Екзаменаційна робота
з математичного аналізу
Кравець Ольги
ПМО-11

Варіант 1.

① $\int \frac{\cos(tgx)}{\cos^2 x}dx = \int \cos(tgx)\cdot\frac{1}{\cos^2 x}dx = \{d(tgx) = (tgx)'dx = \frac{1}{\cos^2 x}dx\}$

$= \int \cos(tgx)\, d(tgx) = \{tgx = t\} = \int \cos t\, dt = \sin t$

$= \boxed{\sin(tgx) + C}$

② $\int \frac{3x-5}{(x+3)(x-1)(x+2)}dx =$

$\frac{3x-5}{(x+3)(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2}$

$A = \frac{3x-5}{\cancel{(x+3)}(x-1)(x+2)}\Big|_{x=-3} = \frac{-9-5}{-4\cdot(-1)} = \frac{-\cancel{14}\,7}{\cancel{4}\,2} = -\frac{7}{2}$

$B = \frac{3x-5}{(x+3)\cancel{(x-1)}(x+2)}\Big|_{x=1} = \frac{3-5}{4\cdot 3} = \frac{-\cancel{2}}{2\cancel{4}\cdot 3} = -\frac{1}{6}$

$C = \frac{3x-5}{(x+3)(x-1)\cancel{(x+2)}}\Big|_{x=-2} = \frac{-6-5}{1\cdot(-3)} = \frac{-11}{-3} = \frac{11}{3}$

$= \int -\frac{7}{2(x+3)} - \frac{1}{6(x-1)} + \frac{11}{3(x+2)}dx =$

$= -\int \frac{7}{2(x+3)}dx - \int \frac{1}{6(x-1)}dx + \int \frac{11}{3(x+2)}dx =$

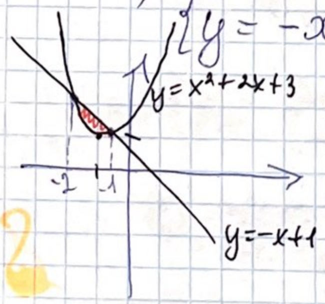
$= \boxed{-\frac{7}{2}\ln|x+3| - \frac{1}{6}\ln|x-1| + \frac{11}{3}\ln|x+2| + C}$

③ a) $\begin{cases} y = x^2+2x+3 \\ y = -x+1 \end{cases}$ => m. перетину $x^2+2x+3 = -x+1$

$x^2+2x+3+x-1=0$

$x^2+3x+2=0$

$x=-2 \quad x=-1$



$S = \int_{-2}^{-1}(-x+1-x^2-2x-3)dx = \int_{-2}^{1}(-3x-2-x^2)dx =$

$$=\left(\frac{-3x^2}{2}-2x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-2}^{-1}=-\frac{3\cdot(-1)^2}{2}-2\cdot(-1)-\frac{(-1)^3}{3}-\left(-\frac{3\cdot(-2)^2}{2}-2\cdot(-2)-\right.$$

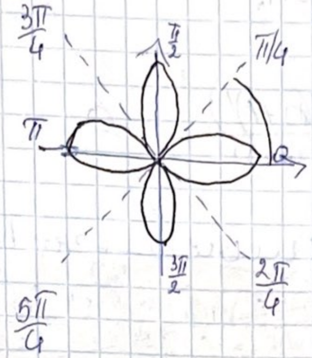
$$\left.-\frac{(-2)^3}{3}\right)=-\frac{3}{2}+2-\left(-\frac{1}{3}\right)-\frac{2}{3}=\boxed{\frac{1}{6}}$$

б) $r=3\cos 2\varphi$

$r\geq 0$

$3\cos 2\varphi\geq 0$

$\cos 2\varphi\geq 0$



r	3	0	-3	0	3	0	-3	0	3
φ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π

$$S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}r^2(\varphi)\,d\varphi$$

$$S=8S_1=8\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}(3\cos 2\varphi)^2\,d\varphi=\frac{1}{2}\cdot 8\int_0^{\pi/4}9\cos^2 2\varphi\,d\varphi=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 8\int_0^{\pi/4}9\cdot\frac{1}{2}(1+\cos 4\varphi)\,d\varphi=4\cdot 9\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}(1+\cos 4\varphi)\,d\varphi=$$

$$=8\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{9}{2}\cdot\frac{\pi}{4}+\frac{9\sin(4\cdot\frac{\pi}{4})}{8}-\left(\frac{9}{2}\cdot 0+0\right)\right)=$$

$$=\cancel{8}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{9\pi}{\cancel{8}}=\boxed{\frac{9\pi}{2}}$$

(4) $$\underbrace{\int_0^{+\infty}\frac{x^2+1}{\sqrt[6]{x^5+x^{19}}}\,dx}_{I}=\underbrace{\int_0^{1}\frac{x^2+1}{\sqrt[6]{x^5+x^{19}}}\,dx}_{I_1}+\underbrace{\int_1^{+\infty}\frac{x^2+1}{\sqrt[6]{x^5+x^{19}}}\,dx}_{I_2}$$

1) $x\to+0$

$$\frac{x^2+1}{\sqrt[6]{x^5+x^{19}}}=\frac{x^2+1}{\sqrt[6]{x^5(1+x^{14})}}=\frac{x^2+1}{x^{5/6}\cdot\underbrace{\sqrt[6]{1+x^{14}}}_{\to 1,\ \text{при } x\to+0}}\sim\frac{1}{x^{5/6}},\ x\to+0$$

$\frac{5}{6}<1\Rightarrow I_1$ — Сх.

2) $x\to+\infty$

$$\frac{x^2+1}{\sqrt[6]{x^5+x^{19}}}=\frac{x^2+1}{\sqrt[6]{x^{19}\left(\frac{1}{x^{14}}+1\right)}}=\frac{x^2+1}{x^{\frac{19}{6}}\cdot\underbrace{\sqrt[6]{\frac{1}{x^{14}}+1}}_{\to 1,\ \text{при } x\to+\infty}}\sim\frac{1}{x^{\frac{19}{6}}},\ x\to+\infty$$

3

$\frac{19}{6} > 1 \Rightarrow I_2$ – ЗБ. ; $I = I_1 + I_2$

I_1 – ЗБ, I_2 – ЗБ $\Rightarrow$ I – ЗБ

(5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot ((n+1)!)^3}{(3n)!} = a_n$

Н.У.: $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n((n+1)!)^3}{(3n)!} = 0$

Д.У.: За озн. Даламбера:

$$q = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^{n+1}((n+2)!)^3}{(3(n+1))!}}{\frac{2^n((n+1)!)^3}{(3n)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}((n+2)!)^3 \cdot (3n)!}{(3(n+1))! \cdot 2^n ((n+1)!)^3} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2((n+2)(n+1)!)^3 \cdot (3n)!}{(3n+3) \cdot (n+1)!^3} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2(n+2)^3 \cancel{(n+1)!^3} \cancel{(3n)!}}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)\cancel{(3n)!} \cancel{(n+1)!^3}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2(n+2)^3}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2x^3+12x^2+24x+16}{27x^3+9x^2+45x^2+15x+18x+6}$$

$$= \frac{2}{27}$$

$q = \frac{2}{27} < 1 \Rightarrow$ ЗБ.

В: ряд збіжний

4

⑥ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n\sqrt{n+e^{x}}}$, $E=\mathbb{R}$ (*)

▽ 1) $\sup_{x\in\mathbb{R}}|u_n(x)| \le \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\frac{\sin nx}{n\sqrt{n+e^{x}}}\right| \le \frac{1}{n\sqrt{n}} \le c_n,\ \forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in\mathbb{R}$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ — зб. узаг. гарм. ряд

$\left(\alpha = \frac{3}{2} > 1\right)$

За озн. Вайєрштрасса:

1), 2) $\Rightarrow$ (*) — збіг. рівном. $\forall x\in\mathbb{R}$ △

⑦ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n\cdot n^2}(x-5)^n$

1) За формулою Коші-Адамара:

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{(-1)^n}{2^n\cdot n^2}}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{2^n\cdot n^2}}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2\sqrt[n]{n^2}}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = \boxed{2}$$

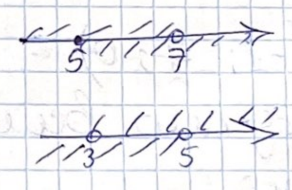
$R=2$

Інтервал збіжності:

$\{x:\ |x-5|<2\} = (3;7)$

$|x-5|<2$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x-5<2 \\ x-5\geq 0\end{cases} \\ \begin{cases} -(x-5)<2 \\ x-5<0\end{cases}\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x<7 \\ x\geq 5\end{cases} \\ \begin{cases} x>3 \\ x<5\end{cases}\end{array}\right.$$



2) Дослідження на зб. ряду в крайніх точках:

a) $x=3$:

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n\cdot n^2}(-2)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cancel{2^n}}{\cancel{2^n}\cdot n^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ — зб., бо $2>1$

(узаг. гарм. ряд)

б) $x=7$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\cancel{2^n} \cdot n^2} \cancel{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \approx 35.$$

В: $R=2$, інтервал збіжності $(3;7)$

⑧ $f(x,y)=\frac{x^3y^3}{x^2+y^2}$

1) $\exists \lim\limits_{x\to0}\left(\lim\limits_{y\to0}\frac{x^3y^3}{x^2+y^2}\right)=0$

2) $\exists \lim\limits_{y\to0}\left(\lim\limits_{x\to0}\frac{x^3y^3}{x^2+y^2}\right)=0$

3) $\exists \lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\left(\frac{x^3y^3}{x^2+y^2}\right) \Rightarrow$ ф-я має розрив II роду в т. $(0;0)$

Розгл. п-ть точок $P_n\left(\frac{1}{n};\frac{1}{n}\right)\xrightarrow[n\to+\infty]{} O(0;0)$

$$\lim_{P_n\to0}\frac{x^3y^3}{x^2+y^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^3}\cdot\frac{1}{n^3}}{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^6}}{\frac{2}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n^4}=$$

$=0$

Розгл. п-ть точок $Q_n\left(\frac{1}{n};0\right)\xrightarrow[n\to\infty]{} O(0;0)$

$$\lim_{Q_n\to0}\frac{x^3y^3}{x^2+y^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{0}{\frac{1}{n^2}}=0$$

Отже, $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}} f(x,y)$ існує

⑨ $U=2x^2+2y^2+z^2+2xy-x-8y-2021$

1. $\begin{cases}U'_x=4x+2y-1=0\\U'_y=2x+4y-8=0\\U'_z=2z=0\end{cases}$ $\begin{cases}x=-1\\y=\frac{5}{2}\\z=0\end{cases}$

$M\left(-1;\frac{5}{2};0\right)$

2. Знаходимо всеможливі другі часткові похідні

$U''_{y^2}=4$ $U''_{xy}=U''_{yx}\ 2$

$U''_{x^2}=4$ $U''_{zx}=U''_{xz}=0$ $A=\begin{pmatrix}4&2&0\\2&4&0\\0&0&2\end{pmatrix}$

? $U''_{z^2}=2$ $U''_{yz}=U''_{zy}=0$

$\Delta_1 > 0$

$\Delta_2 > 0$

$\Delta_3 > 0$

$\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 > 0 \Rightarrow$ ф-я в т. M має т. min

$U_{min} = U(M) = U(-1; \frac{5}{2}; 0) = 2 + \frac{25}{2} + 0 + \cancel{2} \cdot (-1) \cdot \frac{5}{\cancel{2}} + 1 - 8^{4} \cdot \frac{5}{\cancel{2}} -$

$- 2021 = \frac{29}{2} - 5 + 1 - 20 - 2021 = \boxed{\frac{-4061}{2}}$