

Задачі до теми 7. Відношення еквівалентності

Рекомендовано:

Ауд. завд. №№ 22(а, б, д), 23(а, б, д), 24(а, б, д), 26, 27, 30(а, б), 31(а, б), 33(а, б, д), 38(б, г), 76, 77.

Дом. завд. №№ 22(в, г), 23(в, г), 24(в, г), 25, 30(в), 31(в), 33(в, г), 38(а, в).

22. Які з наведених нижче відношень на множині $\{0, 1, 2, 3\}$ являють собою відношеннями еквівалентності? Зазначити, чому інші відношення не є відношеннями еквівалентності:

- а) $\{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$;
- б) $\{(0, 0), (0, 2), (2, 0), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3)\}$;
- в) $\{(0, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3)\}$;
- г) $\{(0, 0), (1, 1), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$;
- д) $\{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 0), (2, 2), (3, 3)\}$.

23. Які з наступних відношень на множині всіх людей являють собою відношення еквівалентності? Зазначити, чому інші відношення не є відношеннями еквівалентності:

- а) $\{(a, b) \mid a \text{ та } b \text{ одного віку}\}$;
- б) $\{(a, b) \mid a \text{ та } b \text{ мають одних і тих самих батьків}\}$;
- в) $\{(a, b) \mid a \text{ та } b \text{ мають спільного одного з батьків}\}$;
- г) $\{(a, b) \mid a \text{ та } b \text{ зустрілись}\}$;
- д) $\{(a, b) \mid a \text{ та } b \text{ розмовляють спільною мовою}\}$.

24. Які з наступних відношень на множині всіх функцій із Z у Z являють собою відношення еквівалентності? Зазначити, чому інші відношення не є відношеннями еквівалентності:

- а) $\{(f, g) \mid f(1) = g(1)\}$;
- б) $\{(f, g) \mid f(0) = g(0) \text{ або } f(1) = g(1)\}$;
- в) $\{(f, g) \mid f(x) - g(x) = 1 \text{ для всіх } x \in Z\}$;
- г) $\{(f, g) \mid f(x) - g(x) = C \text{ для деякого } C \in Z \text{ і для всіх } x \in Z\}$;
- д) $\{(f, g) \mid f(0) = g(1) \text{ і } f(1) = g(0)\}$.

25. Задайте три відношення еквівалентності на множині студентів вашої академічної групи. Визначте класи еквівалентності для цих відношень еквівалентності.

26. Нехай A – непорожня множина, f – функція, визначена на множині A . Відношення R складається з усіх упорядкованих пар (x, y) таких, що $f(x) = f(y)$:

- а) довести, що R – відношення еквівалентності на A ;
- б) які класи еквівалентності породжує відношення R ?

27. Нехай A – непорожня множина, R – відношення еквівалентності на A . Довести, що існує така функція, визначена на множині A , що $(x, y) \in R$ тоді й лише тоді, коли $f(x) = f(y)$.

30. Визначити, які з наведених матриць подають відношення еквівалентності:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{в) } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

31. Визначити, які з графів являють собою графи відношень еквівалентності.

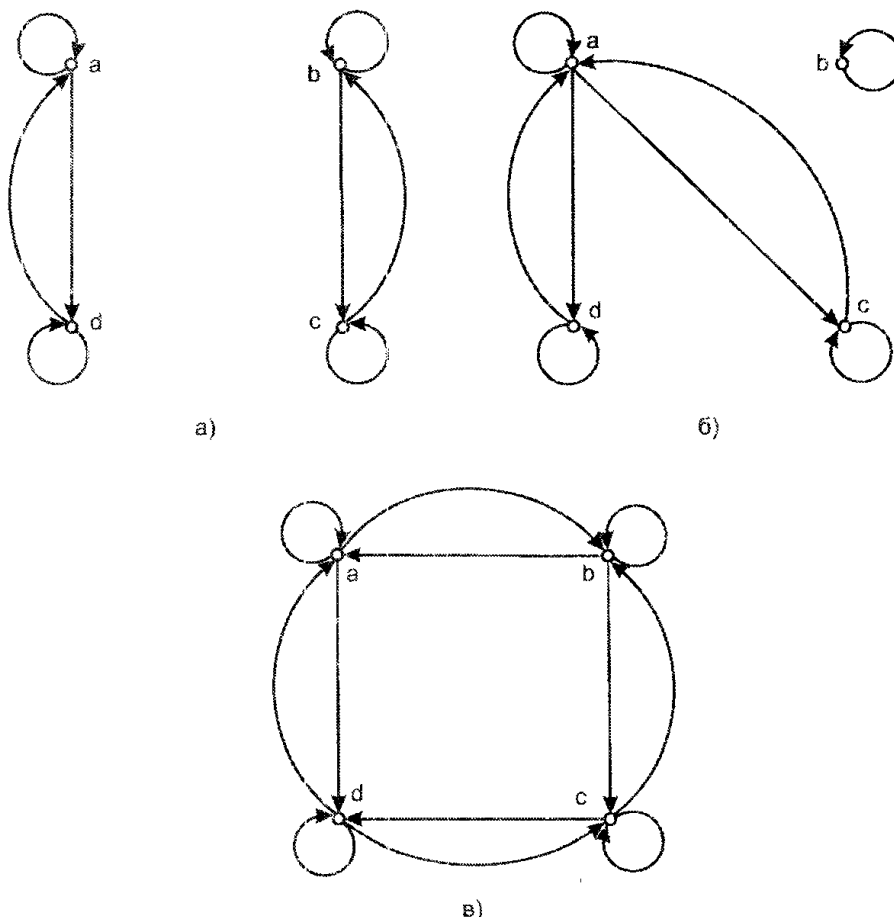


Рис. до задачі 31.

33. Для відношень еквівалентності із задач 22–24 наведіть класи еквівалентності.

38. Які з наступних систем підмножин – розбиття множини $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$? Для кожної системи підмножин, що являє собою розбиттям множини A , побудувати відповідне відношення еквівалентності на множині A :

- а) $\{\{1, 2\}, \{2, 3, 4\}, \{4, 5, 6\}\}$; б) $\{\{1\}, \{2, 3, 6\}, \{4\}, \{5\}\}$;
в) $\{\{2, 4, 6\}, \{1, 3, 5\}\}$; г) $\{\{1, 4, 5\}, \{2, 6\}\}$.

76. Чи ми обов'язково одержимо відношення еквівалентності, побудувавши транзитивне замикання симетричного замикання рефлексивного замикання довільного відношення?

77. Чи ми обов'язково одержимо відношення еквівалентності, побудувавши симетричне замикання рефлексивного замикання транзитивного замикання довільного відношення?