

Лекція 06

План лекції

- **Означення відношення**
- **Функції як відношення**
- **Подання відношень матрицями та орієнтованими графами**
- **Властивості бінарних відношень на множині**
- **Теоретико-множинні операції над відношеннями**
- **Композиція відношень**
 - **Теорема про властивість степеня транзитивного відношення**

Відношення та їхні властивості

Означення відношення

Бінарне відношення з множини A в множину B – це підмножина R декартового добутку $A \times B$ цих множин: $R \subset A \times B$. Інакше кажучи, бінарне відношення з A в B – це якась множина впорядкованих пар, у якій перший елемент пари належить множині A , а другий – множині B . Якщо $(a, b) \in R$, то пишуть aRb .

Приклад 1. Нехай $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{a, b\}$ та задано відношення $R = \{(0, a), (0, b), (1, a), (2, b)\}$. Отже, $0Ra$, оскільки $(0, a) \in R$, а $(1, b) \notin R$.

Здебільшого розглядають бінарні відношення за умови $A = B$.

Відношенням на множині A називають бінарне відношення з A в A . Інакше кажучи, відношенням R на множині A – це підмножина декартового квадрату множини A , тобто $R \subset A^2$.

Приклад 2. Нехай $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Які впорядковані пари утворюють відношення $R = \{(a, b) \mid a \text{ ділить } b\}$?

Очевидно, що $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 4)\}$.

Функції як відношення

Нагадаємо, що функція f із множини A в множину B кожному елементу множини A ставить у відповідність точно один елемент множини B . Графік функції f – це множина упорядкованих пар (a, b) таких, що $b = f(a)$. Тому що графік функції f є підмножиною $A \times B$, він є відношенням із A в B . Більше того, графік функції має таку властивість, що кожний елемент з A є **першим елементом точно одної впорядкованої пари**.

Відношення можна використати для того, щоб задати відповідність «один до багатьох» між елементами множин A та B , у якій елементу $a \in A$ може відповідати **більше ніж один** елемент множини B . Тоді як функція репрезентує відношення, коли кожному елементу множини A відповідає **точно один** елемент множини B .

Висновок. Відношення можна розглядати як узагальнення графіків функцій. Їх можна використовувати для зображення ширшого ніж функції класу взаємозв'язків між множинами.

Подання відношень матрицями та орієнтованими графами

Бінарне відношення на множині A можна подати за допомогою булевої матриці або орієнтованого графа.

Булевою називають матрицю, елементи якої – нулі та одиниці.

Матриця, яка задає відношення R на n -елементній множині A , – це булева $n \times n$ матриця $M_R = [m_{ij}]$, $i, j = 1, \dots, n$, де

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } (a_i, a_j) \in R, \\ 0, & \text{якщо } (a_i, a_j) \notin R. \end{cases}$$

Орієнтований граф складається із множини V вершин і множини E дуг; кожна дуга – це упорядкована пара вершин із V . Якщо (a, b) – дуга, то вершину a називають *ініціальною* (або *початковою*), а вершину b – *термінальною* (або *кінцевою*) вершиною дуги. Дугу (a, a) , яка має ініціальною й термінальною одну й ту саму вершину a , називають *петлею*.

Граф G_R , який задає відношення R на множині A , будують так. Вершини графа позначають елементами цієї множини, а дуга (a_i, a_j) існує тоді й лише тоді, коли пара $(a_i, a_j) \in R$. Такий граф G_R називають *графом, асоційованим із відношенням R* , або просто *графом відношення R* .

Приклад 3. На рис. 1 зображено матрицю та граф, які задають відношення *ділить* з прикладу 2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

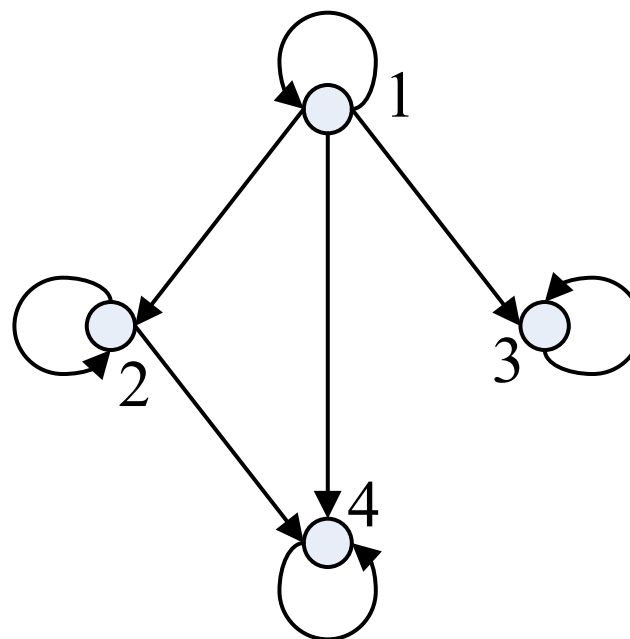


Рис. 1

Властивості бінарних відношень на множині

Розглянемо властивості відношень на множині A .

Відношення R на множині A називають *рефлексивним*, якщо для будь-якого $a \in A$ виконується $(a, a) \in R$.

Приклад 4. Розглянемо шість відношень на множині $A = \{1, 2, 3, 4\}$:

$$R_1 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 4)\};$$

$$R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1)\};$$

$$R_3 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 4)\};$$

$$R_4 = \{(2, 1), (3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\};$$

$$R_5 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 4)\};$$

$$R_6 = \{(3, 4)\}.$$

Відношення R_3 та R_5 рефлексивні,

Відношення R на множині A називають *іррефлексивним*, якщо для будь-якого $a \in A$ виконується $(a, a) \notin R$.

Наприклад, відношення R_4, R_6 із прикладу 4 іррефлексивні, а R_1, R_2 – не рефлексивні й не іррефлексивні.

Відношення R на множині A називають *симетричним*, якщо для будь-яких $a, b \in A$ з того, що $(a, b) \in R$, випливає, що $(b, a) \in R$.

У прикладі 4 лише відношення R_2 та R_3 симетричні.

Відношення R на множині A називають *антисиметричним*, якщо для всіх $a, b \in A$ з того, що $(a, b) \in R$ і $(b, a) \in R$, випливає, що $a = b$.

Інакше кажучи, відношення антисиметричне, якщо в разі $a \neq b$ воно водночас не містить пар (a, b) та (b, a) .

У прикладі 4 антисиметричні лише відношення R_4, R_5 та R_6 . У кожному з них немає таких пар елементів a та b ($a \neq b$), що одночасно $(a, b) \in R$ та $(b, a) \in R$.

Важливо зазначити, що властивості симетричності й антисиметричності не антагоністичні: існують відношення, які мають обидві ці властивості.

Приклад 5. Відношення $R = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4)\}$ (*діагональне відношення*) на множині $A = \{1, 2, 3, 4\}$ є симетричним і антисиметричним одночасно.

Приклад 6. Відношення R_1 з прикладу 4 ані симетричне, ані антисиметричне.

Відношення R на множині A називають *асиметричним*, якщо для всіх $a, b \in A$ з того, що $(a, b) \in R$, випливає, що $(b, a) \notin R$.

Зрозуміло, що будь-яке асиметричне відношення має бути й антисиметричним. Обернене твердження неправильне. Відношення R_5 із прикладу 4 антисиметричне, проте не асиметричне, бо містить пари $(1, 1)$, $(2, 2)$, $(3, 3)$, $(4, 4)$.

Відношення R на множині A називають *транзитивним*, якщо для будь-яких $a, b, c \in A$ з того, що $(a, b) \in R$ і $(b, c) \in R$, випливає $(a, c) \in R$.

Відношення R_4 , R_5 та (зверніть увагу!) R_6 із прикладу 4 транзитивні. Справді, якщо пари (a, b) та (b, c) належать цим відношенням, то й пара (a, c) теж належить.

Відношення R_1 , R_2 , R_3 із прикладу 4 не транзитивні: $(3, 4) \in R_1$, $(4, 1) \in R_1$, але $(3, 1) \notin R_1$; $(2, 1) \in R_2$, $(1, 2) \in R_2$, але $(2, 2) \notin R_2$; $(2, 1) \in R_3$, $(1, 4) \in R_3$, але $(2, 4) \notin R_3$.

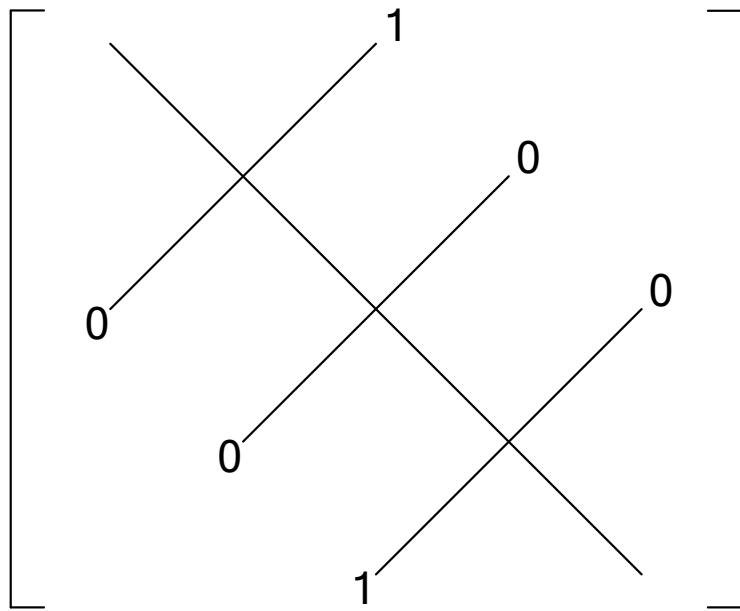


Рис. 2

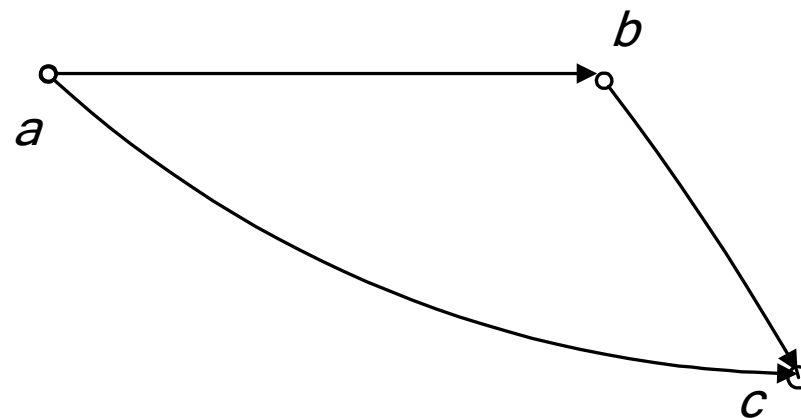
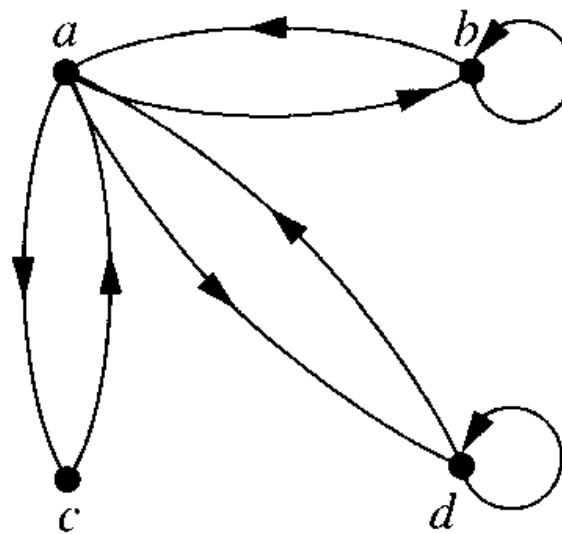
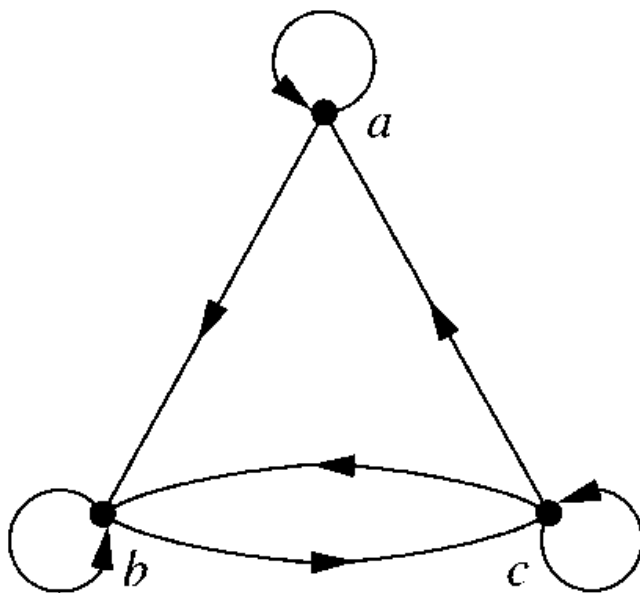


Рис. 3

Розглянемо, як деякі властивості відношень відображаються на матрицях і графах цих відношень. Якщо відношення R рефлексивне, то на головній діагоналі матриці M_R лише одиниці, якщо іррефлексивне – то нулі. Матриця M_R симетричного відношення симетрична. Матриця M_R антисиметричного відношення R має таку властивість: якщо $i \neq j$, то з $m_{ij}=1$, випливає $m_{ji}=0$ (але може бути $m_{ij}=m_{ji}=0$) (рис. 2).

Граф G_R рефлексивного відношення R має петлю в кожній вершині. У графі транзитивного відношення в разі наявності пари дуг (a, b) та (b, c) обов'язково є дуга (a, c) (рис. 3).

Приклад 7. На рис. 4 зображено орієнтовані графи відношень R та S . Для кожного з відношень визначити, чи є воно рефлексивним, симетричним, антисиметричним, транзитивним.



(а) Орієнтований граф відношення R

(б) Орієнтований граф відношення S

Рис. 4

Теоретико-множинні операції над відношеннями

Оскільки відношення з множини A в множину B – підмножина декартового добутку $A \times B$, то над будь-якими двома відношеннями з A в B можна виконувати звичайні теоретико-множинні операції.

Приклад. Нехай $A = \{1, 2, 3\}$ та $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Визначимо відношення R_1 та R_2 з A в B :

$$R_1 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\},$$

$$R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4)\}.$$

Тоді

$$R_1 \cup R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (3, 3)\},$$

$$R_1 \cap R_2 = \{(1, 1)\},$$

$$R_1 \setminus R_2 = \{(2, 2), (3, 3)\},$$

$$R_2 \setminus R_1 = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4)\}.$$

Композиція відношень

Нехай R – відношення із множини A в множину B , а S – відношення із множини B в множину C .

Композицією відношень R і S називають відношення, яке складається з усіх можливих упорядкованих пар (a, c) , де $a \in A$, $c \in C$, для яких існує такий елемент $b \in B$, що $(a, b) \in R$ і $(b, c) \in S$.

Композицію відношень R та S позначають як $S \circ R$ (ми пишемо справа перше з двох відношень, які беруть участь у композиції, як і для композиції функцій).

Приклад. Знайдемо композицію відношень R і S , де R – відношення з множини $A = \{1, 2, 3\}$ в множину $B = \{1, 2, 3, 4\}$:

$$R = \{(1, 1), (1, 4), (2, 3), (3, 1), (3, 4)\};$$

S – відношення з множини B в множину $C = \{0, 1, 2\}$:

$$S = \{(1, 0), (2, 0), (3, 1), (3, 2), (4, 1)\}.$$

$$S \circ R = \{(1, 0), (1, 1), (2, 1), (2, 2), (3, 0), (3, 1)\}.$$

Нехай R – відношення на множині A . Степінь R^n , $n=1, 2, 3 \dots$, означають за допомогою рекурсії:

$$R^1=R,$$

$$R^{n+1}=R^n \circ R.$$

Отже, зокрема

$$R^2=R \circ R,$$

$$R^3=R^2 \circ R=(R \circ R) \circ R.$$

Приклад 8. Нехай на множині $A=\{1, 2, 3, 4\}$ задано відношення $R=\{(1, 1), (2, 1), (3, 2), (4, 3)\}$. Знайдемо R^n , $n = 2, 3, 4, 5$. За означенням послідовно отримаємо:

$$R^2=R \circ R=\{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 2)\},$$

$$R^3=R^2 \circ R=\{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1)\},$$

$$R^4=R^3 \circ R=\{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1)\},$$

тобто $R^4=R^3$. Можна переконатись, що $R^5=R^4$.

Теорема. Якщо $R^2 \subset R$, то відношення транзитивне.

Доведення. За означенням композиції, якщо $(a, b) \in R$ та $(b, c) \in R$, то $(a, c) \in R^2$. Оскільки $R^2 \subset R$, то це означає, що $(a, c) \in R$. Отже, відношення R транзитивне.

Теорема про властивість степеня транзитивного відношення. Нехай R – транзитивне відношення на множині A . Тоді $R^n \subset R$, $n = 1, 2, 3, \dots$

Доведення. Застосуємо математичну індукцію. У разі $n = 1$ твердження теореми тривіальне. Гіпотеза індукції: $R^n \subset R$. Для завершення доведення потрібно переконатись, що із цієї гіпотези випливає включення $R^{n+1} \subset R$. Припустимо, що $(a, b) \in R^{n+1}$. Оскільки $R^{n+1} = R^n \circ R$, то існує такий елемент $x \in A$, що $(a, x) \in R$ та $(x, b) \in R^n$. За індуктивною гіпотезою $R^n \subset R$, звідки випливає, що $(x, b) \in R$. Позаяк відношення R транзитивне, то з $(a, x) \in R$ та $(x, b) \in R$ випливає, що $(a, b) \in R$. Отже, $R^{n+1} \subset R$.