і тоді завершуємо рух справа. Необхідно досягти елемента справа. Наприклад, l.u.b. елементів d і c – елемент f ; l.u.b. елементів a і e – елемент e . Аналогічно знаходять g.l.b. двох елементів частково впорядкованої множини.

b) Це не решітка. Елементи b і c мають верхні грані f, g і h , але жодна з них не є l.u.b. Справді, кандидатами могли б бути f і g , але вони не порівнювані.

c) Це решітка. Розглядаючи всі пари елементів, ми можемо перевірити, що кожна пара має l.u.b. і g.l.b. Наприклад, пара b і e має g і a у цих ролях, відповідно.

Д_4. Визначити, чи є наступні множини решітками.

a) $(\{1, 3, 6, 9, 12\}, |)$, **b)** $(\{1, 5, 25, 125\}, |)$, **c)** (\mathbb{Z}, \geq) .

Зауваження. У кожному прикладі нам необхідно вирішити, чи має кожна пара елементів least upper bound (l.u.b.) і greatest lower bound (g.l.b.).

a) Це не решітка. Справді, 6 і 9 не мають жодної верхньої грані, бо жоден елемент множини не ділиться одночасно на 6 і 9 .

b) Це решітка. Фактично це лінійний порядок: кожен елемент списку ділить наступний; l.u.b. двох чисел списку – це більше з них, а g.l.b. – менше з них.

c) Це решітка знову, бо лінійний порядок; l.u.b. двох чисел списку – це (зверніть увагу!) менше з них, а g.l.b. – більше з них.

Д_5. У компанії використовується решіткова модель інформаційної безпеки. Класи безпеки подано впорядкованими парами (A, C) . Тут A – рівень повноважень: *необмежено* (0), *конфіденційно* (1), *обмежено* (2), і *за реєстром* (3)., C – категорія. Нехай категорія – це підмножина множини всіх проектів, що розробляються фірмою $\{\text{Гепард}, \text{Антилопа}, \text{Пума}\}$. (У закордонних компаніях назви тварин часто використовують як назви проектів).

a) Чи дозволено передавання інформації від (*конфіденційно*, $\{\text{Гепард}, \text{Пума}\}$) до (*обмежено*, $\{\text{Пума}\}$)? **Ні.**

b) Чи дозволено передавання інформації від (*обмежено*, $\{\text{Гепард}\}$) до (*за реєстром*, $\{\text{Гепард}, \text{Антилопа}\}$)? **Так.**

c) До яких класів безпеки можна передавати інформацію від класу безпеки (*конфіденційно*, $\{\text{Гепард}, \text{Пума}\}$)?

Ці класи повинні мати рівень повноважень не нижче *приватно*, а категорії C повинні задовольняти умову $\{\text{Гепард}, \text{Пума}\} \subset C$. Ось ці класи безпеки:

(*конфіденційно*, $\{\text{Гепард}, \text{Пума}\}$)
(*обмежено*, $\{\text{Гепард}, \text{Пума}\}$)
(*за реєстром*, $\{\text{Гепард}, \text{Пума}\}$)
(*конфіденційно*, $\{\text{Гепард}, \text{Антилопа}, \text{Пума}\}$)
(*обмежено*, $\{\text{Гепард}, \text{Антилопа}, \text{Пума}\}$)
(*за реєстром*, $\{\text{Гепард}, \text{Антилопа}, \text{Пума}\}$).

d) Від яких класів безпеки може поступати інформація до класу безпеки (*обмежено*, $\{\text{Антилопа}, \text{Пума}\}$)?

Ці класи повинні мати рівень повноважень не вище *обмежено*, а категорії C повинні задовольняти умову $C \subset \{\text{Антилопа}, \text{Пума}\}$. Ось ці класи безпеки:

(*необмежено*, $\{\text{Антилопа}, \text{Пума}\}$)
(*конфіденційно*, $\{\text{Антилопа}, \text{Пума}\}$)
(*обмежено*, $\{\text{Антилопа}, \text{Пума}\}$)
(*необмежено*, $\{\text{Антилопа}\}$)
(*конфіденційно*, $\{\text{Антилопа}\}$)
(*обмежено*, $\{\text{Антилопа}\}$)
(*необмежено*, $\{\text{Пума}\}$)
(*конфіденційно*, $\{\text{Пума}\}$)
(*обмежено*, $\{\text{Пума}\}$)
(*необмежено*, \emptyset)
(*конфіденційно*, \emptyset)
(*обмежено*, \emptyset)