Озн. 2.1.1.

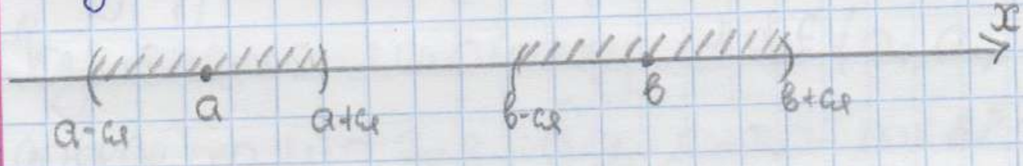
Число $a \in \mathbb{R}$ назив. границею числової послідовності $\{x_n\}$, якщо $(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N)\ \{|x_n - a| < \varepsilon\}$. Тоді пишуть $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ або $x_n \to a,\ n \to \infty$, і кажуть, що п-ть $\{x_n\}$ збігається до a або має границю a.

Теорема 2.2.1. Теорема про єдиність границі.

Послідовність не може мати двох різних границь.

Доведення. ∇ Припустимо супротивне, тобто нехай існує така послідовність $\{x_n\}$, що $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$, причому $a \neq b$, і нехай для визначеності $a < b$. Нехай $\varepsilon = \frac{b-a}{3}$.

Тоді $U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(b) = \varnothing$ (2.1)



Згідно з означенням границі маємо $(\exists N_1)(\forall n > N_1)\{|x_n - a| < \varepsilon\}$, $(\exists N_2)(\forall n > N_2)\{|x_n - b| < \varepsilon\}$.
Нехай $N = \max\{N_1, N_2\}$. Тоді для $(\forall n > N)$ $\{|x_n - a| < \varepsilon\}$ і $\{|x_n - b| < \varepsilon\}$, тобто елементи послідовності $\{x_n\}$ з номерами, більшими від N, одночасно належать до $U_\varepsilon(a)$ та $U_\varepsilon(b)$, а це неможливо з огляду на співвідношення (2.1). Отримана суперечність доводить, що $a = b$ Δ.

Теорема 2.2.2. Про обмеженість збіжної послідовності.

Збіжна послідовність обмежена.

Доведення. ▽ Нехай $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Згідно з означ. границі послідовності, для $\varepsilon_1 = 1$ маємо $(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N)\ \{|x_n - a| < 1\}$, тобто $(\forall n > N)\ \{a - 1 < x_n < a + 1\}$. Приймемо $M \overset{def}{=} \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_N|, |a-1|, |a+1|\}$. Отже, $(\forall n \in \mathbb{N})\ \{|x_n| \le M\}$. △

Теорема 6.2.1. Теорема Ролля.

Нехай ф-я $y=f(x)$:

1) неперервна на відрізку $[a,b]$;

2) диференційовна на інтервалі (a,b);

3) $f(a)=f(b)$

Тоді існує точка $c_1 \in (a,b)$ така, що $f'(c_1)=0$.

Доведення. Оскільки ф-я $y=f(x)$ неперервна на відр. $[a,b]$, то з огляду на теор. Вейєрштрасса вона досягає на цьому відрізку найбільшого та найменшого значень. Нехай $M=\max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, $m=\min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$. Тоді $(\forall x\in[a,b])\{m \le f(x) \le M\}$.

Можливі два випадки: $m=M$ та $m<M$.

Розглянемо перший випадок. Тоді $(\forall x\in[a,b])$ $\{f(x)=m=M=const\}$. Звідки $(\forall x \in [a,b])$ $\{f'(x)=0\}$. Отже, за c_1 можна взяти будь-яку точку з інтервалу (a,b).

Розглянемо другий випадок. Оскільки $f(a)=f(b)$, то хоча б одне зі значень m та M ф-я досягає у якійсь точці $c_1\in(a,b)$. Отже, точка c_1 є точкою екстремуму ф-ї

$y=f(x)$. Тому з огляду на диференційовність ф-ї $y=f(x)$ в точці c_2 та згідно з теоремою Ферма отримуємо, що $f'(c_2)=0$ Δ

Теорема 6.2.2. Теорема Лагранжа.

Нехай ф-я $y = f(x)$:

1) неперервна на відрізку $[a, b]$;

2) диференційовна на інтервалі (a, b).

Тоді існує точка $\xi \in (a, b)$ така, що

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a) \quad (6.1)$$

Доведення. ∇ Розглянемо на відр. $[a, b]$ функцію

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Зауважимо, що ф-я $y = F(x)$ задовольняє всі умови теореми Ролля. Справді, ф-я $y = F(x)$ є неперервною на $[a, b]$, диференційовною на (a, b), причому $F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$, і $F(a) = F(b) = 0$. Тому з огляду на теорему Ролля знайдеться точка $\xi \in (a, b)$, для якої $F'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{(b - a)} = 0$, звідки випливає співвідношення (6.1) ∆

Теорема 6.2.3. Теорема Коші.

Нехай функції $f(x)$ та $g(x)$:

1) неперервні на відрізку $[a, b]$;

2) диференційовні на інтервалі (a, b);

3) $(\forall x \in (a, b)) \{ g'(x) \neq 0 \}$.

Тоді існує точка $c_1 \in (a, b)$ така, що

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c_1)}{g'(c_1)} \quad (6.2)$$

Доведення. ∇ Доведемо, що співвідношення (6.2) має сенс, тобто що $g(b) \neq g(a)$. Насправді, якби $g(a) = g(b)$, то для ф-ї $g(x)$ виконувалися б умови теореми Ролля і згідно з цією теор. існувала б точка $\eta \in (a, b)$ така, що $g'(\eta) = 0$. А це суперечило б умові теореми. Отже, $g(a) \neq g(b)$. Розглянемо ф-ю

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot (g(x) - g(a))$$

З огляду на умови теореми ф-я $F(x)$ задовольняє умови теор. Ролля, тому існує точка $c_1 \in (a, b)$ така, що $F'(c_1) = 0$, тобто

$$f'(c_1) = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g'(c_1),$$

звідки випливає співвідношення (6.2) Δ.