Розділ 2

Зан. 2.1 Границя ф-ї. Неперервність. Границя ф-ї в точці

прийом I курс I сем

Озн. Нехай $a \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$.

Тоді $U_\delta(a) = \{x \in (a-\delta, a+\delta)\}$

Озн. Нехай $a \in \mathbb{R}^2$

Тоді $U_\delta(a) = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x-a| < \delta\}$

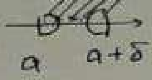
Озн. Нехай $a = +\infty$

Тоді $U_\delta(a) = \{x \in \mathbb{R} : x > \delta\}$

Озн. Нехай $a = -\infty$

Тоді $U_\delta(a) = \{x \in \mathbb{R} : x < -\delta\}$

Озн. $U_\delta(a+0) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < a+\delta\}$



$U_\delta(a-0) = \{x \in \mathbb{R} : a-\delta < x < a\}$

Озн. $\mathring{U}_\delta(a) = U_\delta(a) \setminus \{a\}$

Озн. Точка $A \in \overline{\mathbb{R}}$ наз. границею ф-ї f в т. a

$(a = x_0 \in \mathbb{R} \lor a = +\infty \lor a = -\infty \lor a = x_0 \pm 0) \overset{def}{\Longleftrightarrow}$

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \delta > 0)\ (\forall x \in \mathring{U}_\delta(a)) : \{f(x) \in U_\varepsilon(A)\}$$

тобто

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \delta > 0)\ \forall x \ne a : \{|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon\}$$

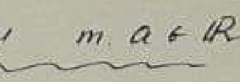
Озн. Ф-я $f = f(x)$ наз. непер. в т. a, якщо

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

т.т.

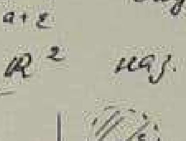
$$\lim_{x \to a-0} f(x) = \lim_{x \to a+0} f(x) = f(a).$$

Озн. ε- околом т. $a \in \mathbb{R}$ наз. $U_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbb{R} : |x-a| < \varepsilon\}$



Заув. $\mathring{U}_\varepsilon(a) = U_\varepsilon(a) \setminus \{a\}$

ε-околом т. $a \in \mathbb{R}^2$ наз. $U_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x-a| < \varepsilon\}$



З допомогою ε–δ міркувань довести, що.

(2.1) $\lim\limits_{x \to 2} x^2 = 4$

▽ Тр. дов. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x: \{|x-2| < \delta \to |x^2 - 4| < \varepsilon\}$

Виберемо $\delta = \min\{\frac{\varepsilon}{5}, 1\}$, тоді

$$|x^2 - 4| = |x-2|\underbrace{|x+2|}_{<3+2} < (3+2)|x-2| = 5|x-2| = 5\delta < \varepsilon$$

$$\delta < \frac{\varepsilon}{5}$$ ▲

(2.2) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{1}{(1-x)^2} = +\infty$

▼ Тр. дов. $(\forall \varepsilon > 0) \quad (\exists \delta > 0) \quad \forall x: \{|x-1| < \delta \Rightarrow \frac{1}{(1-x)^2} > \varepsilon\}$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{1}{\delta^2} > \varepsilon$$

$$\delta^2 < \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\delta < \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}.$$ ▲

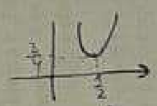
(2.3) $\lim\limits_{x \to -1} x^3 = -1$

▽ Тр. дов. $(\forall \varepsilon > 0) \quad (\exists \delta > 0) \quad \forall x: \{|x+1| < \delta \to |x^3 + 1| < \varepsilon\}$

$$|x^3 + 1| = |(x+1)(x^2 - x + 1)| = |x+1|\,|x^2 - x + 1| < \delta \cdot 7 < \varepsilon$$

$x^2 - x + 1 = 0$

$D = 1 - 4 \cdot 1 = -3$



$x_0 = \frac{1}{2}$

$y_0 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{4}$

в околі т. -1 ф-я набуває найбільшого значення в крайньому лівому кінці околу

$(-2)^2 - (-2) + 1 = 4 + 2 + 1 = 7$

$\delta < \frac{\varepsilon}{7}$ $\qquad \delta = \min\{\frac{\varepsilon}{7}; 1\}$. ▲

(2.31) $y \to b-0$, якщо $x \to \infty$

∇ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b-0 \overset{def}{\Longleftrightarrow} (\forall \varepsilon>0)(\exists \delta>0)\ \{\forall x: |x|>\delta\}: \{b-\varepsilon < f(x) < b\}$

(2.32) $y \to b-0$, якщо $x \to -\infty$

(2.33) $y \to b-0$, якщо $x \to +\infty$

(2.34) $y \to b+0$, якщо $x \to a$

(2.35) $y \to b+0$, якщо $x \to a-0$

(2.36) $y \to b+0$, якщо $x \to a+0$

(2.37) $y \to b+0$, якщо $x \to \infty$

(2.38) $y \to b+0$, якщо $x \to -\infty$

(2.39) $y \to b+0$, якщо $x \to +\infty$

Оч.

(2.40) Нехай $p(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$, $a_0 \neq 0$

Довести, що $\lim\limits_{x\to\infty} |p(x)| = +\infty$

∇ $\forall x: |p(x)| \geq 0 \implies \lim\limits_{x\to\infty} |p(x)| \geq 0$

сума не більше ніж зл. к-ті н.в. величин є н.в. величина $\implies \lim\limits_{x\to\infty} |p(x)| = +\infty$ Δ.

(2.41) Нехай $R(x) = \dfrac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_m}$, $a_0 \neq 0$, $b_0 \neq 0$

Знайти $\lim\limits_{x\to\infty} R(x)$.

∇

$$\lim_{x\to\infty} R(x) = \begin{cases} \dfrac{a_0}{b_0}, & n=m \text{ (ділимо на } x^n \text{ або на } x^m) \\ 0, & n<m \text{ (ділимо на } x^m) \\ \infty, & n>m \text{ (ділимо на } x^n) \end{cases}$$

(2.42) Знайти

а) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1} = \dfrac{2^2-1}{2\cdot 4-2-1} = \dfrac{3}{5} = 0{,}6$

б) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}(2x+1)} = \dfrac{2}{3}.$

$2x^2-x-1=0$

$D = 1+4\cdot 2\cdot 1 = 9$

$x_1 = \dfrac{1+3}{4} = 1$

$x_2 = \dfrac{1-3}{4} = -\dfrac{1}{2}$

$2x^2-x-1 = 2(x-1)(x+\frac{1}{2}) = (x-1)(2x+1)$ $\triangle$

Обчислити:

(2.43) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+2x)(1+3x)+x(1+2x)(1+3x)-1}{x} =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cancel{1}+5x+6x^2+x+5x^2+6x^3\cancel{-1}}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{6x+11x^2+6x^3}{x} =$

$= \lim\limits_{x\to 0} (6+\underbrace{11x}_{\to 0}+\underbrace{6x^2}_{\to 0}) = 6.$

(2.44) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^5-(1+5x)}{x^2+x^5} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cancel{1}+\cancel{5x}+10x^2+10x^3+5x^4+x^5\cancel{-1}\cancel{-5x}}{x^2(1+x^3)}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cancel{x^2}(10+10x+5x^2+x^3)}{\cancel{x^2}(1+x^3)} =$

$= \dfrac{10+0+0+0}{1+0} = 10.$

1

I 1 1

II 1 2 1

III 1 3 3 1

IV 1 4 6 4 1

V 1 5 10 10 5 1

$$= \frac{n(n-1)m^2}{2} - \frac{m(m-1)n^2}{2} = \frac{n^2m^2 - nm^2 - m^2n^2 + mn^2}{2} =$$

$$= \frac{nm(\quad n - m)}{2}.$$

(2.46) $\lim\limits_{x \to -2} \frac{x^3 + 3x^2 + 2x}{x^2 - x - 6} = \left[\frac{0}{0}\right]$ розклад

$$\left[\begin{array}{l} x^3 + 3x^2 + 2x = x(x^2 + 3x + 2) = x(x+1)(x+2) \\ x^2 - x - 6 = (x+2)(x-3) \end{array}\right]$$

$$= \lim_{x \to -2} \frac{x(x+1)\cancel{(x+2)}}{\cancel{(x+2)}(x-3)} = \lim_{x \to -2} \frac{x(x+1)}{x-3} = \frac{-2(-1)}{-5} = -0{,}4$$

(2.47) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}} = \lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{2x-3}{2x+1}\right)^{20} \left(\frac{3x+2}{2x+1}\right)^{30} =$

$$= \lim_{x \to \infty} \left(\frac{2 - \frac{3}{x}}{2 + \frac{1}{x}}\right)^{20} \left(\frac{3 + \frac{2}{x}}{2 + \frac{1}{x}}\right)^{30} = 1 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{30}.$$

(2.48) $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 8x + 15} = \left[\frac{0}{0}\right] \lim\limits_{x \to 3} \frac{(x-2)\cancel{(x-3)}}{\cancel{(x-3)}(x-5)} = \frac{3-2}{3-5} = -0{,}5$

(2.49) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3} = \left[\frac{0}{0}\right] \lim\limits_{x \to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x^2 + x - 2)}{\cancel{(x-1)}(x^3 + x^2 + x - 3)} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x+2)}{\cancel{(x-1)}(x^2+2x+3)} = \frac{3}{6}$

теор. безу

$$\begin{array}{l|l} x^3 - 3x + 2 & x - 1 \\ \underline{x^3 - x^2} & x^2 + x - 2 \\ \quad x^2 - 3x & \\ \quad \underline{x^2 - x} & \\ \quad\quad -2x + 2 & \\ \quad\quad \underline{-2x + 2} & \\ \quad\quad\quad 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} x^4 - 4x + 3 & x - 1 \\ \underline{x^4 - x^3} & x^3 + x^2 + x - 3 \\ \quad x^3 - 4x & \\ \quad \underline{x^3 - x^2} & \\ \quad\quad x^2 - 4x & \\ \quad\quad \underline{x^2 - x} & \\ \quad\quad\quad -3x + 3 & \\ \quad\quad\quad \underline{-3x + 3} & \\ \quad\quad\quad\quad 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} x^3 + x^2 + x - 3 & x - 1 \\ \underline{x^3 - x^2} & x^2 + 2x + 3 \\ \quad 2x^2 + x & \\ \quad \underline{2x^2 - 2x} & \\ \quad\quad 3x - 3 & \\ \quad\quad \underline{3x - 3} & \\ \quad\quad\quad 0 & \end{array}$$

2.50 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^4-3x+2}{x^5-4x+3}$ = аналог. до 2.49

2.51 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-2x^2-4x+8}{x^4-8x^2+16}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2(x-2)-4(x-2)}{(x^2-4)^2}=$

$=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\cancel{(x-2)}\cancel{(x^2-4)}}{\cancel{(x-2)}(x+2)\cancel{(x^2-4)}}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{1}{4}=0{,}25.$

2.52 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x^2-x-2)^{20}}{(x^3-12x+16)^{10}}=\lim\limits_{x\to2}\left(\dfrac{(x^2-x-2)^2}{x^3-12x+16}\right)^{10}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=$ розклад

$=\lim\limits_{x\to2}\left(\dfrac{(x-2)^2(x+1)^2}{\cancel{(x-2)}(x^2+2x-8)}\right)^{10}=\lim\limits_{x\to2}\left(\dfrac{\cancel{(x-2)}(x+1)^2}{\cancel{(x-2)}(x+4)}\right)^{10}=\left(\dfrac{3^2}{6}\right)^{10}=$

$$
\begin{array}{l|l}
x^3-12x+16 & x-2 \\
-\ x^3-2x^2 & x^2+2x-8 \\
\quad 2x^2-12x & \\
\quad -\ 2x^2-4x & \\
\qquad -8x+16 & \\
\qquad -\ -8x+16 & \\
\qquad\quad 0 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l|l}
x^2+2x-8 & x-2 \\
-\ x^2-2x & x+4 \\
\quad -4x-8 & \\
\quad\ 4x-8 & \\
\qquad 0 &
\end{array}
$$

$=\left(\dfrac{3}{2}\right)^{10}.$

2.53 $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3-2x-1}{x^5-2x-1}$ = аналог. до 2.52

2.54 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x+x^2+\dots+x^n-n}{x-1}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to1}\left(x^{n-1}+2x^{n-2}+3x^{n-3}+\dots+n\right)=$

$$
\begin{array}{l|l}
x^n+x^{n-1}+\dots+x^2+x-n & x-1 \\
-\ x^n-x^{n-1} & x^{n-1}+2x^{n-2}+3x^{n-3}+\dots+(n-1)x+n \\
\quad 2x^{n-1}+x^{n-2} & \\
\quad -\ 2x^{n-1}-2x^{n-2} & \\
\qquad 3x^{n-2}+x^{n-3} & \\
\qquad -\ 3x^{n-2}-3x^{n-3} & \\
\qquad\quad \dots\ (n-1)x^{n-(n-1)}+x & \\
\qquad\quad (n-1)x^2-(n-1)x & \\
\qquad\quad -\ nx-n & \\
\qquad\quad\ nx-n & \\
\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

$=\dfrac{1+n}{2}\cdot n.$

(2.55) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^{100}-2x+1}{x^{50}-2x+1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\cancel{(x-1)}(x^{99}+x^{98}+\ldots+x-1)}{\cancel{(x-1)}(x^{49}+x^{48}+\ldots+x-1)} =$

$$\begin{array}{l|l} x^{100}-2x+1 & x-1 \\ \hline x^{100}-x^{99} & x^{99}+x^{98}+\ldots+x-1 \\ \quad x^{99}-2x & \\ \quad x^{99}-x^{98} & \\ \qquad x^{98}-2x & \\ \qquad \ldots & \\ \qquad x^2-2x & \\ \qquad x^2-x & \\ \qquad\quad -x+1 & \\ \qquad\quad -x+1 & \\ \qquad\qquad 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} x^{50}-2x+1 & x-1 \\ \hline x^{50}-x^{49} & x^{49}+x^{48}+\ldots+x-1 \\ \quad x^{49}-2x & \\ \qquad \ldots & \\ \qquad x^2-2x & \\ \qquad x^2-x & \\ \qquad\quad -x+1 & \\ \qquad\quad -x+1 & \\ \qquad\qquad 0 & \end{array}$$

$$= \frac{\overbrace{1+1+\ldots+1}^{98\ \text{штук}}}{\underbrace{1+1+\ldots+1}_{48\ \text{единицы}}} = \frac{98}{48} = 2\frac{2}{48} = 2\frac{1}{24}.$$

(2.56) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^m-1}{x^n-1} =$, $n, m \in \mathbb{N}$

∇ $x^m-1 = (x-1)(x^{m-1}+x^{m-2}+\ldots+1)$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^{m-1}+x^{m-2}+\ldots+1)}{(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{m}{n} = \frac{m}{n}.$$

(2.57) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{(5x-1)^5} =$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{(x-1):x}{(5x-1):x} \cdot \frac{(x-2):x}{(5x-1):x} \cdot \frac{(x-3):x}{(5x-1):x} \cdot \frac{(x-4):x}{(5x-1):x} \cdot \frac{(x-5):x}{(5x-1):x} =$$

$$= \frac{1}{5^5}.$$

Тема 2.1. Границя функції в точці

Ауд. 2.1, 2.14, 2.19, 2.35, 2.41, 2.43, 2.47, 2.49, 2.54, 2.55

Дом. 2.2 - 2.38 (парні), 2.42, 2.44, 2.46, 2.50, 2.53, 2.57

Тема 2.2. Обчислення границь функцій

Ауд. 2.61, 2.64, 2.68, 2.71, 2.75, 2.80, 2.86, 2.91, 2.94

Дом. 2.60-2.84 (парні), 2.92, 2.93, 2.95, 2.96

2.2 Обчислення границь функцій.

I. Розібратися з усіма написаними в пункті 2.2 на стор. 30-31 прикладами розв'язування вправ.

II. Розв'язуємо вправи зі збірника.

№ 2.61. Обчислити границю: $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{2x}-2}{x^2-3x+2}$.

Розв'язання. Якщо безпосередньо перейдемо до границі, то отримаємо невизначеність $\frac{0}{0}$. Це означає, що як в чисельнику, так і в знаменнику можна виділити множник $x-2$ (бо $x=2$ є нулем і чисельника, і знаменника). Виділяти множник $x-2$ в знаменнику ми навчилися на попередній практичній. А от щоб виділити множник $x-2$ в чисельнику, треба там спочатку позбутися коренів. А це ми теж вже знаємо як робити: треба помножити чисельник і знаменник на вираз, спряжений до чисельника. Отже,

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{2x}-2}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{2x}-2)(\sqrt{2x}+2)}{(x^2-3x+2)(\sqrt{2x}+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{2x-4}{(x^2-3x+2)(\sqrt{2x}+2)}=$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{2(x-2)}{(x-2)(x-1)(\sqrt{2x}+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{2}{(x-1)(\sqrt{2x}+2)}=\frac{1}{2}.$$

№ 2.64. Обчислити границю: $\lim\limits_{x\to 8}\frac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$.

Розв'язання. Якщо безпосередньо перейдемо до границі, то отримаємо невизначеність $\frac{0}{0}$. Це, як і в попередньому прикладі, означає, що і в чисельнику і в знаменнику можна виділити множник $x-8$. А щоб виділити такі множники в чисельнику і знаменнику, домножуємо на спряжені вирази. Пам'ятаємо, що спряженим виразом до різниці коренів квадратних є відповідна сума коренів квадратних (щоб утворити формулу різницю квадратів), а спряженим виразом до різниці коренів кубічних є зовсім інший вираз — неповний квадрат суми цих коренів (щоб утворити формулу різницю кубів). Тому,

$$\lim_{x\to 8}\frac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}=\lim_{x\to 8}\frac{(\sqrt{9+2x}-5)(\sqrt{9+2x}+5)}{(\sqrt[3]{x}-2)(\sqrt{9+2x}+5)}=\lim_{x\to 8}\frac{9+2x-25}{(\sqrt[3]{x}-2)(\sqrt{9+2x}+5)}=$$
$$=\lim_{x\to 8}\frac{(2x-16)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}{(\sqrt{9+2x}+5)(\sqrt[3]{x}-2)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}=\lim_{x\to 8}\frac{(2x-16)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}{(\sqrt{9+2x}+5)((\sqrt[3]{x})^3-2^3)}=$$
$$=\lim_{x\to 8}\frac{(2x-16)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}{(\sqrt{9+2x}+5)(x-8)}=\lim_{x\to 8}\frac{2(x-8)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}{(\sqrt{9+2x}+5)(x-8)}=$$
$$=\lim_{x\to 8}\frac{2(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}{\sqrt{9+2x}+5}=\frac{24}{10}=2.4.$$

№ 2.68. Обчислити границю: $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$.

Розв'язання. Якщо безпосередньо перейдемо до границі, то в дужках отримаємо невизначеність $\infty-\infty$. З такими прикладами ми зустрічалися, коли рахували подібні границі послідовностей. Розкриваємо невизначеність, домножуючи і ділячи на спряжений до виразу в дужках.

$$\lim_{x\to\infty} x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x\left(x^2+1-x^2\right)}{\sqrt{x^2+1}+x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}+x}.$$

А тепер маємо невизначність $\frac{\infty}{\infty}$. Щоб її позбутися, ділимо на x в чисельнику і знаменнику.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1} = \frac{1}{2}.$$

№ 2.71. Обчислити границю: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$.

Розв'язання. Маємо невизначеність $\frac{\infty}{\infty}$. Щоб її позбутися, ділимо на x в найвищому степені в чисельнику і знаменнику, тобто на $\sqrt{x}$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x}}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x\sqrt{x}}}}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}} = 1.$$

№ 2.75. Обчислити границю: $\lim\limits_{x\to a} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$, $a > 0$.

Розв'язання. Маємо невизначеність $\frac{0}{0}$. Розкриваємо її:

$$\lim_{x\to a} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}} = \lim_{x\to a} \left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{x^2-a^2}} + \frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}\right) =$$

$$= \lim_{x\to a} \left(\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{a})(\sqrt{x}+\sqrt{a})}{\sqrt{(x-a)(x+a)}(\sqrt{x}+\sqrt{a})} + \frac{1}{\sqrt{x+a}}\right) =$$

$$= \lim_{x\to a} \left(\frac{x-a}{\sqrt{(x-a)(x+a)}(\sqrt{x}+\sqrt{a})} + \frac{1}{\sqrt{x+a}}\right) =$$

$$= \lim_{x\to a} \left(\frac{\left(\sqrt{x-a}\right)^2}{\sqrt{(x-a)(x+a)}(\sqrt{x}+\sqrt{a})} + \frac{1}{\sqrt{x+a}}\right) =$$

$$= \lim_{x\to a} \left(\frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x+a}\cdot(\sqrt{x}+\sqrt{a})} + \frac{1}{\sqrt{x+a}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2a}}.$$

№ 2.80. Обчислити границю: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}$, $n \in \mathbb{N}$.

Розв'язання. Маємо невизначеність $\frac{0}{0}$. В чисельнику маємо корінь n-го порядку. Щоб його позбутися, мусимо помножити на спряжений вираз. Для цього треба пригадати формулу з попередньої практичної:

$$x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x+1), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Тому спряженим до $\sqrt[n]{1+x}-1$ буде $(\sqrt[n]{1+x})^{n-1}+(\sqrt[n]{1+x})^{n-2}+\ldots+\sqrt[n]{1+x}+1$. Отже,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt[n]{1+x}-1)((\sqrt[n]{1+x})^{n-1}+(\sqrt[n]{1+x})^{n-2}+\ldots+\sqrt[n]{1+x}+1)}{x((\sqrt[n]{1+x})^{n-1}+(\sqrt[n]{1+x})^{n-2}+\ldots+\sqrt[n]{1+x}+1)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x((\sqrt[n]{1+x})^{n-1}+(\sqrt[n]{1+x})^{n-2}+\ldots+\sqrt[n]{1+x}+1)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{(\sqrt[n]{1+x})^{n-1}+(\sqrt[n]{1+x})^{n-2}+\ldots+\sqrt[n]{1+x}+1}=\frac{1}{n}.$$

Варто запам'ятати узагальнення одержаного результату:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\mu}-1}{x}=\mu,\quad\forall\quad\mu\in\mathbf{R}.$$

№ 2.86*. Обчислити границю: $\lim\limits_{x\to 7}\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9}-2}$.

Розв'язання. Маємо невизначеність $\frac{0}{0}$. Можна розв'язати цей приклад послідовно домноживши на спряжений вираз до чисельника, щоб позбутися кореня квадратного, потім на спряжений вираз до утвореного виразу в чисельнику, щоб позбутися кореня кубічного і на спряжений до знаменника. А ми зробимо інакшим способом. Порахуємо границю використовуючи формулу

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\mu}-1}{x}=\mu,\quad\forall\quad\mu\in\mathbf{R}.$$

Ця формула залишається правильною, якщо замість x маємо функцію $g(x)$ таку, що $g(x)\to 0$, коли $x\to a$. Згадайте теорему про границю композиції функцій з лекцій! Тобто буде справедлива формула:

$$\lim_{g(x)\to 0}\frac{(1+g(x))^{\mu}-1}{g(x)}=\mu,\quad\forall\quad\mu\in\mathbf{R}.$$

Отже, перетворюємо вираз під границею:

$$\lim_{x\to 7}\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9}-2}=\lim_{x\to 7}\frac{\sqrt{9+(x-7)}-\sqrt[3]{27+(x-7)}}{\sqrt[4]{16+(x-7)}-2}=$$

$$=\lim_{x\to 7}\frac{3\cdot\sqrt{1+\frac{x-7}{9}}-3\cdot\sqrt[3]{1+\frac{x-7}{27}}}{2\left(\sqrt[4]{1+\frac{x-7}{16}}-1\right)}=\frac{3}{2}\lim_{x\to 7}\frac{\sqrt{1+\frac{x-7}{9}}-1-\left(\sqrt[3]{1+\frac{x-7}{27}}-1\right)}{\sqrt[4]{1+\frac{x-7}{16}}-1}=$$

$$=\frac{3}{2}\lim_{x\to 7}\frac{\sqrt{1+\frac{x-7}{9}}-1-\left(\sqrt[3]{1+\frac{x-7}{27}}-1\right)}{x-7}\cdot\frac{x-7}{\sqrt[4]{1+\frac{x-7}{16}}-1}=$$

$$=\frac{3}{2}\lim_{x\to 7}\left(\frac{\sqrt{1+\frac{x-7}{9}}-1}{9\cdot\frac{x-7}{9}}-\frac{\sqrt[3]{1+\frac{x-7}{27}}-1}{27\cdot\frac{x-7}{27}}\right)\cdot\frac{\frac{x-7}{16}\cdot 16}{\sqrt[4]{1+\frac{x-7}{16}}-1}=$$

$$=\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{\frac{1}{2}}{9}-\frac{\frac{1}{3}}{27}\right)\cdot\frac{16}{\frac{1}{4}}=\frac{112}{27}.$$

№ 2.91*. Обчислити границю: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt{x^2-2x}\right)$.

Розв'язання. Маємо невизначеність $\infty-\infty$. Щоб розкрити невизначеність послідовно помножимо вираз на спряжений, щоб позбутися кореня квадратного, потім на спряжений вираз до утвореного виразу в чисельнику, щоб позбутися кореня кубічного. Тобто:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt{x^2-2x}\right)=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt{x^2-2x})(\sqrt[3]{x^3+3x^2}+\sqrt{x^2-2x})}{\sqrt[3]{x^3+3x^2}+\sqrt{x^2-2x}}=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{(x^3+3x^2)^2}-(x^2-2x)}{\sqrt[3]{x^3+3x^2}+\sqrt{x^2-2x}}=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt[3]{(x^3+3x^2)^2}-(x^2-2x))(\sqrt[3]{(x^3+3x^2)^4}+\sqrt[3]{(x^3+3x^2)^2}(x^2-2x)+(x^2-2x)^2)}{(\sqrt[3]{x^3+3x^2}+\sqrt{x^2-2x})(\sqrt[3]{(x^3+3x^2)^4}+\sqrt[3]{(x^3+3x^2)^2}(x^2-2x)+(x^2-2x)^2)}=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^3+3x^2)^2-(x^2-2x)^3}{(\sqrt[3]{x^3+3x^2}+\sqrt{x^2-2x})(\sqrt[3]{(x^3+3x^2)^4}+\sqrt[3]{(x^3+3x^2)^2}(x^2-2x)+(x^2-2x)^2)}=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{12x^5-3x^4+8x^3}{(\sqrt[3]{x^3+3x^2}+\sqrt{x^2-2x})(\sqrt[3]{(x^3+3x^2)^4}+\sqrt[3]{(x^3+3x^2)^2}(x^2-2x)+(x^2-2x)^2)}.$$

А далі ділимо чисельник і знаменник на x^5:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{12-3\cdot\frac{1}{x}+8\cdot\frac{1}{x^2}}{\frac{\sqrt[3]{x^3+3x^2}+\sqrt{x^2-2x}}{x}\cdot\frac{\sqrt[3]{(x^3+3x^2)^4}+\sqrt[3]{(x^3+3x^2)^2}(x^2-2x)+(x^2-2x)^2)}{x^4}}=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{12-3\cdot\frac{1}{x}+8\cdot\frac{1}{x^2}}{\left(\sqrt[3]{\frac{x^3+3x^2}{x^3}}+\sqrt{\frac{x^2-2x}{x^2}}\right)\cdot\left(\sqrt[3]{(\frac{x^3+3x^2}{x^3})^4}+\sqrt[3]{(\frac{x^3+3x^2}{x^3})^2}\cdot\frac{x^2-2x}{x^2}+(\frac{x^2-2x}{x^2})^2\right)}=2.$$

№ 2.94. Обчислити границю: $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x}\right)$.

Розв'язання. Маємо невизначеність $\infty-\infty$. Погрупуємо і двічі послідовно домножимо на спряжений вираз до різниці коренів квадратних. Тобто:

$$\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x}\right)=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{3}{2}}\frac{((\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})-2\sqrt{x})((\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})+2\sqrt{x})}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})+2\sqrt{x}}=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{3}{2}}\frac{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})^2-4x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}+2\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{x+1+2\sqrt{x^2-1}+x-1-4x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}+2\sqrt{x}}=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{3}{2}}\frac{2\sqrt{x^2-1}-2x}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})+2\sqrt{x}}=$$
$$=2\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{3}{2}}\frac{(\sqrt{x^2-1}-x)(\sqrt{x^2-1}+x)}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}+2\sqrt{x})(\sqrt{x^2-1}+x)}=$$
$$=2\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^{\frac{3}{2}}}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}+2\sqrt{x})(\sqrt{x^2-1}+x)}\begin{matrix}:x^{\frac{3}{2}}\\:x^{\frac{3}{2}}\end{matrix}=2\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}+2)(\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+1)}$$

$$=2\cdot\frac{-1}{8}=-\frac{1}{4}.$$