Екзаменаційна робота

з мат аналізу

студента групи ПМО-11.

Кравчука Назара.

В-5

2. $\int \frac{2x+1}{(x+1)(x-3)(x+5)}\,dx = \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x-3)} + \frac{C}{(x+5)} =$

$$A = \frac{2x+1}{\cancel{(x+1)}(x-3)(x+5)}\Bigg|_{x=-1} = \frac{-1}{-16} = +\frac{1}{16}$$

$$B = \frac{2x+1}{(x+1)\cancel{(x-3)}(x+5)}\Bigg|_{x=3} = \frac{7}{32} = \frac{7}{32}$$

$$C = \frac{2x+1}{(x+1)(x-3)\cancel{(x+5)}}\Bigg|_{x=-5} = \frac{-9}{-4\cdot -8} = -\frac{9}{32}$$

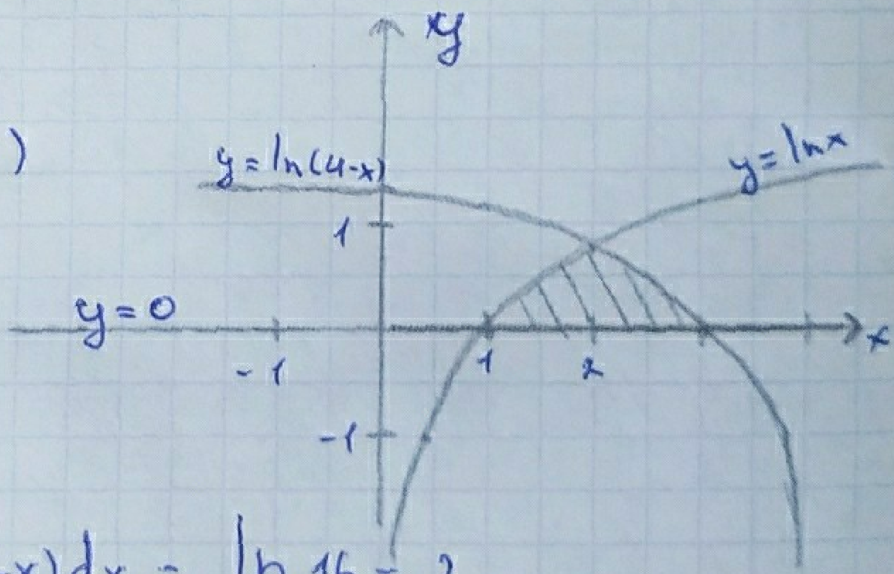
$$= \int \frac{1}{16(x+1)} + \frac{7}{32(x-3)} - \frac{9}{32(x+5)} =$$

$$= \frac{1}{16}\cdot \ln|x+1| + \frac{7}{32}\ln|x-3| - \frac{9}{32}\ln|x+5|$$

3. a) $y = \ln x$

$y = \ln(4-x)$

$y = 0$



$$\int_1^2 \ln x\,dx + \int_2^3 \ln(4-x)\,dx = \ln 16 - 2.$$

9. $u = 2x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 8yx - 2z + 6$

4. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{2x^2 + x^7}} dx = \underbrace{\int_0^1 \frac{1 \cdot dx}{\sqrt[3]{2x^2 + x^7}}}_{I_1} + \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{1 \cdot dx}{\sqrt[3]{2x^2 + x^7}}}_{I_2}$

$I_1 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{2x^2 + x^7}} dx \underset{x \to 0}{\sim} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2 \underbrace{(2 + x^5)}_{\to 0}}} \underset{x \to 0}{\sim} \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}$

$\frac{2}{3} < 1$

I_1 – збіжний при $x \to 0$

$I_2: \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{2x^2 + x^7}} dx \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt[3]{x^7 \underbrace{\left(\frac{1}{2x^2} + 1\right)}_{\to 0}}} \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt[3]{x^7}} = \frac{1}{x^{\frac{7}{3}}}$

$\frac{7}{3} > 1$

I_2 – збіжний при $x \to +\infty$

Відповідь: збіжний як сума збіжних інтегралів.

9. $u = 2x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 8yx - 2z + 6$

1. ~~$\frac{\partial u}{\partial x} = u'x = \frac{8x^3}{8} = \frac{2x^3}{3} + 4 - 8$~~

1. $\frac{\partial u}{\partial x} = u'x = 4x + 4 - 8y = 0$ $\quad 4x + 4 - 32x = 0$

$\frac{\partial u}{\partial y} = u'y = 2y - 8x = 0$ $\quad = 2y = 8x \Rightarrow y = 4x$

$\frac{\partial u}{\partial z} = u'z = 2z - 2 = 0$ $\quad 2z = 2 \Rightarrow z = 1$

$-28x = -4$

$x = \frac{1}{7}$

$x = \frac{1}{7}$

$y = \frac{4}{7}$ $\quad M(\frac{1}{7}; \frac{4}{7}; 1)$ - стаціон точка

$z = 1$

2. $u''x^2 = 4$ $\quad u''xy = 8$

$u''y^2 = 2$ $\quad u''xz = 0$

$u''z^2 = 2$ $\quad u''yz = 0$

$A = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 0 \\ 8 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$A_1 = 4 > 0$

$A_2 = 16 > 0$

$A_3 = \begin{vmatrix} 4 & 8 & 0 \\ 8 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$

8. $f(x,y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right) = \lim_{x\to 0} x = 0$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right) = \lim_{y\to 0} y = 0$$

$(x_n; y_n) = \left(\frac{1}{n}; \frac{1}{n}\right) \to (0;0)$

$(x'_n, y'_n) = \left(\frac{1}{n}; 0\right) \to (0;0)$

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n\, y_n) = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{n}\right)^3+\left(\frac{1}{n}\right)^3}{\left(\frac{1}{n}\right)^2+\left(\frac{1}{n}\right)^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{0}{0} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} f(x'_n; y'_n) = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{n}\right)^3+0}{\left(\frac{1}{n}\right)^2+0} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0$$

Отже $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y)$ – існує.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 6^n\left(\frac{n}{n+2}\right)^{n^2}$

$$q = \overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\left|6^n\left(\frac{n}{n+2}\right)^{n^2}\right|} = \lim_{n\to\infty} 6\cdot\left(\frac{n}{n+2}\right)^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty} 6\left(1+\frac{(-2)}{n+2}\right)^{n\cdot\frac{(-2)}{n+2}\cdot\frac{n+2}{(-2)}} = \lim_{n\to\infty} 6\cdot e^{-2\cdot\frac{n}{n+2}} = 6\cdot e^{-2} =$$

$$= \frac{6}{e^{+2}} < \frac{6}{(2{,}5)^2} = \frac{6}{6.25} < 1$$

Відп: ряд абсолютно збіжний за озн. Коші

5

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n\sqrt{n+x}}$ $E=[0;1]$ $(n \in \mathbb{N})$

$\forall x \in E$: і для всіх $n \in \mathbb{N}$

$$\left|\frac{x^n}{n\sqrt{n+x}}\right| = \frac{x^n}{n\sqrt{n+x}} \leq \frac{x^n}{n\sqrt{n}} \leq \frac{1}{n\sqrt{n}}$$

Отже, $(\forall n \in \mathbb{N})(\forall x \in E)\left\{\left|\frac{x^n}{n\sqrt{n+x}}\right| \leq \frac{1}{n^{3/2}}\right\}$.

З іншого боку ряд збігається (як узагальнений гармонійний ряд)

Отже, за озн. Веєрштрасса, функц. ряд рівномірно й абсолютно збігається на E $[0;1]$.

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{(n+1)3^n}$ E

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{1}{(n+1)3^n}\right|}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{3}} = 3.$$