Означення границі послідовності

Означення. Число $a \in \mathbb{R}$ називають границею числової послідовності $\{x_n\}$, якщо

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N)\ \{|x_n - a| < \varepsilon\}.$$

Тоді пишуть $a = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$

або $x_n \to a,\ n \to \infty$, і кажуть, що послідовність $\{x_n\}$ збігається до a або має границю a.

Послідовність, що має границю, назив. **збіжною**, а послідовність, що не має границі, – **розбіжною**.

Той факт, що число a не є границею послідовності $\{x_n\}$, запишемо так:

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall N \in \mathbb{N})(\exists n > N)\{|x_n - a| \geq \varepsilon\}.$$

Означення. Інтервал

$$U_\varepsilon(a) \stackrel{def}{=} (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$$

називають **ε-околом числа a.**

За допомогою поняття ε-околу означення границі можна переформулювати так.

Означення. Число a назив. **границею числової послідовності** $\{x_n\}$, якщо в будь-якому ε-околі числа a містяться всі елементи послідовності $\{x_n\}$, починаючи з деякого номера.

З цього означення випливає таке: якщо $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, то зовні ε-околу числа a, тобто у множині $\mathbb{R} \setminus U_\varepsilon(a)$, може міститися лише скінченна кількість елементів послідовності $\{x_n\}$.

Теорема. Збіжна послідовність обмежена.

Доведення. Нехай $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Згідно з означенням границі послідовності, для $\varepsilon = 1$ маємо

$$(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N)\{|x_n - a| < 1\},$$

тобто $(\forall n > N)\ \{a - 1 < x_n < a + 1\}$.

Приймемо $M \overset{def}{=} \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_N|, |a-1|, |a+1|\}$. Отже,

$$(\forall n \in \mathbb{N})\ \{|x_n| \le M\}.$$

Означення. Послідовність $\{x_n\}$ називають
1) обмеженою зверху, якщо $(\exists M \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N})$
$\{a_n \leq M\}$;
2) обмеженою знизу, якщо $(\exists M \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N})$
$\{a_n \geq M\}$;
3) обмеженою, якщо $(\exists M \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N})$
$\{|a_n| \leq M\}$.

Зауважимо таке: якщо послідовність є обмеженою зверху й обмеженою знизу, то вона обмежена, і навпаки, якщо послідовність обмежена, то вона обмежена і зверху, і знизу.

Теорема. Нехай $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$ і $b > a$. Тоді
$(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N)\ \{x_n < b\}$.

Теорема. Нехай $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$ і $c < a$. Тоді
$(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N)\ \{x_n > c\}$.

Теорема. Нехай $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$ і $(\forall n \in \mathbb{N})\ \{x_n \geq b\}$.
Тоді $a \geq b$.

Теорема. Нехай $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$ і $(\forall n \in \mathbb{N})\ \{x_n \leq c\}$. Тоді
$a \leq c$.

Наслідок. Нехай $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ і $(\forall n\in\mathbb{N})\ \{b\le x_n\le c\}$. Тоді $a\in[b,c]$.

Теорема. Нехай $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$ і $(\forall n\in\mathbb{N})$ $\{x_n \le y_n\}$.

Тоді $a\le b$.

Теорема. Нехай $(\forall n\in\mathbb{N})\ \{x_n\le z_n\le y_n\}$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$. Тоді $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$.

Доведення. Нехай $\varepsilon>0$. Згідно з означенням границі

$$(\exists N_1\in\mathbb{N})(\forall n>N_1)\ \{a-\varepsilon<x_n<a+\varepsilon\},$$

$$(\exists N_2\in\mathbb{N})(\forall n>N_2)\ \{a-\varepsilon-y_n<a+\varepsilon\}.$$

Тому при $n>N=\max\{N_1,N_2\}$

$$\{a-\varepsilon<x_n\le z_n\le y_n<a+\varepsilon\},$$

тобто

$$|z_n-a|<\varepsilon.$$

Теореми Ролля, Лагранжа та Коші

Теорема (теорема Ролля). Нехай функція $y=f(x)$:

1) неперервна на відрізку $[a,b]$;
2) диференційована на інтервалі (a,b);
3) $f(a)=f(b)$.

Тоді існує точка $\xi \in (a,b)$ така, що $f'(\xi)=0$

Доведення.

Оскільки функція $y=f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$, то з огляду на теорему Вейєрштрасса вона досягає на цьому відрізку найбільшого та найменшого значень. Нехай $M=\max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$,

$m = \min\limits_{x \in [a,b]} f(x)$. Тоді

$$(\forall x \in [a,b]) \{ m \le f(x) \le M \}.$$

Можливі два випадки: $m = M$ та $m < M$.
Розглянемо перший випадок. Тоді $(\forall x \in [a,b])$ $\{ f(x) = m = M = const \}$. Отже, за ε можна взяти будь-яку точку з інтервалу (a, b).
Розглянемо другий випадок. Оскільки $f(a) = f(b)$, то хоча б одне із значень m та M функція досягає у якійсь точці $\varepsilon \in (a, b)$. Отже, точка ε є точкою екстремуму функції $y = f(x)$. Тому з огляду на диференційовність функції $y = f(x)$ в точці ε та згідно з теоремою Ферма отримуємо, що $f'(\varepsilon) = 0$.

Теорема (теорема Лагранжа). Нехай функція $y = f(x)$:

1) неперервна на відрізку $[a, b]$;
2) диференційована на інтервалі (a, b).

Тоді існує точка $\varepsilon \in (a, b)$ така, що

$$f(b) - f(a) = f'(\varepsilon)(b-a). \qquad (6.1)$$

Доведення.
Розглянемо на відрізку $[a, b]$ функцію

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Зауважимо, що функція $y = F(x)$ задовільняє всі умови теореми 6.2.1. Справді, функція $y = F(x)$ є неперервною на $[a, b]$, диференційовна на (a, b), причому

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

і $F(a) = F(b) = 0$. Тому з огляду на теорему 6.2.1 знайдеться точка $\varepsilon \in (a, b)$, для якої

$$F'(\varepsilon) = f'(\varepsilon) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0,$$

звідки випливає співвідношення 6.1.

Теорема (теорема Коші). Нехай функції $f(x)$ та $g(x)$:

1) неперервні на відрізку $[a, b]$;
2) диференційовані на інтервалі (a, b);
3) $(\forall x \in (a, b)) \{g'(x) \neq 0\}$.

Тоді існує точка $\varepsilon \in (a, b)$ така, що

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\varepsilon)}{g'(\varepsilon)} \qquad (6.2)$$

Доведення.

Доведемо, що співвідношення (6.2) має сенс, тобто що $g(b) \neq g(a)$. Насправді, якби $g(a) = g(b)$, то для функції $g(x)$ виконувалися б умови теореми 6.2.1 (Ролля) і згідно з цією теоремою

існувала б точка $\eta \in (a,b)$ така, що $g'(\eta)=0$.
А це суперечило б умові теореми. Отже, $g(a) \neq g(b)$.

Розглянемо функцію
$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \cdot (g(x) - g(b)).$$

З огляду на умови теореми функція $F(x)$ задовольняє умови теореми Ролля, тому існує точка $\xi \in (a,b)$ така, що $F'(\xi)=0$, тобто
$$f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \cdot g'(\xi),$$

звідки випливає співвідношення (6.2).
Співвідношення (6.2) назив. формулою Коші, або узагальненою формулою скінченних приростів.

Scanned by TapScanner