(18) Збіжність поточкова та рівномірна збіжність функціональних послідовностей та рядів п. 13.1 - 13.2

13.1.1/ Нехай E - довільна м-на, а $f, f_1, f_2, \ldots : E \to \mathbb{R}$ - деякі ф-ї. Кажуть, що ф-на послідовність $\{f_n\}$ збігається до ф-ї f поточково на множині E, або що f є (поточковою) границею ф-ї послідовності $\{f_n\}$ (і пишуть: $f_n \xrightarrow[E]{} f$), якщо

$$(\forall x \in E) \ \{ \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \}, \quad (13.1)$$

тобто

$$(\forall x \in E)(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N)\{|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\}. \ (13.2)$$

13.1.2/ Ф-ну послідовність $\{f_n\}$ кажуть рівномірно збіжною на множині E до ф-ї f, якщо

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N)(\forall x \in E)\{|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\}.$$

Це коротко записують так:

$$f_n \underset{E}{\rightrightarrows} f.$$

13.2.1/ Нехай E - довільна м-на, а $f, u_1, u_2, \ldots : E \to \mathbb{R}$ - деякі ф-ї. Кажуть, що функціональний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ (13.7) поточково (рівномірно) збігається до ф-ї f на множині E, якщо послідовність його частинних сум $\{S_n\}$, де $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$, поточково (рівномірно) збігається до ф-ї f на цій м-ні.

Т. 13.2.2 (ознака Діріхле)

Нехай ф-ї $a_n(x)$ та $b_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, визначені на м-ні E, причому:

а) послідовність частинних сум ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ обмежена, тобто $(\exists M > 0)(\forall k \in \mathbb{N})(\forall x \in E)$ $\left\{ \left| \sum\limits_{n=1}^{k} a_n(x) \right| \le M \right\}$;

б) $(\forall x \in E)(\forall n \in \mathbb{N})\{b_n(x) \ge b_{n+1}(x)\}$ і $b_n(x) \underset{E}{\rightrightarrows} 0$

Тоді ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)\, b_n(x)$ рівномірно збіжний на м-ні E.

Т. 13.2.3 (ознака Абеля)

Нехай а) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ рівномірно збігається на

м-ні E;

б) $(\forall x \in E)(\forall n \in \mathbb{N})\{b_n(x) \geq b_{n+1}(x)\}$ і послідовність

$\{b_n(x)\}$ обмежена на E, тобто

$(\exists M > 0)(\forall n \in \mathbb{N})(\forall x \in E)\{|b_n(x)| < M\}$.

Тоді ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \cdot b_n(x)$ є рівномірно збіжним на

м-ні E.