Варіант 1

Екзаменаційна робота
з математичного аналізу
студента групи ПМО-11
Барського Андрія

1) а) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-3x-10}{2x^2-4x-30}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\cancel{(x-5)}(x+2)}{2\cancel{(x-5)}(x+3)}$

$\begin{cases} x^2-3x-10=0 \\ x_1=5 \\ x_2=-2 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x^2-4x-30=0 \\ D=16-4\cdot 2\cdot(-30)= \\ =16+240=256 \\ x_1=\dfrac{4+16}{4}=5 \\ x_2=\dfrac{4-16}{4}=-3 \end{cases}$

$=\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{(x+2)}{2(x+3)}=\dfrac{7}{2\cdot 8}=0{,}4375$

б) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}=\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{(2-\sqrt{x-3})(2+\sqrt{x-3})}{(x-7)(x+7)(2+\sqrt{x-3})}=$

$=\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{4-x+3}{(x-7)(x+7)(2+\sqrt{x-3})}=\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{-\cancel{(x-7)}}{\cancel{(x-7)}(x+7)(2+\sqrt{x-3})}=$

$=\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{-1}{(x+7)(2+\sqrt{x-3})}=\dfrac{-1}{14\cdot 4}=-\dfrac{1}{56}$

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)^{2x-3}=\left[\infty^{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1+1-1}{2x+1}\right)^{2x-3}=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\left(-\dfrac{2}{2x+1}\right)\right)^{2x-3}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\left(-\dfrac{2}{2x+1}\right)\right)^{-\left(\frac{2x+1}{2}\right)\left(\frac{2x-3}{2x+1}\right)}=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}e^{-\left(\frac{4x-6}{2x+1}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(-\frac{4x-6}{2x+1}\right)}=e^{-2}=\dfrac{1}{e^2}$

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 8x\cdot \operatorname{tg} 5x}{2x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\underbrace{\dfrac{\sin 8x}{8x}}_{\to 1}\cdot\underbrace{\dfrac{\operatorname{tg} 5x}{5x}}_{\to 1}\cdot\dfrac{5x\cdot 8x}{2x^2}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{40x^2}{2x^2}=20$

② а) $y = (28x+12)^{2020}$

$y' = 2020(28x+12)^{2019} \cdot 28$

б) $y = e^{\cos(5x+2)}$

$y' = e^{\cos(5x+2)} \cdot (-\sin(5x+2)) \cdot 5$

в) $y = \sin^{10}(\ln^5(x^4+3))$

$y' = 10\sin^9(\ln^5(x^4+3)) \cdot \cos(\ln^5(x^4+3)) \cdot 5\ln^4(x^4+3) \cdot$

$\cdot \frac{1}{x^4+3} \cdot 4x^3$

г) $y = (\operatorname{arctg} x)^{\frac{1}{x}}$

$y' = \left(e^{\ln(\operatorname{arctg} x)^{\frac{1}{x}}}\right)' = \left(e^{\frac{\ln(\operatorname{arctg} x)}{x}}\right)' = e^{\frac{\ln \operatorname{arctg} x}{x}} \cdot$

$\cdot \frac{x(\ln \operatorname{arctg} x)' - \ln \operatorname{arctg} x\,(x)'}{x^2} = \frac{x\left(\frac{1}{\operatorname{arctg} x} \cdot \frac{1}{1+x^2}\right) - \ln \operatorname{arctg} x}{x^2} \cdot e^{\frac{\ln \operatorname{arctg} x}{x}} =$

$= (\operatorname{arctg} x)^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{\cancel{x}\left(\frac{1}{\operatorname{arctg} x\,(1+x^2)}\right)}{x^{\cancel{2}}} - \frac{\ln(\operatorname{arctg} x)}{x} =$

$= (\operatorname{arctg} x)^{\frac{1}{x}} \cdot \left(\frac{x}{\operatorname{arctg} x\,(1+x^2)} - \frac{\ln(\operatorname{arctg} x)}{x}\right)$

③ 1) $D(y) = \mathbb{R} \setminus \{3\}$ $y = \dfrac{x^2-6x+13}{x-3}$

$E(f) =$

2) Неперіодична, ні парна, ні непарна.

$$\lim_{x\to 3-0} \frac{x^2-6x+13}{x-3} = \lim_{x\to 3-0} \frac{(3-0)^2-6(3-0)+13}{(3-0)-3} = \frac{4}{0} = \infty$$

$$\lim_{x\to 3+0} = \frac{x^2-6x+13}{x-3} = \lim_{x\to 3+0} \frac{(3+0)^2-6(3+0)+13}{(3+0)-3} = \frac{4}{0} = \infty$$

Отже, в точці $x=3$ функція має розрив II роду

$x=3$ – вертикальна асимптота

б) $y = kx+b$

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-6x+13}{x(x-3)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-6x+13}{x^2-3x} = 1$$

$$b = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-6x+13}{x-3} - x = \frac{x^2-6x+13-x^2+3x}{x-3} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-3x+13}{x-3} = -3$$

$y = x-3$ – похила асимптота

4) $x=0$ $y = \dfrac{0^2-6\cdot 0+13}{0-3} = \dfrac{13}{-3}$ $\left(0, -\dfrac{13}{3}\right)$

$y = 0 = \dfrac{x^2-6x+13}{x-3}$ $x^2-6x+13=0$ $x \neq 0$

Отже, ~~графік~~ функція не перетинає ось y