Числові ряди

Означення 12.1.1. Нехай $\{a_n\}$ – числова послідовність. Вираз

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \qquad (12.1)$$

називають числовим рядом а числа a_n та $S_n \overset{def}{=\!=} a_1 + \ldots + a_n$ – відповідно, n-м членом та n-ю частковою сумою цього ряду.

Якщо існує скінченна границя

$$\lim_{n\to\infty} S_n \overset{def}{=\!=} S.$$

то ряд (12.1) називають *збіжним*, а число S – його сумою і пишуть

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S. \qquad (12.2)$$

Якщо ж ця границя нескінченна або не існує, то ряд (12.1) називають *розбіжним*.

Твердження 12.1.1. Нехай $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ — числові ряди, а $c \in \mathbb{R}$. Тоді

а) $$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n; \qquad (12.3)$$

б) $$\sum_{n=1}^{\infty} c a_n = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n; \qquad (12.4)$$

причому зі збіжності рядів праворуч випливає збіжність ряду ліворуч.

Справедливість цього твердження випливає з означення суми ряду і теореми про границю суми ~~ряду~~ та добутку числових послідовностей.

Означення 12.1.2. Ряд

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} a_n = a_{m+1} + a_{m+2} + \dots; \qquad (12.5)$$

а також його суму, якщо він збігається, називають m-м залишком ряду.

Твердження 12.1.2. Числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається тоді й лише тоді, коли збігається будь-який його залишок. У цьому разі для будь-якого $m \in \mathbb{N}$ справджується співвідношення

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{m} a_n + \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n \qquad (12.6)$$

Доведення. Справді, для всіх $m \in \mathbb{N}$ та $k > m$ маємо:

$$\sum_{n=1}^{k} a_n = \sum_{n=1}^{m} a_n + \sum_{n=m+1}^{k} a_n$$

Якщо перейдемо в цій рівності до границі при $k \to \infty$ і використаємо теорему про границю суми послідовностей, то переконаємось у справджуваності твердження.