

Лекція 1

Тема 1. Булеві функції

План лекції

- Означення функції алгебри логіки (булевої функції). Реалізація функцій формулами
- Еквівалентність формул
- Двоїстість

Означення функції алгебри логіки (булевої функції). Реалізація функцій формулами

Функцією алгебри логіки, або булевою функцією називають функцію $f(x_1, \dots, x_n)$ з областю значень $\{0, 1\}$, змінні x_1, \dots, x_n якої також набувають лише цих двох значень. Множину всіх булевих функцій позначають P_2 , множину булевих функцій від n змінних – $P_2(n)$.

Булеву функцію від n змінних називають n -місною. Область її визначення – множина B^n усіх двійкових упорядкованих наборів довжиною n . Отже, область визначення n -місної булевої функції скінченна й складається з 2^n наборів. Для набору (a_1, \dots, a_n) у цьому розділі будемо використовувати позначення \tilde{a}^n або \tilde{a} (якщо довжина набору зрозуміла з контексту).

Віддаллю Геммінга між наборами \tilde{a}^n та \tilde{b}^n називають число $\rho(\tilde{a}^n, \tilde{b}^n)$, що дорівнює кількості компонент, у яких набори \tilde{a}^n та \tilde{b}^n різняться:

$$\rho(\tilde{a}^n, \tilde{b}^n) = \sum_{i=1}^n |a_i - b_i|.$$

Набори \tilde{a}^n та \tilde{b}^n називають *сусідніми*, якщо $\rho(\tilde{a}^n, \tilde{b}^n) = 1$, і *протилежними*, якщо $\rho(\tilde{a}^n, \tilde{b}^n) = n$. Отже, сусідні набори різняться точно однією компонентою, а протилежні – усіма n компонентами. Наприклад, набори (0100) і (1100) – сусідні, а (0100) і (1011) – протилежні.

Скінченність області визначення булевих функцій дає змогу задавати такі функції за допомогою таблиць. Розглянемо двійкові набори значень змінних як записи цілих чисел у двійковій системі числення. Це означає, що набір $\tilde{a}^n = (a_1, \dots, a_n)$ ототожнюють із записом числа

$$a_1 \cdot 2^{n-1} + a_2 \cdot 2^{n-2} + \dots + a_{n-1} \cdot 2 + a_n.$$

Назвемо це число номером набору \tilde{a}^n . Наприклад, для тримісної булевої функції номер набору 110 – число $1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 + 0 = 6$.

Номери наборів значень змінних n -місної булевої функції змінюються від 0 до $2^n - 1$. Розмістимо набори в стовпчик за зростанням їх номерів і покажемо значення функції на кожному наборі. Одержимо *таблицю булевої функції*:

$x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n$	$f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n)$
0 0 . . . 0 0	$f(0, 0, \dots, 0, 0)$
0 0 . . . 0 1	$f(0, 0, \dots, 0, 1)$
0 0 . . . 1 0	$f(0, 0, \dots, 1, 0)$
.....
1 1 . . . 1 1	$f(1, 1, \dots, 1, 1)$

Правий стовпець (стовпець значень функції) складається з 2^n нулів і одиниць. Отже, n -місних булевих функцій стільки, скільки наборів довжиною 2^n з нулів і одиниць. Тому справджується таке твердження.

Теорема. Кількість різних булевих функцій від n змінних, дорівнює 2^{2^n} .

Далі ми завжди будемо передбачати розташування наборів у порядку зростання їхніх номерів (від 0 до $2^n - 1$). Тому функцію $f(\tilde{x}^n) = f(x_1, \dots, x_n)$ можна задати вектором її значень $\tilde{y}_f = (y_0, y_1, \dots, y_{2^n-1})$, у якому компонента y_i – це значення функції $f(\tilde{x}^n)$ на i -му наборі значень змінних, де $i=0, 1, \dots, 2^n-1$.

Множину наборів, на яких булева функція $f(\tilde{x}^n)$ набуває значення 1, позначають N_f :

$$N_f = \left\{ \tilde{a}^n \mid \tilde{a}^n \in B^n, f(\tilde{a}^n) = 1 \right\}.$$

Очевидно, що множина N_f повністю визначає функцію f .

Змінну x_i функції $f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$ називають *істотною*, якщо існує такий набір $(a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n)$ значень решти змінних, що

$$f(a_1, \dots, a_{i-1}, 0, a_{i+1}, \dots, a_n) \neq f(a_1, \dots, a_{i-1}, 1, a_{i+1}, \dots, a_n).$$

Змінну, яка не є істотною, називають *неістотною* або *фіктивною*. Отже, змінна x_i функції $f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$ неістотна (фіктивна), якщо

$$f(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

для будь-яких значень решти змінних. Це означає, що зміна значення x_i в довільному наборі значень x_1, \dots, x_n не змінює значення функції. Тоді функція $f(x_1, \dots, x_n)$ по суті залежить від $(n-1)$ змінної, тобто являє собою функцію $g(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$. У такому разі говорять, що функцію g отримано з функції f *вилученням* фіктивної змінної,

а функція f отримано з g введенням фіктивної змінної. Функції f і g називають *рівними*, якщо функцію g можна одержати з f введенням або вилученням фіктивних змінних.

Фіктивні змінні вилучають тому, що вони не впливають на значення функції, і з цього погляду зайві. Проте іноді корисно вводити фіктивні змінні. Завдяки цьому будь-яку функцію n змінних можна зробити функцією довільної більшої кількості змінних. Тому можна вважати, що всі функції зі скінченної множини $\{f_1, \dots, f_s\}$ залежать від одних і тих самих змінних x_1, \dots, x_n . Зокрема, твердження $|P_2(n)| = 2^{2^n}$ теореми про кількість булевих функцій передбачає, що ми враховуємо **всі** булеві функції від n змінних, включаючи функції з фіктивними змінними.

Зі зростанням кількості змінних швидко збільшується кількість залежних від них булевих функцій. Наприклад, різних булевих функцій чотирьох змінних є $2^{2^4} \approx 65$ тис., а п'яти – $2^{2^5} \approx 4$ млрд. Зі збільшенням кількості змінних таблиці для булевих функцій стають громіздкими, і ними незручно користуватись.

Розглянемо аналітичний метод подання булевих функцій, тобто подання функцій формулами. Спочатку за допомогою таблиць означають функції, які називають *елементарними*.

x	0	1	x	$\neg x$
0	0	1	0	1
1	0	1	1	0

x_1	x_2	x_1x_2	$x_1\vee x_2$	$x_1\rightarrow x_2$	$x_1\leftrightarrow x_2$	$x_1\oplus x_2$	$x_1 x_2$	$x_1\downarrow x_2$
0	0	0	0	1	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0	1	1	0
1	1	1	1	1	1	0	0	0

Уведені елементарні функції мають такі назви.

1. $f_1(x) = 0$ – константа 0.

2. $f_2(x) = 1$ – константа 1.

3. $f_3(x) = x$ – тотожна функція.

4. $f_4(x) = \neg x$ – заперечення x , читають „не x ” (іноді використовують запис \bar{x}).

5. $f_5(x_1, x_2) = x_1 x_2$ – кон’юнкція, читають « x_1 і x_2 » (іноді використовують символи \wedge та $\&$).

6. $f_6(x_1, x_2) = x_1 \vee x_2$ – диз’юнкція, читають « x_1 або x_2 ».

7. $f_7(x_1, x_2) = x_1 \rightarrow x_2$ – імплікація, читають «із x_1 випливає x_2 » (іноді використовують символ \supset).

8. $f_8(x_1, x_2) = x_1 \leftrightarrow x_2$ – еквівалентність (використовують також символ \sim).

9. $f_9(x_1, x_2) = x_1 \oplus x_2$ – додавання за mod2, читають також як альтернативне „або” („або ..., або”).

10. $f_{10}(x_1, x_2) = x_1 | x_2$ – штрих Шеффера.

11. $f_{11}(x_1, x_2) = x_1 \downarrow x_2$ – стрілка Пірса.

За допомогою елементарних функцій можна подати будь-яку булеву функцію аналітично, тобто у вигляді формули. Нехай задано булеві функції $f(x)$ і $g(x)$. Говорять, що функцію $h(x) = g(f(x))$ отримано *підстановкою* f у g . Для багатомісних функцій f_1, \dots, f_m , по-перше, можливі будь-які підстановки булевих функцій замість змінних у булеві функції. По-друге, можливі будь-які *перейменування* змінних, наприклад, перейменування x_3 в x_2 породжує з функції $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ функцію трьох змінних $f(x_1, x_2, x_2, x_4)$ (у такому разі кажуть, що змінні x_2 та x_3 *ототожнено*). Функцію, яку одержано з f_1, \dots, f_m деякою підстановкою їх одна в одну й перейменуванням змінних, називають *суперпозицією* f_1, \dots, f_m . Вираз, який описує цю суперпозицію та містить функціональні знаки, круглі дужки й символи змінних, називають *формулою*.

Приклад. Тримісну функцію

$$(x_3 \vee x_1) \oplus (x_1 \wedge (x_1 \oplus x_2)).$$

подано не таблицею, а формулою. Вона являє собою суперпозицію диз'юнкції, кон'юнкції та додавання за mod2.

Формулу, побудовану описаним вище способом, тобто таку, що містить лише символи змінних, дужки та знаки функцій із множини Q , називають *формулою над Q* .

Приклад. Нехай $Q = \{\bar{x}, xy, x \vee y\}$, тоді вираз $\overline{(x \vee y)}z \vee t$ – формула над Q .

Щоб зменшити кількість дужок у формулах, вводять пріоритет операцій:

- ◆ заперечення;
- ◆ кон'юнкція;
- ◆ усі інші операції.

Крім того, домовляються, що символ заперечення відіграє роль дужок, якщо він міститься над частиною формули.

Будь-яка формула, яка виражає функцію f як суперпозицію функцій, подає спосіб її обчислення. Цей спосіб визначено таким очевидним правилом: формулу можна обчислити, лише тоді, коли вже обчислено значення всіх її підформул. Отже, формула кожному набору значень аргументів ставить у відповідність значення функції, і відтак може слугувати способом подання й обчислення функції. Зокрема, за формулою обчисленням її значень на всіх 2^n наборах можна відновити таблицю функції. Про формулу, що подає функцію, кажуть також, що вона *реалізує* або *зображає* цю функцію.

Приклад. Функцію подано формулою $\bar{x} \rightarrow (\bar{z} \leftrightarrow (y \oplus xz))$. Потрібно подати її таблицею. Процес розв’язування цієї задачі проілюстровано в наступній таблиці.

x	y	z	xz	$y \oplus xz$	\bar{z}	$\bar{z} \leftrightarrow (y \oplus xz)$	\bar{x}	$\bar{x} \rightarrow (\bar{z} \leftrightarrow (y \oplus xz))$
0	0	0	0	0	1	0	1	0
0	0	1	0	0	0	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0	1	0
1	0	0	0	0	1	0	0	1
1	0	1	1	1	0	0	0	1
1	1	0	0	1	1	1	0	1
1	1	1	1	0	0	1	0	1

Еквівалентність формул

Подання функції формулою не єдине. Формули називають *еквівалентними* (або *тотожними, рівносильними*), якщо вони реалізують рівні булеві функції. Еквівалентність формул позначають символом $=$.

Приклад. Формули $x \rightarrow y$ та $(\bar{x} \vee y) \vee z\bar{z}$ еквівалентні: $x \rightarrow y = (\bar{x} \vee y) \vee z\bar{z}$. У цьому можна переконатись, побудувавши таблиці відповідних булевих функцій. Очевидно, що змінна z у другій формулі фіктивна.

x	y	z	\bar{x}	$\bar{x} \vee y$	\bar{z}	$z\bar{z}$	$(\bar{x} \vee y) \vee z\bar{z}$	$x \rightarrow y$
0	0	0	1	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	0	0	1	1
0	1	0	1	1	1	0	1	1
0	1	1	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	1	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	1	1	0	1	1
1	1	1	0	1	0	0	1	1

Крім побудови таблиць є й інші методи доведення еквівалентності формул і побудови нових формул, рівносильних даним. Ці методи називають *рівносильними* (еквівалентними) *перетвореннями формул*. Їх ми розглянемо у наступній лекції.

Двоїстість

Розглянемо тепер іще одне важливе поняття. Функцію $f^*(x_1, \dots, x_n)$ називають *двоїстою* до функції $f(x_1, \dots, x_n)$, якщо $f^*(x_1, \dots, x_n) = \overline{f(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n})}$.

Візьмемо заперечення над обома частинами рівності й підставимо $\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n}$ замість x_1, \dots, x_n , тоді одержимо $\overline{f^*(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n})} = \overline{\overline{f(\overline{\overline{x_1}}, \dots, \overline{\overline{x_n}})}} = f(x_1, \dots, x_n)$. Звідси випливає, що функція f двоїста до f^* , тобто $(f^*)^* = f$. Пари двоїстих функцій утворюють, наприклад, кон'юнкція та диз'юнкція, константи 0 та 1, додавання за mod2 та еквівалентність. Таблицю для двоїстої функції у разі вибраного нами порядку наборів отримують із таблиці для функції $f(x_1, \dots, x_n)$ інвертуванням (тобто заміною 0 на 1 і 1 на 0) стовпчика функції та його перевертанням.

З означення двоїстості зрозуміло, що для довільної функції двоїста функція визначається однозначно. Функція може бути двоїстою до самої себе, тоді її називають *самодвоїстою*. Наприклад, заперечення \overline{x} та функція $x \oplus y \oplus z$ – самодвоїсті функції.

Нехай функцію задано формулою F . Який вигляд має формула F^* , що задає двоїсту функцію? Відповідь на це запитання дає така теорема.

Теорема. Якщо

$$F(x_1, \dots, x_n) = f(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_s(x_1, \dots, x_n)),$$

то

$$F^*(x_1, \dots, x_n) = f^*(f_1^*(x_1, \dots, x_n), \dots, f_s^*(x_1, \dots, x_n)).$$

Доведення.

$$\begin{aligned} F^*(x_1, \dots, x_n) &= \overline{F}(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n}) = \overline{f}(f_1(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n}), \dots, f_s(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n})) = \\ &= \overline{f}(\overline{f_1(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n})}, \dots, \overline{f_s(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n})}) = \overline{f}(\overline{f_1^*(x_1, \dots, x_n)}, \dots, \overline{f_s^*(x_1, \dots, x_n)}) = \\ &= f^*(f_1^*(x_1, \dots, x_n), \dots, f_s^*(x_1, \dots, x_n)). \end{aligned}$$

З теореми випливає таке твердження.

Принцип двоїстості. Якщо у формулі F , що подає функцію f , усі символи функцій замінити символами відповідних двоїстих функцій, то одержана формула F^* подає функцію f^* , двоїсту до f .

Інакше це твердження можна сформулювати так: функція, двоїста до суперпозиції функцій, дорівнює відповідній суперпозиції двоїстих функцій.

Приклад. Нехай $f = (x \oplus \bar{y}) \vee z$, тоді $f^* = (x \leftrightarrow \bar{y}) \wedge z = (x \leftrightarrow \bar{y})z$.

Якщо функції рівні, то й двоїсті до них функції також рівні. Це дає змогу отримувати нові еквівалентності за допомогою принципу двоїстості. Для цього потрібно від еквівалентності $F_1 = F_2$ перейти до $F_1^* = F_2^*$.