

Похідна та її застосування

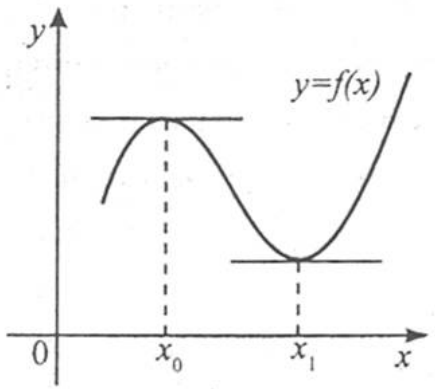
Необхідна умова екстремуму

Розглянемо функцію $y=f(x)$, яка визначена в деякому околі точки x_0 і має похідну в цій точці.

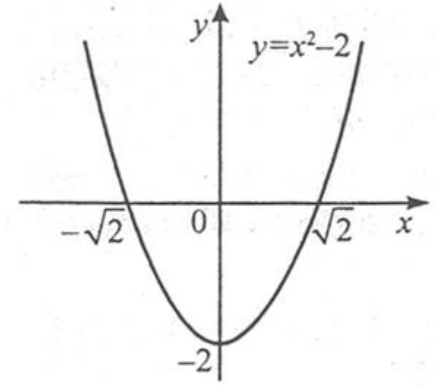
Якщо x_0 – точка екстремуму диференційованої функції $y=f(x)$, то $f'(x_0) = 0$.

Це твердження називають **теоремою Ферма** на честь французького математика П'єра Ферма (1601 – 1665).

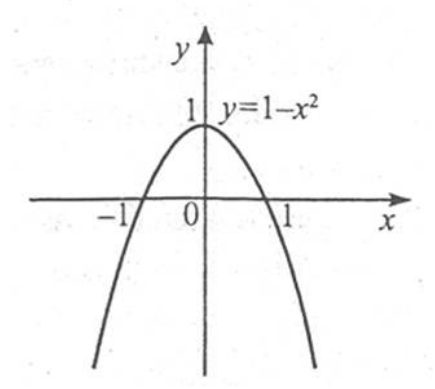
Теорема Ферма має наочний геометричний зміст: у точці екстремуму дотична паралельна осі абсцис, і тому її кутовий коефіцієнт $f'(x)$ дорівнює нулю.



Наприклад: функція $f(x) = x^2 - 2$ має в точці $x_0=0$ мінімум, її похідна $f'(0) = 0$.

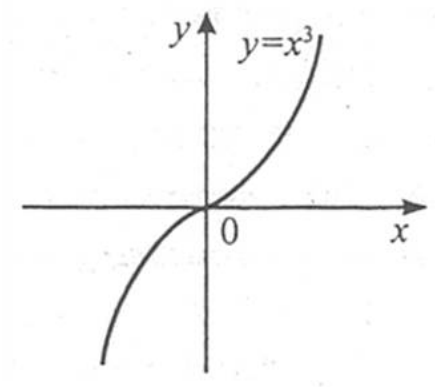


Функція $f(x) = 1 - x^2$ має максимум в точці $x_0=0$, $f'(x) = -2x$, $f'(0) = 0$.



Слід зазначити, що якщо $f'(x_0) = 0$, то x_0 необов'язково є точкою екстремуму.

Наприклад: якщо $f(x) = x^3$, то $f'(x) = 3x^2$ і $f'(0) = 0$. Проте точка $x=0$ не є точкою екстремуму, оскільки функція $f(x) = x^3$ зростає на всій числовій осі.

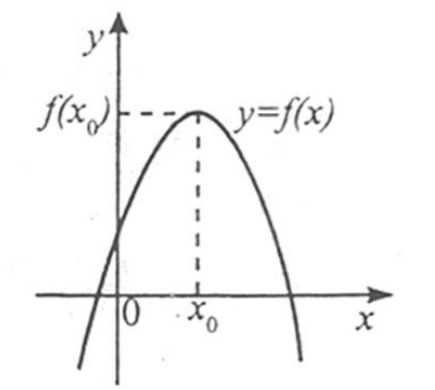


Отже, точки екстремуму диференційованої функції треба шукати тільки серед коренів рівняння $f'(x) = 0$, але не завжди корінь рівняння $f'(x) = 0$ є точкою екстремуму.

Внутрішні точки області визначення функції $y=f(x)$, у яких похідна дорівнює нулю, називають *стаціонарними*. Отже, для того щоб точка x_0 була точкою екстремуму, необхідно, щоб вона була стаціонарною.

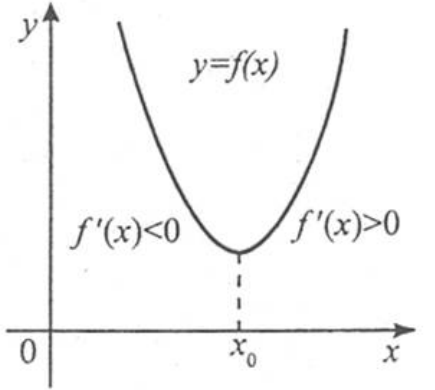
Сформулюємо достатні умови для того, щоб стаціонарна точка була точкою екстремуму, тобто умови, при виконанні яких стаціонарна точка є точкою максимуму або мінімуму функції.

Якщо похідна ліворуч стаціонарної точки додатна, а праворуч – від'ємна, тобто при переході через цю точку похідна змінює знак із «+» на «-», то ця стаціонарна точка є точкою максимуму.



Дійсно, у цьому разі ліворуч стаціонарної точки функція зростає, а праворуч – спадає, отже, дана точка є точкою максимуму.

Якщо похідна ліворуч стаціонарної точки від'ємна, а праворуч – додатна, тобто при переході через стаціонарну точку похідна змінює знак із «-» на «+», то ця стаціонарна точка є точкою мінімуму.



Якщо при переході через стаціонарну точку похідна не змінює знака, тобто ліворуч і праворуч від стаціонарної точки похідна додатна або від'ємна, то ця точка не є точкою екстремуму.