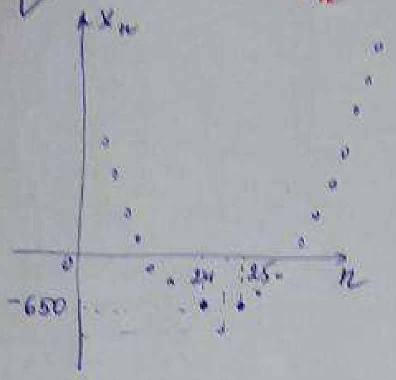
I. Визначити $N \in \mathbb{N}$ так, щоб були монотонними наступні послідовності

№1.196

$$\{\underbrace{n^2 - 49n - 50}_{x_n} : n \geq N\}$$

∇



Квадратична ф-я досягає найменшого значення в точці, що є вершиною параболи, а потім зростає

$$n_{вершини} = \frac{49}{2} = 24{,}5$$

Але оскільки $N \in \mathbb{N}$, то найменше натур. $N = 25$ і $\forall n > 25$ $\{x_n < x_{n+1}\}$ послідовність буде монотонно зростаючою. Δ

Зауваження Дійсно, в №1.196

$$x_{24} = 24^2 - 49 \cdot 24 - 50 = -650 = 25^2 - 49 \cdot 25 - 50 = x_{25},$$

а всі наступні числа утворюють монотонно зростаючу п-ть $-648 = x_{26} < x_{27} = -644$.

В-дь: починаючи з $N = 25$, послідовність є монотонно зростаючою.

№1.199 $\left\{\frac{n^2}{2^n}\right\}$; $n \geq N3$

∇ Нерівність $x_n > x_{n+1}$ з $N=3$ для монотонно спадної послідовності еквівалентна до нерівності

$$x_n - x_{n+1} > 0$$

Для $x_n = \frac{n^2}{2^n}$ розглянемо

$$x_n - x_{n+1} = \frac{n^2}{2^n} - \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} = \frac{2n^2 - n^2 - 2n - 1}{2\cdot 2^n} = \frac{n^2-2n-1}{2\cdot 2^n} > 0,$$

при $n \geq 3 = N$.

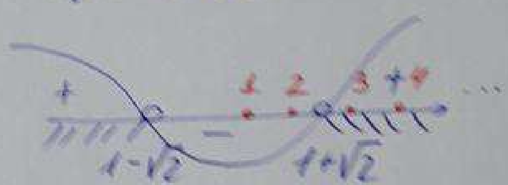
Пояснення:

$$\frac{n^2-2n-1}{2\cdot 2^n} > 0 \Leftrightarrow n^2-2n-1>0$$

$D = 4+4 = 8$

$n_1 = \frac{2+\sqrt{8}}{2} = \frac{2+2\sqrt{2}}{2} = \frac{2(1+\sqrt{2})}{2} = 1+\sqrt{2}$

$n_2 = 1-\sqrt{2}$



Оскільки $N \in \mathbb{N}$, то найменше натуральне число, що належить проміжку, $N=3$. Δ

В-дь: починаючи з $N=3$, п-ть є монотонно спадною

II. Використовуючи теореми про існування границі монотонної і обмеженої послідовності, довести збіжність наступних послідовностей

№1.210

$$x_n = \frac{10}{1}\cdot\frac{11}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{n+9}{2n-1}$$

∇ 1) покажемо, що (x_n) - монотонно спадна п-ть.

розгл.

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{\cancel{\frac{10}{1}}\cdot\cancel{\frac{11}{3}}\cdot\ldots\cdot\cancel{\frac{n+9}{2n-1}}}{\cancel{\frac{10}{1}}\cdot\cancel{\frac{11}{3}}\cdot\ldots\cdot\cancel{\frac{n+9}{2n-1}}\cdot\frac{n+1+9}{2(n+1)-1}} = \frac{1}{\frac{n+10}{2n+1}};$$

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{2n+1}{n+10} > 1 \iff 2n+1 > n+10$$

$$n > 9$$

Отже, $(\exists\, N=9)\ (\forall\, n>9)\ \left\{\frac{x_n}{x_{n+1}} > 1\right\}$ тобто починаючи з номера $N=9$ п-ть є монотонно спадна

2) $x_n > 0$ (як добуток дробів, що мають додатне значення) при всіх $n \in \mathbb{N}$.

тобто x_n - обмежена знизу

Отже, 1,2 $\Rightarrow$ п-ть (x_n) має скінченну границю тобто (x_n) - збіжна. Δ

№1.200

$$\left\{ \underbrace{\frac{n!}{n^n}}_{=x_n} : n \geq N \right\}$$

∇ У випадку числових послідовностей з додатніми членами в Озн.3 для монотонно спадної послідовності нерівності $x_n > x_{n+1}$ еквівалентна до нерівності $\frac{x_n}{x_{n+1}} > 1$.

Для $x_n = \frac{n!}{n^n}$ розглянемо

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{n!}{n^n} : \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} = \frac{\cancel{1\cdot2\cdot3\cdots n}\cdot(n+1)^n\cdot\cancel{(n+1)}}{n^n\cdot\cancel{1\cdot2\cdot3\cdots n}\cdot\cancel{(n+1)}} =$$

$$= \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(\frac{n}{n} + \frac{1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > 1^n = 1$$

для всіх натуральних n.

Отже, $(\exists N=1)(\forall n>1)\left\{\frac{x_n}{x_{n+1}} > 1\right\}$

тобто

починаючи з $N=1$, послідовність є монотонно спадна Δ.

Тема: Монотонні послідовності. Критерій Коші

Теорія

Озн.1 Послідовність (x_n) наз. (монотонно) зростаючою $\overset{def}{=}$ $(\exists N)(\forall n > N)\{x_n < x_{n+1}\}$

Озн.2 П-ть (x_n) наз. неспадною $\overset{def}{=}$ $(\exists N)(\forall n > N)\{x_n \le x_{n+1}\}$

Озн.3 П-ть (x_n) наз. спадною $\overset{def}{=}$ $(\exists N)(\forall n > N)\{x_n > x_{n+1}\}$

Озн.4 П-ть (x_n) наз. незростаючою $\overset{def}{=}$ $(\exists N)(\forall n > N)\{x_n \ge x_{n+1}\}$

Теореми (про існування границі монотонної та обмеженої послідовності)

1) Якщо п-ть (x_n) – неспадна і обмежена зверху, то (x_n) має скінченну границю.

Причому $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sup\limits_n x_n$

2) Якщо п-ть (x_n) – незростаюча і обмежена знизу, то (x_n) має скінченну границю.

Причому $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \inf\limits_n x_n$.

Критерій Коші (збіжності числової послідовності)

П-ть (x_n) – зб. $\iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N)(\forall p \in \mathbb{N})$

$$\{|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon\}$$

Зауваження. В озн. 1,2,3,4 слово монотонно часто пропускають.

Ауд. 1.196, 1.199, 1.200, 1.210, 1.212, 1.214, 1.216, 1.218

Дом. 1.197, 1.198, 1.201, 1.203, 1.211, 1.215, 1.217

III. Використовуючи критерій Коші, довести збіжність послідовностей

№1214 $x_n = a_0 + a_1 q + \ldots + a_n q^n$, де $|a_k| < M$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$
$|q| < 1$

∇ Покажемо, що $(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})\ (\forall n > N)\ \forall p \in \mathbb{N}$

$$\{|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon\}$$

тобто

$$|x_{n+p} - x_n| = |a_0 + a_1 q + \ldots + a_n q^n + a_{n+1} q^{n+1} + a_{n+2} q^{n+2} + \ldots + a_{n+p} q^{n+p} -$$

$$- (a_0 + a_1 q + a_2 q^2 + \ldots + a_n q^n)| =$$

$$= |a_{n+1} q^{n+1} + a_{n+2} q^{n+2} + \ldots + a_{n+p} q^{n+p}| \leq$$

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

$$\leq |a_{n+1}| \cdot |q^{n+1}| + |a_{n+2}||q^{n+2}| + \ldots + |a_{n+p}||q^{n+p}| <$$

$$< M \cdot |q^n||q| + M|q^n||q^2| + \ldots + M|q^n||q^p| =$$

$$= M|q^n| \left(\underbrace{|q| + |q|^2 + \ldots + |q|^p}_{\text{сума } p \text{ перших членів геом. пр.}} \right) <$$

$$< M|q|^n \left(\underbrace{|q| + |q|^2 + \ldots + |q|^p + \ldots}_{\text{сума всієї нескінченно спадної геометричної прогресії}} \right) =$$

$$= M|q|^n \frac{|q|}{1 - |q|} = |q|^n \cdot M \cdot L < \varepsilon \iff$$

$\frac{|q|}{1-|q|} \overset{def}{=} L$ — додатне стале число, позначимо через L

$$|q|^n < \frac{\varepsilon}{ML}$$

$$\log_{|q|} |q|^n > \log_{|q|} \frac{\varepsilon}{ML}$$

$$n > \log_{|q|} \frac{\varepsilon}{ML}$$

$$\exists N = \left[\log_{|q|} \frac{\varepsilon}{ML} \right] \quad \Delta$$

N 1.216

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos k!}{k(k+1)} = \frac{\cos 1!}{1\cdot 2} + \frac{\cos 2!}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{\cos n!}{n(n+1)}$$

∇ за критерієм Коші збіжності числової послідовності

$$(x_n)\text{-зб} \Longleftrightarrow (\forall \varepsilon>0)\ (\exists N \in \mathbb{N})\ (\forall n > N)\ (\forall p \in \mathbb{N})$$
$$\{|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon\}$$

тобто

$$|x_{n+p} - x_n| = \Big|\frac{\cos 1!}{1\cdot 2} + \frac{\cos 2!}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{\cos n!}{n(n+1)} + \frac{\cos((n+1)!)}{(n+1)(n+2)} + \ldots + \frac{\cos((n+p)!)}{(n+p)(n+p+1)}$$
$$- \left(\frac{\cos 1!}{1\cdot 2} + \frac{\cos 2!}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{\cos n!}{n(n+1)}\right)\Big| =$$

$$= \left|\frac{\cos((n+1)!)}{(n+1)(n+2)} + \ldots + \frac{\cos((n+p)!)}{(n+p)(n+p+1)}\right| \le$$

$$\le \frac{|\cos((n+1)!)|}{|(n+1)(n+2)|} + \ldots + \frac{|\cos((n+p)!)|}{|n+p|\cdot|n+p+1|} \le \{|\cos\alpha| \le 1\}$$

$$\le \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \ldots + \frac{1}{(n+p)(n+p+1)} =$$

$$= \frac{1}{n+1} - \cancel{\frac{1}{n+2}} + \cancel{\frac{1}{n+2}} - \cancel{\frac{1}{n+3}} + \ldots + \cancel{\frac{1}{n+p}} - \frac{1}{n+p+1} =$$

$$= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p+1} < \frac{1}{n+1} < \varepsilon \Longleftrightarrow$$

$$n+1 > \frac{1}{\varepsilon}$$
$$n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$$
$$\exists N = \left[\frac{1}{\varepsilon} - 1\right] + 1.\ \Delta$$

№1.212

$$x_n = \left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$$

∇

$\boxed{1}$ покажемо, що (x_n) – монотонно зростаюча п-ть.

Для цього розгл.

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\cancel{\left(1+\frac{1}{2}\right)}\cancel{\left(1+\frac{1}{4}\right)}\ldots\cancel{\left(1+\frac{1}{2^n}\right)}\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right)}{\cancel{\left(1+\frac{1}{2}\right)}\cancel{\left(1+\frac{1}{4}\right)}\ldots\cancel{\left(1+\frac{1}{2^n}\right)}} = 1+\frac{1}{2^{n+1}} > 1,$$

при всіх $n \in N$.

оскільки $1+\frac{1}{2^{n+1}} > 1$, бо

$$1+\frac{1}{2^{n+1}} - 1 > 0$$

$$\frac{1}{2^{n+1}} > 0, \text{ бо}$$

$$2^{n+1} > 0.$$

$\boxed{2}$ покажемо, що (x_n) – обмежена згори. Це випливає з нерівностей

$$\ln x_n = \ln\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{2^n}\right) = \left\{\ln(M\cdot N) = \ln M + \ln N, \text{ бо } M>0, N>0\right\}$$

$$= \ln\left(1+\frac{1}{2}\right) + \ln\left(1+\frac{1}{4}\right) + \ldots + \ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right) < \left\{\ln(1+x) < x\right\}$$

$$< \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n} <$$

{сума n перших членів геометричної прогресії є менша, ніж сума всієї прогресії, Оскільки всі члени цієї прогресії додатні}

$$< \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1, \text{ бо } S = \frac{b_1}{1-q}$$

Отже, $\ln x_n < 1$

$$e^{\ln x_n} < e^1$$

$$x_n < e.$$

$\boxed{1}, \boxed{2} \Rightarrow$ п-ть (x_n) – зб. Δ

Тема: Верхня та нижня границі послідовності

Теорія

Озн.1 Точка $a \in \overline{\mathbb{R}} \overset{def}{=} \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$ наз. частковою границею послідовності (x_n), якщо існує підпослідовність $(x_{n_k}) \subset (x_n)$ така, що

$$x_{n_k} \to a \quad при \quad k \to \infty$$

Озн.2 Найбільша в $\overline{\mathbb{R}}$ часткова границя послідовності (x_n) наз. верхньою границею (x_n).

Позначаємо $\overline{\lim\limits_{n \to \infty}} x_n$

Озн.3 Найменша в $\overline{\mathbb{R}}$ часткова границя послідовності (x_n) наз. нижньою границею (x_n).

Позначаємо $\underline{\lim\limits_{n \to \infty}} x_n$.

Озн. 4 П-ть (x_n) є збіжна (тобто $\exists$ скінченна $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$) $\Longleftrightarrow$

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} x_n = \underline{\lim_{n \to \infty}} x_n = a$$

Ауд. 1.225, 1.227, 1.239, 1.237, 1.242

Дом. 1.224, 1.238, 1.240, 1.252, 1.251

I. Визначити множину A всіх часткових границь наступних послідовностей

№1.225

$$\{\underbrace{(-1)^n}_{=x_n} : n \geq 1\}$$

∇ Перепишемо члени даної послідовності

$$\underset{x_1}{-1},\ \underset{x_2}{1},\ \underset{x_3}{-1},\ \underset{x_4}{1},\ \underset{x_5}{-1},\ \underset{x_6}{1},\ \ldots$$

Виділимо підпослідовності:

1) з непарними номерами

$x_{2k-1} = -1$

$$\lim_{k\to\infty} x_{2k-1} = \lim_{k\to\infty} (-1) = -1$$

2) з парними номерами

$x_{2k} = 1$

$$\lim_{k\to\infty} x_{2k} = \lim_{k\to\infty} 1 = 1$$

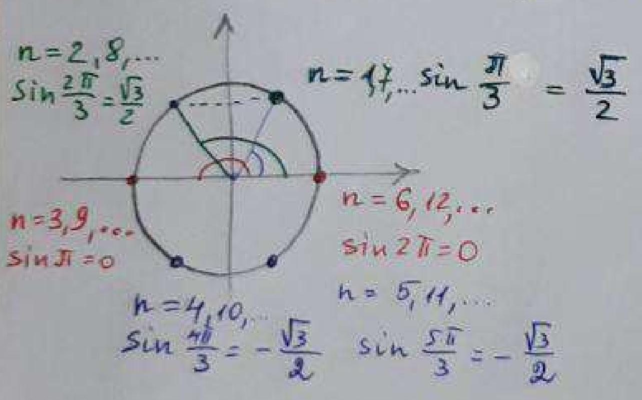
множина часткових границь

$A = \{-1; 1\}$

Δ

№1.227

$$\left\{ \frac{1}{n} + \sin\frac{\pi n}{3} : n \geq 1 \right\}$$



∇ Залежно від значень $\sin\frac{\pi n}{3}$ виділимо підпослідовності:

1) $\lim\limits_{k\to\infty} x_{3k} = \lim\limits_{k\to\infty}\left(\frac{1}{3k} + 0\right) = 0$

2) $\lim\limits_{k\to\infty} x_{6k-5} = \lim\limits_{k\to\infty}\left(\frac{1}{6k-5} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

3) $\lim\limits_{k\to\infty} x_{6k-4} = \lim\limits_{k\to\infty}\left(\frac{1}{6k-4} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

4) $\lim\limits_{k\to\infty} x_{6k-2} = \lim\limits_{k\to\infty}\left(\frac{1}{6k-2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

5) $\lim\limits_{k\to\infty} x_{6k-1} = \lim\limits_{k\to\infty}\left(\frac{1}{6k-1} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Δ

Множина часткових границь $A = \left\{0; \frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$

II. Для послідовності (x_n) $(n=1,2,\dots)$ знайти $\inf\limits_n x_n$, $\sup\limits_n x_n$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$.

N1.237

$$x_n = 1 - \frac{1}{n}$$

∇ 1) (x_n) - збіжна послідовність

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right) = 1 \iff \underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = 1$$

2) перепишемо члени послідовності

$$\underset{x_1}{0},\ \underset{x_2}{\frac{1}{2}},\ \underset{x_3}{\frac{2}{3}},\ \underset{x_4}{\frac{3}{4}},\ \underset{x_5}{\frac{4}{5}},\ \dots$$

$\exists \min\limits_n x_n = 0 = x_1 \Rightarrow \inf\limits_n x_n = 0$

$\nexists \max\limits_n x_n$, але $\sup\limits_n x_n = 1$. Δ

Відповідь: $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = 1$; $\inf\limits_n x_n = 0 = x_1$, $\sup\limits_n x_n = 1$.

N1.239

$$x_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1+(-1)^n}{2}$$

∇ Перепишемо члени послідовності

$$\underset{x_1}{-1},\ \underset{x_2}{1\tfrac{1}{2}},\ \underset{x_3}{-\tfrac{1}{3}},\ \underset{x_4}{1\tfrac{1}{4}},\ \underset{x_5}{-\tfrac{1}{5}},\ \underset{x_6}{1\tfrac{1}{6}},\ \dots$$

Виділимо підпослідовності:

1) $\lim\limits_{k\to\infty} x_{2k-1} = \lim\limits_{k\to\infty}\left(-\frac{1}{2k-1}\right) = 0$;

2) $\lim\limits_{k\to\infty} x_{2k} = \lim\limits_{k\to\infty}\left(\frac{1}{2k}+1\right) = 1$.

Множина часткових границь $\{0;1\}$

$\left.\begin{array}{l}\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = 1\\ \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \nexists \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ (н-ть (x_n) - розбіжна)

$\exists \max\limits_n x_n = x_2 = 1\frac{1}{2} = \sup\limits_n x_n$; $\exists \min\limits_n x_n = x_1 = -1 = \inf\limits_n x_n$.

Δ

IV. Використовуючи критерій Коші, довести розбіжність послідовності

N 1218 $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$

∇ за критерієм Коші

(x_n) - розб. $\Leftrightarrow (\exists \varepsilon > 0)(\forall N \in \mathbb{N})(\exists n > N)(\exists p \in \mathbb{N})$

$\{|x_{n+p} - x_n| \geq \varepsilon\}$

існує таке $\varepsilon = \frac{1}{2}$, що

тобто для $\forall N \in \mathbb{N}$ розгл. $n = N+1$, $p = n$

$$|x_{n+p} - x_n| = \Big| 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+p} -$$

$$- \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right)\Big| =$$

$$= \left|\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+p}\right| = \{\text{при } p = n\}$$

$$= \left|\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+n}\right| = \left\{\begin{array}{l}\text{ці всі дроби} \\ \text{додатні,} \\ \text{тому} \\ \text{модуль} \\ \text{розкриємо!}\end{array}\right\}$$

$$= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} \geq$$

Для $a > 0, b > 0$: $a \leq b \Leftrightarrow \frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$

$$\left.\begin{array}{l} n+1 \leq 2n \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} \geq \frac{1}{2n} \\ n+2 \leq 2n \Leftrightarrow \frac{1}{n+2} \geq \frac{1}{2n} \\ n+3 \leq 2n \Leftrightarrow \frac{1}{n+3} \geq \frac{1}{2n} \end{array}\right\} \text{ для всіх } n \in \mathbb{N}$$

$$\geq \overbrace{\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{2n}}^{n \text{ доданків}} = n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} = \varepsilon$$

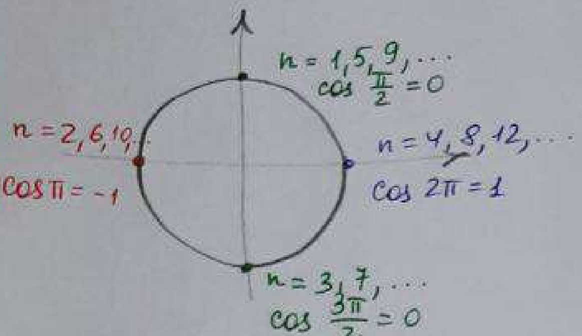
Отже, $|x_{n+p} - x_n| \geq \varepsilon$.

Доведено. Δ

№1.242*

$$x_n = \frac{n-1}{n+1}\cos\frac{\pi n}{2}$$

∇



Залежно від значення $\cos\frac{\pi n}{2}$ виділимо підпослідовності:

1) $\lim\limits_{k\to\infty} x_{4k} = \lim\limits_{k\to\infty}\left(\frac{4k-1}{4k+1}\cdot 1\right) = 1$

2) $\lim\limits_{k\to\infty} x_{4k-3} = \lim\limits_{k\to\infty}\left(\frac{4k-3-1}{4k-3+1}\cdot 0\right) = 0$

3) $\lim\limits_{k\to\infty} x_{4k-1} = \lim\limits_{k\to\infty}\left(\frac{4k-1-1}{4k-1+1}\cdot 0\right) = 0$

4) $\lim\limits_{k\to\infty} x_{4k-2} = \lim\limits_{k\to\infty}\left(\frac{4k-2-1}{4k-2+1}\cdot(-1)\right) = -1$

Множина часткових границь $\{1; 0; -1\}$

Відповідь:

$$\left.\begin{aligned}&\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = 1;\\ &\underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = -1,\end{aligned}\right\} \Rightarrow \nexists \lim_{n\to\infty} x_n$$

$\sup\limits_n x_n = 1.$

$\inf\limits_n x_n = -1.$

I. Визначити множину A всіх часткових границь наступних послідовностей

№1.225

$$\{\underbrace{(-1)^n}_{x_n} : n \geq 1\}$$

∇ Перепишемо члени даної послідовності

$$\underset{x_1}{-1},\ \underset{x_2}{1},\ \underset{x_3}{-1},\ \underset{x_4}{1},\ \underset{x_5}{-1},\ \underset{x_6}{1},\ \dots$$

Виділимо підпослідовності:

1) з непарними номерами

$x_{2k-1} = -1$

$$\lim_{k\to\infty} x_{2k-1} = \lim_{k\to\infty} (-1) = -1$$

2) з парними номерами

$x_{2k} = 1$

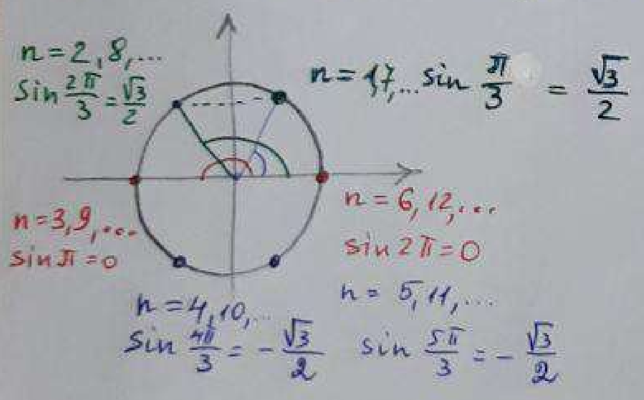
$$\lim_{k\to\infty} x_{2k} = \lim_{k\to\infty} 1 = 1$$

множина часткових границь $A = \{-1; 1\}$

Δ

№1.227

$$\left\{ \frac{1}{n} + \sin\frac{\pi n}{3} : n \geq 1 \right\}$$



∇ Залежно від значень $\sin\frac{\pi n}{3}$ виділимо підпослідовності:

1) $\lim_{k\to\infty} x_{3k} = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{3k} + 0\right) = 0$

2) $\lim_{k\to\infty} x_{6k-5} = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{6k-5} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

3) $\lim_{k\to\infty} x_{6k-4} = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{6k-4} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

4) $\lim_{k\to\infty} x_{6k-2} = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{6k-2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

5) $\lim_{k\to\infty} x_{6k-1} = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{6k-1} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Множина часткових границь $A = \left\{0; \frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$

Δ