Лекція 12

Числа Стірлінга другого роду та числа Белла

Розглянемо задачу підрахунку кількості розбиттів множини A на непорожні частини.

Приклад. Якщо $A=\{a, b, c\}$, то є такі розбиття цієї множини на k непорожніх частин:

$k=1$: $\{\{a, b, c\}\}$ (одне розбиття),

$k=2$: $\{\{a, b\}, \{c\}\}$, $\{\{a, c\}, \{b\}\}$, $\{\{a\}, \{b, c\}\}$ (три розбиття),

$k=3$: $\{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$ (одне розбиття).

Позначимо як $\Phi(n, k)$ кількість розбиттів n-елементної множини A на k непорожніх частин, $n\geq1$, $1\leq k\leq n$, як $\Phi(n)$ – кількість усіх розбиттів множини A на непорожні частини. Числа $\Phi(n, k)$ називають *числами Стірлінга другого роду*, а $\Phi(n)$ – *числами Белла*. Очевидно, що

$$\Phi(n) = \sum_{k=1}^{n} \Phi(n,k).$$

Для розглянутого прикладу: $\Phi(3, 1)=1$; $\Phi(3, 2)=3$; $\Phi(3, 3)=1$; $\Phi(3)=1+3+1=5$.

Зазначимо, що довільне розбиття множини A на k непорожніх частин одержують:
– або з розбиття множини $A \backslash \{a_n\}$ на $(k–1)$ непорожню частину та додаванням підмножини $\{a_n\}$;
– або з розбиття множини $A \backslash \{a_n\}$ на k непорожніх частин та додаванням до однієї із цих частин елемента a_n (це можна зробити k способами).

Звідси випливає тотожність $\Phi(n, k)=\Phi(n–1, k–1)+k\,\Phi(n–1, k)$. За цією тотожністю можна побудувати з лінійною складністю таблицю для чисел **$\Phi(n, k)$, а, отже, і $\Phi(n)$.**

Для чисел Белла існує проста рекурентна залежність $\Phi(n+1) = \sum_{i=0}^{n} C_n^i \Phi(i)$ (уважаємо, що Φ(0)=1.)

Таблиця для чисел Стірлінга другого роду і чисел Белла

n \ k	1	2	3	4	5	6	…	$\Phi(n)$
1	1						…	1
2	1	1					…	2
3	1	3	1				…	5
4	1	7	6	1			…	15
5	1	15	25	10	1		…	52
6	1	31	90	65	15	1	…	203
…	…	…	…	…	…	…	…	…

Теорема. За фіксованого n послідовність $(\Phi(n,k))$, $k = 1, 2, \ldots, n$ унімодальна.

Генерування комбінаторних об’єктів

Генерування перестановок

Кожній n-елементній множині A можна поставити у взаємно-однозначну відповідність множину $A'=\{1, 2, \ldots, n\}$. Зручно спочатку генерувати перестановки n перших натуральних чисел, а потім замінити кожне число відповідним елементом множини A. Унаслідок цього отримаємо всі перестановки елементів даної множини A.

Існують різні алгоритми для генерування всіх перестановок множини $A'=\{1, 2, \ldots, n\}$. Розглянемо один із них. Цей алгоритм ґрунтується на послідовній побудові перестановок множини A' у лексикографічному порядку. Далі перестановку $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ для спрощення записів позначатимемо як $a_1a_2\ldots a_n$.

На множині всіх перестановок (загальніше – на множині всіх кортежів довжиною n з елементами з множини $A'=\{1, 2, \ldots, n\}$) означимо *лексикографічний порядок*: $a_1a_2\ldots a_n < b_1b_2\ldots b_n$, якщо для якогось k, $1 \le k \le n$, виконуються співвідношення $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2, \ldots$, $a_{k-1} = b_{k-1}$, але $a_k < b_k$. У такому разі говорять, що перестановка $a_1a_2\ldots a_n$ менша від перестановки $b_1b_2\ldots b_n$, або перестановка $b_1b_2\ldots b_n$ більша від перестановки $a_1a_2\ldots a_n$. Якщо замість чисел $1, 2, \ldots, n$ узяти букви $a, b, \ldots, z$ з природним порядком $a<b<\ldots<z$, то лексикографічний порядок означає стандартну послідовність, у якій слова довжиною n наведено в словнику.

Перестановку $b_1b_2\ldots b_n$ називають *лексикографічно наступною* за $a_1a_2\ldots a_n$, якщо не існує такої перестановки $c_1c_2\ldots c_n$, що $a_1a_2\ldots a_n < c_1c_2\ldots c_n$ і $c_1c_2\ldots c_n < b_1b_2\ldots b_n$.

Приклад. Перестановка 23<u>4</u>15 множини {1, 2, 3, 4, 5} менша від перестановки 23<u>5</u>14.

Алгоритм генерування перестановок множини $A' = \{1, 2, \ldots, n\}$ ґрунтується на процедурі, що будує перестановку, лексикографічно наступну за даною перестановкою $a_1a_2\ldots a_n$. Покажемо, як це можна зробити. Спочатку припустимо, що $a_{n-1} < a_n$. Поміняємо місцями a_{n-1} й a_n і одержимо більшу перестановку. Вона лексикографічно наступна, бо ніяка інша перестановка не є більшою за дану перестановку й меншою за отриману.

Приклад. Нехай 2341<u>56</u> – задана перестановка, тоді перестановка 2341<u>65</u> – лексикографічно наступна.

Тепер розглянемо випадок $a_{n-1} > a_n$. Проглянемо останні три члени перестановки. Якщо $a_{n-2} < a_{n-1}$, то останні три члени можна переставити для отримання наступної перестановки. Поставимо менше з двох чисел a_{n-1} та a_n, яке, однак, більше, ніж a_{n-2}, на позицію n–2. Потім розмістимо число, що залишилось, та a_{n-2} на останніх двох позиціях у висхідному порядку.

Приклад. Нехай 234<u>165</u> – задана перестановка, тоді перестановка 234<u>516</u> – лексикографічно наступна.

Узагальнивши ці міркування, одержимо такий алгоритм.

Алгоритм побудови лексикографічно наступної перестановки за перестановкою $a_1a_2\ldots a_n$

Крок 1. Знайти такі числа a_j та a_{j+1} такі, що $(a_j < a_{j+1}) \wedge (a_{j+1} > a_{j+2} > \ldots > a_n)$. Це означає, що потрібно знайти в перестановці першу справа пару сусідніх чисел, у якій число, що ліворуч, менше від числа, що праворуч.

Крок 2. Записати в j-ту позицію таке найменше з чисел $a_{j+1}, a_{j+2}, \ldots, a_n$, яке водночас більше, ніж a_j.

Крок 3. Записати у висхідному порядку число a_j і решту із чисел $a_{j+1}, a_{j+2}, \ldots, a_n$ у позиції $j + 1, \ldots, n$.

Приклад. Побудуємо перестановку, наступну в лексикографічному порядку за 362541. Перша справа пара чисел, у якій число, що ліворуч, менше від числа, що праворуч, – це 25. Отже, розглянемо послідовність чисел 541. Серед них найменше число, більше від 2, це 4. Тепер 4 запишемо на місце числа 2, а решту чисел 251 розмістимо на останніх трьох позиціях у висхідному порядку: 364125.

Щоб побудувати всі $n!$ перестановок множини $A'=\{1, 2, \ldots, n\}$, починаємо з лексикографічно найменшої перестановки $123\ldots n$ і послідовно $n!-1$ разів виконуємо алгоритм побудови лексикографічно наступної перестановки.

Запишемо цей алгоритм у вигляді псевдокоду.

ALGORITHM 1 Generating the Next Permutation in Lexicographic Order.

procedure *next permutation*($a_1a_2\ldots a_n$: permutation of
$\{1, 2, \ldots, n\}$ not equal to $n\ n-1\ \ldots\ 2\ 1$)
$j := n - 1$
while $a_j > a_{j+1}$
    $j := j - 1$
{j is the largest subscript with $a_j < a_{j+1}$}
$k := n$
while $a_j > a_k$
    $k := k - 1$
{a_k is the smallest integer greater than a_j to the right of a_j}
interchange a_j and a_k
$r := n$
$s := j + 1$
while $r > s$
    interchange a_r and a_s
    $r := r - 1$
    $s := s + 1$
{this puts the tail end of the permutation after jth position in increasing order}
{$a_1a_2\ldots a_n$ is now the next permutation}

Генерування сполучень

Як і раніше, розглянемо множину $A'=\{1, 2, \ldots, n\}$. Сполучення без повторень з n елементів по r – це r-елементна підмножина множини A'. Позаяк порядок запису елементів множини неістотний, то домовимося записувати елементи в кожному сполученні у висхідному порядку: наприклад, $\{3, 5, 1\}$ записуватимемо як $\{1, 3, 5\}$. Отже, сполучення $\{a_1, a_2, \ldots, a_r\}$ розглядатимемо як рядок чисел $a_1a_2\ldots a_r$, причому $a_1 < a_2 < \ldots < a_r$.

Як і для перестановок, покажемо, як за даним сполученням знайти наступне відповідно до лексикографічного порядку. Припустимо, що $n = 5$ та $r = 3$. Якщо можна збільшити останню цифру, то так і будемо робити. Тому, маючи рядок 123, його можна замінити на 124. Якщо ж маємо 125, останнє число збільшити не можна. Тому переходимо до наступного (справа) числа й дивимось, чи можна його збільшити. У даному разі це можна зробити: потрібно замінити 2 на 3. Проте ми прагнемо побудувати найменший рядок із тих, котрі більші 125. Тому збільшуємо останнє число (тобто 3) на 1 і записуємо результат у наступну позицію. Отже, перші два числа – це 1 і 3, тому наступний рядок – 134. Припустимо, що є рядок 145. Останнє й передостаннє числа збільшити не можна. Проте перше число збільшити можна, тому 1 збільшуємо до 2. Щоб зробити рядок мінімальним, як останні числа візьмемо 3 та 4, унаслідок чого отримаємо рядок 234.

Узагальнимо ці міркування. Значення останнього числа в рядку – найбільше можливе, якщо воно дорівнює $n = n - r + r$. Якщо останнє число – найбільше можливе, то передостаннє – найбільше можливе, якщо воно дорівнює $n–r+(r–1)$ або $n–r+i$, де $i=r–1$ є позицією цього числа. Загалом, значення кожного i-го числа найбільше можливе, якщо числа праворуч від нього – найбільші можливі, і це значення дорівнює $n–r+i$. Отже, проглядаємо рядок справа наліво й визначаємо, чи дорівнює значення i-го елемента $n–r+i$ (це максимальне значення, яке може бути в i-й позиції). Перше значення, яке не задовольняє цю умову, можна збільшити. Нехай, наприклад, це значення дорівнює m і займає j-ту позицію. Збільшуємо m на 1, а значення кожного елемента, що стоїть після j-го, дорівнює значенню попереднього елемента плюс 1. Тепер можемо сформулювати потрібний алгоритм.

Алгоритм побудови лексикографічно наступного сполучення.

Крок 1. Знайти в рядку перший справа елемент a_i такий, що $a_i \neq n–r+i$.
Крок 2. Для знайденого елемента виконати присвоювання $a_i:=a_i+1$.
Крок 3. Для $j=i+1, i+2, \ldots, r$ виконати $a_j := a_i+j–i$ (або, що те саме, $a_j := a_{j–1}+1$).

Приклад. Нехай множина $A'=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Знайдемо сполучення, наступне за $\{1, 2, 5, 6\}$ у лексикографічному порядку.

Задане сполучення подамо рядком 1256. Маємо $n = 6$, $r = 4$. Перший справа з таких елементів, що $a_i \neq 6-4+i$, – це елемент $a_2=2$. Для обчислення наступного більшого сполучення збільшуємо a_2 на 1 й одержуємо $a_2=3$. Тепер $a_3=3+\underline{1}=4$ та $a_4=3+\underline{2}=5$ (легко побачити, що за алгоритмом підкреслений доданок щоразу збільшується на 1). Отже, наступне в лексикографічному порядку сполучення – те, що зображене рядком 1345, тобто $\{1, 3, 4, 5\}$. Запишемо цей алгоритм у вигляді псевдокоду.

ALGORITHM 2 Generating the Next *r*-Combination in Lexicographic Order

procedure *next r-combination*($\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$: proper subset of
$\{1, 2, \ldots, n\}$ not equal to $\{n-r+1, \ldots, n\}$ with $a_1 < a_2 < \ldots < a_r$)
$i := r$
while $a_i = n - r + i$
    $i := i - 1$
$a_i = a_i + 1$
for $j := i + 1$ **to** r
    $a_j = a_j + j - i$
$\{\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ is now the next combination$\}$

Коротко зупинимось на питанні генерування всіх розміщень з n елементів по r. Знову розглядатимемо цю задачу лише для множини $A'=\{1, 2, \ldots, n\}$. Один із можливих способів її розв'язання такий. Використаємо алгоритм генерування лексикографічно наступного сполучення для побудови r-елементних сполучень n-елементної множини A'. Після кожної стадії, коли побудовано чергове r-сполучення, застосуємо $r!-1$ разів алгоритм побудови перестановки за умови $n = r$ для побудови всіх перестановок елементів цього сполучення як r-елементної множини.

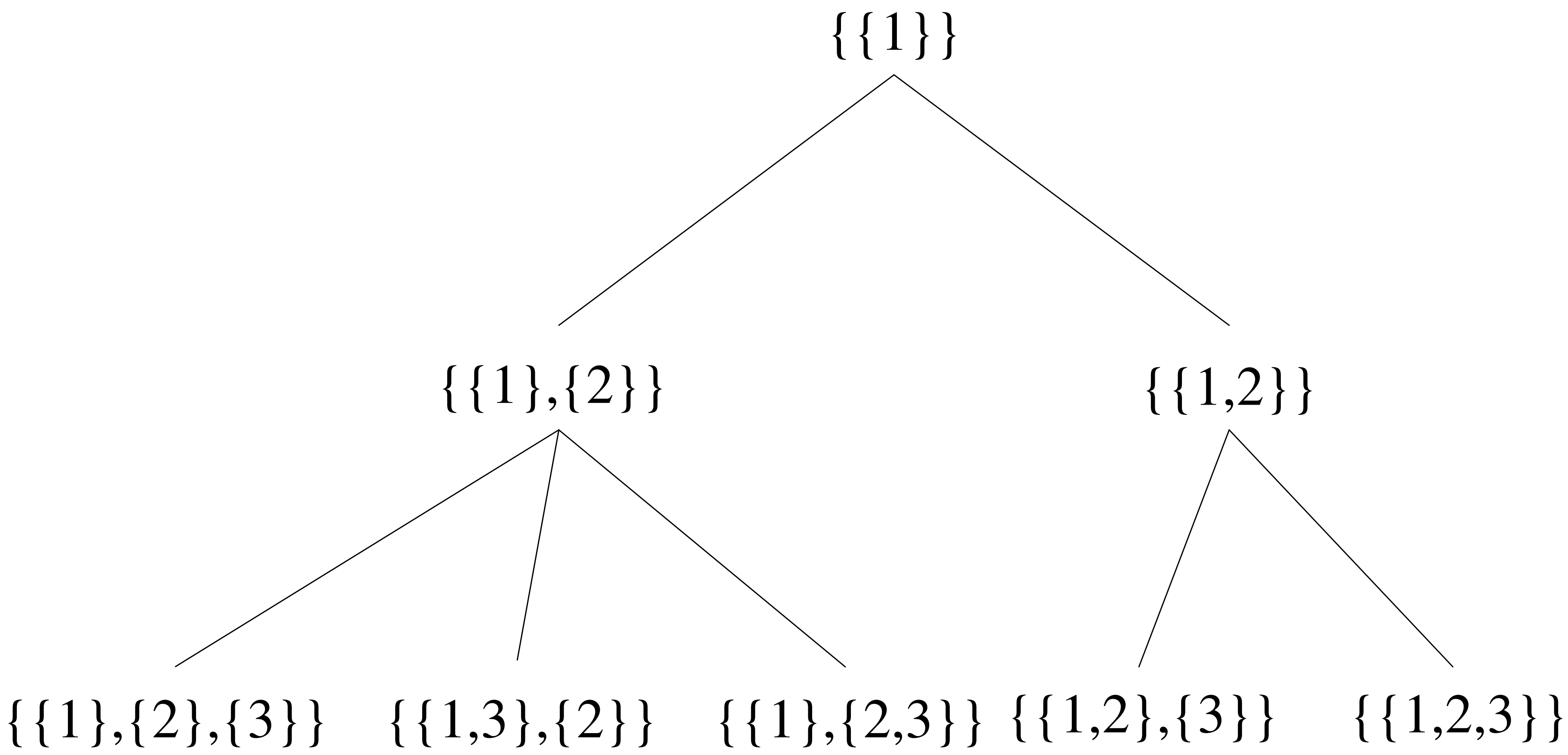
2.10. Генерування розбиттів множини

Опишемо алгоритм генерування всіх розбиттів множини. Ідею цього алгоритму найпростіше пояснити, сформулювавши його в рекурентній формі. Зазначимо спочатку, що кожне розбиття S множини $\{1, 2, \ldots, n\}$ однозначно задає розбиття S_{n-1} множини $\{1, 2, \ldots, n-1\}$, одержане з S після вилучення елемента n із відповідної підмножини (і вилучення порожньої підмножини, якщо елемент n утворював одноелементну підмножину). Навпаки, якщо дано розбиття $P = \{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$ множини $\{1, 2, \ldots, n-1\}$, то легко знайти всі такі розбиття S_n множини $\{1, 2, \ldots, n-1, n\}$, що $S_{n-1} = P$. Це такі розбиття:

$$\begin{array}{llll}
\{\, A_1, & A_2, & \ldots, & A_k, \{n\} \,\} \\
\{\, A_1 \cup \{n\}, & A_2, & \ldots, & A_k \} \\
\{\, A_1, & A_2 \cup \{n\}, & \ldots, & A_k \} \\
\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\
\{\, A_1, & A_2, & \ldots, & A_k \cup \{n\} \,\}.
\end{array} \qquad (1)$$

Наведені міркування підказують простий рекурентний спосіб генерування всіх розбиттів. Якщо дано список L_{n-1} усіх розбиттів множини $\{1, 2, \ldots, n-1\}$, то список L_n усіх розбиттів множини $\{1, 2, \ldots, n-1, n\}$ утворюють заміною <u>кожного</u> розбиття P в списку L_{n-1} на відповідну йому послідовність (1).

Приклад. На рисунку показано формування списку всіх розбиттів множини {1, 2, 3}. Розбиттів цієї множини всього Ф(3)=5, де Ф(n) – число Белла.



Дискретна ймовірність

Експеримент – це процедура, яка як вихід має один із множини можливих результатів. Цю множину можливих результатів називатимемо *простором можливих результатів експерименту*. *Подія* – це підмножина простору можливих результатів.

Нехай S – скінченний непорожній простір **рівноможливих** результатів, E – подія, тобто підмножина S, тоді ймовірність E визначають як $p(E)=\frac{|E|}{|S|}$.

Зазначимо, що $0 \le p(E) \le 1$.

Приклад. Ви витягаєте три карти з добре перетасованої колоди 52 карт. Яка ймовірність витягти короля, королеву і валета саме у такому порядку?

Маємо: $|E| = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^3 = 64$, $|S| = A_{52}^3 = \frac{52!}{49!} = 50 \cdot 51 \cdot 52 = 132600$,

$$p(E)=\frac{|E|}{|S|}=\frac{64}{132600}=0{,}000482655.$$

Приклад. Роздачею n карт називають вибірку з колоди 52 карт без повернень, порядок вибору карт неістотний.

(а) Скільки існує роздач по три карти? Оскільки порядок вибору карт неістотний, то, очевидно, $C_{52}^{3} = \frac{52!}{3!\cdot 49!} = \frac{50\cdot 51\cdot 52}{2\cdot 3} = 50\cdot 17\cdot 26 = 22100.$

(б) Скільки існує роздач по три карти, якщо кожна карта – фігурна (валет, королева або король)? Усього є 12 фігурних карт, отже $C_{12}^{3} = \frac{12!}{3!\cdot 9!} = \frac{10\cdot 11\cdot 12}{2\cdot 3} = 5\cdot 11\cdot 4 = 220.$

(в) Яка ймовірність, що в роздачі з трьох карт усі карти будуть фігурними?

З (а) та (б) випливає, відповідно, $|S| = 22100$, $|E| = 220$. Отже, $p(E) = \frac{|E|}{|S|} = \frac{220}{22100} = 0{,}0099548.$

Приклад. Яка ймовірність, що в роздачі п’яти карт усі карти мають різні значення? Колода містить 52 карти.

У колоді з 52 карт є 13 різних значень (і кожне значення має 4 варіанти – чотири масті). П’ять різних значень із 13 можна отримати C_{13}^{5} способами, і кожне значення –

у чотирьох варіантах, тобто $|E| = 4^5 \cdot C_{13}^5$. Усього є C_{52}^5 способів отримати роздачу з п'яти карт, тобто $|S| = C_{52}^5$. Отже, $p(E) = \dfrac{|E|}{|S|} = \dfrac{4^5 \cdot C_{13}^5}{C_{52}^5}$.

Приклад. Роздачу п'яти карт називають *full house*, якщо вона містить 3 карти одного значення і 2 карти іншого значення (скажімо, 3 шістки та 2 королеви).

(а) Скількома способами можна вибрати *масть карт*, щоб вони утворили *full house* (скажімо, 3 шістки та 2 королеви)?

Оскільки є чотири масті, а вибрати потрібно три шістки та дві королеви, то C_4^3 способів вибрати масть шісток і C_4^2 способів вибрати масть королев. За правилом добутку $C_4^3 \cdot C_4^2 = 4 \cdot 6 = 24$ способи вибрати *масть карт*, щоб вони утворили *full house*.

(б) Скількома способами можна вибрати *значення карт*, щоб вони утворили *full house*?

Якщо колода містить 52 карти, то *значень* буде 13; *full house* утворюють 2 значення. Отже, є $C_{13}^2 = 78$ способів вибрати *значення карт*, щоб вони утворили *full house*.

(в) Скільки роздач п'яти карт утворюють *full house*? Будь-які три карти одного значення можна вибрати C_4^3 способами, а будь-які дві карти іншого значення можна вибрати C_4^2 способами. Скількома способами можна утворити пари значень? У разі, коли колода містить 52 карти, таких способів, очевидно, A_{13}^2. Справді, значень 13, а порядок істотний, бо одне й те саме значення може стосуватися як двох, так і трьох карт (скажімо, 3 шістки + 2 королеви та 2 шістки + 3 королеви). Отже, за правилом добутку кількість роздач п'яти карт, які утворюють *full house*, дорівнює $C_4^3 \cdot C_4^2 \cdot A_{13}^2 = 4 \cdot 6 \cdot 156 = 3744$.

(г) Знайти ймовірність отримання *full house* при роздачі п'яти карт.

У п. (в) ми обчислили $|E| = C_4^3 \cdot C_4^2 \cdot A_{13}^2 = 3744$. Очевидно, що простір можливих результатів спроб має потужність $|S| = C_{52}^5 = 2598960$. Отже, ймовірність отримання *full house* при роздачі п'яти карт складає $p(E) = \dfrac{|E|}{|S|} = \dfrac{3744}{2598960} = 0{,}001440576$.

Приклад. Кидаємо сім стандартних гральних кісток. Яка ймовірність випадання усіх шести номерів? Можлива ситуація: 1 2 3 <u>4</u> 5 6 <u>4</u>. Способів об'єднати 2 кістки з 7 є C_7^2, а варіантів вибору всіх 6 номерів є, очевидно, 6!. Отже,

$$|E| = 6! \cdot C_7^2 = 6! \cdot \frac{7!}{2! \cdot 5!} = 3 \cdot 7!, \ |S| = 6^7, \ p(E) = \frac{|E|}{|S|} = \frac{3 \cdot 7!}{6^7} = \frac{35}{648} \approx 0{,}054012346.$$

Ймовірність протилежної події та об'єднання подій

Ми можемо використати певну техніку обчислень для знаходження ймовірності подій, отриманих з інших подій.

Теорема 1. Нехай E – подія в просторі результатів спроб S. Тоді ймовірність протилежної події $\overline{E} = S - E$ дорівнює $p(\overline{E}) = 1 - p(E)$.

Доведення. Для знаходження ймовірності події $\overline{E} = S - E$ зазначимо, що $|\overline{E}| = |S| - |E|$. Отже, $p(\overline{E}) = \dfrac{|S| - |E|}{|S|} = 1 - \dfrac{|E|}{|S|} = 1 - p(E)$.

Ця теорема є основою альтернативної стратегії обчислення ймовірності, коли прямий підхід не працює добре.

Приклад. Генерована послідовність з 10 бітів. Яка ймовірність, що принаймні один біт є 0?

Нехай E – подія, яка полягає в тому, що принаймні один з 10 бітів є 0. Тоді подія $\overline{E}$ полягає в тому, що всі біти є 1. Простір S рівноможливих результатів – множина всіх рядків бітів довжиною 10. Отже, $p(E) = 1 - p(\overline{E}) = 1 - \dfrac{|\overline{E}|}{|S|} = 1 - \dfrac{1}{2^{10}} = 1 - \dfrac{1}{1024} = \dfrac{1023}{1024}$.

Можна також знайти ймовірність об'єднання двох подій.

Теорема 2. Нехай E_1 і E_2 – події в просторі результатів спроб S. Тоді

$$p(E_1 \cup E_2) = p(E_1) + p(E_2) - p(E_1 \cap E_2).$$

Доведення. Потужність об'єднання двох множин визначають за формулою

$$|E_1 \cup E_2| = |E_1| + |E_2| - |E_1 \cap E_2|.$$

Отже,

$$p(E_1 \cup E_2) = \frac{|E_1 \cup E_2|}{|S|} = \frac{|E_1| + |E_2| - |E_1 \cap E_2|}{|S|} = \frac{|E_1|}{|S|} + \frac{|E_2|}{|S|} - \frac{|E_1 \cap E_2|}{|S|} =$$

$$= p(E_1) + p(E_2) - p(E_1 \cap E_2).$$

Приклад. Знайти ймовірність, що випадково вибране додатне ціле, що не перевищує100, ділиться на 2 або 5.

Нехай E_1 – подія, яка полягає в тому, що випадково вибране число ділиться на 2, а E_2 – подія, що випадково вибране число ділиться на 5. Тоді $E_1 \cup E_2$ – подія, що вибране число ділиться на 2 або 5. Також $E_1 \cap E_2$ – подія, що вибране число ділиться на 2 і 5. Тому що $|E_1| = 50$, $|E_2| = 20$ і $|E_1 \cap E_2| = 10$, а $|S| = 100$, маємо

$$p(E_1 \cup E_2) = p(E_1) + p(E_2) - p(E_1 \cap E_2) = \frac{50}{100} + \frac{20}{100} - \frac{10}{100} = \frac{3}{5}.$$

Приклад. Урна містить 5 червоних, 3 синіх і 3 зелених кулі. Навмання виймається 4 кулі. Яка ймовірність вийняти такі кулі?

(а) всі чотири кулі одного кольору. Цю подію позначимо E_1.

$|E_1| = C_5^4 \cdot C_3^0 \cdot C_3^0 = 5$, $|S| = C_{11}^4 = 330$. Отже, $p(E_1) = \dfrac{|E_1|}{|S|} = \dfrac{5}{330} = \dfrac{1}{66}$.

(б) Серед вийнятих куль є, щонайменше, одна куля кожного кольору. Цю подію позначимо E_2.

$$|E_2| = C_5^2 \cdot C_3^1 \cdot C_3^1 + C_5^1 \cdot C_3^2 \cdot C_3^1 + C_5^1 \cdot C_3^1 \cdot C_3^2 = 90 + 45 + 45 = 180,$$

$|S| = C_{11}^4 = 330$. Отже, $p(E_2) = \dfrac{|E_2|}{|S|} = \dfrac{180}{330} = \dfrac{6}{11}$.

(в) Усі вийняті кулі точно двох кольорів. Цю подію позначимо E.

Тоді подія $\overline{E} = E_1 \cup E_2$;

$$p(\overline{E}) = p(E_1 \cup E_2) = p(E_1) + p(E_2) - p(E_1 \cap E_2) = \frac{1}{66} + \frac{6}{11} - 0 = \frac{37}{66},$$

тому $p(E) = 1 - p(\overline{E}) = 1 - \dfrac{37}{66} = \dfrac{29}{66}$.