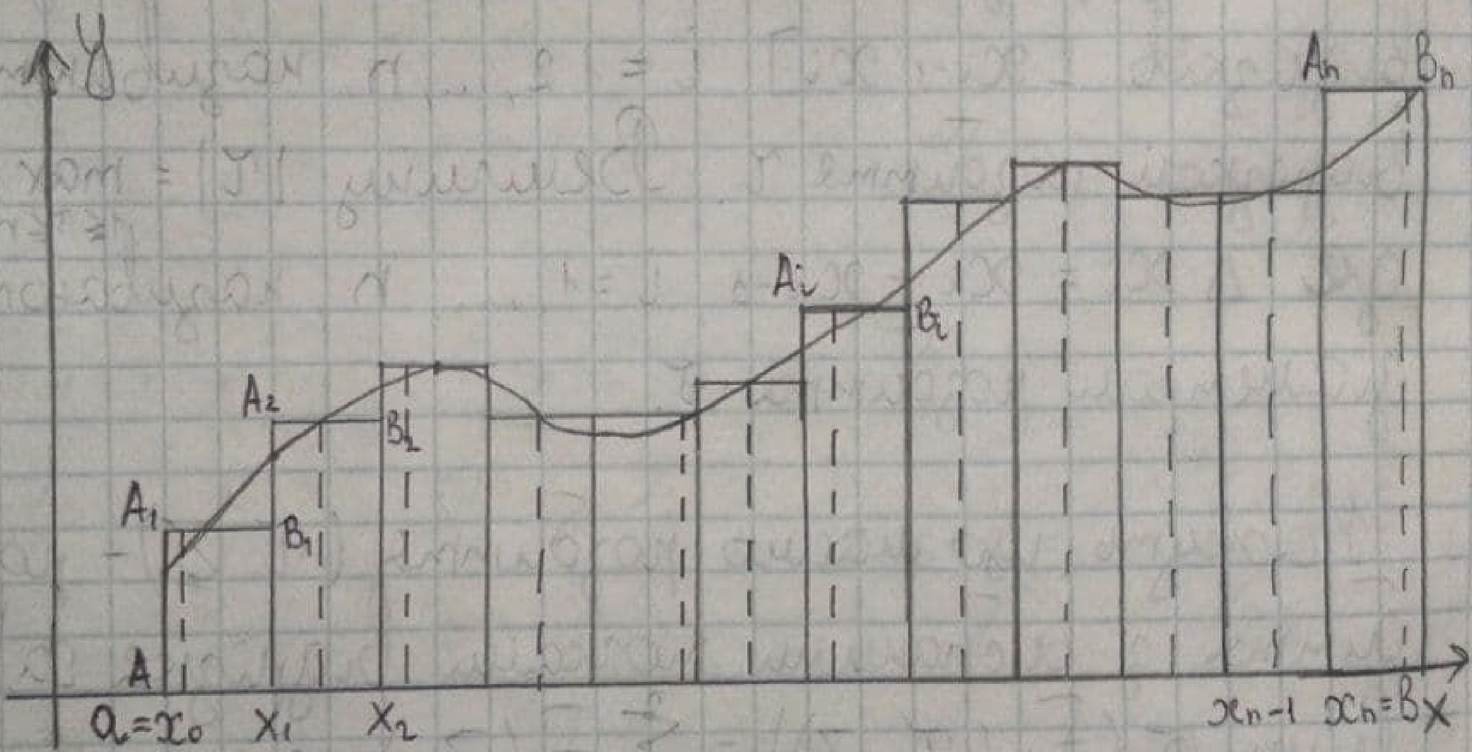
Означення визначеного інтеграла

Розбиттям τ відрізка $[a, b]$ $(a<b)$ називають будь-яку скінченну систему його точок x_i, $i = 0, 1, \ldots, n$, таку, що $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. У цьому разі пишемо $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{n}$. Кожен з відрізків $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$, називають відрізком розбиття τ. Величину $|\tau| = \max\limits_{1 \le i \le n} \Delta x_i$, де $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, \ldots, n$, називають діаметром розбиття τ.

Кажуть, що маємо розбиття (τ, ξ) – розбиття з вибраними точками відрізка $[a, b]$. Суму $\sigma(f; (\tau, \xi)) = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i$

називають інтегральною сумою (або сумою Рімана) функції f, що відповідає розбиттю (τ, ξ) з вибраними точками відрізку $[a, b]$.

Геометрично у випадку, коли функція f невід'ємна, кожен доданок інтегральної суми $\sigma(f_i;(\tau;\xi)) = \sum_{i=1}^{n}(f(\xi_i))\cdot\Delta x_i$ дорівнює площі прямокутника з основою довжини Δx_i і висотою $f(\xi_i)$, а вся сума - площі східчастої фігури $AA_1B_1A_2B_2\ldots A_iB_i\ldots A_nB_n$, утвореної об'єднанням зазначених прямокутників



Число $I \in \mathbb{R}$ називають границею інтегральної суми $\sigma(f;(\tau,\xi)) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ при $|\tau|\to 0$ і пишуть $I = \lim_{|\tau|\to 0}\sigma(f;(\tau,\xi))$, якщо

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall \tau : |\tau| < \delta)(\forall \xi)\{|\sigma(f;(\tau,\xi)) - I| < \varepsilon\}$$

Функцію $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ називають інтегровною за Ріманом на $[a, b]$ і пишуть $f \in R_{[a,b]}$, якщо для неї існує границя $I = \lim\limits_{|\tau| \to 0} \sigma(f; (\tau; \xi))$. Число I в цьому разі називають інтегралом Рімана (або визначеним інтегралом) функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$ і позначають символом $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, числа a, b – нижньою

та верхньою межами інтегрування, відповідно, f – підінтегральною функцією, $f(x)\,dx$ – підінтегральним виразом, а x - змінною інтегрування

Отже, $\int\limits_a^b f(x)\,dx \overset{def}{=} \lim\limits_{|\tau| \to 0} \sigma(f; (\tau; \xi))$.

11.3 Критерій Коші. Абсолютна і умовна збіжність невластивого інтеграла

$\boxed{\text{Твердження.}}$ (критерій Коші збіжності невластивого інтеграла)

Функція $f \in R[a,w)$ тоді і лише тоді, коли виконується

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists B \in [a,w))(\forall b_1, b_2 \in [a,w): b_1 > B \wedge b_2 > B)$$
$$\left\{\left|\int_{b_1}^{b_2} f(x)dx\right| < \varepsilon\right\}$$

$\boxed{\text{Дов}}$ Приймемо $F(b) = \int_a^b f(x)dx,\ b \in [a,w)$.

Звідси $f \in R[a,w)$ тоді і лише тоді, коли існує скінченна границя $\lim\limits_{b \to w} F(b)$, тобто тоді, коли

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists B \in [a,w))(\forall b_1, b_2 \in [a,w): b_1 > B \wedge b_2 > B)$$
$$\{|F(B_2) - F(B_1)| < \varepsilon\}.$$

Однак $F(b_2) - F(b_1) = \int_a^{b_2} F(x)dx - \int_a^{b_1} f(x)dx = \int_{b_1}^{b_2} f(x)dx$, тому умови рівносильні

Озн Кажуть, що інтеграл $\int_a^{\omega} f(x)\,dx$ збігається абсолютно, якщо збігається інтеграл $\int_a^{\omega} |f(x)|\,dx$.

Теор (критерій збіжності). Якщо $f(x) \geq 0$ на $[a, \omega)$, то $f \in R[a,\omega)$ тоді і лише тоді, коли ф-ція (11.13) обмежена на $[a, \omega)$

Наслідок ($\bar{I}$ - теорема порівняння). Якщо $0 \leq f(x) \leq g(x)$ на $[a,$ і $g \in R[a,\omega)$, то $f \in R[a,\omega)$ і виконується нерівність

$$\int_a^{\omega} f(x)\,dx \leq \int_a^{\omega} g(x)\,dx$$

Дов. Для будь-якого $b \in [a, \omega)$

$$F(b) \overset{def}{=} \int_a^{b} f(x)\,dx \leq \int_a^{b} g(x)\,dx \overset{def}{=} G(b)$$

Оскільки $\int_a^{\omega} g(x)\,dx < +\infty$, то, згідно з т. 11.3.1, ф-ція $G(b)$ обмежена на $[a, \omega)$. Звідси і з (11.16) випливає, що і $F(b)$ обмежена на $[a, \omega)$, тому, згідно з теор. 11.3.1 $\int_a^{\omega} f(x)\,dx < +\infty$. Переходячи в (11.16) до границі при $b \to$

$\boxed{\text{Наслідок}}$ (II - теор. порівняння)

Нехай $f, g : [a, \omega) \to \mathbb{R}$ - не від'ємні ф-ції та існує

границя $\lim\limits_{x \to \omega} \frac{f(x)}{g(x)} \overset{def}{=} k$. Тоді

а) якщо $0 < k < +\infty$, то інтеграли $\int\limits_a^\omega f(x)dx$ та $\int\limits_a^\omega g(x)dx$

збігаються або розбігаються одночасно;

б) якщо $k = 0$, $\int\limits_a^\omega g(x)dx < +\infty$, то $\int\limits_a^\omega f(x)dx < +\infty$;

в) якщо $k = +\infty$, $\int\limits_a^\omega f(x)dx < +\infty$, то $\int\limits_a^\omega g(x)dx < +\infty$.

$\boxed{\text{Дов}}$ Обмежимося доведенням твер. а. З умови Т. випливає існування такого $c \in [a, \omega)$, що для будь-якого $x \in (c, \omega)$ виконується співвідношення

$$\frac{k}{2} < \frac{f(x)}{g(x)} < 2k$$, отже для всіх $x \in (c, \omega)$

маємо $\frac{k}{2} g(x) < f(x) < 2kg(x)$

$$\ldots \Rightarrow \int\limits_c^\omega g(x)dx < +\infty \Rightarrow \int\limits_a^\omega g(x)dx < +\infty$$

12.1 Поняття ряду та його основні властивості.

$\boxed{\text{Озн}}$ Нехай $\{a_n\}$ - числова послідовність. Вираз

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

називають числовим рядом, а числа a_n та $S_n \overset{def}{=} a_1 + \ldots + a_n$ - відповідно, n-м членом та n-ю частковою сумою цього ряду. Якщо існує скінченна границя $\lim\limits_{n\to\infty} S_n \overset{def}{\equiv} S$.

то ряд (12.1) називають збіжним, а число S - його сумою і пишуть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = S$.

Якщо ж ця границя нескінченна або не існує, то ряд розбіжний

$\boxed{\text{Озн}}$ Ряд $\sum\limits_{n=m+1}^{\infty} a_n = a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots$, а також його суму, якщо він збігається, називають m-м залишком ряду