Екзаменаційна робота

з. матем. аналізу

Савки Семена

ПМО-11

$$2\int \frac{2x+1}{(x+1)(x-3)(x+5)}\,dx = \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x-3)} + \frac{C}{(x+5)} \;\text{⊜}$$

$$A = \frac{2x+1}{\cancel{(x+1)}(x-3)(x+5)}\Bigg|_{x=-1} = \frac{-1}{-16} = \frac{1}{16}$$

$$B = \frac{2x+1}{(x+1)\cancel{(x-3)}(x+5)}\Bigg|_{x=3} = \frac{7}{32} = \frac{7}{32}$$

$$C = \frac{2x+1}{(x+1)(x-3)\cancel{(x+5)}}\Bigg|_{x=-5} = \frac{-9}{-4\cdot -8} = -\frac{9}{32}$$

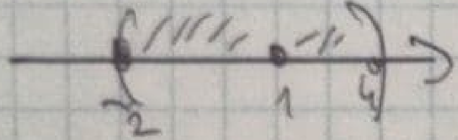
$$\text{⊜} \int \frac{1}{16(x+1)} + \frac{7}{32(x-3)} - \frac{9}{32(x-5)} = \frac{1}{16}\ln|x+1| + \frac{7}{32}\ln|x-3|$$

$$-\frac{9}{32}\ln|x+5|$$

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{(n+1)3^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)3^n}(x-1)^n$

Радіус збіжності степеневого ряду знаходимо за фор. Коші-Адамара

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{(n+1)3^n}}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{3}} = 3$$



Отже, $\forall x \in (-2,4)$ - ряд абсолютно збігається

$\forall x \in (-\infty; -2) \cup (4; +\infty)$ ряд розбіжний

Дослідимо збіжність при $x=-2$ та $x=4$

Отримаємо відповідно ряди $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ та $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$

Другий ряд розбіжний, перший - збіжний за ознакою Лейбніца.

Отже, при $x=-2$ ряд умовно збігається, при $x=4$ ряд розбіжний

В-дь: при $x \in$:

$[-2; 4)$ ряд збіжний (коли $x \neq 2$, то абсо

$(-\infty; -2) \cup [4; +\infty$ ряд розбіжний

---

5. $\sum_{n=1}^{\infty} 6^n \left(\frac{n}{n+2}\right)^{n^2}$

$F = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\left|6^n \left(\frac{n}{n+2}\right)^{n^2}\right|} = \lim_{n\to\infty} 6 \left(\frac{n}{n+2}\right)^n = \lim_{n\to\infty} 6 \times$

$\times \left(1 + \frac{(-2)}{n+2}\right)^{n \cdot \frac{(-2)}{n+2} \cdot \frac{n+2}{(-2)}} = \lim_{n\to\infty} 6 \cdot e^{-2 \frac{n}{n+2}} = 6 \cdot e^{-2} = 6 \cdot e^{-2} =$

$= \frac{6}{e^2} < \frac{6}{(2,5)^2} = \frac{6}{6,25} < 1 \Rightarrow$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} 6^n \left(\frac{n}{n+2}\right)^{n^2}$ –

– абсолютно збіжний за озн. Коші

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n\sqrt{n+x}}$ $E\ [0,1]$

Зауважимо, що $\forall x \in E$: і для всіх $n \in \mathbb{N}$

$$\left|\frac{x^n}{n\sqrt{n+x}}\right| = \frac{x^n}{n\sqrt{n+x}} \leq \frac{x^n}{n\sqrt{n}} \leq \frac{1}{n\sqrt{n}}$$

Отже, $(\forall n \in \mathbb{N})(\forall x \in E) \left\{ \left|\frac{x^n}{n\sqrt{n+x}}\right| \leq \frac{1}{n^{3/2}} \right\}$

З іншого боку, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ збігається

(як узагальнений гармонійний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{p}}$ з $p = \frac{3}{2} > 1$

Отже, за ознакою Вейєрштрасса, функц. ряд рівномірно й абсолютно збігається на $E = [0,1]$

3. a) $y = \ln x$

$y = \ln(4-x)$

$y = 0.$

$$\int_1^2 \ln x\,dx + \int_2^3 \ln(4x)\,dx = \ln 16 - 2$$