$= 1 - \frac{1}{(n+1)^3} > 0,$

тобто послідовність є зростаючою. Покажемо, що (x_n) обмежена зверху. Дійсно, для $n \in \mathbb{N}$

$a_n = \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right) \le \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{(n+1)^n}\right) =$

$= \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n-1} - 1 - \frac{1}{n}\right) = 2 - \frac{1}{n} < 2$

Отже, за теоремою про границю монотонної послідовності отримуємо, що послідовність (x_n) збіжна, причому $a_n \to \frac{1}{2}, n \to \infty$

№1.198

$\left\{\frac{3^n}{n^5} : n \in \mathbb{N}\right\}$

∇ Нерівність $x_n > x_{n+1}$ з Озн. 3 для монотонної спадної послідовності еквівалентна до нерівності

$x_n - x_{n+1} > 0$

Далі $x_n = \frac{3^n}{n^5}$ розглянемо

$x_n - x_{n+1} = \frac{3^n}{n^5} - \frac{3^{n+1}}{(n+1)^5} = \frac{3^n(n+1)^5 - n^5(3^{n+1})}{n^5(n+1)^5} =$

$(n(n+1))^5$

$= \frac{(n+1)^5 \cdot 3^n - n^5 \cdot 3^{n+1}}{(n^2+n)^5} > 0$

$(n+1)^5 \cdot 3^n - n^5 \cdot 3^{n+1} > 0$

$3^n\left((n+1)^2 - 3n^5\right) > 0$

$3^n > 0 \qquad (n+1)^2 - 3n^5 > 0$

$n > 1$

Оскільки $N \in \mathbb{N}$, то найменше натуральне число, що належить проміжку, $N = 2$ Δ.

В: починаючи з $N=2$, послідовність є монотонною

№1.215

$$x_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin k}{2^k}=\frac{\sin 1}{2^1}+\frac{\sin 2}{2^2}+\ldots+\frac{\sin(n)}{2^n}$$

∇ За критерієм Коші збіжності числової послідовності

$$(x_n)-зб \Leftrightarrow (\forall \varepsilon>0)(\exists \nu\in\mathbb{N})(\forall n>\nu)(\forall p\in\mathbb{N})\{|x_{n+p}-x_n|<\varepsilon\}$$

$$|x_{n+p}-x_n|=\left|\cancel{\frac{\sin 1}{2^1}}+\cancel{\frac{\sin 2}{2^2}}+\ldots+\cancel{\frac{\sin(n)}{2^n}}+\frac{\sin(n+1)}{2^{n+1}}+\ldots+\frac{\sin(n+p)}{2^{n+p}}-\cancel{\frac{\sin 1}{2^1}}-\cancel{\frac{\sin 2}{2^2}}-\ldots-\cancel{\frac{\sin(n)}{2^n}}\right|=\left|\frac{\sin(n+1)}{2^{n+1}}+\ldots+\frac{\sin(n+p)}{2^{n+p}}\right|\le\frac{|\sin(n+1)|}{|2^{n+1}|}+\ldots+\frac{|\sin(n+p)|}{|2^{n+p}|}\le$$

$$\le\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{2^{n+2}}+\ldots+\frac{1}{2^{n+p}}=\frac{1}{2^{n+1}}-\cancel{\frac{1}{2^{n+2}}}+\cancel{\frac{1}{2^{n+2}}}-\cancel{\frac{1}{2^{n+3}}}+\ldots+\cancel{\frac{1}{2^{n+p}}}-\frac{1}{2^{n+p+1}}=$$

$$=\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{2^{n+p+1}}<\frac{1}{2^{n+1}}<\varepsilon \Leftrightarrow 2^{n+1}>\frac{1}{\varepsilon}$$

$$2^n\cdot 2>\frac{1}{\varepsilon};\quad 2^n>\frac{\frac{1}{\varepsilon}}{2};\quad 2^n>\frac{1}{2\varepsilon}$$

$$\exists \nu=\left[\frac{1}{2\varepsilon}\right]+1\ \Delta.$$

№1.217.

Критерій Коші:

$$(\forall \varepsilon>0)(\exists \nu\in\mathbb{N})(\forall n>\nu)(\forall p\in\mathbb{N})\{|x_{n+p}-x_n|<\varepsilon\}$$

Заперечення критерію Коші:

$$(\exists \varepsilon\le 0)(\forall N\notin\mathbb{N})(\exists n\le\nu)(\exists p\notin\mathbb{N})\{|x_{n+p}-x_n|\ge\varepsilon\}$$

№1.203

$$\left\{a_n=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{n^2}\right):\ n\ge 2\right\}$$

Довести, що строго спадає, $a_n\to\frac{1}{2}$, $n\to\infty$

∇ Нерівність $x_{n+1}<x_n$ з Озн. 3 для монотонно спадної послідовності еквівалентна до нерівності

$$x_n-x_{n+1}>0$$

$$x_{n+1}-x_n=\left(\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\right)-\left(\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\right)=$$

$n_1 = \frac{-201+\sqrt{40001}}{2}$ $n_2 = \frac{-201-\sqrt{40001}}{2}$

Оскільки $n \in N$, то найменшее натуральне число, що належить проміжку, $n=1$. Δ.

В: починаючи з $n=1$, послідовність є монотонною.

№1211

$$x_n = \left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$$

∇ ① покажемо, що (x_n) — монотонно зростаюча послідовність

Для цього розг.

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)}{\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{2^n}\right)} = 1-\frac{1}{2^{n+1}} > 1$$ при всіх $n \in N$

оскільки $1-\frac{1}{2^{n+1}} > 1$, об $1-\frac{1}{2^{n+1}}-1>0$

$-\frac{1}{2^{n+1}} > 0$, об $2^{n+1}<0$

② покажемо, що (x_n) — обмежена згори п-ть. Це випливає з нерівностей

$$\ln x_n = \ln\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{2^n}\right) = \ln\left(1-\frac{1}{2}\right)+\ln\left(1-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\ln\left(1-\frac{1}{2^n}\right) <$$

$$< \frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\ldots-\frac{1}{2^n} < \frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\ldots-\frac{1}{2^n}-\ldots = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1,$$

об $S=\frac{b_1}{1-q}$

Отже, $\ln x_n < 1$

$e^{\ln x_n} < e^1$

$x_n < e$

①,② ⇒ п-ть (x_n) — збіжна

Δ.

№1.252

$$x_n = \frac{1}{n-10{,}2}$$

$n=1$: $x_1 = \frac{1}{1-10{,}2} = -\frac{5}{46}$

$n=2$: $x_2 = \frac{1}{2-10{,}2} = -\frac{5}{41}$

$n=3$: $x_3 = \frac{1}{3-10{,}2} = -\frac{5}{46}$

$n=4$: $x_4 = \frac{1}{4-10{,}2} = -\frac{5}{31}$

Виділимо підпослідовність:

1) з парними номерами:

$n = 2k$: $x_{2k} = \frac{1}{2-10{,}2} = \boxed{-\frac{5}{41}}$

2) з непарними номерами:

$n = 2k-1$: $x_{2k-1} = \frac{1}{1-10{,}2} = \boxed{-\frac{5}{46}}$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\frac{5}{46}$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\frac{5}{41}$$

Домашня робота (3 8)

№1.197

$\{n + \frac{100}{n};\ n \geq \omega\}$

▽ Нерівність $x_n > x_{n+1}$ з Озн. 3 для монотонної спадної послідовності еквівалентна до нерівності $x_n = x_{n+1} > 0$

Для $x_n = n + \frac{100}{n}$ розглянемо

$$x_n - x_{n+1} = \frac{n+100}{n} - (n+1) + \frac{100}{n+1} = \frac{100(n+1) + n(n+1) + 100n}{n(n+1)} =$$

$$= \frac{100n + 100 + n^2 + n + 100n}{n^2+n} = \frac{201n + 100 + n^2}{n^2+n} > 0,$$

$$\frac{n^2 + 201n + 100}{n^2+n} > 0 \Leftrightarrow n^2 + 201n + 100 > 0$$

$$D = 201^2 - 4\cdot 100 = 201^2 - 400 = 201^2 - 20^2 =$$

$$= (201-20)(201+20) = 181 \cdot 221 = 40001$$

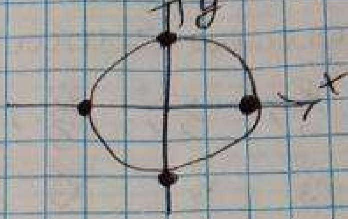
4) $\lim\limits_{n\to\infty} x_{\frac{n+8}{n+1}} - 3 = \left(1 + \frac{\frac{n+8}{n+1} - 3}{\frac{n+8}{n+1} - 3 + 1} \cdot 0\right) = 1$

Множина часткових границь: $\{1; 8/3\}$

$$\left.\begin{aligned} \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = 1 \\ \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = 8/3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \nexists \lim_{n\to\infty} x_n$$

$\sup\limits_n x_n = 1$; $\inf\limits_n x_n = 8/3$

№1.251



$x_n = \cos^n \frac{2\pi n}{3}$

$\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n - ?$ $\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n - ?$

$n=1: x_1 = \cos^1 \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$ – n-непарне

$n=2: x_2 = \cos^2 \frac{2\pi \cdot 2}{3} = \frac{1}{4}$ – n-парне

$n=3: x_3 = \cos^3 2\pi = 1$

$n=4: x_4 = \cos^4 \frac{8\pi}{3} = \frac{1}{16}$

$n=5: x_5 = \cos^5 \frac{10\pi}{3} = -\frac{1}{32}$

$n=6: x_6 = \cos^6 4\pi = 1$

$n=7: x_7 = \cos^7 \frac{14\pi}{3} = -\frac{1}{128}$

$n=8: x_8 = \cos^8 \frac{2\pi \cdot 8}{3} = \cos^8 \frac{16\pi}{3} = \frac{1}{256}$

$n=9: x_9 = \cos^9 6\pi = 1$

$n = 2k-1: x_{2k-1} = 1$

$\lim\limits_{n\to\infty} x_{2k-1} = \boxed{1}$

$n = 2k-3: x_{2k-3} = -1/2$

$\lim\limits_{n\to\infty} x_{2k-3} = \boxed{-1/2}$

$n = 2k: x_{2k} = 1/4$

$\lim\limits_{n\to\infty} x_{2k} = \boxed{1/4}$

$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \boxed{1}$

$\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \boxed{-\frac{1}{2}}$

Виділимо підпослідовність

1) з парними номерами: $x_{\frac{1}{k+2}} = 1$

$\lim\limits_{k\to\infty} x_{\frac{1}{k+2}} = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{k+2}} = \lim\limits_{k\to\infty}(k+2) = 2$

2) з непарними номерами: $x_{\frac{1}{k+2}} = \frac{1}{2}$ } множина часткових границь $A = \{2\}$.

$\lim\limits_{k\to\infty} x_{\frac{1}{k+2}} = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{k+2}} = \lim\limits_{k\to\infty} k+2 = 2$

№1.238

$x_n = (-1)^{n+1}\left(2 + \frac{2}{n}\right)$

∇ Перевіримо члени послідовності

$4;\ -3;\ \frac{8}{3};\ -\frac{5}{2};\ \frac{12}{5};\ -\frac{7}{3};\ \frac{16}{7};\ -\frac{9}{4}$

$x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5 \quad x_6 \quad x_7 \quad x_8$

Виділимо послідовності:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} x_{\frac{k+4}{k+2}} = \lim\limits_{k\to\infty}(-1)^{\frac{k+4}{k+2}-1}\left(2 + \frac{2}{\frac{k+4}{k+2}}\right) = \lim\limits_{k\to\infty}(-1)^{\frac{2}{k+4}}\left(2 + \frac{2k+4}{k+4}\right) =$

$= \lim\limits_{k\to\infty}(-1)^{\frac{2}{k+2}}\left(\frac{4k+12}{k+4}\right) = \left[\frac{12}{4}\right] = \boxed{3}$

2) $\lim\limits_{k\to\infty} x_{\frac{k+2}{k+1}} = \lim\limits_{k\to\infty}(-1)^{-\frac{k+2}{k+1}-1}\left(2 - \frac{2}{\frac{k+2}{k+1}}\right) =$

$= \lim\limits_{k\to\infty}(-1)^{\frac{-2k+1}{k+1}}\left(2 - \frac{2k+2}{k+2}\right) = \lim\limits_{k\to\infty}(-1)^{\frac{-2k+1}{k+1}}\left(\frac{2}{k+2}\right) = \left[\frac{2}{\infty}\right] = \boxed{\infty}$

Множина часткових границь $\{3; +\infty\}$

$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = +\infty$

$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = 3$

$\Rightarrow \exists \max\limits_n x_n = x_1 = 4 = \sup\limits_n x_n$

$\exists \min\limits_n x_n = x_2 = -3 = \inf\limits_n x_n$ Δ.

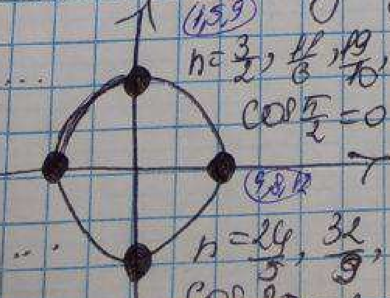
№1.240

$x_n = 1 + \frac{n}{n+1} \cdot \cos\frac{\pi n}{2}$

∇ Залежно від значення $\cos\frac{\pi n}{2}$ виділимо підпослідовності:

(2,6,10) $n = \frac{5}{3}, \frac{13}{7}, \frac{21}{11}, \ldots$ $\cos\pi = -1$

(1,5,9) $n = \frac{3}{2}, \frac{11}{6}, \frac{19}{10}, \ldots$ $\cos\frac{\pi}{2} = 0$



(3,7,11) $n = \frac{7}{4}, \frac{15}{8}, \frac{23}{12}, \ldots$ $\cos\frac{3\pi}{2} = 0$

(4,8,12) $n = \frac{24}{5}, \frac{32}{9}, \frac{40}{13}, \ldots$ $\cos 2\pi = 1$

1) $\lim\limits_{k\to\infty} x_{\frac{k+8}{k+4}} = \lim\limits_{k\to\infty}\left(1 + \frac{\frac{k+8}{k+4}}{\frac{k+8}{k+4}+1} \cdot 1\right) = 8/3$

2) $\lim\limits_{k\to\infty} x_{\frac{k+8}{k+4}-1} = \left(1 + \frac{\frac{k+8}{k+4}-1}{\frac{k+8}{k+4}-1+1} \cdot 0\right) = 1$

3) $\lim\limits_{k\to\infty} x_{\frac{k+8}{k+4}-2} = \left(1 + \frac{\frac{k+8}{k+4}-2}{\frac{k+8}{k+4}+1-2} \cdot (-1)\right) = 1$

Домашня робота (39)

№1. 224

$\left\{ \underbrace{\frac{1}{n}}_{x_n};\ n \geq 1 \right\}$

∇ Перелічимо члени даної прогресії

$$\underset{x_1}{1},\ \underset{x_2}{\frac{1}{2}},\ \underset{x_3}{\frac{1}{3}},\ \underset{x_4}{\frac{1}{4}},\ \underset{x_5}{\frac{1}{5}},\ \underset{x_6}{\frac{1}{6}},\ \ldots$$