Лекція 11

Розвинута техніка підрахунку.

План лекції

Рекурентні рівняння

Числову послідовність (a_n) можна задати *рекурентним рівнянням* (використовують також термін *рекурентне співвідношення*). Таке рівняння описує правило для знаходження елементів послідовності через один або декілька попередніх, причому задано відповідну кількість початкових елементів.

Розв'язком рекурентного рівняння називають послідовність, яка задовольняє це рівняння. Інакше кажучи, послідовність задано рекурентною формулою, а потрібно знайти явний вираз для a_n через n.

Метод рекурентних рівнянь у комбінаториці полягає в зведенні комбінаторної задачі до аналогічної задачі для меншої кількості об'єктів.

Числа Фібоначчі.

Цю задачу дослідив у XIII ст. Леонардо Пізанський, відомий як Фібоначчі. Молоду різностатеву пару кролів завезли на острів. Після досягнення двомісячного віку кожна пара щомісяця дає приплід – нову пару. Потрібно визначити кількість пар кролів на острові через n місяців.

У кінці першого місяця кількість пар кролів на острові $f_1=1$. Оскільки ця пара не дає приплоду протягом двох місяців, що $f_2=1$ також. Щоб визначити кількість пар після n місяців, додамо їх кількість у попередньому місяці f_{n-1} і кількість новонароджених пар f_{n-2}: кожна новонароджена пара походить від пари щонайменше двомісячного віку.

Отже, послідовність f_n задовольняє рівняння $f_n = f_{n-1}+f_{n-2}$ з початковими умовами $f_0=0$, $f_1=1$. Члени послідовності (f_n) називають *числами Фібоначчі*.

Розв'язування лінійних однорідних рекурентних рівнянь

Загального методу розв'язування рекурентних рівнянь немає. Проте певний клас рівнянь можна розв'язувати одним методом.

Рекурентне рівняння називають *лінійним однорідним порядку k зі сталими коефіцієнтами*, якщо воно має вигляд

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} \qquad (1)$$

де $c_1, c_2, \ldots, c_k$ – дійсні числа та $c_k \neq 0$.

Приклад. Розглянемо рекурентні рівняння:

$a_n = 1.11 a_{n-1}$ – лінійне однорідне першого порядку;

$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ – лінійне однорідне другого порядку;

$a_n = a_{n-5}$ – лінійне однорідне п'ятого порядку;

$a_n = a_{n-1} + a^2_{n-1}$ – нелінійне;

$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} a_{n-3}$ – нелінійне;

$a_n = 2a_{n-1} + 1$ – лінійне неоднорідне;

$a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2} + n2^n$ – лінійне неоднорідне;

$a_n = n a_{n-1}$ – лінійне однорідне, але не зі сталими коефіцієнтами.

Розв'язок рекурентного рівняння k-го порядку називають *загальним*, якщо він залежить від k довільних сталих B_1, …, B_k, і будь-який його розв'язок можна одержати підбором цих сталих. Щоб рекурентне рівняння визначало конкретну послідовність, достатньо задати k початкових умов: $a_0=A_0$, $a_1=A_1$, …, $a_{k-1}=A_{k-1}$. Із цих умов і визначають сталі B_1, …, B_k.

Теорема 1. Якщо послідовності $a_n^{(1)}, a_n^{(2)}, ..., a_n^{(p)}$ –це розв'язки рекурентного рівняння (1), то для довільних чисел B_1, B_2, …, B_p послідовність

$$a_n = B_1 a_n^{(1)} + B_2 a_n^{(2)} + \cdots + B_p a_n^{(p)}$$

також являє собою розв'язок цього рівняння.

Доведення . Кожну з тотожностей

$$a_n^{(i)} = c_1 a_{n-1}^{(i)} + c_2 a_{n-2}^{(i)} + \cdots + c_k a_{n-k}^{(i)}, \quad i = 1, 2, \ldots, p$$

помножимо на B_i та додамо результати.

Теорема 2. Якщо число r_1 – корінь рівняння

$$r^k = c_1 r^{k-1} + c_2 r^{k-2} + \cdots + c_k. \qquad (2)$$

то послідовність r_1^n (n=1, 2, …) – розв'язок рекурентного рівняння (1).

Доведення. Нехай $a_n = r_1^n$. Підставимо a_n у рівняння (1) і одержимо рівність

$$r_1^n = c_1 r_1^{n-1} + c_2 r_1^{n-2} + \cdots + c_k r_1^{n-k}.$$

Вона правильна, оскільки за умовою теореми виконується рівність

$$r_1^k = c_1 r_1^{k-1} + c_2 r_1^{k-2} + \cdots + c_k,$$

і залишається помножити обидві частини цієї рівності на r_1^{n-k}. Теорему доведено.

Рівняння (2) називають *характеристичним* для рекурентного рівняння (1). Це алгебричне рівняння степеня k; його корені можуть бути як простими, так і кратними.

Нехай усі корені характеристичного рівняння прості. Тоді за теоремою 2 можна навести k різних розв'язків рекурентного рівняння (1): $r_1^n, r_2^n, \ldots, r_k^n$, де r_i (i=1, 2, …, k) – корені характеристичного рівняння (2).

Зазначимо, що всі r_i відмінні від нуля. Якщо б це було не так, то c_k=0. Доведемо, що коли всі корені характеристичного рівняння прості, то загальний розв'язок рекурентного рівняння має вигляд:

$$a_n = B_1 r_1^n + B_2 r_2^n + \cdots + B_k r_k^n. \tag{3}$$

Безпосередньо з теорем 1 і 2 випливає, що послідовність (3) задовольняє рівняння (1). Отже, залишилося довести, що будь-який розв'язок рекурентного рівняння (1) можна подати у вигляді (3). Позаяк будь-який розв'язок повністю визначається значеннями a_0=A_0, a_1=A_1, …, a_{k-1}=A_{k-1}, то достатньо показати, що система лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} B_1 + B_2 + \cdots + B_k = A_0 \\ B_1 r_1 + B_2 r_2 + \cdots + B_k r_k = A_1 \\ B_1 r_1^2 + B_2 r_2^2 + \cdots + B_k r_k^2 = A_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ B_1 r_1^{k-1} + B_2 r_2^{k-1} + \cdots + B_k r_k^{k-1} = A_{k-1}. \end{cases} \tag{4}$$

має розв'язок за будь-яких A_0, A_1, …, A_{k-1}.

Визначник системи (4)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ r_1 & r_2 & \cdots & r_k \\ r_1^2 & r_2^2 & \cdots & r_k^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_1^{k-1} & r_2^{k-1} & \cdots & r_k^{k-1} \end{vmatrix}$$

– це визначник Вандермонда, він дорівнює добутку $\prod_{i>j}(r_i - r_j)$. Оскільки всі r_i різні, то визначник відмінний від 0, і система (4) має єдиний розв'язок за будь-яких A_0, A_1, …, A_{k-1}.

Приклад. Послідовність чисел Фібоначчі задає рекурентне рівняння другого порядку $f_n=f_{n-1}+f_{n-2}$ із початковими умовами $f_0=0$, $f_1=1$. Характеристичне рівняння $r^2=r+1$, тобто $r^2-r-1=0$, звідки

$$r_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2},\ \ r_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Отже,

$$f_n=B_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+B_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Для визначення констант B_1 та B_2 скористаємося початковими умовами:

$$\begin{cases} B_1+B_2=0, \\ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)B_1+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)B_2=1. \end{cases}$$

Отримаємо $B_1=\frac{1}{\sqrt{5}}$; $B_2=-\frac{1}{\sqrt{5}}$, отже, $f_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$.

Приклад. Розглянемо рекурентне рівняння четвертого порядку $a_n = 5a_{n-2} - 4a_{n-4}$, початкові умови a_0=3, a_1=2, a_2=6, a_3=8. Характеристичне рівняння $r^4 - 5r^2 + 4 = 0$. Розклавши ліву частину на множники, послідовно одержимо

$$r^4 - 5r^2 + 4 = \left(r^2 - 1\right)\left(r^2 - 4\right) = (r-1)(r+1)(r-2)(r+2),$$

$$(r-1)(r+1)(r-2)(r+2) = 0,$$

$$r_1 = 1,\ r_2 = -1,\ r_3 = 2,\ r_4 = -2.$$

Отже, загальний розв'язок має вигляд $a_n = B_1 + B_2(-1)^n + B_3 2^n + B_4(-2)^n$.

Скориставшись початковими умовами, запишемо систему рівнянь для визначення констант:

$$\begin{cases} B_1 + B_2 + B_3 + B_4 = 3, \\ B_1 - B_2 + 2B_3 - 2B_4 = 2, \\ B_1 + B_2 + 4B_3 + 4B_4 = 6, \\ B_1 - B_2 + 8B_3 - 8B_4 = 8. \end{cases}$$

Розв'язавши її, одержимо B_1=B_2=B_3=1, B_4=0. Отже, a_n=1+(–1)^n+2^n.

Розглянемо тепер випадок кратних коренів. Вираз (3) у цьому разі – уже не загальний розв'язок. Справді, нехай, наприклад, $r_1=r_2$, тоді

$$a_n = (B_1 + B_2)r_1^n + B_3 r_3^n + \cdots + B_k r_k^n = B r_1^n + B_3 r_3^n + \cdots + B_k r_k^n .$$

Залишилося (k–1) довільних сталих, а визначити їх потрібно так, щоб задовольнити k початкових умов $a_0=A_0$, $a_1=A_1$, …, $a_{k-1}=A_{k-1}$. Зробити це в загальному випадку неможливо.

Нехай характеристичне рівняння (2) має s різних коренів r_1, r_2, …,r_s, кратність яких дорівнює, відповідно, k_1, k_2, …, k_s ($k_1+k_2+\ldots+k_s=k$). Щоб побудувати загальний розв'язок рекурентного рівняння (1) у цьому разі, потрібно доповнити кількість розв'язків, яких не вистачає через кратність коренів r_1, r_2, …, r_s. Можна довести, що окрім r_j^n розв'язки рівняння (1) – це також nr_j^n, $n^2 r_j^n$, …, $n^{k_j-1} r_j^n$ (j=1, 2, …, s). Отже, кожний корінь кратності k_j характеристичного рівняння (2) дасть точно k_j розв'язків рекурентного рівняння (1); усього розв'язків рекурентного рівняння (1) виявиться $k_1+k_2+\ldots+k_s=k$. Це уможливить записати загальний розв'язок, який залежить від k довільних сталих B_1, …, B_k.

Приклад. Нехай корені характеристичного рівняння такі: 2, 2, 2, 3, 3, 4. Тоді загальний розв'язок рекурентного рівняння (<u>шостого порядку</u>) потрібно записати так:

$$a_n = B_1 2^n + B_2 n 2^n + B_3 n^2 2^n + B_4 3^n + B_5 n 3^n + B_6 4^n .$$

<u>Цей розв'язок залежить від довільних шести сталих.</u>

Приклад. Нехай задано рекурентне рівняння $a_n = -6a_{n-1} - 9a_{n-2}$, $a_0=3$, $a_1=-3$. Характеристичне рівняння $r^2+6r+9=0$, звідки $r_1=r_2=-3$. Загальний розв'язок має вигляд

$$a_n = B_1(-3)^n + B_2 n(-3)^n .$$

Для визначення констант, виходячи з початкових умов, складемо систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} B_1 = 3, \\ -3B_1 - 3B_2 = -3, \end{cases}$$

з якої знаходимо $B_1=3$, $B_2=-2$. Отже, $a_n=3(-3)^n-2n(-3)^n=(3-2n)(-3)^n$.

Розв'язування лінійних неоднорідних рекурентних рівнянь

Коротко розглянемо лінійні неоднорідні рекурентні рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_k a_{n-k} + q_n, \tag{5}$$

де q_n – відома послідовність.

Теорема 3. Загальний розв'язок a_n лінійного неоднорідного рівняння (5) дорівнює сумі його часткового розв'язку $\tilde{a}_n$ і загального розв'язку α_n відповідного лінійного однорідного рівняння.

Теорема 3 зводить задачу знаходження загального розв'язку неоднорідного рекурентного рівняння (5) до відшукання будь-якого його часткового розв'язку.

Принцип коробок Діріхле

Принцип коробок Діріхле – це один із важливих методів доведення, який має особливо широке застосування в теорії скінчених автоматів, теорії чисел та інших розділах.

Теорема 4 (принцип коробок Діріхле). Якщо k+1 або більше предметів розкладено в k коробках, то існує принаймні одна коробка, яка містить два або більше предметів.

Доведення. Припустимо, що жодна коробка не містить більше одного предмета. Тоді загальна кількість предметів становить щонайбільше k. Це суперечить тому, що є щонайменше k+1 предмет.

Приклад. У будь-якій групі з 367 чоловік принаймні двоє народилися в один день (можливо, у різні роки).

Нагадаємо, що як $\lceil x \rceil$ (стеля) позначають найменше ціле число, яке не менше x.

Теорема 5 (узагальнений принцип коробок Діріхле). Якщо N предметів розкладено в k коробках, то існує принаймні одна коробка, яка містить щонайменше $\lceil N/k \rceil$ предметів.

Доведення. Зазначимо, що справджується нерівність $\lceil N/k \rceil < (N/k)+1$. Припустимо, що жодна коробка не містить більше ніж $\lceil N/k \rceil - 1$ предметів. Тоді загальна кількість предметів становить щонайбільше

$$k(\lceil N/k \rceil - 1) < k(((N/k)+1)-1) = N.$$

Це суперечить умові теореми, що загальна кількість предметів дорівнює N.

Приклад. Серед 100 людей принаймні $\lceil 100/12 \rceil = 9$ народилися в одному місяці.

Принцип включення – вилучення

Цей принцип дає відповідь на запитання, як визначити кількість елементів у об’єднанні множин. Для двох множин відповідь дає формула

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Приклад. Знайдемо кількість додатних цілих чисел, що не перевищують 1000 та діляться на 7 або на 11. Позначимо як A – множину чисел, що діляться на 7, B – множину чисел, що діляться на 11. Тоді

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = \left\lfloor \frac{1000}{7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{11} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{1000}{7 \cdot 11} \right\rfloor = 142 + 90 - 12 = 220.$$

Для трьох множин формула для кількості елементів у їх об’єднані ускладнюється:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Приклад. Одну з мов (англійську, німецьку, іспанську) вивчає 231 студент, причому $|E| = 180$, $|D| = 110$, $|S| = 70$, $|E \cap D| = 82$, $|E \cap S| = 40$, $|D \cap S| = 15$, де як E, D, S позначено множини студентів, які відповідно вивчають англійську, німецьку та іспанську мови. Скільки студентів вивчають усі три мови? Маємо:

$$231 = 180 + 110 + 70 - 82 - 40 - 15 + |E \cap D \cap S|,$$

звідки $|E \cap D \cap S| = 8$ студентів.

Теорема 6 (принцип включення-вилучення). Нехай A_1, A_2, …, A_n – скінченні множини. Тоді

$$\left|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n\right| = \sum_{1 \le i \le n} \left|A_i\right| - \sum_{1 \le i < j \le n} \left|A_i \cap A_j\right| +$$

$$+ \sum_{1 \le i < j < k \le n} \left|A_i \cap A_j \cap A_k\right| - \ldots + (-1)^{n+1} \left|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n\right|.$$

Приклад. Позначимо як C – множину учнів, які взяли участь у хімічній олімпіаді, F – у фізичній олімпіаді, M – у математичній. Дано: $|C| = 21$, $|F| = 26$, $|M| = 29$, $|C \cap M| = 14$, $|F \cap M| = 15$, $|C \cap F \cap M| = 8$. Знайти, скільки учнів взяли участь хоча б в одній олімпіаді. Розглянути всі варіанти відповіді.

Кількість учнів, які взяли участь хоча б в одній олімпіаді дорівнює $|C \cup F \cup M|$. За принципом включення – вилучення

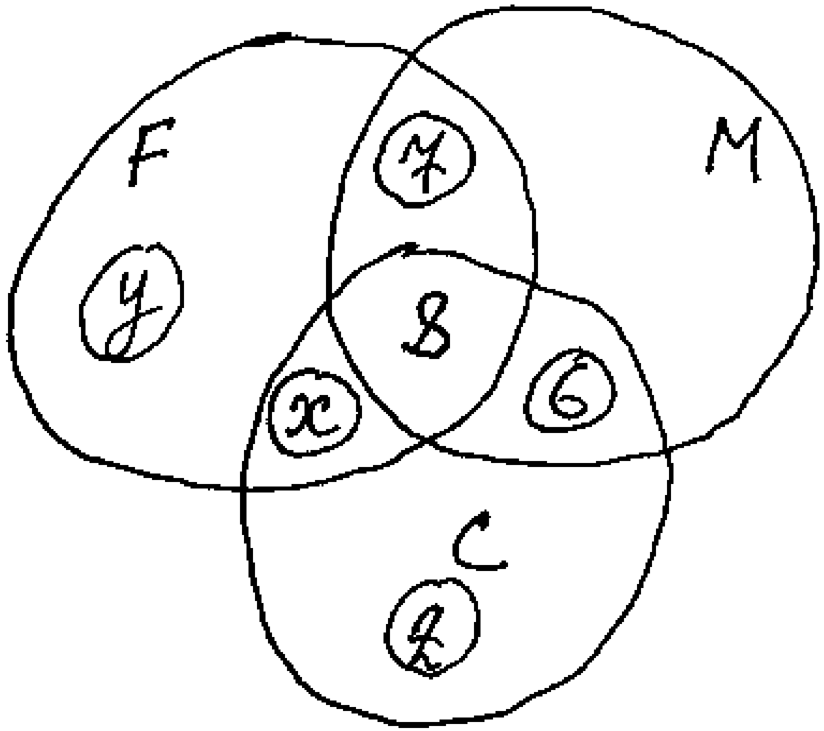
$|C \cup F \cup M| = |C| + |F| + |M| - |C \cap M| - |F \cap M| - |C \cap F| + |C \cap F \cap M|$,

$|C \cup F \cup M|$=21+26+29–14–15–$|C \cap F|$+8,

$|C \cup F \cup M|$=55–$|C \cap F|$.

Очевидно, що $|C \cap F| \geq 8$, бо $|C \cap F \cap M| = 8$.

З іншого боку, $|C \cap F| \leq 21$, бо $|C| = 21$, $|F| = 26$. Але 21 не досягається. Розглянемо рисунок.



$|F| = 26$, тоді $26 - (7+8) = 11$, і $x + y = 11$,

$|C| = 21$, тоді $21 - (6+8) = 7$, і $x + z = 7$. Отже,

$$\begin{cases} x + y = 11 \\ x + z = 7 \end{cases}$$

З рисунку $|C \cap F| = 8 + x$. З системи $x = 0, 1 \ldots, 7$. Отже, $|C \cap F| \le 15$ і 15 досягається.

Звідси, $|C \cap F|$= 15, 14, 13, 12, 11, 10, 9, 8,

а $|C \cup F \cup M|$ = 55–$|C \cap F|$ = 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47.

Принцип включення – вилучення в альтернативній формі

Ця форма принципу включення – вилучення може бути корисною для розв'язування задач, у яких потрібно знайти кількість елементів заданої множини A, які не мають жодної з n властивостей $q_1, q_2, \ldots, q_n$.

Уведемо такі позначення:

- ♦ $A_i \subset A$ – підмножина елементів, що мають властивість q_i;
- ♦ $N(q_{i_1}, q_{i_2}, \ldots, q_{i_k})$ – кількість елементів множини A, які водночас мають властивості $q_{i_1}, q_{i_2}, \ldots, q_{i_k}$;
- ♦ $N(\overline{q}_1, \overline{q}_2, \ldots, \overline{q}_n)$ – кількість елементів множини A, які не мають жодної з властивостей $q_1, q_2, \ldots, q_n$;
- ♦ N – кількість елементів у заданій множині A.

Тоді очевидно

$$N(\overline{q}_1, \overline{q}_2, \ldots, \overline{q}_n) = N - |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n|.$$

За принципом включення-вилучення можна записати

$$N(\overline{q}_1, \overline{q}_2, \ldots, \overline{q}_n) = N - \sum_{1 \le i \le n} N(q_i) + \sum_{1 \le i < j \le n} N(q_i, q_j) -$$

$$- \sum_{1 \le i < j < k \le n} N(q_i, q_j, q_k) + \ldots + (-1)^n N(q_1, q_2, \ldots, q_n). \tag{7}$$

Формула (7) подає принцип включення – вилучення *в альтернативній формі*.

Приклад. Знайдемо кількість розв'язків рівняння $x_1+x_2+x_3=11$ у невід'ємних цілих числах за наявності обмежень $x_1 \le 3$, $x_2 \le 4$, $x_3 \le 6$.

Розглянемо альтернативні властивості: q_1: $x_1 \ge 4$; q_2: $x_2 \ge 5$; q_3: $x_3 \ge 7$. За формулою (7) кількість розв'язків, що водночас задовольняють нерівності $x_1 \le 3$, $x_2 \le 4$ та $x_3 \le 6$, дорівнює

$$N(\bar{q}_1, \bar{q}_2, \bar{q}_3) = N - N(q_1) - N(q_2) - N(q_3) + N(q_1, q_2) +$$
$$+ N(q_1, q_3) + N(q_2, q_3) - N(q_1, q_2, q_3).$$

Далі маємо:

$N = H_3^{11} = C_{13}^{11} = 78$ (загальна кількість розв'язків);

$N(q_1) = H_3^7 = C_9^7 = 36$ (кількість розв'язків, що задовольняють умову $x_1 \ge 4$);

$N(q_2) = H_3^6 = C_8^6 = 28 \quad (x_2 \ge 5)$;

$N(q_3) = H_3^4 = C_6^4 = 15 \quad (x_3 \ge 7)$;

$N(q_1, q_2) = H_3^2 = C_4^2 = 6 \quad (x_1 \ge 4) \wedge (x_2 \ge 5)$;

$N(q_1, q_3) = H_3^0 = 1 \quad (x_1 \ge 4) \wedge (x_3 \ge 7)$;

$N(q_2, q_3) = 0 \quad (x_2 \ge 5) \wedge (x_3 \ge 7)$;

$N(q_1, q_2, q_3) = 0 \quad (x_1 \ge 4) \wedge (x_2 \ge 5) \wedge (x_3 \ge 7)$.

Отже, кількість розв'язків із зазначеними обмеженнями дорівнює

$$N(\bar{q}_1, \bar{q}_2, \bar{q}_3) = 78 - 36 - 28 - 15 + 6 + 1 + 0 - 0 = 6.$$