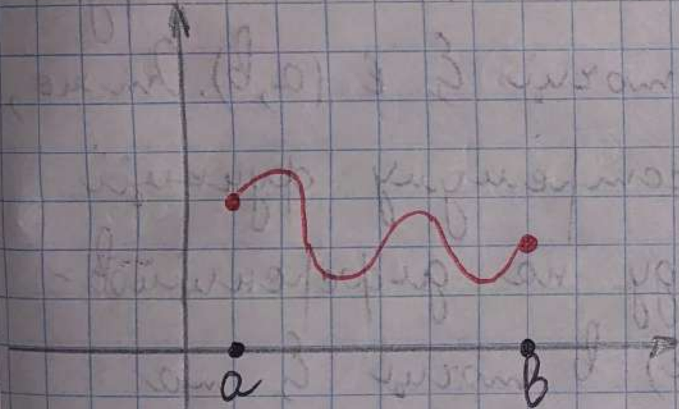
Теорема Ролля, Лагранжа та Коші

Теорема Ролля:

Нехай функція $y = f(x)$:

1) неперервна на відрізку $[a; b]$
2) диференційовна на інтервалі (a, b)
3) $f(a) = f(b)$

Тоді існує точка $\xi \in (a, b)$ така, що $f'(\xi) = 0$



Доведення: Оскільки функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$, то з огляду на теорему Вейєрштрасса вона досягає на цьому відрізку найбільшого та найменшого значень. Нехай $M = \max\limits_{x \in [a,b]} f(x)$, $m = \min\limits_{x \in [a,b]} f(x)$. Тоді $(\forall x \in [a, b])$

$$\{m \leq f(x) \leq M\}$$

Можливі 2 випадки:

$m = M$ та $m < M$.

Розглянемо перший випадок. Тоді $(\forall x \in [a,b])$ $\{f(x) = m = M = const\}$. Звідси $(\forall x \in [a,b])$ $\{f'(x) = 0\}$. Отже, за ξ можна взяти будь-яку точку з інтервалу (a,b).

Розглянемо другий випадок. Оскільки $f(a) = f(b)$, то хоча б одне зі значень m та M функція досягає у якійсь точці $\xi \in (a,b)$. Отже, точка ξ є точкою екстремуму функції $y = f(x)$. Тому з огляду на диференційовність функції $y = f(x)$ в точці ξ та згідно з теоремою Ферма отримуємо, що $f'(\xi) = 0$.

Теорема Лагранжа:

Нехай функція $y=f(x)$:

1) неперервна на відрізку $[a,b]$

2) диференційовна на інтервалі (a,b)

3) $f(b)=f(a)$

Тоді існує точка $\xi \in (a,b)$ така, що

$$\underbrace{f(b)-f(a)}_{=0} = f'(\xi)\underbrace{(b-a)}_{=0} \qquad f'(\xi)=0$$

Доведення:

Розглянемо на відрізку $[a,b]$ функцію

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

Зауважимо, що функція $y=F(x)$ задовольняє всі умови теореми Ролля. Справді, функція $y=F(x)$ є неперервною на $[a,b]$, диференційовною на (a,b), причому

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

і $F(a)=F(b)=0$. Тому з огляду на теорему Ролля знайдеться точка $\xi \in (a,b)$, для якої

$$F'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0,$$

звідки випливає співвідношення, яке називають формулою Лагранжа.

Теорема Коші:

Нехай функція $f(x)$ та $g(x)$:

1) неперервна на відрізку $[a, b]$

2) диференційовні на інтервалі (a, b)

3) $(\forall x \in (a, b)) \{ g'(x) \neq 0 \}$

Тоді існує точка $\xi \in (a, b)$ така, що

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Доведення:

Доведемо, що співвідношення 6.2 має сенс, тобто що $g(b) \neq g(a)$. Насправді, якби $g(a) = g(b)$, то для функції $g(x)$ виконувалися б умови теореми 6.2.1 (Ролля) і згідно з цією теоремою існувала б точка $\eta \in (a, b)$ така, що $g'(\eta) = 0$. А це суперечило б умові теореми. Отже, $g(a) \neq g(b)$.

(4) Розглянемо функцію:

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot (g(x) - g(a))$$

$F(a) = 0$

$F(b) = 0$

З огляду на умови теореми функція $F(x)$ задовольняє умови теореми Ролля, тому існує точка $\xi \in (a, b)$ така, що $F'(\xi) = 0$, тобто $f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g'(\xi)$.

Співвідношення називають формулою Коші, або узагальненою формулою скінченних приростів.

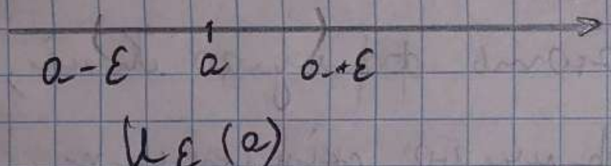
(1) Число $a \in \mathbb{R}$ називають границею числової послідовності $\{x_n\}$, якщо

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N)\ \{|x_n - a| < \varepsilon\}$$

$$-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon$$

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$$

$$a = \lim_{n \to \infty} x_n$$



або $x_n \to a,\ n \to \infty,$

і кажуть, що послідовність $\{x_n\}$ збігається до a або має границю a.