[redacted] П

Означення 9.1.1 Розбиттям τ відрізка $[a, b]$ $(a < b)$ називають будь-яку скінченну систему його точок x_i, $i = 0, 1, \dots, n$, таку, що $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. О

У цьому разі пишемо $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{n}$. Кожен з відрізків $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$ називають відрізком розбиття τ.

Величину $|\tau| = \max\limits_{1 \le i \le n} \Delta x_i$,

де $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, \dots, n$, називають діаметром розбиття τ.

Означення 9.1.2 Кажуть, що маємо розбиття $(T, \bar{\xi})$ з вибраними точками відрізка $[a, b]$ і в кожному з відрізків $[x_{i-1}, x_i]$ цього розбиття вибрано точку $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, \dots, n)$.

Набір $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ позначають одним символом $\bar{\xi}$.

Означення 9.1.3 Нехай $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ — деяка функція, а $(T, \bar{\xi})$ — розбиття з вибраними точками відрізка $[a, b]$. Суму

$$\sigma(f; (T, \xi)) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i$$

називають інтегральною сумою (або сумою Рімана) функції f, що відповідає розбиттю $(T, \bar{\xi})$ з вибраними точками відрізка $[a, b]$.

Означення 9.1.4 Число $I \in \mathbb{R}$ називають границею інтегральної суми при $|T| \to 0$ і пишуть

$$I = \lim_{|T| \to 0} \sigma(f; (T, \xi)),$$

якщо $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall T : |T| < \delta)\{|\sigma(f; (T, \xi)) - I| < \varepsilon\}$.

Означення 9.1.5. Функцію $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ називають О
інтегровною за Ріманом на $[a, b]$ і пишуть $f \in R_{[a,b]}$,
якщо для неї існує границя. Число I в цьому
разі називають інтегралом Рімана (або визначеним
інтегралом) функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$ і позна-
чають символом $\int_a^b f(x)dx$, числа a, b — нижньою
та верхньою межами інтегрування, відповідно,
f — підінтегральною функцією, $f(x)dx$ — підінте-
гральним виразом, а x — змінною інтегрування.

Отже, $$\int_a^b f(x)dx \stackrel{def}{=} \lim_{|T| \to 0} \sigma(f; (T, \xi)).$$

[redacted]

Т

Теорема 12.3.4 (Інтегральна ознака збіжності ряду)

Якщо функція $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$ невід'ємна і незростаюча, то

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f(n)<+\infty\right)\Longleftrightarrow\left(\int_1^{+\infty} f(x)\,dx<+\infty\right). \qquad (1)$$

Доведення: Якщо $k\le x\le k+1$, то, оскільки функція f незростаюча, маємо $f(k)\ge f(x)\ge f(k+1)$.

Тому
$$f(k)=\int_k^{k+1} f(k)\,dx \ge \int_k^{k+1} f(x)\,dx \ge \int_k^{k+1} f(k+1)\,dx = f(k+1)$$
(нагадаємо, що обмежена монотонна функція інтегровна на скінченному відрізку), а, отже, для всіх $n\in\mathbb{N}$ виконується співвідношення

$$\sum_{k=1}^{n} f(k)\ge \int_1^{n+1} f(x)\,dx \ge \sum_{k=1}^{n} f(k+1).$$

Прийнявши $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n} f(k)$, отримуємо

$$S_n\ge\int_1^{n+1} f(x)\,dx\ge S_{n+1}-f(1). \qquad (2)$$

Переконаємось тепер у справедливості (1)

($\Rightarrow$) Якщо $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)\overset{\text{def}}{=}S<+\infty$, то зрозуміло, що $(\forall n\in\mathbb{N})\{S_n\le S\}$, отже, з огляду на (2) маємо

$\int_1^{n+1} f(x)dx \le S$. Тому для будь-якого $b \in [1, +\infty)$ виконується
$$F(b) = \int_1^b f(x)dx \le \int_1^{[b]+1} f(x)dx \le S.$$

Звідси і з теореми 3.7.1 випливає, що інтеграл у правій частині (1) збігається.

($\Leftarrow$) Навпаки, якщо цей інтеграл збігається, то для будь-якого $n \in \mathbb{N}$ виконується нерівність
$$\int_1^{n+1} f(x)dx \le \int_1^{+\infty} f(x)dx,$$

отже, враховуючи (2), отримуємо
$$S_{n+1} \le f(1) + \int_1^{+\infty} f(x)dx.$$

Звідси і з теореми 12.3.1 випливає, що $\sum_{n=1}^{\infty} f(n) < +\infty$. $\square$

Н

Наслідок 12.3.1 (Критерій збіжності узагальненого гармонічного ряду) Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ збігається, якщо $\alpha > 1$, і розбігається, якщо $\alpha \le 1$.

Доведення: Якщо $\alpha \le 0$, то $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = +\infty$, оскільки не виконується необхідна умова збіжності ряду ($\lim_{n\to\infty} a_n = 0$).

Якщо ж $\alpha > 0$, то, використовуючи інтегральну

О Означення 13.1.1 Нехай E — довільна множина, а $f, f_1, f_2, \dots : E \to \mathbb{R}$ — деякі функції. Кажуть, що функціональна послідовність $\{f_n\}$ збігається до функції f поточково на множині E, або що f є (поточковою) границею функціональної послідовності $\{f_n\}$ (і пишуть: $f_n \xrightarrow[E]{} f$), якщо

$$(\forall x \in E)\left\{\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)\right\}$$

тобто $(\forall x \in E)(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N)\left\{|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\right\}$.

О Означення 13.1.2 Функціональну послідовність $\{f_n\}$ називають рівномірно збіжною на множині E до функції f, якщо

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N)(\forall x \in E)\left\{|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\right\}.$$

Це коротко записують так: $f_n \overset{\rightrightarrows}{E} f$.

Т Теорема 13.1.1 Функціональна послідовність $\{f_n\}$ є рівномірно збіжною на множині E до функції f тоді й лише тоді, коли

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

Т Теорема 13.1.2 (Критерій Коші рівномірної збіжності функціональної послідовності)

Функціональна послідовність $\{f_n\}$ є рівномірно

збіжною на множині E тоді і лише тоді, коли
$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall x \in E)(\forall m, n : m, n > N)\{|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon\}$.

Означення 13.2.1 Нехай E — довільна множина, а $f, u_1, u_2, \ldots : E \to \mathbb{R}$ — деякі функції. Кажуть, що функціональний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ поточково (рівномірно) збігається до функції f на множині E, якщо послідовність його часткових сум $\{S_n\}$, де $S_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_k(x)$, поточково (рівномірно) збігається до функції f на цій множині. О

Теорема 13.2.1 (ознака Вейєрштрасса рівномірної збіжності функціонального ряду) Якщо члени функціонального ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ задовольняють умову T

$$(\forall x \in E)(\forall n \in \mathbb{N})\{|u_n(x)| \le c_n\},$$

причому $\sum_{n=1}^{\infty} c_n < +\infty$, то цей функціональний ряд є рівномірно збіжним на множині E.

Теорема 13.2.2 (ознака Діріхле) Нехай функції $a_n(x)$ та $b_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, визначені на множині E, причому T
а) послідовність часткових сум ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ обмежена, тобто $(\exists M > 0)(\forall k \in \mathbb{N})(\forall x \in E)\{|\sum_{n=1}^{k} a_n(x)| \le M\}$;

2) $(\forall x \in E)(\forall n \in \mathbb{N})\{b_n(x) \geq b_{n+1}(x)\}$ і $b_n(x) \underset{E}{\rightrightarrows} 0$.

Тоді ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$ рівномірно збіжний на множині E.

T Теорема 13.2.3 (ознака Абеля) Нехай

1) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ рівномірно збігається на множині E;

2) $(\forall x \in E)(\forall n \in \mathbb{N})\{b_n(x) \geq b_{n+1}(x)\}$ і послідовність $\{b_n(x)\}$ обмежена на E

тобто $(\exists M > 0)(\forall n \in \mathbb{N})(\forall x \in E)\{|b_n(x)| \leq M\}$

Тоді ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$ є рівномірно збіжним на множині E.

T Теорема 13.3.1* (про неперервність суми р. зб. ф. р.)

Якщо: 1) $\forall n \in \mathbb{N}$ функції $u_n(x)$ є неперервними на множині E;

2) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ рівномірно збігається на мн. E,

то сума ряду $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ є неперервною функцією на множині E.

– За умов виконання умов теореми маємо:

$(\forall x_0 \in E)$ $\lim\limits_{x \to x_0} S(x) = S(x_0)$, тобто $\lim\limits_{x \to x_0}\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right) =$

$= \lim\limits_{x \to x_0} S(x) = S(x_0) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x_0) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\lim\limits_{x \to x_0} u_n(x)\right)$.