Домашня робота (з. 17)

№3.268

$f(x) = \sin^2 x$ $\qquad f(x) = \frac{2}{2}\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$

ф-ла Маклорена с. 66 II

$$\begin{cases} \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1} + o(x^{2n+1}),\ x \to 0 \\ f(x) = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \dots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(x^2)^{2n+1} + (o(x^2))^{2n+1} \text{ при } x \to 0 \end{cases}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot x^{2n} + o(x^{2n}),\ x \to 0$$

$$f(x) = 1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - \frac{(2x)^6}{6!} + \dots + \frac{(-1)^n \cdot (2x)^{2n}}{(2n)!} + (o(2x)^{2n}),\ x \to 0$$

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \left(1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - \frac{(2x)^6}{6!} + \dots + \frac{(-1)^n (2x)^{2n}}{(2n)!} + (o(2x)^{2n})\right)\right),\ x \to 0$$

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \left(1 - \frac{4x^2}{2\cdot 1} + \frac{16x^4}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} - \frac{64x^6}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} + \dots + \frac{(-1)^n 4^n \cdot x^{2n}}{(2n)!} + (o(2x)^{2n})\right)\right),\ x \to 0$$

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \left(1 - 2x^2 + \frac{2x^4}{3} - \frac{4x^6}{45} + \dots + \frac{(-1)^n 4^n \cdot x^{2n}}{(2n)!} + (o(2x)^{2n})\right)\right),\ x \to 0$$

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(2x^2 - \frac{2x^4}{3} + \frac{4x^6}{45} - \dots - \frac{(-1)^n 4^n \cdot x^{2n}}{(2n)!} - (o(2x)^{2n})\right),\ x \to 0$$

$$f(x) = x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{2x^6}{45} - \dots - \frac{(-1) 2^n \cdot x^{2n}}{(2n)!} - (o(x)^{2n})),\ x \to 0$$

В: $f(x) = x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^5),\ x \to 0$

№3.266

$$f(x) = \operatorname{ch} x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

I. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n),\ x \to 0$

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{(-1)x^n}{n!} + o(x^n),\ x \to 0$$

$$f(x) = \frac{1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) + \left(1 - x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{(-1)x^n}{n!} + o(x^n)\right)}{2},\ x \to 0 =$$

$$= \frac{2 + \frac{2x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{(-1)x^n}{n!} + (o(x^n) + o(x^n))}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}),\ x \to 0$$

В: $f(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}),\ x \to 0$

№ 3 272

$f(x) = \ln(1+x^3)$

ф-ла Маклорена стр. 66 IV

$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n + o(x^n)$

$f(x) = x^3 - \frac{(x^2)^3}{2} + \frac{(x^3)^3}{3} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}(x^3)^n + (o(x^3))^n,\ x \to 0$

$f(x) = x^3 - \frac{x^6}{2} + \frac{x^9}{3} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}(x^{3n})}{n} + (o(x^3))^n,\ x \to 0$

В: $f(x) = x^3 - \frac{x^6}{2} + \frac{x^9}{3} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}(x^{3n})}{n} + (o(x^3))^n,\ x \to 0$

№3.278

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos x - e^{-x^2/2}}{x^4}$

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot x^{2n} + o(x^{2n}),\ x \to 0$

$e^{-\frac{x^2}{2}} = 1 + \left(-\frac{x^2}{2}\right) + \frac{\left(-\frac{x^2}{2}\right)^2}{2!} + \dots + \frac{\left(-\frac{x^2}{2}\right)^n}{n!} + o\left(\left(-\frac{x^2}{2}\right)^n\right),\ x \to 0$

$e^{-\frac{x^2}{2}} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + \dots + \left(\frac{-\frac{x^{2n}}{2n}}{n!}\right) + \left(o\left(-\frac{x^2}{2}\right)^n\right),\ x \to 0$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot x^{2n} + o(x^{2n}) - \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + \dots + \frac{\frac{x^{2n}}{2n}}{n!} + o\left(\left(-\frac{x^2}{2}\right)^n\right)\right)}{x^4} =$

$= \lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^4)}{x^4} =$

$f(x) = \cancel{1} - \cancel{\frac{x^2}{2}} + \frac{x^4}{4!} - \cancel{1} + \cancel{\frac{x^2}{2}} - \frac{x^4}{8} + o(x^4) = -\frac{x^4}{12} + o(x^4)$

$g(x) = x^4$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{-\frac{x^4}{12} + o(x^4)}{x^4} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0} \frac{-\frac{x^4}{12}}{x^4} = \boxed{-\frac{1}{12}}$

Домашня робота (3.18)

№ 3.346

$y = \frac{x^4}{(1+x)^3}$

① $D(y) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$E(f)$

② Неперіодична; ні парна, ні непарна

(пар) ? $f(-x) = f(x)$: $y = \frac{(-x)^4}{(1-x)^3} = \frac{x^4}{-x^3 + 3x^2 - 3x + 1}$

③ $x = -1$: $\lim\limits_{x\to -1-0} \frac{x^4}{(1+x)^3} = \frac{(-1-0)^4}{(1+(-1-0))^3} = \frac{1}{-0} = -\infty$

$(1-1-0)^3 = -0$

$\lim\limits_{x\to -1+0} \frac{x^4}{(1+x)^3} = \frac{(-1+0)^4}{(1+(-1+0))^3} = \frac{1}{0} = +\infty$

т. $x = -1$ – т. р. by II роду; вертикал. асимптота

⑤ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x^{\cancel{4}3}}{\cancel{x}(1+x)^3} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{(1+x)^3} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{1+3x+3x^2+x^3} =$

$= \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{\cancel{x^3}}{\cancel{x^3}\left(\frac{1}{x^3} + \frac{3}{x^2} + \frac{3}{x} + 1\right)} = \boxed{1} = k$

$\exists \lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - kx) = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x^4}{(1+x)^3} - 1x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{x^4}{(1+x)^3} - x\right) =$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^4 - x(1+x)^3}{(1+x)^3} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{x^4 - x(1+3x+3x^2+x^3)}{1+3x+3x^2+x^3}\right) =$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{x^4 - (x+3x^2+3x^3+x^4)}{1+3x+3x^2+x^3}\right) =$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{x^4 - x - 3x^2 - 3x^3 - x^4}{1+3x+3x^2+x^3}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{-3x^3 - 3x^2 - x}{1+3x+3x^2+x^3}\right) =$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x^3}\left(-3 - \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}\right)}{\cancel{x^3}\left(\frac{1}{x^3} + \frac{3}{x^2} + \frac{3}{x} + 1\right)} = -3 = b \} \Rightarrow y = x - 3$

похила асимптота при $x \to \pm\infty$

④ $x=0 \Rightarrow y=0 \quad (0;0)$

$y=0 \Rightarrow \frac{x^4}{(1+x)^3}=0; \quad x^4=0; \; x=0$

$(0;0)$

⑤ Extr:

$$f'(x)=\frac{(x^4)'(1+x)^3-(x^4)((1+x)^3)'}{((1+x)^3)^2}=$$

$$=\frac{4x^3(1+x)^3-x^4\cdot 3(1+x)^2}{((1+x)^3)^2}=\frac{4x^3(1+x)^3-x^4(3(1+x)^2)}{(1+x)^6}=$$

$$=\frac{\cancel{(1+x)^2}(4x^3(1+x)-x^4\cdot 3)}{(1+x)^{\cancel{6}\,4}}=\frac{4x^3(1+x)-3x^4}{(1+x)^4}=$$

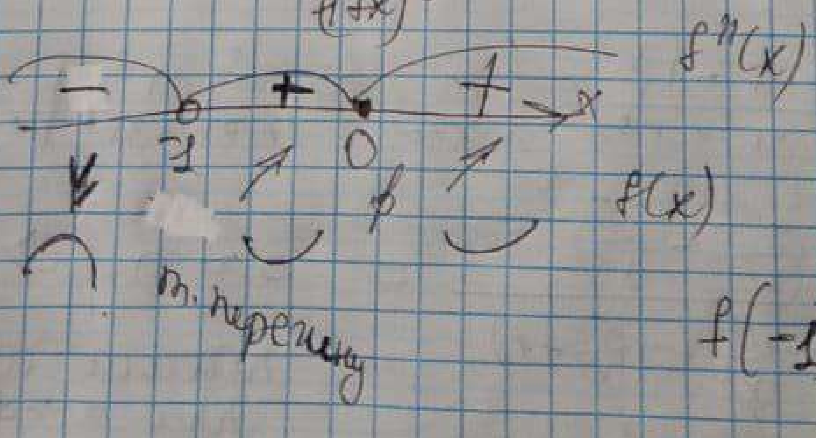
$$=\frac{4x^3+4x^4-3x^4}{(1+x)^4}=\frac{4x^3+x^4}{(1+x)^4}$$

$\nexists f'(x)$ при $x=-1$ - не є стаціонар. т. } бо -1 не нал. $D(f)$

$f'(x)=0$ при $\frac{4x^3+x^4}{(1+x)^4}=0 \Leftrightarrow x=0$ або $4x^3+x^4=0$
$x^3(4+x)=0$
$x=0 \quad x=-4$

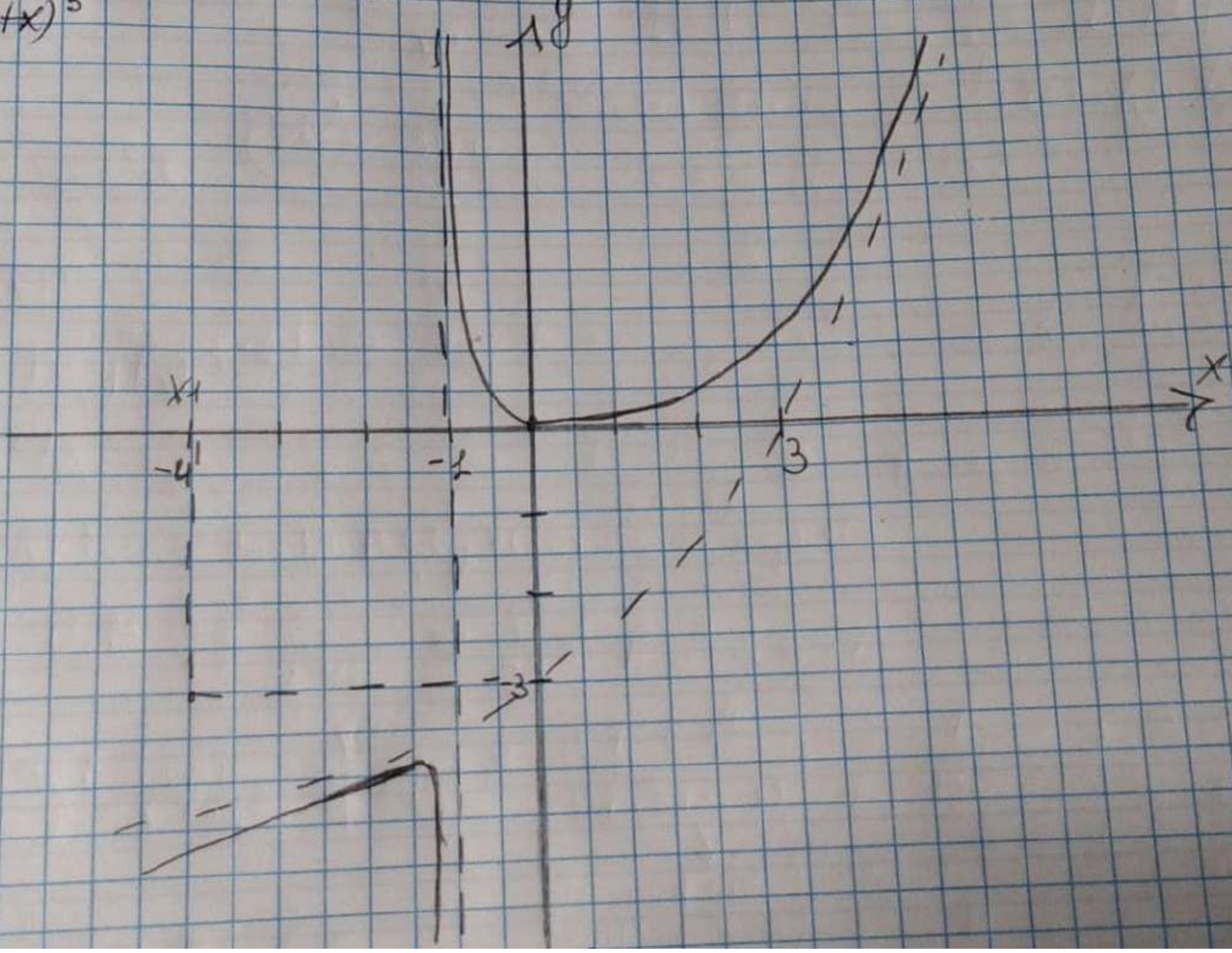
$$\boxed{\begin{array}{l} x=-4 - \text{т. max} \\ x=0 - \text{т. min} \\ f_{max}=f(-4)=-4 \\ f(0)=0 \end{array}}$$

⑥ $f''(x)=\frac{12x^2}{(1+x)^5}=0; \quad x=-1$ - т. перегину



$f(-1)=\frac{(-1)^4}{(1-1)^3}=\left[\frac{1}{0}\right]=\boxed{\varnothing}$

$$y = \frac{x^4}{(1+x)^3}$$



№ 3.353

$y = (x-3)\sqrt{x}$

1) $D(f) = [0; +\infty)$

$E(f)$

2) Неперіодична; ні парна, ні непарна
неперервна

3) $x=0 \Rightarrow y=0$ $(0;0)$

$y=0 \Rightarrow (x-3)\sqrt{x}=0;$ $x=0$ $x=3$

$(0;0)$ $(3;0)$

4) а) $\nexists$ вертикал. асимп.

б) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x-3)\sqrt{x} = (+\infty)\cdot(+\infty) = +\infty$ $\nexists$ горизонтал. асимптота

5) Мон., extr.

$y' = \sqrt{x} + x\frac{1}{2\sqrt{x}} - 3\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{3}{2}\sqrt{x} - \frac{3}{2\sqrt{x}} = \frac{3x-3}{2\sqrt{x}}$

$\nexists y'$ при $x=0 \notin D(f)$

$y' = 0$ при $3x-3=0$ $3x=3$ $x=1$

т. min

$y_{min} = y(1) = (1-3)\sqrt{1} = -2$

⑥ Оп, т. перегину

$y'' = \frac{3x+3}{4x\sqrt{x}}$

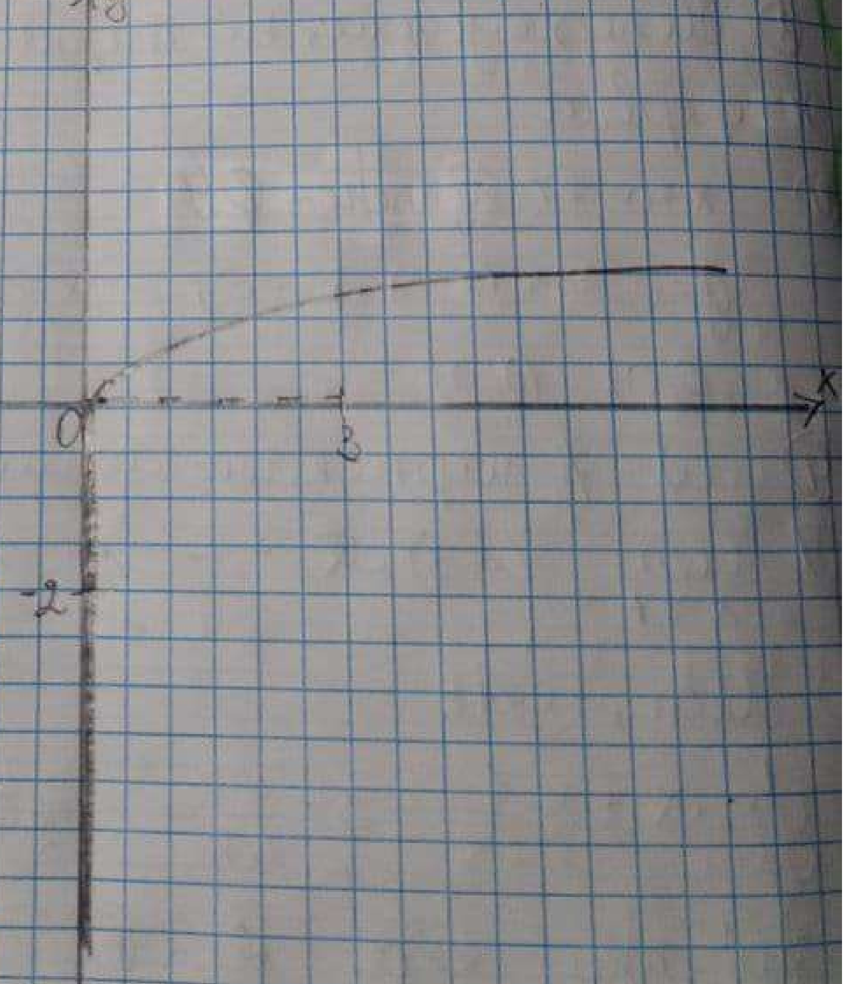
$y'' > 0 \Leftrightarrow (3x+3)(4x\sqrt{x}) > 0$

$\nexists\ y''$ при $x=0 \notin D(y)$

$y''=0$ при $3x=-3$ $x=-1$

т. перегину

$y = y(-1) = (-1-3)\sqrt{-1} = \cancel{0}\ \nexists$



№3.362

$y = \frac{e^x}{1+x}$

① $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$E(f)$

② Неперіодична, ні парна, ні непарна (загал. типу)

$\frac{e^x}{x+1} \neq \frac{e^{-x}}{1-x}$ не парна

$\frac{e^x}{x+1} = \frac{e^{-x}}{1-x}$ не непарна

$x=-1$: $\lim\limits_{x \to -1-0} \frac{e^x}{1+x} = \frac{e^{-1-0}}{1+(-1-0)} = \frac{e^{-1}}{-0} = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -1+0} \frac{e^x}{1+x} = \frac{e^{-1+0}}{1+(-1+0)} = \frac{e^{-1}}{+0} = +\infty$

③ т. $x = -1$ – т. розриву II роду

а) вертикальна асимптота

б) $\nexists \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{e^x}{(1+x)x} = \frac{e^x}{x+x^2} = \infty$

$\nexists$ похил. асимп.

④ $x = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{e^0}{1+0} = 1$ $(0;1)$

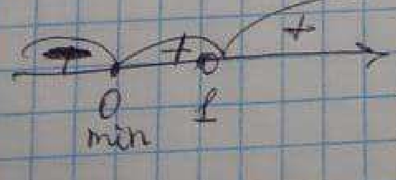
$y = 0 \Rightarrow \frac{e^x}{1+x} = 0$ $e^x = 0$, $x \neq -1$ $\varnothing$

⑤ Extr.

$f'(x) = \frac{xe^x}{(1+x)^2} = 0$; $xe^x = 0$ $x \neq -1$

$x = 0$ $e^x = 0$

$x = 0$ $\varnothing$



т. 0 – т. min

⑥ Опуклість, т. перегину

$$f''(x) = \frac{e^x + x^2 e^x}{(1+x)^3} = 0$$

$$e^x + x^2 e^x = 0$$

$$e^x(1+x^2) = 0$$

$e^x = 0$ $\quad$ $1+x^2 = 0$

$\varnothing$ $\quad$ $x^2 = -1$

$\varnothing$

$x \notin \mathbb{R}$

$\nexists$ т. перегину