

# *Лекція 07*

## **Замикання відношень**

### **План лекції**

- **Операції над булевими матрицями**
- **Операції над відношеннями через матриці відношень**
- **Замикання відношень**
  - **Рефлексивне замикання відношення**
  - **Симетричне замикання відношення**
  - **Транзитивне замикання відношення. Алгоритм Воршалла**

## Замикання відношень

### Операції над булевими матрицями

Уведемо операції над булевими матрицями (тобто матрицями з елементами 0 і 1).

*Диз'юнкція* булевих  $m \times n$  матриць  $P$  та  $Q$  – це  $m \times n$  матриця  $Z = P \vee Q$ , елементи якої  $z_{ij} = p_{ij} \vee q_{ij}$ , де  $i=1, \dots, m, j=1, \dots, n$ .

*Кон'юнкція* булевих  $m \times n$  матриць  $P$  та  $Q$  – це  $m \times n$  матриця  $Z = P \wedge Q$ , елементи якої  $z_{ij} = p_{ij} \wedge q_{ij}$ , де  $i=1, \dots, m, j=1, \dots, n$ .

Нехай  $P$  –  $m \times k$  матриця,  $Q$  –  $k \times n$  матриця. Тоді *булевий добуток* матриць  $P$  та  $Q$  – це  $m \times n$  матриця  $Z = P \odot Q$ , елементи якої

$$z_{ij} = (p_{i1} \wedge q_{1j}) \vee (p_{i2} \wedge q_{2j}) \vee \dots \vee (p_{ik} \wedge q_{kj}),$$

або, коротше,

$$z_{ij} = \bigvee_{r=1}^k (p_{ir} \wedge q_{rj}),$$

де  $i=1, \dots, m, j=1, \dots, n$ .

Зазначимо, що булевий добуток матриць обчислюють за аналогією зі звичайним добутком цих матриць

$$z_{ij} = \sum_{r=1}^k (p_{ir} \cdot q_{rj}) \text{ (тобто «рядок на стовпчик»),}$$

тільки множення замінено на кон'юнкцію  $\wedge$ , а додавання – на диз'юнкцію  $\vee$ .

**Приклад.** Знайти булевий добуток матриць **A** і **B**, якщо

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Булевий добуток  $\mathbf{A} \odot \mathbf{B}$  обчислюємо так

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \odot \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0) & (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 1) & (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1) \\ (0 \wedge 1) \vee (1 \wedge 0) & (0 \wedge 1) \vee (1 \wedge 1) & (0 \wedge 0) \vee (1 \wedge 1) \\ (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0) & (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 1) & (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \vee 0 & 1 \vee 0 & 0 \vee 0 \\ 0 \vee 0 & 0 \vee 1 & 0 \vee 1 \\ 1 \vee 0 & 1 \vee 0 & 0 \vee 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Булевий степінь для булевих  $n \times n$  матриць (позначають як  $A^{[r]}$ ,  $r$  – натуральне) означають так:

$$A^{[r]} = \underbrace{A \odot A \odot \dots \odot A}_{r \text{ разів}}$$

Це означення коректне, оскільки булевий добуток матриць асоціативний. За означенням вважають  $A^{[0]} = I_n$ , де  $I_n$  – одинична  $n \times n$  матриця.

## Операції над відношеннями через матриці відношень

Операції над відношеннями легко виразити через матриці, які задають ці відношення. Переконатись у цьому пропонується самостійно (для цього потрібно проаналізувати означення відповідних операцій над відношеннями та над булевими матрицями).

$$\begin{aligned}M_{R_1 \cup R_2} &= M_{R_1} \vee M_{R_2}, \\M_{R_1 \cap R_2} &= M_{R_1} \wedge M_{R_2}.\end{aligned}$$

$$M_{S \circ R} = M_R \odot M_S.$$

Зверніть увагу на порядок множення матриць!!!

$$M_{R^k} = (M_R)^{[k]}.$$

*Зауваження.* Для **транзитивності** відношення потрібно, щоб булевий квадрат матриці відношення (булевий добуток матриці самої на себе) був «менше чи дорівнював» матриці відношення. Це означає таке: якщо  $(i, j)$  елемент булевого квадрату цієї матриці дорівнює 1, то  $(i, j)$  елемент самої матриці також дорівнює 1. Це випливає з того, що коли для відношення  $R$  виконується умова  $R^2 \subset R$ , то  $R$  – транзитивне.

## **Замикання відношень**

Нехай  $R$  – відношення на множині  $A$ . Воно може не мати деяких властивостей. Наприклад, це відношення може не бути рефлексивним, симетричним або транзитивним.

*Замиканням відношення  $R$  за властивістю  $q$  називають найменше відношення  $S$ , яке має властивість  $q$  і таке, що  $R \subset S$ . Термін „найменше відношення” означає, що  $S$  є підмножиною будь-якого відношення  $S$ , для якого виконуються умови:*

- 1)  $S$  має властивість  $q$ ,
- 2)  $R \subset S$ .

## Рефлексивне замикання відношення.

**Приклад.** Відношення  $R=\{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (3, 2)\}$  на множині  $A=\{1, 2, 3\}$  не рефлексивне. Щоб отримати **рефлексивне** замикання відношення  $R$ , додамо пари  $(2, 2)$  та  $(3, 3)$ , бо лише цих пари вигляду  $(a, a)$  немає в  $R$ . Очевидно, що це нове відношення рефлексивне, і  $R$  – його підмножина. Більше того, нове відношення являє собою підмножину будь-якого рефлексивного відношення  $S$ , для якого  $R\subset S$ . Отже, ми справді одержали рефлексивне замикання відношення  $R$ .

З останнього прикладу зрозумілий спосіб побудови рефлексивного замикання: достатньо додати до відношення  $R$  усі ті пари  $(a, a)$ , де  $a\in A$ , яких немає в  $R$ . Отже, рефлексивне замикання  $R$  дорівнює  $R\cup\Delta$ , де  $\Delta=\{(a, a): a\in A\}$ . Відношення  $\Delta$  на множині  $A$  називають *діагональним*.

## Симетричне замикання відношення.

**Приклад.** Відношення  $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2)\}$  на множині  $A = \{1, 2, 3\}$  не симетричне. Для отримання **симетричного** замикання  $R$  додамо пари  $(2, 1)$  і  $(1, 3)$ , бо лише цих пар вигляду  $(b, a)$ , для яких  $(a, b) \in R$ , немає в  $R$ . Очевидно, це нове відношення симетричне, а  $R$  – його підмножина. Окрім того, воно являє собою підмножину будь-якого симетричного відношення  $S$ , для якого  $R \subset S$ . Отже, ми справді одержали симетричне замикання відношення  $R$ .

Наведені міркування мають загальний характер: для отримання симетричного замикання потрібно додати всі такі пари  $(b, a)$ , що  $(b, a) \notin R$ , але  $(a, b) \in R$ . Отже, симетричне замикання відношення  $R$  дорівнює  $R \cup R^{-1}$ , де  $R^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in R\}$ .



## Транзитивне замикання відношення. Алгоритм Воршалла.

Як знайти **транзитивне** замикання відношення  $R$ ? Спочатку на прикладі покажемо, що попередня методика не приведе до успіху.

**Приклад.** На множині  $\{1, 2, 3, 4\}$  задано відношення  $R=\{(1, 3), (1, 4), (2, 1), (3, 2)\}$ . Очевидно, воно не транзитивне: не вистачає пар  $(1, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 1)$ . Додавши ці пари, отримаємо відношення  $R_1=\{(1, 3), (1, 4), (2, 1), (3, 2), (1, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 1)\}$ . Воно також не транзитивне, бо містить пари  $(3, 1)$  та  $(1, 4)$ , але не містить пари  $(3, 4)$ .

Отже, побудувати транзитивне замикання відношення складніше, ніж рефлексивне чи симетричне. Покажемо, як це можна зробити.

Шляхом в орієнтованому графі  $G$  від вершини  $a$  до вершини  $b$  називають послідовність дуг  $(x_0, x_1), (x_1, x_2), \dots, (x_{n-1}, x_n)$  графа  $G$ , де  $n$  – невід’ємне ціле,  $x_0 = a$ ,  $x_n = b$ , така, що в цій послідовності термінальна вершина кожної дуги та сама, що й ініціальна вершина наступної дуги шляху. Число  $n$  – кількість ребер шляху – називають його довжиною. Сам шлях можна позначити як послідовність вершин, через які він проходить:  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ . (Шлях довжиною  $n$  проходить через  $n+1$  вершину.) Ми розглядаємо порожню множину дуг як *шлях довжиною нуль* від  $a$  до  $a$ . Шлях довжиною  $n \geq 1$ , який починається і закінчується в одній і тій самій вершині називають *циклом*.

*Шляхом у відношенні  $R$*  від елемента  $a$  до елемента  $b$  називають послідовність елементів  $a, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, b$  множини  $A$  таких, що  $(a, x_1) \in R, (x_1, x_2) \in R, \dots, (x_{n-1}, b) \in R$ . Покажемо, що процедура відшукування транзитивного замикання відношення  $R$  еквівалентна процедурі визначення того, які пари вершин з’єднано шляхом. Зазначимо, що шлях у відношенні  $R$  від  $a$  до  $b$  відповідає шляху з вершини  $a$  у вершину  $b$  в графі  $G_R$  цього відношення.

**Теорема.** Нехай  $R$  – відношення на множині  $A$ . Шлях довжиною  $n$  від елемента  $a$  до елемента  $b$  у відношенні  $R$  існує тоді й лише тоді, коли  $(a, b) \in R^n$ .

**Доведення.** Застосуємо математичну індукцію. За означенням, шлях від елемента  $a$  до елемента  $b$  довжиною 1 існує тоді й лише тоді, коли  $(a, b) \in R$ . Отже, теорема справджується для  $n = 1$ .

Гіпотеза індукції: нехай теорема справджується для цілого невід'ємного  $n$ . Шлях довжиною  $n+1$  існує тоді й лише тоді, коли є такий елемент  $c \in A$ , що існує шлях довжиною *один* від елемента  $a$  до елемента  $c$  (тобто,  $(a, c) \in R$ ) та існує шлях довжиною  $n$  від елемента  $c$  до елемента  $b$  (тобто,  $(c, b) \in R^n$ ). Отже, з урахуванням індуктивної гіпотези, шлях довжиною  $n+1$  з  $a$  в  $b$  існує тоді й лише тоді, коли існує такий елемент  $c \in A$ , що  $(a, c) \in R$  та  $(c, b) \in R^n$ . Але такий елемент  $c$  існує тоді й лише тоді, коли  $(a, b) \in R^{n+1}$ . Отже, шлях довжиною  $n+1$  існує тоді й лише тоді, коли  $(a, b) \in R^{n+1}$ . Теорему доведено.

Нехай  $R$  – відношення на множині  $A$ . З'єднувальним називають відношення  $R^*$ , яке складається з таких пар  $(a, b)$ , що існує шлях від елемента  $a$  до елемента  $b$  у відношенні  $R$ .

Отже, з урахуванням щойно сформульованої теореми, маємо  $R^* = \bigcup_{k=1}^{\infty} R^k$ .

**Приклад.** Нехай відношення  $R$  задано на множині всіх станцій метро в м. Київ і складається з усіх пар  $(a, b)$  таких, що можна без пересадок проїхати від станції  $a$  до станції  $b$ . Тоді відношення  $R^n$  складається з усіх пар  $(a, b)$  таких, що можна проїхати від  $a$  до  $b$ , зробивши щонайбільше  $n-1$  пересадку. Відношення  $R^*$  складається з усіх пар  $(a, b)$  таких, що можна проїхати від  $a$  до  $b$ , зробивши стільки пересадок, скільки потрібно.

**Теорема.** Транзитивне замикання відношення  $R$  дорівнює з'єднувальному відношенню  $R^*$ .

**Доведення.** Очевидно, що  $R \subset R^*$  за означенням. Потрібно довести:

1) відношення  $R^*$  – транзитивне;

2)  $R^* \subset S$ , де  $S$  – будь-яке транзитивне відношення таке, що  $R \subset S$ .

**1.** Нехай  $(a, b) \in R^*$ ,  $(b, c) \in R^*$ . Звідси випливає, що існує шлях від елемента  $a$  до елемента  $b$  та шлях від елемента  $b$  до елемента  $c$  у відношенні  $R$ . Отже, існує шлях від елемента  $a$  до елемента  $c$  у відношенні  $R$  (він проходить через елемент  $b$ ). Звідси випливає, що  $(a, c) \in R^*$ , тобто відношення  $R^*$  – транзитивне.

**2.** Нехай відношення  $S$  транзитивне та  $R \subset S$ . Оскільки  $S$  транзитивне, то  $S^k \subset S$  за теоремою про властивість степеня транзитивного відношення. За означенням  $S^* = \bigcup_{k=1}^{\infty} S^k$ , тому, враховуючи, що  $S^k \subset S$ , маємо  $S^* \subset S$ . З умови  $R \subset S$  випливає  $R^* \subset S^*$ , бо кожний шлях в  $R$  – це також шлях в  $S$ . Отже,  $R^* \subset S^* \subset S$ . Звідси випливає, що для будь-якого транзитивного відношення  $S$  такого, що  $R \subset S$ , виконується  $R^* \subset S$ . Це означає, що відношення  $R^*$  – транзитивне замикання відношення  $R$ . Теорему доведено.

**Лема.** Нехай  $R$  – відношення на  $n$ -елементній множині  $A$ . Якщо в  $R$  існує шлях довжиною щонайменше один від  $a$  до  $b$ , то існує шлях від  $a$  до  $b$ , довжина якого не перевищує  $n$ . Більше того, коли  $a \neq b$ , якщо в  $R$  існує шлях від  $a$  до  $b$  довжиною щонайменше один, то існує шлях від  $a$  до  $b$ , довжина якого не перевищує  $n - 1$ .

**Доведення** цієї леми ми тут не наводимо.

Із цієї леми випливає, що транзитивне замикання відношення  $R$  є об'єднанням  $R, R^2, R^3, \dots$ , та  $R^n$ . Це випливає з того, що шлях в  $R^*$  між двома вершинами є тоді і тільки тоді, коли є шлях між цими вершинами в  $R^i$  для якогось  $i \leq n$ . Тому

$$R^* = \bigcup_{k=1}^n R^k = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots \cup R^n,$$

і матричне подання об'єднання відношень є диз'юнкцією матриць цих відношень. Отже матриця транзитивного замикання відношення дорівнює диз'юнкції матриць перших  $n$  степенів матриці відношення  $R$ . Цей результат складає зміст наступної теореми.

**Теорема.** Нехай  $M_R$  матриця відношення  $R$  на множині з  $n$  елементів. Тоді

$$M_{R^*} = M_R \vee (M_R)^{[2]} \vee (M_R)^{[3]} \vee \dots \vee (M_R)^{[n]}.$$

Згідно з алгоритмом, заснованим на цій формулі, для обчислення матриці  $M_{R^*}$  потрібно  $O(n^4)$  операцій. Ефективнішим для побудови матриці  $M_{R^*}$  є алгоритм С. Воршалла (S. Warshall), який вимагає  $O(n^3)$  операцій. Розглянемо цей алгоритм.

Припустімо, що  $R$  – відношення на  $n$ -елементній множині  $A$ . Нехай  $a_1, a_2, \dots, a_n$  – довільна нумерація елементів цієї множини. В алгоритмі Воршалла використовують *концепцію внутрішніх вершин шляху*. Внутрішніми вершинами шляху  $a, x_1, x_2, \dots, x_{r-1}, b$  називають вершини  $x_1, x_2, \dots, x_{r-1}$ .

Алгоритм Воршалла будує послідовність булевих матриць  $W^{(0)}, W^{(1)}, \dots, W^{(n)}$ , де  $W^{(0)} = M_R$  – матриця відношення  $R$ . Елементи матриці  $W^{(k)}$  позначимо як  $w_{ij}^{(k)}$ . Якщо існує шлях із вершини  $a_i$  у вершину  $a_j$  такий, що всі його **внутрішні** вершини містяться в множині  $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ , утвореній **першими**  $k$  вершинами, то  $w_{ij}^{(k)} = 1$ , а ні, то  $w_{ij}^{(k)} = 0$ . Перша й остання вершини такого шляху можуть і не належати множині вершин  $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ . Зазначимо, що  $W^{(n)} = M_{R^*}$ . Справді, елемент цієї матриці  $w_{ij}^{(n)}$  дорівнює 1 тоді й лише тоді, коли існує шлях із вершини  $a_i$  до вершини  $a_j$ , внутрішні вершини якого належать множині  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ , а це множина всіх вершин.



Рис. 1

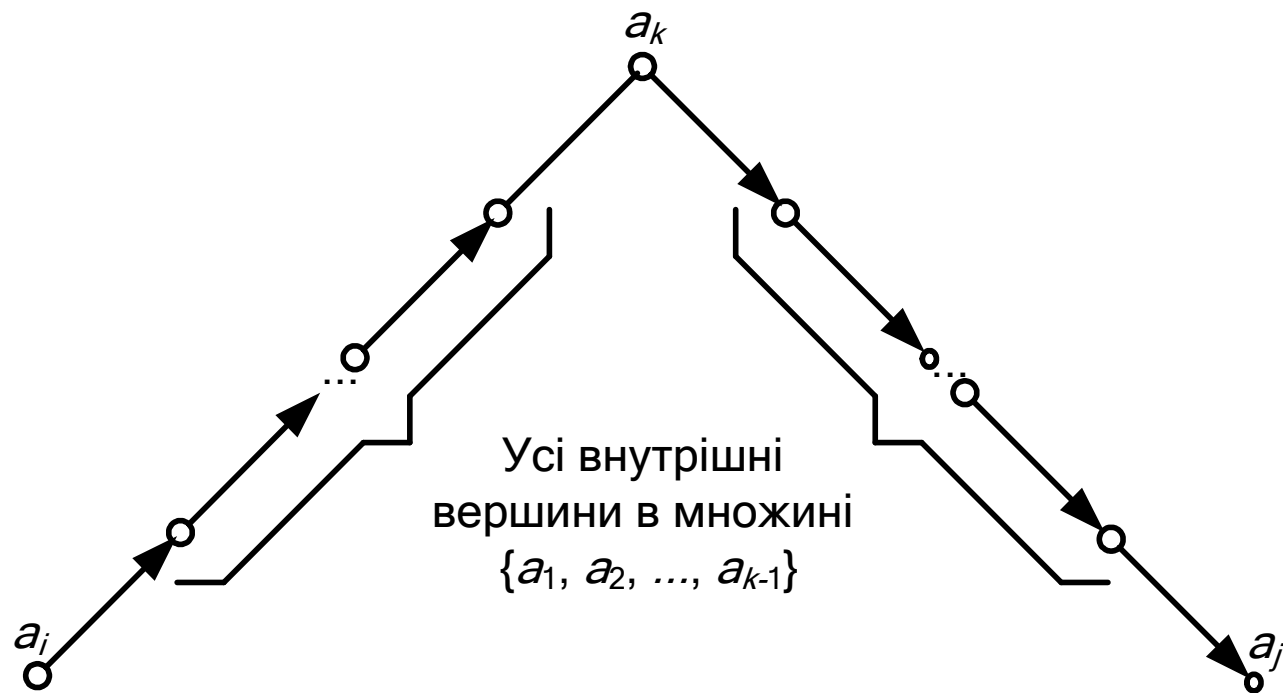


Рис. 2



Алгоритм Воршалла ефективно обчислює матрицю  $W^{(k)}$  за матрицею  $W^{(k-1)}$ . Шлях із вершини  $a_i$  у вершину  $a_j$  із внутрішніми вершинами в множині  $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$  існує лише в двох випадках.

1. Якщо існує шлях із вершини  $a_i$  у вершину  $a_j$  із внутрішніми вершинами лише в множині  $\{a_1, a_2, \dots, a_{k-1}\}$  (рис. 1);

2. Якщо існує шлях із вершини  $a_i$  у вершину  $a_k$  та шлях із вершини  $a_k$  у вершину  $a_j$ , і кожний із цих шляхів має внутрішні вершини лише в множині  $\{a_1, a_2, \dots, a_{k-1}\}$  (рис. 2).

У випадку 1 шлях існує тоді і лише тоді, коли  $w_{ij}^{(k-1)} = 1$ ; у випадку 2 – коли обидва елементи  $w_{ik}^{(k-1)}$  та  $w_{kj}^{(k-1)}$  дорівнюють 1. Отже,

$$w_{ij}^{(k)} = w_{ij}^{(k-1)} \vee (w_{ik}^{(k-1)} \wedge w_{kj}^{(k-1)}), k=1, 2, \dots, n.$$

Наведемо першу версію алгоритму Воршалла на псевдокодi (Kenneth H. Rosen, seventh edition, P. 606).

---

### Алгоритм Воршалла, версія 1

**procedure** *Warshall* ( $\mathbf{M}_R : n \times n$  zero-one matrix)

$\mathbf{W} := \mathbf{M}_R$

**for**  $k := 1$  **to**  $n$

**for**  $i := 1$  **to**  $n$

**for**  $j := 1$  **to**  $n$

$w_{ij} := w_{ij} \vee (w_{ik} \wedge w_{kj})$

**return**  $\mathbf{W}$  { $\mathbf{W} = [w_{ij}]$  is  $\mathbf{M}_{R^*}$ }

---

Для практичної реалізації останню формулу зручно перетворити так:

$$\begin{aligned} w_{ij}^{(k)} &= w_{ij}^{(k-1)} \vee (w_{ik}^{(k-1)} \wedge w_{kj}^{(k-1)}) = (w_{ij}^{(k-1)} \vee w_{ik}^{(k-1)}) \wedge (w_{ij}^{(k-1)} \vee w_{kj}^{(k-1)}) = \\ &= \begin{cases} w_{ij}^{(k-1)} \vee w_{kj}^{(k-1)}, & \text{якщо } w_{ik}^{(k-1)} = 1, \\ w_{ij}^{(k-1)}, & \text{якщо } w_{ik}^{(k-1)} = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Окрім того, очевидно, що в разі  $i=k$  дії в першому рядку формули можна не виконувати.

Отже,

$$w_{ij}^{(k)} = \begin{cases} w_{ij}^{(k-1)} \vee w_{kj}^{(k-1)}, & \text{якщо } i \neq k \text{ та } w_{ik}^{(k-1)} = 1, \\ w_{ij}^{(k-1)}, & \text{якщо } i = k \text{ чи } w_{ik}^{(k-1)} = 0. \end{cases}$$

Остання формула дає таке правило переходу від матриці  $W^{(k-1)}$  до матриці  $W^{(k)}$ : *для значень  $i \neq k$  в разі  $w_{ik}^{(k-1)} = 1$  замінити  $i$ -й рядок матриці  $W^{(k-1)}$  на диз'юнкцію  $i$ -го й  $k$ -го рядків цієї матриці.* Нижче подано другу версію алгоритму Воршалла на псевдокоді.

---

### Алгоритм Воршалла, версія 2

**procedure** *Warshall* ( $\mathbf{M}_R : n \times n$  zero-one matrix)

$\mathbf{W} := \mathbf{M}_R$

**for**  $k := 1$  **to**  $n$

**for**  $i := 1$  **to**  $n$

**if**  $(i \neq k) \wedge (w_{ik} = 1)$  **then**

**for**  $j := 1$  **to**  $n$

$w_{ij} := w_{ij} \vee w_{kj}$

**return**  $\mathbf{W}$  { $\mathbf{W} = [w_{ij}]$  is  $\mathbf{M}_{R^*}$ }

---

**Приклад.** Відношення задано матрицею  $M_R$ . Для  $k=1$  перший рядок залишаємо без змін ( $i=k$ ), другий і третій рядки заміняємо на диз'юнкцію кожного з них із першим:

$$W^{(0)} = M_R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad W^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Для  $k=2$  отримаємо, що  $W^{(2)}=W^{(1)}$ , бо всі елементи другого стовпця матриці  $W^{(1)}$  нульові.

Далі, для  $k=3$  одержимо:

$$W^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

і, нарешті, коли  $k=4$  матимемо остаточний результат – матрицю транзитивного замикання:

$$M_{R^*} = W^{(4)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$



### **Stephen Marshall**

(November 15, 1935 – December 11, 2006)

Після закінчення Гарварду Воршалл працював в ORO (Operation Research Office), де виконував наукові дослідження та розробки для армії Сполучених Штатів. У 1958 році він покинув ORO, щоб перейти у компанію під назвою Technical Operations, де він допоміг побудувати лабораторію досліджень і розробок для військових програмних проектів. У 1961 році він покинув Technical Operations, щоб заснувати Massachusetts Computer Associates. Пізніше, ця компанія стала частиною Applied Data Research (ADR). Після злиття, Воршалл зайняв місце у раді директорів ADR і керував різними проектами. Він залишив ADR в 1982 році та викладав щотижневий клас біблійним івритом у Temple Ahavat Achim у м. Глостер, штат Массачусетс.