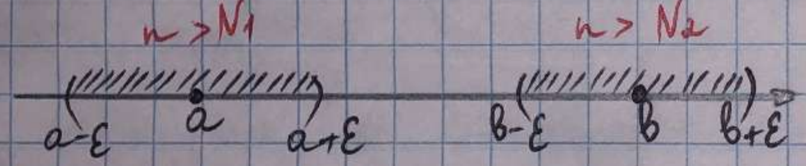
Теорема про єдність границі:

Послідовність не може мати двох різних границь.

Доведення: Припустимо супротивне, тобто нехай існує така послідовність $\{x_n\}$, що $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$, причому $a \neq b$, і нехай для визначеності $a < b$. Нехай $\varepsilon = \frac{b-a}{3}$



$U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(b) = \varnothing$

Згідно з означенням границі маємо:

$(\exists N_1)(\forall n > N_1) \quad \{|x_n - a| < \varepsilon\}$ $\quad \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$

$(\exists N_2)(\forall n > N_2) \quad \{|x_n - b| < \varepsilon\}$ $\quad \lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$

Нехай $N = \max\{N_1, N_2\}$. Тоді для $(\forall n > N)$ $\{|x_n - a| < \varepsilon\}$ і $\{|x_n - b| < \varepsilon\}$,

тобто елементи послідовності $\{x_n\}$ з номерами, більшими від N, одночасно належать до $U_\varepsilon(a)$ та $U_\varepsilon(b)$, а це неможливо з огляду на співвідношення (2.1). Отримана суперечність доводить, що $a = b$.

8

Теорема про обмеженість збіжної послідовності:

Збіжна послідовність обмежена.

Доведення: Нехай $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$. Згідно з означенням границі послідовності, для $\varepsilon = 1$ маємо

$(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N) \ \{|x_n - a| < 1\}$,

тобто $(\forall n > N) \ \{a - 1 < x_n < a + 1\}$.

Приймемо $M \overset{def}{=} \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_N|, |a-1|, |a+1|\}$.

Отже, $(\forall n \in \mathbb{N}) \ \{|x_n| \le M\}$.

9