Лекція 2

Тема 1. Булеві функції

План лекції

- Алгебри булевих функцій
- Спеціальні форми подання булевих функцій
  - Диз'юнктивні нормальні форми
  - Кон'юнктивні нормальні форми
  - Поліном Жегалкіна

Алгебри булевих функцій

Нехай функцію f_1 задано формулою F_1, а функцію f_2 – формулою F_2. Підстановка F_1 та F_2, наприклад, у диз'юнкцію $x_1 \vee x_2$ дає формулу $F_1 \vee F_2$. Узявши формулу Φ_1, рівносильну F_1 (тобто Φ_1 також подає функцію f_1) та формулу Φ_2, рівносильну F_2, то отримаємо формулу $\Phi_1 \vee \Phi_2$, рівносильну формулі $F_1 \vee F_2$.

Отже, диз’юнкцію можна розглядати як двомісну операцію на множині всіх булевих функцій. Ця операція кожній парі функцій f_1 і f_2, незалежно від вигляду формул, якими їх подано, однозначно ставить у відповідність функцію $f_1 \vee f_2$. Аналогічно, й інші булеві функції можна розглядати як операції на множині P_2 усіх булевих функцій. Наприклад, заперечення – одномісна операція, кон’юнкція та диз’юнкція – двомісні.

Множину P_2 всіх булевих функцій разом з уведеною на ній системою операцій називають *алгеброю булевих функцій*.

Розглянемо дві алгебри. Алгебру (P_2; $\neg$, $\wedge$, $\vee$) з операціями заперечення, кон’юнкції та диз’юнкції називають *алгеброю Буля*, а алгебру (P_2; $\wedge$, $\oplus$) з операціями кон’юнкції та додавання за mod2 – *алгеброю Жегалкіна*.

Формули цих алгебр будують зі знаків операцій, круглих дужок, букв x, y, z, … і констант 0 та 1. Букви позначають довільні булеві функції, при цьому булеві змінні розглядають як окремий випадок булевих функцій. Знак кон'юнкції $\wedge$ у формулах обох алгебр зазвичай не пишуть.

Якщо немає дужок, пріоритет операцій у булевій алгебрі такий: заперечення, кон'юнкція, диз'юнкція. В алгебрі Жегалкіна спочатку виконується кон'юнкція, а потім – додавання за mod2. За наявності дужок спочатку виконуються операції всередині їх. У булевій алгебрі як дужки в разі заперечення виразів використовують сам символ заперечення.

Приклад. Замість $\overline{(x \vee y)} \vee (xy)$ можна написати $\overline{x \vee y} \vee xy$, а замість $(xy) \oplus (yz)$ – $xy \oplus yz$.

Одна з найважливіших задач – виявлення основних еквівалентностей в алгебрах. Ці еквівалентності називають *законами* відповідної алгебри (див. таблицю 1)

Закони алгебри Буля **Табл. 1**

	Назва закону	Формулювання закону
(1)	Закони комутативності	*а*) $x \vee y = y \vee x$ *б*) $xy = yx$
(2)	Закони асоціативності	*а*) $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z) = x \vee y \vee z$ *б*) $(xy)z = x(yz) = xyz$
(3)	Закони дистрибутивності	*а*) $xy \vee z = (x \vee z)(y \vee z)$ *б*) $(x \vee y)z = xz \vee yz$
(4)	Закон подвійного заперечення	$\overline{\overline{x}} = x$
(5)	Закони ідемпотентності	*а*) $x \vee x = x$ *б*) $xx = x$
(6)	Закони де Моргана	*а*) $\overline{x \vee y} = \overline{x}\,\overline{y}$ *б*) $\overline{xy} = \overline{x} \vee \overline{y}$
(7)	Закони поглинання	*а*) $x(x \vee y) = x$ *б*) $x \vee xy = x$
(8)	Закони тотожності	*а*) $1x = x$ *б*) $0 \vee x = x$
(9)	Закони домінування	*а*) $1 \vee x = 1$ *б*) $0x = 0$
(10)	Закони заперечення (закони доповнення)	*а*) $x \vee \overline{x} = 1$ *б*) $x\overline{x} = 0.$

<u>Тепер сформулюємо закони іншої алгебри булевих функцій – алгебри Жегалкіна.</u>

Закони алгебри Жегалкіна.

1. закони асоціативності $(xy)z = x(yz) = xyz$, $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z) = x \oplus y \oplus z$;
2. закони комутативності $xy = yx$, $x \oplus y = y \oplus x$;
3. дистрибутивний закон для кон'юнкції щодо додавання за mod2 $x(y \oplus z) = xy \oplus xz$;
4. співвідношення для констант $1x = x$, $0x = 0$, $x \oplus 0 = x$;
5. закон ідемпотентності для кон'юнкції $xx = x$;
6. закон зведення подібних членів у разі додавання за mod2 $x \oplus x = 0$.

Правильність цих еквівалентностей можна довести за допомогою таблиць.

Наведені еквівалентності справджуються й у разі підстановки замість змінних довільних булевих функцій (тобто формул, які подають ці функції). Важливо лише дотримуватися такого правила під становлення формули замість змінної: підставляючи формулу F замість змінної x, усі входження змінної x у цю еквівалентність потрібно водночас замінити формулою F. Наприклад, підставивши замість змінної x формулу xy, а замість змінної y – формулу $z \vee u$, з $\overline{xy} = \overline{x} \vee \overline{y}$ отримаємо $\overline{xy(z \vee u)} = \overline{xy} \vee \overline{z \vee u}$.

Закони алгебр Буля та Жегалкіна дають змогу доводити нові еквівалентності вже без таблиць, на основі тотожних перетворень.

Зауваження. Закони асоціативності в будь-якій алгебрі дають змогу записувати багатомісні асоціативні операції без дужок: замість $(x \vee y) \vee z$ писати $x \vee y \vee z$ і т. д.

Приклад. Доведемо, що

а) $(x \vee y)(z \vee u) = xz \vee yz \vee xu \vee yu$;

б) $xy \vee zu = (x \vee z)(y \vee z)(x \vee u)(y \vee u)$.

Двічі застосувавши закони дистрибутивності, одержимо

а) $(x \vee y)(z \vee u) = (x \vee y)z \vee (x \vee y)u = xz \vee yz \vee xu \vee yu$.

б) $xy \vee zu = (x \vee zu)(y \vee zu) = (x \vee z)(y \vee z)(x \vee u)(y \vee u)$.

Приклад. Доведемо, що $\overline{\overline{x}zy} = x \vee \overline{z} \vee \overline{y}$. Послідовно застосувавши закони де Моргана, подвійного заперечення й асоціативності, запишемо

$$\overline{\overline{x}zy} = \overline{\overline{x}z} \vee \overline{y} = \overline{\overline{x}} \vee \overline{z} \vee \overline{y} = x \vee \overline{z} \vee \overline{y}.$$

Наведемо еквівалентності, які дають змогу перетворити будь-яку формулу булевої алгебри в рівносильну до неї формулу алгебри Жегалкіна й навпаки:

1. $\overline{x} = 1 \oplus x$;
2. $x \vee y = x \oplus y \oplus xy$;
3. $x \oplus y = \overline{x}\, y \vee x\, \overline{y}$.

За допомогою законів алгебр Буля та Жегалкіна можна спрощувати різні формули в цих алгебрах.

Приклад. Перетворимо $\overline{xy \vee \overline{z}}$ у рівносильну формулу алгебри Жегалкіна. Одержану формулу спростимо.

$$\begin{aligned} \overline{xy \vee \overline{z}} &= \left(xy \vee (z \oplus 1)\right) \oplus 1 = \left(xy \oplus (z \oplus 1) \oplus xy(z \oplus 1)\right) \oplus 1 = \\ &= xy \oplus z \oplus 1 \oplus xyz \oplus xy \oplus 1 = xyz \oplus z. \end{aligned}$$

Виразимо $x \to y$ та $x \leftrightarrow y$ через операції алгебри Буля. Оскільки $x \leftrightarrow y = (x \to y)(y \to x)$, то достатньо виразити $x \to y$. Порівняємо таблицю для $x \to y$ з таблицею для $x \vee y$. Скориставшись тим, що в обох таблицях є єдиний набір, для якого значення функції дорівнює 0, отримаємо еквівалентність $x \to y = \overline{x} \vee y$.

В алгебрі Буля принцип двоїстості має зовсім просте формулювання.

Принцип двоїстості в алгебрі Буля. Якщо у формулі F, що реалізує функцію f, усі кон'юнкції замінити на диз'юнкції, диз'юнкції – на кон'юнкції, 1 – на 0, 0 – на 1, то отримаємо формулу F^*, яка реалізує функцію f^*, двоїсту до f.

Приклад . Знайдемо функцію, двоїсту до $f(x, y, z) = xy \vee \overline{z}(x \vee \overline{u}y)$.

За принципом двоїстості матимемо $f^*(x, y, z) = (x \vee y)(\overline{z} \vee x(\overline{u} \vee y))$. Застосовуючи принцип двоїстості, слід ураховувати пріоритет операцій, тобто в разі потреби розставляти дужки. Так, у формулі $xy \vee \overline{z}(x \vee \overline{u}y)$ спочатку виконуються кон'юнкції xy та $\overline{u}y$ (дужки випущено за домовленістю про пріоритет операцій); отже, у формулі, що реалізує двоїсту функцію, спочатку мають виконуватися диз'юнкції $x \vee y$ та $\overline{u} \vee y$ (відповідна суперпозиція двоїстих функцій), тому потрібні дужки.

Спеціальні форми подання булевих функцій

Спеціальними формами подання булевих функцій є диз'юнктивні нормальні форми й кон'юнктивні нормальні форми та поліном Жегалкіна.

Диз'юнктивні нормальні форми

Уведемо позначення $x^{\sigma} = x\sigma \vee \bar{x}\bar{\sigma}$, де σ – параметр, який дорівнює 0 чи 1. Очевидно, що

$$x^{\sigma} = \begin{cases} \bar{x}, \text{ якщо } \sigma = 0, \\ x, \text{ якщо } \sigma = 1. \end{cases}$$

Зазначимо, що $\sigma^{\sigma}=1$.

Зафіксуємо множину змінних $X=\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

Елементарною кон'юнкцією називають вираз $k = x_{i_1}^{\sigma_1} x_{i_2}^{\sigma_2} \ldots x_{i_r}^{\sigma_r}$, де x_{i_j} – змінні з множини X, причому всі x_{i_j} різні. Число r називають *рангом* кон'юнкції. Якщо $r=0$, кон'юнкцію називають *порожньою* та вважають такою, що дорівнює 1.

Приклад. Елементарними кон'юнкціями є 1, $\bar{x}_1$, x_1x_2, x_2, $\bar{x}_1\bar{x}_2x_3$, а вирази $0, x_1x_2x_1, \bar{x}_1x_1, \overline{x_1x_2}$ не є елементарними кон'юнкціями.

Елементарну кон'юнкцію, яка містить усі змінні з множини X, називають *конституентою одиниці.*

Інакше кажучи, конституента одиниці – це елементарна кон'юнкція з рангом n. Очевидно, що всіх різних конституент одиниці для фіксованої множини n змінних x_1, x_2, …, x_n стільки, скільки двійкових наборів з n компонентами, тобто 2^n.

Диз'юнктивною нормальною формою (*ДНФ*) називають диз'юнкцію $D=k_1 \vee k_2 \vee \ldots \vee k_s$ елементарних кон'юнкцій k_j, у якій k_j попарно різні.

Є алгоритм, який дає змогу для будь-якої формули булевої алгебри на основі тотожних перетворень знайти рівносильну до неї ДНФ. На першому його етапі формулу перетворюють у рівносильну, побудовану зі змінних та їх заперечень за допомогою самих лише кон'юнкцій та диз'юнкцій (тобто заперечення можуть стояти лише над змінними). Для цього використовують закони де Моргана та закон подвійного заперечення. На другому етапі домагаються, щоб усі кон'юнкції виконувались раніше, ніж диз'юнкції, для чого розкривають дужки на підставі дистрибутивного закону для кон'юнкції $(x \vee y)z = xz \vee yz$ або тотожності $(x \vee y)(z \vee u)=xz \vee yz \vee xu \vee yu$. Далі з використанням співвідношень для констант і закону суперечності вилучають нулі та, виходячи із законів ідемпотентності, об'єднують рівні члени. На цьому процес отримання ДНФ закінчують.

Зазначимо, що ДНФ булевої функції не єдина, наприклад,

$$xz \vee y\bar{z} \vee xy = xz \vee y\bar{z}.$$

Досконалою диз'юнктивною нормальною формою (*ДДНФ*) називають ДНФ, у якої кожна елементарна кон'юнкція k_j (j=1, …, s) – конституента одиниці.

Теорема. Будь-яку булеву функцію $f(x_1, \ldots, x_n) \neq 0$ можна єдиним способом подати в ДДНФ.

Для функції, заданої таблицею, ДДНФ будують так: для кожного набору, на якому функція приймає значення 1, знаходять відповідну йому конституенту одиниці; диз'юнкція всіх цих конституент – це ДДНФ даної функції.

Приклад. Побудуємо ДДНФ для функції, заданої наступною таблицею

x_1 x_2	$f(x_1, x_2)$
0 0	1
0 1	0
1 0	0
1 1	1

Функція набуває значення 1 на наборах (00) і (11), отже $f(x_1, x_2) = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee x_1 x_2$.

Будь-яку ДНФ можна звести до ДДНФ *розщепленням* кон'юнкцій, які містять не всі змінні: якщо кон'юнкція k не містить змінної x, то

$$k = k(x \vee \bar{x}) = kx \vee k\bar{x}.$$

Приклад. Перетворимо диз'юнктивну нормальну форму $\bar{x}\,\bar{z} \vee \bar{x}yz$ у досконалу. Застосувавши розщеплення для кон'юнкції $\bar{x}\,\bar{z}$, одержимо

$$\bar{x}\,\bar{z} \vee \bar{x}\,y\,z = \bar{x}(y \vee \bar{y})\bar{z} \vee \bar{x}y\,z = \bar{x}y\,\bar{z} \vee \bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z} \vee \bar{x}\,y\,z.$$

Якщо із формули F_1 за допомогою деяких тотожних перетворень можна отримати формулу F_2, то із F_2 можна отримати F_1, обернувши ці перетворення.

Теорема. Для довільних двох тотожних формул алгебри Буля F_1 та F_2 існує еквівалентне перетворення F_1 в F_2 за допомогою законів цієї алгебри.

Доведення. Перетворимо F_1 і F_2 на ДДНФ Оскільки формули F_1 і F_2 тотожні, то їх ДДНФ однакові. Обернувши друге перетворення, матимемо такий ланцюжок перетворень: з F_1 одержимо ДДНФ, з ДДНФ одержимо F_2.

Важливість цієї теореми полягає в тому, що законів алгебри Буля виявляється достатньо для довільних еквівалентних перетворень у цій алгебрі.

Кон’юнктивні нормальні форми

Двоїстим способом, замінюючи в означеннях нулі одиницями й навпаки, диз’юнкції кон’юнкціями й навпаки, означають поняття елементарної диз’юнкції, конституенти нуля, кон’юнктивної нормальної форми, доскональої кон’юнктивної нормальної форми.

Нехай, як і раніше, зафіксовано множину змінних $X=\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. *Елементарною диз’юнкцією* називають вираз $d = x_{i_1}^{\sigma_1} \vee x_{i_2}^{\sigma_2} \vee \ldots \vee x_{i_r}^{\sigma_r}$, у якому всі x_{i_j} різні, $x_{i_j} \in X$. Число r називають *рангом* диз’юнкції. Якщо r=0, диз’юнкцію називають *порожньою* та вважають такою, що дорівнює 0. Приклади елементарних диз’юнкцій: $x_1 \vee x_3 \vee \overline{x}_7$, 0, $\overline{x}_1 \vee x_2$.

Кон’юнктивною нормальною формою (*КНФ*) називають кон’юнкцію $d_1 \wedge d_2 \wedge \ldots \wedge d_s$ елементарних диз’юнкцій d_j, у якій усі d_j різні.

Є алгоритм, який дає змогу для будь-якої формули булевої алгебри знайти тотожну до неї КНФ. Перший етап цього алгоритму такий самий, як і для побудови ДНФ. На другому етапі домагаються, щоб усі диз’юнкції виконувалися раніше кон’юнкцій. Для цього потрібно скористатися дистрибутивним законом $x\vee yz=(x\vee y)(x\vee z)$ або наслідком із нього $xy\vee zu=(x\vee z)(x\vee u)(y\vee z)(y\vee u)$. Потім на підставі співвідношень для констант і закону виключеного третього вилучають одиниці та на підставі законів ідемпотентності об’єднують рівні члени.

Приклад. Знайдемо КНФ для формули $\overline{x\,\overline{y}}(x \to yz)$. Використовуючи сформульований алгоритм, одержимо

$$\overline{x\,\overline{y}}(x \to yz) = \overline{x\,\overline{y}}(\overline{x} \vee y\,z) = (\overline{x} \vee \overline{\overline{y}})(\overline{x} \vee y\,z) = (\overline{x} \vee y)(\overline{x} \vee y)(\overline{x} \vee z) = (\overline{x} \vee y)(\overline{x} \vee z).$$

Елементарну диз'юнкцію, яка містить усі змінні з множини X, називають *конституентою нуля*.

Інакше кажучи, конституента нуля – це елементарна диз'юнкція з рангом n. Кожному двійковому набору $\widetilde{b}^{\,n} = (b_1, b_2, ..., b_n)$ взаємно однозначно відповідає конституента нуля $x_1^{\overline{b_1}} \vee x_2^{\overline{b_2}} \vee ... x_n^{\overline{b_n}}$, яка перетворюється на ньому в 0. Усі інші конституенти нуля на цьому наборі перетворюються в 1. Наприклад, набору 0111 відповідає конституента нуля $x_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3 \vee \overline{x}_4$.

Досконалою кон'юнктивною нормальною формою (ДКНФ) називають КНФ, у якої кожна елементарна диз'юнкція d_j (j=1, …, s) – конституента нуля.

ДКНФ за таблицею булевої функції f будують так. Виділяють набори, на яких функція набуває значення 0, і для кожного з них записують відповідну конституенту нуля. Кон'юнкція цих конституент нуля являє собою ДКНФ функції f.

Приклад. Побудуємо ДКНФ для функції, заданої попередньою таблицею. Функція набуває значення 0 на наборах (01) та (10), отже $f(x_1, x_2) = (x_1 \vee \overline{x}_2)(\overline{x}_1 \vee x_2)$.

Зазначимо, що за допомогою тотожних перетворень будь-яку КНФ можна перетворити на ДКНФ Якщо в якусь елементарну диз'юнкцію d не входить змінна x, то потрібно записати рівносильний вираз $d \vee x\bar{x}$ та застосувати дистрибутивний закон: $d \vee x\bar{x} = (d \vee x)(d \vee \bar{x})$. Після тривіальних перетворень отримаємо ДКНФ.

Поліном Жегалкіна

Елементарну кон'юнкцію називають *монотонною*, якщо вона не містить заперечень змінних. Наприклад, $x_1x_2x_3$, x_1, 1 – монотонні кон'юнкції.

Формулу

$$P(\tilde{x}^n) = k_1 \oplus k_2 \oplus \ldots \oplus k_s,$$

де k_1, k_2, …, k_s – попарно різні монотонні кон'юнкції змінних із множини $X=\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, називають *поліномом Жегалкіна*. Найбільший із рангів елементарних кон'юнкцій, що входять у поліном, називають *степенем* полінома. За окремим означенням 0 також уважатимемо поліномом Жегалкіна.

Приклад . Формули x, 1, $xyz \oplus xy \oplus z \oplus 1$ – поліноми Жегалкіна, а xx, $xy \oplus yx \oplus x \oplus 1$ – ні.

Щоб із будь-якої формули алгебри Жегалкіна одержати поліном Жегалкіна, достатньо розкрити дужки (за дистрибутивним законом), застосувати, якщо можливо, закон ідемпотентності для кон'юнкції та звести подібні члени.

Теорема. Будь-яку булеву функцію можна єдиним способом подати поліномом Жегалкіна.

Розглянемо методи побудови полінома Жегалкіна.

Метод невизначених коефіцієнтів. Для функції $f(x_1, \ldots, x_n)$ записують найбільш загальний вигляд полінома Жегалкіна $P(x_1, \ldots, x_n)$ з невизначеними коефіцієнтами (їх 2^n). Зокрема, поліном від двох змінних має загальний вигляд:

$$P(x, y) = c_0 \oplus c_1 x \oplus c_2 y \oplus c_3 xy,$$

а від трьох змінних –

$$P(x, y, z) = c_0 \oplus c_1 x \oplus c_2 y \oplus c_3 z \oplus c_4 xy \oplus c_5 xz \oplus c_6 yz \oplus c_7 xyz$$

Правило. Для кожного двійкового набору $(a_1, \ldots, a_n)$ значень змінних записують рівняння $f(a_1, \ldots, a_n) = P(a_1, \ldots, a_n)$. Таких рівнянь є 2^n, тобто стільки ж, скільки є коефіцієнтів полінома. Розв'язавши цю систему рівнянь, отримують коефіцієнти полінома $P(x_1, \ldots, x_n)$.

Приклад. Побудуємо поліном Жегалкіна для функції $f(x, y, z)$, заданої таблицею:

x y z	$f(x, y, z)$
0 0 0	0
0 0 1	0
0 1 0	1
0 1 1	1
1 0 0	1
1 0 1	0
1 1 0	1
1 1 1	0

Складаємо систему рівнянь і розв'язуємо її:

$$
\begin{array}{ll}
0 = C_0 & C_0 = 0 \\
0 = C_0 \oplus C_3 & C_3 = 0 \\
1 = C_0 \oplus C_2 & C_2 = 1 \\
1 = C_0 \oplus C_2 \oplus C_3 \oplus C_6 & C_6 = 0 \\
1 = C_0 \oplus C_1 & C_1 = 1 \\
0 = C_0 \oplus C_1 \oplus C_3 \oplus C_5 & C_5 = 1 \\
1 = C_0 \oplus C_1 \oplus C_2 \oplus C_4 & C_4 = 1 \\
0 = C_0 \oplus C_1 \oplus C_2 \oplus C_3 \oplus C_4 \oplus C_5 \oplus C_6 \oplus C_7 & C_7 = 0
\end{array}
$$

Отже, $f(x, y, z) = x \oplus y \oplus xy \oplus xz$. Цей поліном другого степеня.

Побудова полінома Жегалкіна на основі рівносильних перетворень. Один із способів побудови полінома Жегалкіна полягає в наступному. Спочатку будують рівносильну формулу, у якій є лише операції кон'юнкції та заперечення, а потім замінюють всюди $\bar{x}$ на $1 \oplus x$. Після цього тривіальними перетвореннями отримують поліном Жегалкіна.

Приклад. Побудуємо поліном Жегалкіна для функції $f(x, y) = x \to y$. Використовуючи введені раніше тотожності, одержимо

$$x \to y = \bar{x} \vee y = \overline{x \bar{y}} = 1 \oplus x(1 \oplus y) = 1 \oplus x \oplus xy.$$

Теорема. Усі змінні булевої функції, які входять у її поліном Жегалкіна, істотні.

Доведення. Нехай змінна x_1 уходить у поліном Жегалкіна функції $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Згрупуємо члени, які містять x_1, і винесемо x_1 за дужки:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 f_1(x_2, \ldots, x_n) \oplus f_2(x_2, \ldots, x_n).$$

Функція $f_1(x_2, \ldots, x_n) \neq 0$, оскільки в протилежному випадку змінна x_1 не входила б у поліном для функції f (унаслідок єдиності полінома Жегалкіна). Нехай на наборі $(a_2, \ldots, a_n)$ значення функції f_1 дорівнює 1. Тоді $f(x_1, a_2, \ldots, a_n) = x_1 \oplus \sigma$, де $\sigma = f_2(a_2, \ldots, a_n)$. Отже, зміна значення x_1 тоді, коли значення решти змінних задано набором $(a_2, \ldots, a_n)$, змінює значення функції $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Звідси випливає, що змінна x_1 істотна.