Заняття 9

$\boxed{N\,3.101}$

$$f_n(x) = \frac{1}{x+n}\ ; \quad 0 < x < +\infty$$

$$\triangledown\ \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x+n} = 0 = f(x) \text{ — гран. ф-я}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in(0;+\infty)} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{0+n} - 0\right) = 0$$

$$В:\ \frac{1}{x+n} \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} 0\ , \quad x \in (0;+\infty) \qquad \Delta.$$

$\boxed{N\,3.84}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}\left(\frac{x}{2x+1}\right)^n$$

$$\triangledown \quad 2x+1 \neq 0; \quad x \neq -\frac{1}{2}$$

за озн. Коші: $q = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{n+1}\left(\frac{x}{2x+1}\right)^n} = \left|\frac{x}{2x+1}\right| < 1$

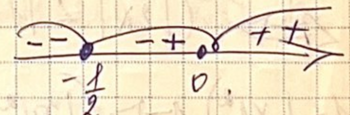
$$|x| < |2x+1|$$

$$|x| - |2x+1| < 0$$

Нулі модулів

$x = 0 \qquad 2x+1 = 0$

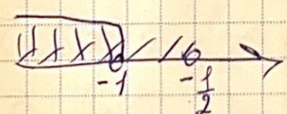
$\qquad\qquad x = -\frac{1}{2}$



I. $x < -\frac{1}{2}$

$-x < -2x - 1$

$x < -1$

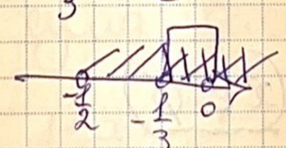


II. $x \in [-\frac{1}{2}; 0]$

$-x < 2x+1$

$-1 < 3x$

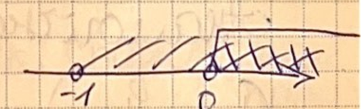
$-\frac{1}{3} < x$



III. $x > 0$

$x < 2x+1$

$-1 < x$



Мн. зб-ті: $(-\infty; -1) \cup (-\frac{1}{3}; +\infty)$

№ 3.87

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^n$$

Озн. Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|U_{n+1}(x)|}{|U_n(x)|} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n+1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2(n+1)}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^{n+1} : \frac{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n}{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)\cdot\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^n}\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\underbrace{\frac{2n+1}{2n+1}}_{\to 1}\left|\frac{2x}{1+x^2}\right| = \left|\frac{2x}{1+x^2}\right|$$

Отже:

- якщо $\left|\frac{2x}{1+x^2}\right| < 1$, то ряд збігається абсолют.

- якщо $\left|\frac{2x}{1+x^2}\right| > 1$, то ряд розбігається

- якщо $\left|\frac{2x}{1+x^2}\right| = 1$, то питання про зб. ряду залиш. відкритим

Розв. отрим. нерівн.:

$$\left(\left|\frac{2x}{1+x^2}\right| < 1\right) \Leftrightarrow \left(|2x| < |1+x^2|\right) \Leftrightarrow \left(2|x| < 1+x^2\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(2|x| < 1+|x|^2\right) \Leftrightarrow \left(|x|^2 - 2|x| + 1 > 0\right) \Leftrightarrow \left((|x|-1)^2 > 0\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (|x| \neq 1) \Leftrightarrow \left(\left[\begin{array}{l} x \neq 1 \\ x \neq -1 \end{array}\right.\right) \Leftrightarrow \left(x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}\right)$$

Аналогічно:

$$\left(\left|\frac{2x}{1+x^2}\right| > 1\right) \Leftrightarrow (x \in \varnothing)$$

$$\left(\left|\frac{2x}{1+x^2}\right| = 1\right) \Leftrightarrow \left(\left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \end{array}\right.\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 1 \end{array}\right)$$

Таким чином даний ф. р. абсолютно збігається для всіх, крім, можливо, точок $x=1$ та $x=-1$

Розгл. ці два випадки:

1) $x=1$

Ряд набуває вигляду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2n}$

Оскільки озн. Даламбера не дає відповіді на питання про зб. цього числового ряду, то застосовуємо озн. Раабе:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{2n+2}{2n-1}-1\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1$$

Отже, ряд розбігається.

2) $x=-1$

Ряд набуває вигляду $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2n}$ — знакопочережний ряд, який збігається за озн. Лейбніца, але не є абсол. зб.

Тому при $x=-1$ даний ф. р. є умовно збіжним.

$\boxed{№3.120}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad |x| < q < 1 \quad (*)$$

$\triangledown$ $S(x) = \frac{1}{1-x}$ (як сума всієї неск. спадної геом. прогр.)

$$S_n(x) = \sum_{n=0}^{k} x^n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^k$$

(*) наз. рівномірно зб. до своєї суми $S(x)$, якщо $S_k(x) \underset{k\to\infty}{\rightrightarrows} S(x)$

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{|x|<1} |S_k(x) - S(x)| = \lim_{k\to\infty} \sup_{|x|<1} \left|1+x+\ldots+x^k - \frac{1}{1-x}\right| =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \left|k - \frac{1}{2}\right| = \infty$$

Ряд збіжний нерівномірно. △

$\boxed{№3.126}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2+n^2}, \quad x \in (-\infty; +\infty) \quad (*)$$

▽ За озн. Вайєрштрасса:

1) $\sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\frac{1}{x^2+n^2}\right| = \frac{1}{n^2}, \quad x \in \mathbb{R}$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ – ЗБ, бо $2>1$ в уз. гарм. ряді

$(*)$ – ЗБ. АБС. і РІВНОМ. △.

$\boxed{№3.130}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt[3]{x^4+n^4}}, \quad E = \mathbb{R}$$

Оскільки $|u_n(x)| \le \left|\frac{\sin nx}{\sqrt[3]{x^4+n^4}}\right| \le \frac{1}{\sqrt[3]{x^4+n^4}} \le \frac{1}{\sqrt[3]{n^4}} =$

$= \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}, \quad \underline{\forall n \in \mathbb{N}}, \quad \underline{\forall x \in \mathbb{R}},$

а числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$ – збігається, то даний ф. р. рівномірно збігається на вказаній множині.

$\boxed{№3.99}$

$f_n(x) = x^n - x^{n+1}; \quad 0 \le x \le 1 \Rightarrow \quad x \in [0; 1]$

∇ $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} (x^n - x^{n+1}) = 0$; $x \in [0;1]$

$g_n(x) = x^n - x^{n+1} = x^n(1-x)$

$g_n'(x) = (x^n - x^{n+1})' = nx^{n-1} - (n+1)x^n \Rightarrow x = 0 =$
$= x^{n-1}(n-(n+1)x) = 0$

$x_n = \frac{n}{n+1}$

$\sup\limits_{x\in[0;1]} |x^n - x^{n+1}| = g_n(x_n) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \cdot \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n+1} = 0$

В: $\frac{1}{n+1} \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} 0$, $x \in [0;1]$ Δ

Отже, функ. п-ть на вказ. множ. збіг. $\boxed{\text{рівномірно}}$

$\boxed{№ 3.107}$

$f_n(x) = \frac{2nx}{1+n^2x^2}$; $0 \le x \le 1$

∇ $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2nx : n^2}{1+n^2x^2 : n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\overset{\to 0}{\frac{2x}{n}}}{x^2 + \underset{\downarrow 0}{\frac{1}{n^2}}} = 0 = f(x)$

$\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in[0;1]} |f_n(x) - f(x)| = \lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in[0;1]} \left| \frac{2nx}{1+n^2x^2} - 0 \right| =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in[0;1]} \left| \frac{2n}{\frac{1}{x} + n^2x} \right| = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n}{1+n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\underset{\downarrow 0}{\frac{1}{2n}} + \underset{\downarrow \infty}{\frac{n}{2}}} = 0$

$\frac{1}{x} + n^2x \to \max$

$-\frac{1}{x^2} + n^2 = 0$; $\frac{1}{x^2} = n^2$; $\frac{1}{x} = \pm n$; $x = \pm\frac{1}{n}$; $x = \frac{1}{n}$,
$f_n\left(\frac{1}{n}\right) = 1$

$\frac{2nx}{1+n^2x^2} \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} 0$, $x \in [0;1]$; $x = 1$

Δ.

$\boxed{№ 3.114}$

$f_n(x) = e^{n(x-1)}$; $0 < x < 1$

від'ємні знач. при $x \in (0;1)$

∇ 1) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} e^{n(x-1)} = e^{-\infty} = 0 = f(x)$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in(0;1)} |f_n(x) - f(x)| = \lim\limits_{n\to\infty} \underbrace{\sup\limits_{x\in(0;1)} |e^{n(x-1)} - 0|}_{1} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1 \neq 0$

$f_n(x) = e^{n(x-1)}$ – зростаюча ф-я

$\sup\limits_{0<x<1} e^{n(x-1)} = e^{n(1-1)} = e^0 = 1$

п-ть збігається нерівномірно

В: $e^{n(x-1)} \underset{n\to\infty}{\not\rightrightarrows} 0$ при $x \in (0;1)$