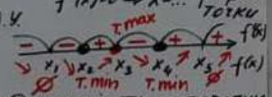
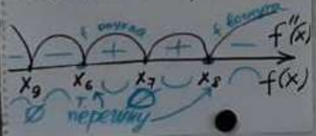
ПОБУДОВА ГРАФІКА

$f = f(x)$

1. $\mathcal{D}(f) =$ відразу
   $E(f) =$ по графіку
2. Періодичність, парність, неперервність.
3. Асимптоти:
   а) $x = x_0$ – т. розриву II р. $\Rightarrow$ $x = x_0$ – вертикальна ас-та
   б) Якщо $\exists$ скінченний $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = k$ і $\exists$ скінченний $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x) - kx) = b$, тоді $\exists$ $y = kx + b$ – похила ас-та при $x \to \pm\infty$
4. Перетин з осями координат
   а) $x = 0 \Rightarrow y = \dots$
   б) $y = 0 \Rightarrow x = \dots$
5. Монотонність, т. extr
   Н.У. $\nexists f'(x) \Rightarrow x = \dots$; $f'(x) = 0 \Rightarrow x = \dots$ } стаціонарні точки
   Д.У.



6. Опуклість, т. перегину



3.348

$$f(x) = \frac{x^2(x-1)}{(1+x)^2}$$

① $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
$E(f)$

② Неперіодична
Не є парна, не є непарна (загального типу)

$$x = -1: \quad \lim_{x\to -1-0}\frac{x^2(x-1)}{(1+x)^2} = \frac{(-1-0)^2(-1-0-1)}{(1+(-1-0))^2} = \frac{1\cdot(-2)}{+0} = -\infty$$

$$(1-1-0)^2 = +0$$

$$\lim_{x\to -1+0}\frac{x^2(x-1)}{(1+x)^2} = \frac{(-1+0)^2(-1+0-1)}{(1+(-1+0))^2} = \frac{1\cdot(-2)}{+0} = -\infty$$

③ а) т. $x = -1$ — т. розриву II роду
вертикальна асимптота

б) $$\exists \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2(x-1)}{x(1+x)^2} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3 - x^2}{x^3 + 2x^2 + x} = 1 = k$$

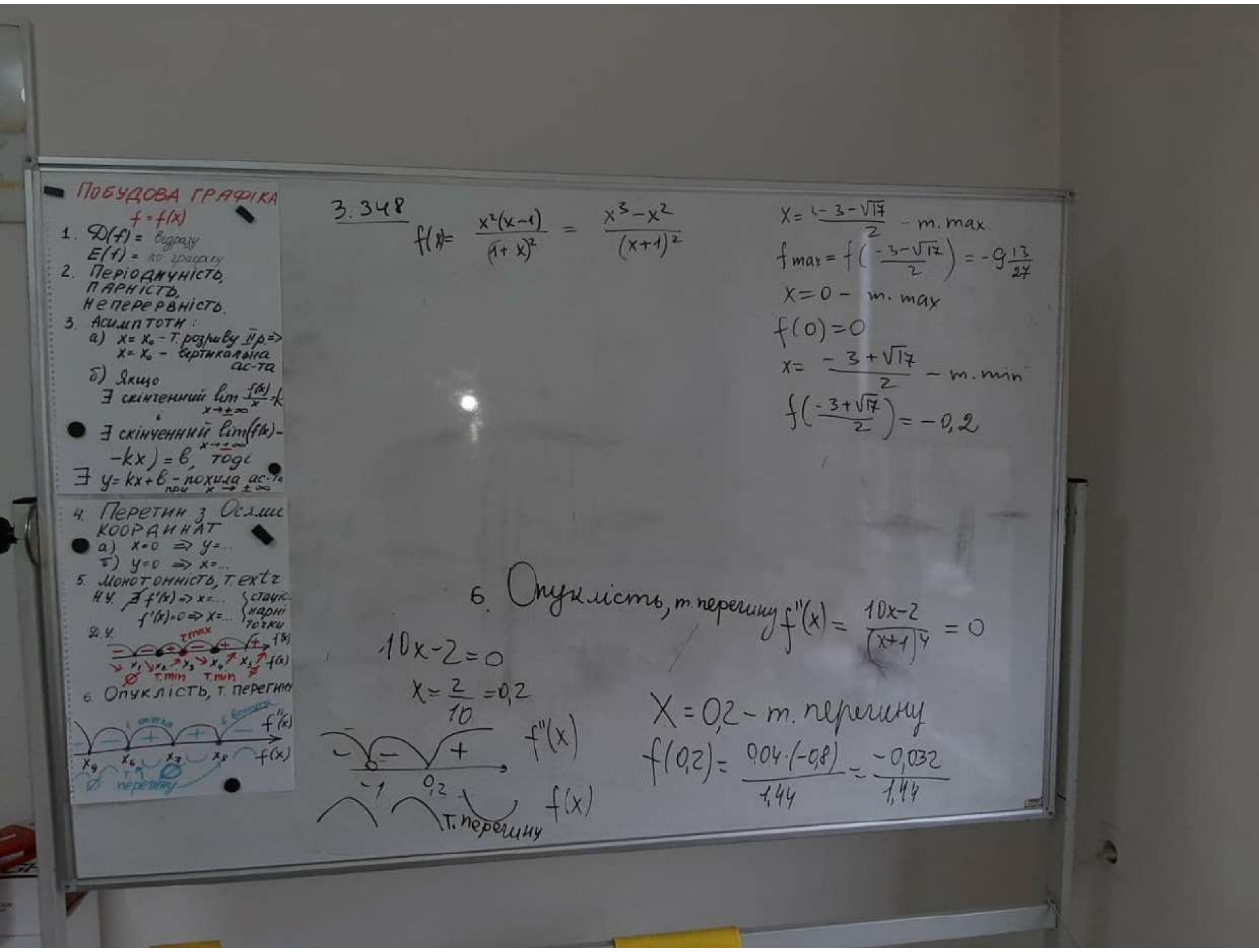
$$\exists \lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - kx) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2(x-1)}{(1+x)^2} - 1x\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2(x-1) - x(x+1)^2}{(1+x)^2} =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{-3x^2 - x}{x^2 + 2x + 1} = -3 = b \quad \Bigg\} \Rightarrow y = x - 3 \text{ – похила асимпт. при } x \to \pm\infty$$

④ $x = 0 \Rightarrow f(x) = 0$ $\quad (0;0)$

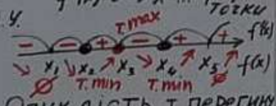
$$y = 0 \Rightarrow \frac{x^2(x-1)}{(1+x)^2} = 0; \quad x^2(x-1) = 0; \quad x^2 = 0 \text{ або } x - 1 = 0; \quad x = 1$$

$(1;0)$

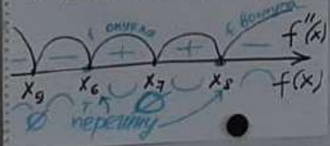

Побудова графіка
f = f(x)
1. D(f) = відразу
E(f) = по графіку
2. Періодичність, парність, неперервність.
3. Асимптоти:
а) x = x₀ – т. розриву II р. ⇒
x = x₀ – вертикальна ас-та
б) Якщо
∃ скінченний lim f(x)/x = k
∃ скінченний lim(f(x) – kx) = b, тоді
∃ y = kx + b – похила ас-та при x → ±∞
4. Перетин з осями координат
а) x = 0 ⇒ y = ...
б) y = 0 ⇒ x = ...
5. Монотонність, т. extr
Н.У. ∄ f'(x) ⇒ x = ...
f'(x) = 0 ⇒ x = ...
стаціонарні точки
Д.У.
т. max
т. min
6. Опуклість, т. перегину
т. перегину
3.348
f(x) = x²(x–1)/(1+x)² = (x³ – x²)/(x+1)²
x = (–3 – √17)/2 – m. max
f max = f((–3 – √17)/2) = –9 13/27
x = 0 – m. max
f(0) = 0
x = (–3 + √17)/2 – m. min
f((–3 + √17)/2) = –0,2
6. Опуклість, т. перегину f''(x) = (10x–2)/(x+1)⁴ = 0
10x – 2 = 0
x = 2/10 = 0,2
f''(x)
f(x)
т. перегину
x = 0,2 – т. перегину
f(0,2) = 0,04·(–0,8)/1,44 = –0,032/1,44

ПОБУДОВА ГРАФІКА
$f = f(x)$

1. $\mathcal{D}(f)$ = відразу
   $E(f)$ = по графіку
2. Періодичність, парність, неперервність.
3. Асимптоти:
   а) $x = x_0$ - т. розриву II р. $\Rightarrow$ $x = x_0$ - вертикальна ас-та
   б) Якщо $\exists$ скінченний $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k$ і $\exists$ скінченний $\lim\limits_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx) = b$, тоді $\exists$ $y = kx + b$ - похила ас-та при $x \to \pm\infty$
4. Перетин з осями координат
   а) $x = 0 \Rightarrow y = \dots$
   б) $y = 0 \Rightarrow x = \dots$
5. Монотонність, т. extr
   Н.У. $\nexists f'(x) \Rightarrow x = \dots$; $f'(x) = 0 \Rightarrow x = \dots$ } стаціонарні точки
   Д.У.

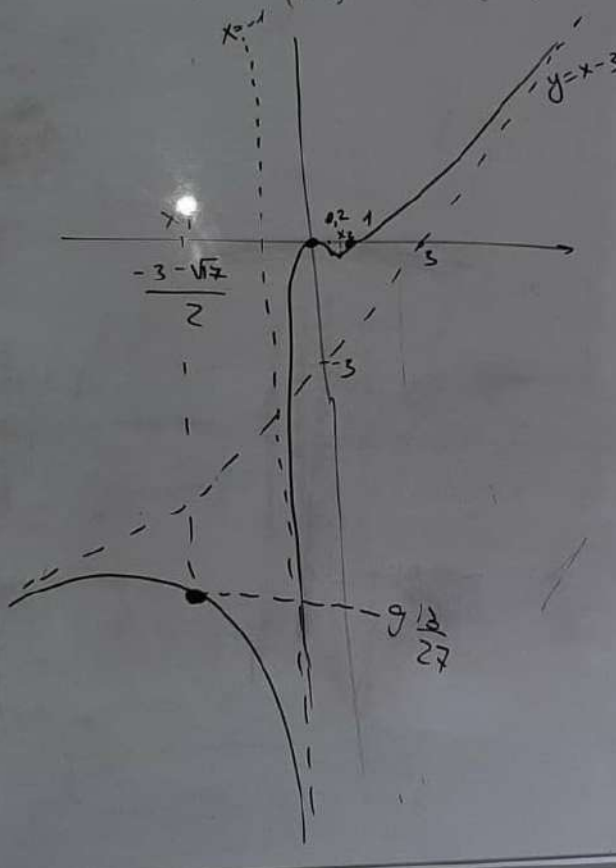


6. Опуклість, т. перегину



3.348

$$f(x) = \frac{x^2(x-1)}{(1+x)^2} = \frac{x^3 - x^2}{(x+1)^2}$$



$x_1 = \frac{-3-\sqrt{17}}{2}$ - т. max

$f_{max} = f\left(\frac{-3-\sqrt{17}}{2}\right) = -9\frac{13}{27}$

$x = 0$ - т. max

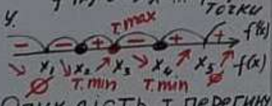
$f(0) = 0$

$x_2 = \frac{-3+\sqrt{17}}{2}$ - т. min

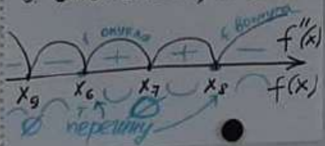
$f\left(\frac{-3+\sqrt{17}}{2}\right) = -0{,}2$

ПОБУДОВА ГРАФІКА
$f = f(x)$

1. $D(f) =$ відразу
   $E(f) =$ по графіку
2. Періодичність,
   ПАРНІСТЬ,
   Неперервність.
3. Асимптоти:
   а) $x = x_0$ - т. розриву II р. $\Rightarrow$
   $x = x_0$ - вертикальна ас-та
   б) Якщо
   $\exists$ скінченний $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k$
   і
   $\exists$ скінченний $\lim\limits_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx) = b$, тоді
   $\exists$ $y = kx + b$ - похила ас-та при $x \to \pm\infty$
4. Перетин з Осями КООРДИНАТ
   а) $x = 0 \Rightarrow y = \ldots$
   б) $y = 0 \Rightarrow x = \ldots$
5. Монотонність, т. extr
   Н.У. $\nexists f'(x) \Rightarrow x = \ldots$ $\}$ стаціонарні точки
   $f'(x) = 0 \Rightarrow x = \ldots$
   Д.У.

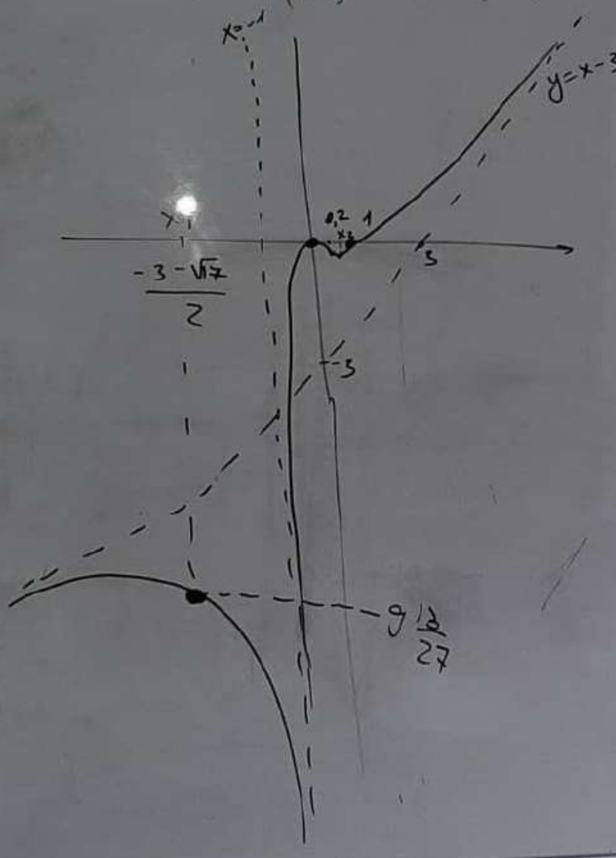


6. Опуклість, т. перегину



3.348

$$f(x) = \frac{x^2(x-1)}{(1+x)^2} = \frac{x^3 - x^2}{(x+1)^2}$$



$x_1 = \frac{-3-\sqrt{17}}{2}$ - т. max

$f_{max} = f\left(\frac{-3-\sqrt{17}}{2}\right) = -9\frac{13}{27}$

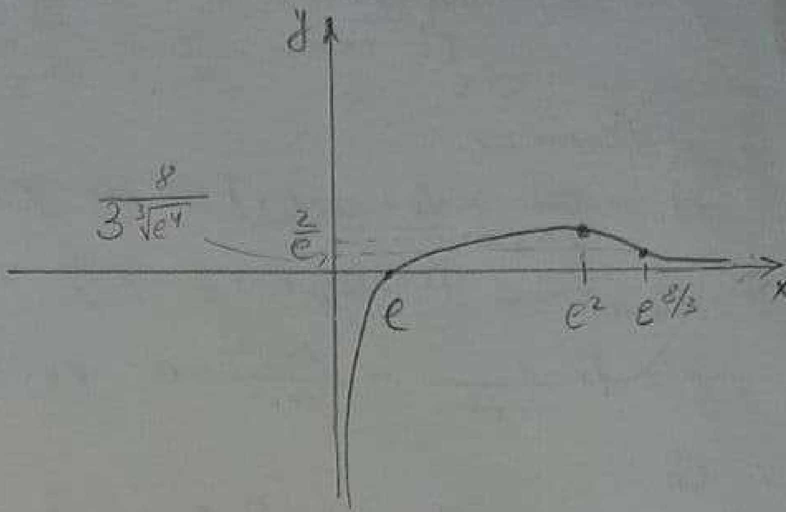
$x = 0$ - т. max

$f(0) = 0$

$x_2 = \frac{-3+\sqrt{17}}{2}$ - т. min

$f\left(\frac{-3+\sqrt{17}}{2}\right) = -0,2$

1512 $y=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$



1. $D(y)=(0;+\infty)$
2. непер., неперіод., заг. т.
3. $x\neq 0 \Rightarrow \nexists$ перет. Oy

$y=0 \Leftrightarrow \ln x=0$

$x=e$

$(e;0)$

4. а) $\nexists$ верт. ас.

б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x\sqrt{x}}=0=k$; ($\ln x \to 0$)

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ = пр. Лопіт. = $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}=2\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=0$

$y=0$ — горизонт. ас. при $x\to+\infty$

5. Мон., extr.

$y'=\frac{\frac{1}{x}\cdot\sqrt{x}-\ln x\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}=\frac{2-\ln x}{x\cdot 2\sqrt{x}}$ $\qquad \left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$

$\nexists y'$ при $x=0\notin D(f)$

$y'=0$ при $\ln x=2$, $x=e^2$

y': $+$ | $-$; y: $\nearrow$ e^2 $\searrow$ — т. max

$y_{max}=y(e^2)=\frac{\ln e^2}{\sqrt{e^2}}=\frac{2}{e}\approx\frac{2}{3}$.

6. Оп., т. перегину

$y''=\frac{-\frac{1}{x}\cdot 2x^{3/2}-(2-\ln x)\cdot 2\cdot\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}}{4x^3}=\frac{-2x^{\frac{1}{2}}-6x^{\frac{1}{2}}+3x^{\frac{1}{2}}\ln x}{4x^3}=$

$=\frac{x^{\frac{1}{2}}(-8+3\ln x)}{4x^3}=\frac{-8+3\ln x}{4x^{5/2}}$; $y''>0 \Leftrightarrow 4(-8+3\ln x)x^{5/2}>0$ ($x^{5/2}\to 0$)

$\lim\limits_{x\to+0}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}=\frac{-\infty}{+0}$

$\nexists y''$ при $x=0\notin D(y)$

$y''=0$ при $3\ln x=8$

$\ln x=\frac{8}{3}$

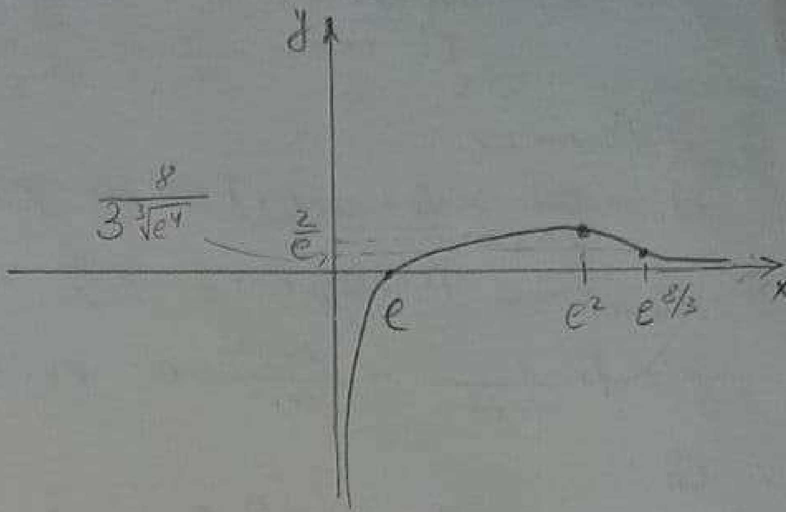
$x=e^{\frac{8}{3}}$

y'': $-$ | $+$; y: $\frown$ $e^{\frac{8}{3}}$ $\smile$ — т. перегину

$y=y(e^{\frac{8}{3}})=\frac{\ln e^{\frac{8}{3}}}{(e^{\frac{8}{3}})^{\frac{1}{2}}}=\frac{\frac{8}{3}}{e^{\frac{4}{3}}}=\frac{8}{3\sqrt[3]{e^4}}$

1

1512 $y=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$



1. $D(y)=(0;+\infty)$
2. непер., неперіод, заг. т.
3. $x\neq 0 \Rightarrow \nexists$ перет. Oy

$y=0 \iff \ln x=0$

$x=e$

$(e;0)$

4.а) $\nexists$ верт. ас.

б) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\overset{\to 0}{\ln x}}{x\sqrt{x}} = 0 = k;$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ = пр. Лопіт. = $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = 2\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$

$y=0$ — горизонт. ас. при $x\to+\infty$

5. Мон., extr.

$y' = \frac{\frac{1}{x}\cdot\sqrt{x} - \ln x\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{2 - \ln x}{x\cdot 2\sqrt{x}}$ $\qquad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$

$\nexists y'$ при $x=0 \notin D(f)$

$y'=0$ при $\ln x = 2$, $x=e^2$ $\qquad$ $+$, $-$ $\quad y'$; $\nearrow e^2 \searrow$ $\quad y$; т. max

$y_{max} = y(e^2) = \frac{\ln e^2}{\sqrt{e^2}} = \frac{2}{e} \approx \frac{2}{3}$.

6. Оп., т. перегину

$y'' = \frac{-\frac{1}{x}\cdot 2x^{3/2} - (2-\ln x)\cdot 2\cdot\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}}{4x^3} = \frac{-2x^{\frac{1}{2}} - 6x^{\frac{1}{2}} + 3x^{\frac{1}{2}}\ln x}{4x^3} =$

$= \frac{x^{\frac{1}{2}}(-8+3\ln x)}{4x^3} = \frac{-8+3\ln x}{4x^{5/2}}$; $y''>0 \iff 4(-8+3\ln x)x^{5/2}>0$

$\lim\limits_{x\to+0} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \frac{-\infty}{+0}$

$\nexists y''$ при $x=0 \notin D(y)$

$y''=0$ при $3\ln x = 8$, $\ln x = \frac{8}{3}$, $x = e^{\frac{8}{3}}$ $\qquad$ 0 $-$ $+$ $\quad y''$; $\frown e^{\frac{8}{3}} \smile$ $\quad y$; т. перегину

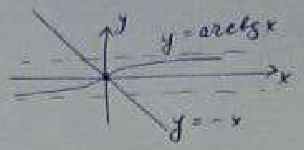
$y = y(e^{\frac{8}{3}}) = \frac{\ln e^{\frac{8}{3}}}{(e^{\frac{8}{3}})^{\frac{1}{2}}} = \frac{\frac{8}{3}}{e^{\frac{4}{3}}} = \frac{8}{3\sqrt[3]{e^4}}$ (1)

1516 $y = x + \operatorname{arctg} x$

1. $D(y) = \mathbb{R}$
2. Неnep., неперіод., непарна $\Rightarrow$ сим. відн. $(0;0)$
3. $x=0 \Rightarrow y=0$ $(0;0)$

$y=0 \Leftrightarrow \operatorname{arctg} x = -x$

$\exists!\ x=0$



4. а) $\nexists$ верт. ас.

б) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{(x+\operatorname{arctg} x)}{x} = 1 + \dfrac{\text{обм}}{\text{н.в}} = 1+0 = 1 = k$

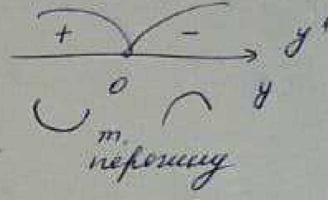
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} (x + \operatorname{arctg} x - x) = \pm\dfrac{\pi}{2} \Rightarrow$ $y = x+\frac{\pi}{2}$ – пох. ас. при $x\to+\infty$!
$y = x-\frac{\pi}{2}$ – пох. ас. при $x\to-\infty$!

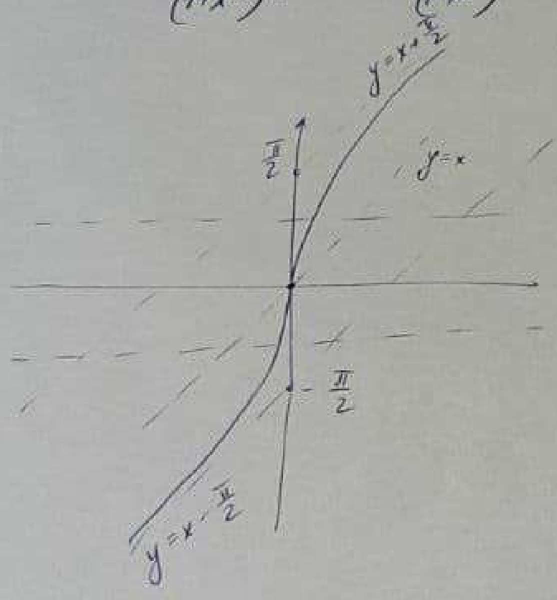
5. Моност.

$y' = 1 + \dfrac{1}{1+x^2} = \dfrac{2+x^2}{1+x^2} > 0 \quad \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow$ ф-я монот. зр. на $D(y)$

6. Оп.

$y'' = \dfrac{2x(1+x^2) - (2+x^2)\cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \dfrac{-2x}{(1+x^2)^2} > 0$ при $x<0$



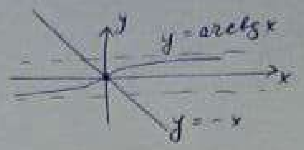


1516 $y = x + \operatorname{arctg} x$

1. $D(y) = R$
2. Непер., неперіод., непарна $\Rightarrow$ сим. відн. $(0;0)$
3. $x=0 \Rightarrow y=0$ $\quad (0;0)$

$y=0 \Leftrightarrow \operatorname{arctg} x = -x$

$\exists!\ x=0$



4. а) $\nexists$ верт. ас.

б) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x+\operatorname{arctg}x}{x} = 1 + \dfrac{\text{обм}}{\text{н.в}} = 1+0 = 1 = k$

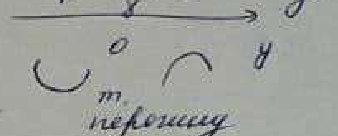
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} (x+\operatorname{arctg}x - x) = \pm\dfrac{\pi}{2} \Rightarrow$ $y = x+\frac{\pi}{2}$ – пох. ас. при $x\to+\infty$!
$y = x-\frac{\pi}{2}$ – пох. ас. при $x\to-\infty$!

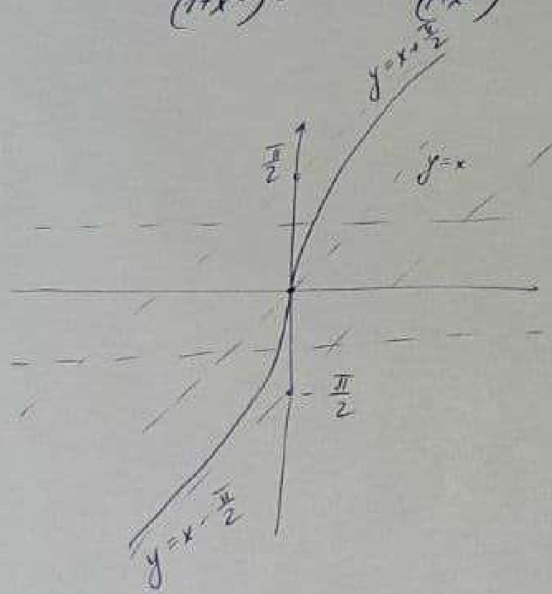
5. Монот.

$y' = 1 + \dfrac{1}{1+x^2} = \dfrac{2+x^2}{1+x^2} > 0 \quad \forall x\in R \Rightarrow$ ф-я монот. зр. на $D(y)$

6. Оп.

$$y'' = \frac{2x(1+x^2) - (2+x^2)\cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} > 0 \quad \text{при } x<0$$





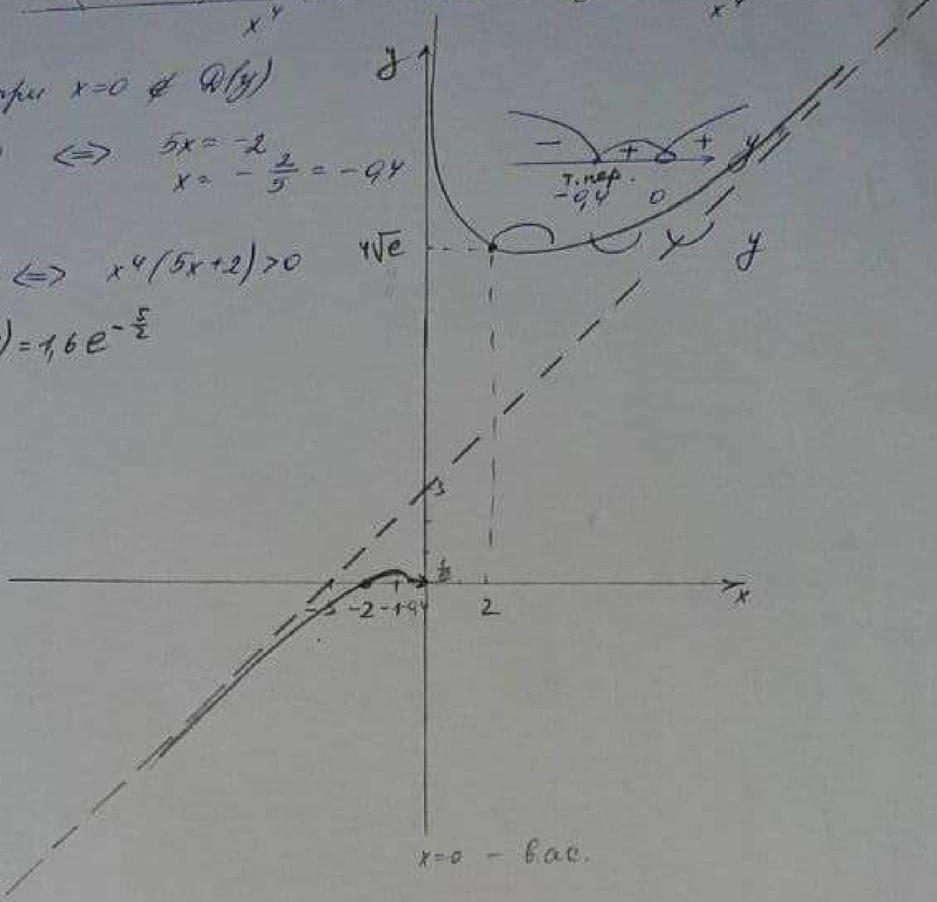
$$= e^{\frac{1}{x}} \frac{\cancel{-x^2}+x+2+\cancel{2x^3}\cancel{-x^2}\cancel{-2x^3}+\cancel{2x^2}+4x}{x^4} = e^{\frac{1}{x}} \frac{5x+2}{x^4}$$

$\nexists\, y''$ при $x=0 \notin D(y)$

$y''=0 \iff 5x=-2$
$x=-\frac{2}{5}=-0{,}4$

$y''>0 \iff x^4(5x+2)>0$

$y(-0{,}4)=1{,}6e^{-\frac{5}{2}}$



4. Перетин з осями координат

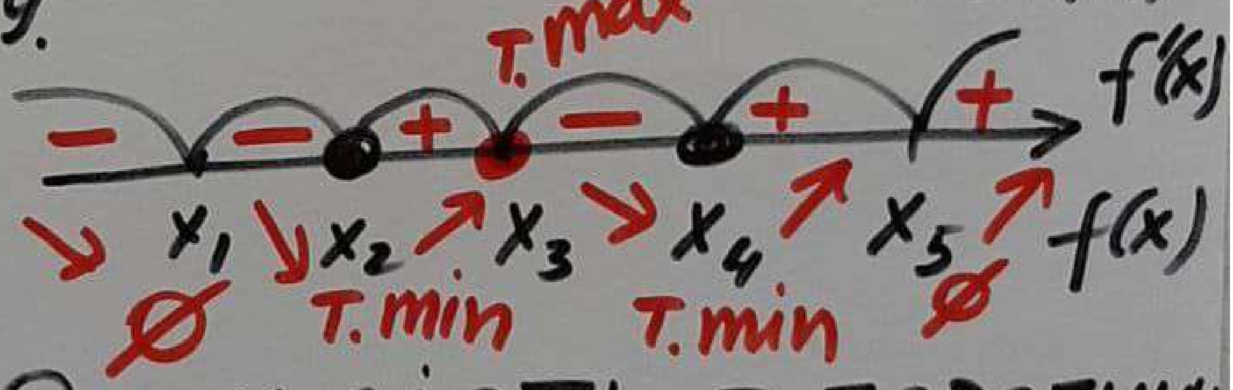
а) $x=0 \Rightarrow y=\ldots$

б) $y=0 \Rightarrow x=\ldots$

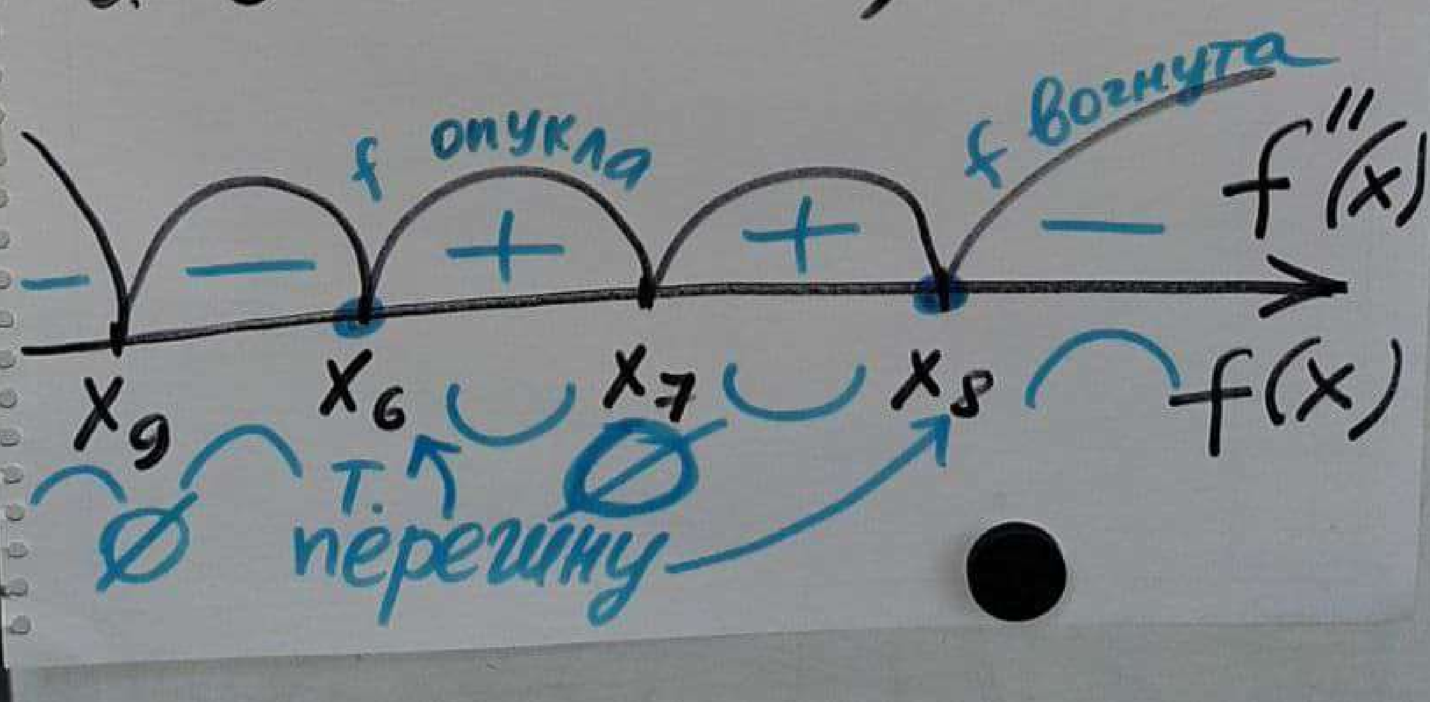
5. Монотонність, т. extr

Н.У. $\nexists f'(x) \Rightarrow x=\ldots$
$f'(x)=0 \Rightarrow x=\ldots$ } стаціонарні точки

Д.У.



6. Опуклість, т. перегину



Побудова графіка

$f = f(x)$

1. $\mathcal{D}(f)$ = відразу

   $E(f)$ = по графіку
2. Періодичність, парність, неперервність.
3. Асимптоти:

   а) $x = x_0$ – т. розриву $\underline{II}$ р. $\Rightarrow$

   $x = x_0$ – вертикальна ас-та

   б) Якщо

   $\exists$ скінченний $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k$

   і

   $\exists$ скінченний $\lim\limits_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx) = b$, тоді

   $\exists$ $y = kx + b$ – похила ас-та при $x \to \pm\infty$

1521

$y=(x+2)e^{\frac{1}{x}}$

$D(y)=\mathbb{R}\setminus\{0\}$

2. неперерв., зал. типу

$\lim\limits_{x\to -0}(x+2)e^{\frac{1}{x}}=2e^{\frac{1}{-0}}=2e^{-\infty}=\frac{2}{e^{+\infty}}=\frac{2}{+\infty}=0$ $\Rightarrow$ $x=0$ – т. розриву II роду

$\lim\limits_{x\to +0}(x+2)e^{\frac{1}{x}}=2e^{+\infty}=+\infty$ $x=0$ – верт. ас.

3. $x\neq 0 \Rightarrow \nexists$ перет. з Oy

$y=0 \Leftrightarrow x+2=0$

$x=-2$

$(-2;0)$

4) а) $x=0$ – верт. ас.

б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(x+2)e^{\frac{1}{x}}}{x}=1=k$, $e^{\frac{1}{x}}\to 1$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left((x+2)e^{\frac{1}{x}}-1\cdot x\right)=$

$=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(xe^{\frac{1}{x}}+2e^{\frac{1}{x}}-x\right)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{\frac{1}{x}\cdot x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)}{\frac{1}{x}}+2e^{\frac{1}{x}}\right)=1+2=3=b$

$y=x+3$ – пох. ас. при $x\to\pm\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x+2}{x}\,e^{\frac{1}{x}}=1;$

5. монот.

$y'=e^{\frac{1}{x}}+(x+2)e^{\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)=e^{\frac{1}{x}}\left(1-\frac{x+2}{x^2}\right)=e^{\frac{1}{x}}\,\frac{x^2-x-2}{x^2}$

$\nexists\, y'$ при $x=0\notin D(y)$

$y'=0$ при $x^2-x-2=0$

$x_1=2,\ x_2=-1$ – ст. т.

$y'>0 \Leftrightarrow (x-2)(x+1)x^2>0$

$+\ \ -1\ \ -\ \ 0\ \ -\ \ 2\ \ +$ y', x; т. max, т. min, y

$y_{max}=y(-1)=1\cdot e^{-1}=\frac{1}{e}$; $y_{min}=y(2)=4\sqrt{e}$.

6. опуклість

$y''=e^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)\left(\frac{x^2-x-2}{x^2}\right)+e^{\frac{1}{x}}\,\frac{(2x-1)x^2-(x^2-x-2)\cdot 2x}{x^4}=$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + o(x^4)\,,$$
$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + o(x^4)\,,$$
$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o(x^3)\,,$$
$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} - \frac{5x^3}{16} + o(x^3)\,.$$

3.1. Представления формулой Маклорена табличных функций при $x \to 0$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^6),$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5),$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^6),$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5),$$

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^6),$$

$$\operatorname{th} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^6),$$

$$\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + o(x^6),$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^6),$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4),$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4),$$

$$\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + o(x^6),$$