д) $A\{1, 3, 5\}$, $B = \{1, 2, 3\}$

$A \oplus B = \{2, 5\}$

$A \cup B = \{1, 2, 3, 5\}$

$A \cap B = \{1, 3\}$

$A \cup B \setminus A \cap B = \{2, 5\}$

в) $A \oplus B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

$(A \cup B) \setminus (A \cap B)$

Нехай $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$, тоді $x \in (A \cup B)$ і $x \notin (A \cap B)$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow (x \in A$ або $x \in B)$ і $(x \in \overline{A \cap B}) \Rightarrow$

$\Rightarrow (x \in A$ або $x \in B)$ і $(x \in \bar{A} \cup \bar{B}) \Rightarrow$

$\Rightarrow (x \in A$ або $x \in B)$ і $(x \notin A$ або $x \notin B) \Rightarrow$

$\Rightarrow (x \in A$ і $x \notin A)$ або $(x \in A$ і $x \notin B)$ або $(x \in B$ і $x \notin A)$ або $(x \in B$ і $x \notin B) \Rightarrow (x \in A$ і $x \notin B)$ або $(x \in B$ і $x \notin A) \Rightarrow$

$\Rightarrow (x \in A \setminus B)$ або $(x \in B \setminus A) \Rightarrow x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ Δ

№82.

д) $A = B$ – ?

A, B, C: $A \cap C = B \cap C$

$B \in A$

№90. Чому, які ф-ї є ін'єктивні

$A = \{a, b, c, d\}$ $f: A \to A$

$f(a) = b$		$f(a) = b$
$f(b) = a$	(ін)	$f(b) = b$ (ін)
$f(c) = c$	(с)	$f(c) = d$ (с)
$f(d) = d$		$f(d) = c$

(ін): $a \neq b$

$f(a) = f(b) = b$

$(x \in A)(\exists y \in A): (f(x) = y)$

№95. Бієкція?

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ⓐ?

а) $f(x) = 2x+1$

Нехай $x_1 \neq x_2$; припустимо: $f(x_1) = f(x_2)$

$2x_1+1 = 2x_2+1 \quad /-1, /2$

$\underline{x_1 = x_2}$ ⓐ

$\forall y \in \mathbb{R} \ \exists x = \frac{y-1}{2}$

$f(x) = 2\left(\frac{y-1}{2}\right)+1 = y$ ⓒ

ⓐ, ⓒ $\Rightarrow$ ⓑ

б) $f(x) = x^2+1$: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ⓑ - ?

ⓐ, ⓒ $\Rightarrow$ ⓑ

$x_2 \neq -x_1$; не є ін.

$\forall y < 1 \ \nexists x: y = x^2+1$ ⓑ

№81

а) $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

1) $\{3, 4, 5\}$

0 0111 00000 - бітовий рядок

2) $\{1, 3, 6, 10\}$

1 0100 10001 - бітовий рядок

№81

в) $A \oplus B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

$(A \cup B) \setminus (A \cap B)$

Нехай $x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, тоді $x \in (A \setminus B)$ або $(x \in B \setminus A) \Rightarrow$

$\Rightarrow (x \in A$ і $x \notin B)$ або $(x \in B$ і $x \notin A) \Rightarrow (x \in A$ і $x \in B)$ або

$(x \in B$ і $x \in A) \Rightarrow$ ~~$x \in A$ і x~~

$\Rightarrow (x \in A$ або $x \in B)$ і $(x \in A$ або $x \in \bar{A})$ і $(x \in \bar{B}$ або $x \in B)$
$(x \in \bar{B}$ або $x \in \bar{A}) \Rightarrow (x \in A$ або $x \in B)$ і $(x \in \bar{A} \cap \bar{B}) \Rightarrow$
$\Rightarrow (x \in A \cup B)$ і $(x \notin A \cap B) \Rightarrow x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

Заняття 7

№1. $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ $B = \{0, 1, 2, 3\}$
$(a, b) \in R$
г) a ділить b
$R = \{(1,0)(1,1)(1,2)(1,3)(2,2)(2,0)(3,3)(3,0)(4,0)$

№2. $A = \{1, 2, 3, 4\}$ рф, с, ~~антис~~, ас, ірф, ТР – ?
г) $R = \{(1,2)(2,3)(3,4)\}$
нерефлекс. $\nexists (a,a) \in R$ ~~(1,1)(2,2)(3,3)~~
несиметр. $\exists (a, b)$, але не має $\nexists (b,a)$ (b, a)
асиметр. $\forall (a, b)$ $a \neq b$ $\nexists (b, a)$
(1,2) $\nexists (2,1)$
$\Updownarrow$
антисиметр.
не транзитивне $(1, 2) \in R$ & $(2, 3) \in R$ $\nexists (1, 3) \in R$
ірефлекс. $\nexists (a, a) \notin R$

№3 ~~(b,a); ~~ / ~~x6~~ 9/3
~~№4 (b,a); ~~ / ~~x4~~

№4. $A = \{0, 1\}$ $B = \{0, 1\}$ $R \subset A \times A$
$|A \times B| = |A| \cdot |B| = 4$ $A \times B = \{(0,0)(0,1)(1,0)(1,1)\}$
$P(A \times B) = 2^4 = 16$
$R_1 = \{(0, 0)\}$
$R_2 = \{(0,0), (0,1)\}$
...
R_{16}

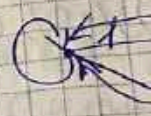
№16. $A = \{1,$
б) $R = \{(1,1), (1, 2$

	1	2	3
1	1	1	1
2	0	1	1
3	0	0	1

№17 б)

$R = \{(1,1), (1,$

№19



№53.
$A = \{1, 2,$
$M_R = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
$R \cap$
$S =$
$R =$
$R \cap S$
$S \circ R$
R
R^3

№16 $A = \{1, 2, 3\}$

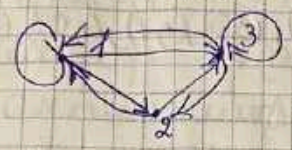
б) $R = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,2), (2,3), (3,3)\}$

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

№17 б) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$R = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)\}$

№19 граф:



№53.

$A = \{1, 2, 3\}$

$M_R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad M_S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$R \cap S$, $S \circ R$, $R \circ R$

$S = \{(1,2), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)\}$

$R = \{(1,2), (1,1), (2,1), (2,3), (3,1)\}$

$R = \{(1,2), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1)\}$

$R \cap S = \{(1,2), (2,3), (2,2), (3,1)\}$

$S \circ R = \{(1,3)\ (1,2)\ (2,2)\ (2,3)\ (2,1)\ (3,2)\}$

$R \circ R = \{(1,1)\ (1,2)\ (1,3)\ (2,2)\ (2,1)\ (3,2)\}$

$R^3 = ?$

$R^3 = (R \circ R) \circ R$

$R^2 \circ R$ $\quad R^2 \circ R^2$

$R^4 = (R \circ R) \circ (R \circ R)$

$\Rightarrow (x \in A$ або $x \in B)$ і $(x \in A$ або $x \in \bar{A})$ і $(x \in \bar{B}$ або $x \in B)$
$(x \in \bar{B}$ або $x \in \bar{A}) \Rightarrow (x \in A$ або $x \in B)$ і $(x \in \bar{A} \cap \bar{B}) \Rightarrow$
$\Rightarrow (x \in A \cup B)$ і $(x \notin A \cap B) \Rightarrow x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

Заняття 7

№1. $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ $B = \{0, 1, 2, 3\}$
$(a, b) \in R$
1) a ділить b
$R = \{(1,0)(1,1)(1,2)(1,3)(2,2)(2,0)(3,3)(3,0)(4,0)\}$

№2. $A = \{1, 2, 3, 4\}$ р, с, ~~антис~~, ас, ірр, тр – ?
1) $R = \{(1,2)(2,3)(3,4)\}$
нерефлекс $\nexists (a,a) \in R$ ~~(1,1)(2,2)(3,3)~~
несиметр. $\exists (a, b)$, але не має $\nexists (b,a)$ (b, a)
асиметр. $\forall (a, b)$ $a \neq b$ $\nexists (b, a)$
$\Updownarrow$ $(1,2)$ $\nexists (2,1)$
антисиметр.
не транзитивне $(1, 2) \in R$ & $(2, 3) \in R$ $\nexists (1, 3) \in R$
ірефлекс. $\nexists (a, a) \notin R$

~~№3 (6,1); №/ №6~~
~~№4 (6,1); №/ №8~~ 9/3

№7. $A = \{0, 1\}$ $B = \{0, 1\}$ $R \subset A \times A$
$|A \times B| = |A| \cdot |B| = 4$ $A \times B = \{(0,0)(0,1)(1,0)(1,1)\}$
$P(A \times B) = 2^4 = 16$
$R_1 = \{(0, 0)\}$
$R_2 = \{(0,0), (0,1)\}$
...
R_{16}

№16 $A = \{1, 2, 3\}$

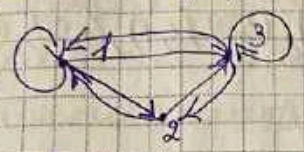
б) $R = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,2), (2,3), (3,3)\}$

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

№17 б) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$R = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)\}$

№19 граф:



№23.

$A = \{1, 2, 3\}$

$M_R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad M_S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$R \cap S$, $S \circ R$, $R \circ R$

$S = \{(1,2), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)\}$

$R = \{(1,2), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1)\}$

$R = \{(1,2), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1)\}$

$R \cap S = \{(1,2), (2,3), (2,2), (3,1)\}$

$S \circ R = \{(1,3)\ (1,2)\ (2,2)\ (2,3)\ (2,1)\ (3,2)\}$

$R \circ R = \{(1,1)\ (1,2)\ (1,3)\ (2,2)\ (2,1)\ (3,2)\}$

R^3 - ?

$R^3 = (R \circ R) \circ R$

$R^2 \circ R$ $\quad R^2 \circ R^2$

$R^4 = (R \circ R) \circ (R \circ R)$

Домашня робота (3.7)

№1

$A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

$B = \{0, 1, 2, 3\}$

$(a, b) \in R$

а) $a = b$

$R = \{(0,0), (1,1), (2,2), (3,3)\}$

б) $a + b = 4$

$R = \{(2,2), (3,1), (1,3)\}$

в) $a > b$

$R = \{(1,0), (2,0), (2,1), (3,2), (3,1), (3,0), (4,1), (4,0), (4,2), (4,3)\}$

г) $НСД(a, b) = 1$

$R = \{(1,1)\}$

е) $НСК(a, b) = 2$

$R = \{(2,2), (4,2)\}$

№2 $A = \{1, 2, 3, 4\}$

р, irр, с, антис, асим, тр. – ?

а) $R = \{(2,2), (2,3), (2,4), (3,2), (3,3), (3,4)\}$

не рефлексивне $\nexists (a,a) \in R$

ірефлексивне $\nexists (a,a) \notin R$

не симетричне $\exists (a,b)$, але $\nexists (b,a)$

антисимметричне

асиметричне $\forall (a,b)$ $a \neq b$ $\nexists (b,a)$

транзитивне $(2,3) \in R$ & $(3,4) \in R$ $\exists (2,4) \in R$

б) $R = \{(1,1), (1,2), (2,4), (2,2), (3,3), (4,4)\}$

не рефл. $\nexists (a,a) \in R$

іррефл. $\nexists (a,a) \notin R$

симетр. $\exists (a,b)$ & $\exists (b,a)$

не асиметр. $\forall (a,b)$ $a \neq b$ $\exists (b,a)$

не антисиметр.

не транзитивне $(1,2) \in R$ & $\nexists (2,3) \in R$ $\nexists (1,3) \in R$

в) $\{(2,4), (4,2)\}$

не рефл. $\nexists (a,a) \in R$

іррефл. $\nexists (a,a) \notin R$

симетр. $\exists (a,b)$ & $\exists (b,a)$

не антисиметр. $\forall (a,b)$ $a \neq b$ $\exists (b,a)$

не асиметр.

не транзитивне $(2,4) \in R$ & $(4,2) \in R$ $\nexists (2,2) \in R$

д) $\{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4)\}$

рефл. $\exists (a,a) \in R$

не іррефл. $\nexists (a,a) \notin R$

не симетр. $\exists (a,b)$, але $\nexists (b,a)$

антисиметр. $\forall (a,b)$ $a \neq b$ $\nexists (b,a)$

асиметр.

не транзитивне $(a,b) \in R$ & $(b,c) \in R$ $\nexists (a,c) \in R$

е) $\{(1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,1), (3,4)\}$

не рефл. $\nexists (a,a) \in R$

іррефл. $\nexists (a,a) \notin R$

не симетр. $\exists (a,b)$, але $\nexists (b,a)$

антисиметр. $\forall (a,b)$ $a \neq b$ $\nexists (b,a)$

асиметр.

транзитивне $(a,b) \in R$ & $(b,c) \in R$ $\exists (a,c) \in R$

№3 $(a, b) \in R$

в) а має те саме прізвище, що й в: рефл не ірреф, не симетр., антисиметр., асиметр., не транзитивне

г) а та в мають спільних дідусів й бабусь транзитивне, симетр, не асиметр., не антисиметр, рефл, не ірреф.

№4 $(x, y) \in R$

в) $x = y+1$ або $x = y-1$

не рефл, ірреф., симетр, не антисиме., не асим., транзитивне

г) x та y обидва відємні чи невід'ємні

рефл., не ірреф., симетр., не антисим, не асим., транзитивне

№8 $R_1 = \{(0,0)\}$

$R \subset \{0,1\}$

$R_2 = \{(0,0), (0,1)\}$

$R_3 = \{(1,1)\}$

$R_4 = \{(0,1), (1,1), (0,0)\}$

$R_5 = \{(0,1), (1,0)\}$

$R_6 = \{(1,1), (0,0)\}$

$R_7 = \{(1,0), (1,1), (0,1)\}$

$R_8 = \{(1,1), (0,1)\}$

$R_9 = \{(0,0), (1,0), (0,1)\}$

$R_{10} = \{(0,0), (1,0), (0,1), (1,1)\}$

$R_{11} = \{(1,1), (0,1), (1,0), (0,0)\}$

$R_{12} = \{(1,1), (0,1), (0,0)\}$

$R_{13} = \{(1,0), (0,1), (0,0)\}$

$R_{14} = \{(0,0), (1,1)\}$

$R_{15} = \{(0,1)(0,0)(1,1)\}$

$R_{16} = \{(0,1)(0,0), (1,1), (1,0)\}$

а) рефлексивні: R_1, R_3, R_6

б) ірреф.: R_2, R_4, R_8, R_7, R_8, R_9, R_{10}, R_{11}, R_{12}, R_{13}, R_{14}, R_{15}

в) симетр.: R_5, R_1, R_3, R_6, R_{13}, R_{11}, R_{10}, R_9, R_7, R_{14}, R_{16}

г) антисиметр.: R_2, R_4, R_8, R_{12}, R_{15}

д) асиметр.: R_2, R_4, R_8, R_{12}, R_{15}

е) транзитивні: R_2, R_4, R_5, R_7, R_8, R_9, R_{10}, R_{11}, R_{12}, R_{13}, R_{14}, R_{16}

а: 3

б: 12

в: 11

г: 5

д: 5

е: 12

№16

$\{1, 2, 3\}$

а) $\{(1,1), (1,2), (1,3)\}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

б) $\{(1,2), (2,1), (2,2), (3,3)\}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

г) $\{(1,3), (3,1)\}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

№54

$$M_R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

а) $R^2 = R \circ R$

$R = \{(1,2), (2,3), (3,1), (3,2)\}$

$R = \{(1,2), (2,3), (3,1), (3,2)\}$

$R \circ R = \{(2,1), (1,1), (1,3), (3,3), (2,3), (3,1), (1,2), (2,2), (3,2)\}$

№17 (в)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$R = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)\}$

не рефл. $\nexists (a,a) \in R$

ирреф.

симетр.

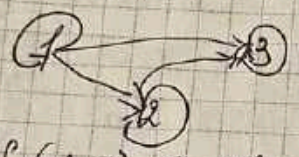
не антисимметр.

не асимметр

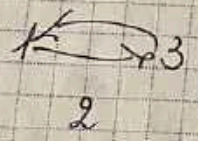
транзитивна

№18 (в, г)

в) $\{(1,1), (1,2), (1,3), (2,2), (2,3), (3,3)\}$

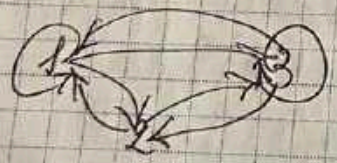


г) $\{(1,3), (3,1)\}$



№19 (в).

в) $\{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)\}$



№53 (д, g)

д) $R \cap S = \{(1,2), (2,2), (2,3), (3,1)\}$

$R = \{(1,2), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1)\}$

$S = \{(1,2), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)\}$

g) $R \cdot R = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)\}$

Заняття 8.

Відношення еквівалентності. Відношення часткового порядку. Замикання відношень

$R = \{(1,2), (1,4), (3,3), (4,1)\}$

$\bar{R} \supset R$

сим.

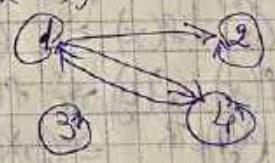
№74 (б)

Р, С, тр. замик. – ?

рефл. замик.:

$\{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (1,2), (1,4), (4,1)\}$

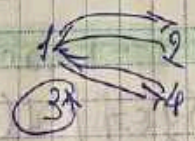
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



сим. замик.:

$\{(2,1), (1,2), (1,4), (3,3), (4,1)\}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

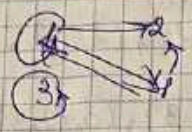


транзит. замик.:

$R^* - ?$

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad W^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$W^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



$W^{(3)} = W^{(2)}$

$$W^{(4)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$R^* = \{(1,1), (4,2), (1,1), (3,3), (1,2), (4,1), (1,4)\}$

№22

$A = \{0, 1, 2, 3\}$

тр., реф., симм. $\Rightarrow$ екв.

а) $\{(0,0), (1,1), (2,2), (3,3)\}$ – еквівалент.

б) $\{(0,0), (0,2), (2,0), (2,2), (2,3), (3,2), (3,3)\}$ – не екв.

$(0,2) \in R$ & $(2,3) \in R$, але $(0,3) \notin R$ – не тр.

$(1,1) \notin R$ не реф.

симетр.

№26.

A – непорожня множина

$f: A \to A$

$R = \{(x,y) \mid f(x) = f(y)\}$ – відн. еквівал.

$\forall x \in A: f(x) = f(x) \Rightarrow (x,x) \in R$

$\forall x,y \in A: f(x) = f(y) \Rightarrow f(y) = f(x)$

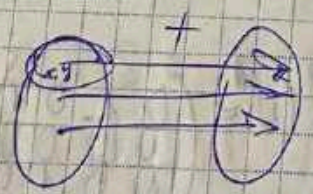
$(x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \in R$

$\forall x,y,z \in A: (x,y) \in R$ & $(y,z) \in R \Rightarrow (x,z) \in R \{ f(x) = f(y)$ & $f(y) = f(z) \} \Rightarrow$

$f(x) = f(y) = f(z)$

$[a]_R = \{x \in A \mid x R a\}$ – клас еквівал.

A



$[x] = \{y \in A \mid f(x) = f(y)\}$

$f(x) = f(x') = x$

$x \mathbb{R} x'$

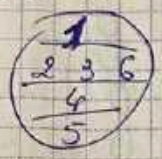
$(x, x') \in \mathbb{R}$

№38.

д) розбиття = клас. еквівал.

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$\{\{1\}, \{2, 3, 6\}, \{4, 5\}\}$

A 

$\mathbb{R} = \{(1,1), (2,2), (3,3), (6,6), (2,3), (3,2), (3,6), (6,3), (2,6), (6,2), (4,4), (5,5)\}$

№40.

$a \mathbb{R} b \Leftrightarrow a \geq b$

$(a, b) \in \mathbb{R}$

рефл., транз., антис. — частк. пор.

в) $\forall a: a \geq a \Rightarrow a \mathbb{R} a$, $(a, a) \in \mathbb{R}$ — рефл.

$\forall a, b: a \geq b$ & $(b \geq a) \Rightarrow a = b$ — антисим.

$(a, b) \in \mathbb{R}$ & $(b, a) \in \mathbb{R} \Rightarrow a = b$

$\forall a, b, c$ $a, b \in \mathbb{R}$ & $(b, c) \in \mathbb{R} \Rightarrow (a, c) \in \mathbb{R}$ — транз.

$a \geq b$ & $b \geq c \Rightarrow a \geq c$

$(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$ — частково впор.

№41

відн. частк. порядку

$(2, 1)$ $\quad 2 \not\leq 1$ $\quad (1, 3) \in \mathbb{R}$, $(3, 1) \notin \mathbb{R}$

$(1, 3)$ $\quad 1 \not\geq 3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$a \neq b$ $\quad (a, b)$ і (b, a)

(a, a)

$(1, 3) \in \mathbb{R}$ & $(3, 1) \in \mathbb{R}$

$(1, 3) \in \mathbb{R}$

$(2, 2) \in \mathbb{R}$ & $(2, 1) \in \mathbb{R} \Rightarrow (2, 1) \in \mathbb{R}$

в) $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$a \neq b$: $(a, b) \notin \mathbb{R} \cup (b, a) \notin \mathbb{R}$

$(4, 1) \in \mathbb{R}$ & $(1, 3) \in \mathbb{R} \Rightarrow (4, 3) \in \mathbb{R}$

$(a, b) \in \mathbb{R}$

№20.

а) $f(\tilde{x}^3) = ((((x_3 \to x_2) \vee x_1)(x_2 \to x_1) x_3 \bar{x}_1) \oplus x_3 =$

$= (((\bar{x}_3 \vee x_2) \vee x_1)(\bar{x}_2 \vee x_1) x_3 \bar{x}_1) \oplus x_3 =$

$= (((\bar{x}_3 \vee x_1) \vee (x_2 \vee x_1))(\bar{x}_2 x_3 \bar{x}_1 \vee \underbrace{x_1 x_3 \bar{x}_1}_{0}) \oplus x_3 =$

$= ((x_3 \vee x_1 \vee x_2 \vee x_1)(\bar{x}_2 x_3 \bar{x}_1)) \oplus x_3 = ((\bar{x}_3 \vee x_2)(\bar{x}_2 x_3 x_1)) \oplus x_3 =$

$= ((x_3 \oplus x_2 \oplus x_3 x_2)(\bar{x}_2 x_3 x_1)) \oplus x_3 = (x_2 \oplus x_3 x_2)(\bar{x}_2 x_3 x_1)$

нефіктивна

в) $f(\tilde{x}^3) = ((x_1 \vee x_2)(x_1 \vee \bar{x}_3) \to (\bar{x}_1 \to x_2 x_3)) x_2 =$

$= ((x_1 \oplus x_2 \oplus x_1 x_3)(x_1 \oplus \bar{x}_3 \oplus x_1 \bar{x}_3) \to (\bar{x}_1 \to x_2 x_3)) x_2 =$

$= (\overline{(x_1 \vee x_2)(x_1 \vee \bar{x}_3)} \vee (x_1 \to x_2 x_3)) x_2 =$

$= (\overline{(x_1 \vee x_2)(x_1 \vee \bar{x}_3)} \vee (\bar{x}_1 \vee x_2 x_3)) x_2 =$

$= ((\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_1 \bar{\bar{x}}_3) \vee (\bar{x}_1 \vee x_2 x_3)) x_2 = (\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_1 x_3 \vee (\bar{x}_1 \vee x_2 x_3)) x_2 =$

$= (\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_1 x_3 \oplus x_1 \vee x_2 x_3 \oplus \underbrace{\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_1 x_3 x_1 \vee x_2 x_3}_{0}) x_2 =$

$= (\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_1 x_3 \oplus x_1 \vee x_2 x_3) x_2 = \underbrace{\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_1 x_3 x_2}_{0} \oplus (x_1 \vee x_2 x_3) x_2 =$

$= x_1 x_2 \vee x_2 x_3 x_2 = x_1 x_2 \vee x_2 x_3 = x_1 x_2 \oplus x_2 x_3 \oplus x_1 x_2 x_2 x_3 =$

$= x_1 x_2 \oplus x_2 x_3 \oplus x_1 x_2 x_3 = x_1 \vee x_2 \vee x_3$

змінна фіктивна

Заняття 4.

№22.

а) $Q = \{x_1 \vee x_2\}$

$Q' = \{x \oplus y,\ xy,\ 1\}$

$Q'' = \{\bar{x},\ xy,\ x \vee y\}$

повні системи

$P = \{\bar{x},\ xy\}$

$\boxed{P' = \{\bar{x},\ x \vee y\}}$

$M = \{x \mid y\}$

$x \downarrow y = \overline{x \vee y}$

$\bar{x} = \bar{x} \cdot \bar{x} = \overline{x \vee x} = x \downarrow x$

$x \vee y = \overline{x \downarrow y} = (x \downarrow y) \downarrow (x \downarrow y)$

Довести, що сист. бул. фун. Q повна

№23. Якими із множин $T_0 \cup T_1$, $T_1 \setminus T_0$ належить

в) $f(\tilde{x}^3) = (x_1 \to x_2)(x_2 \vee x_3) \vee (x_3 \to x_2) \Leftrightarrow$

$(T_0 \cup T_1)$, $(T_1 \setminus T_0)$ — ?

$\Leftrightarrow (x_1 \to x_2)(\overline{x_2 \vee x_3}) \vee (\bar{x}_3 \vee x_2) =$

$= (\bar{x}_1 \vee x_2)(\overline{x_2 \vee x_3})(\bar{x}_3 \vee x_2) =$

$= (\bar{x}_1 \vee x_2)(\bar{x}_2 \bar{x}_3)(\bar{x}_3 \vee x_2) = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee \underbrace{x_2 \bar{x}_2}_{0} \bar{x}_3 \vee \bar{x}_3 \vee x_2 =$

$= \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_3 \vee x_2$

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	1
1	1	1	1

$(T_0 \cup T_1)$ - f належить

$f(\tilde{x}^3) \in (T_0 \cup T_1)$, оскільки $f(\tilde{x}^3) \in T_1$

$f(\tilde{x}^3) \in (T_1 \setminus T_0)$, оскільки $f(\tilde{x}^3) \in T_1$

№24

$(T_1 \setminus T_0)$

а) $f(\tilde{x}^n) = x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n \oplus 1$

n - парне

$f(0) = \underbrace{0 \oplus 0 \oplus \ldots \oplus 0}_{k} \oplus 1 = 1$

$f(1) = \underbrace{1 \oplus 1 \oplus \ldots \oplus 1}_{k} \oplus 1 = 1$

n - непарне

$f(0) = \underbrace{0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus \ldots \oplus 0}_{} \oplus 1 = 1$

$f(1) = \underbrace{1 \oplus 1 \oplus \ldots \oplus 1}_{} \oplus 1 = 0$

якщо n - парне, $f \in (T_1 \setminus T_0)$

якщо n - непарне, $f \notin (T_1 \setminus T_0)$

№26. які ф-ї самодвоїсті?

а) $f(\tilde{x}^3) = x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3$

x_1	x_2	x_3	f	f^*
				$0 \to 1$, $1 \to 0$ самодв.
				знайдемо

$f^*(\tilde{x}^3) = x_1 \vee x_2 \wedge x_1 \vee x_3 \wedge x_2 \vee x_3 =$

$(x_1 \vee x_2)(x_1 \vee x_3)(x_2 \vee x_3)$

ф-я несамодвоїста $f \neq f^*$

№28 які монотонні?

а) $f(\tilde{x}^2) = x_1 \to (x_1 \to x_2)$

$f(\tilde{x}^n) = (x_1, \ldots, x_n)$ назив. монотонною, якщо для будь-яких наборів $\tilde{a}^n$ і $\tilde{b}^n$ з того що, $\tilde{a}^n \leq \tilde{b}^n \Rightarrow$ $f(\tilde{a}^n) \leq f(\tilde{b}^n)$

x_1	x_2	$x_1 \to x_2$	$x_1 \to (x_1 \to x_2)$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	1	1

$f(0,0) = 1$

$f(1,0) = 0$

$(0;0) \leq (1,0) \not\Rightarrow f(0,0) \leq f(1,0)$

ф-я немонотонна

№30 визн, які ф-ї лінійні

а) $f(\tilde{x}^2) = x_1x_2(x_1 \oplus x_2)$ ⊖

$P(\tilde{x}^n) = C_0 \oplus C_1x_1 \oplus \ldots \oplus C_nx_n$

⊖ $x_1x_2x_1 \oplus x_1x_2x_2 = x_1x_2 \oplus x_1x_2 = 0$

$P(\tilde{x}^2) = 0$ – лінійна

№37 використ. критерій повноти, визн. чи

а) $Q = \{x_1 \vee x_2, x_1 \oplus x_2, 1\}$ – повна функціонал. повна система Q

	T_0	T_1	S	M	L
$x_1 \vee x_2$	+	+	⊖	+	⊖
$x_1 \oplus x_2$	+	⊖	⊖	⊖	+
1	⊖	+	⊖	+	+

x_1	x_2	$x_1 \vee x_2$	f^*
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	1

$x_1 \vee x_2 = x_1 \oplus x_2 \oplus x_1x_2 = P(\tilde{x}^2)$

$P(\tilde{x}^2)$ – не лінійн.

x_1	x_2	$x_1 \oplus x_2$	f^*
0	0	0	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

№33. а) $f = x \oplus y$, $Q = \{x \to y\}$

	T_0	T_1	S	M	L
$x \to y$	–	+	–	–	–
$x \oplus y$	+	–	–	–	+

x	y	$x \to y$	$x \oplus y$
0	0	1	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	1	1	0

$x \to y = \bar{x} \vee y =$

$= \bar{x} \oplus y \oplus \overline{xy}$

$f' = x \to y \in T_1$

$[f'] \in T_1$

$f \notin T_1$

д/з: ~~№2, 3, 4, 2а, 2б, 2в, 2г~~, 20 б, 28 б, 30 б, ~~31, 32, 33~~; 33 б, ~~34~~

Домашня робота

№22.

б) $Q = \{x_1 \to x_2, \overline{x_1}\}$

$x_1 \to x_2 = \overline{x_1} \vee x_2$

$\overline{x_1} = \overline{x_1} \cdot \overline{x_1} = \overline{x_1 \vee x_1}$

$Q'' \{\overline{x}, xy, x \vee y\}$

$\overline{x} = \overline{x} \cdot \overline{x} = \overline{x \vee x}$

$x \vee y = \overline{\overline{x} \cdot \overline{y}}$

в) $Q = \{x_1 x_2 \oplus x_3, (x_1 \sim x_2) \oplus x_3\}$

$Q' = \{x \oplus y, xy, 1\}$

$x \oplus y = \overline{x} y \vee x \overline{y}$

$xy = yx$

$1 = 1 \vee x$

$x \vee \overline{x} = 1$

№23.

а) $f(\tilde{x}^3) = (x_1 \vee x_2) \to ((x_1 | x_2 x_3) \downarrow ((x_2 \sim x_3) \to x_1)) =$

$= (x_1 \vee x_2) \to (\overline{x_1 x_2 x_3} \downarrow ((x_2 \sim x_3) \to x_1)) =$

$= (x_1 \vee x_2) \to (\overline{x_1 x_2 x_3} \downarrow (x_2 \sim x_3 \vee x_1)) =$

$= (x_1 \vee x_2) \to (\overline{\overline{x_1 x_2 x_3} \vee x_2 \sim x_3 \vee x_1}) =$

$= (x_1 \vee x_2) \to (x_1 x_2 x_3 \vee x_2 \sim x_3 \vee \overline{x_1}) =$

$= \overline{x_1 \vee x_2} \vee (x_1 x_2 x_3 \vee (x_2 \sim x_3) \vee \overline{x_1}) = \overline{x_1 x_2} \vee (x_1 x_2 x_3 \vee (x_2 \sim x_3) \vee \overline{x_1}) =$

$= \overline{x_1 x_2} \vee (x_1 x_2 x_3 \vee \overline{x_1} \vee x_2 \sim x_3) = \overline{x_1 x_2} \vee x_2 x_3 \vee x_2 \sim x_3 =$

$= \overline{x_1} \vee x_3 \vee x_2 \sim x_3$

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	1
1	1	1	1

$(T_0 \cup T_1)$ – f належить

№24

б) $f(\tilde{x}^3) = (\ldots((x_1 \to x_2) \to x_3) \to \ldots \to x_n)$

n-парне
$f(0)=0$
$f(1)=0$

n-непарне
$f(0)=0$
$f(1)=1$

якщо n-парне $f \in (T_1 \setminus T_0)$

якщо n-непарне $f \in (T_1 \setminus T_0)$

№37

б) $Q = \{x_1 \oplus x_2 \oplus x_3,\ x_1 \vee x_2,\ 0,\ 1\}$ – повна

	T_0	T_1	S	M	L
$x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$	+	–	–	–	–
$x_1 \vee x_2$	+	–	–	–	–
0	+	–	+	–	–
1	–	+	–	+	+

x_1	x_2	x_3	$x_1 \oplus x_2$	$x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$ (f)	f^*	$x_1 \vee x_2$ (f_1)	f_1^*
0	0	0	0	0	1	0	1
0	0	1	0	1	0	0	1
0	1	0	1	1	0	1	0
0	1	1	1	0	1	1	0
1	0	0	1	1	0	1	0
1	0	1	1	0	1	1	0
1	1	0	0	0	1	1	0
1	1	1	0	1	0	1	0

$x_1 \vee x_2 = x_1 \oplus x_2 \oplus x_1 x_2 \in P(L^2)$ – не лінійна

в) $Q = \{x_1 \vee x_2,\ \overline{x_1}\}$

	T_0	T_1	S	M	L
$x_1 \vee x_2$	+	–	–	–	–
$\overline{x_1}$	+	+	–	–	+

x_1	x_2	$\overline{x_1}$ (f)	f^*	$x_1 \vee x_2$ (f_1)	f_1^*
0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	1	0
1	1	0	1	1	0

2) $Q = \{ x_1 \to x_2,\ x_1 \oplus x_2,\ 1 \}$

x_1	x_2	$x_1 \to x_2$	f^*	$x_1 \oplus x_2$	f_1^*
0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	1	0
1	1	1	0	0	1

	T_0	T_1	S	M	L
$x_1 \to x_2$	−	+	−	−	−
$x_1 \oplus x_2$	+	−	−	−	+
1	−	+	−	+	+

g) $Q = \{ x_1 x_2 \vee x_1 x_3 \vee x_2 x_3,\ \overline{x_1} \}$

x_1	x_2	x_3	$\overline{x_1}$	f^*	x_1x_2	x_1x_3	x_2x_3	$x_1x_2 \vee x_1x_3$	$x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3$
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0	0	1	0	1
1	0	1	0	1	0	1	0	1	1
1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	1	0	1	1	1	1	1	1

	T_0	T_1	S	M	L
$x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3$	+	+	−	+	−
$\overline{x_1}$	+	+	−	−	+

№33

б) $Q = \{ x_1 x_2,\ x_1 \vee x_2,\ 1 \}$

	T_0	T_1	S	M	L
$x_1 x_2$	−	+	+	+	+
$x_1 \vee x_2$	+	−	−	−	−
1	−	+	−	+	+

x_1	x_2	x_1x_2	f^*	$x_1 \vee x_2$	f^*
0	0	0	1	0	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	1	0
1	1	1	0	1	0

Заняття 5

№ 39 (а) Метод Квайна (склеювання)

$\bar{x}yz \vee \bar{x}\bar{y}z = \underbrace{\bar{x}z}_{k} \vee \bar{x}yz \vee \bar{x}\bar{y}z = \bar{x}z \vee \bar{x}\bar{y}z = \bar{x}z$

$ku \vee k\bar{u} = k \vee ku \vee k\bar{u} = ku \vee k = k$ метод Квайна склеювання

№39(б) $ku \vee k = k$ поглинання

$xyz \vee xy\bar{z} \vee \bar{x}yz \vee \bar{x}y\bar{z}$

№39(в)

$xy\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee x\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}yz \vee \bar{x}\bar{y}z =$

$xyz \quad x\bar{y}z \quad x\bar{y}\bar{z} \quad \bar{x}yz \quad \bar{x}y\bar{z}$

$= x\bar{z} \vee y\bar{z} \vee x\bar{y} \vee \bar{x}z$

$f_1 = __ \vee __ \vee __$

$f_2 = __ \vee __ \vee __$

№40 (33) метод Мак-Класкі

в) $xy\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee x\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}yz \vee \bar{x}\bar{y}z$

110 101 100 011 001

100
001
110
101
011

1-0
10-
-01
0-1

xyz

$\rightarrow x\bar{z} \vee x\bar{y} \vee \bar{y}z \vee \bar{x}z$

	$xy\bar z$	$x\bar y z$	$x\bar y\bar z$	$\bar x y z$	$\bar x\bar y z$
$x\bar z$	*		*		
$x\bar y$		*	*		
$y z$		*			
$\bar y z$				*	*

метод Петрика

$A(B\cup C)\quad (A\cup B)\cap(C\cup D) = (A\cup B)D = (B\cup C)\cdot A\cdot D =$

$= ABD \cup ADC$

$A(A\cup B) = \underline{A\cup AB} = A$

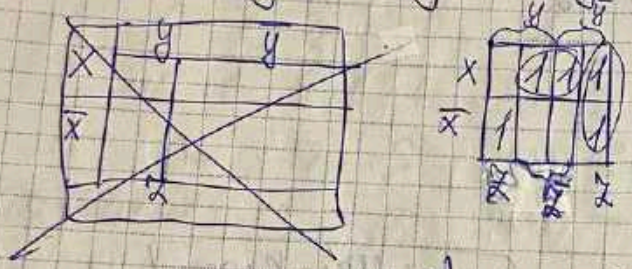
$f_1 = xz \vee x\bar y \vee xz$

$f_2 = x\bar z \vee xz \vee \bar y z$

№41 (в)

метод Карно

$xy\bar z \vee xyz \vee x\bar y\bar z \vee \bar x y z \vee \bar x\bar y z$



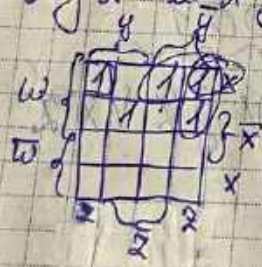
$f_1 = x\bar z \vee \bar y\bar z \vee \bar x z$

$f_2 = x\bar z \vee \bar y z \vee \bar x z$

№42 а найти СДНФ-? метод Мак-Класки

знайти всі min ДНФ

$\omega xyz \vee \omega x\bar y z \vee \omega x\bar y\bar z \vee \omega\bar x y\bar z \vee \omega\bar x y z$



$f = \omega\bar x\bar y\bar z \vee \omega x z \vee \omega x\bar y \vee \omega\bar x z$

Домашня робота

№39

г) $xyz \vee x\bar{y}z \vee x\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}yz \vee \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z} =$

$= xz \vee yz \vee xy \vee \bar{y}z \vee x \vee y = xz \vee yz \vee xy \vee x \vee y \vee \bar{y}z$

ж) $N_f = \{(000), (010), (011), (100)\}$

$N_f = \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}yz \vee x\bar{y}\bar{z} =$

$= \bar{x}\bar{z} \vee \bar{x}y \vee \bar{y}\bar{z}$

	$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$	$\bar{x}y\bar{z}$	$\bar{x}yz$	$x\bar{y}\bar{z}$
$\bar{x}\bar{z}$	*	*		
$\bar{x}y$		*	*	
$\bar{y}\bar{z}$	*			*

$f(N) = \bar{x}y \vee \bar{y}\bar{z}$

д) $N_f = \{(000), (001), (011), (100), (111)\}$

$N_f = \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}yz \vee x\bar{y}\bar{z} \vee xyz =$

$= \cancel{\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}y \vee \bar{y}z \vee yz = \bar{y}z \vee \bar{x}y}$

$= \bar{x}\bar{y} \vee \bar{y}\bar{z} \vee yz \vee \bar{x}z$

	$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$	$\bar{x}\bar{y}z$	$\bar{x}yz$	$x\bar{y}\bar{z}$	xyz
$\bar{x}\bar{y}$	*	*			
$\bar{y}\bar{z}$	*			*	
yz			*		*
$\bar{x}z$		*	*		

$f(N) = \bar{y}\bar{z} \vee yz =$

$= 0$

$\cancel{f(N) = \bar{x}\bar{y} \vee yz \vee \bar{y}\bar{z} \vee yz}$

$\cancel{= \bar{x}\bar{y} \vee \bar{y}\bar{z} \vee yz =}$

е) $N(f) = \{(001), (011), (101), (110)\}$

$N_f = \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}yz \vee x\bar{y}z \vee xy\bar{z} =$

$= \bar{y}z$

	$\bar{x}\bar{y}z$	$\bar{x}yz$	$x\bar{y}z$	$xy\bar{z}$
$\bar{y}z$	*		*	

$f(N) = \bar{y}z \vee \bar{y}z = \bar{y}z$

е) $N_f = \{(001), (011), (100), (110)\}$

$N_f = \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}yz \vee x\bar{y}\bar{z} \vee xy\bar{z} = 0$

ж) $N_f = \{(000), (010), (011), (100)\}$

$N_f = \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}yz \vee \bar{x}yz \vee x\bar{y}\bar{z} =$

$= x\bar{z} \vee \bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}y = \bar{x} \vee \bar{y}\bar{z} \vee x = \bar{x}\bar{z} \vee y\bar{z}$

	$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$	$\bar{x}y\bar{z}$	$\bar{x}yz$	$x\bar{y}\bar{z}$
$\bar{x}\bar{z}$	*	*	*	
$\bar{y}\bar{z}$	*			*

$f(x) = \bar{x} \vee x\bar{y} = \bar{x}z \vee x\bar{y}$

№40(2)

$xyz \vee x\bar{y}z \vee x\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}yz \vee \bar{x}y\bar{z} \vee x\bar{y}\bar{z}$

000
010
100
011
101
111

$\rightarrow$

0-0
-00
01-
10-
-11
1-1

СДНФ $= \bar{x}\bar{z} \vee y\bar{z} \vee \bar{x}y \vee x\bar{y} \vee yz \vee xz$

д) $N_f = \{(000), (001), (011), (100), (111)\}$

000
001
100
011
111

$\rightarrow$

00-
-00
0-1
-11

СДНФ $= \bar{x}\bar{y} \vee y\bar{z} \vee \bar{x}z \vee yz$

е) $N_f = \{(001), (011), (100), (110)\}$

001
100
011
110

$\rightarrow$

1-0
10-
-01
0-1

0-1
0-1
00-
11-
-00
-11
1-0
1-0

$\bar{x}z \vee xz \vee x\bar{y} \vee y\bar{z} \vee xy \vee \bar{y}z \vee x\bar{z} =$

$\vee x\bar{y}z \vee x\bar{z} =$

СДНФ $= xz \vee x\bar{y} \vee y\bar{z} \vee xz$

СДНФ $= 1$

е) $N_f = \{(001), (011), (100), (110)\}$

001
011
110
101

01
01

$\bar{x}z \vee \bar{y}z$

СДНФ $= \bar{x}z \vee \bar{y}z$

ж) $N_f = \{(000), (010), (011), (100)\}$

000
100
010
111

00
00
11
00
11
01
01

СДНФ $= \bar{y}\bar{z} \vee \bar{y}z \vee yz \vee \bar{x}y = \bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}y$

Заняття 6.

№55 Знайти множини, перелічивши їх елем.

а) $\{x \mid x$ – дійсне число, $x^2 = 1\}$

$A = \{-1; 1\}$

в) $\{x \mid x$ – квадр. цілого числа, $x < 100\}$

$A = \{0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81\}$

№56

а) $\{0, 3, 6, 9, 12\}$ Зазначити спільну власт. елем.

$\{x \mid x = 3k, k = 0, 1, 4\}$

б) $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

$\{x \mid x \in \mathbb{Z}, -3 \le x \le 3\}$

№57 Визн., які з множин є підмножинами

ВС A, $C \subset A$, $C \subset D$

$A = \{2, 4, 6\}$
$B = \{2, 6\}$
$C = \{4, 6\}$
$D = \{4, 6, 8\}$

№58 визн., які вирази правильні

$x \in \{x\}$ – так

$\emptyset \subset \{x\}$ – так

$\emptyset \in \{x\}$ – ні

№62. Знайти булеан

а) $\{a\} = A$

$P(A) = 2^A$

$|P(A)| = 2^{|A|}$

$P(A) = \{\emptyset, \{a\}\}$

в) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} = A$; $P(A) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset\}, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$

$|P(A)| = 2^2 = 4$

№64 визн., чи є булеаном

б) $\{\emptyset, \{a\}\} = P(A)$

$A = \{a\}$

г) $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\} = P(A)$

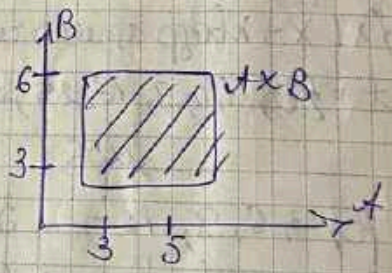
$A = \{a, b\}$

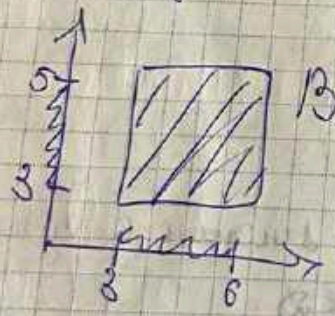
зобраз. декарт. добуток №70.

а) $A \times B$; $B \times A$

$A = \{x \mid x \in \mathbb{R},\ 3 \le x \le 5\}$

$B = \{y \mid y \in \mathbb{R},\ 3 \le y \le 6\}$

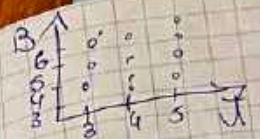


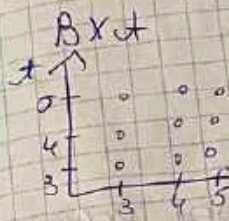


б) $|A \times B| = |A| \cdot |B|$

$A = \{x \mid x \in \mathbb{Z},\ 3 \le x \le 5\}$

$B = \{y \mid y \in \mathbb{Z},\ 3 \le y \le 6\}$





$A = \{1, 2,$

$A \cap B =$

$A \cup B$

$B \setminus A =$

$A = \{$

$B =$

$A \times B$

$A \setminus B =$

$\Rightarrow x \in A$

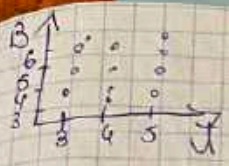
$x \in A$

$\Leftarrow x \in$

$=$

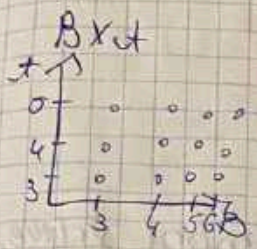
giap

а) A



$|A\times B| = 3\cdot 4 = 12$

$A\times B = \{(3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6)\}$



$|B\times A| = 4\cdot 3 = 12$

$B\times A = \{(3,3), (3,4), (3,5), (4,3), (4,4), (4,5), (5,3), (5,4), (5,5), (6,3), (6,4), (6,5)\}$

№73.

$A = \{1,2,3,4,5\}$, $B = \{0,3,6\}$ $\quad A\cap B - ?$

$A\cap B = \{3\}$ $\quad A\cup B - ?$

$A\cup B = \{0,1,2,3,4,5,6\}$ $\quad A\setminus B - ?$

$B\setminus A = \{0,6\}$ $\quad B\setminus A - ?$

№67. декарт. добуток – ?

A = мн. ~~всех~~ маг. курсів

B = мн. ~~всех~~ викл.

$A\times B = \{(a,b) \mid a\in A, b\in B\}$
(курс, викладач)

№76. Довести $A\setminus B = A\cap\overline{B}$

$A\setminus B = A\cap\overline{B}$; 1) $A\setminus B \subset A\cap\overline{B}$
2) $A\cap\overline{B}\subset A\setminus B$

$\Rightarrow x\in A\setminus B$ тоді

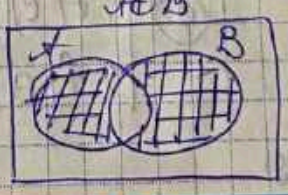
$x\in A$ і $x\notin B \Rightarrow x\in A$ і $x\in\overline{B} \Rightarrow x\in A\cap\overline{B}$

$\Leftarrow x\in A\cap\overline{B}$ тоді $x\in A$ і $x\in\overline{B} \Rightarrow x\in A$ і $x\notin B \Rightarrow$

$\Rightarrow x\in A\setminus B$

№81.

діаграма Венна мн. $A\oplus B$



симетр. різниця

а) $A\oplus B = (A\cup B)\setminus(A\cap B)$

x	y	z	$\bar{x}$	$\bar{z}$	$(x \sim y)$	$(\bar{x} \vee y)$	$x\bar{z}$	$(\bar{x} \vee y) \vee x\bar{z}$	$\overline{(x \vee y) \vee x\bar{z}}$	$\overline{(\bar{x} \vee y) \vee x\bar{z}} \downarrow (x \sim y)$
0	0	0	1	1	1	1	0	1	0	0
0	0	1	1	0	1	1	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1
0	1	1	1	0	0	1	0	1	0	1
1	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1
1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0
1	1	0	0	1	1	1	1	1	0	1
1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0

B

C

г) $(((x|y) \downarrow z)|y) \downarrow z$

x	y	z	$(x\|y)$	$(x\|y) \downarrow z$	$((x\|y) \downarrow z)\|y$	$(((x\|y) \downarrow z)\|y) \downarrow z$
0	0	0	1	0	1	0
0	0	1	1	0	1	0
0	1	0	1	0	1	0
0	1	1	1	0	1	0
1	0	0	1	0	1	0
1	0	1	1	0	1	0
1	1	0	0	1	0	1
1	1	1	0	0	1	0

№5.

б) $F = xy \oplus xz \oplus yz$

$G = xy\bar{z} \vee xz \vee yz$

F:

x	y	z
0	0	0
0	0	1
0	1	0
0	1	1
1	0	0
1	0	1
1	1	0
1	1	1

G:

x	y	z
0	0	0
0	0	1
0	1	0
0	1	1
1	0	0
1	0	1
1	1	0
1	1	1

$G = xy\bar{z}$

$= (xy\bar{z} \oplus$

$= xy\bar{z} \oplus$

$= xy$

$= xz \oplus$

$(x \sim y)$

F.

x	y	z	xy	xz	yz	$xy \oplus xz$	$xy \oplus xz \oplus yz$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	1	0	1
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	0	0	1	1
1	1	1	1	1	1	0	1

G.

x	y	z	$\bar{z}$	xy	$xy\bar{z}$	xz	yz	$xy\bar{z} \vee xz$	$xy\bar{z} \vee xz \vee yz$
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	0	1	0	1
1	0	0	1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0	0	1	1
1	1	1	0	1	0	1	1	1	1

$G = xy\bar{z} \vee xz \vee yz = (xy\bar{z} \oplus xz \oplus \underbrace{xy\bar{z}\, xz}_{0}) \vee yz =$

$= (xy\bar{z} \oplus xz)\, yz = xy\bar{z} \oplus xz \oplus yz \oplus (xy\bar{z} \oplus xz)\, yz =$

$= xy\bar{z} \oplus xz \oplus yz \oplus xy\bar{z}\, yz \oplus xz\, yz =$

$= xy\bar{z} \oplus xz \oplus yz \oplus xy = xz \oplus yz \oplus xy(\bar{z} \oplus z) =$

$= xz \oplus yz \oplus xy$

Заняття 2.

№4(б)

$f(\tilde{x}^3) = (00110011)$ фіктивна змінна?

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

x_2	x_3	$f(0, x_2, x_3)$	$f(1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	1	1

x_1 - фіктивна

x_1	x_3	$f(x_1, 0, x_3)$	$f(x_1, 1, x_3)$
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	0	1

x_2 - не фіктивна

x_1	x_2	$f(x_1, x_2, 0)$	$f(x_1, x_2, 1)$
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	1	1
1	1	1	1

x_3 - фіктивна

№7(б). Що і подано вектор. Знайти вектор. подання двоїст. ф-ї

$\tilde{y}_f = (00101100)$

x_1	x_2	x_3	f	$\tilde{y}_f$	$\tilde{y}_f^*$
0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	1
0	1	0	1	1	0
0	1	1	0	0	1
1	0	0	1	1	0
1	0	1	1	1	0
1	1	0	0	0	1
1	1	1	0	0	1

x_1	x_2	$x_1 \vee x_2$
0	0	0
1	0	1
0	1	1
1	1	1

$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	$\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

$\tilde{y}_f^* = (11001011)$

1) заперечити
2) навпаки написати

№6(а) за принц. двоїстості побуд. ф-лу,

$f = \overset{x \vee y}{xy} \vee y\bar{z} \vee x\bar{t} \vee \bar{z}t$ яка подає ф-ю, двоїст. до f

$f^* = (x \vee y) \wedge (y \vee \bar{z}) \wedge (x \vee \bar{t}) \wedge (\bar{z} \vee \bar{t})$

№9(а)

Задано ф-лу в алгебрі Жегалкіна. Побудувати тотожну ф-лу в алг. Буля.

алг. Буля: $\neg, \wedge, \vee$

алг. Жегалкіна: $\wedge \oplus$

$x \oplus y = \bar{x}y \vee x\bar{y}$

$x \oplus 1 = \bar{x}$

$x \vee y = x \oplus y \oplus xy$

$x \oplus x = 0$

$(x \oplus 1)(y \oplus 1) \oplus (xy \oplus 1) =$

$= \bar{x}\bar{y} \oplus \bar{x}y = (\overline{\overline{x \vee y}}) \cdot \bar{x}y \vee (\overline{\overline{x \vee y}}) \cdot \overline{\bar{x}y} =$

$= (x \vee y)\,\bar{x}y \vee (\overline{\bar{x} \vee y})\,xy = (x \vee y)(\bar{x} \vee \bar{y}) \vee \underbrace{(\bar{x} \cdot \bar{y})xy}_{0} =$

$= \underbrace{\bar{x} \cdot x}_{0} \vee y\bar{x} \vee \underbrace{y\bar{y}}_{0} \vee \bar{y}x \vee \bar{x}y \vee x\bar{y}$

№10(а) задано в б., побуд. в ж.

$xy \vee \bar{x}\bar{z} = xy \oplus \bar{x}\bar{z} \oplus \underbrace{xy\bar{x}\bar{z}}_{0} = xy \oplus \bar{x}\bar{z}$

Дз: №~~10б~~; ~~9б,в~~; ~~4 а,в~~; ~~7 а,в; 6б~~

Домашня робота

№10(б)

$(x \vee y)(\bar{x} \vee z) = (x \oplus y \oplus xy)(\bar{x} \oplus z \oplus \bar{x}z) =$

$= \underbrace{x\bar{x}}_{0} \oplus xz \oplus \underbrace{x\bar{x}z}_{0} \oplus y\bar{x} \oplus yz \oplus y\bar{x}z \oplus \underbrace{xy\bar{x}}_{0} \oplus$

$\oplus xyz \oplus \underbrace{xy\bar{x}z}_{0} = xz \oplus y\bar{x} \oplus yz \oplus y\bar{x}z \oplus$

$\oplus xyz = xz \oplus y\bar{x} \oplus yz\underbrace{(\bar{x} \oplus x)}_{1} = xz \oplus y\bar{x} \oplus \underbrace{yz \oplus yz}_{0}$

$= xz + y\bar{x}$

№6(б)

$f = x_1 \vee y(z \vee t \vee 0) \vee xyt$

$f^* = x_1 \wedge y(z \vee t \wedge 0) \wedge xyt$

№7(а,в)

а) $\tilde{y}_f = (11110000)$

x_1	x_2	x_3	f	$\tilde{y}_f$	$\bar{\tilde{y}}_f$	$\tilde{y}_f^*$
0	0	0	1	1	0	1
0	0	1	1	1	0	1
0	1	0	1	1	0	1
0	1	1	1	1	0	1
1	0	0	0	0	1	0
1	0	1	0	0	1	0
1	1	0	0	0	1	0
1	1	1	0	0	1	0

x_1	x_2	$x_1 \vee x_2$
0	0	0
1	0	1
0	1	1
1	1	1

$\tilde{y}_f^* = (11110000)$

x_1	x_2	$x_1 \bar{\vee} x_2$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

в) $\tilde{y}_f = (00111100)$

x_1	x_2	x_3	$\tilde{y}_f$	$\bar{\tilde{y}}_f$	$\tilde{y}_f^*$
0	0	0	0	1	1
0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	0	0
1	0	0	1	0	0
1	0	1	1	0	0
1	1	0	1	0	0
1	1	1	0	1	1

$\tilde{y}_f^* = (11000011)$

№4(а,в)

а) $f(\tilde{x}^3) = (11110000)$

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

x_2	x_3	$f(0, x_2, x_3)$	$f(1, x_2, x_3)$
0	0	1	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	0

x_1 –

x_1	x_3	$f(x_1, 0, x_3)$	$f(x_1, 1, x_3)$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	0	0

x_2 –

x_1	x_2	$f(x_1, x_2, 0)$	$f(x_1, x_2, 1)$
0	0	1	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	1	0	0

x_3 –

б) $f(\tilde{x}^3) = (11000011)$

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

x_2	x_3	$f(0, x_2, x_3)$	$f(1, x_2, x_3)$
0	0	1	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	1	0	1

x_1 –

x_1	x_3	$f(x_1, 0, x_3)$	$f(x_1, 1, x_3)$
0	0	1	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	1	0	1

x_2 –

x_1	x_2	$f(x_1, x_2, 0)$	$f(x_1, x_2, 1)$
0	0	1	1
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	1	1

x_3 –

№9 (б, в).

б) $x \oplus xy \oplus xyz = x \oplus xy \oplus xy \vee z =$

$= x \oplus xy \oplus xyz = \bar{x}xy \vee x\bar{x}y \oplus xyz =$

$= x\bar{x}y \oplus xyz = 0 \oplus xyz = \bar{y} \oplus xyz =$

$= \bar{y}xyz \vee \bar{y}\bar{x}yz = yxyz \vee \bar{y}\bar{x}yz$

в) $(x \oplus y)(x \oplus z) = (\bar{x}y \vee x\bar{y})(\bar{x}z \vee x\bar{z}) =$

$= ((\bar{x} \vee x\bar{y}) \vee (y \vee x\bar{y}))(\bar{x}z \vee x\bar{z}) =$

$= xy \wedge \bar{x}z \vee \bar{x}y \wedge xz \vee x\bar{y} \wedge \bar{x}z \vee x\bar{y} \wedge x\bar{z} =$

$= \bar{x}y \wedge \bar{x}z \vee y \wedge z \vee \bar{y} \wedge z \vee x\bar{y} \wedge x\bar{z} = \bar{x}y \wedge z \vee \bar{y} \wedge z$

Заняття 3.

№11 (а)

$f(\tilde{x}^3) = (0\,1\,1\,0\,1\,1\,0\,0)$ ДДНФ-? конституента = 1

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

$\bar{x}_1\bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3$

№12 (а) висфіст. розкрити кожн., перейти від ДНФ до ДДНФ

$f(\tilde{x}^3) = x_1 \vee \bar{x}_2 x_3 = x_1 \cdot 1 \vee \bar{x}_2 x_3 \cdot 1 = x_1(x_2 \vee \bar{x}_2) \vee \bar{x}_2 x_3 \cdot (x_1 \vee \bar{x}_1) =$

$= x_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_2 \vee x_2 x_3 x_1 \vee x_2 x_3 \bar{x}_1 = x_1 x_2 x_3 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 \vee$

$\vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_2 x_3 x_1 \vee \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_1 = \ldots$

№13 (а) ДДНФ-?

$f(\tilde{x}^3) = (x_1 \vee x_2 \bar{x}_3)(x_1 \vee x_3) = x_1 x_1 \vee x_1 x_3 \vee x_2 \bar{x}_3 x_1 \vee x_2 \bar{x}_3 x_3 =$

$= x_1 \vee x_1 x_3 \vee x_2 \bar{x}_3 x_1 = x_1(x_2 \vee \bar{x}_2) \vee x_1 x_3 (x_2 \vee \bar{x}_2) \vee x_2 x_3 x_1 =$

$= x_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_2 \vee x_1 x_3 x_2 \vee x_1 x_3 \bar{x}_2 \vee x_2 \bar{x}_3 x_1 =$

$= x_1 x_2 (x_3 \vee \bar{x}_3) \vee x_1 \bar{x}_2 (x_3 \vee \bar{x}_3) \vee x_1 x_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 =$

$= x_1 x_2 x_3 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_1 x_2 x_3 \vee x_1 x_2 x_3 \vee$

$\vee x_1 x_2 \bar{x}_3 = x_1 x_2 x_3 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$

№14(а)

$f(\tilde{x}^3) = (01101100)$ ДнНФ-? конст. = 0

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

$(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)(x_1 \vee x_2 \vee x_3)$

№15(а)

$\boxed{xy \vee z = (x \vee z)(y \vee z)}$ дистр. закон

ДнНФ → КнНФ -?

$f(\tilde{x}^3) = x_1 \vee \bar{x}_2 x_3 = (x_1 \vee \bar{x}_2)(x_1 \vee x_3)$ КнНФ

№16(а) $\boxed{\text{КнНФ} \to \text{ДнНФ} - ?}$

$(x_1 \vee \bar{x}_2)(x_1 \vee x_3) = (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee 0)(x_1 \vee x_3 \vee 0) =$

$= (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3 \wedge \bar{x}_3)(x_1 \vee x_3 \vee x_2 \wedge \bar{x}_2) =$

$= ((x_1 \vee x_2) \vee x_3)((x_1 \vee x_2) \vee \bar{x}_3)((x_1 \vee x_3) \vee x_2)((x_1 \vee x_3) \vee \bar{x}_2)$

$= (x_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)(x_1 \vee x_3 \vee x_2)(x_1 \vee x_3 \vee \bar{x}_2) =$

$= (x_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)$

№18(а).

$P(\tilde{x}^n) = k_1 \oplus k_2 \oplus \ldots \oplus k_n$ полином Жегалкина

$P(x,y) = c_0 \oplus c_1 x \oplus c_2 y \oplus c_3 xy$

$F(\tilde{x}^3) = (1\,1\,1\,1\,1\,0\,0\,0)$

$P(x,y,z) = c_0 \oplus c_1 x \oplus c_2 y \oplus c_3 z \oplus c_4 xy \oplus c_5 xz \oplus c_6 yz \oplus c_7 xyz =$

x	y	z	f	
0	0	0	1	$= c_0$
0	0	1	1	$= c_0 \oplus c_3 \to c_3 = 0$
0	1	0	1	$= c_0 \oplus c_2 \to c_2 = 0$
0	1	1	1	$= c_0 \oplus c_2 \oplus c_3 \oplus c_6 \to c_6 = 0$
1	0	0	1	$= c_0 \oplus c_1 \to c_1 = 0$
1	0	1	0	$= c_0 \oplus c_1 \oplus c_3 \oplus c_5 \to c_5 = 1$
1	1	0	0	$= c_0 \oplus c_1 \oplus c_2 \oplus c_4 \to c_4 = 1$
1	1	1	0	$= c_0 \oplus c_1 \oplus c_2 \oplus c_3 \oplus c_4 \oplus c_5 \oplus c_6 \oplus c_7 \to c_7 = 1$

$P(x,y,z) = 1 \oplus xy \oplus xz \oplus xyz$

№19(а) побуд. Полином Жегалкіна

$f(\tilde{x}^3) = (x_1 | x_2) \downarrow x_3 =$

$= \overline{x_1 x_2} \downarrow x_3 = \overline{\overline{x_1 x_2} \vee \overline{x_3}} =$

$= x_1 x_2 1 \overline{x_3} = x_1 x_2 \overline{x_3} = x_1 x_2 (x_3 \oplus 1) =$

$= x_1 x_2 x_3 \oplus x_1 x_2$

$x | y = \overline{xy}$ штрих Шеффера

$x \downarrow y = \overline{x \vee y}$ стрілка Пірса

$x \to y = \overline{x} \vee y$ імплікація

№20(а) Знайти фіктивні змінні фої

$f(\tilde{x}^2) = (x_1 \oplus x_2)(x_1 \downarrow x_2) = (x_1 \oplus x_2)(\overline{x_1 \vee x_2}) =$

$= (x_1 \oplus x_2)(\overline{x_1}\,\overline{x_2}) = (x_1 \oplus x_2)\,\overline{x_1}\,\overline{x_2} = \underbrace{x_1 \overline{x_1} x_2}_{0} \oplus \underbrace{x_1 x_2 \overline{x_2}}_{0} =$

$= 0$ всі змінні фіктивні

Д/з: №~~11 а,б~~; ~~12 а,б~~; ~~13 а,б~~; ~~15 а,б~~; ~~16 а,б~~; ~~18 а,б~~; ~~19 а,б~~; ~~20 а,б~~; ~~21 а,б~~

а) $f(\tilde{x}^3)$

x_1	x_2
0	0
0	0
0	1
0	1
1	0
1	0
1	1
1	1

в) $f(\tilde{x}^3)$

x_1	x_2	x_3	x
0	0	0	
0	0	1	
0	1	0	
0	1	1	
1	0	0	
1	0	1	
1	1	0	
1	1	1	

б) x_1

0
0
0
0
1
1
1
1

в) $f(\tilde{x}^3)$

x_1	x_2
0	0
0	0
0	1
0	1
1	0
1	0
1	1
1	1

Домашня робота

№11

а) $f(\tilde{x}^3) = (10001110)$ const = 2

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

$\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1x_2\bar{x}_3$

ДДНФ

б) $f(\tilde{x}^3) = (x_1 \oplus x_2) \to x_2x_3$

x_1	x_2	x_3	x_2x_3	$x_1 \oplus x_2$	$(x_1 \oplus x_2) \to x_2x_3$
0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	1
0	1	0	0	1	0
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0
1	0	1	0	1	1
1	1	0	0	0	0
1	1	1	1	0	1

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

$\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2x_3 \vee$
$\vee x_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1x_2x_3$

в)

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

$(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_1 \vee x_2 \vee x_3)$

const = 0

г) $f(\tilde{x}^3) = (x_1 \oplus x_2) \to x_1x_2$

ДКНФ

$\bar{x}_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1x_2\bar{x}_3$

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

№12.

а) $f(\tilde{x}^3) = x_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 x_2$

x_1	x_2	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	$x_1\bar{x}_2$	$\bar{x}_1 x_2$	$x_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 x_2$
0	0	1	1	0	0	0
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	1	0	1
1	1	0	0	0	0	0

x_1	x_2	f
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

ДДНФ

$\bar{x}_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_2$

в) $f(\tilde{x}^3) = x_1 \vee \bar{x}_1 x_2 \vee x_2 x_3$

x_1	x_2	x_3	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_1 x_2$	$x_2 x_3$	$x_1 \vee \bar{x}_1 x_2$	$x_1 \vee \bar{x}_1 x_2 \vee x_2 x_3$
0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	1	0	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1
1	0	1	0	0	0	1	1
1	1	0	0	0	0	1	1
1	1	1	0	0	1	1	1

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 x_2 x_3$

г) $f(\tilde{x}^3) = \bar{x}_1 x_2 \vee x_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_3$

x_1	x_2	x_3	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_3$	$\bar{x}_1 x_2$	$x_2 \bar{x}_3$	$\bar{x}_1 \bar{x}_3$	$\bar{x}_1 x_2 \vee x_2 \bar{x}_3$	$\bar{x}_1 x_2 \vee x_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_3$
0	0	0	1	1	0	0	1	0	0
0	0	1	1	0	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	1	1	0	1	0	0	1	1
1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	1	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

$\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3$

№15.

а) $f(\tilde{x}^3) = x_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 x_2 \equiv$ ДНФ $\to$ КНФ

$= \bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee x_1 x_2$

б) $f(\tilde{x}^3) = x_1 \vee \bar{x}_1 x_2 \vee x_2 x_3 = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2 x_3$

г) $f(\tilde{x}^3) = \bar{x}_1 x_2 \vee x_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_3 = \bar{x}_1\bar{x}_2 x_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee$

$\vee\ x_1\bar{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 x_3$

№13.

а) $f(\tilde{x}^3) = (x_1 \vee \overline{x_2 x_3})(x_1 x_2 \vee \overline{x_1 x_3})$

x_1	x_2	x_3	x_2x_3	$\overline{x_2x_3}$	$x_1 \vee \overline{x_2x_3}$	x_1x_2	x_1x_3	$\overline{x_1x_3}$	$x_1x_2 \vee \overline{x_1x_3}$	АВ
0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	1
0	0	1	0	1	1	0	0	1	1	1
0	1	0	1	0	0	0	0	1	1	0
0	1	1	1	0	1	0	0	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0
1	0	1	0	1	1	1	0	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1	0	1	1
1	1	1	1	0	1	1	1			

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

$\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1 x_2\bar{x}_3 \vee x_1 x_2 x_3$

ДДНФ

№ 18

а) $f(\tilde{x}^3) = (00110100)$

x	y	z	f	
0	0	0	0	$= C_0$
0	0	1	0	$= C_0 \oplus C_3 \to C_3 = 0$
0	1	0	1	$= C_0 \oplus C_2 \to C_2 = 0$
1	0	0	1	$= C_0 \oplus C_2 \oplus C_3 \oplus C_6 \to C_6 = 0$
1	0	1	0	$= C_0 \oplus C_1 \to C_1 = 0$
1	1	0	1	$= C_0 \oplus C_1 \oplus C_3 \oplus C_5 \to C_5 = 1$
1	1	1	0	$= C_0 \oplus C_1 \oplus C_2 \oplus C_4 \to C_4 = 1$
				$= C_0 \oplus C_1 \oplus C_2 \oplus C_3 \oplus C_4 \oplus C_5 \oplus C_6 \oplus C_7 \to C_7 = 1$

$P(x,y,z) = 1 \oplus xy \oplus xz \oplus xyz$

в) $f(\tilde{x}^3) = (00111001)$

x	y	z	f	
0	0	0	0	$= C_0$
0	0	1	0	$= C_0 \oplus C_3 \to C_3 = 0$
0	1	0	1	$= C_0 \oplus C_2 \to C_2 = 0$
1	0	0	1	$= C_0 \oplus C_2 \oplus C_3 \oplus C_6 \to C_6 = 0$
1	0	1	0	$= C_0 \oplus C_1 \to C_1 = 0$
1	1	0	0	$= C_0 + C_1 \oplus C_3 \oplus C_5 \to C_5 = 1$
1	1	1	1	$= C_0 + C_1 \oplus C_2 \oplus C_4 \to C_4 = 1$
				$= C_0 \oplus C_1 \oplus C_2 \oplus C_3 \oplus C_4 \oplus C_5 \oplus C_6 \oplus C_7 \to C_7 = 1$

$P(x,y,z) = 1 \oplus xy \oplus xz \oplus xyz$

№ 16

а) $f(\tilde{x}^3) = x_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 x_2$ КНФ-? ДКНФ-?

x_1	x_2	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	$x_1\bar{x}_2$	$\bar{x}_1 x_2$	$x_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 x_2$
0	0	1	1	0	0	$\boxed{0}$
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	1	0	1
1	1	0	0	0	0	$\boxed{0}$

x_1	x_2	f
0	0	$\boxed{0}$
0	1	1
1	0	1
1	1	$\boxed{0}$

$\bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_1 x_2$

в) $f(\tilde{x}^3) = x_1 \vee \bar{x}_1 x_2 \vee x_2 x_3$

x_1	x_2	x_3	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_1 x_2$	$x_2 x_3$	$x_1 \vee \bar{x}_1 x_2$	$x_1 \vee \bar{x}_1 x_2 \vee x_2 x_3$
0	0	0	1	0	0	0	$\boxed{0}$
0	0	1	1	0	0	0	$\boxed{0}$
0	1	0	1	1	0	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1
1	0	1	0	0	0	1	1
1	1	0	0	0	0	1	1
1	1	1	0	0	1	1	1

$\bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3$

№ 19

б) $f(\tilde{x}^3) = (x_1 \to x_2)(x_2 \vee x_3) = (\bar{x}_1 \vee x_2)(\overline{x_2 \vee x_3}) =$

$= (\bar{x}_1 \vee x_2)(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) = (x_1 \oplus 1 \vee x_2)((x_2 \oplus 1) \vee (x_3 \oplus 1)) =$

$= (x_1 \oplus 1 \oplus x_2 \oplus (x_1 \oplus 1) x_2)(x_2 \oplus 1 \vee x_3 \oplus 1) =$

$= (x_1 \oplus 1 \oplus x_2 \oplus x_1 x_2 \oplus x_2)(x_2 \oplus 1 \vee x_3 \oplus 1) =$

$= (x_1 \oplus 1 \oplus x_1 x_2)(x_2 \oplus 1 \vee x_3 \oplus 1)$

в) $f(\tilde{x}^3) = ((x_1 \to x_2) \vee \bar{x}_3) \mid x_1 =$

$= (\overline{(\bar{x}_1 \vee x_2) \vee x_3}) \mid x_1 = (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3) \mid x_1 =$

$= (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3) x_1 = (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) x_1 =$

$= x_1 x_1 \vee \bar{x}_2 x_1 \vee \bar{x}_3 x_1 = x_1 \vee \bar{x}_2 x_1 \vee \bar{x}_3 x_1 =$

$= x_1 \vee (x_2 \oplus 1) x_1 \vee (x_3 \oplus 1) x_1 = x_1 \vee x_2 x_1 \oplus x_1 \vee x_3 x_1 \oplus x_1 =$

$= x_2 x_1 \vee x_3 x_1 \oplus x_1 = x_2 x_1 \oplus x_3 x_1 \oplus x_2 x_1 x_3 x_1 \oplus x_1 =$

$= x_1 \oplus 1$

$\wedge\ 11 = 1$	$\vee\ 00 = 0$	$\rightarrow\ 10 = 0$
$\leftrightarrow\ \begin{matrix}11\\00\end{matrix} = 1$	$\oplus\ \begin{matrix}00\\11\end{matrix} = 0$	$\sim\ \begin{matrix}00\\11\end{matrix} = 1$
$\uparrow\ 11 = 0$	$\downarrow\ 00 = 1$	

Кравець Ольга ПМО-11

(7) $f(\tilde{x}^3) = xy \vee xz$ ДКНФ-?

x	y	z	$\bar{x}$	xy	xz	$\bar{x}y \vee xz$
0	0	0	1	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0
0	1	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	0	1
1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	1	1
1	1	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	1	1

$f(\tilde{x}^3) = (\bar{x}y\bar{z})(\bar{x}y z)(xy\bar{z})(xy z)$

(10) $16 = 2^4$ $\quad M = 4$

$1024 = 2^{10}$ $\quad M_1 = 10$

$|4| - |10| = -6$

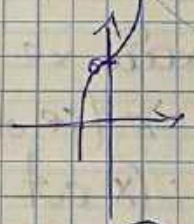
(4) $f(\tilde{x}^3) = (11000010)$

$P(x,y,z) = C_0 \oplus C_1 x \oplus C_2 y \oplus C_3 z \oplus C_4 xy \oplus C_5 xz \oplus C_6 yz \oplus C_7 xyz$

x	y	z	f	
0	0	0	1	$= C_0 \Rightarrow 1$
0	0	1	1	$= C_0 \oplus C_3 z \to C_3 = 0$
0	1	0	0	$= C_0 \oplus C_2 z \to C_2 = 1$
0	1	1	0	$= C_0 + C_2 y \oplus C_3 z \oplus C_6 yz \to C_6 = 1$
1	0	0	0	$= C_0 \oplus C_1 x \to C_1 = 1$
1	0	1	0	$= C_0 \oplus C_1 x \oplus C_3 z \oplus C_5 xz \to C_5 = 0$
1	1	0	1	$= C_0 \oplus C_1 x \oplus C_2 y \oplus C_4 xy \to C_4 = 0$
1	1	1	0	$= C_0 \oplus C_1 x \oplus C_2 y \oplus C_3 z \oplus C_4 xy \oplus C_5 xz \oplus C_6 yz \oplus C_7 xyz \to C_7 = 0$

$P(x,y,z) = 1 \oplus x \oplus yz \oplus y$

(2) $f(x) = z^3 + 5$



(c) (ін) (б)

$f(z_1) \neq f(z_2)$ при $z_1 \neq z_2$ (ін)

$f(x) = z$ (с)

(ін) та (с) $\Rightarrow$ (б)

(8) $f(\tilde{x}^3) = (10101101)$ СДНФ-?

000	0-0
010	10-
100	
101	1-1
111	

0-0, -00, 10-, 1-1

	000	010	100	101	111
0-0	*	*			
-00	*		*		
10-			*	*	
1-1				*	*

СДНФ: $f(\tilde{x}^3) = 0\text{-}0 \vee \text{-}00 \vee 1\text{-}1$

⑥ $Q = \{x \to y,\ x \to \bar{y}z\}$

$\bar{y} = \bar{y} \cdot y = \overline{y \vee y} = y \vee y$

$x \to y = \bar{x} \vee y$

$x \to \bar{y}z = \bar{x} \vee \bar{y}z = (\bar{x} \vee \bar{y})(\bar{x} \vee z) = (\overline{xy})(\bar{x} \vee z)$

$Q = \{(\bar{x} \vee y), (\overline{xy}), (\bar{x} \vee z)\}$

③ $\{a, \{b\}, \{a, b\}\}$

$\emptyset$; $\{a\}$, $\{b\}$, (a, b), $\{a\{b\}\}$, $\{a\{a, b\}\}$,
$\{\{b\}, \{a, b\}\}$, $\{a, \{b\}, a, \{a, b\}\}$
$\{b\}$

① $A(B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

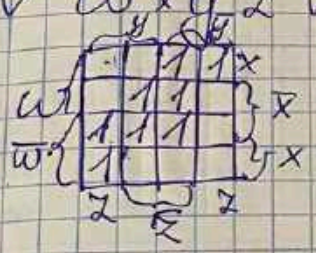
~~$A \setminus B = A \cap \bar{B} \Rightarrow x \in A \setminus B$ тоді $x \in A$ і $x \notin B \Rightarrow$~~
~~$\Rightarrow x \in A$ і $x \in \bar{B} \Rightarrow x \in A \cap \bar{B} \Leftarrow x \in A \cap \bar{B}$ тоді~~
~~$x \in A$ і $x \in \bar{B} \Rightarrow x \in A$ і $x \notin B \Rightarrow x \in A \setminus B$~~

$(A \setminus B) \cap (A \setminus C)$: Нехай $x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$, тоді
$x \in (A \setminus B)$ і $x \in (A \setminus C) \Rightarrow (x \in A$ або $x \notin B)$ і $(x \in A$ або $x \notin C) \Rightarrow$
$\Rightarrow (x \in A$ або $x \in \bar{B})$ і $(x \in A$ або $x \in \bar{C}) \Rightarrow$
$\Rightarrow (x \in A$ і $x \in B)$ або $(x \in A$ і $x \in \bar{A})$ або $(x \in A$ і $x \in \bar{A})$
або $(x \in \bar{C}$ і $x \in \bar{A}) \Rightarrow (x \in A$ і $x \in B)$ або $(x \in \overline{A \cap C})$
$\Rightarrow x \in (A \cup B)$ або $(x \notin A \cap C) \Rightarrow$ ~~$x \in (A \cup B) \setminus A \cap C$~~
$\Rightarrow x \in A(B \cup C)$

Дискретна математика (пр.)

9 $\bar{w}xyz, \bar{w}xyz, wxyz, wxy\bar{z},$
$w\bar{x}\bar{y}z, \bar{w}xyz, wxyz, \bar{w}xyz$

$f = \bar{w}xyz \vee \bar{w}xyz \vee wxyz \vee wxy\bar{z} \vee w\bar{x}\bar{y}z \vee$
$\vee \bar{w}xyz \vee wxyz \vee \bar{w}xyz$



Кравець Ольга ПМО-11 [2 варіант]

① $R = \{(x, y) : x = y^2\}$

р: $\exists (a, a) \in R$: $1 = 1^2$; $1 = 1 \Rightarrow (1, 1)$

не рф: $\nexists (a, a) \notin R$

не с: $\nexists$ $(a, b) \in R \Rightarrow \nexists (b, a) \in R$

антисим: $\exists (a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R$

асиметр: $\exists (a, b) \in R \Rightarrow \exists (b, a) \in R \Rightarrow$ що $a = b$

не т: $\nexists (a, b) \in R$ і $\nexists (b, c) \in R \Rightarrow \nexists (a, c) \in R$

② $\{1, 2, 3, 4\}$

Відношення еквівалентності: т, рефл, симетр

Віднош частков. порядку: рефл., т., антисиметр.

$R_1 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (1,2), (2,1), (4,4)\}$

$R_2 = \{(1,1), (1,4), (2,2), (2,3), (4,1), (4,4)\}$

$R_3 = \{(1,1), (1,3), (1,4), (2,2), (3,1), (3,3), (4,1), (4,4)\}$

R_1: р, с, т $\Rightarrow$ віднош. еквівал.

R_2: антисиметр., р, т. $\Rightarrow$ віднош. частк. порядку

R_3: р, с, т $\Rightarrow$ віднош. еквівал.

④ $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$, $n \geq 2$, $a_0 = 4$, $a_1 = 1$

$r^2 = 2r - 1$; $r^2 - 2r + 1 = 0$; $(r-1)^2 = 0$; $r = 1$

$a_n = B_1 (1)^n + B_2 \cdot n (1)^n$

$4 = B_1 (1)^0 + B_2\, 0 (1)^0 = B_1$

$1 = B_1 (1)^1 + B_2\, 1 (1)^1 = B_1 + B_2$

$\begin{cases} B_1 = 4 \\ B_1 + B_2 = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} B_1 = 4 \\ 4 + B_2 = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} B_1 = 4 \\ B_2 = -3 \end{cases}$

$a_n = 4(1)^n - 3n(1)^n$

③ класи еквівал. = розбиття

R_1 і R_3 - віднош. еквівал.

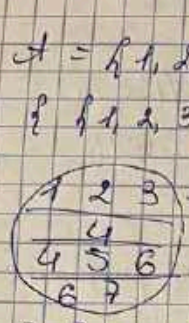
$R_1 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (1,2), (2,1), (4,4)\}$

$R_3 = \{(1,1), (1,3), (1,4), (2,2), (3,1), (3,3), (4,1), (4,4)\}$

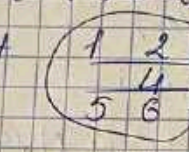
класи: $\{\{1, 3, 4\}, \{2\}\}$

⑤ $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

а) $\{\{1, 2, 3\}, \{4\}, \{4, 5, 6\}, \{6, 7\}\}$

A  – а – не є розбит. множ. A

б) $\{\{1, 2, 3\}, \{4\}, \{5, 6, 7\}\}$

A  – розбиття множ. A

$R = \{(1,1), (2,2), (3,3), (1,2), (2,1), (2,3), (3,2), (1,3), (3,1), (4,4), (5,5), (6,6), (7,7), (6,6), (6,5), (6,7), (7,6), (5,7), (7,5)\}$ – відош. еквівал.

⑥ $A = \{1, 2, 3\}$

$R = \{(1,2), (2,2), (3,1), (3,3)\}$

$S = \{(1,2), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2)\}$

$R^2 = R \circ R = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,2)\}$

$R \cup S = \{(1,2), (2,2), (3,1), (3,3), (2,3), (3,2)\}$

⑧ $1\underline{3}7654\underline{2}$:

1) 1423765

2) 1425637

(10) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 16$

$x_1, x_2 < 8$

$N = H_4^{16} = C_{19}^{16} = \frac{19!}{16!\,3!} = \frac{19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16!}{16! \cdot 3 \cdot 2} = 969$ (зал. к-сть розв)

$N(q_1) = H_4^{8} = C_{11}^{8} = \frac{11!}{8!\,3!} = 165$ $\quad x_1 \geq 8$

$N(q_2) = H_4^{8} = C_{11}^{8} = \frac{11!}{8!\,3!} = 165$ $\quad x_2 \geq 8$

$N(q_1, q_2) = H_4^{0} = \frac{4!}{1} = 24$

(9) I, II, III, IV, X

$P_5 \cdot P_6 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 86400$

(11) $x^7 y^8$

$(x-y)^{15}$

$C_{15}^{8} = \frac{15!}{8!\,7!} = 6435$

Кравець Ольга ТМО-11

Варіант 2

① $f(\tilde{x}^3) = \overline{x \vee y} \vee x z$

x	y	z	$x \vee y$	$\overline{x \vee y}$	xz	$\overline{x \vee y} \vee xz$
0	0	0	0	1	0	1
0	0	1	0	1	0	1
0	1	0	1	0	0	$\boxed{0}$
0	1	1	1	0	0	$\boxed{0}$
1	0	0	1	0	0	$\boxed{0}$
1	0	1	1	0	1	1
1	1	0	1	0	0	$\boxed{0}$
1	1	1	1	0	1	1

В: $f(\tilde{x}^3) = (\bar{x} y \bar{z})(\bar{x} y z)(x \bar{y} z)(x y \bar{z})$

② $f(\tilde{x}^3) = (00001111)$

x	y	z	$f(\tilde{x}^3)$	
0	0	0	0	$= c_0$
0	0	1	0	$= c_0 \oplus c_3 \to c_3 = 0$
0	1	0	0	$= c_0 \oplus c_2 \to c_2 = 0$
0	1	1	0	$= c_0 \oplus c_2 \oplus c_3 \oplus c_6 \to c_6 = 0$
1	0	0	1	$= c_0 \oplus c_1 \to c_1 = 0$
1	0	1	1	$= c_0 \oplus c_1 \oplus c_3 \oplus c_5 \to c_5 = 1$
1	1	0	1	$= c_0 \oplus c_1 \oplus c_2 \oplus c_4 \to c_4 = 1$
1	1	1	1	$= c_0 \oplus c_1 \oplus c_2 \oplus c_3 \oplus c_4 \oplus c_5 \oplus c_6 \oplus c_7 \to c_7 = 1$

$P(x, y, z) = 1 \oplus xy \oplus xz \oplus xyz$

⑨

	a	b	c	d
a	1	1	0	1
b	1	1	0	0
c	0	0	1	1
d	1	0	1	1

$R = \{(a,a), (a,b), (a,d), (b,a), (b,b), (c,c), (c,d), (d,a), (d,c), (d,d)\}$

Відношення еквівал. = тр, реф., сим.

R: рефл.: $(\forall a \in A) \Rightarrow (a,a) \in R$

симетр.: $\exists (a,b) \in R : (a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \in R$

транзит.: $\exists (a,b,c \in A) : (a,b) \in R$ і $(b,c) \in R \Rightarrow (a,c) \in R$

клас еквівал. = розбиття

(15) $x_1+x_2+x_3+x_4=12$

$x_1 \geq 1$

$x_4 \geq 4$

$H_n^r = C_{n+r-1}^r$

$C_{4+12-1}^{12} = C_{15}^{12} = \frac{15!}{12!\,3!} = \frac{\cancel{15}^{5}\cdot\cancel{14}^{7}\cdot 13\cdot\cancel{12!}}{\cancel{12!}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}} = 455$

$N = C_{15}^{12} = 455$

$N(q_1) = H_4^{11} = C_{14}^{11} = \frac{14!}{11!\,3!} = 364$

$N(q_4) = H_4^{8} = C_{11}^{8} = \frac{11!}{8!\,3!} = 165$

(7) $f(x) = x^3$

Ні, не ін., бо $x_1 = 2$, $x_2 = 3$; $2^3 = 3^3$, $8 \neq 27$

Так, сюр.: $\exists\, x^3 = -1$

Ні, не діюч., бо не ін.

(16) 36 карт, вийм. 4 карти

$P(A) = \frac{C_9^1 \cdot C_9^1 \cdot C_9^1 \cdot C_9^1}{C_{36}^4} = \frac{9\cdot 9\cdot 9\cdot 9}{58905} = \frac{6561}{58905} = \frac{729}{6545}$

$C_9^1 = \frac{9!}{8!\,1!} = \frac{9\cdot\cancel{8!}}{\cancel{8!}} = 9$

$C_{36}^4 = \frac{36!}{4!\,32!} = 58905$

В: $\frac{729}{6545}$

(4) $f(x^3) = (01011101)$

x	y	z	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

ДДНФ: $\bar{x}\bar{y}z \vee x\bar{y}z \vee xy\bar{z} \vee xyz$

СДНФ: $z \vee xy$

	001	011	100	101	111
10 –			✓	✓	
– 1	✓	✓		✓	✓

(19) 4563521

1) 4562135

2) 4562153

3) 4562315

(12) Так

(10) 5

$\wedge$ 11 = 1 resulta 0

$\vee$ 00 = 0 resulta 1

$\rightarrow$ 10 = 0 resulta 1

$\leftrightarrow$ 11, 00 = 1 resulta 0

$\downarrow$ 00 = 1 resulta 0

$|$ 11 = 0 resulta 1

$\oplus$ 00, 11 = 0 resulta 1

$\cap$ 11 = 1 resulta 0

$\cup$ 00 = 0 resulta 1

Заняття 1

$f(x_1 \dots x_2) \to \{0; 1\}$

$f(x_1; x_2) \to \quad 2^2 = 4$

$2^3 = 8$

x_1	x_2
0	0
1	1
0	1
1	0

$f(x_1; x_2; x_3; x_4); \; 2^4 = 16$

x_1	x_2	x_3
0	0	0
0	0	1
0	1	0
0	1	1
1	0	0
1	0	1
1	1	0
1	1	1

x	y	$\neg x$	$x \wedge y$	$x \vee y$	$x \to y$	$x \oplus y$	$x \sim y$
0	0	1	0	0	1	0	1
0	1	1	0	1	1	1	0
1	0	0	0	1	0	1	0
1	1	0	1	1	1	0	1

!

$1 \to 0 \Rightarrow 0$

№1 с.339 а) Для булевих ф-ій, заданих ф-ою, побудув. таблиці

$(x \to y) \oplus ((y \to z) \oplus (z \to x))$

$C \quad A \quad B$

x	y	z	$x \to y$	$y \to z$	$z \to x$	$A \oplus B$	$(A \oplus B) + C$
0	0	0	1	1	1	0	1
0	0	1	1	1	0	1	0
0	1	0	1	0	1	1	0
0	1	1	1	1	0	1	0
1	0	0	0	1	1	0	0
1	0	1	0	1	1	0	0
1	1	0	1	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1	0	1

Кононенко Данил ПМ-11п

в) $\neg x \to (z \sim (y \oplus xz))$

x	y	z	xz	$y+xz$	$\bar{x}$	$\bar{z}$	$\bar{z} \sim 1$	$\bar{x} \to (\bar{z} \sim 1)$
0	0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1	0	0	0
0	1	0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1	0	0	0
1	0	0	0	1	0	1	1	1
1	0	1	1	1	0	0	1	1
1	1	0	0	1	0	1	1	1
1	1	1	1	0	0	0		

№6 а) Використ. тотожні перетворення довести тотожн.

В) Ф-ли F і G

$F = \bar{x}\bar{z} \vee \overset{B}{xy} \vee \overset{C}{x\bar{z}}$

$G = xy\bar{z} \vee \bar{z}$

1) $(xy)z = x(yz)$ $\quad (x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$

2) $xy = yx$ $\quad x \vee y = y \vee x$ $\quad \bar{x} \cdot \bar{x} = \bar{x}$

$x \cdot x = x$

3) $(x \vee y)z = xz \vee yz$

$xy \vee z = (x \vee z)(y \vee z)$; $1 = 1 \vee x$; $1 = x \vee \bar{x}$

$(x \vee y)(z \vee u) = x(z \vee u) \vee y(z \vee u) =$

$= xz \vee xu \vee yz \vee yu$

$xy \vee zu = (x \vee zu)(y \vee zu) = (x \vee z)(x \vee u)(y \vee z)(y \vee u)$

Розв. $xy\bar{z} \vee \bar{z} = (x \vee \bar{z})(y \vee \bar{z})(\bar{z} \vee \bar{z}) =$

$= xy \vee x\bar{z} \vee \bar{z}y \vee \bar{z}\bar{z} = xy \vee x\bar{z} \vee \bar{z}y \vee \bar{z} =$

$= xy \vee x\bar{z} \vee \bar{z}(\bar{y} \vee 1) = xy \vee x\bar{z} \vee \bar{z}(x \vee \bar{x}) =$

$= xy \vee x\bar{z} \vee \bar{z}x \vee \bar{z}\bar{x} = xy \vee x\bar{z} \vee \bar{x}\bar{z}$

Ф

x	y	z
0	0	0
0	0	1
0	1	0
0	1	1
1	0	0
1	0	1
1	1	0
1	1	1

G

x	y	z
0	0	0
0	0	1
0	1	0
0	1	1
1	0	0
1	0	1
1	1	0
1	1	1

Д/З: а) б) в)

б) $\overline{(x \vee}$

Ⓕ

x	y	z	$\bar{x}$	$\bar{z}$	$\bar{x}\bar{z}$	xy	$x\bar{z}$	$A \vee B$	$A \vee B \vee C$
0	0	0	1	1	1	0	0	1	1
0	0	1	1	0	0	0	0	0	0
0	1	0	1	1	1	0	0	1	1
0	1	1	1	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0	0	1	0	1
1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	1	0	1	0	1	1
1	1	1	0	0	0	1	0	1	

Ⓖ

x	y	z	$\bar{z}$	xy	$(xy)z$	$xy \vee \bar{z}$
0	0	0	1	0	0	1
0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	1
0	1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	0	0	1
1	0	1	0	0	0	0
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	0	1	1	

Д/З: Ⓔ, Ⓖ – №1,
Ⓑ – №5 с. 339
тест і тік

Домашня робота

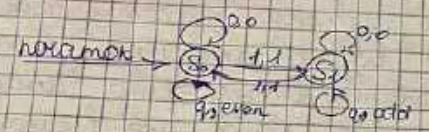
№1

б) $\overline{(\bar{x} \vee y) \vee x\bar{z}} \downarrow (x \sim y)$

№16

$Y = \{0, 1, q\}$

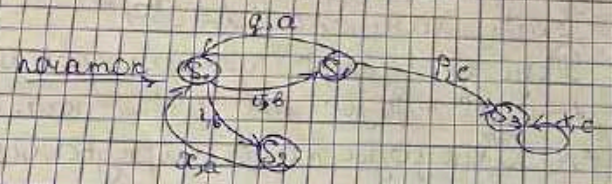
$Q = \{q, H, even, odd\}$



наск: 011q 0 01q

0 11 even even 0 1 odd

№19



U – правильний id (валідний)

i – невалідний (неправ) id

p – правильний password

q – неправильний password

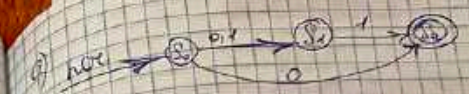
a – ввести id

b – ввести password

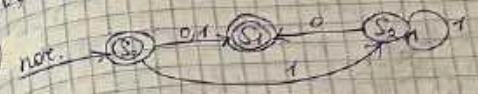
c – запрошення користувача до дії

x – ∀ вхід

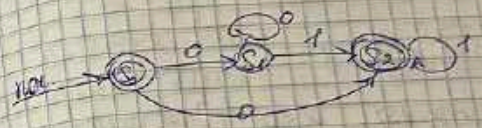
№23



$\{0, 0, 11\}$ – мова

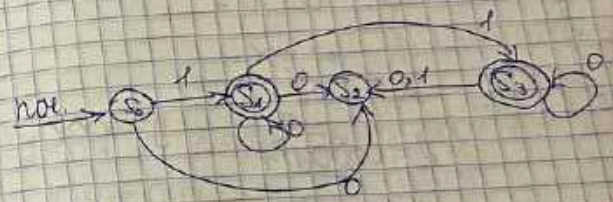


$\{\lambda, 1\} \cup \{1\}\{1\}^*\{0\}$ – мова



$\{\lambda, 0\} \cup \{0\}\{0\}^*\{1\}\{1\}^*$ – мова

або так: $\{\lambda, 0\} \cup \{0^m 1^n \mid m \geq$, $n \geq$

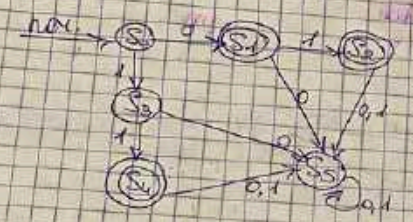


$\{1\}\{0\}^* \cup \{1\}\{1\}\{0\}^*$ – мова

або так: $\{10^n \mid n \geq 0\} \cup \{10^m 10^n \mid m, n \geq 0\}$

№34

а) {0, 01, 11}



№37

а) $L = \{0^{2m} 1^m \mid m = 0, 1, 2, \dots\}$

$L = 0^{2n} 1^n$, де $2n \geq |S|$, $\alpha = 0^{2n} 1^n = \beta\gamma\omega$,

$\xi(q) \geq 1$

$|\beta\gamma| \leq n$, $\beta\gamma^i\omega \in L$

$0^{2n} 0^i 1^n$

$L = 0^{\overset{\gamma}{0}} 0^{\overset{\beta}{0}} 1$

$L = 00000\ 11$

$L = 00\overset{\gamma}{1}$

$L = 0000\overset{\beta}{1}1$

$L = 00\,y^i 1$

$y^i = 001$

$A = \{y\} = \{001\}$

$A^* = \{001001, 001001001, \dots\}$

$n, 001$

$L = 00\,y^i 1 = 0000100 11$

№37 б, г, д

Заняття 15

№1

Побудувати машину Тюрінга, яка перетворює слово α на слово β в алф. {0,1}

а) $\alpha = 1^n$; $\beta = 1^n 0 1^n$

$q_1 1 \to 1^1 \Pi q_2$

$q_2 1 \to 1 \Pi q_2$

$q_2 0 \to 0 \Pi q_3$

$q_2 1 \to 0 \Pi q_3$

$q_3 1 \to 1 \Lambda q_4$

$q_3 1 \to 1 \Pi q_3$

$q_4 1 \to 1 \Lambda q_4$

$q_4 0 \to 0 \Lambda q_4$

$q_4 1' \to 1 \Pi q_1$

$q_1 0 \to 0 H q_0$

$1^n 1 0 1 \to 1 1 1 0 1$

$\Pi 1 1 \to 1 1 1 0 1 1 1$

$q_1 1 \to 1^1 \Pi q_2$

$q_2 1 \to 1 \Pi q_2$

$q_2 1 \to 1 \Pi q_3$

$q_2 1 \to 0 \Pi q_3$

$q_3 1 \to 1 \Lambda q_4$

$q_4 0 \to 0 \Lambda q_4$

$q_4 1 \to 1 \Lambda q_4$

$q_4 1 \to 1 \Lambda q_4$

$q_4 1' \to 1 \Pi q_1$

$q_1 1 \to 1^1 \Pi q_2$

$q_2 1 \to 1 \Pi q_2$

$q_2 0 \to 0 \Pi q_3$

$q_3 1 \to 1 \Pi q_3$

$q_3 1 \to 1 \Lambda q_4$

$000111 \to 010101$

б) $\alpha = 0^n 1^n$; $\beta = (01)^n$

$q_1 0 \to 0 \Pi q_2$

$q_2 0 \to 1 \Pi q_1$

$q_1 1 \to 0 \Pi q_2$

$q_2 1 \to 1 \Pi q_1$

$q_1 1 \to 1 H q_0$

$\boxed{q_2 1}$

№3

$x_1 x_2 \ldots x_n \to x_n x_{n-1} \ldots x_2 x_1$

{a, в}

$q_1 a \to a \Pi q_2$
$q_1 b \to b \Pi q_2$
$q_2 a \to c \Pi q_3$
$q_2 b \to c \Pi q_4$
$q_2 c \to c \Pi q_2$
$q_3 a \to a \Pi q_3$
$q_3 b \to b \Pi q_3$
$q_3 1 \to a \Pi q_5$
$q_3 c \to c \Pi q_3$
$q_4 a \to a \Pi q_4$
$q_4 b \to b \Pi q_4$
$q_4 1 \to b \Pi q_5$
$q_5 a \to a \Pi q_5$
$q_5 b \to b \Pi q_5$
$q_5 c \to c \Pi q_2$
$q_5 1 \to 1 \Pi q_6$
$q_6 a \to 1 \Pi q_6$
$q_6 a \to a H q_0$
$q_6 b \to b H q_0$

baa

$q_1 b \to b \Pi q_2$
$q_2 a \to c \Pi q_3$
$q_3 b \to b \Pi q_3$
$q_3 1 \to a \Pi q_5$
$q_5 b \to b \Pi q_5$
$q_5 c \to c \Pi q_2$
$q_2 a \to c \Pi q_3$
$q_3 c \to c \Pi q_3$
$q_3 b \to b \Pi q_3$
$q_3 1 \to a \Pi q_5$ — такого
$q_5 a \to a \Pi q_5$
$q_5 b \to b \Pi q_5$
$q_5 c \to c \Pi q_2$
$q_2 c \to c \Pi q_2$
$q_2 1 \to 1 \Pi q_6$
$q_6 c \to 1 \Pi q_6$
$q_6 b \to b H q_0$

№5

1 зм. застос. 111
1 зам. не заст. 1111

$q_1 1 \to 1 \Pi q_2$
$q_2 1 \to 1 \Pi q_3$
$q_3 1 \to 1 \Pi q_1$

$q_1 1 \to 1 H q_0$
$q_2 1 \to 1 H q_2$
$q_3 1 \to 1 H q_3$

№8

Т1: $q_1 1 \to 1 \Pi q_1$
$q_1 0 \to 0 H q_0$
$q_1 1 \to 1 \Pi q_1$

Т2: $q_1 1 \to 1 \Pi q_1$
$q_1 0 \to 1 \Pi q_2$
$q_1 1 \to 1 H q_0$
$q_2 1 \to 1 \Pi q_1$
$q_2 0 \to 0 \Pi q_0$
$q_2 1 \to 0 \Pi q_1$

а) 1111111
$q_1 1 \to 1 \Pi q_1$
$q_1 1 \to 1 \Pi q_1$ ...

$q_1 1 \to 1 \Pi q_1$
не заст. T_1

б) $q_1 1 \to 1 \Pi q_1$ 1111111
$q_1 1 \to 1 \Pi q_1$
$q_1 1 \to 1 H q_0$
T_2 застосовка

д/з: №1 (в, г); №8 (б–г)

Кравець Ольга ПМО-11 В-I

① $P = \{0,2;\ 0,25;\ 0,1;\ 0,15;\ 0,15;\ 0,15\}$

$l^F_{ср} - ?$

$P = \{0,25;\ 0,2;\ 0,15;\ 0,15;\ 0,15;\ 0,1\}$

a_1	0,25	0	0		00
a_2	0,2		1		01
a_3	0,15	1	0	0	100
a_4	0,15			1	101
a_5	0,15		1	0	110
a_6	0,1			1	111

$l^F_{ср} = 0,25 \cdot 2 + 0,2 \cdot 2 + 0,15 \cdot 3 + 0,15 \cdot 3 + 0,15 \cdot 3 + 0,1 \cdot 3 = 0,5 + 0,4 + 0,45 + 0,45 + 0,45 + 0,3 = 2,55$

$\boxed{В: l^F_{ср} = 2,55}$

② (7,4) – код Гемінґа

$d_3\ d_5\ d_6\ d_7$

1101

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$p_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \oplus p_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \oplus p_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$p_1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 = 0 \Rightarrow p_1 = 1$

$p_2 \oplus 1 \oplus 1 = 0 \Rightarrow p_2 = 0$

$p_4 \oplus 1 \oplus 1 = 0 \Rightarrow p_4 = 0$

$p_1\ p_2\ d_3\ p_4\ d_5\ d_6\ d_7$

1010101

$\boxed{В: 1010101}$

gcd (144, 126)

$s \cdot 144 + t \cdot 126$

1) $144 = 126 \cdot 1 + 18$

2) $126 = 18 \cdot 7 + 0$

$n = 2$

$q_1 = 1$

$q_2 = 7$

$s_2 - ?$

$t_2 - ?$

$18 = s \cdot 144 + t \cdot 126$

$s_0 = 1$ $\quad t_0 = 0$

$s_1 = 0$ $\quad t_1 = 1$

$s_2 = s_0 - q_1 s_1$ $\quad t_2 = t_0 - q_1 t_1$

$s_0 = 1$ $\quad t_0 = 0$

$s_1 = 0$ $\quad t_1 = 1$

$s_2 = 1 - 1 \cdot 0 = 1$ $\quad t_2 = 0 - 1 \cdot 1 = -1$

$18 = 1 \cdot 144 + (-1) \cdot 126$

$\boxed{B: s = 1; \quad t = -1}$

④ $\begin{cases} x \equiv 1 \pmod 4 \\ x \equiv 2 \pmod 3 \\ x \equiv 3 \pmod 5 \end{cases}$

$m = 4 \cdot 3 \cdot 5 = 60$

$x \equiv a_1 \cdot M_1 y_1 + a_2 M_2 y_2 + a_3 M_3 y_3$

$M_1 = \frac{60}{4} = 15; \quad M_2 = \frac{60}{3} = 20; \quad M_3 = \frac{60}{5} = 12$

1) $\gcd(15; 4) = 1 \Rightarrow \exists a^{-1}$

$15 = 4 \cdot 3 + 3$

$4 = 3 \cdot 1 + 1$

$3 = 3 \cdot 1 + 0$

$1 = 4 \cdot 1 - 3 \cdot 1 =$

$= 4 \cdot 4 + 15 \cdot (-$

$M_1^{-1} = -1 +$

2) gcd (20

$20 = 3 \cdot$

$3 = 2 \cdot$

$2 = 1 \cdot$

$1 = 3 - 2 \cdot 1 =$

$M_2^{-1} = -1$

3) gcd (1

$12 = 5$

$5 =$

$2 =$

$1 = 5 - 2 \cdot 2$

$M_3^{-1} =$

$x \equiv 1 \cdot 15 \cdot$

$= 225 -$

B: 53 (mo

⑤

nok $\longrightarrow$

{ 11, 1

B: { 11,

$1 = 4\cdot 1 - 3\cdot 1 = 1\cdot 4 - 1(15 - 4\cdot 3) = 4\cdot 4 - 15\cdot 1 =$

$= 4\cdot 4 + 15\cdot(-1)$

$M_1^{-1} = -1 + 4 = 3 = y_1$

2) $\gcd(20, 3) = 1 \Rightarrow \exists a^{-1}$

$20 = 3\cdot 6 + 2$

$3 = 2\cdot 1 + 1$

$2 = 1\cdot 2$

$1 = 3 - 2\cdot 1 = 3\cdot 1 - 1(20 - 3\cdot 6) = 7\cdot 3 + 20(-1)$

$M_2^{-1} = -1 + 3 = 2 = y_2$

3) $\gcd(12, 5) = 1 \Rightarrow \exists a^{-1}$

$12 = 5\cdot 2 + 2$

$5 = 2\cdot 2 + 1$

$2 = 1\cdot 2$

$1 = 5 - 2\cdot 2 = 5\cdot 1 - 2(12 - 5\cdot 2) = 5\cdot 5 - 2\cdot 12 = 5\cdot 5 + 12\cdot(-2)$

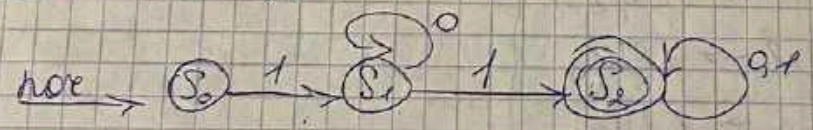
$M_3^{-1} = -2 + 5 = 3 = y_3$

$x \equiv 1\cdot 15\cdot 3 + 2\cdot 20\cdot 2 + 3\cdot 12\cdot 3 = 233 \pmod{60} =$

$= 233 - 60 - 60 - 60 \pmod{60} = 53 \pmod{60}$

$\boxed{B: 53 \pmod{60}}$

5)



$\{11, 101\}$

$\boxed{B: \{11, 101\} - \text{мова}}$

$\{0,1\}$

$\alpha = 1^n$

$\beta = 1^{2n-1}$

$111 \to 11111$

$q_1 1 \to 1' П q_2$

$q_2 1 \to 1 П q_2$

$q_2 1 \to 1 П q_3$

$q_2 \lambda \to 1 П q_3$

$q_3 \lambda \to 1 Л q_4$

$q_4 1 \to 1 Л q_4$

$q_4 1 \to 1 Л q_4$

$q_4 1' \to 1 П q_1$

$q_1 1 \to 1' П q_2$

$q_2 1 \to 1 П q_2$

$q_2 1 \to 1 П q_3$

$q_3 1 \to 1 П q_3$

$q_3 \lambda \to 1 Л q_4$

B:

$q_1 1 \to 1' П q_2$

$q_2 1 \to 1 П q_2$

$q_2 1 \to 1 П q_2$

$q_2 \lambda \to 1 П q_3$

$q_3 \lambda \to 1 Л q_4$

$q_3 1 \to 1 П q_3$

$q_4 1 \to 1 Л q_4$

$q_4 1 \to 1 Л q_4$

$q_4 1 \to 1 Л q_4$

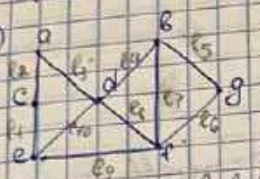
$q_4 1' \to 1 П q_1$

$q_1 1 \to 1 Н q_0$

(48) Які з наведених нижче графів мають гамільтонів цикл? Які з графів, що не мають

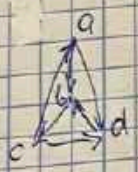
Жнавець Ольга ІВ
ПМО-11

1



	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}
a	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0
b	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0
c	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
d	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1
e	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1
f	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0
g	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0

2

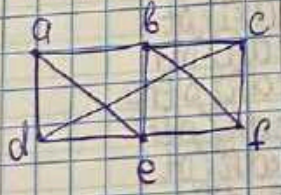


	a	b	c	d
a	0	1	0	1
b	0	0	1	0
c	1	0	0	1
d	0	1	0	0

	a	b	c	d
a	0	1	0	1
b	0	0	1	1
c	1	0	0	0
d	0	0	1	0

$G_1 \not\cong G_2$ не ізоморфні

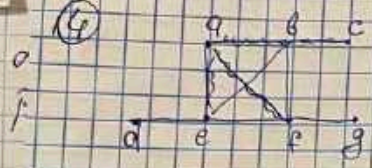
3

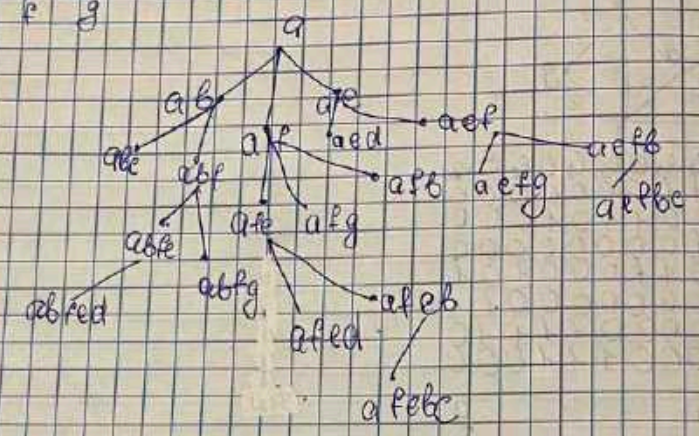


c і e

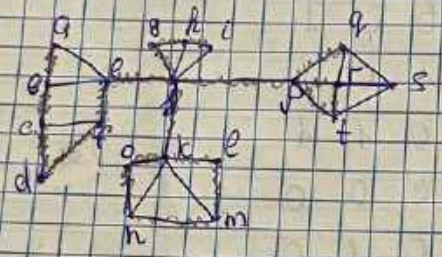
кістяк довж. 3

④





⑤

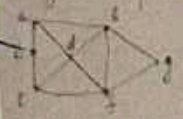


Вимо

B:

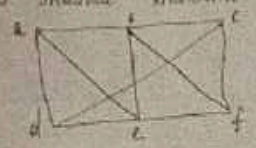
B	N	смек
a	1	a
b	2	ab
c	3	abc
d	4	abcd
f	5	abcdf
e	6	abcdfe
j	7	abcdfej
g	8	abcdfeg
h	9	abcdfegh
i	10	abcdfeghi
—	—	abcdfegh
—	—	abcdfej
k	11	abcdfejk
l	12	abcdfejkl
m	13	abcdfejklm
n	14	abcdfejklmn
o	15	abcdfejklmno
—	—	abcdfejklmn
—	—	abcdfejklm
—	—	abcdfejkl
—	—	abcdfejk
—	—	abcdfej
o	16	abcdfejo
q	17	abcdfejoq
t	18	abcdfejot
r	19	abcdfejotr
s	20	abcdfejotrs
—	—	abcdfejotr
—	—	abcdfejot
—	—	abcdfejo
—	—	abcdfej
—	—	abcdf
—	—	abcdfe
—	—	abcd
—	—	abc
—	—	ab
—	—	a
—	—	—
		∅

1 Вдалині простий граф за допомогою матриці суміжності



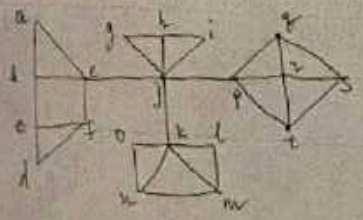
2 Чи граф орієнтований? Відповідь обґрунтуйте

3 Знайти кількість шляхів довжиною 3 між вершинами a і e



4 Використовуючи бектрекінг, знайти гамільтоновий цикл

5 Використовуючи обхід графа пошуком вглиб, побудувати каркас



$(A\cup B)\setminus(A\cap B)$: Нехай $x\in(A\cup B)\setminus(A\cap B)$, тоді $x\in(A\cup B)$ і $x\notin(A\cap B)$ $\Rightarrow$ ($x\in A$ або $x\in B$) і ($x\in\overline{A\cap B}$) $\Rightarrow$ ($x\in A$ або $x\in B$) і ($x\in\overline{A}$ або $x\in\overline{B}$) $\Rightarrow$ ($x\in A$ і $x\notin B$) або ($x\in A$ і $x\notin A$) або ($x\in B$ і $x\notin B$) $\Rightarrow$ ($x\in A$ і $x\notin A$) або ($x\in A$ і $x\notin B$) або ($x\in B$ і $x\notin A$) $\Rightarrow$ ($x\in A\setminus B$) або ($x\in B\setminus A$) $\Rightarrow$ $x\in(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$

$(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$: Нехай $x\in(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$, тоді $x\in(A\setminus B)$ або ($x\in B\setminus A$) $\Rightarrow$ ($x\in A$ і $x\notin B$) або ($x\in B$ і $x\notin A$) $\Rightarrow$ ($x\in A$ і $x\in\overline{B}$) або ($x\in B$ і $x\in\overline{A}$) $\Rightarrow$ ($x\in A$ або $x\in B$) і ($x\in\overline{A}$ або $x\in\overline{B}$) і ($x\in B$ або $x\in\overline{A}$) $\Rightarrow$ ($x\in A$ або $x\in B$) і ($x\in\overline{A\cap B}$) $\Rightarrow$ ($x\in A\cup B$) і ($x\notin A\cap B$) $\Rightarrow$ $x\in((A\cup B)\setminus(A\cap B))$

алгебра Буля — $\neg, \wedge, \vee$	ал. жегалкіна $\wedge$ $\oplus$	комут. $xy=yx$	асоц. $(xy)z=x(yz)$ $=xyz$
монотонна, якщо не містить заперечень, а $\oplus$		$\bar{\bar{x}}=x$ | $xy=yx$	$(xy)z=x(yz)$ Σxyz
$A\cup B=B\cup A$ $A\cap B=B\cap A$ комут.	$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$ асоціат. $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$	$x\vee x=x$ | $xx=x$	дистр. $xy\vee z=(x\vee z)(y\vee z)$
дистриб. $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$	$A\cap A=A$ $A\cup A=A$	$\overline{xy}=\bar{x}\bar{y}$ | $x\vee\bar{x}=1$	$(x\vee y)z=x\vee yz$
$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ $\overline{(\bar{A})}=A$	$A\cup B=\overline{\bar{A}\cap\bar{B}}$ $A\cap B=\overline{\bar{A}\cup\bar{B}}$	$\overline{xy}=\bar{x}\vee\bar{y}$	
$A\cup\emptyset=A$ $A\cap U=A$ $A\cup U=U$ $A\cap\emptyset=\emptyset$	$A\cap(A\cup B)=A$ $A\cup(A\cap B)=A$	$x(xy)=x$	$x\vee xy=x$ | $0\vee x=x$
$A\cup\bar{A}=U$ $A\cap\bar{A}=\emptyset$ 1-нал. 0-нульелем.	ал. рівності	$1x=x$ | $1\vee x=1$	$0x=0$ | $x\bar{x}=0$
	$x\vee\bar{x}=1$ | and 1		

1: $11=1$
$\vee\, 00=0$
$\Rightarrow 10=0$
$\Leftrightarrow 11=1$
$\downarrow 00=1$
$|\, 11=0$
$\oplus\, 11=0$
$\sim 11=1$
$\cap\, 11=1$
$\cup\, 00=0$

фіктивна змінна* — 1) заперечити 2) написати		
$x\oplus y=\bar{x}y\vee x\bar{y}$	$x\oplus 1=\bar{x}$	$x\vee y=x\oplus y\oplus xy$
$x\oplus x=0$	ДДНФ cons $=1$	ДКНФ cons $=0$
$xy\vee z=(x\vee z)(y\vee z)$	$P(x^n)=k_1\oplus k_2\oplus\dots\oplus k_n$	
$x\,|\,y=\overline{xy}$ $x\to y=\bar{x}\vee y$	$P(x,y)=c_0\oplus c_1x\oplus c_2y\oplus c_3xy$ лінійна жегалкіна	
$x\downarrow y=\overline{x\vee y}$	$P=\{\bar{x}, xy\}$ $P'=\{\bar{x}, x\vee y\}$ $M=\{x\vee y\}$	

повні системи: $Q'=\{x\oplus y, xy, 1\}$ $Q''=\{\bar{x}, xy, x\vee y\}$

$x_1\vee x_2=x_1\oplus x_2\oplus x_1x_2=P(x^2)$ не лінійн.

$\bar{x}=\bar{x}x=\overline{x\vee x}=x\downarrow x$

$xy=\overline{\bar{x}\vee\bar{y}}=(x\downarrow y)\downarrow(x\downarrow y)$

$k\cup k\cup\bar{k}=k\vee k\cup\bar{k}=k\cup k=k$ нетотожне складання

$k\cup k=k$ поглинання

$|A\setminus B|=|A|-|A\cap B|$

Зауваж. і ауж, щоб було 1 одиниці 1 один який від нескорої, а це в полі x_1 то вони по ст.

$A\setminus B=A\cap\bar{B}$ $\Rightarrow x\in A\setminus B$ тоді $x\in A$, $x\notin B$ $\Rightarrow x\in A$ і $x\in\bar{B}$ $\Rightarrow x\in A\cap\bar{B}$ $\Rightarrow x\in A\cap\bar{B}$

тоді $x\in A$ і $x\in\bar{B}$ $\Rightarrow x\in A$ і $x\notin B$ $\Rightarrow x\in A\setminus B$

ін. (1) one-one
(2) onto
(3) $\Rightarrow$ (1) і (2)

$\lfloor x\rfloor$ „підлога" найб. ціле, яке не більше ніж x

$\lceil x\rceil$ „стеля" найменше ціле, яке не менше ніж x

Чи повторюються елем. у вибірці?

Так → Чи враховується порядок розміщення елем.?

- **Так** → Чи всі елем. входять у вибірку?
  - **Так** → Перестановки з повторенням
    $$P_n(m_1, m_2, \dots, m_n) = \frac{n!}{m_1!\, m_2! \dots n_n!}$$
  - **Ні** → Розміщення з повторенням
    $$\tilde{A}_n^{-k} = n^k$$
- **Ні** → Комбінації з повторенням
  $$\tilde{C}_n^{-k} = \frac{C^k}{C_{n+k-1}}$$

Ні → Чи враховується порядок розміщення елем.?

- **Так** → Чи всі елем. входять у вибірку?
  - **Так** → Перестановки
    $$P_n = n!$$
  - **Ні** → Розміщення
    $$A_m^n = \frac{m!}{(m-n)!}$$
- **Ні** → Комбінації
  $$C_m^n = \frac{m!}{(m-n)!\, n!}$$

$$H_n^r = C_{n+r-1}^r$$

$$\tilde{A}_n^r = n^r$$

$A_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}$ пор. врах.	$C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$	$\tilde{A}_n^r = n^r$
$H_n^r = C_{n+r-1}^r$	$P_n = n!$	

Чи всі елем. розміщ.

так

Чи всі елем. у вибірці

так

Перестановки

$P_n = n!$

$A_m^n = \frac{m!}{(m-n)!}$

$= n^k$

$H^r = C^r$

$\downarrow$ $00 = 1$ pewna 0

$|$ $11 = 0$ pewna 1

$\oplus$ $\begin{matrix}00\\11\end{matrix} = 0$ pewna 1

$\sim$ $\begin{matrix}00\\11\end{matrix} = 1$ pewna 0

$x \in A$ або $x \notin B$

$x \notin B$

$x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

$x \in B$ або $x \in A$

$x \in A$ і $x \in B$ або $x \in B$

$x \in A \cup B$ і $x \notin$

$A_n^r = n^r$

C^r

$1 \cdot 1 = 1$ решта 0

$0 \cdot 0 = 0$ решта 1

$1 \cdot 0 = 0$ решта 1

$1 \cdot 1 = 1$ решта 0

$A_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}$

$H_n^r = C_{n+r-1}^r$

№18.

1) $\gcd(144, 89)$

1) $144 = 89 \cdot 1 + 55$
2) $89 = 55 \cdot 1 + 34$
3) $55 = 34 \cdot 1 + 21$
4) $34 = 21 \cdot 1 + 13$
5) $21 = 13 \cdot 1 + 8$
6) $13 = 8 \cdot 1 + 5$
7) $8 = 5 \cdot 1 + 3$
8) $5 = 3 \cdot 1 + 2$
9) $3 = 2 \cdot 1 + 1$
10) $2 = 1 \cdot 2 + 0$

$1 = 3 - 2 \cdot 1$

$n = 10 \Rightarrow s_{10} - ?$ $t_{10} - ?$

$q_1 = 1$
$q_2 = 1$
$q_3 = 1$
$q_4 = 1$
$q_5 = 1$
$q_6 = 1$
$q_7 = 1$
$q_8 = 1$
$q_9 = 1$
$q_{10} = 2$

$s_{10} = s_8 - q_9 \cdot s_9$

$t_{10} = t_8 - q_9 \cdot t_9$

2) $1 = 3 - 2 \cdot 1 = 3 \cdot 1 - 1 \cdot (5 - 3 \cdot 1) = 3 \cdot 2 - 1 \cdot 5 = 2(8 - 5 \cdot 1) - 1 \cdot 5 =$
$= 2 \cdot 8 - 3 \cdot 5 = 2 \cdot 8 - 3 \cdot (13 - 8 \cdot 1) = -3 \cdot 13 + 5 \cdot 8 =$

$= -3 \cdot 13 + 5 \cdot (21 - 13) = 5 \cdot 21 - 8 \cdot 13 = 5 \cdot 21 - 8(34 - 21 \cdot 1) =$
$= -8 \cdot 34 + 13 \cdot 21 = -8 \cdot 34 + 13(55 - 34 \cdot 1) =$
$= 13 \cdot 55 - 21 \cdot 34 = 13 \cdot 55 - 21(89 - 55 \cdot 1) =$
$= -21 \cdot 89 + 34 \cdot 55 = -21 \cdot 89 + 34(144 - 89 \cdot 1) =$
$= 34 \cdot 144 - 55 \cdot 89 = \frac{34}{2} \cdot 144 + \left(-\frac{55}{2}\right) \cdot 89 =$

№21.

а) $a = 4$, $m = 9$ — нужно обратимо

$\gcd(4, 9) = 1 \Rightarrow \exists a^{-1}$

$9 = 4 \cdot 2 + 1 \Rightarrow 1 = 9 \cdot 1 - 4 \cdot 2 = 9 \cdot 1 + 4 \cdot (-2)$

$4 = 1 \cdot 4 + 0$

$-2 \equiv 7 \pmod 9$

$$\begin{cases} -2 \equiv x \pmod 9 \\ -2 \cdot 7 \equiv 0 \pmod 9 \\ -9 \equiv 0 \pmod 9 \end{cases}$$

В: 7

№19.

а) $\gcd(19, 141)$

$141 = 10 \cdot 14 + 1$

$19 = 8 \cdot 2 + 3$

$8 = 3 \cdot 2 + 2$

$3 = 2 \cdot 1 + 1$

$2 = 1 \cdot 2 + 0$

$1 = -7 \cdot (14 \cdot 1) + \boxed{53} \cdot 19$

$53 = a^{-1}$

В: 53

№22.

а) $3x \equiv 7 \pmod{17}$

$\gcd(3, 17) = 1 \Rightarrow \exists a^{-1}$

$17 = 2\cdot 8 + 1$ $\Rightarrow$ $1 = 17 - 2\cdot 8 =$

$8 = 1\cdot 8 + 0$ $\quad = 17\cdot 1 + 8\cdot(-2)$

$+8\cdot 17 = 9$

a^{-1}

① $6\cdot 21x \equiv 9\cdot 7 \pmod{32}$

$126x \equiv 63 \pmod{32}$

$x = 12$

② $x \equiv 7\cdot(-8) = -56 + 17 + 17 + 17 + 17 = 12$

$17 + 16 + 16$

подходит

В 12

2)13

А) $x \equiv 2 \pmod 3$

$x \equiv 1 \pmod 4$

$x \equiv 3 \pmod 5$

$M = 3\cdot 4\cdot 5 = 60$

$x \equiv a_1 M_1 y_1 + a_2 M_2 y_2 + a_3 M_3 y_3$

$M_1 = \frac{60}{3} = 20$, $M_2 = \frac{60}{4} = 15$, $M_3 = \frac{60}{5} = 12$

① $\gcd(20, 3) \Rightarrow \exists\, a^{-1}$

$20 = 3\cdot 6 + 2$

$3 = 2\cdot 1 + 1$

$2 = 1\cdot 2$

$1 = 3 - 2\cdot 1 = 3 + 1\cdot(20 - 3\cdot 6) =$ $\boxed{1\cdot 3 + 20\cdot(-1)}$

$M_1 = 20$; $y_1 = -1 + 3 = 2 = y_1$

② $\gcd(15, 4) = 1 \Rightarrow \exists\, a^{-1}$

$15 = 4\cdot 3 + 3$

$4 = 3\cdot 1 + 1$

$3 = 3\cdot 1 + 0$

$1 = 4 - 3\cdot 1 = 1\cdot 4 - 1\cdot(15 - 4\cdot 3) = 4\cdot 4 - 15\cdot 1 + 4\cdot 3\cdot(-1)$

$M_2^{-1} = -1 + 4 = 3 = y_2$

③ $\gcd(12, 5) = 1 \Rightarrow \exists\, a^{-1}$

$12 = 5\cdot 2 + 2$

$5 = 2\cdot 2 + 1$

$2 = 1\cdot 2$

$1 = 5 - 2\cdot 2 = 5 - 2\cdot(12 - 5\cdot 2) = 5\cdot 5 - 2\cdot 12 = 5\cdot 5 + 12\cdot(-2)$

$M_3^{-1} = -2 + 5 = 3 = y_3$

$x = 2\cdot 20\cdot 2 + 1\cdot 15\cdot 3 + 3\cdot 12\cdot 3 = 233 \pmod{60} =$

$= 233 - 60 - 60 - 60 \pmod{60} = 53 \pmod{60}$

Б) $7^{121} \bmod 13$ $\quad 13 - 1 = 12$

Малая теорема Ферма

$a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$

$7^{12} \equiv 1 \pmod{13}$

$121 = 12\cdot 10 + 1$

$7^{121} = 7^{12\cdot 10 + 1} = (7^{12})^{10}\cdot 7^1 = 7^1 \pmod{13} = 7 \pmod{13}$

Домашняя работа

1)14

Б) $\gcd(12345, 54321) = 3$

$54321 = 12345\cdot 4 + 4941$

$12345 = 4941\cdot 2 + 2463$

$4941 = 2463\cdot 2 + 15$

$2463 = 15\cdot 164 + 3$

$15 = 3\cdot 4 + 3$

$3 = 3\cdot 1 + 0$

gcd(144, 89)

S 144 t 89

1) $144 = 89 \cdot 1 + 55$ $q_1 = 1$

2) $89 = 55 \cdot 1 + 34$ $q_2 = 1$

3) $55 = 34 \cdot 1 + 21$ $q_3 = 1$

4) $34 = 21 \cdot 1 + 13$ $q_4 = 1$

5) $21 = 13 \cdot 1 + 8$ $q_5 = 1$

6) $13 = 8 \cdot 1 + 5$ $q_6 = 1$

7) $8 = 5 \cdot 1 + 3$ $q_7 = 1$

8) $5 = 3 \cdot 1 + 2$ $q_8 = 1$

9) $3 = 2 \cdot 1 + 1$ $q_9 = 1$

10) $2 = 1 \cdot 2 + 0$ $q_{10} = 2$

$S_0 = 1$

$S_1 = 0$

$S_2 = 1 - 1 \cdot 0 = 1$

$S_3 = 0 - 1 \cdot 1 = -1$

$S_4 = 1 - 1 \cdot (-1) = 2$

$S_5 = -1 - 1 \cdot 2 = -3$

$S_6 = 2 - 1 \cdot (-3) = 5$

$S_7 = -3 - 1 \cdot 5 = -8$

$S_8 = 5 - 1 \cdot (-8) = 13$

$S_9 = -8 - 1 \cdot 13 = -21$

$S_{10} = 13 - 2 \cdot (-21) = 34$

$t_0 = 0$

$t_1 = 1$

$t_2 = 0 - 1 \cdot 1 = -1$

$t_3 = 1 - 1 \cdot (-1) = 2$

$t_4 = -1 - 1 \cdot 2 = -3$

$t_5 = 2 - 1 \cdot (-3) = 5$

$t_6 = -3 - 1 \cdot 5 = -8$

$t_7 = 5 - 1 \cdot (-8) = 13$

$t_8 = -8 - 1 \cdot 13 = -21$

$t_9 = 13 - 1 \cdot (-21) = 34$

$t_{10} = -21 - 1 \cdot 34 = -55$

$1 = \frac{34}{9} \cdot 144 + \frac{(-55)}{2} \cdot 89$

B: $S = 34$, $t = -55$

№16.

$\gcd(a, b) = S \cdot a + t \cdot b$

$b = 10$

$S_0 = ?$ $t_0 = ?$

$S_0 = 1$, $S_1 = 0$, $S_2 = 1 - q_1 \cdot 1$, $S_3 = 1 - q_2 \cdot S_2$

$t_0 = 0$, $t_1 = 1$, $t_2 = 0 - q_1 \cdot 1$, $t_3 = t_1 - q_2 \cdot t_2$

3) $a = 2$

$m = 17$

$a^{-1} = ?$

$\gcd(17, 2) = 1 \Rightarrow \exists a^{-1}$

$17 = 2 \cdot 8 + 1$ $\Leftrightarrow$ $1 = 17 \cdot 1 - 2 \cdot 8 = 17 \cdot 1 + 2 \cdot (-8)$

$1 = 2 \cdot 17 + 9$

B: 9

№18.

gcd(203, 101)

S 203 t 101

$203 = 101 \cdot 2 + 1$

$101 = 1 \cdot 101 + 0$

$n = 2$ — розмірність

$q_1 = 2$

$q_2 = 1$

$S_0 = 1$ $t_0 = 0$

$S_1 = 0$ $t_1 = 1$

$S_2 = 1 - 2 \cdot 0 = 1$ $t_2 = 0 - 2 \cdot 1 = -2$

$1 = 1 \cdot 203 + (-2) \cdot 101$

$1 = 203 \cdot 1 - 101 \cdot 2 = 203 \cdot 1 + 101 \cdot (-2)$

B: $S = 1$, $t = -2$

№20.

$a = 55$ $\gcd(55, 89)$ $a^{-1} = ?$

$m = 89$

1) $89 = 55 \cdot 1 + 34$
2) $55 = 34 \cdot 1 + 21$
3) $34 = 21 \cdot 1 + 13$
4) $21 = 13 \cdot 1 + 8$
5) $13 = 8 \cdot 1 + 5$
6) $8 = 5 \cdot 1 + 3$
7) $5 = 3 \cdot 1 + 2$
8) $3 = 2 \cdot 1 + 1$
9) $2 = 1 \cdot 2 + 0$

$q_1 = 1$ ✓
$q_2 = 1$ ✓
$q_3 = 1$ ✓
$q_4 = 1$ ✓
$q_5 = 1$ ✓
$q_6 = 1$ ✓
$q_7 = 1$ ✓
$q_8 = 1$ ✓
$q_9 = 2$

$n = 9$ – разложение

$1 = S_9 \cdot 55 + t_9 \cdot 89$

$S_0 = 1$
$S_1 = 0$
$S_2 = 1 - 1 \cdot 0 = 1$
$S_3 = 0 - 1 \cdot 1 = -1$
$S_4 = 1 - 1 \cdot (-1) = 2$
$S_5 = -1 - 1 \cdot 2 = -3$
$S_6 = 2 - 1 \cdot (-3) = 5$
$S_7 = -3 - 1 \cdot 5 = -8$
$S_8 = 5 - 1 \cdot (-8) = 13$
$S_9 = -8 - 1 \cdot 13 = -21$

$t_0 = 0$
$t_1 = 1$
$t_2 = 0 - 1 \cdot 1 = -1$
$t_3 = 1 - 1 \cdot (-1) = 2$
$t_4 = -1 - 1 \cdot 2 = -3$
$t_5 = 2 - 1 \cdot (-3) = 5$
$t_6 = -3 - 1 \cdot 5 = -8$
$t_7 = 5 - 1 \cdot (-8) = 13$
$t_8 = -8 - 1 \cdot 13 = -21$
$t_9 = 13 - 1 \cdot (-21) = 144$

$1 = -21 \cdot 55 + 144 \cdot 89 =$

В: $S = -21$; $t = 144$

№2.

$a = 89$ $\quad a(89, 232)$

$m = 232$

a^{-1} ?

1) $232 = 89 \cdot 2 + 54$
2) $89 = 54 \cdot 1 + 35$
3) $54 = 35 \cdot 1 + 19$
4) $35 = 19 \cdot 1 + 16$
5) $19 = 16 \cdot 1 + 3$
6) $16 = 3 \cdot 5 + 1$
7) $3 = 1 \cdot 3 + 0$

$q_1 = 2$ ✓
$q_2 = 1$ ✓
$q_3 = 1$ ✓
$q_4 = 1$ ✓
$q_5 = 1$ ✓
$q_6 = 5$ ✓
$q_7 = 1$ ✓
$q_8 = 3$

$n = 8$ – разложение

S_8 ? $\quad t_8$ – ?

a^{-1} ?

$S_8 \cdot 89 + t_8 \cdot 232 = 1$

$S_0 = 1$; $S_1 = 0$
$S_2 = 1 - 2 \cdot 0 = 1$
$S_3 = 0 - 1 \cdot 1 = -1$
$S_4 = 1 - 1 \cdot (1) = 2$
$S_5 = -1 - 1 \cdot 2 = -3$
$S_6 = 2 - 1 \cdot (-3) = 5$
$S_7 = -3 - 5 \cdot 5 = -18$
$S_8 = 5 - 1 \cdot (-18) = 23$

$1 = 23 \cdot 89 + (-60) \cdot 232$

$t_0 = 0$
$t_1 = 1$
$t_2 = 0 - 1 \cdot 2 = -2$
$t_3 = 1 - 1 \cdot (-2) = 3$
$t_4 = -2 - 1 \cdot 3 = -5$
$t_5 = 3 - 1 \cdot (-5) = 8$
$t_6 = -5 - 1 \cdot 8 = -13$
$t_7 = 8 - 5 \cdot (-13) = 147$
$t_8 = -13 - 147 = -60$

В: $S = 23$; $t = -60$

№1

б) $19x \equiv 4 \pmod{141}$

$\gcd(19, 141) = 1 \Rightarrow \exists a^{-1}$

$141 = 19 \cdot 7 + 8$
$19 = 8 \cdot 2 + 3$
$8 = 3 \cdot 2 + 2$
$3 = 2 \cdot 1 + 1$
$2 = 1 \cdot 2 + 0$

$1 = 3 - 1 \cdot 2 = 3 - 1 \cdot (8 - 3 \cdot 2) = -1 \cdot 8 - 2 \cdot 3 =$
$= -1 \cdot 8 - 3(19 - 8 \cdot 2) = -3 \cdot 19 + 7 \cdot 8 =$
$= -3 \cdot 19 + 7 \cdot (141 - 19 \cdot 7) = 7 \cdot 141 -$
$- 19 \cdot 52$; $\quad x \equiv 52$

в) $55x \equiv 34 \pmod{89}$

$\gcd(55; 89) = 1 \Rightarrow \exists a^{-1}$

$89 = 55 \cdot 1 + 34$

$55 = 34 \cdot 1 + 21$

$34 = 21 \cdot 1 + 13$

$21 = 13 \cdot 1 + 8$

$13 = 8 \cdot 1 + 5$

$8 = 5 \cdot 1 + 3$

$5 = 3 \cdot 1 + 2$

$3 = 2 \cdot 1 + 1$

$2 = 1 \cdot 2 + 0$

$1 = 3 - 2 \cdot 1 = 3 - 1 \cdot (5 - 3 \cdot 1) = 2 \cdot 3 - 1 \cdot 5 =$

$= 2 \cdot (8 - 5 \cdot 1) - 1 \cdot 5 = 2 \cdot 8 - 3 \cdot 5 = 2 \cdot 8 - 3 \cdot (13 - 8 \cdot 1) =$

$= 5 \cdot 8 - 3 \cdot 13 = 5 \cdot 13 - 8 \cdot 13 + 5 \cdot (21 - 13 \cdot 1) = 5 \cdot 21 - 8 \cdot 13 =$

$= 5 \cdot 21 - 8 \cdot (34 - 21 \cdot 1) = -8 \cdot 34 + 13 \cdot 21 =$

$= -8 \cdot 34 + 13 \cdot (55 - 34 \cdot 1) = 13 \cdot 55 - 21 \cdot 34 =$

$= 13 \cdot 55 - 21 \cdot (89 - 55 \cdot 1) = -21 \cdot 89 + 34 \cdot 55$

В: $x \equiv 34$

г) $89x \equiv 1 \pmod{231}$

$\gcd(89; 231) = 1 \Rightarrow \exists a^{-1}$

$231 = 89 \cdot 2 + 54$

$89 = 54 \cdot 1 + 35$

$54 = 35 \cdot 1 + 19$

$35 = 19 \cdot 1 + 16$

$19 = 16 \cdot 1 + 3$

$16 = 3 \cdot 5 + 1$

$3 = 1 \cdot 3 + 0$

$1 = 16 - 3 \cdot 5 = 16 - 5 \cdot (19 - 16 \cdot 1) = 6 \cdot 16 - 5 \cdot 19 =$

$= 6 \cdot (35 - 19 \cdot 1) - 5 \cdot 19 = 6 \cdot 35 - 11 \cdot 19 =$

$= 6 \cdot 35 - 11 \cdot (54 - 35 \cdot 1) = -11 \cdot 54 + 17 \cdot 35 =$

$= -11 \cdot 54 + 17 \cdot (89 - 54 \cdot 1) = 17 \cdot 89 - 28 \cdot 54 =$

$= 17 \cdot 89 - 28 \cdot (231 - 89 \cdot 2) = -28 \cdot 231 + 73 \cdot 89$

В: $x \equiv 73$

№ 23.

а) $x \equiv 1 \pmod 2$

$x \equiv 2 \pmod 3$

$x \equiv 3 \pmod 5$

$x \equiv 4 \pmod{11}$

$x = a_1 \mu_1 y_1 + a_2 \mu_2 y_2 + a_3 \mu_3 y_3 + a_4 \mu_4 y_4$

$m = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 = 330$

$\mu_1 = \frac{330}{2} = 165$ $\quad \mu_3 = \frac{330}{5} = 66$

$\mu_2 = \frac{330}{3} = 110$ $\quad \mu_4 = \frac{330}{11} = 30$

① $\gcd(165; 2) = 1 \Rightarrow \exists a^{-1}$

$165 = 2 \cdot 82 + 1$

$2 = 1 \cdot 2 + 0$

$1 = 165 - 2 \cdot 82 = 165 \cdot 1 - 2 \cdot 82$

$\mu_1 = 165; \quad \mu^{-1} = 1 = y_1$

② $\gcd(110; 3) = 1 \Rightarrow \exists a^{-1}$

$110 = 3 \cdot 36 + 2$

$3 = 2 \cdot 1 + 1$

$2 = 1 \cdot 2 + 0$

$1 = 3 + 2 \cdot 1 = 3 + 1 \cdot (110 - 3 \cdot 36) =$

$= 110 \cdot 1 + 3 \cdot (-35)$

$\mu_2 = 110; \quad \mu^{-1} = -1 + 3 = 2 = y_2$

③ $\gcd(66; 5) = 1 \Rightarrow \exists a^{-1}$

$66 = 5 \cdot 13 + 1$

$5 = 1 \cdot 5 + 0$

$1 = 66 \cdot 1 - 5 \cdot 13$

$\mu_3 = 66; \quad \mu^{-1} = 1 = y_3$

④ $\gcd(30; 11) \Rightarrow 1 \Rightarrow \exists a^{-1}$

$30 = 11 \cdot 2 + 8$

$11 = 8 \cdot 1 + 3$

$8 = 3 \cdot 2 + 2$

$3 = 2 \cdot 1 + 1$

$2 = 1 \cdot 2 + 0$

$1 = 3 - 2 \cdot 1 = 3 - 1 \cdot (8 - 3 \cdot 2) =$

$= -1 \cdot 8 + 3 \cdot 3 = -1 \cdot 8 + 3 \cdot (11 - 8 \cdot 1) =$

$= 3 \cdot 11 - 4 \cdot 8 = 3 \cdot 11 - 4 \cdot (30 - 11 \cdot 2) =$

$= -4 \cdot 30 + 11 \cdot 11; \quad \mu_4 = 30; \quad \mu^{-1} = 11$

$x \equiv 1 \cdot 165 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 110 \cdot 1 + 3 \cdot 66 \cdot 1 + 4 \cdot 30 \cdot 1 =$

$= 165 + 440 + 198 + 120 = 1923 \pmod{330} =$

$= 1643 = 330 = 1313 - 330 = 983 - 330 = 653 - 330 = 323$

$= 323 \pmod{330}$

№24

$a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$

а) $3^{302} \bmod 5$

$3^4 \equiv 1 \pmod 5$

$302 = 4 \cdot 75 + 2$

$4 = 2 \cdot 2 + 0$

$3^{302} = (3^4)^{75} \cdot 3^2 \pmod 5 = 1 \cdot 9 \pmod 5 = 9 \pmod 5 =$

$= 4 \pmod 5$

в) $5^{1002} \bmod 13$

$5^{12} \equiv 1 \pmod{13}$

$5^{1002} = (5^{12})^{167} \cdot 5^{-1} \pmod{13} = 1 \cdot 5^{-1} \pmod{13} =$

$= 8 \pmod{13}$

г) $23^{1002} \bmod 41$

$23^{40} \equiv 1 \pmod{41}$

$1002 = 25 \cdot 40 + 2$

$40 = 2 \cdot 4 + 0$

$23^{1002} = (23^{40})^{25} \cdot 23^2 \pmod{41} = 1 \cdot 9 \pmod{41} =$

$= 9 \bmod 41$

Домашня робота
Варіант 23

Кн. С. 372 – 375

№ 10.

№1

$V = \{S, A, B\}$; $\Sigma = \{a, b\}$ $\qquad L(G) = ?$

$T = \{a, b\}$

$G = (V, T, S, P)$

а) $P = \{S \to AB,\ A \to ab,\ B \to bb\}$

$S \to AB$

$S \to AB \to abB \Rightarrow abbb$

$L(G) = \{abbb\}$

б) $P = \{S \to AB,\ S \to aA,\ A \to a,\ B \to ba\}$

$S \to AB \Rightarrow aB \Rightarrow aba$

$S \Rightarrow aA \Rightarrow aa$

$L(G) = \{aba, aa\}$

в) $P = \{\cancel{S \to AB},\ S \to AA,\ \cancel{A \to aB},\ \cancel{A \to ab},\ \cancel{B \to b}\}$

$S \to AB \Rightarrow AB \Rightarrow aBb \Rightarrow abb$

$S \Rightarrow AB \Rightarrow abB \Rightarrow abb$

$S \Rightarrow AA \Rightarrow aBA \Rightarrow abaB \Rightarrow abab$

$L(G) = \{abb, abab\}$

г) $P = \{S \to AA,\ S \to B,\ A \to aaA,\ A \to aa,\ B \to bB,\ B \to b\}$

$S \to AA \Rightarrow AaaA \Rightarrow aaAA \Rightarrow aaaaA \Rightarrow$

$\Rightarrow aaaaaa$

$S \Rightarrow B \Rightarrow bB \Rightarrow bbB \Rightarrow bbb$

$L(G) = \{aaaaaa, bbb\}$

д) $P = \{S \to AB,\ A \to aAb,\ B \to bBa,\ A \to \lambda,\ B \to \lambda\}$

$S \Rightarrow AB \Rightarrow AbBa \Rightarrow AbBa \Rightarrow aAbbBa \Rightarrow$

$\Rightarrow abbba$

$L(G) = \{abbba\}$

№2

$G = \{V, T, S, P\}$

$V = \{0, 1, S\}$

$T = \{0, 1\}$

$P = \{S \to 0S1,\ S \to \lambda\}$

а) подубв. виведення для $0^3 1^3$

$S \Rightarrow 0S1 \Rightarrow 00S11 \Rightarrow 000S111 \Rightarrow 000\lambda111$

б) довести, що ця граматика породує мову $\{0^m 1^m \mid m = 0, 1, 2, \dots\}$

Потрібно два продукції, щоб подувати ланцюжок із якось к-сть 0, після яких є така сама к-сть 1. Перша продукція збільшує ланцюжок зередини, додаючи зліва від центру 0, а справа 1.

Друга продукція замінює початковий символ S на порожній ланцюжок λ. Одержимо граматику $G = \{V, T, S, P\}$, де $V = \{0, 1, S\}$, $T = \{0, 1\}$, S – початковий символ, $P = \{S \to 0S1,\ S \to \lambda\}$

№3

$G_1 = (V, T, S, P)$

$V = \{S, 0, 1\}$; $T = \{0, 1\}$

$P = \{S \to 0S,\ S \to S1,\ S \to \lambda\}$

а) подувати виведення для $0^n 1^n$

$S \Rightarrow 0S \Rightarrow 0S1 \Rightarrow 00S1 \Rightarrow 00S11 \Rightarrow 00S111 \Rightarrow$
$\Rightarrow 00S1111 \Rightarrow 00\lambda1111$

б) довести, що ця граматика породує мову $\{0^m 1^n \mid m, n = 0, 1, 2, \dots\}$

Потрібно три продукції, щоб подувати string із якось к-сть 0, після яких є будь-яка к-сть 1. Перша продукція збільшує string зередини, додаючи зліва від центру 0, друга продукція додає справа від центру 1. Третя продукція замінює початковий символ S на порожній ланцюжок λ. Одержимо граматику $G_1 = \{V, T, S, P\}$, де $V = \{S, 0, 1\}$, $T = \{0, 1\}$, S – початковий символ, $P = \{S \to 0S,\ S \to S1,\ S \to \lambda\}$

№4

$G_1 = \{V, T, S, P\}$

$V = \{S, A, 0, 1\}$

$T = \{0, 1\}$

$P = \{S \to 0S,\ S \to 1A,\ S \to 1,\ A \to 1A,\ A \to 1,\ S \to 1\}$

а) подувати виведення для $0^3 1^4$

$S \Rightarrow 0S \Rightarrow 01A \Rightarrow 011A \Rightarrow 0111A \Rightarrow 01111$

$S \Rightarrow 1A \Rightarrow 11A \Rightarrow 111A \Rightarrow 1111$

• $S \Rightarrow 0S \Rightarrow 00S \Rightarrow 001A \Rightarrow 0011A \Rightarrow 00111A \Rightarrow$
$\Rightarrow 001111$

• $S \Rightarrow 0S \Rightarrow 00S \Rightarrow 000S \Rightarrow 0001A \Rightarrow 00011A \Rightarrow 000111A \Rightarrow 0001111 \Rightarrow$

Довести, що ця граматика породжує мову, що та граматика із задачі 5

Потрібно чотири продукції, щоб побудувати string із двох 0, між якими чотири 1. Перша продукція збільшує ланцюжок зрідини, додаючи справа від центру 0, друга — зліва від центру 1, третя додає 1. Четверта продукція замінює початковий символ S на порожній string λ.

Одержимо граматику $G_2 = (V, T, S, P)$, де $V = \{S, 0, 1\}$, $T = \{0, 1\}$, S — початковий символ, $P = \{S \to 0S,\ S \to 1A,\ A \to 1A,\ A \to 1,\ S \to \lambda\}$

Також, можна використати три продукції, щоб побудувати ланцюжок із двох 0, між якими чотири 1. Перша продукція збільшує ланцюжок зрідини, додаючи зліва від центру 0, друга продукція додає справа від центру 1. Третя продукція замінює початковий символ S на порожній ланцюжок λ. Одержимо граматику $G_1 = (V, T, S, P)$, де $V = \{S, 0, 1\}$, $T = \{0, 1\}$, S — початковий символ, $P = \{S \to 0S,\ S \to 1,\ S \to \lambda\}$. $L(G) = \{0^n 1^4 0^n \mid n = 0, 1, 2, \ldots\}$

$\boxed{L5}$

Побудувати граматику, які породжують такі мови

$\{0^n 1^{2n} \mid n = 0, 1, 2, \ldots\}$

Потрібно дві продукції, щоб побудувати ланцюжок, у якого к-сть 1 після 0. Перша продукція збільшує ланцюжок зрідини, додаючи справа від центру 1, друга — зліва від центру 0. Третя продукція замінює початковий символ S на порожній ланцюжок λ. Четверта-заключна

Одержимо граматику $G = (V, T, S, P)$, де $V = \{0, 1, S\}$, $T = \{0, 1\}$, S — початковий символ, $P = \{S \to S1,\ S \to 1,\ S \to 0S\}$

$\{0^n 1^m \mid n = 0, 1, 2, \ldots\}$

Потрібно три продукції, щоб побудувати ланцюжок, у якого к-сть 0, між якими дорівнює 1. Перша продукція збільшує ланцюжок зрідини, додаючи зліва від центру 0, друга продукція додає справа від центру 1. Третя продукція замінює початковий символ S на порожній ланцюжок λ. Одержимо граматику $G = (V, T, S, P)$, де $V = \{S, 0, 1\}$, $T = \{0, 1\}$, S — початковий символ, $P = \{S \to 0S,\ S \to S1,\ S \to \lambda\}$

$\{0^n 1^m 0^n \mid m, n = 0, 1, 2, \ldots\}$

Потрібно три продукції, щоб побудувати ланцюжок із однакової к-сті двох 0, між якими дорівнює 1. Перша продукція збільшує ланцюжок з двох сторін, додаючи зліва від центру і справа 0, друга продукція додає в центр 1. Третя продукція замінює початковий символ S на порожній ланцюжок λ. Одержимо граматику $G = (V, T, S, P)$

$V = \{A, 0, 1\}$, $T = \{0, 1\}$, S – початковий символ,
$P = \{S \to 0A0,\ S \to 0,\ A \to 1A,\ A \to 1\}$

№6

$V = \{S, A, B, a, b\}$
$T = \{a, b\}$

Тема граматик

Нехай $G = (V, T, S, P)$ граматика типу 0, але не типу 1, граматика типу 1, але не типу 2, граматика типу 2, але не типу 3, граматика типу 3.

а) $P = \{S \to aAB,\ A \to Bb,\ B \to A\}$
$S \Rightarrow aAB \Rightarrow aBbB \Rightarrow aABb \Rightarrow aABb$

граматика типу 2, але не 3

б) $P = \{S \to aA,\ A \to B,\ A \to a\}$
$S \Rightarrow aA \Rightarrow aa$
$S \Rightarrow aA \Rightarrow ab$

Этим – тільки S ліва сторона → b праворуч

граматика типу 3

в) $P = \{S \to ABa,\ AB \to a\}$
$S \Rightarrow ABa \Rightarrow aa$

граматика типу 0, але не типу 1

г) $P = \{S \to ABA,\ A \to aB,\ B \to ab\}$

порушує 3, але типу 2, б зліва потрапляє стільки (B, A)

$S \Rightarrow ABA \Rightarrow ABaB \Rightarrow ABaab \Rightarrow aBBaab \Rightarrow$
$\Rightarrow aabBaab \Rightarrow aabBab\ aab$

граматика типу 2, але не типу 3

д) $P = \{S \to bA,\ A \to B,\ B \to A\}$
$S \Rightarrow bA \Rightarrow bB \Rightarrow bA \Rightarrow bA \Rightarrow bB \Rightarrow \ldots$

граматика типу 2, але не типу 3

е) $P = \{S \to aA,\ aA \to B,\ B \to aA,\ A \to b\}$

порушує 3 і є типу 0, б зліва aA

$S \Rightarrow aA \Rightarrow B \Rightarrow aA \Rightarrow ab$

порушує 1, б зліва більше нуля символів, але справа – нуль

$S \Rightarrow aA \Rightarrow ab$

граматика типу 0, але не типу 1

ж) $P = \{S \to bA,\ A \to b,\ S \to b\}$
$S \Rightarrow bA \Rightarrow bb$

б зліва кількість → при 1 справа кілька; при 2 → 1 кілька; 3 так

граматика типу 3

з) $P = \{S \to aB,\ B \to aA,\ aA \to b\}$

не 1 і 2

$S \Rightarrow aB \Rightarrow aaA \Rightarrow ab$

граматика типу 1, але не типу 2

и) $P = \{S \to aA,\ A \to bB,\ B \to B,\ B \to b\}$ – порушує правило

$S \Rightarrow aA \Rightarrow abB \Rightarrow aBB$ – не 1, б не 2, 3 так, граматика типу 1

граматика типу 2, але не типу 3

і) $P = \{S \to A,\ A \to B,\ B \to A\}$

б – кількість, а зліва – ні; не порушує, б 2, 3 так, але справа – ні

$S \Rightarrow A \Rightarrow B \Rightarrow A$

граматика типу 0, але не типу 3

№7

Паліндром наз. ланцюжок, який однаково читається в прямому й зворотному напрямках. Знайти контекстно вільну граматику, що породує всі паліндроми над алфавітом $\{0, 1\}$

$P = \{S \to 0S0,\ S \to 1S1,\ S \to \lambda,\ S \to 0,\ S \to 1\}$

$T = \{0, 1\}$

$V = \{S, 0, 1\}$

Типи граматик

нетермінал – ВЕЛИКА буква
термінал – мала буква

3 тип (регулярна)

- тільки S може переходити в λ:
  $S \to \lambda$, ~~$B \to \lambda$~~
- зліва нетермінал → в терм. + нетерм. або лише термінал:
  $S \to aB$, $S \to a$, ~~$S \to A$~~, ~~$A \to B$~~, ~~$S \to aAB$~~

2 тип (контекстно вільна)

- зліва нетермінал:
  $S \to Aa$, $A \to Bb$, $S \to ABA$, ~~$aA \to B$~~

1 тип (контекстно залежна)

- зліва менша к-сть символів ніж справа або однаково:
  $BA \to AB$, $1B \to 12$, ~~$AB \to a$~~, ~~$aA \to B$~~

0 тип

- немає обмежень

граматика типу 2, але не типу 3

№8

G - граматика з $V = \{S, a, b, c\}$, $T = \{a, b, c\}$, S - початковий символ і множина продукцій $P = \{S \to aBS, S \to bcS, S \to bbS, S \to a, S \to cb\}$. Побудувати дерево виведення

а) bcbba

$S \Rightarrow aBS \Rightarrow abbcS \Rightarrow abbcbbS \Rightarrow abbcbba$

$S \Rightarrow aBS \Rightarrow abbcS \Rightarrow abbcbbS \Rightarrow aabcbbcb$

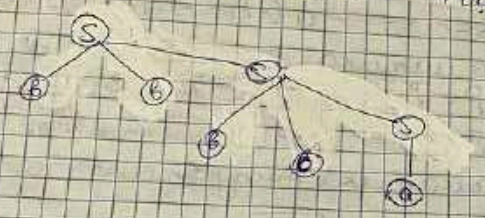
зверху вниз

$S \Rightarrow bcS \Rightarrow bcbbS \Rightarrow bcbba$

$bcbba \in L(G)$

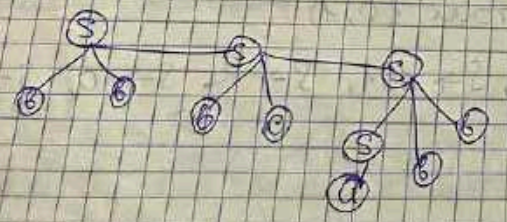
знизу вверх

$S \Rightarrow bcS \Rightarrow bcbbS \Rightarrow bcbba$



б) bbb cbba

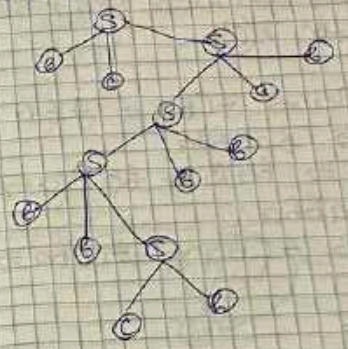
$S \Rightarrow bbS \Rightarrow bbbcS \Rightarrow bbbcbbS \Rightarrow bbbcbba$



в) bcabbbbbcb

$S \Rightarrow bcS \Rightarrow bcaBS \Rightarrow bcabbbS \Rightarrow bcabbbbcb$

$\Rightarrow bcabbbbbcb$



№9

G - граматика з $V = \{S, A, B, C, a, b, c\}$, $T = \{a, b, c\}$, S - початковий символ і множ. продукцій $P = \{S \to AB, A \to Ca, B \to Ba, B \to Cb, B \to b, C \to cb, C \to b\}$; розбір зверху вниз чи знизу.

а) bava

$S \Rightarrow AB \Rightarrow CaB \Rightarrow CaBa \Rightarrow CaCba \Rightarrow Cacbba \Rightarrow$

$\Rightarrow bacbba$

$S \Rightarrow AB \Rightarrow ABa \Rightarrow ABa \Rightarrow Caba \Rightarrow bava$;

належить мові L(G).

б) abab

$S \Rightarrow AB \Rightarrow CaB \Rightarrow baB \Rightarrow baBa \Rightarrow baba$

$S \Rightarrow AB \Rightarrow ABa \Rightarrow ACba \Rightarrow CaCba \Rightarrow baCba \Rightarrow$

$\Rightarrow babba$

$S \Rightarrow AB \Rightarrow ABa \Rightarrow Aba \Rightarrow Caba \Rightarrow baba$

Не належить

в) cbava

$S \Rightarrow AB \Rightarrow CaB \Rightarrow cbaB \Rightarrow cbaBa \Rightarrow cbava$

Належить мові $L(G)$

д) bbbcba

$S \Rightarrow AB \Rightarrow ABa \Rightarrow ACba \Rightarrow ABBba \Rightarrow$

$\Rightarrow CaBBba \Rightarrow babbba$

$S \Rightarrow AB \Rightarrow CaB \Rightarrow baB \Rightarrow baBa \Rightarrow$

$\Rightarrow baCba \Rightarrow babba$

$S \Rightarrow AB \Rightarrow ABa \Rightarrow ACba \Rightarrow Abbba \Rightarrow Cabbba$

$\Rightarrow babbba$

Не належить

№10

Знизу вверх

а) baba

$S \Rightarrow BA \Rightarrow BCa \Rightarrow BBa \Rightarrow Baba \Rightarrow baba$

Належить мові $L(G)$

б) abab

? $\Rightarrow aBab \Rightarrow abaB \Rightarrow abab$

не належить

в) cbava

$S = AB \Rightarrow ABa \Rightarrow Aba \Rightarrow Cabba \Rightarrow cbava$

Належить мові $L(G)$

г) bbbcba

? $\Rightarrow BBBA \Rightarrow BBBC\underline{a} \Rightarrow BBBba \Rightarrow BBbcba \Rightarrow Bbbcba \Rightarrow bbbcba$

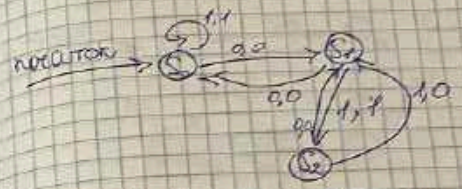
Заняття 14 (8/3)

Гін. с. 343

Скінч. автомати з виходом

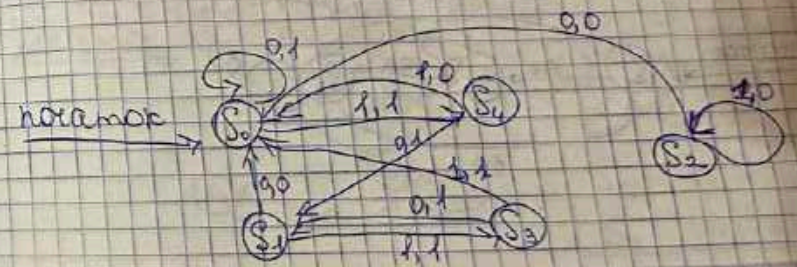
№11

	f		g	
	вхід		вхід	
	0	1	0	1
S_0	S_1	S_0	0	1
S_1	S_0	S_2	0	1
S_2	S_1	S_1	0	0



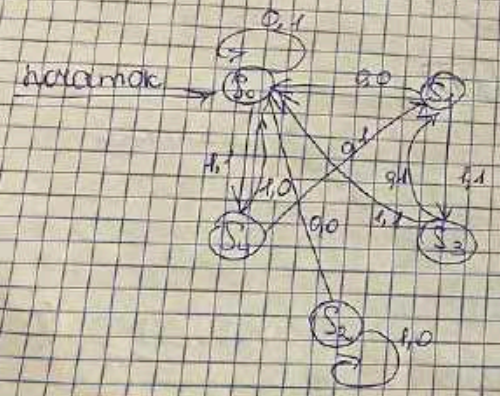
№12

	f		g	
стан	вхід		вхід	
	0	1	0	1
S_0	S_0	S_0	1	1
S_1	S_0	S_3	0	1
S_2	S_0	S_2	0	0
S_3	S_1	S_0	1	1
S_4	S_1	S_0	1	0

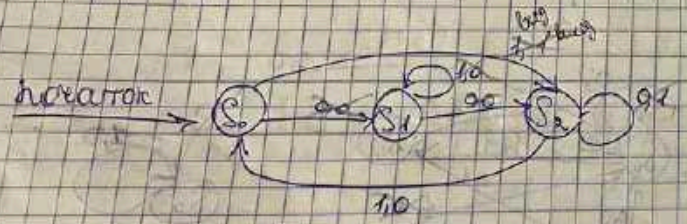


№13

стан	f вхід 0	f вхід 1	g вхід 0	g вхід 1
S_0	S_0	S_1	1	1
S_1	S_0	S_3	0	1
S_2	S_0	S_2	0	0
S_3	S_1	S_2	1	1
S_4	S_1	S_2	1	0

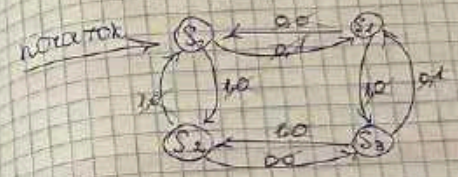


№14



стан	f вхід 0	f вхід 1	g вхід 0	g вхід 1
S_0	S_1	S_2	0	1
S_1	S_2	S_1	0	0
S_2	S_2	S_0	1	0

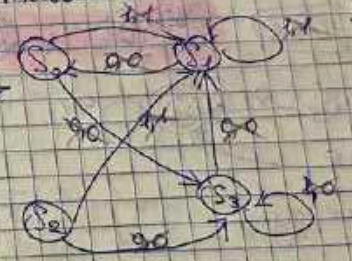
№15



стан	f вхід 0	f вхід 1	g вхід 0	g вхід 1
S_0	S_1	S_2	1	0
S_1	S_0	S_3	0	0
S_2	S_3	S_0	0	0
S_3	S_1	S_2	1	0

№16

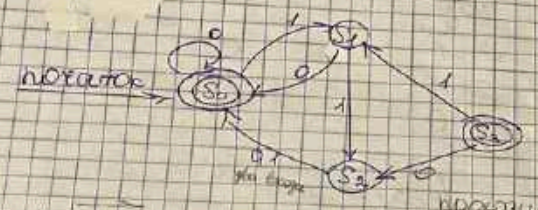
Подуд. маш. станів



стан	f вхід 0	f вхід 1	g вхід 0	g вхід 1
S_0	S_3	S_1	0	1
S_1	S_0	S_1	0	1
S_2	S_3	S_1	0	1
S_3	S_1	S_2	0	0

№21 скінч. автомат без виходу

◎ – заключ. стан



проходимо по ланц. має попасти в будь-який заключний стан

а) 010

S_0, S_1, S_3, S_2

Допускає

б) 1101

S_0, S_1, S_3, S_2, S_3

Допускає

в) 1111110

$S_0, S_1, S_3, S_2, S_1, S_3, S_2$

Допускає

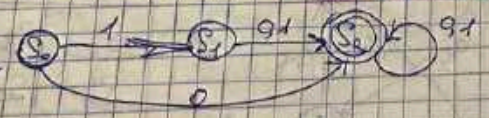
г) 01010101

$S_0, S_1, S_3, S_2, S_1, S_3, S_2, S_1, S_3$

Допускає

№22 Знайти мову, яку розпізнає скінчений автомат без виходу

а)



автомат без виходу

$0x$, x – ∀ ланц. з 0,1

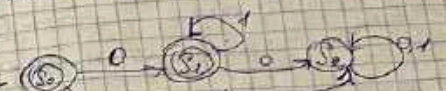
1) $1x$

2) $11x$

$B: \{0x, 10x, 11x\}$ – мова

$B: \{0x, 1xx$ – ∀ ланц. з 0,1$\}$

б)

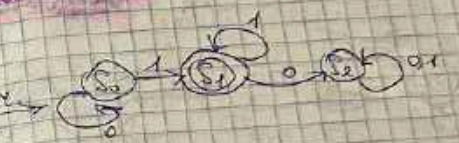


$B: \{1\} \cup \{0,1\}^*\{1\}$

$\{1\}$ – довжина к-сть парних символів розпізнає цей стан

коли в нас поч. автомат з ◎, то завжди $\{\lambda\}$

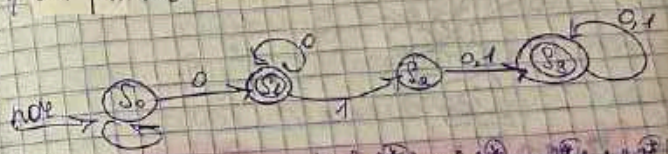
в)



1) 0^n1^mx, x – ∀ ланц. з 0,1

$B: \{0^n1^m \mid n\geq 0, m\geq 1\}$ – мова

г)



1) $\{1^m0^n \mid m\geq 0, n\geq 1\}$ $B: \{1\}^*\{0\}\{0\}^* \cup \{1\}^*\{0\}\{0\}^* \cup \{1\}\{0,1\}^*$ $\{0,1\}^*$ – мова

$\{\{1^m0^n \mid m\geq 0, n\geq 1\} \cup \{1^m0 \ldots$; $\{1\}^*\{0\}\{0\}^* \cup \{1\}^*\{0\}\{0\}^*\{0,1\}\{0,1\}^*$ – мова

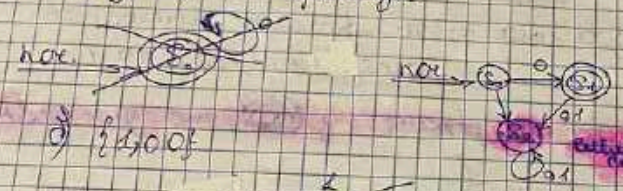
(*) – скінчені повторення 1 або 0 окремо

№25

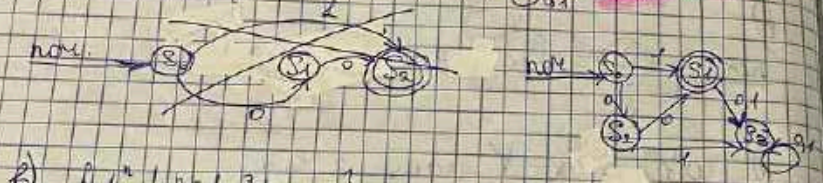
Детерміновані скінченні автомати

а) $\{0\}$

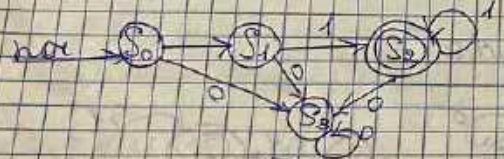
детерміновані — скінченні автомати без виходу, для кожної пари „стан-вхід" існує єдиний наступний стан, заданий функцією переходів.



б) $\{1,010\}$



в) $\{1^n \mid n=1,3,4,\dots\}$



№37

Лема про накачування

Нехай L — регулярна мова. Існує константа n (залежить від L) така, що кожний ланцюжок $\alpha \in L$, який задовольняє $|\alpha| \geq n$, можна розбити на три ланцюжки $\alpha = \beta\gamma\delta$ так, що виконуються умови:

1) $\gamma \neq \lambda$
2) $|\beta\gamma| \leq n$
3) для довільного $k \geq 0$ ланцюжок $\beta\gamma^k\delta \in L$

Це означає, що завжди можна знайти такий ланцюжок γ щонайменш від початку ланц. α, который можна „накачати". Отже, якщо ланц. γ повторити довільну к-сть разів або вилучити (при $k=0$), то одержаний ланц. буде належати мові L.

Довести нерегулярність

б) $L = \{0^m 1^m \mid m = 0, 1, 2, \dots\}$

від протилежного. Припустимо, що мова L регулярна. Нехай ланцюжок $\alpha = 0^{2m}1^m$ і $|\alpha| = 2m \geq n$. Тоді за лемою про накачування ланцюжки $\alpha = 0^m 1^m = \beta\gamma\delta$ та $\beta\gamma^k\delta$ нал. мові L, причому $\gamma \neq \lambda$. Тепер розглянемо такі міркування.

Ланц. γ не може містити водночас нулі й одиниці, бо ланц. γ^2 тоді містив би 10, і ланц. $\beta\gamma^2\delta$ не нал. би мові L. Отже, ланц. γ складається або тільки з 0, або тільки з 1. Але тоді ланц. $\beta\gamma^2\delta$ містить або забагато 0, або забагато 1. Звідси випливає, що ланц. $\beta\gamma^2\delta$ не нал. L. Ця суперечність доводить, що мова $L = \{0^m 1^m \mid m = 0, 1, 2, \dots\}$ нерегулярна.

$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} < 1$ – розв.

Нерівність Мак-Мілана

$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^4} = 1\frac{1}{16} > 1$

не розв.

№2

$A = \{a_1, a_2, a_3\}$

$B = \{b_1, b_2, b_3\}$

$a_1 \to b_1$ $\qquad$ $\bar{b}_1$

$a_2 \to b_1 b_2$ $\qquad$ $b_2 b$

$a_3 \to b_3 b_1$ $\qquad$ $b_1 b_3$

не преф. $\qquad$ не преф.

розв.:

Нерівн. Мак-Мілана

$\frac{1}{3^1} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{5}{9} < 1$

не знаю

$\underbrace{b_1 b_1}_{a_1} \underbrace{b_2 b_2}_{a_2} \underbrace{b_3}_{a_3} \underbrace{b_1 b_1}_{a_1} \underbrace{b_1 b_2}_{a_2}$

№3.

а) $\bar{U} = \{01, 10, 100, 111, 0111\}$ – не преф. (Ø)

не преф, б, не б/е

$\bar{V} = \{10, 01, 001, 111, 110\}$ – преф. (Ø)

б) $\bar{U} = \{1, 10, 00, 0100\}$ – не преф. (Ø)

$\bar{V} = \{01, 01, 00, 0010\}$ – не преф. (Ø)

$\frac{1}{1^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} = 1 + \ldots > 1$ $\quad$ не є розв.

розв. нер.

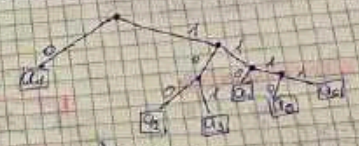
Кінець. Що ~

Метод Фано

а) $P = \{0.6, 0.1, 0.03, 0.08, 0.04, 0.06\}$ $\quad$ (≈0,3)

$l^{\text{п}}_{\text{ор}} = 0,6\times1 + 0,1\times3 + 0,08\times3 + 0,03\times3 + 0,04\times4 + 0,06\times4 =$
$= 0,6 + 0,3 + 0,27 + 0,24 + 0,12 + 0,24 = 1,93$

Ймовір. появи	Алфавіт появи	Розподіл кодових слів				Кодові слова
a_1	0,6	0				0
a_2	0,1		0	0		100
a_3	0,03			1		101
a_4	0,08	1		0		110
a_5	0,03		1	1	0	1101
a_6	0,06				1	1111



Д/з: Що $\bar{b}_1 \bar{b}_2 \bar{b}_3 \bar{b}_4 \bar{b}$

Домашня робота

Що

Метод Фано

а) $P = \{0.4, 0.4, 0.1, 0.03, 0.03, 0.02, 0.02\}$

$l^{\text{п}}_{\text{ор}} = 0,4\times1 + 0,4\times2 + 0,1\times3 + 0,03\times5 + 0,03\times5 + 0,02\times5 + 0,02\times5 = 1,8$

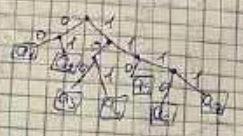
							Кодові слова
a_1	0,4	0					0
a_2	0,4		0				10
a_3	0,1			0			110
a_4	0,03	1			0		11100
a_5	0,03		1	1		0	11101
a_6	0,02				1	0	11110
a_7	0,02					1	11111

б) $P = \{0{,}3,\ 0{,}2,\ 0{,}2,\ 0{,}1,\ 0{,}1,\ 0{,}09,\ 0{,}07\}$

$l_{ср} = 0{,}3\times2 + 0{,}2\times2 + 0{,}2\times3 + 0{,}1\times3 + 0{,}1\times3 + 0{,}09\times4 + 0{,}07\times4$

$= 0{,}6 + 0{,}4 + 0{,}6 + 0{,}3 + 0{,}3 + 0{,}36 + 0{,}28 = 2{,}88$

a_1	0,3	0				00
a_2	0,2		0	1		01
a_3	0,2					10
a_4	0,1		0	1		110
a_5	0,1	1				111
a_6	0,09		1	0		1110
a_7	0,07			1	1	1111



Лекція 19

Задача 9

$K = \frac{\sum_{i=1}^{n} l_i p_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i}$ середня довжина кодового слова

$p_i < p_j \Rightarrow l_i \geq l_j$

$0{,}19 < 0{,}20 \Rightarrow 2 \geq 3$

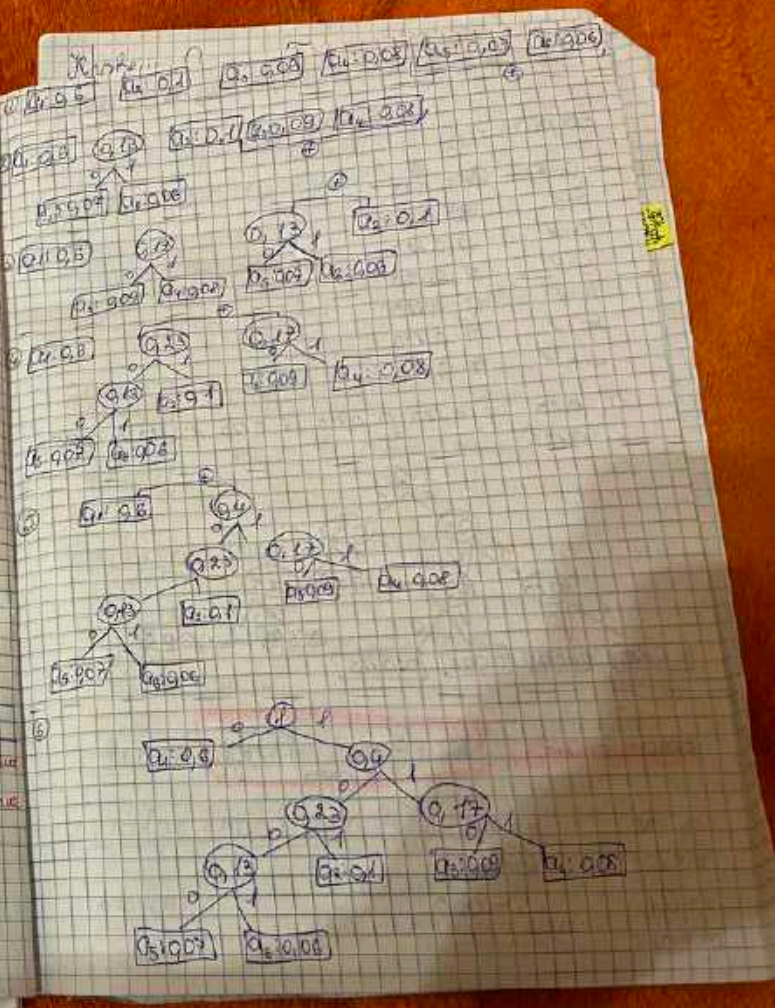
код оптимальний

№11

метод Гаффмана

а)

a_1	0,6 0	0,6 0	0,6 0	0,6 0	0,6 0 – більше
a_2	0,1 110	0,3 10	0,17 11	0,23 10	0,4 1 – менше
a_3	0,09 111	0,1 110	0,3 10	0,17 110	
a_4	0,08 110	0,09 111	0,1 110		
a_5	0,07 1110	0,08 111			
a_6	0,06 1110				



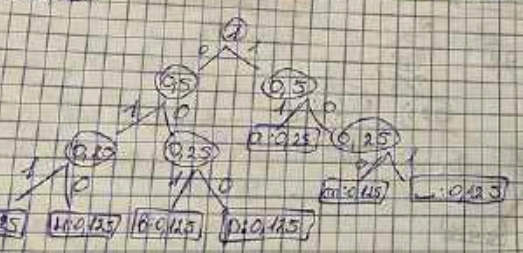
$l_{ср}^{Н} = 0{,}6 \cdot 2 + 0{,}1 \cdot 3 + 0{,}08 \cdot 3 + 0{,}06 \cdot 3 + 0{,}02 \cdot 4 + 0{,}0001 \cdot 4 = 2{,}0$

№16 (пример)

Вариант 4 (4 знака)

a-2	$\frac{2}{8} = 0{,}25$
в-2	$\frac{2}{8} = 0{,}125$
р-1	$\frac{1}{8} = 0{,}125$
с-1	$\frac{1}{8} = 0{,}125$
и-1	$\frac{1}{8} = 0{,}125$
т-1	$\frac{1}{8} = 0{,}125$
␣-1	$\frac{1}{8} = 0{,}125$

а: 0,25 в: 0,125 р: 0,125 с: 0,125 и: 0,125 т: 0,125 ␣: 0,125



коэф. стиц.: $k = \frac{l_{ср}^{кодов}}{l_{ср}^{знаков}}$ (%)

а = 01 п = 100

в = 101 н = 110

с = 111 ␣ = 000

т = 011

Кинрауз

$l_{ср}^{Н} = \frac{1}{2} \cdot p_i l_i = 0{,}25 \cdot 2 + (0{,}125 \cdot 3) \cdot 6 = 2{,}25$

$k = \frac{3 \cdot 24}{8} = \frac{72}{8} = 0{,}9 = 90\%$

зр. 11,11,16 (пред. код Шеннона)

Задача 25

№14

а) v: {0000000, 011100, 100111, 111011}

$\oplus \begin{array}{r} 011100 \\ 100111 \\ \hline 111011 \end{array}$ кодр в системе

$- \begin{array}{r} 011100 \\ \oplus 111011 \\ \hline 100111 \end{array}$ кодр в системе

$- \begin{array}{r} 100111 \\ \oplus 111011 \\ \hline 011100 \end{array}$ кодр в системе

линейный код

$d(V) = 3$ (значит к-сть $i = 3$)

кодовое расст.

№18

011011 110011 010101 110111

№19

011010 110010 100111 011110

№20

1101 (7,4) - код Хемминга

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{2^0}{p_1} \quad \underset{2^1}{p_2} \quad \underset{2^2}{p_4} \quad \underset{2^3}{p_8} \quad \underset{2^4}{p_{16}} \quad \underset{2^5}{p_{32}} \quad \underset{2^6}{p_{64}}$$

$$p_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \oplus p_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \oplus p_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$p_1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 = 0 \Rightarrow p_1 = 1$

$p_2 \oplus 1 \oplus 1 = 0 \Rightarrow p_2 = 0$

$p_4 \oplus 1 \oplus 1 = 0 \Rightarrow p_4 = 0$

$\boxed{1\,0\,1\,0\,1\,0\,1}$

№32.

а) 1100 1011 1011

Коли заход, інформ. ≠ елем.

по черзі записати ні ≠ елем, які входять

№32.

а) 1001001 ⇒ 1101001 $\xrightarrow{\text{дод}}$ 0001

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$ помилка є

$010 = 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 2$

№33.

P(7, 1)

1100 1011 1111 000 1111 001000

Хтось...

а) 1110000 ⇒ 1110000 $H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$110 = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2 = 4 + 2 = 6$ подв. помилка

1000 – дод.

б) 1100 111 ⇒ 1100 110 $\xrightarrow{\text{дод}}$ 0110

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$111 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 1 + 1 + 1 = 7$ под. помилка

1000 0110 1011 0110

№36.

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

а) 0010001

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

⇒ 2 помилки, не можливо визн.

б) 0011001 ⇒ 0011001

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

помилка в 7 поз., ~~ск~~ є 5 поз. такиї вказ.

ДЗ: ~~14, 30, 34, 36, 38, 41~~

№14. 1001 (9.3) коди

№42. 1011 01110

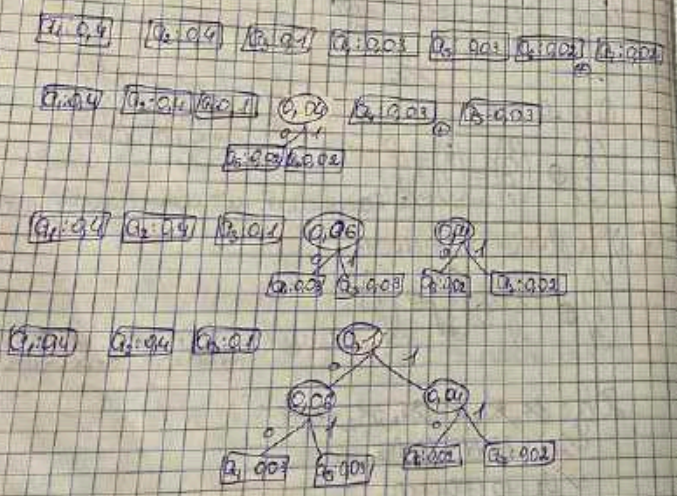
Домашня робота №11

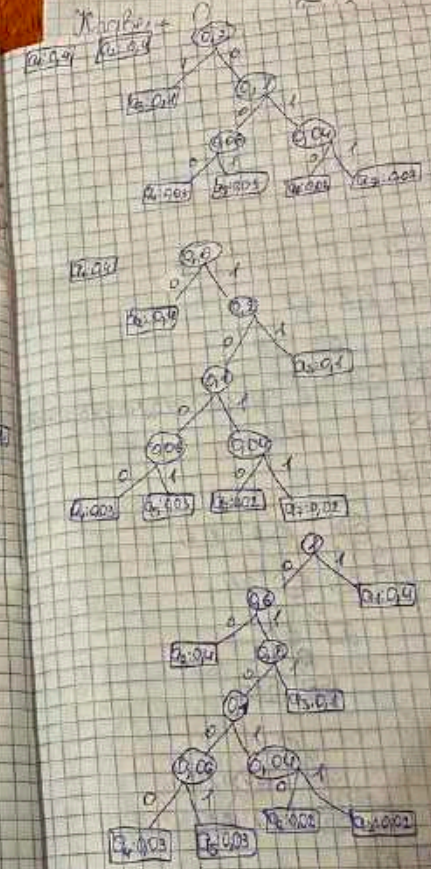
метод Гаффмана

1) $P = \{0.4, 0.4, 0.1, 0.03, 0.03, 0.02, 0.02\}$

1. Кодування

a_1	0,4 1	0,4 1	0,4 1	0,4 1	0,4 1	0,6 1
a_2	0,4 00	0,4 00	0,4 00	0,4 00	0,4 00	0,4 00
a_3	0,1 011	0,1 011	0,1 011	0,2 01	0,2 01	
a_4	0,03 0100	0,03 0100	0,03 0100	0,1 010		
a_5	0,03 0101	0,03 0101	0,03 0101			
a_6	0,02 01100	0,04 0101				
a_7	0,02 01101					



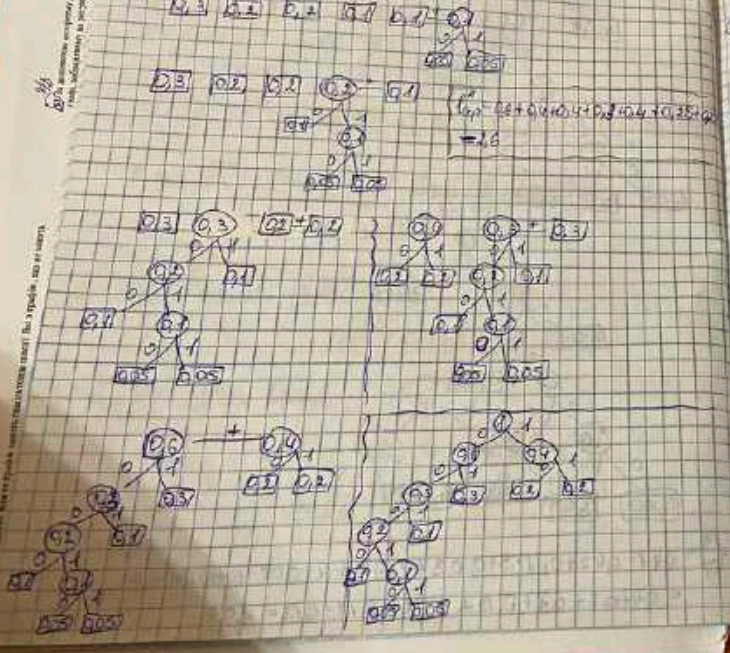


$l_{ср} = 0{,}4\cdot1 + 0{,}4\cdot2 + 0{,}1\cdot3 + 0{,}03\cdot4 + 0{,}03\cdot4 + 0{,}02\cdot5 + 0{,}02\cdot6 =$

$= 0{,}4 + 0{,}8 + 0{,}3 + 0{,}12 + 0{,}12 + 0{,}12 + 0{,}12 = 1{,}98$

а) P={0,3, 0,2, 0,2, 0,1, 0,1, 0,05, 0,05}

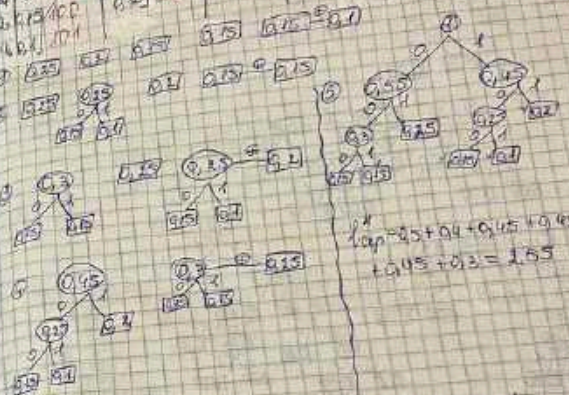
a_1	0,3 01	0,3 01	0,3 01	0,3 01	0,4 1
a_2	0,2 10	0,2 10	0,2 10	0,3 00	0,3 00
a_3	0,2 11	0,2 11	0,2 11	0,2 10	0,3 01
a_4	0,1 001	0,1 001	0,1 001	0,2 11	
a_5	0,1 000	0,1 000	0,2 000		
a_6	0,05 0001	0,1 0001			
a_7	0,05 0001				



$l_{ср}^* = 0,6+0,4+0,4+0,2+0,4+0,3+0,3 = 2,6$

б) P={0,25, 0,25, 0,25, 0,15, 0,15, 0,05, 0,05}

a_1	0,25 01	0,25 01	0,25 01	0,25 01	0,5 0
a_2	0,25 11	0,25 10	0,25 00	0,25 01	0,5 1
a_3	0,25 00	0,2 11	0,25 01	0,2 11	
a_4	0,15 101	0,15 00	0,2 10		
a_5	0,15 100	0,15 01			
a_6	0,05 1001				
a_7	0,05 1001				

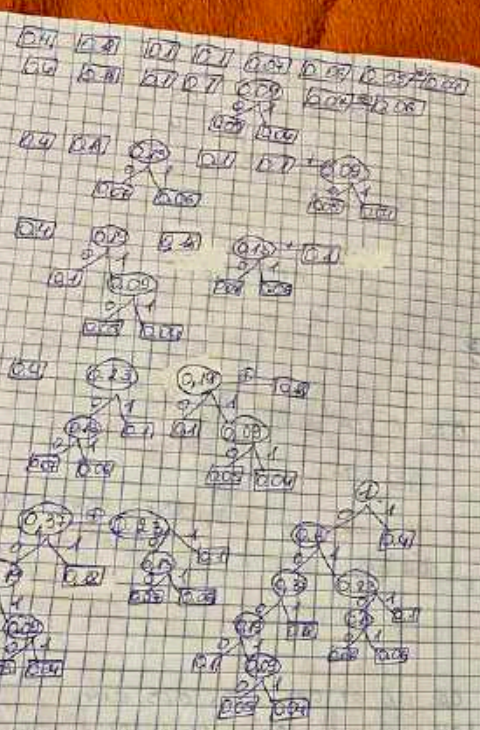


$l_{ср}^* = 0,5+0,4+0,45+0,45+0,45+0,3 = 2,55$

д) P={0,4, 0,18, 0,1, 0,1, 0,07, 0,06, 0,05, 0,04}

a_1	0,4 1	0,4 1	0,4 1	0,4 1	0,4 1	0,4 1	0,6 0
a_2	0,18 001	0,18 001	0,18 001	0,18 001	0,18 001	0,18 001	0,4 1
a_3	0,1 000	0,1 000	0,1 000	0,1 000	0,1 000		
a_4	0,1 011	0,1 011	0,1 011	0,1 011			
a_5	0,07 0101	0,07 0101	0,07 0101				
a_6	0,06 0100	0,06 0100					
a_7	0,05 01001						
a_8	0,04 01001						

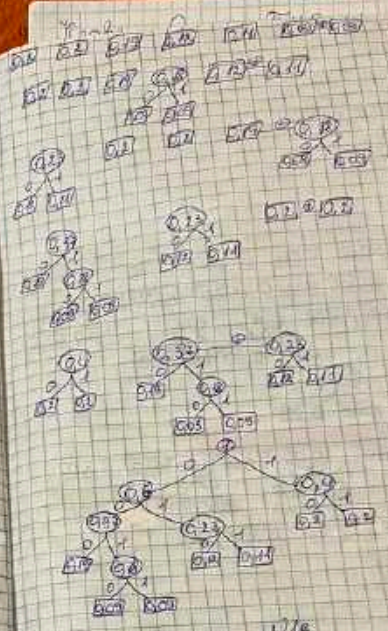
$l_{ср}^* = 0,4\cdot1+0,18\cdot3+0,1\cdot3+0,1\cdot4+0,07\cdot4+0,06\cdot4+0,05\cdot5+0,04\cdot5 =$
$= 0,4+0,54+0,3+0,4+0,28+0,24+0,25+0,2 = 2,61$



б) P={0.2, 0.2, 0.19, 0.12, 0.11, 0.08, 0.08}

a_1 0.2 10	0.2 10	0.2 01	0.37 00	0.4 1	0.6 0	finish
a_2 0.2 11	0.2 11	0.2 10	0.23 01	0.37 00	0.4 1	start
a_3 0.19 000	0.19 000	0.19 11	0.21 10	0.23 01		
a_4 0.12 001	0.12 001	0.19 000	0.2 11			
a_5 0.11 010	0.12 010	0.12 001				
a_6 0.08 011	0.11 011					
a_7 0.08 011						

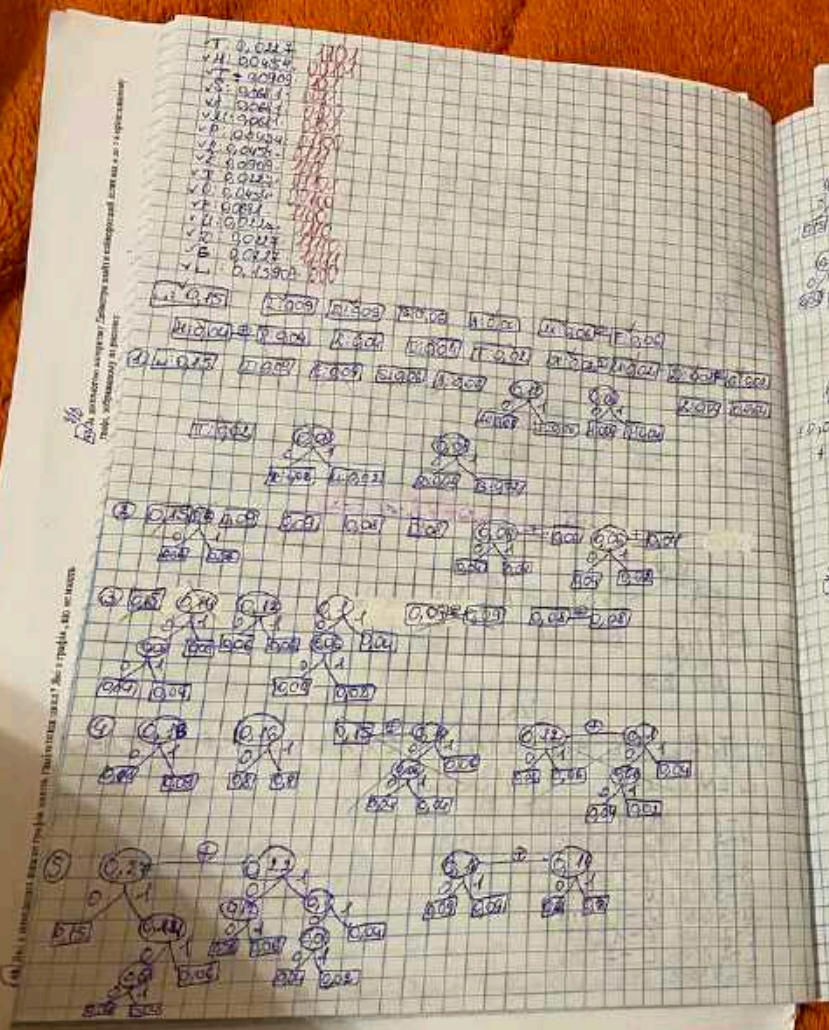
l_{ap} = 0.4+0.4+0.57+0.36+0.33+0.36+0.36 = 2.78

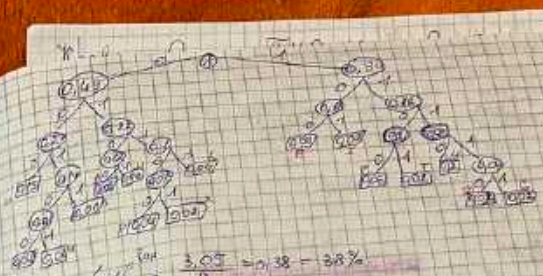


1.16

а) THIS_IS_A_SIMPLE_EXAMPLE_OF_HUFFMAN_ENCODING (44 знака)

T – 1 0.0454 X – 1 0.0454
H – 1 0.0454 O – 1 0.0454
I – 4 0.018 F – 3 0.0681
S – 3 0.0681 U – 1 0.0454
A – 3 0.0681 N – 3 0.0681
M – 3 0.0681 D – 1 0.0454
P – 2 0.0454 G – 1 0.0454
L – 2 0.0454 _ – 7 0.159
E – 4 0.0908





$$K = \frac{\sum p_i l_i}{8} = \frac{3,05}{8} = 0,38 = 38\%$$

$$l_{ср} = 0,02\cdot 4 + 0,02\cdot 4 + 0,03\cdot 3 + 0,06\cdot 4 + 0,06\cdot 4 + 0,06\cdot 4 + 0,04\cdot 5 + 0,04\cdot 4 + 0,02\cdot 3 + 0,02\cdot 5 + 0,04\cdot 5 + 0,06\cdot 4 + 0,02\cdot 4 + 0,02\cdot 5 + 0,02\cdot 5 + 0,15\cdot 3 = 0,08 + 0,18 + 0,27 + 0,24 + 0,24 + 0,24 + 0,2 + 0,08 + 0,27 + 0,2 + 0,2 + 0,09 = 0,08 + 0,1 + 0,1 + 0,45 = 3,05$$

Домашняя работа

№1

а) $V = \{00001, 01110, 10010, 11100\}$

00001 / 01110 — на случ в сист

00001 / 10010 — на случ в сист

11100 / 00001 — на случ в сист

01110 / 10010 — на случ в сист

01110 / 11100 — на случ в сист

10010 / 11100 — на случ в сист

не линейный код

$d(V) = 0$

б) $V = \{00001, 01111, 10010, 11100\}$

00001 / 01111 — на случ

00001 / 10010 — на случ

00001 / 11100 — на случ

01111 / 10010 — на случ

01111 / 11100 — на случ

10010 / 11100 — на случ

не линейный

а) $U = 100011, 00001, 1010, 111103$

$\oplus \begin{matrix} 00011 \\ 100011 \\ 000010 \end{matrix}$ $\quad \oplus \begin{matrix} 00011 \\ 10101 \\ 10101 \end{matrix}$ $\quad \oplus \begin{matrix} 00011 \\ 11110 \\ 11101 \end{matrix}$ $\quad \oplus \begin{matrix} 00001 \\ 10110 \\ 10111 \end{matrix}$ $\quad \begin{matrix} 1010 \\ 1110 \\ 1100 \end{matrix}$

не лінійний код

$d(U) = 0$

№30

1011

(7,4) – код Гемінга

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$H \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \oplus H \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$P_1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 \Rightarrow P_1 = 1$

$P_2 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 \Rightarrow P_2 = 0$

$P_4 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 \Rightarrow P_4 = 0$

В: 1010011

№32

б) 100111001111

1001	1101	0111
$P_1 = 1$	$P_1 = 1$	$P_1 = 1$
$P_2 = 0$	$P_2 = 0$	$P_2 = 0$
$P_4 = 0$	$P_4 = 0$	$P_4 = 0$

1010001101010110001111

а) 1001011 1011 $\quad P_1 = 1,\ P_2 = 0,\ P_4 = 0$

1010100101001110100111

№1

а) $0111001 \xrightarrow{\text{розш}} 0110111 \xrightarrow{\text{розш}} 1011$ $\quad H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ помилка є

$110 = 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 4 + 2 = 6$

$d_3 d_6 d_5 d_4 = 1011$

в) $0011111 \xrightarrow{\text{розш}} 0001111 \xrightarrow{\text{розш}} 0111$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ помилка є

$011 = 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 2 + 1 = 3$ – поз.

д) $0110100 \xrightarrow{\text{розш}} 0111100 \xrightarrow{\text{розш}} 1100$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ помилка є

$100 = 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 4$ – поз.

№36

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

а) 00100001

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ 2 помилки, виявити їх не можливо

б) 00110001 → 00110011

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ помилка в 7-й поз. що є матр. є лінійно залежна

№37

(15,11) код Хемминга

10110110

$$H = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&1 \\ 0&0&0&1&1&1&1&0&0&0&0&1&1&1&1 \\ 0&1&1&0&0&1&1&0&0&1&1&0&0&1&1 \\ 1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1 \end{pmatrix}$$

$$P_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \oplus P_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \oplus P_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \oplus P_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \oplus P_5 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$P_1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 = 0 \Rightarrow P_1 = 0$

$P_2 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 = 0 \Rightarrow P_2 = 0$

$P_3 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 = 0 \Rightarrow P_3 = 0$

$P_4 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 = 0 \Rightarrow P_4 = 1$

в) 001001110110110

№3

(15, 11) код Хемминга

$$H = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&1 \\ 0&0&0&1&1&1&1&0&0&0&0&1&1&1&1 \\ 0&1&1&0&0&1&1&0&0&1&1&0&0&1&1 \\ 1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1 \end{pmatrix}$$

$$H = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0 \\ 0&1&1&1&0&0&0&1&1&1&0&1&1&1&0 \\ 1&0&1&1&0&1&0&0&1&0&1&1&0&1&0 \\ 1&1&0&1&1&0&1&0&0&1&0&0&0&0&1 \end{pmatrix}$$

№4

(9,5) код

$G(x) = x^4+x+1,\ k=5$

$k_{\text{инф}} = 5$; $G(x)\,x^k$

(9,5) код

$F(x) = Q(x)\cdot x^k + R(x)$

а) 10011 (9,5) - код

$10011 \sim x^4+x+1 = Q(x)$

$Q(x)\,x^4 = (x^4+x+1)\,x^4 = x^8+x^5+x^4$

$x^8+x^5+x^4 \,/\, x^4+x+1$

$-x^8+x^5+x^4 \,/\, x^4$

$R(x)$

$F(x) = Q(x)\,x^4 + R(x) = x^8+x^5+x^4+0 = x^8+x^5+x^4 \sim$

в) 100110000

б) 11011 (9,5)-код

$11011 \sim x^4+x^3+x+x^0 = x^4+x^3+x+1 = Q(x)$

$Q(x)\,x^4 = (x^4+x^3+x+1)\,x^4 = x^8+x^7+x^5+x^4$

$x^8+x^7+x^5+x^4 \,/\, x^4+x+1$

$x^8+x^5+x^4 \,/\, x^4+x^3-1$

x^7

$x^7+x^4+x^3$

$-x^4-x^3$

$-x^4-x-1$

$-x^3+x+1$

$F(x) = Q(x)\,x^4 + R(x) = x^8+x^7+x^5+x^4-x^3+x+1 \sim$

в) ~ 110111011

№2

а) $(9,2)=1$ остаток — ?

$10^{10}+10^{9}+10^{8}+\dots+10^{2}+10+1$

$x^{10}+x^{9}+x^{8}+\dots+x^{2}+x+1 \;/\; x+2=1$

$x^{10}+x^{9}+x^{8}+\dots+x^{2}+x+1 \;/\; x+2$

$x^{10}+2x^{9}$

$-x^{9}+x^{8}+\dots+x^{2}+x+1$

$-x^{9}-2x^{8}$

$x^{8}+\dots+x^{2}+x+1$

$x^{8}+2x^{7}$

$-x^{7}+\dots+x^{2}+x+1$

$-x^{7}-2x^{6}$

$x^{6}+\dots+x^{2}+x+1$

$x^{6}+2x^{5}$

$-x^{5}+\dots+x^{2}+x+1$

$-x^{5}-2x^{4}$

$x^{4}+\dots+x^{2}+x+1$

$x^{4}+2x^{3}$

$-x^{3}+x^{2}+x+1$

$-x^{3}-2x^{2}$

$x^{2}+x+1$

$x^{2}+2x$

$-x+1$

$-x-2$

3

Остаток равен, то b остаток 0.

б) $(3,2)=1$ остаток — ?

$10^{10}+10^{9}+10^{8}+\dots+10^{2}+10+1$

$x^{10}+x^{9}+x^{8}+\dots+x^{2}+x+1 \;/\; x^{2}+x+1$

$x^{10}+x^{9}+x^{8}$

$-x^{8}+x^{7}+x^{6}+\dots+x^{2}+x+1 \;/\; x^{2}+x+1$

$x^{8}+x^{7}+x^{6}$

$-x^{6}+x^{5}+x^{4}+\dots+x^{2}+x+1$

$-x^{6}-x^{5}-x^{4}$

$x^{4}+x^{3}+x^{2}+x+1$

$x^{4}+x^{3}+x^{2}$

$-x^{2}+x+1$

$-x^{2}-x-1$

$2x+2$

Остаток 2, то b остаток.

Задача 21

№1.

а) $141:8$; $141=8\cdot 5+4$

$q=5$; 44 div 8 — частное

$r=4$; $44 \bmod 8$ — остаток

б) $-123:19$

$-123=19\cdot(-6)-9=19\cdot(-6)+(-9)$

$-123=19(-7)+10$

$-123 \bmod 19=10$

$-123 \operatorname{div} 19=-7$

№2

$0\equiv 17$ $0+0$

0 делится 0

$0 \bmod 17=0$

№3

а) $(100+1) \bmod 24 = 101 \bmod 24 = 5$

$0\le a<19$; $a\equiv 100 \pmod{19}$; $b\equiv 1 \pmod{19}$

б) $c\equiv 13a \pmod{19}$

$13\equiv 13 \pmod{19}$

$a\equiv 11 \pmod{19}$

$c=13a\equiv 13\cdot 11 \pmod{19}\equiv 143 \pmod{19}\equiv 10$

$c\equiv 13a=10 \pmod{19}$

$a\equiv b \pmod m$ и $c\equiv d \pmod m \Rightarrow$

1) $a+c\equiv b+d \pmod m$

2) $ac\equiv bd \pmod m$

3) $ac\equiv bd \pmod m$

г) $c\equiv 2a^2+3b^2 \pmod{19}$

$a\cdot a=11^2 \pmod{19}$ $\quad 2a^2=2\cdot 11^2 \pmod{19}=242 \pmod{19}=14$

$b\cdot b=2^2 \pmod{19}$ $\quad 3b^2=3\cdot 2^2 \pmod{19}=12 \pmod{19}=8$

$c\equiv 2a^2+3b^2 \pmod{19}=14+8 \pmod{19}=22 \pmod{19}=3$

№6.

а) $a=43 \pmod{23}$ $\quad -22\le a\le 0$

$43\equiv 20 \pmod{23}$ $\quad [0]: -46, -23, 0, 23, 46, 69, \dots$

$43-23=20$ $\quad [1]: \dots, -22, 1, 24, 47, \dots$

$20-23=-3$

$-3\equiv 43 \pmod{23}$ $\quad [22]: \dots, 22, \dots$

№8.

а) $(117 \bmod 31+230 \bmod 31) \bmod 31=$

$(21+22) \bmod 31=44 \bmod 31=13$

а) $(10^2 \bmod 41) \bmod 9 \equiv (19 \bmod 41) \bmod 9$

$\equiv (361 \bmod 41) \bmod 9 = 39 \bmod 9 = 6$

б) $(3 \cdot 2^8 \bmod 13)^2 \bmod 11 = (32 \bmod 13 \cdot 32 \bmod 13)^2 \bmod 11 =$

$(2 \cdot 16 \bmod 13)^2 \bmod 11 = 6 \cdot 6 \bmod 13)^2 \bmod 11 =$

$(2 \cdot 16 \bmod 13)^2 \bmod 11 = 7^2 \bmod 11 = 61 \bmod 11 = 9$

№10

а) 101 – просте?

Якщо n складне число, то має простий дільник не більший ніж $\sqrt{n}$

$\sqrt{101} = 10{,}04 \ldots$

2, 3, 5, 7

101 / 2

101 / 3

101 / 5 $\Rightarrow$ 101 – просте

101 / 7

б) 27 – просте?

$\sqrt{27} = 5{,}\ldots$

2, 3, 5

27 / 2

27 : 3 = 9

$27 = 3 \cdot 9$ $\Rightarrow$ 27 – складне число

№11.

в) 101 – просте

не розкладається

г) $\sqrt{39} = 6{,}\ldots$ 2, 3, 5

39 / 2

39 : 3 = 13

$39 = 3 \cdot 13$

просте

д) $\sqrt{77} = 9$

2, 3, 5, 7

81 / 2

$81 = 3 \cdot 27$

$27 = 3 \cdot 9$

$9 = 3$

9 / 2

$9 \cdot 3 = \boxed{3 \cdot 3}$

$81 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$

Відп: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11

Домашня робота

№1.

а) 777 : 21

частка: $q = 777 \operatorname{div} 21 = 37$

остача: $r = 777 \bmod 21 = 0$

б) $-1 : 23$; $23 \cdot (-1) + 22$

$q = -1 \operatorname{div} 23 = -1$

$r = -1 \bmod 23 = 22$

в) $-2002 : 87$ | $-2002 = 87 \cdot (-23) - 1 = 87 \cdot (2^3) + (-1) =$

$= 87 \cdot (-24) + 87$

$q = -2002 \operatorname{div} 87 = 52$

$r = -2002 \bmod 87 = 86$

d) 1234567 : 1001 $\quad$ $1234567 = 1233 \cdot 1001 + 334$

1234567 mod 1001 = 334

1234567 div 1001 = 1233

20) $-100 : 101 =$ $\quad$ $-100 = 101(-1) + 1$

-100 mod 101 = 1

-100 div 101 = -1

112.

a) $(102 + 19) \bmod 24 = 121 \bmod 24 = 19$

$121 = 24 \cdot 4 + 19$

R: 19 od 19

b) $(45 - 19) \bmod 24 = 26 \bmod 24 = 2$

$26 = 24 \cdot 1 + 19$

R: 2 od 19

113. $\underline{a \equiv 21 \pmod{19}}$; $\underline{b \equiv 3 \pmod{19}}$

a) $0 \le c \le 18$ $\quad$ c = ?

$c \equiv 26 \pmod{19} \equiv 8 \cdot 3 \pmod{19} \equiv 24 \pmod{19} \equiv 5$

$c \equiv 8b \equiv 5 \pmod{19}$

b) $c \equiv (a - b) \pmod{19}$

$c \equiv (a - b) \bmod 19 \equiv 21 - 3 \pmod{19} \equiv 2 \pmod{19} = 8$

$8 = 19 \cdot 1 - 9 = 19 \cdot 1 + (-9) = 19 \cdot 0 + 8$

$c \equiv a - b \pmod{19} \equiv 8 \pmod{19}$

v) $c \equiv 4a + 3b \pmod{19}$

$c \equiv 4a + 3b \pmod{19} = 4 \cdot 21 + 3 \cdot 3 \pmod{19} =$

$= 77 + 9 \pmod{19} = 86 \bmod 19 = 10$

$86 = 19 \cdot 4 + 10$

$c \equiv 4a + 3b \pmod{19} = 10 \pmod{19}$

e) $c \equiv a^3 + 6b^3 \pmod{19}$

$a \cdot a \cdot a = 21^3 \pmod{19} = 9261 \pmod{19} = 1$

$b \cdot b \cdot b = 3^3 \pmod{19}$

$a^3 = 1$

$6b^3 = 27 \cdot 3 \pmod{19} = 81 \bmod 19 = 4$

$c \equiv a^3 + 6b^3 \pmod{19} = 1 + 4 \pmod{19} = 5 \bmod 19 = 5$

$19 = 19 \cdot 1 - 5 = 19 \cdot 0 + 5$

114.

a) $-17 \bmod 2 = 1$

$-17 = 2 \cdot (-9) - (1)$

b) $144 \bmod 4 = 4$

$144 = 4 \cdot 20 + 4$

b) $-101 \bmod 13 = 3$

$-101 = 13 \cdot (-8) - 10 = 13 \cdot (-8) + 3$

v) $199 \bmod 19 = 9$

$199 = 19 \cdot 10 + 9$

115.

a div m, a mod m = ?

a) a = -111

m = 99

$-111 \text{ div } 99 = -2$

$-111 \bmod 99 = 87$

$-111 = 99(-2) + 87$

b) a = -9999

m = 101

$-9999 \text{ div } 101 = -99$

$-9999 \bmod 101 = 0$

$-9999 = 101(-99) + 0$

b) a = 10299

m = 999

$10299 \text{ div } 999 = 10$; $\quad 10299 \bmod 999 = 309$

$10299 = 999 \cdot 10 + 309$

v) a = 123456

m = 1001

$123456 \bmod 1001 = 333$

$123456 \text{ div } 1001 = 123$

$123456 = 1001 \cdot 123 + 333$

№6.

д) $a \equiv 14 \pmod{29}$ $\quad -14 \le a \le 14$

{27} -15, 14, 43, 72, ...

{37} ..., -16, 13, 42, ...

{19} ..., -13, -11, 15, ...

$17 - 29 = -12$

$-12 \equiv 17 \pmod{29}$

Відп. -12

в) $a \equiv -11 \pmod{21}$ $\quad 90 \le a \le 110$

$-11 + 21 = 10$

$10 + 21 = 31$; $31 + 21 = 52$; $52 + 21 = 73$; $73 + 21 = 94$

$94 + 21 = 115$ ✗

$-11 \pmod{21} = 10$

$94 \pmod{21} = 10$; $\quad 94 \equiv -11 \pmod{21}$ якщо дискова сорочка, то конгруентні ($\equiv$)

Відп. 94

№7

$a \equiv 3 \pmod 7$

а) $3 \pmod 7 = 3$

$2 \pmod 7 = 3$

неконгруентні

$37 \pmod 7 = 2$

б) $3 \pmod 7 \ne -17$

$-17 \pmod 7 = 4$

неконгруентні

в) $3 \pmod 7 = 66$

$66 \pmod 7 = 3$

конгруентні

г) $3 \pmod 7 = -67$

$-67 \pmod 7 = 3$

конгруентні

№8.

а) $(177 \bmod 31 \cdot 170 \bmod 31) \bmod 31 =$

$= 22 \cdot 22 \pmod{31} = 484 \pmod{31} = 19$

№9.

а) $(7^7 \bmod 23)^2 \bmod 31 =$

$(7^7 \bmod 23)^2 \bmod 31 = (7 \cdot 7 \bmod 23)^2 \bmod 31 = (49 \bmod 23)^2 \bmod 31 =$

$= 11^2 \bmod 31 = 121 \bmod 31 = 7$

б) $(21^7 \bmod 15)^2 \bmod 22 =$

$(21^7 \bmod 15)^2 \bmod 22 = (21 \bmod 15)^7 \bmod 22 =$

$= (6 \cdot 6 \bmod 15)^3 \bmod 22 = (36 \bmod 15)^3 \bmod 22 =$

$= 6^3 \bmod 22 = 216 \bmod 22 = 8$

№10.

а) 19 - просте - ?

якщо n складне число $\sqrt{n}$ - має простий ел. дільника, менш ніж n

$\sqrt{19} = 4,3...$

2, 3

19/2

19/3

$19 \ne 27$ => 19 - просте число

б) 93 - просте - ?

$\sqrt{93} = 9,...$

2, 3, 5, 7

93/2

$93 : 3 = 31$; $93 = 31 \cdot 3$ => складне число

93/5

93/7

в) 107 - просте - ? $\quad \sqrt{107} = 10,3...$

2, 3, 5, 7

107/2 $\quad$ 107/3 $\quad$ 107/5 $\quad$ 107/7 => 107 - просте число

г) 113 - просте - ? $\quad \sqrt{113} = 10,6...$

2, 3, 5, 7

113/2 $\quad$ 113/3 $\quad$ 113/5 $\quad$ 113/7 => 113 - складне число

№11

а) 143

$\sqrt{143} = 11,9...$

2, 3, 5, 7, 11

143/2

143/3

143/5

143/7

143/11

⇒ 143 – просте число, тому на розклад

б) 289

$\sqrt{289} = 17$

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17

289/2

289/3

289/5

289/7

289/11

289/13

$289 : 17 = 17$

$289 = 17 \cdot 17$

Кінець точно закінчити розклад

в) 899

$\sqrt{899} = 29,9...$

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29

899/2 899/3 899/5 899/7 899/11 899/13

899/17 899/19 899/23 $899 : 29 = 31$

$899 = 29 \cdot 31$

кінець простих

розклад завершено

№1

Екзаменна 22

№12. ① 1, 5, 2, 5, 2, 3, 2, ②

$\varphi(12) = \varphi(2 \cdot 3) = (2-1)(3-1) = 1 \cdot 2 = 2$

2 точки

№13.

$\varphi(13) = 13 - 1 = 12$

№14.

а) gcd (1001, 1331)

Алгоритм Евкліда

$1331 = 1001 \cdot 1 + 330$

$1001 = 330 \cdot 3 + 11$

$330 = 11 \cdot 30 + 0$

gcd (1001, 1331) = 11

№15. Розширений алгоритм Евкліда

① gcd(26, 91) = 13

$s \cdot 26 + t \cdot 91$

$91 = 26 \cdot 3 + 13$

$26 = 13 \cdot 2 + 0$

$n = 2$ – 2 розгортки

$q_1 = 3$

$q_2 = 2$

$13 = s \cdot 91 + t \cdot 26$

$s_0 = 1$

$s_1 = 0$

$t_0 = 0$

$t_1 = 1$

$s_2 = s_0 - q_1 s_1$, $s_3 = s_1 - q_2 s_2$; $s_i = s_{i-2} - q_{i-1} s_{i-1}$

$t_2 = t_0 - q_1 t_1$, $t_3 = t_1 - q_2 t_2$; $t_i = t_{i-2} - q_{i-1} t_{i-1}$

$s_j = s_{j-2} - s_{j-1} \cdot q_{j-1}$; $t_j = t_{j-2} - t_{j-1} \cdot q_{j-1}$

$s_2 = 1 - 0 \cdot 3 = 1$, $t_2 = 0 - 1 \cdot 3 = -3$

$13 = 91 \cdot 1 + (-3) \cdot 26 = 91 - 78 = 13$

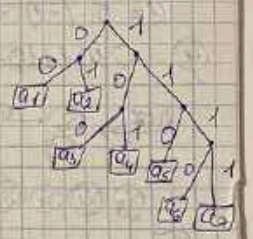
② Розгорнемо назад

$13 = 91 - 26 \cdot 3 = 91 \cdot 1 + 26 \cdot (-3)$

Іспит з дискретної математики
студентки групи ПМс-11
Кравець Ольги
Варіант 1

① $P = \{0,3;\ 0,3;\ 0,1;\ 0,1;\ 0,1;\ 0,05;\ 0,05\}$
$l^F_{ср} \to ?$

a_1	0,3	0	0			00
a_2	0,3		1			01
a_3	0,1		0	0		100
a_4	0,1			1		101
a_5	0,1	1	1	0		110
a_6	0,05			1	0	1110
a_7	0,05				1	1111



$l^F_{ср} = 0,3\cdot 2 + 0,3\cdot 2 + 0,1\cdot 3 + 0,1\cdot 3 + 0,1\cdot 3 + 0,05\cdot 4 + 0,05\cdot 4 =$
$= 0,6 + 0,6 + 0,3 + 0,3 + 0,3 + 0,2 + 0,2 = 2,5$

В: $l^F_{ср} = 2,5$

② $1000011 \to 1000011$

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$101 = 2^2\cdot 1 + 2^1\cdot 0 + 2^0\cdot 1 = 4 + 0 + 1 = 5$ – позиція пом.
0011

③ $3x \equiv 3 \pmod 7$

$\gcd(3,7) = 1 \Rightarrow \exists a^{-1}$

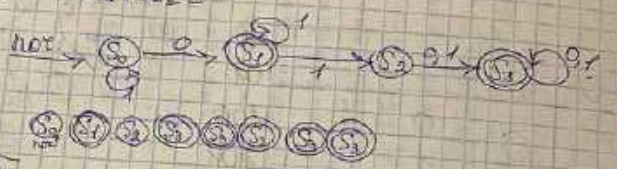
$7 = 3 \cdot 2 + 1 \Rightarrow 1 = 7 \cdot 1 - 3 \cdot 2 = 7 \cdot 1 + 3 \cdot (-2)$

$3 = 1 \cdot 3 + 0$

$-2 + 7 = 5 = a^{-1}$

$x = 5 \cdot (-3) = -10 + 7 = -3 + 7 = 4$

④ 01011101 В: 4



В: Так, допускає бо ми потрапляємо в заключний стан

⑦ $T: q_1 1 \to \Lambda \Pi q_1;\ q_1 0 \to 1 1 q_1;\ q_1 1 \to 1 1 q_0;\ q_2 1 \to \Lambda \Pi q_1;$
$q_2 0 \to 0 \Lambda q_2;\ q_1 \Lambda \to 0 \Pi q_1$

111 0101

$q_1 1 \to \Lambda \Pi q_1$

$q_1 1 \to \Lambda \Pi q_1$

$q_1 1 \to \Lambda \Pi q_1$

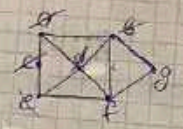
$q_1 1 \to \Lambda \Pi q_1$

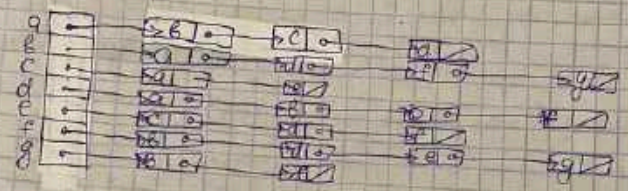
$q_1 0 \to 1 1 q_2$

$q_2 1 \to \Lambda \Pi q_1$

В: не застосовна

⑥





⑦ 5-арне дерево
100 внутрішніх вершин

$m = 5; \quad i = 100$

$n = m \cdot i + 1$

$n = 5 \cdot 100 + 1 = 501$

В: 501

Дискретна математика (практ.)
Кравець Ольга ПМО-11

Заняття 13

№1 а) 6 вершин, 6 ребер (|E|=6)

deg(a) = 2, deg(b) = 4, deg(c) = 1 (висяча (кінцева)), deg(d) = 3, deg(e) = 2, deg(f) = 0 (ізольована)

б) петля враховується двічі

5 вершин, 13 ребер

deg(a) = 6, deg(b) = 5, deg(c) = 3, deg(d) = 5, deg(e) = 6

№2 а) deg(V) = 13; б) deg(V) = 26

№4 а) deg⁻(a) = 2 deg⁻(b) = 1 deg⁻(c) = 1

deg⁺(a) = 0 deg⁺(b) = 2 deg⁺(c) = 3

deg⁻(d) = 3

deg⁺(d) = 2

б) deg⁻(a) = 2 deg⁻(b) = 2 deg⁻(c) = 3 deg⁻(d) = 1

deg⁺(a) = 3 deg⁺(b) = 4 deg⁺(c) = 0 deg⁺(d) = 1

№5 а) 7 дуг = 7 напівстепенів входу = 7 напівстепен. виходу

б) 8 дуг = 8 входу = 8 виходу

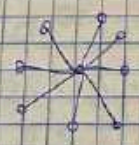
№6

а) K_4

K_7: $C_7^2 = \frac{7(7-1)}{2} = \frac{7\cdot 6}{2} = 21$ ребро

б) $K_{1,8}$

або



$K_{1,n}$ - зірка

в) $K_{4,4}$

m+n вершин

m·n ребер

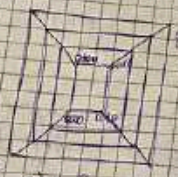
г) C_5

C_7

д) W_n

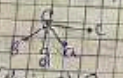
W_5

е) Q_4



№7 а)

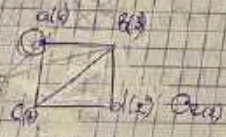
двочастковий граф



№8 г) $K_{3,3}$; д) C_7; е) C_6; ж) Q_2

№9 а) K_n: ребер C_n^2 і $\frac{n(n-1)}{2}$

№10



№16

Матриця суміжності

	a	b	c	d	e
a	0	1	1	0	1
b	1	0	0	1	1
c	1	0	0	0	1
d	0	1	0	0	1
e	1	1	1	1	0

$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \{v_i, v_j\} \in E, \\ 0, & \text{у протилежному випадку} \end{cases}$

Матриця інцидентності

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
a	1	1	1	0	0	0	0
b	0	1	1	0	1	0	0
c	1	0	0	0	0	0	1
d	0	0	1	1	0	0	0
e	0	0	0	1	1	1	1

$m_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо вершина } v_i \text{ та ребро } e_j \text{ інцидентні} \\ 0, & \text{у протилежному випадку} \end{cases}$

у кожному стовпці має бути точно 2 одиниці, немає однакових стовпців

Домашня робота

№11

Неорієнтований граф має парну кількість вершин непарного степеня.

а) 2, 3, 3, 3, 2 – так, існує такий граф

б) 3, 4, 3, 4, 3 – не існує такий граф

в) 1, 2, 3, 4, 5 – не існує такий граф

д) 1, 2, 3, 4, 4 – так, існує такий граф

д) 0, 1, 2, 2, 3 – так, існує такий граф

д) 1, 1, 1, 1, 1 – ні, не існує такого графа

$\boxed{№12}$

G =

скорочений граф (має дво)

скорочений підграф (вигляд, має дво)

підграфи графа G

H_1:

H_2:

H_3:

H_4:

H_5:

H_6:

$\boxed{№13}$

Простий граф назвуть **регулярним**, якщо всі його вершини мають однаковий степінь.

Граф назвуть **0-регулярним**, якщо кожна його вершина має степінь 0.

а) K_n : $2n$: 2, 4, 6, 1 –

д) C_n для всіх n

ПЛР-11 В-Т

Кількість ребер:

а) Ω_n для всіх n

б) R_n для всіх n

$\boxed{№14}$

$K_{m,n}$: $(m+1)$ і $(n+1)$

$K_{1,5}$, $K_{2,3}$ ...

$\boxed{№15}$

степінь 4

ребра 10

вершин ?

Має 5 вершин

$\boxed{№17}$

а) матриця інцидентності

1 – якщо дуга виходить
-1 – якщо дуга входить
2 – якщо дуга – петля
0 в інших випадках

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}	e_{13}
a	2	-1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
b	0	0	0	0	0	0	0	-1	1	2	1	-1	-1
c	0	1	-1	2	-1	1	0	0	0	0	-1	1	0
d	0	0	0	0	1	-1	2	1	-1	0	0	0	0

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}	e_{13}
a	2	-1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
b	0	0	0	0	0	0	0	-1	1	2	1	-1	-1
c	0	1	-1	2	-1	1	0	0	0	0	-1	1	0
d	0	0	0	0	1	-1	2	1	-1	0	0	0	0

матриця суміжності:

	a	b	c	d
a	1	1	1	0
b	0	1	1	1
c	1	1	1	1
d	0	1	1	1

д) матриця інцидентності:

	e1	e2	e3	e4	e5	e6	e7	e8	e9
a	1	0	0	1	0	0	-1	0	-1
b	-1	-1	1	0	0	0	0	0	0
c	0	0	-1	-1	1	1	0	0	0
d	0	0	0	0	-1	0	0	-1	1
e	0	0	0	0	0	-1	1	1	0

матриця суміжності:

	a	b	c	d	e
a	0	1	1	0	0
b	0	1	1	0	0
c	0	0	0	1	1
d	1	0	0	0	0
e	1	0	0	1	0

Ш

матриця суміжності:

а)

	a	b	c	d
a	0	0	1	0
b	0	0	1	1
c	1	1	0	1
d	0	1	1	0

д)

	a	b	c	d
a	0	1	1	1
b	1	0	1	1
c	1	1	0	1
d	1	1	1	0

в)

	a	b	c	d	e
a	0	1	0	1	1
b	0	1	1	0	1
c	1	1	0	0	1
d	1	0	1	1	0
e	0	1	1	0	1

Тест 11 Q-T

матриця інцидентності:

а)

	e1	e2	e3	e4	e5
a	1	0	0	0	0
b	0	1	0	1	1
c	1	1	1	0	0
d	0	0	1	1	1

д)

	e1	e2	e3	e4	e5	e6	e7	e8	e9	e10
a	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1
b	0	1	1	1	1	0	0	0	1	1
c	1	0	0	0	0	1	1	1	0	1
d	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0

в)

	e1	e2	e3	e4	e5	e6	e7	e8	e9	e10	e11	e12
a	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
b	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0
c	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	0
d	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0
e	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1

Ш

матриця суміжності:

а)

	a	b	c	d
a	0	1	1	0
b	1	0	0	1
c	1	0	1	1
d	0	1	1	0

д)

	a	b	c	d
a	0	0	1	0
b	0	0	0	1
c	1	0	0	0
d	0	0	0	0

матриця інцидентності:

а)

	e1	e2	e3	e4	e5	e6	e7	e8	e9	e10
a	-1	1	1	-1	0	0	0	0	0	0
b	0	0	-1	1	-1	1	0	0	0	0
c	1	-1	0	0	0	0	-1	1	-1	1
d	0	0	0	0	1	-1	1	-1	1	0

д)

	e1	e2	e3	e4	e5	e6	e7	e8	e9
a	1	1	1	1	0	0	0	0	0
b	0	0	0	-1	-1	1	1	1	1
c	-1	-1	-1	1	1	0	0	0	0
d	0	0	0	0	0	-1	-1	-1	-1

№10

а) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

б) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

в) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

№11

Так.

№12

а) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

б) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

№13

Сума елементів i-го стовпця матриці суміжності для неорієнтованого графа дорівнює

а для орієнтованого графа

Сума елементів i-го рядка матриці суміжності для неорієнтованого графа дорівнює

а для орієнтованого графа

№14

а) K_5 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

б) C_4

в) C_5

г) $K_{1,4}$

д) O_5

Заняття 14

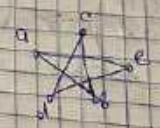
№25

а) Ізоморфні

	a	b	c	d	e
a	0	1	1	0	0
b	1	0	0	0	1
c	1	0	0	1	0
d	0	0	1	0	1
e	0	1	0	1	0

$\cong$

	a	b	c	d	e
a	0	1	1	0	0
b	1	0	0	0	1
c	1	0	0	1	0
d	0	0	1	0	1
e	0	1	0	1	0



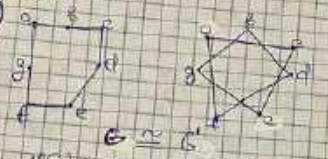
а) Ізоморфіс

1) $E = 8$

2) $P = 16$

3) 2 гр. E в 3й степенем, 6 1 гр. такого немає

в)



$G \simeq G'$

$\varphi(a) = a$

$\varphi(b) = d$

$\varphi(g) = f$

$\varphi(c) = e$

$\varphi(d) = g$

$\varphi(f) = b$

$\varphi(e) = c$

$\varphi : G \to G'$

№26

а) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

якщо мн. 1 і 3 ряд то мн. 1 і 3 ст

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Ізоморфні

Клочко Олег ТІПО-11 Р-Т

а) Ізоморфні

8 – 1 б 1 матр (вали вершок(1) в 1 мн.)

10 – 1 б 2 матр

№36

а) не звязний

$\exists m, b$, яка не має шляху до вершин

$\exists b, c : \varkappa(a, b)$; кількістю звязу cad; edf; b

б) звязний

$\exists$

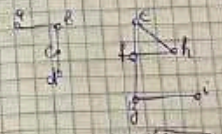
d, g:

(d, f), (f, b), (b, g), (f, a), (a, f), (h, c), (c, h), (h, f)

№32

а) точка зчленування: d

б)



№38

а) немає циклу

б) Немає циклу є шлях

! Шлях тоді є вершини непарного степеня шлях стосно всіх вершин парні

№46

а) $\deg(1) = \frac{5}{2}$; існує цикл

! існує цикл за $\frac{k}{2}$ ребер сумарне число вуз. $\boxed{\deg(1) \geq \frac{n}{2}}$

$\deg(2) = \frac{5}{2} = 2{,}5$

$\deg(3) = 2$, а має бути більше ніж 2

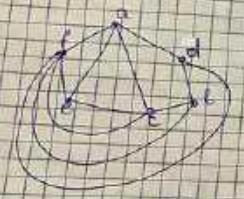
б) $\deg(1) = \frac{3}{2} = 1{,}5$

$\deg(2) = 3 > 1{,}5$

існує цикл, існує шлях

! $\underset{\text{верш.}}{n} + \underset{\text{реб.}}{r} = \underset{\text{грані}}{p} + 2$ — плоскі графи $\boxed{№49}$

д)



$\boxed{№50.4}$

(грані)

$6 + r = 8 + 2 \Rightarrow 6 + r = 10 + 2$

$6 + r = 12$

$r = 6$ (граней)

$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2m$

$6 \times 4 = 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 24 = 2m$

$m = 12$ (ребер)

Khiba Gr. ПІП-11 В-7

Задача №5 К-сть шляхів

$\boxed{№55}$ кн.

K_4, $n = 3$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{array}{c|cccc} & a & b & c & d \\ \hline a & 3 & 2 & 2 & 2 \\ b & 2 & 3 & 2 & 2 \\ c & 2 & 2 & 3 & 2 \\ d & 2 & 2 & 2 & 3 \end{array} = A^2$$

С. №5 №55

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{array}{c|cccc} & a & b & c & d \\ \hline a & 8 & 7 & 7 & 7 \\ b & 7 & 8 & 7 & 7 \\ c & 7 & 7 & 8 & 7 \\ d & 7 & 7 & 7 & 8 \end{array} = A^3$$

$\boxed{(4,3)\text{-кн. } A^3}$

$\boxed{№56}$ кн.

$K_{3,3}$

$$\begin{array}{c|cccccc} & a & b & c & d & e & f \\ \hline a & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ b & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ c & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ d & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ e & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ f & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{array}{c|cccccc} & a & b & c & d & e & f \\ \hline a & 3 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ b & 3 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ c & 3 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \\ e & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \\ f & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \end{array}$$

шлях a і c = 3

$\boxed{№56.a}$ шлях

a-алгоритм Дейкстри

a → z

б	a	b	c	d	e	f	g	z
б	a	4	6	11	3	7	11	6
б	1	d	e	c	a	c	f	g

$x \leq g \leq f \leq c \leq e \leq a$ найдовший шлях

№38 лист

B	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
F	0	6	5	8	12	16
E	–	5	v_1	v_3	v_4	v_5

а) $v_6 = v_7$

$v_4 \leq v_6 \leq v_1 \leq v_3 \leq v_1$

б)

№60.

а) C_n

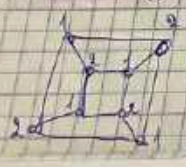
$\chi(G) = 2$; $\chi(G) = 2$

б) W_n

$\chi(G) = 3$ $\chi(G) = 4$

в) Q_n

$\chi(G) =$ $\chi(G) =$



$2^n = 2^3 = 8$

Клітка: Ойнер Тип-11 В-Т

№100(а)

$\{a, c\}$, $\{c, e\}$, $\{e, g\}$, $\{g, a\}$, $\{b, f\}$ – максимальні пари несум.

$\chi(G) = 2$ – найбільша пара несум., тесно пара несум.

№101. кліки

$\{e, d, c\}$, $\{b, c, f\}$, $\{e, a, b\}$, $\{a, b\}$ – кліки

кожна кліка $\chi(G) = 3$

№103

а) $\{x_1, y_1\}$, $\{x_2, y_2\}$, $\{x_3, y_3\}$, $\{x_4, y_4\}$

б) Для множ. x_1, x_2 існує множ. y_1, y_2

Дерева

№2.

а) дерево

б) не дерево

в) не дерево

№2.

а) а – корінь

б) (внутрішні – мають синів) Внутрішні вершини: a, b, e, g, d, j, p, h

в) листки (не мають синів): c, f, k, l, m, n, o, q, r, s, t

г) сини вершини g: l, p

д) g – батько вер. n

в) предки п: g, b, a
г) кандидати: b, e, f, g, h, b, m, n

№16 (обхід дерева)

а) прямий порядок (ОПП): зверху вниз
a, b, d, h, i, b, j, m, n, e, f, g, k, f, c
внутрішній порядок (ОВП): ↑ зліва направо
h, d, i, b, m, j, n, e, a, f, c, k, g, a, c
зворотній порядок: ↑ знизу вверх (ОЗП)
h, i, d, m, n, j, a, b, f, k, a, l, g, c, a

№20. (префіксна форма)

д) 1 − 4 · 3 + 6 · 2 · 5 ; пріоритет
↑ 9 · 5 ; 15 = 1

№21 (постфіксна форма)

а) 9 5 / 5 + 7 2 − *
↑
8 5 / 7 2 − *
↑
8 5 / 5 *
↑
8 5 * = 40

№17

(x + xy) + (x/y)

Д/з: всі номери які ми робили окрім пункту №27, порядок вчити, вивчити квірки, вивчити кружка

Клюкін О. ... Т-10-11 ... 2-Т

Домашня робота

№100 (а)

{a, c, e}, {b, h, g}, {d}, {c, a, e, h, f}, {d, e, b, h, f}, {e, d, a}, {f, g, c}, {g, c, a}, {h, b, d, e}

z(G) = 4

№101 (б)

χ(G) = 5

{e, c, g, a}, {g, e, d, b}, {h, d, a}, {a, b, c, e}, {h, f}, {e, f, g, c}, {a}, {c, d, b, e, a}, {d, c, a, h, g}

№103

а) {x1, y1}, {x2, y2}, {x3, y3}, {x4, y4}, {x5, y5}
б) Для множ. {x1, x3} існує множ. {y1, y3}
в) Для множ. {x1, x3} існує множ. {y1}.

№1

б) не дерево
д) не дерево
г) не дерево

№16.

а) ОПП: a, b, d, e, f, g, c
ОВП: d, b, f, e, g, a, c
ОЗП: d, f, g, e, b, c, a

№20

a) $-*\frac{2}{1}\frac{1}{5}\frac{5}{3} = 2$

$-*\frac{2}{4}\frac{3}{3}$

б) $+-*3\,2\,1\,2\,3\,\frac{1}{6}+\frac{9}{2}=4$

$\frac{1}{3}$

$+:1\,3\,2\,\frac{1}{2}\,3$

$1^3=8$

$+=\frac{1}{3}\,2\,\frac{1}{2}\,3$ $\quad +=\frac{9}{2}\,3 \quad +18=4$

$3^2=9$

г) $*+3+3\,\frac{1}{3}\,\frac{1}{3}\,\frac{1}{3}\,\frac{1}{3}+=0$

$\frac{1}{6}$

$3^5=243$

$*=\frac{3}{10}\,\frac{1}{3}\,\frac{1}{3}\,\frac{1}{3}\,3$ $\quad *+3\,\frac{1}{10}\,2\,\frac{1}{3}\,3;\ *+\frac{1}{10}\,3\,3;$

№21

д) $\frac{5}{1}\,\frac{1}{7}-\frac{3}{1}\,\frac{1}{4}+*+*=32$

$\frac{5}{4}\,\frac{1}{7}\,\frac{3}{1}\,\frac{1}{4}+*;\ 4\,\frac{3}{5}\,\frac{1}{4}+*;\ 4\,\frac{1}{5}\,\frac{5}{8}+*;\ 4\,\frac{1}{8}+*=33$

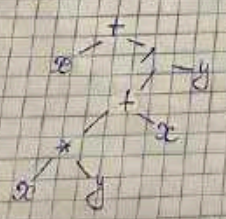
е) $\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,3-\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}/*-=5$

$\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}$

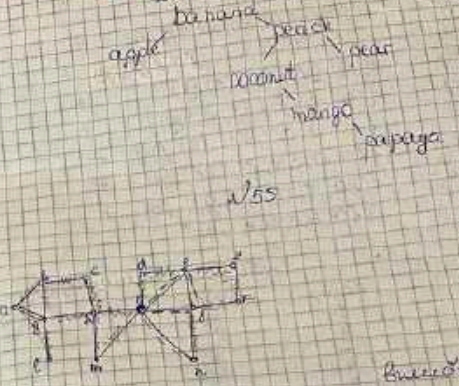
$8\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}*-;\ 8\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}-;\ 8\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}\ \ 33-=5$

№17

$x+((xy+z)/y)$



№27



№55

B	i	cinek
a	1	a
b	2	ab
c	3	abc
h	4	abch
g	5	abchg
d	6	abchgd
–	–	abchg
–	–	abch
i	7	abchi
d	8	abchid
e	9	abchide
f	10	abchidef
[illegible]	11	abchidefe
[illegible]	12	abchidefeg
h	13	abchidefegh
–	–	abchidefegh
–	–	abchidefeh

Buchů - cinek

–	–	abchidef
–	–	abchide
–	–	abchid
–	–	abchi
m	14	abchim
–	–	abchi
–	–	abch
–	–	abc
–	–	ab
–	–	a
–	–	–

∅

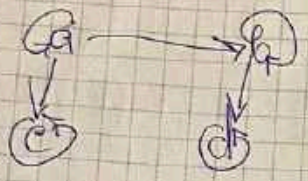
№57. Сюрпризы Кроссворды

Дано	Розв'язка	
{a, d}	{{a}, {b}, {c}, {d}, {e}, {f}, {g}}	+
{e, f}	{{a, d}, {b}, {c}, {e}, {f}, {g}}	+
{e, d}	{{a, d}, {e, f}, {b}, {c}, {g}}	+
{a, c}	{{a, d, e, f}, {b}, {c}, {g}}	+
{a, e}	{{a, d, c, e, f}, {b}, {g}}	+
{f, g}	{{a, d, c, e, f}, {b}, {g}}	—
{a, b}	{{a, c, d, e, f, g}, {b}}	+
	{{a, b, c, d, e, f, g}}	+

№56 Шифр-сорт

Вірш	Наука	Решта
a	1	a
b	2	ab
d	3	abd
c	4	bd
h	5	bdc
e	6	dc
i	7	dch
m	8	dchi
d	9	dchim
e	10	dchime
n	11	dchimen
f	12	dchimenf
l	13	dchimenfl
k	14	dchimenflk
		dchimenflkn
		dchimenflkn
		dchimenflkn

$(a,b) \in R$ & $(b,c) \in R \Rightarrow (a,c) \in R \quad \forall a,b,c \in A$



рефл., антисим.,

$(a,b) \in R$ & $(b,d) \in R \Rightarrow (a,d) \in R$

N 73. Алгоритм Уоршелла

а) $R = \{(a,c), (b,d), (c,a), (d,b), (e,d)\}$ транзит. замик. відносин на мн.

$$\begin{array}{c|ccccc} & a & b & c & d & e \\ \hline a & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ c & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ d & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ e & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$$W^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$W^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Домашня робота (з. 8)

N22 (в, г)

в) $A = \{0,1,2,3\}$
$\{(0,0), (1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,3)\}$ — еквівал.

г) $\{(0,0), (1,1), (1,3), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)\}$ — не екв. нет, р.с.

N23 (в, г)

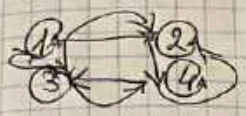
в) $\{(a,b) \mid$ a та b мають спільного одного з батьків$\}$ — еквівал.

г) $\{(a,b) \mid$ a та b зустрілись$\}$ — не еквівал.

N30

в) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $R = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3), (4,4)\}$ — еквівал. т, р, с

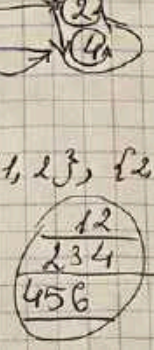
№31 в



– еквівал.

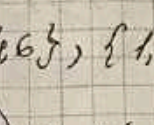
№38 (а, в)

а) $\{\{1,2\},\{2,3,4\},\{4,5,6\}\}$ $A=\{1,2,3,4,5,6\}$



$R=\{(1,1),(2,2),(1,2),(2,1),(2,3),(3,2),(3,4),(4,3),(2,4),(4,2),(2,2),(3,3),(4,4),(4,5),(5,4),(5,6),(6,5),(4,6),(6,4),(6,6),(5,5)\}$

в) $\{\{2,4,6\},\{1,3,5\}\}$



$R=\{(2,2),(4,4),(6,6),(2,4),(4,2),(4,6),(6,4),(2,6),(6,2),(1,1),(3,3),(5,5),(1,3),(3,1),(1,5),(5,1),(3,5),(5,3)\}$

№40 (б, г)

б) $aRb \Leftrightarrow a \neq b$

$(a,b)\in R$

$\forall a$: $a\neq a \Rightarrow aRa$, $(a,a)\notin R$ – не рефл.

$\forall a,b$: $a\neq b$ & $b\neq a \Rightarrow a\neq b$ – не антисим.

$\forall a,b,c$: $a,b\in R$ & $(b,c)\notin R \Rightarrow (a,c)\notin R$ – не транз.

$a\neq b$ & $b\neq c\in R \Rightarrow a\neq c$

$(\mathbb{Z},R)$ – не є част. впоряд.

г) $aRb \Leftrightarrow$ a не ділить b

$\forall a$: $a=a \Rightarrow aRa$, $(a,a)\in R$ – рефл.

$\forall a,b$: $a=b$ & $b=a \Rightarrow a=b$ – антисим.

$\forall a,b,c$: $a,b\in R$ & $(b,c)\in R \Rightarrow (a,c)\in R$ – транз.

$a=b\in R$ & $b=c\in R \Rightarrow a=c$ $(\mathbb{Z},R)$ – част. впоряд.

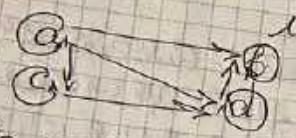
№41(б)

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $R = \{(1,1), (2,2), (3,1), (3,3)\}$

рефл., не транз. антисим.

R не є частк. впорід.

№42(б)



$R = \{(a,a), (b,b), (c,c), (d,d), (a,b), (d,b), (a,c), (a,d), (c,d)\}$

рефл., транз., антисим.

R є частк. впорід.

25; 33в2; 45б2; 47б

Заняття 9

№23(в)

в) $\{(a,b) \mid a$ та b спів 1 з бат.$\} = R$ еквівалент. відомо

$(a,a) \in R$ = aRa рефл.

$(a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \in R$ симетр.

$(a,b) \in R$ & $(b,c) \in R \Rightarrow (a,c) \in R$ транз.

(M_1, T_1) (M_2, T_2)

№24(а). відомо еквівал.

$\{(f,g) \mid f(1) = g(1)\}$

1) $(f,f) \in R$ -?

$f(1) = f(1) = k$ рефл.

(g,g)

(h,h)

2) $(f,g) \in R \Rightarrow (g,f) \in R$ -?

$f(1) = g(1) \Rightarrow g(1) = f(1) \Rightarrow (g,f) \in R$ сим.

3) $\forall f,g,h \in M$ $(f,g) \in R$ & $(g,h) \in R \Rightarrow (f,h) \in R$

$f(1) = g(1)$ & $g(1) = h(1) \Rightarrow f(1) = g(1) = h(1)$

$\Rightarrow (f,h) \in R$ тр.

еквівал.

б) $\{(f,g) \in R \Leftrightarrow f(0) = g(0) \vee f(1) = g(1)\}$

1) рефл.: $(f,f) \in R$ -?

$f(0) = f(0)$

$f(1) = f(1)$

2) сим.: $(f,g) \in R \Rightarrow (g,f) \in R$ $\forall f,g$

$f(1) = g(1) \vee f(0) = g(0) \Rightarrow (g,f) \in R$

$g(1) = f(1) \vee g(0) = f(0)$

3) транзит.: $(f,g) \in R$ & $(g,h) \in R \Rightarrow (f,h) \in R$ -?

$f(0) = g(0) \vee f(1) = g(1)$ & $g(0) = h(0) \vee g(1) = h(1) \Rightarrow$

$\Rightarrow f(0) = g(0) = h(0)$

$f(1) = g(1) = h(1)$

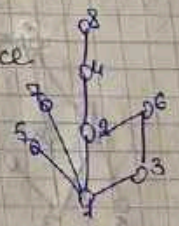
№44 Діаграма Гассе

$A = \{0, 1, \dots, 5\}$

№45(а). Д. Гассе

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

$R = \{(a,b) \mid a$ ділить $b\}$



№46 Бесс

$R = \{(A, B) \quad A \subset B\}$

$A = \{a, b, c\}$

$P(A)$

Ознак 2^3

$2^{|A|} = 2^3 = 8$

$P(A) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$

решітки

№47 Впорядк. пари відкиш. частков. на множ. $\{a, b, c\}$

а) $R = \{(a, b), (b, d), (b, c), (a, d), (a, c), (a, a), (b, b), (c, c), (d, d)\}$

№48 max і min елем.

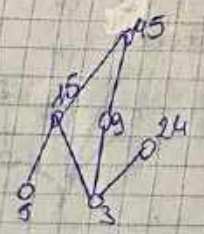
max: l, m

min: a, b, c

№49

$A = \{3, 5, 9, 15, 24, 45\}$

$R = \{(a, b) \Leftrightarrow a$ ділить $b\}$



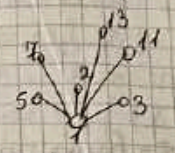
min: 3, 5

max: 45, 24

Домашня робота (з 9)

№45(б) $\{R = \{(a, b) \mid a$ ділить $b\}\}$

$A = \{1, 2, 3, 5, 7, 11, 13\}$



в) $A = \{1, 2, 3, 6, 12, 24, 36, 48\}$

г) $A = \{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64\}$

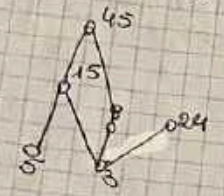
№47

б) $R = \{(a, a), (c, c), (b, b), (d, d), (e, e), (a, c), (e, b), (b, e), (b, d), (c, d), (a, d), (e, a)\}$

в) $R = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e), (f, f), (g, g), (b, g), (a, g), (c, g), (a, f), (g, e), (c, d), (g, f), (g, d)\}$

Д_1

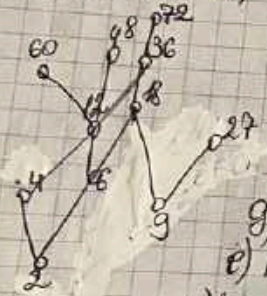
A = {3, 5, 9, 15, 24, 45}



а) min: 3, 5
б) max: 45, 24
в) ∄ max елем
г) ∄ min. елем.
д) 15, 45 – верхні гр {3, 5}
е) найм. верх. гр. {3, 5} : 15
ж) {15, 45} ниж. грані : 3, 5, 15
з) {15, 45} найб. ниж. гр.: 15

Д_2

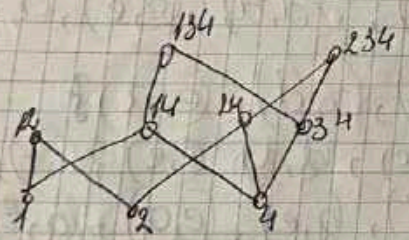
A = {2, 4, 6, 9, 12, 18, 27, 36, 48, 60, 72}



а) min: 2, 9
а) max: 27, 72, 48, 60
в) ∄ min
г) ∄ max
д) верх. гр. множ. {2, 9} : 18; 36 72
е) найм. верх. гр. {2, 9} : 18
ж) ниж. гр. мн. {60, 72} : 2, 4, 6, 12
з) найб. гр. мнж. {60, 72} : 12

Д_3

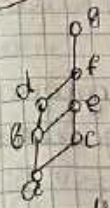
A = ({1}, {2}, {4}, {1, 2}, {1, 4}, {2, 4}, {3, 4}, {1, 3, 4}, {2, 3, 4})



а) max: {1, 2}, {1, 3, 4}, {2, 3, 4}
б) min: {1}, {2}, {4}
в) ∄ max елем.
г) ∄ min елем.
д) верх. гр {{1, 2}, {4}} : {2, 4}, {2, 3, 4}
е) найм. верх. гр. мнж. {{2}, {4}} : {2, 4}
ж) ниж гр {{1, 3, 4}, {2, 3, 4}} : {3, 4}, {4}
М ∩ {1, 3, 4} та {2, 3, 4} = {3, 4}
з) найб. ниж. гр. {{1, 3, 4}, {2, 3, 4}} : {3, 4}

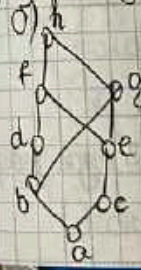
Д_5

а)

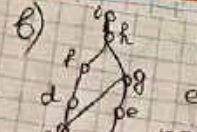


Це решітка. Якщо ми хочемо знайти (l.u.b) або (g.l.b) двох елем на вертикальній лінії діаграми Гассе, то просто беремо верхній або ниж елем цієї лінії, відповідно якщо 2 елем розташ на різних вертикал. лініях, то для знаходження l.u.b. ми рухаємося діагональною лінією вверх від елем. зліва і тоді завертаємо рух справа. Необхідно досягти елем. справа. Напр., l.u.b. елем. d і c – елем. f, l.u.b. елем. a і e – елем. e. Аналогічно знаходять g.l.b. двох елем. частк. впорядк. множ.

б)



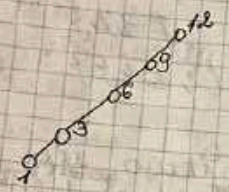
Це не решітка. Елем b і c мають верхні грані f, g і h, але жодна з них не є l.u.b. Справді, кандидатами можуть бути f і g, але вони не порівнювані.

в) 

Це решітка. Розглядаючи всі пари елем., ми можемо перевірити кожну пару (н.в. і д.в.). Напр., пара b і a має д і a у цих рамах, відповідно.

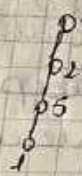
Д-4) Визн., чи є наступні множ. решітками.

а) $A = \{1, 3, 6, 9, 12\}$



Це не решітка. 6 і 9 не мають жодної верх. грані, бо жоден елем. множ. не ділить/кратний на 6 і 9.

б) $A = \{1, 5, 25, 125\}$



це решітка. кожний елем. списку ділить наступний. фактично це лінійний порядок.

в) $A = (\mathbb{Z}, \geq)$ {довільно часткв. впор. множ.}

це решітка, бо лінійний порядок

Д-5)

(A, C)

A – рівень повноважень:

0 – необм. 1 – конфіденц. 2 – обм 3 – за реєстр.

C – категорія

{Гепард, Антилопа, Пума}

а) Чи дозволено передав. інф. від (конф., {Г, П}) до (обм. {П})? Ні

б) Чи дозвол. перед. інф. від (обм., {Гепард}) до (за реєстр., {Г, А})? Так

в) До яких класів безпеки можна передавати інф. від класу безп. (конф., {Г, П})?

Ці класи повинні мати рівень повноважень не нижче приватно, а категорії C повинно задовольняти умову $\{Г, П\} \subset C$. Ось ці класи безпеки:

(конф., {Г, П}), (обм., {Г, П}), (за реєстр. {Г, П}), (конф., {Г, А, П}), (обм., {Г, А, П}), (за реєстр. {Г, А, П})

г) Від яких класів безпеки може поступати інформ. до класу безпеки (обм., {А, П})?

Ці класи повинні мати рівень повноваж. не вищ. обм., а категорії C повинні задов. умову $C \subset \{А, П\}$. Ось ці класи безпеки:

(необм., {А, П}), (обм., {П})

(конф., {А, П}), (необм., ∅)

(обм., {А, П}), (конф., ∅)

(необм., {А}), (обм., ∅)

(конф., {А})

(обм., {А})

(необм., {П})

(конф., {П})

Заняття 10

Комбінаторика

№2. Обчислити к-сть перестановок множ. {а, б, в, г, д, е, ї, ж}, які закінч. буквою а.

$P_n = 6! = 720$

№3

а) $A_5^3 = \frac{5!}{2!} = 60$

№4

б) $C_5^3 = \frac{5!}{3!2!} = 10$

№5. Скількома способами можна відзначити призові місця (1, 2, 3) у заїзду 12 коней?

$A_{12}^3 = \frac{12!}{9!} = 1320$

№7. Міста А та В з'єднано трьома дорогами. Скільки способами можна здійснити кругову рух від А до В та від В до А, якщо $3 \cdot 2 = 6$ шляхи від В до А, обов'язково треба вибрати іншу дорогу.

№8.

Дано множину. Скільки існує розміщень без повторень з елем. множ. по 4 елем., які містять:

$M = \{1, 2, 3, \ldots, 99, 100\}$

43 44 45 46 47 48 49 50

а) число 47

$4 \cdot A_{99}^3 = 4 \cdot \frac{99!}{96!} = 4 \cdot \frac{99 \cdot 98 \cdot 97 \cdot 96!}{96!} = 4 \cdot 99 \cdot 98 \cdot 97 = 3764376$

б) числа 17 і 47 водночас

47 ...

$43 \cdot A_{98}^2 = 4 \cdot 3 \cdot \frac{98!}{96!} = 4 \cdot 3 \cdot 98 \cdot 97 = 12 \cdot 98 \cdot 97 = 114072$

№9. Скількома способами можна розсадити 6 осіб за круглим столом (n-1)! якщо немає обмежень

$P_n = 5!$

№10. Скількома способами можна розсадити за круглим столом 5 чол і 5 жінок, щоб ніякі чоловіки не сиділи поруч?

(10)

9!

3! = 6

1 · 2 · 3
2 3 1

$\frac{3!}{3} = \frac{6}{3} = 2$

$\frac{6!}{6} = \frac{6 \cdot 5!}{6} = 5!$ від чол.

$\frac{9!}{5} \cdot \frac{5!}{5} \cdot 5 = \frac{5 \cdot 4!}{5} \cdot \frac{5 \cdot 4!}{5} \cdot 5 = 4! \cdot 4! \cdot 5 = 2880$

№11

Із цифр 1, 2, 3, 4, 5 із повторами їх скласти всі можливі 5-цифрові числа. Скільки серед таких чисел:

а) 3 _____ які починаються

4! = 4 · 3 · 2 = 24

б) 54 _____ починаються

3! = 3 · 2 = 6

№12.

Дано натур. числа від 1 до 31. Скількома способами можна вибрати з них три числа так, щоб їх сума була парним числом?

1 до 31

15 – парн.

16 – непарн.

$C_{15}^3 + C_{16}^2 \cdot C_{15}^1 = \frac{15!}{3! \cdot 12!} + \frac{16!}{2! \cdot 14!} \cdot \frac{15!}{14! \cdot 1!} =$

$= 455 + \frac{3600}{2} = 2255$

№13 Скількома способами можна поставити на полиці 10 кн.

а) $8!\cdot 3! = 241920$ якщо серед них 1 3-томник, усі томи якого мають стояти у певному порядку

б) $8! = 40320$ усі томи 3-томника можуть стояти поруч за будь-якого порядку

№14

Скільки учасників у шаховому турнірі, якщо відомо, що кожний учасник грав з кожним 2 партії, а всього було 210 партій.

$C_n^2 = 210 = \frac{n!}{2!(n-2)!} = 210$

$\frac{n!}{2(n-2)!} = 210$

$\frac{n(n-1)\cancel{(n-2)!}}{2\cancel{(n-2)!}} = 210 \,|\cdot 2$

$n^2 - n = 420$

$n^2 - n - 420 = 0$

$D = 1 - 4\cdot(-420) = 1681$

$n = -20 \not\phi$

$n = 21$

В: 21

№15 Скількома спос. з пол. 52 карт можна вибрати 10 карт, щоб серед них були такі:

а) 52 10 тоже 1 туз

$C_4^1 \cdot C_{48}^9 = \frac{4!}{3!1!}\cdot\frac{48!}{39!9!} = \frac{4\cdot\cancel{3!}}{\cancel{3!}}\cdot\frac{48\cdot47\cdot46\cdot45\cdot44\cdot43}{\cancel{39!}\,987654\cdot3}$

$= 6708426560$

б) $C_4^1 C_{48}^9 + C_4^2\cdot C_{48}^8 + C_4^3 C_{48}^7 + C_4^4 C_{48}^6$

принаймні 1 туз

№23

а) $x_1 + x_2 + x_3 = 15$ $\quad H_n^r = C_{n+r-1}^r$

$C_{3+15-1}^{15} = C_{17}^{15}$ $\quad x_1 \le 2 \quad x_2 \le 3 \quad x_3 \le 5$

$2+3+5 = 10$ $\quad 15 - 10 = 5$

$H_3^5 = C_{5+3-1}^5 = C_7^5$

№34. Визн. коеф.

а) $x^{14}y^{11}$

$(x-y)^{25}$

$C_{25}^{11} = \frac{25!}{11!14!} = \frac{25\cdot24\cdot23\cdot22\cdot21\cdot20\cdot19\cdot18\cdot17\cdot16\cdot15\cdot14!}{11!\,10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1} =$

$= 4457400$

№36 Визн. 6 член розкладу бінома, якщо відомо коеф. 3 члена до коеф. 2 члена $= \frac{5}{2}$

$\left(\frac{a}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{a}\right)^n$ $\quad \frac{3r}{2r} = \frac{15}{2}$

$(x+y)^n = \sum_{j=0}^{n} C_n^j x^j y^{n-j}$

$j=0 \Rightarrow$ 1 чл. n-ті

$j=1 \Rightarrow$ 2 чл. n-ті

$j=2 \Rightarrow$ 3 чл. n-ті

$\frac{C_n^2}{C_n^1} = \frac{11}{2}$

$$\frac{\frac{n!}{(n-2)!\,2!}}{\frac{n!}{(n-1)!}} = \frac{11}{2};\quad \frac{(n-1)!}{2(n-2)!} = \frac{11}{2};\quad \frac{(n-1)\cancel{(n-2)!}}{2\cancel{(n-2)!}} = \frac{11}{2}$$

$n-1=11 \qquad n=12$

$k=4$

$$C_{12}^{4}\left(\frac{a}{\sqrt{x}}\right)^{4}\left(\frac{\sqrt{x}}{a}\right)^{8} = \frac{12!}{8!4!}\left(\frac{a}{\sqrt{x}}\right)^{4}\cdot\left(\frac{a}{\sqrt{x}}\right)^{-8} =$$

$$= \frac{12!}{8!4!}\cdot\left(\frac{a}{\sqrt{x}}\right)^{-4} = \frac{\cancel{12}^{3}\cdot 11\cdot \cancel{10}^{5}\cdot \cancel{9}^{3}\cdot \cancel{8}}{\cancel{8}\cdot \cancel{4}\cdot 3\cdot 2} = 3\cdot 3\cdot 11\left(\frac{a}{\sqrt{x}}\right)^{-4}$$

$$= \left(\frac{\sqrt{x}}{a}\right)^{4} 495 = 495\,\frac{x^2}{a^4}$$

Домашня робота (з.10)

№3

б) $A_6^5 = \frac{6!}{1!} = 720$

в) $A_8^1 = \frac{8!}{7!} = \frac{8\cdot 7!}{7!} = 8$

д) $A_8^5 = \frac{8!}{3!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!}} = 8\cdot 7\cdot 120 = 6720$

ж) $A_8^8 = \frac{8!}{0} = 0$

е) $A_{10}^9 = \frac{10!}{1!} = 10! = 3628800$

№4

а) $C_5^1 = \frac{5!}{4!\,1!} = \frac{5\cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!}} = 5$

в) $C_8^4 = \frac{8!}{4!4!} = \frac{\cancel{8}^{2}\cdot 7\cdot \cancel{6}^{3}\cdot 5\cdot \cancel{4!}}{\cancel{4}\cdot 3\cdot \cancel{2}\cdot \cancel{4}} = 70$

г) $C_8^8 = \frac{8!}{8!0!} = \frac{\cancel{8!}}{\cancel{8!}\cdot 0!} = 1$

д) $C_8^0 = \frac{8!}{0!8!} = 1$

е) $C_{12}^6 = \frac{12!}{6!6!} = \frac{\cancel{12}^{2}\cdot 11\cdot \cancel{10}^{5}\cdot \cancel{9}^{3}\cdot \cancel{8}^{2}\cdot 7\cdot \cancel{6!}}{\cancel{6}\cdot \cancel{5}\cdot \cancel{4}\cdot \cancel{3}\cdot \cancel{2}\cdot \cancel{1}\cdot \cancel{6}} = 11\cdot 2\cdot 3\cdot 2\cdot 7 = 924$

№6

Умови: 1 час! 1 хвилина спостерігали лотерея виникує в шеренгу стоя, щоб чергув. так сяк

$n!\,n! = (n!)^2$ – якщо перший чоловік

$n!\,n! = (n!)^2$ – якщо перша жінка

$2(n!)^2$ – є способів, щоб виникувати в шеренгу так, щоб чергувалися чоловік і жінка

№8

в) 17, 47, 73

$4\cdot 3\cdot 2\,A_{97}^3 = 24\,A_{97}^3 = 24\,\frac{97!}{94!} = 24\cdot 97\cdot 96\cdot 95 = 21231360$

№15

д) 52 к

-10 к

1 туз

Принаймні 1 туз – ?

$C_{52}^{10} = \frac{52!}{10!\,42!} = 15820024220$

I – хоча один туз

II – немає жодного туза

II: $C_{48}^{10} = \frac{48!}{38!\,10} = 6540715896$

I: $15820024220 - 6540715896 = 9279308324$

№23

а) $x_1+x_2+x_3+x_4=17$

$H_n^r = C_{n+r-1}^r$

$C_{4+17-1}^{17} = C_{20}^{17} = \frac{20!}{17!\,3!} = \frac{20\cdot 19\cdot 18}{1\cdot 2\cdot 3} = 1140$

б) $x_1+x_2+x_3=15$

$x_1\geq 2,\ x_2\geq 3,\ x_3\geq 5$

$2+3+5=10;\ 15-10=5$

$H_3^5 = C_{5+3-1}^5 = C_7^5 = \frac{7!}{5!\,2!} = \frac{7\cdot 6\cdot 5!}{5!\cdot 2} = 21$

№34 биноф.

а) x^5y^8

$(x-y)^{13}$

$C_{13}^8 = \frac{13!}{8!\,5!} = \frac{13\cdot 12\cdot 11\cdot 10\cdot 9}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 1287$

Занятие 11

№61 рекурр. ф-ла

а) $a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2};\ n\geq 2,\ a_0=3;\ a_1=6$

$r^2 = r+6$

$r^2-r-6=0$

$r=-2 \quad r=3$

$\boxed{a_n = B_1 r^n + B_2 r_2^n + \ldots + B_k r_k^n}$

$a_n = B_1(-2)^n + B_2(3)^n$

$3 = B_1(-2)^0 + B_2(3)^0 = B_1 + B_2$

$6 = B_1(-2)^1 + B_2(3)^1 = -2B_1 + 3B_2$

$\begin{cases} B_1 + B_2 = 3 \\ -2B_1 + 3B_2 = 6 \end{cases}$

$B_1 = \frac{3}{5}$

$B_2 = \frac{12}{5}$

е) $a_n = -8a_{n-1} - 16a_{n-2};\ n\geq 2,\ a_0=4,\ a_1=-4$

$r^2 = -8r-16$

$r^2+8r+16=0$

$r=-4$

$a_n = (B_1+B_2)r_1^n + B_3 r_2^n$

$\boxed{a_n = B_1 r_1^n + B_2 r_2^n + \ldots + B_k r_k^n}$

$a_n = B_1(-4)^n + B_2 n(-4)^n$

$4 = B_1(-4)^0 + B_2\cdot 0(-4)^0 = B_1$

$-4 = B_1(-4)^1 + B_2\, 1(-4)^1$

$\begin{cases} B_1 = 4 \\ B_1(-4)^1 + B_2(-4) = -4 \end{cases}$ $\begin{cases} B_1 = 4 \\ -4B_1 + 4B_2 = -4 \end{cases}$ $\begin{cases} B_1 = 4 \\ -4\cdot 4 + 4B_2 = -4 \end{cases}$

$\begin{cases} B_1 = 4 \\ -4B_2 = 12 \end{cases}$ $\begin{cases} B_1 = 4 \\ B_2 = -3 \end{cases}$

$a_n = 4(-4)^n - 3n(-4)^n$

$a_n = (-4)^n(4-3n)$

д) $a_n = a_{n-2};\ n\geq 2,\ a_0=5;\ a_1=-1$

$r^2=1 \quad (r^2-1)=0 \quad r=-1 \quad r=1$

№64

12

$\lceil \frac{n}{12} \rceil$ $\left\{ \begin{array}{l} \lceil 5 \rceil = 5 \\ \lceil 5,1 \rceil = 6 \\ \lceil 5,7 \rceil = 6 \\ \lceil 6 \rceil = 6 \end{array} \right\}$ є 12 знаків зодіаку. Скільки потрібно запросити людей, аби принаймні в 5 з них народились під одним і тим самим знаком зодіаку

$\lceil \frac{n}{12} \rceil = 6$

$n = 61$

$\lceil \frac{61}{12} \rceil = \lceil 5,1 \rceil = 6$

$12 \cdot 7 = 84$

$\lceil \frac{n}{84} \rceil = 2$

$n = 85$

№65 Скільки має бути людей, щоб довідково принаймні 2 з них народились в один і той самий день тижня та в один і той самий місяць (можливо, у різні роки)?

№69

$x_1 + x_2 + x_3 = 13$

$x_1, x_2, x_3 < 6$

$x_1 \geq 6$

$x_2 \geq 6$

$x_3 \geq 6$

$N = H_3^{13} = C_{15}^{13} = \frac{15!}{2!13!} = 105$ (за k-сто розв)

$N(q_1) = H_3^7 = C_9^7 = 36$ $\quad x_1 \geq 6$

$N(q_2) = H_3^7 = C_9^7 = 36$ $\quad x_2 \geq 6$

$N(q_3) = H_3^7 = C_9^7 = 36$ $\quad x_3 \geq 6$

$N(q_1, q_2) = H_3^1 = N(q_1, q_3) = N(q_2, q_3) = C_3^1 = \frac{3!}{2!} = 3$

$N(q_1, q_2, q_3) = 0$

$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C| =$

$= 3 \cdot 36 - 3 \cdot 3 + 0 = 108 - 9 = 99$

$N - 99 = 105 - 99 = 6$ $\quad$ [Д/з №70, 81]

Відповідь: 6

Домашня робота (з. 11)

№70.

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 17$

$x_1 \leq 3$
$x_2 \leq 4$
$x_3 \leq 5$
$x_4 \leq 8$

$x_1 \geq 3$

$x_2 \geq 4$

$x_3 \geq 5$

$x_4 \geq 8$

$N = H_4^{17} = C_{20}^{17} = \frac{20!}{17!3!} = \frac{\cancel{20}^{10} \cdot 19 \cdot \cancel{18}^{6} \cdot \cancel{17!}}{\cancel{3} \cdot 2 \cdot \cancel{17!}} = 1140$

$N(q_1) = H_4^{14} = C_{17}^{14} = \frac{17!}{14!3!} = 680$

$N(q_2) = H_4^{13} = C_{16}^{13} = \frac{16!}{13!3!} = 560$

$N(q_3) = H_4^{12} = C_{15}^{12} = \frac{15!}{12!3!} = 455$

$N(q_4) = H_4^{9} = C_{12}^{9} = \frac{12!}{9!3!} = 220$

$N(q_1, q_2) = H_4^{10} = C_{13}^{10} = \frac{13!}{10!3!} = 286$; $N(q_2, q_3) = H_4^8 = C_{11}^8 = \frac{11!}{8!3!} = 165$

$N(q_1, q_3) = H_4^9 = C_{12}^9 = \frac{12!}{9!3!} = 220$; $N(q_2, q_4) = H_4^5 = C_8^5 = \frac{8!}{5!3!} = 56$

$N(q_1, q_4) = H_4^6 = C_9^6 = \frac{9!}{6!3!} = 84$; $N(q_3, q_4) = H_4^4 = C_7^4 = \frac{7!}{4!3!} = 35$

$N(q_1, q_2, q_3) = H_4^5 = C_8^5 = \frac{8!}{5!3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot \cancel{6} \cdot \cancel{5!}}{\cancel{5!} \cdot \cancel{3 \cdot 2}} = 56$

$N(q_2, q_3, q_4) = H_4^0 = 1$;

$N(q_3, q_4, q_1) = H_4^2 = 0$

$N(q_4, q_1, q_2) = H_4^2 = C_5^2 = \frac{5!}{3!\,2!} = \frac{5\cdot 4\cdot 3!}{3!\,2} = 10$

$N(q_1, q_2, q_3, q_4) = H_4^3 = 0$

$680 + 560 + 455 + 220 - 286 - 165 - 220 - 56 - 84 - 35 + 56 + 10 =$
$= 1136$

$1440 - 1136 = 4$ $\qquad$ $B: 4$

№61

б) $a_n = 4a_{n-1} - 10a_{n-2}$ $\quad n \geq 2,\ a_0 = 2,\ a_1 = 1$

$r^2 = 4r - 10$

$r^2 - 4r + 10 = 0$

$r = 2 \quad r = 5$

$2 = B_1(2)^0 - B_2(5)^0 = B_1 - B_2$

$1 = B_1(2)^1 - B_2(5)^1 = 2B_1 - 5B_2$

$\begin{cases} B_1 - B_2 = 2 \\ 2B_1 - 5B_2 = 1 \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} B_1 = 2 + B_2 \\ 2(2 + B_2) - 5B_2 = 1 \end{cases}$

$4 + 2B_2 - 5B_2 = 1$

$-3B_2 = -3$

$B_2 = 1$

$B_1 = 2 + 1 = 3$

$B_2 = 1$

$B_1 = 3$

в) $a_n = 6a_{n-1} - 8a_{n-2}$, $\quad n \geq 2,\ a_0 = 4,\ a_1 = 10$

$r^2 = 6r - 8$

$r^2 - 6r + 8 = 0 \qquad r = 2 \quad r = 4$

$4 = B_1(2)^0 - B_2(4)^0 = B_1 - B_2$

$10 = B_1(2)^1 - B_2(4)^1 = 2B_1 - 4B_2$

$\begin{cases} B_1 - B_2 = 4 \\ 2B_1 - 4B_2 = 10 \end{cases} :2$ $\qquad$ $\begin{cases} B_1 - B_2 = 4 \\ B_1 - 2B_2 = 5 \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} B_1 = 4 + B_2 \\ 4 + B_2 - 2B_2 = 5 \end{cases}$

$\begin{cases} B_1 = 4 + B_2 \\ -B_2 = 1 \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} B_1 = 4 + B_2 \\ B_2 = -1 \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} B_1 = 3 \\ B_2 = -1 \end{cases}$

$B_1 = 3$

$B_2 = -1$

г) $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$, $\quad n \geq 2,\ a_0 = 4,\ a_1 = 1$

$r^2 = 2r - 1$

$r^2 - 2r + 1 = 0$

$r = 1$

$a_0 = B_1(1)^n - B_2 n(1)^n$

$4 = B_1(1)^0 - B_2 \cdot 0\,(1)^0 = B_1$

$1 = B_1(1)^1 - B_2 \cdot 1(1)^1 = B_1 - B_2$

$\begin{cases} B_1 = 4 \\ B_1 - B_2 = 1 \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} B_1 = 4 \\ 4 - B_2 = 1 \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} B_1 = 4 \\ -B_2 = -3 \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} B_1 = 4 \\ B_2 = 3 \end{cases}$

$B_1 = 4$

$B_2 = 3$

д) $a_n = a_{n-2}$; $\quad n \geq 2,\ a_0 = 5,\ a_1 = 1$

$r^2 = 1 \qquad r^2 - 1 = 0 \qquad r = -1 \quad r = 1$

$5 = B_1(-1)^0 - B_2(1)^0 = B_1 - B_2$

$-1 = B_1(-1)^1 - B_2(1)^1 = -B_1 - B_2$

$\begin{cases} B_1 - B_2 = 5 \\ B_1 + B_2 = -1 \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} B_1 = 2 \\ B_2 = -3 \end{cases}$

ж) $a_n = -7a_{n-1} - 16a_{n-2} - 12a_{n-3}$, $n \geq 3$, $a_0 = 2$, $a_1 = 9$, $a_2 = 29$

$r^3 = -7r^2 - 16r - 12$

$r^3 + 7r^2 + 16r + 12 = 0$; $r^3 + 2r^2 + 5r^2 + 10r + 6r + 12 = 0$

$r^3(r+2) + 5r(r+2) + 6(r+2) = 0$

$(r+2)(r^2 + 5r + 6) = 0$

$(r+2)(r+2)(r+3) = 0$

$(r+2)^2(r+3) = 0$

$r = -2$ $r = -3$

$a_n = -B_1(-2)^n - B_2 n(-2)^n - B_3 n(-3)^n$

① $2 = -B_1(-2)^0 - B_2 0(-2)^0 - B_3 0 \cdot (-3)^0$

$9 = -B_1(-2)^1 - B_2 1(-2)^1 - B_3 1(-3)^1$

$29 = -B_1(-2)^2 - B_2 2(-2)^2 - B_3 \cdot 2(-3)^2$

$$\begin{cases} B_1 = -2 \\ 2B_1 + 2B_2 + 3B_3 = 9 \\ -4B_1 - 8B_2 - 18B_3 = 29 \end{cases}$$

$B_1 = -2$ $B_2 = \frac{39}{4}$ $B_3 = -\frac{23}{6}$

② $2 = -B_1(-2)^0 - B_2(-3)^0 0 - B_3 0(-3)^0$

$9 = -B_1(-2)^1 - B_2 1(-3)^1 - B_3 1(-3)^1$

$29 = -B_1(-2)^2 - B_2 \cdot 2(-3)^2 - B_3 \cdot 2(-3)^2$

$$\begin{cases} B_1 = -2 \\ 2B_1 + 3B_2 + 3B_3 = 9 \\ -4B_1 - 18B_2 - 18B_3 = 29 \end{cases}$$

$\varnothing$

Заняття 12

№51 лексикограф перестановка

1432 = 2 134

54123 = 54132

6714235 =

31528764 = 31542678

№52 в лексикограф порядку розташ

{1, 2, 3, 4, 5, 6}:

156423, 165432, 231456, 231465, 234561, 314562, 432561, 435612, 541236, 543216, 654312, 654321

№53. запис перш. за лексикограф перест.

{1, 2, 3, 4, 5, 6}

1) 123456
2) 123465
3) 123546
4) 123645
5) 123654
6) 124536
7) 124365
8) 123564
9) 124563
10) 124635
11) 124653
12) 125346
13) 125364
14) 125463
15) 125643
16) 125634

№56 множина сполучень

$\{M = \{a, b, c, d, e\}$
$X = \{1, 2, 3, 4, 5\}\}$

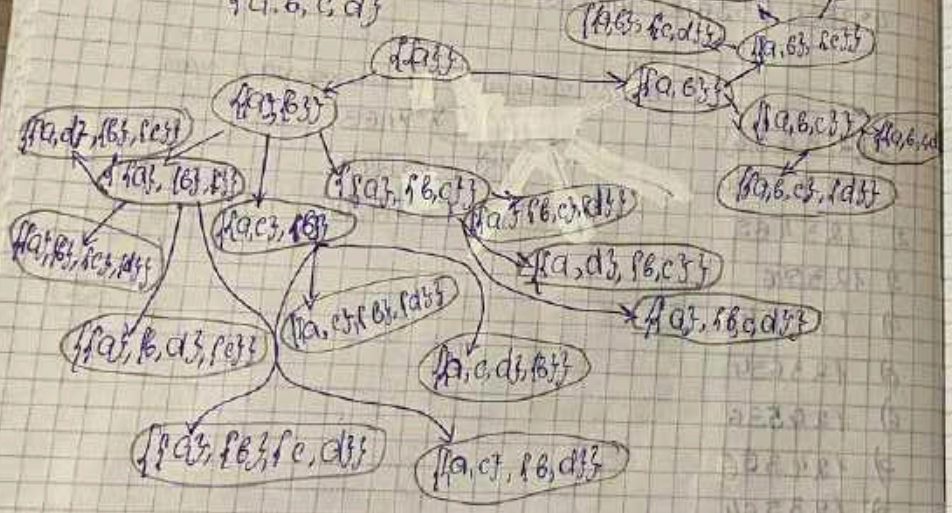
$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$C_6^4 = \frac{6!}{4!2!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 4!}{4!2} = 15$

1) 1234
2) 1235
3) 1236
4) 1245
5) 1246
6) 1256
7) 1345
8) 1346
9) 1356
10) 1456
11) 2345
12) 2346
13) 2356
14) 2456
15) 3456

розбиття №60.

$\{a, b, c, d\}$



№37. У розкл. бінома коеф. 3-го члена = 28
Визнач. середнє член розкладу.

$(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})^n$

C_n^0
C_n^1
C_n^2
...

$C_n^2 = \frac{n^2 - n}{2} = 28$

$n = -7$

$n = 8$

$C_8^0;\ C_8^1;\ C_8^2;\ C_8^3;\ \ldots,\ C_8^8$

$C_8^4 = \frac{8!}{4!4!} = 70$

$(x-y)^n = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j C_n^j x^{n-j} y^j$

$(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})^8 = \sum_{j=0}^{8} \binom{8}{j} \sqrt{1+x}^{8-j} (-\sqrt{1-x})^j =$

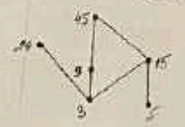
$= (1+x)^4 - 8\sqrt{(1+x)^7(1-x)} + 126 + 56x + 56x^2 + 14x^3 + 56\sqrt{1+2x+x^2+1-6x^2+6x^3+4x^4-2x^2-x^4} - 140x^2 - 56\sqrt{1-2x-x^2+6x^2-6x^3+2x^4+2x^3+x^4} - 56x + 56x^2 - 8\sqrt{(1+x)(1-x)^7} + (1-x)^4$

2. Додаткові задачі

Д_1. Дати відповіді на запитання щодо частково впорядкованої множини

$$(\{3, 5, 9, 15, 24, 45\}, |)$$

Зауваження. Для формулювання відповідей зручно скористатися діаграмою Гассе.



а) Знайти максимальні елементи. Елементи 24 і 45 – максимальні.

б) Знайти мінімальні елементи. Елементи 3 і 5 – мінімальні.

в) Чи є тут найбільший елемент? Тут найбільший елемент такий, який ділиться на всі інші елементи. Є тільки два кандидати на найбільший елемент – це 24 і 45. Але оскільки жоден з них не ділиться на інший, то найбільшого елемента немає.

г) Чи є тут найменший елемент? Тут найменший елемент має ділити всі інші елементи. Є два кандидати: 3 і 5. Але оскільки жоден з них не ділить інший, то найменшого елемента немає.

д) Знайти всі верхні грані множини {3, 5}. Потрібно знайти всі елементи, котрі діляться на 3 і 5. Цим вимогам задовольняють 15 і 45.

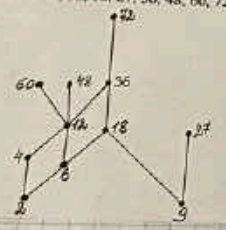
е) Знайти найменшу верхню грань множини {3, 5}, якщо вона існує. Найменша верхня грань 15, оскільки 15 ділить 45 (див. (д)).

ж) Знайти всі нижні грані множини {15, 45}. Потрібно знайти всі елементи, які ділять 15 і 45. Цій вимозі задовольняють 3, 5 і 15.

з) Знайти найбільшу нижню грань множини {15, 45}, якщо вона існує. Елемент 15 найбільша нижня грань, бо всі нижні грані – це 3, 5 і 15, а 3 і 5 ділять 15 (див. (ж)).

Д_2. Дати відповіді на запитання щодо частково впорядкованої множини

$$(\{2, 4, 6, 9, 12, 18, 27, 36, 48, 60, 72\}, |)$$



а) Знайти максимальні елементи. Елементи 27, 48, 60 і 72 – максимальні. Справді, кожний з них не ділить жодне число з множини.

б) Знайти мінімальні елементи. Елементи 2 і 9 – мінімальні. Кожний інший елемент ділиться на 2 або на 9.

в) Чи є тут найбільший елемент? Тут найбільшого елемента немає.

г) Чи є тут найменший елемент? Тут найменшого елемента немає.

д) Знайти всі верхні грані множини {2, 9}. Потрібно знайти всі елементи, котрі діляться на 2 і 9. Цим вимогам задовольняють 18, 36 і 72.

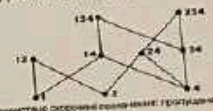
е) Знайти найменшу верхню грань множини {2, 9}, якщо вона існує. Найменша верхня грань 18, оскільки 18 ділить решту верхніх граней (див. (д)).

ж) Знайти всі нижні грані множини {60, 72}. Потрібно знайти всі елементи, які ділять 60 і 72. Цій вимозі задовольняють 2, 4, 6 і 12.

з) Знайти найбільшу нижню грань множини {60, 72}, якщо вона існує. Елемент 12 – найбільша нижня грань, бо всі нижні грані – це 2, 4 і 6 – ділять 12 (див. (ж)).

Д_3. Дати відповіді на запитання щодо частково впорядкованої множини

$$(\{\{1\}, \{2\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}\}, \subset)$$



Зауваження. На діаграмі множини скорочені позначення: пропущені фігурні дужки і коми. Наприклад, замість {1, 3, 4} написано 134.

а) Знайти максимальні елементи. Максимальні елементи на діаграмі Гассе не мають ребер угору: це {1, 2}, {1, 3, 4} і {2, 3, 4}.

б) Знайти мінімальні елементи. Мінімальні елементи на діаграмі Гассе не мають ребер униз: це {1}, {2} і {4}.

в) Чи є тут найбільший елемент? Найбільшого елемента тут немає, бо є більше ніж один максимальний елемент, жоден з яких не є більшим, ніж інші.

г) Чи є тут найменший елемент? Найменшого елемента тут немає, бо є більше ніж один мінімальний елемент, жоден з яких не є меншим, ніж інші.

д) Знайти всі верхні грані множини {{2}, {4}}. Верхні грані – це множини, які містять {2} і {4} як підмножини, тобто це множини, які містять 2 і 4 як елементи. На діаграмі це підмножини, до яких є висхідні шляхи як від {2}, так і від {4}. Це, очевидно, {2, 4} і {2, 3, 4}.

е) Знайти найменшу верхню грань множини {{2}, {4}}, якщо вона існує. У (д) ми знайшли верхні грані – це {2, 4} і {2, 3, 4}. Оскільки {2, 4} менше ніж {2, 3, 4} (у сенсі, що {2, 4} є підмножиною {2, 3, 4}), то {2, 4} – найменша верхня грань.