Лекція 8

Відношення еквівалентності. Відношення часткового порядку

План лекції

1. Відношення еквівалентності
2. Класи еквівалентності
3. Відношення часткового порядку
4. Лексикографічний порядок

Відношення еквівалентності

Розглянемо відношення, які водночас мають декілька зазначених вище властивостей у певній комбінації.

Відношення на множині A називають *відношенням еквівалентності*, якщо воно рефлексивне, симетричне й транзитивне.

Приклад 1. Нехай R – таке відношення на множині цілих чисел: aRb тоді й тільки тоді, коли $(a = b)\vee(a = -b)$. Воно рефлексивне, симетричне й транзитивне, тому, являє собою відношенням еквівалентності.

Приклад 2. Нехай R – таке відношення на множині дійсних чисел: aRb тоді й лише тоді, коли $(a-b)$ – ціле число. Оскільки $a-a = 0$ ціле для всіх дійсних чисел a, то aRa для всіх дійсних чисел a. Отже, відношення R рефлексивне. Нехай тепер aRb. Звідси випливає, $a-b$ – ціле число. Але тоді $b-a$ також ціле, звідси bRa, тобто відношення R симетричне. Якщо aRb і bRc, то числа $a-b$ та $b-c$ цілі. Але тоді число $a-c = (a-b)+(b-c)$ також ціле, звідси aRc, тобто відношення R транзитивне. Отже, R – відношення еквівалентності на множині дійсних чисел.

Приклад 3. Конгруентність за модулем *m*. Нехай $m>1$ – ціле число. Доведемо, що $R = \{(a, b) \mid a \equiv b \pmod{m}\}$ – відношення еквівалентності на множині Z цілих чисел.

За означенням $a \equiv b \pmod{m}$ означає, що m ділить $(a–b)$. Зазначимо, що $a–a = 0$ ділиться на m, бо $0 = 0 \cdot m$. Отже, $a \equiv a \pmod{m}$, відношення рефлексивне. Далі, $a \equiv b \pmod{m}$, якщо $a–b = km$, де k – ціле число. Отже, $b–a = (–k)m$, тобто $b \equiv a \pmod{m}$, і відношення симетричне. Нарешті, нехай $a \equiv b \pmod{m}$, $b \equiv c \pmod{m}$. Це означає, що $a–b = km$, $b–c = lm$, де k, l – цілі числа.

Додамо останні дві рівності: $a–b+b–c = (k+l)m$, тобто $a–c = (k+l)m$. Звідси випливає, що $a \equiv c \pmod{m}$, відношення транзитивне. Отже, конгруентність за модулем m – відношення еквівалентності на множині цілих чисел.

Приклад 4. Нехай R – відношення на множині **рядків українських букв** таке, що aRb тоді й тільки тоді, коли $l(a) = l(b)$, де $l(x)$ – довжина рядка x. Чи є R відношенням еквівалентності?

Для будь-якого рядка a очевидно $l(a) = l(a)$, отже, відношення R рефлексивне. Тепер припустімо, що aRb, тому $l(a) = l(b)$. Але тоді $l(b) = l(a)$, тому bRa, отже, відношення R симетричне. Нарешті припустімо, що aRb і bRc. Тоді $l(a) = l(b)$ і $l(b) = l(c)$. Звідси слідує, що $l(a) = l(c)$ і aRc, тобто відношення R транзитивне. Тому що відношення R рефлексивне, симетричне й транзитивне, воно є відношенням еквівалентності.

Приклад 5. Нехай n – додатне ціле і S – множина двійкових рядків. Припустімо, що R_n – відношення на S таке, що sR_nt тоді й лише тоді, коли $s=t$ або обидва рядки s і t складаються щонайменше з n символів і перші n символів у рядках s і t однакові. Отже, кожен рядок довжиною менше ніж n є у відношенні тільки до самого себе; рядок s із щонайменше n символів є у відношенні до рядка t якщо і тільки якщо перші n символів у ньому ті самі, що і в рядку s. Наприклад, нехай $n=3$. Тоді $01R_301$ і $00111R_300101$, але $(01, 010)\notin R_3$ і $(01011, 01110)\notin R_3$.

Покажемо, що для будь-якої множини рядків S і для будь-якого додатного цілого n, R_n є відношенням еквівалентності на S.

Відношення R_n рефлексивне, бо $s=s$, отже sR_ns для будь-якого рядка з S. Якщо sR_nt, то тоді або $s=t$, або s і t мають щонайменше n символів і перші n символів однакові. Це означає, що tR_ns. Ми довели, що відношення R_n симетричне.

Тепер припустімо, sR_nt і tR_nu. Тоді або $s=t$, або s і t мають щонайменше n символів і перші n символів однакові. Аналогічно, або $t=u$, або t і u мають щонайменше n символів і перші n символів однакові. Тому в цьому випадку, як ми розуміємо, s, t і u складаються щонайменше з n символів кожний, та s і u мають першими n символами ті самі, що й t. Отже, sR_nu і відношення R_n транзитивне.

Отже, відношення R_n є відношенням еквівалентності.

У наступному прикладі ми розглянемо відношення, яке не є відношеннями еквівалентності.

Приклад 6. Нехай R – відношення на множині дійсних чисел таке, що xRy тоді й тільки тоді, коли $|x-y|<1$. Легко побачити, що це відношення рефлексивне, бо $|x-x|=0<1$ для будь-якого дійсного числа x. Відношення R симетричне, бо коли $|x-y|<1$, то і $|y-x|=|x-y|<1$ для будь-яких дійсних чисел x та y. Проте відношення R не є відношенням еквівалентності, бо воно не транзитивне.

Візьмемо $x=2.8$, $y=1.9$ і $z=1.1$. Тоді $|x-y|=|2.8-1.9|=0.9<1$, $|y-z|=|1.9-1.1|=0.8<1$, але $|x-z|=|2.8-1.1|=1.7>1$.

Класи еквівалентності

Почнемо з розгляду такого простого прикладу. Нехай A – множина учасників наукової конференції. Як R позначимо відношення на множині A яке містить усі пари (x, y), де x та y приїхали на конференцію з одного міста. Маючи на увазі якогось учасника x, ми можемо задати множину всіх учасників цієї конференції, еквівалентних до x за відношенням R. Ця множина містить усіх учасників, які приїхали на конференцію із того самого міста, що й учасник x. Цю підмножину множини A називають класом еквівалентності за відношенням R. Цей приклад приводить до такого означення.

Нехай R – відношення еквівалентності на множині A. Множину всіх елементів, які еквівалентні до елемента $a \in A$, називають *класом еквівалентності* (елемента a) *за відношенням* R, його позначають як $[a]_R$. Маючи на увазі якесь певне відношення еквівалентності, використовують позначення $[a]$ для цього класу еквівалентності.

Отже: $[a]_R = \{x \in A \mid (a, x) \in R\}$. Елемент $b \in [a]_R$ називають *представником* цього класу еквівалентності. Будь-який елемент із класу еквівалентності може бути використаний як представник цього класу.

Приклад 7. Знайдемо класи еквівалентності відношення з прикладу 1. Оскільки ціле число еквівалентне до самого до себе та до протилежного числа, то класи еквівалентності за цим відношенням такі: $[a]=\{-a, a\}$, $a\neq 0$ та $[0]=\{0\}$. Зокрема, $[7]=\{-7, 7\}$, $[-5]=\{-5, 5\}$

Приклад 8. Знайдемо класи еквівалентності елементів 0 і 1 для відношення конгруентності за mod 4 (див. приклад 3). Клас еквівалентності елемента 0 містить усі цілі числа b такі, що $0\equiv b \pmod 4$, тобто такі, що діляться на 4. Отже, $[0]=\{\ldots, -8, -4, 0, 4, 8, \ldots\}$. Клас еквівалентності елемента 1 містить усі цілі числа b такі, що $1\equiv b \pmod 4$. Звідси випливає, що $[1]=\{\ldots, -7, -3, 1, 5, 9, \ldots\}$. Класи еквівалентності, подібні до розглянутих у цьому прикладі, називають *класами конгруентності за модулем m* і позначають як $[a]_m$.

Отже, $[0]_4=\{\ldots, -8, -4, 0, 4, 8, \ldots\}$, $[1]_4=\{\ldots, -7, -3, 1, 5, 9, \ldots\}$.

Нехай R – відношення еквівалентності на множині A. Важливо зазначити, що класи еквівалентності, породжені двома елементами множини A, або збігаються, або не перетинаються. Про це твердить наступна лема.

Лема. Нехай R – відношення еквівалентності на множині A. Тоді такі твердження еквівалентні:

(I) aRb,

(II) $[a] = [b]$,

(III) $[a] \cap [b] \neq \varnothing$.

Доведення.

- Спочатку доведемо, що з (I) випливає (II). Припустимо, що aRb. Щоб довести рівність $[a]=[b]$, покажемо, що $[a]\subset[b]$ та $[b]\subset[a]$. Нехай $c\in[a]$, тоді aRc. Оскільки aRb, а R – симетричне відношення, то bRa. Позаяк відношення R транзитивне, то з bRa й aRc випливає bRc, тому $c\in[b]$. Отже, $[a]\subset[b]$. Аналогічно можна довести, що $[b]\subset[a]$.
- Доведемо тепер, що з (II) випливає (III). Справді $[a]\neq\varnothing$, бо $a\in[a]$ внаслідок рефлексивності. Отже, з $[a]=[b]$ випливає $[a]\cap[b]\neq\varnothing$.
- Нарешті, доведемо, що з (III) випливає (I). Припустимо, що $[a]\cap[b]\neq\varnothing$. Тоді існує такий елемент c, що $c\in[a]$ та $c\in[b]$, тобто aRc та bRc. Із симетричності відношення R випливає cRb. Оскільки відношення R транзитивне, то з aRc та cRb випливає aRb.

Позаяк з (I) випливає (II), з (II) випливає (III) та з (III) випливає (I), то твердження (I), (II), (III) еквівалентні.

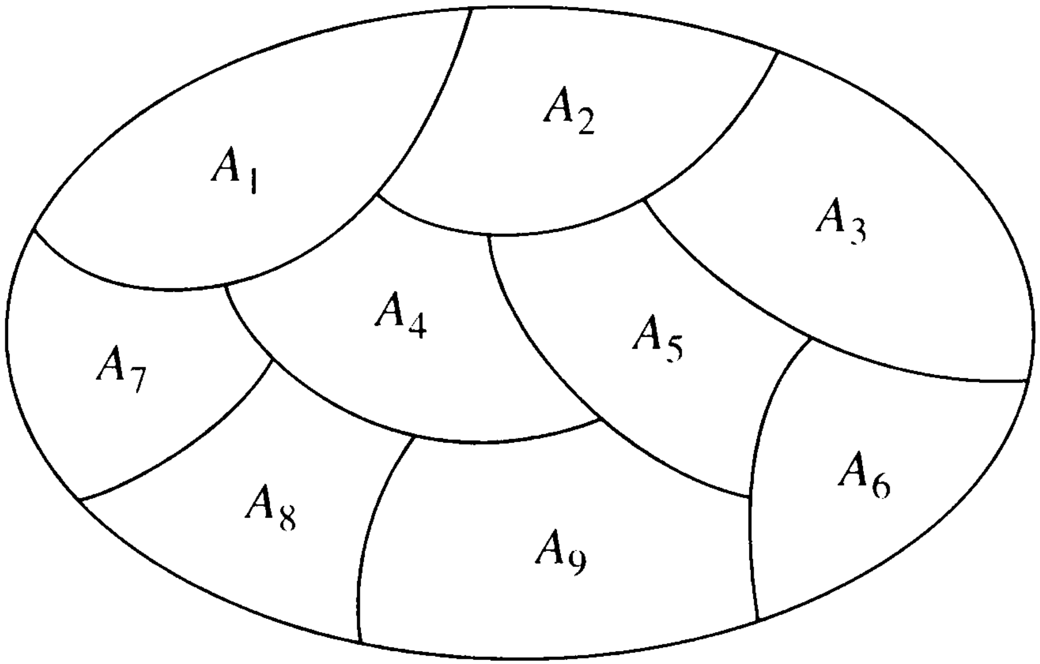
Відношення еквівалентності R, задане на множині A, тісно пов'язане з розбиттям цієї множини. Цей зв'язок виражено у двох наступних теоремах. Нагадаємо, що систему S підмножин множини A називають розбиттям цієї множини, якщо всі множини системи S непорожні, попарно не перетинаються, і об'єднання їх усіх дорівнює множині A. Більш докладно, розбиття множини A – це система S її підмножин A_i, $i \in I$ (де I – множина індексів), така, що виконуються умови:

1) $A_i \neq \varnothing$ для всіх $i \in I$;

2) $A_i \cap A_j = \varnothing$ коли $i \neq j$;

3) $\bigcup\limits_{i \in I} A_i = A$.

(Тут $\bigcup_{i \in I} A_i$ репрезентує об'єднання множин A_i для всіх $i \in I$.) Наступний рисунок ілюструє концепцію розбиття множини.



Приклад 9. Нехай $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Система множин $S = \{\{1, 2, 3\}, \{4, 6\}, \{5\}\}$ – розбиття цієї множини.

Теорема 1. Кожне відношення еквівалентності R на множині A породжує розбиття множини A на класи еквівалентності.

Доведення. Об'єднання класів еквівалентності за відношенням R – це всі елементи множини A, бо будь-який елемент a з множини A міститься у своєму класі еквівалентності $[a]_R$. Інакше кажучи,

$$\bigcup_{a \in A} [a]_R = A.$$

Із леми випливає, ці класи еквівалентності або співпадають, або не перетинаються, отже, $[a]_R \cap [b]_R = \varnothing$, коли $[a]_R \neq [b]_R$.

Ці два спостереження показують, що класи еквівалентності за відношенням еквівалентності R, заданим на множині A, формують розбиття цієї множини. Терему доведено.

Приклад 10. Відношення конгруентності за mod 4 (див приклад 8) породжує розбиття множини Z цілих чисел на 4 класи еквівалентності: $[0]_4$, $[1]_4$, $[2]_4$ та $[3]_4$. Вони попарно не перетинаються, а їх об’єднання дорівнює множині Z.

Ось ці класи:

$$[0]_4 = \{. . . ,-8,-4, 0, 4, 8, . . .\},$$

$$[1]_4 = \{. . . ,-7,-3, 1, 5, 9, . . .\},$$

$$[2]_4 = \{. . . ,-6,-2, 2, 6, 10, . . .\},$$

$$[3]_4 = \{. . . ,-5,-1, 3, 7, 11, . . .\}.$$

Загалом є m різних класів конгруентності за модулем m; вони відповідають m різним остачам, можливим при діленні цілого числа на m. Ці m класів позначають як $[0]_m$, $[1]_m$, …, $[m-1]_m$. Вони й формують розбиття множини цілих чисел за цим відношенням еквівалентності (тобто за відношенням конгруентності за модулем m).

Приклад 11. Нехай R_3 – відношення еквівалентності з прикладу 5. Якими є класи еквівалентності, які формують розбиття множини всіх бітових рядків за відношенням R_3?

Зазначимо, що кожний бітовий рядок довжиною меншою ніж три еквівалентний тільки до самого себе. Отже, $[\lambda]_{R_3} = \{\lambda\}$, $[0]_{R_3} = \{0\}$, $[1]_{R_3} = \{1\}$, $[00]_{R_3} = \{00\}$, $[01]_{R_3} = \{01\}$, $[10]_{R_3} = \{10\}$, $[11]_{R_3} = \{11\}$. Кожний рядок довжиною три або більше еквівалентний одному з восьми бітових рядків 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111. Ось ці класи еквівалентності:

$$[000]_{R_3} = \{000, 0000, 0001, 00000, 00001, 00010, 00011, \ldots\},$$

$$[001]_{R_3} = \{001, 0010, 0011, 00100, 00101, 00110, 00111, \ldots\},$$

$$[010]_{R_3} = \{010, 0100, 0101, 01000, 01001, 01010, 01011, \ldots\},$$

$$[011]_{R_3} = \{011, 0110, 0111, 01100, 01101, 01110, 01111, \ldots\},$$

$$[100]_{R_3} = \{100, 1000, 1001, 10000, 10001, 10010, 10011, \ldots\},$$

$$[101]_{R_3} = \{101, 1010, 1011, 10100, 10101, 10110, 10111, \ldots\},$$

$$[110]_{R_3} = \{110, 1100, 1101, 11000, 11001, 11010, 11011, \ldots\},$$

$$[111]_{R_3} = \{111, 1110, 1111, 11100, 11101, 11110, 11111, \ldots\}.$$

Теорема 2. Будь-яке розбиття множини A визначає на множині A відношення еквівалентності.

Доведення. Нехай $a, b \in A$, будемо вважати, що aRb тоді й лише тоді, коли a та b належать одній множині розбиття. Залишилося довести, що одержане відношення на множині A являє собою відношенням еквівалентності. Для цього потрібно переконатись, що воно рефлексивне, симетричне й транзитивне. Справді, оскільки a належить якійсь множині розбиття, то aRa, тобто відношення рефлексивне. Нехай A_i – якась множина розбиття та $a, b \in A_i$. Тоді й $b, a \in A_i$, тобто з aRb випливає bRa. Симетричність доведено. Нарешті, із aRb і bRc випливає $a, b, c \in A_i$. Звідси aRc, тобто відношення R транзитивне. Теорему доведено.

Приклад 12. Записати упорядковані пари, які формують відношення еквівалентності, яке породжено розбиттям множини $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ із прикладу 9:

$$S=\{\{1, 2, 3\}, \{4, 6\}, \{5\}\}.$$

Тут $A_1=\{1, 2, 3\}$, $A_2=\{4, 6\}$, $A_3=\{5\}$. Пара $(a,b)\in R$ якщо і тільки якщо a та b в одній і тій самій множині розбиття. Пари $(1,1)$, $(1,2)$, $(1,3)$, $(2,1)$, $(2,2)$, $(2,3)$, $(3,1)$, $(3,2)$ і $(3,3)$ належать відношенню, бо $A_1=\{1, 2, 3\}$ – клас еквівалентності. Пари $(4,4)$, $(4,6)$, $(6,4)$ і $(6,6)$ належать відношенню R, бо множина $A_2=\{4, 6\}$ є класом еквівалентності. Нарешті, пара $(5,5)$ належить відношенню R, бо $A_3=\{5\}$ є класом еквівалентності. Ніякі інші пари відношенню еквівалентності R не належать.

Відношення часткового порядку

Ми дуже часто використовуємо відношення для упорядкування якихось чи всіх елементів множини. Наприклад, ми упорядковуємо слова, використовуючи відношення, яке складається з пар слів (x, y), де x є перед y у словнику. Ми плануємо проекти використовуючи відношення, що містить пари (x, y), де x та y – це завдання проекту такі, що x має бути завершеним до початку y. Ми впорядковуємо множину цілих чисел, використовуючи відношення, яке містить пари (x, y), де x менше y. Коли ми в будь-яке з цих відношень додамо **всі пари** виду (x, x), то отримаємо відношення яке є рефлексивним, антисиметричним і транзитивним. ***Ці властивості як раз і характеризують відношення, які використовують для упорядкування елементів множини.***

Відношення R на множині A називають *відношенням часткового порядку* (або *частковим порядком*), якщо воно рефлексивне, антисиметричне й транзитивне. Множину A з частковим порядком R називають *частково впорядкованою множиною* й позначають (A, R).

Приклад 13. Нехай $A=\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12\}$. Відношення R задамо як звичайне порівняння чисел: $(a, b)\in R$ тоді й лише тоді, коли $a \le b$ $(a, b\in A)$. Неважко безпосередньо переконатись, що це частковий порядок на множині A.

Приклад 14. Нехай A – множина з прикладу 13. Відношення R_1 задамо так: $(a, b)\in R_1$ тоді й лише тоді, коли a ділить b. Отже: $R_1=\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (6, 6), (8, 8), (12, 12), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 6), (1, 8), (1, 12), (2, 4), (2, 6), (2, 8), (2, 12), (3, 6), (3, 12), (4, 8), (4, 12), (6, 12)\}$.

Легко переконатись, що це відношення рефлексивне, антисиметричне й транзитивне, тому являє собою відношення часткового порядку на множині A.

Два елементи a та b частково впорядкованої множини (A, R) називають *порівнюваними*, якщо aRb або bRa. Якщо a та b – такі елементи, що ні aRb, ні bRa, то їх називають *непорівнюваними*.

Приклад 15. Елементи 3 та 4 множини (A, R_1) із прикладу 14 – непорівнювані.

Якщо (A, R) – частково впорядкована множина, у якій будь-які два елементи порівнювані, то її називають *лінійно*, або *тотально впорядкованою*, а частковий порядок R – *лінійним*, або *тотальним* порядком.

Отже, множина (A, R) із прикладу 13 лінійно впорядкована, множина (A, R_1) із прикладу 14 частково впорядкована, але не лінійно впорядкована. Лінійно впорядковану множину називають також *ланцюгом*.

Приклад 16. Нехай $A = E_2^n$ – множина всіх векторів довжиною n з булевими компонентами (тобто з компонентами 0, 1). Задамо частковий порядок на цій множині так: $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \le (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ тоді й лише тоді, коли $a_i \le b_i$ $(i = 1, \ldots, n)$. Цей частковий порядок не лінійний. Наприклад, не можна порівняти вектори (010000) і (101000).

Наступний приклад ілюструє відношення, яке не є частковим порядком.

Приклад 17. Нехай R – відношення на множині людей таке, що xRy якщо і тільки якщо x молодший ніж y. Покажемо, що це відношення не є частковим порядком. Зазначимо, відношення R <u>антисиметричне</u>, бо якщо людина x молодша ніж людина y, то людина y не є молодшою x. Отже, коли $(x, y) \in R$, то $(y, x) \notin R$. Відношення R <u>транзитивне</u>, бо коли людина x молодша y, а y молодша z, то x молодша z. Отже, коли xRy і yRz, то xRz. Проте, відношення R <u>не рефлексивне</u>, Бо людина не може бути молодшою від самої себе. Отже, $(x, x) \notin R$ для всіх людей x. Із цього випливає, що R не є відношенням часткового порядку.

Лексикографічний порядок

Слова в словнику розташовують у словниковому, або *лексикографічному* порядку, який ґрунтується на впорядкованості букв алфавіту.

Лексикографічний порядок можна визначити на декартовому добутку n частково впорядкованих множин $(A_1, \leq_1)$, $(A_2, \leq_2)$, …, $(A_n, \leq_n)$. Визначимо частковий порядок $\leq$ на $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ так:

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) < (b_1, b_2, \ldots, b_n),$$

якщо $a_1 <_1 b_1$, або є ціле $i > 0$ таке, що $a_1 = b_1$, …, $a_i = b_i$, але $a_{i+1} <_{i+1} b_{i+1}$.

Визначимо тепер лексикографічний порядок рядків (слів). Припустімо, що маємо рядки, компонентами яких є елементи лінійно впорядкованої множини S:

$$a_1 a_2 \ldots a_m \text{ і } b_1 b_2 \ldots b_n.$$

Нехай $t = \min(m, n)$. Тоді $a_1 a_2 \ldots a_m$ менше $b_1 b_2 \ldots b_n$ якщо і тільки якщо

$$a_1 a_2 \ldots a_t < b_1 b_2 \ldots b_t, \text{ або}$$

$$a_1 a_2 \ldots a_t = b_1 b_2 \ldots b_t \text{ та } m < n.$$

Наприклад, *похід* < *похідна*.