Озн: 3.1.1. (за Гейне)

Нехай ф-я $f(x)$ визначена на інтервалі $(a;b)$ крім можливо точки $x_0 \in (a;b)$.

Число A називається границею ф-ї $f(x)$ в точці x_0, якщо для будь-якої послідовності $\{x_n\}$, $x_n \in (a;b)$, $x_n \neq x_0$, $n \in \mathbb{N}$, такої що $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, послідовність $\{f(x_n)\}$ збігається до числа A, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

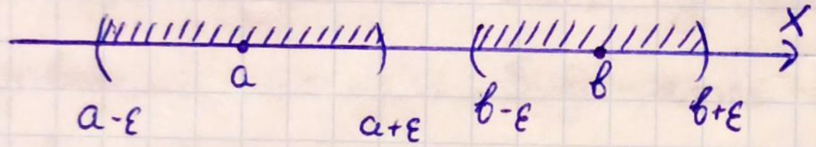
У такому разі записують $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$.

Теорема 2.2.1. Теорема про єдиність границі.

Послідовність не може мати двох різних границь.

Доведення. ∇ Припустимо, супротивне, тобто нехай існує така послідовність $\{x_n\}$, що $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$, причому $a \neq b$, і нехай для визначеності $a < b$. Нехай $\varepsilon = \frac{b-a}{3}$.

Тоді $U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(b) = \varnothing$ (2.1)



Згідно з означенням границі маємо $(\exists N_1)(\forall n > N_1)\{|x_n - a| < \varepsilon\}$, $(\exists N_2)(\forall n > N_2)\{|x_n - b| < \varepsilon\}$.

Нехай $N = \max\{N_1, N_2\}$. Тоді для $(\forall n > N)\{|x_n - a| < \varepsilon\}$ і $\{|x_n - b| < \varepsilon\}$, тобто елементи послідовності $\{x_n\}$ з номерами, більшими в N, одночасно належить до $U_\varepsilon(a)$ та $U(b)$, а це неможливо з огляду на співвідношення (2.1). Отримана суперечність доводить що $a = b$ Δ.

Теорема 2.2.2. Про обмеженість збіжної послідовності.

Збіжна послідовність обмежена.

Доведення. ∇ Нехай $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$. Згідно з означенням границі послідовності для $\varepsilon = 1$, маємо $(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N)\{|x_n - a| < 1\}$, тобто $(\forall n > N)\{a-1 < x_n < a+1\}$.

Приймемо $M \overset{def}{=} \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_N|, |a-1|, |a+1|\}$.

Отже $(\forall n \in \mathbb{N})\{|x_n| \leq M\}$. Δ.