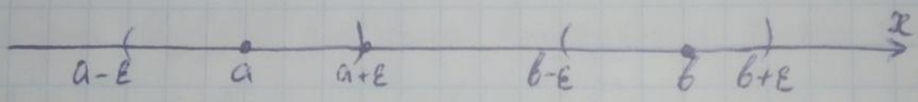
**Означення.** Число $a$ називають границею числової послідовності $\{x_n\}$, якщо в будь-якому $\varepsilon$-околі числа $a$ містяться всі елементи послідовності $\{x_n\}$, починаючи з деякого номера. Виявлено: $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$, то зовні $\varepsilon$-околу числа $a$, тобто у множині $\mathbb{R} \setminus U_\varepsilon(a)$, може міститись лише скінченна кількість елементів послідовності.

## Теорема 2.2.1 Послідовність не може мати 2 різних гран

### Доведення

Припустимо супротивне, тобто нехай існує така послідовність $\{x_n\}$, що $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$, причому $a \neq b$ і нехай для визначеності $a < b$. Нехай $\varepsilon = \frac{b-a}{3}$.

Тоді $U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(b) = \varnothing$




Згідно з означенням границі маємо

$(\exists N_1)(\forall n > N_1)\ \{|x_n - a| < \varepsilon\}$

$(\exists N_2)(\forall n > N_2)\ \{|x_n - b| < \varepsilon\}$

Нехай $N = \max\{N_1, N_2\}$ тоді для $(\forall n > N)$

$\{|x_n - a| < \varepsilon\}$ і $\{|x_n - b| < \varepsilon\}$.

тобто елементи послідовності $\{x_n\}$ з номерами, більшими від $N$, одночасно належать до $U_\varepsilon(a)$ та $U_\varepsilon(b)$, а це неможливо з огляду на співвідношення. Отримана суперечність доводить, що $a = b$.

## Теорема 2.2.2 Збіжна послідовність обмежена

### Доведення

Нехай $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Згідно з означенням границі послідовності для $\varepsilon = 1$ маємо $(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N)\ \{|x_n - a| < 1\}$, тобто

$(\forall n > N)\ \{a - 1 < x_n < a + 1\}$.

Приймемо $M \overset{def}{=} \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_N|, |a-1|, |a+1|\}$.

Отже, $(\forall n \in \mathbb{N})\ \{|x_n| \le M\}$

Теорема 6.2.1 (теорема Ролля)

Нехай функція $y=f(x)$:

1) неперервна на відрізку $[a,b]$

2) диференційовна на інтервалі $(a,b)$

3) $f(a)=f(b)$

Тоді існує $\xi \in (a,b)$ така, що $f'(\xi)=0$

Доведення

Оскільки функція $y=f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$, то з огляду на теорему Вейєрштрасса, вона досягає на цьому відрізку найбільшого та найменшого значень.

Нехай $M = \max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, $m = \min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$. Тоді

$$(\forall x \in [a,b]) \{ m \leq f(x) \leq M \}$$

Можливі 2 випадки: $m=M$ та $m<M$.

Розглянемо 1 випадок. Тоді $(\forall x \in [a,b]) \{f(x)=m=M=const\}$

Звідси $(\forall x \in [a,b]) \{f'(x)=0\}$. Отже, за $\xi$ можна взяти будь-яку точку з інтервалу $(a,b)$.

Розглянемо 2 випадок. Оскільки $f(a)=f(b)$, то хоча б одне з значень $m$ та $M$ функція досягає у місці точці $\xi \in (a,b)$.

Отже, точка $\xi$ є точкою екстремуму функції $y=f(x)$. Тому з огляду на диференційовність отримуємо, що $f'(\xi)=0$.

**Теорема 6.2.2** (теорема Лагранжа)

Нехай функція $y=f(x)$:

1) неперервна на відрізку $[a,b]$

2) диференційовна на інтервалі $(a,b)$.

Тоді існує точка $\xi \in (a,b)$ така, що $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$

**Доведення**

Розглянемо на відрізку $[a,b]$ функцію

$$F(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

Зауважимо, що функція $y=F(x)$ задовольняє всі умови теореми 6.2.1. Справді, функція $y=F(x)$ є неперервною на $[a,b]$, диференційовною на $(a,b)$ причому

$$F'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

і $F(a)=F(b)=0$. Тому з огляду на теорему 6.2.1 знайдеться точка $\xi \in (a,b)$ для якої $F'(\xi)=f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$

Теорема 6.2.3 (теорема Коші)

Нехай функції $f(x)$ та $g(x)$:

1) неперервні на відрізку $[a, b]$;

2) диференційовні на інтервалі $(a, b)$;

3) $(\forall x \in (a, b)) \{g'(x) \neq 0\}$

Тоді існує точка $\xi \in (a, b)$ така, що

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Доведення

Доведемо, що співвідношення (6.1) має сенс, тобто що $g(b) \neq g(a)$. Насправді, якби $g(a) = g(b)$, то для функції $g(x)$ виконувались б умови теореми 6.2.1 (Ролля) і згідно з цією теоремою існувала б точка $\eta \in (a, b)$ така, що $g'(\eta) = 0$. А це суперечить б умові теореми.

Отже $g(a) \neq g(b)$. Розглянемо функцію.

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot (g(x) - g(a)).$$

З огляду на умови теореми функція $F(x)$ задовольняє умови теореми Ролля, тому існує точка $\xi \in (a, b)$, така, що $F'(\xi) = 0$. тобто

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$