ПМО-11, факультет прикладної математики та інформатики, Савки Семена

1. Знайти границі:

а) $\lim\limits_{x\to 5} \frac{x^2-3x-10}{2x^2-4x-30} = \frac{25-10-15}{30-20-30} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 5} \frac{x^2+2x-5x-10}{2(x^2-2x-15)} =$

$= \lim\limits_{x\to 5} \frac{x(x+2)-5(x+2)}{2(x^2+3x-5x-15)} = \frac{(x+2)\cdot\cancel{(x-5)}}{2(x+3)\cancel{(x-5)}} = \boxed{\frac{7}{16}}$

б) $\lim\limits_{x\to 7} \frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49} = \frac{2-2}{49-49} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim \frac{(2-\sqrt{x-3})\cdot(2+\sqrt{x-3})}{(x^2-49)\cdot(2+\sqrt{x-3})} =$

~~в) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)^{2x-3} =$~~

$= \lim \frac{4-(x-3)}{(x-7)(x+7)(2+\sqrt{x-3})} = \frac{7-x}{\cancel{(x-7)}(x+7)(2+\sqrt{x-3})} =$

$= \frac{-1}{(x+7)(2+\sqrt{x-3})} = \frac{-1}{14\cdot 4} = \boxed{-\frac{1}{56}}$

~~в) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)^{2x-3} = \frac{0}{2x+1} = \boxed{0}$~~ $(2x-3)=0$

~~в) $\lim \left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)^{2x-3}$~~ =

$= \lim$

г) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 8x \cdot tg 5x}{2x^2} = \frac{\sin(8x)}{8x} \cdot \frac{tg(5x)}{5x} \times$ ~1 ~1

$\times \frac{5x \cdot 8x}{2x^2} = \frac{5 \cdot 8}{2} = \boxed{20}$

2. Обчислити похідні

а) $y = (28x+12)^{2020}$, $y' = 2020(28x+12)^{2019} \cdot 28$

б) $y = e^{\cos(5x+2)}$, $y' = e^{\cos(5x+2)} \cdot (-\sin(5x+2) \cdot 5 =$

$= 5e^{\cos(5x+2)} \cdot (-\sin(5x+2))$

в) $y = \sin^{10}(\ln^5(x^4+3)) = y' = 10\sin^9(\ln^5(x^4+3)) \times$

$\times \frac{1}{\ln^5(x^4+3)} \cdot 5\ln^4(x^4+3) \cdot \frac{1}{x}(x^4+3) \cdot 4x^3$.

г) $y = (arctg\, x)^{\frac{1}{x}}$ $y' = e^{\ln(arctg\, x)^{\frac{1}{x}}} \cdot \ln(arctg\, x)^{\frac{1}{x}} =$

$= e^{\ln(arctg(x))^{\frac{1}{x}}} \cdot \frac{1}{arctg(x)} \cdot \frac{1}{1+x^2} \cdot \frac{1}{x} + \ln(arctg\, x) \times$

$\times \left(-\frac{1}{x^2}\right)$

1. b) $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)^{2x-3} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{2x-1+1-1}{2x+1}\right)^{2x-3} =$

$= \lim_{x \to \infty} e^{-\left(\frac{4x-6}{2x+1}\right)} = e^{\lim_{x \to \infty} \left(-\frac{4x-6}{2x+1}\right)} = e^{-2} = \frac{1}{e^2}$

3. Побудувати графік функції

$$y = \frac{x^2 - 6x + 13}{x - 3}$$

① О.В $x - 3 \neq 0$, $x \neq 3$. Отже $x \in (-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 6x + 13}{x - 3} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - 6x + 13}{x - 3} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 3-0} \frac{x^2 - 6x + 13}{x - 3} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 3+0} \frac{x^2 - 6x + 13}{x - 3} = \infty$$

② ~~Отже, пряма~~ Точка $x = 3$, є точкою розриву II розриву

Отже, пряма $x = 3$ – вертикальна асимптота

③ Функція є ні парною, ні не парною

(4) Точки перетину з осями:

з віссю OX: $y=0$ $\quad \dfrac{x^2-6x+13}{x-3}=0$ $\quad$ $x \notin \mathbb{R}$ $\quad \cancel{x=1,\ x=5}$

маємо точку ~~(1,0) (5,0)~~

з віссю OY: $x=0$ $\quad y=\dfrac{\cancel{-18}+13}{-3}=\dfrac{13}{-3}=-4\dfrac{1}{3}$

маємо точку $(0;\ 4{,}3)$

5. Знаходимо $y'(x)=y'=\dfrac{x^2-6x+13}{x-3}$

$$y'=\frac{(x^2-6x+13)(x-3)-(x^2-6x+13)\cdot(x-3)}{(x-3)^2}=\frac{(2x-6)(x-3)-(x^2-6x+10)}{(x-3)^2}$$

$$=\frac{x^2-6x+5}{(x-3)^2}=0$$

$x_1=1 \quad x_2=5$

Визначаємо знаки $y'(x)$