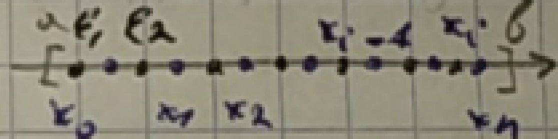
④ Визначення визначеного інтегралу   № 1

§1.1/ Розбиттям T відрізка $[a, b]$ $(a<b)$ називають будь-яку скінченну систему його точок x_i, $i = 0, 1, \dots, n$, таку, що $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$.



У цьому разі пишуть $T = \{x_i\}_{i=0}^{n}$. Кожен з відрізків $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$, називають відрізком розбиття T.

Величину

$$|T| = \max_{1 \le i \le n} \Delta x_i,$$

де $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, \dots, n$, називають діаметром розбиття T.

§1.2/

Кажуть, що маємо розбиття $(T, \bar{\xi})$ з вибраними точками відрізка $[a, b]$, якщо T — розбиття відрізка $[a, b]$ і в кожному з відрізків $[x_{i-1}, x_i]$ цього розбиття вибрано точку $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, \dots, n)$.

Набір $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ позначають одним символом $\bar{\xi}$.

§1.3/

Нехай $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ — деяка ф-я, а $(T, \bar{\xi})$ — розбиття з вибраними точками відрізка $[a, b]$. Суму

$$\sigma(f; (T, \bar{\xi})) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i = f(\xi_1) \cdot \Delta x_1 + f(\xi_2) \cdot \Delta x_2 + \dots + f(\xi_n) \cdot \Delta x_n \quad (9.1)$$

називають інтегральною сумою (сумою Рімана) ф-ї f, що відповідає розбиттю $(T, \bar{\xi})$ з вибраними точками відрізка $[a, b]$.

§1.4/ Число $I \in \mathbb{R}$ назив. границею інтегральної суми (9.1) при $|T| \to 0$ і пишуть

$$I = \lim \sigma(f, (T, \bar{\xi})), \quad (9.2)$$

якщо $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall T : |T| < \delta)(\forall \bar{\xi}) \{ |\sigma(f, (T, \bar{\xi})) - I| < \varepsilon \}$.

9.1.5/ Ф-ю $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ наз. <u>інтегровною за Ріманом</u> на $[a,b]$ і пишуть $f \in R[a,b]$, якщо для неї існує границя (9.2). Число I в цьому разі називають <u>інтегралом Рімана</u> (або визначеним інтегралом) ф-ї $f(x)$ на відрізку $[a,b]$ і позначають символом $\int_a^b f(x)dx$, числа a, b – <u>нижньою</u> <u>та</u> <u>верхньою</u> <u>межами</u> інтегрування, відповідно, f – <u>підінтегральною ф-єю</u>, $f(x)dx$ – <u>підінтегральним виразом</u>, а x – <u>змінною інтегрування</u>.

Отже,
$$\int_a^b f(x)dx \overset{def}{=} \lim_{|\tau| \to 0} \sigma(f;(\tau,\xi)). \qquad (9.3)$$