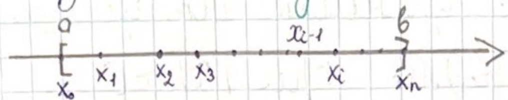
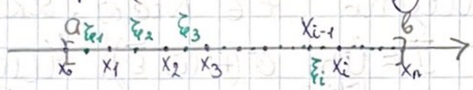
Означення визначеного інтеграла

Розбиттям τ відрізка $[a, b]$ $(a<b)$ називають будь-яку скінченну систему його точок x_i, $i=0,1,\ldots,n$, таку, що $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. У цьому разі пишемо $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{n}$. Кожен з відрізків $[x_{i-1}, x_i]$, $i=1,2,\ldots,n$, називають відрізком розбиття τ. Величину $|\tau| = \max\limits_{1\le i\le n} \Delta x_i$, де $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i=1,\ldots,n$, називають діаметром розбиття τ.



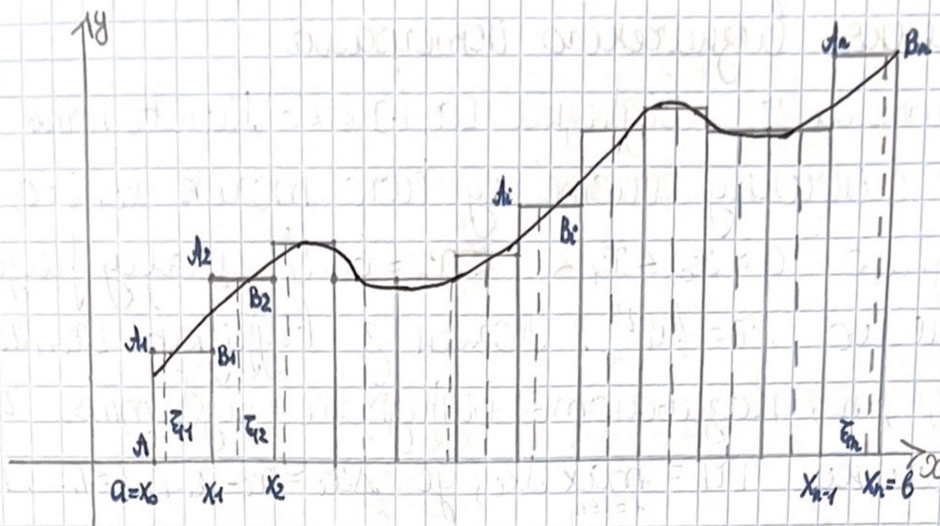
Кажуть, що маємо розбиття $(\tau, \overline{\xi})$ з вибраними точками відрізка $[a, b]$, якщо τ – розбиття відрізка $[a, b]$ і в кожному з відрізків $[x_{i-1}, x_i]$ цього розбиття вибрано точку $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ $(i=1,\ldots,n)$. Набір $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ позначають одним символом $\overline{\xi}$.



Нехай $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ – деяка функція, а $(\tau, \overline{\xi})$ – розбиття з вибраними точками відрізка $[a, b]$. Суму

$$\sigma(f; (\tau, \overline{\xi})) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

називають інтегральною сумою (або сумою Рімана) функції f, що відповідає розбиттю $(\tau, \overline{\xi})$ з вибраними точками відрізку $[a, b]$. Геометрично у випадку, коли функція f невід'ємна, кожен доданок інтегральної суми $\sigma(f; (\tau, \overline{\xi})) = \sum\limits_{i=1}^{n} (f(\xi_i)) \cdot \Delta x_i$ дорівнює площі прямокутника з основою довжини Δx_i і висотою $f(\xi_i)$, а вся сума – площі східчастої фігури $A A_1 B_1 A_2 B_2 \ldots A_i B_i \ldots A_n B_n B$, утвореної об'єднанням зазначених прямокутників.



Число $I \in \mathbb{R}$ називають границею інтегральної суми $\sigma(f;(\tau,\overline{\xi_i})) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ при $|\tau| \to 0$ і пишуть $I = \lim_{|\tau|\to 0} \sigma(f;(\tau,\overline{\xi_i}))$, якщо

$$(\forall \varepsilon>0)(\exists \delta>0)(\forall \tau: |\tau|<\delta)(\forall \overline{\xi})\{|\sigma(f;(\tau,\overline{\xi_i}))-I|<\varepsilon\}$$

Функцію $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ називають інтегровною за Ріманом на $[a,b]$ і пишуть $f\in R_{[a,b]}$, якщо для неї існує границя $I=\lim_{|\tau|\to 0}\sigma(f;(\tau,\overline{\xi}))$. Число I в цьому разі називають інтегралом Рімана (або визначеним інтегралом) функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$ і позначають символом $\int_a^b f(x)\,dx$, числа a, b — нижньою та верхньою межами інтегрування, відповідно, f — підінтегральною функцією, $f(x)\,dx$ — підінтегральним виразом, а x — змінною інтегрування.

Отже, $\int_a^b f(x)\,dx \overset{def}{=} \lim_{|\tau|\to 0}\sigma(f;(\tau,\overline{\xi_i}))$.

Екзаменаційний білет 2

① Обчислити інтеграли:

а) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx$

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx = \left\{ \begin{array}{l} d(e^{\sqrt{x}}) = (e^{\sqrt{x}})' dx = \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}\, dx \\ \{t = e^{\sqrt{x}}\} \end{array} \right\} = \int \frac{\cancel{e^{\sqrt{x}}}}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\cancel{e^{\sqrt{x}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}\, dt =$$

$$= \int \frac{1}{\cancel{\sqrt{x}}} \cdot 2\cancel{\sqrt{x}}\, dt = \int 2dt = 2t = 2e^{\sqrt{x}} + C$$

б) $\int \frac{2x+3}{(x+5)(x-2)(x-3)}\, dx$

$$\int \frac{2x+3}{(x+5)(x-2)(x-3)}\, dx =$$

$$\frac{2x+3}{(x+5)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x+5} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}$$

$$A = \frac{2x+3}{\cancel{(x+5)}(x-2)(x-3)}\bigg|_{x=-5} = \frac{-10+3}{-7\cdot(-8)} = \frac{-7}{56} = -\frac{1}{8}$$

$$B = \frac{2x+3}{(x+5)\cancel{(x-2)}(x-3)}\bigg|_{x=2} = \frac{7}{7\cdot(-1)} = -1$$

$$C = \frac{2x+3}{(x+5)(x-2)\cancel{(x-3)}}\bigg|_{x=3} = \frac{9}{8\cdot 1} = \frac{9}{8}$$

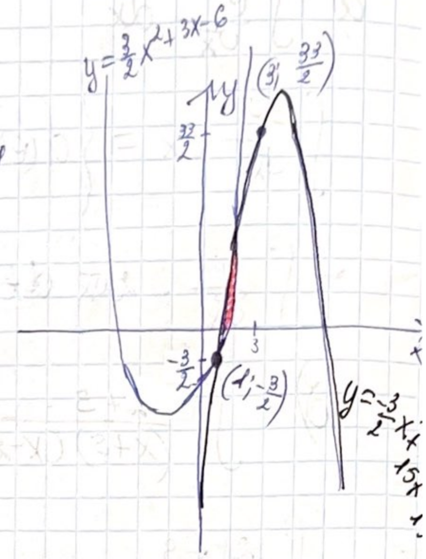
$$= \int \left(-\frac{1}{8(x+5)} - \frac{1}{x-2} + \frac{9}{8(x-3)} \right) dx =$$

$$= -\frac{1}{8} \ln|x+5| - \ln|x-2| + \frac{9}{8} \ln|x-3| + C$$

② Обчислити площу фігури, обмежену лініями:

а) $y = -\frac{3}{2}x^2 + 15x - 15$

$y = \frac{3}{2}x^2 + 3x - 6$



$$\begin{cases} y = -\frac{3}{2}x^2 + 15x - 15 \\ y = \frac{3}{2}x^2 + 3x - 6 \end{cases} \Rightarrow \text{т. перетину}$$

$$-\frac{3}{2}x^2 + 15x - 15 = \frac{3}{2}x^2 + 3x - 6$$

$$-\frac{3}{2}x^2 + 15x - 15 - \frac{3}{2}x^2 - 3x + 6 = 0 \quad /\cdot 2$$

$$-3x^2 + 30x - 30 + 3x^2 - 6x + 12 = 0$$

$$-6x^2 + 24x - 18 = 0 \quad /:6$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0; \quad (x-1)(x-3) = 0$$

$$x_1 = 1 \quad x_2 = 3$$

$$\cancel{y_1 = -\frac{3}{2} \quad y_2 = \frac{33}{2}}$$

$$\cancel{S = \int_{5-\sqrt{15}}^{-1+\sqrt{5}} -\frac{3}{2}x^2 + 15x - 15 - \left(\frac{3}{2}x^2 + 3x - 6\right) dx =}$$

$$\cancel{= \int_{5-\sqrt{15}}^{-1+\sqrt{5}} \left(-\frac{3}{2}x^2 + 15x - 15 - \frac{3}{2}x^2 - 3x + 6\right) dx =}$$

$$\cancel{\int_{5-\sqrt{15}}^{-1+\sqrt{15}} -3x^2 + 12x - 9 \, dx = \left(-\frac{3x^3}{3} + \frac{12x^2}{2} - 9x\right)\Big|_{5-\sqrt{15}}^{-1+\sqrt{15}} =}$$

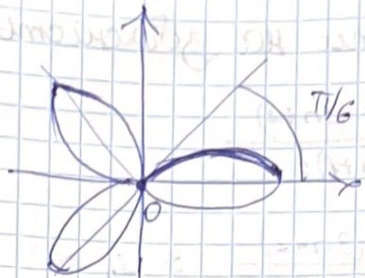
$$\cancel{= -78\sqrt{15} + 306}$$

$$S = \int_1^3 \left(\left(-\frac{3}{2}x^2 + 15x - 15\right) - \frac{3}{2}x^2 - 3x + 6\right) dx = \int_1^3 \left(-3x^2 + 12x - 9\right) dx =$$

$$= -\frac{3x^3}{3} + \frac{12x^2}{2} - 9x\Big|_1^3 = -27 + 54 - 27 + 1 - 6 + 9 = 4$$

б) $r = \cos 3\varphi$

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)\, d\varphi$$



$$S = 6S = \cancel{6}^{3}\cdot\frac{1}{\cancel{2}} \int_0^{\pi/6} \cos^2 3\varphi\, d\varphi = 3\int_0^{\pi/6} \frac{1}{2}(1+\cos 6\varphi)\, d\varphi =$$

$$= \frac{3}{2}\left(\varphi + \frac{1}{6}\sin\varphi\right)\Big|_0^{\pi/6} = \frac{3}{2}\left(\frac{\pi}{6_2} + 0\right) = \frac{\pi}{4}$$

③ Дослідити на збіжність невластивий інтеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^3+x}{\sqrt[5]{x^9+x^{21}}}\, dx$$

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{x^3+x}{\sqrt[5]{x^9+x^{21}}}\, dx = \underbrace{\int_0^1 \frac{x^3+x}{\sqrt[5]{x^9+x^{21}}}\, dx}_{I_1} + \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{x^3+x}{\sqrt[5]{x^9+x^{21}}}\, dx}_{I_2}$$

1) Досліd. на ЗБ. I_1, тут $x \to +0$

$$\frac{x^3+x}{\sqrt[5]{x^9+x^{21}}} = \frac{x(x^2+1)}{\sqrt[5]{x^9(1+x^{12})}} = \frac{\cancel{x}(x^2+1)}{x^{\cancel{9/5}\,4/5}\cdot \underbrace{\sqrt[5]{1+x^{12}}}_{1,\text{ при } x\to+0}} \sim \frac{1}{x^{4/5}},\ x\to+0$$

$\frac{4}{5} < 1$, то I_1 ЗБІГ.

2) Досліd. на ЗБ. I_2, тут $x \to +\infty$

$$\frac{x^3+x}{\sqrt[5]{x^9+x^{21}}} = \frac{x^3\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\sqrt[5]{x^{21}\left(\frac{1}{x^{12}}+1\right)}} = \frac{\cancel{x^3}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x^{\cancel{21/5}\,6/5}\underbrace{\sqrt[5]{\frac{1}{x^{12}}+1}}_{1,\text{ при } x\to+\infty}} \sim \frac{1}{x^{6/5}},\ x\to+\infty$$

$\frac{6}{5} > 1$, то I_2 – ЗБ.

Отже, $I = I_1 + I_2$,

Таким чином, I – ЗБ.

④ Дослідити на збіжність числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\cdot 5\cdot\ldots\cdot(3n+2)}{3^n\cdot(n+1)!}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\cdot 5\cdot\ldots\cdot(3n+2)}{3^n\cdot(n+1)!} = a_n > 0$$

~~Н.У.~~ $\cancel{\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2\cdot 5\cdot 8\cdot\ldots\cdot(3n+2)}{1\cdot 6\cdot 54\cdot\ldots\cdot 3^n(n+1)}} =$ const

$$= \cancel{\begin{cases} 3^n(n+1) - 3n+2 \\ 3^n\cdot n+3^n = 3n+2 \end{cases}} = \cancel{\lim_{n\to\infty} 2\cdot 5\cdot 8\cdot\ldots}$$

За Даламбером:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\cdot 5\cdot\ldots\cdot(3n+2)(3n+5)}{3^{n+1}(n+2)!}\cdot\frac{3^n(n+1)!}{2\cdot 5\cdot\ldots\cdot(3n+2)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(3n+5)\cdot 3^n\cancel{(n+1)!}}{3^{n+1}\cdot(n+2)\cancel{(n+1)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(3n+5)\cdot\cancel{3^n}}{\cancel{3^n}\cdot 3(n+2)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3n+5}{3n+6} = 1$$

Оскільки $\lim_{n\to\infty} \frac{3n+5}{3n+6} = 1$, то невідомо чи ряд розбіжний, чи збіжний.

За ознакою Раабе: $\lim_{n\to\infty} n(1-1) = 0 < 1$ – розб.

Отже, ряд розбіжний.

⑤ Дослідити функціональний ряд на рівномірну збіжність на вказаній множині

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{4+n^3x^2}, \quad E: x\in[0;+\infty) \quad (*)$$

1В

∇ 1) $\sup\limits_{x\in[0;+\infty)} |U_n(x)| = \sup\limits_{x\in[0;+\infty)} \left|\frac{x}{4+n^3x^2}\right| = \sup\limits_{x\in[0;+\infty)} \frac{1}{\frac{4}{x}+n^3x} =$

$\frac{4}{x}+n^3x \Rightarrow max; \quad -\frac{4}{x^2}+n^3=0$

$\frac{4}{x^2}=n^3;$

$x^2=\frac{4}{n^3}; \; x=\frac{2}{\sqrt{n^3}}\in E$

$x=-\frac{2}{\sqrt{n^3}}\notin E$

$\cancel{x^2=\frac{4}{n^3}; \quad n^3x^2-4=0}$

$\cancel{D=16n^3;\; n\neq 0}$

$\cancel{n\in(0;+\infty) - 2 \text{ корені}}$

$\cancel{n=0 - 1 \text{ корінь}}$

$\cancel{n<0 - \varnothing}$

$+ \quad -$

$\nearrow \frac{2}{\sqrt{n^3}} \searrow$

$= \frac{1}{\frac{1}{\frac{2}{\sqrt{n^3}}}+n^3\cdot\frac{2}{\sqrt{n^3}}} = \frac{1}{\frac{n\sqrt{n}}{2}+\frac{2n^3}{\sqrt{n^3}}n\sqrt{n}} = \frac{1}{\frac{5n\sqrt{n}}{2}} = \frac{2}{5n\sqrt{n}} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{5n\sqrt{n}}$ – мажоруючий для (*) він ЗБ.

Тому (*) ЗБ. рівном. ~~і АБС.~~

2В За озн. Вайєрштраса:

Оскільки $\left|\frac{x}{4+n^3x^2}\right| < \left|\frac{x}{n^3x^2}\right| = \left|\frac{1}{n^3x}\right| \leq \frac{1}{n^3}$,

а числовий ряд $\frac{1}{n^3}$ $3>1$ збіг., то даний ф.р. збіг. рівном. на вказ. множ.

⑥ Знайти подвійну і повторні границі функції в точці $O(0;0)$:

$$f(x,y) = \frac{xy}{xy+x-y}$$

(або довести, що вони не існують)

$$f(x,y) = \frac{xy}{xy+x-y}$$

1) $\exists \lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0} \frac{xy}{xy+x-y}\right) = 0$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \|$

2) $\exists \lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0} \frac{xy}{xy+x-y}\right) = 0$

3) $\nexists \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(\frac{xy}{xy+x-y}\right) \Rightarrow$ ф-я має розрив II роду в т. $(0;0)$

$P_n\left(\frac{1}{n};\frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} O(0;0)$

$$\lim_{P_n\to 0} \frac{xy}{xy+x-y} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}+\cancel{\frac{1}{n}}-\cancel{\frac{1}{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} = 1$$

$Q_n\left(\frac{1}{n};0\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} O(0;0)$

$$\lim_{Q_n\to 0} \frac{xy}{xy+x-y} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}\cdot 0}{\frac{1}{n}\cdot 0+\frac{1}{n}-0} = 0$$

Отже, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ не існує

⑦ Дослідити на екстремум функцію

$U = x^2 - 2xy + 4y^2 + 6z^2 + 6yz - 6z$

1. $\begin{cases} U'_x = 2x - 2y = 0 \ |:2 \\ U'_y = -2x + 8y + 6z = 0 \ |:2 \\ U'_z = 12z + 6y - 6 = 0 \ |:6 \end{cases}$ $\begin{cases} x - y = 0 \\ -x + 4y + 3z = 0 \\ 2z + y = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x = y \\ -y + 4y + 3z = 0 \\ 2z + y = 1 \end{cases}$

$\begin{cases} 3y + 3z = 0 \ |:3 \\ y + 2z = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} y = z \\ y + 2z = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} -y - z = 0 \\ y + 2z = 1 \end{cases}$ $+$

$\cancel{-y} - z \cancel{+y} + 2z = 0; \ z = 1$

$y + 2 \cdot 1 = 1$

$y = -1$

$x = -1$

$(-1; -1; 1)$

$M(-1; -1; 1)$

2. Знаходимо всіможливі другі часткові похідні

$U''_{x^2} = 2$ $\qquad U''_{xy} = U''_{yx} = -2$

$U''_{y^2} = 8$ $\qquad U''_{xz} = U''_{zx} = 0$

$U''_{z^2} = 12$ $\qquad U''_{yz} = U''_{zy} = 6$

$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 8 & 6 \\ 0 & 6 & 12 \end{pmatrix}$ $\quad A_1 = 2 > 0$

$A_2 = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 8 \end{vmatrix} = 16 - 4 = 12 > 0$

$A_3 = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 8 & 6 \\ 0 & 6 & 12 \end{vmatrix} = 2 \cdot 8 \cdot 12 + (-2) \cdot 6 \cdot 0 + 0 \cdot (-2) \cdot 6 -$
$- 0 \cdot 8 \cdot 0 - 6 \cdot 6 \cdot 2 - 12 \cdot (-2) \cdot (-2) = 72$

В т. M: $A_1 > 0$, $A_2 > 0$, $A_3 > 0$, то т. M є точкою $\underline{\min}$.

$U_{min} = U(M) = U(-1; -1; 1) = -3$