Т. 6.2.1. (теорема Ролля)

Нехай функція $y = f(x)$:

1) неперервна на відрізку $[a, b]$;

2) диференційовна на інтервалі (a, b);

3) $f(a) = f(b)$

Тоді існує точка $\xi \in (a, b)$ така, що $f'(\xi) = 0$

Дов: Оскільки ф-ція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$, то з огляду на теорему Вейєрштрасса (4.4.1) вона досягає на цьому відрізку найбільшого та найменшого значень. Нехай $M = \max\limits_{x \in [a,b]} f(x)$, $m = \min\limits_{x \in [a,b]} f(x)$. Тоді

$(\forall x \in [a, b]) \{m \le f(x) \le M\}$

Можливі два випадки: $m = M$ та $m < M$.

Розглянемо I випадок. Тоді $(\forall x \in [a, b]) \{f(x) = m = M = const\}$. Звідси $(\forall x \in [a, b]) \{f'(x) = 0\}$. Отже, за ξ можна взяти будь-яку точку з інтервалу (a, b).

Розглянемо II випадок. Оскільки $f(a) = f(b)$, то хоча б одне зі значень m та M ф-ція досягає у якійсь точці $\xi \in (a, b)$. Отже, точка ξ є точкою екстремуму ф-ції $y = f(x)$. Тому з огляду на диференційовність ф-ції $y = f(x)$ в точці ξ та згідно з теоремою Ферма (6.1.2) отримуємо, що $f'(\xi) = 0$

Озн. 2.1.3 Число a називають границею числової послідовності $\{x_n\}$, якщо в будь-якому ε-околі числа a містяться всі елементи послідовності $\{x_n\}$ починаючи з деякого номера.

2.1 Означення границі послідовності

Озн. 2.1.1. Число $a \in \mathbb{R}$ називають границею числової послідовності $\{x_n\}$, якщо
$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N) \{|x_n - a| < \varepsilon\}$
Тоді пишуть $a = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$

або $x_n \to a$, $n \to \infty$, і кажуть, що послідовність $\{x_n\}$ збігається до a або має границю a.
Послідовність, що має границю, називають збіжною, а послідовність, що не має границі, – – розбіжною.
Той факт, що число a не є границею послідовності $\{x_n\}$, запишемо так: $(\exists \varepsilon > 0)(\forall N \in \mathbb{N})(\exists n > N) \{|x_n - a| \geq \varepsilon\}$

Озн. 2.1.2. Інтервал $U_\varepsilon(a) \overset{def}{\equiv} (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ називають ε-околом числа a.

За допомогою поняття ε-околу означення границі можна перефразувати так.

Т 6.2.2. (теорема Лагранжа)

Нехай функція $y = F(x)$:

1) неперервна на відрізку $[a,b]$,

2) диференційовна на інтервалі (a,b).

Тоді існує точка $\xi \in (a,b)$ така, що

$$F(b) - F(a) = F'(\xi)(b-a).$$

Дов: Розглянемо на відрізку $[a,b]$ функцію

$$F(x) = F(x) - F(a) - \frac{F(b)-F(a)}{b-a}(x-a)$$

Зауважимо, що ф-ція $y = F(x)$ задовольняє всі умови Т. 6.2.1. Справді, ф-ція $y = F(x)$ є неперервною на $[a,b]$, диференційовною на (a,b), причому

$$F'(x) = F'(x) - \frac{F(b)-F(a)}{b-a},$$ і $F(a) = F(b) = 0$. Тому з огляду на Т. 6.2.1. знайдеться точка $\xi \in (a,b)$

для якої $F'(\xi) = F'(\xi) - \frac{F(b)-F(a)}{b-a} = 0$,

звідси випливає співвідношення (6.1).

Т. 6.2.3 (теорема Коші).

Нехай функції $f(x)$ та $g(x)$:

1) неперервні на відрізку $[a, b]$;

2) диференційовні на інтервалі (a, b);

3) $(\forall x \in (a, b)) \{g'(x) \neq 0\}$.

Тоді існує точка $\xi \in (a, b)$ така, що

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Дов: Доведемо, що співвідношення (6.2) має сенс, тобто що $g(b) \neq g(a)$. Насправді, якби $g(a) = g(b)$, то для ф-ції $g(x)$ виконувались б умови Т.6.2.1 (Ролля) і згідно з цією теоремою існувала б точка $\eta \in (a, b)$, така, що $g'(\eta) = 0$. А це суперечило б умові теореми. Отже, $g(a) \neq g(b)$.

Розглянемо функцію

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot (g(x) - g(b)).$$

З огляду на умови теореми ф-ція $F(x)$ задовольняє умови теореми Ролля, тому існує точка $\xi \in (a, b)$ така, що $F'(\xi) = 0$, тобто

$$F'(\xi) = \frac{F(b) - F(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g'(\xi),$$

звідки випливає співвідношення (6.2).

Т. 3.9.1 (перша важлива границя).

Справджується рівність $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

Дов: Із (3.9) випливає, що при $x\in(0;\frac{\pi}{2})$

$1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}$, отже $0>\frac{\sin x}{x}-1>\cos x-1$,

$0<1-\frac{\sin x}{x}<1-\cos x$

Однак $1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}<2\sin\frac{x}{2}<x$, тому

$\left|1-\frac{\sin x}{x}\right|<|x|$.

З парності функцій $\frac{\sin x}{x}$ та $|x|$ випливає, що остання нерівність справджується і при $x\in(-\frac{\pi}{2},0)$.

Перейшовши у співвідношенні (3.10) до границі при $x\to 0$, отримуємо $\lim\limits_{x\to 0}\left|1-\frac{\sin x}{x}\right|=0$, звідки

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

Т. 3.9.2 (друга важлива границя).

Справджується рівність $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

Нехай $\{x_k\}$ - довільна послідовність додатних чисел така, що $\lim\limits_{k\to\infty} x_k=0$ (не зменшуючи загальності, вважатимемо, що $x_k<1$). Тоді

$$(\forall k\in\mathbb{N})(\exists n_k\in\mathbb{N})\left\{\frac{1}{n_k+1}<x_k\le\frac{1}{n_k}\right\},$$

отже $\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k}<(1+x_k)^{\frac{1}{x_k}}<\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k+1}$

Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$, той границя будь-якої підпослідовності дорівнює e. Тому $\lim\limits_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k}=\lim\limits_{k\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k+1}}{1+\frac{1}{n_k+1}}=e$

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k+1}=\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k}\left(1+\frac{1}{n_k}\right)=e$$

Звідси з урахуванням (3.11) отримуємо $\lim\limits_{x\to+0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

Далі $\lim\limits_{x\to+0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{t\to+0}(1-t)^{-\frac{1}{t}}=\lim\limits_{t\to+0}\left(1+\frac{t}{1-t}\right)^{\frac{1-t}{t}}\left(1+\frac{t}{1-t}\right)=e,$

оскільки $\frac{t}{1-t}\to+0$ при $t\to+0$.

Т. 2.2.2 Збіжна послідовність обмежена.

Дов: Нехай $\lim_{n \to \infty} x_n = a$. Згідно з означенням границі послідовності, для $\varepsilon = 1$ маємо

$(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N) \{|x_n - a| < 1\}$, тобто

$(\forall n > N) \{a - 1 < x_n < a + 1\}$.

Приймемо $M \stackrel{def}{=} \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_N|, |a-1|, |a+1|\}$.

Отже, $(\forall n \in \mathbb{N}) \{|x_n| \leq M\}$.

Т. 2.2.2 Збіжна послідовність обмежена.

Дов: Нехай $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Згідно з означенням границі послідовності, для $\varepsilon = 1$ маємо

$(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N)\ \{|x_n - a| < 1\}$, тобто

$(\forall n > N)\ \{a - 1 < x_n < a + 1\}$.

Приймемо $M \overset{def}{=} \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_N|, |a-1|, |a+1|\}$.

Отже, $(\forall n \in \mathbb{N})\ \{|x_n| \leq M\}$.