Нехай $u=\varphi(x)$ і $v=\psi(x)$ — двічі диференційовані функції. Знайти d^2y, якщо:

3.158. $y=uv$; 3.159. $y=\frac{u}{v}$; 3.160. $y=u^m v^n$;

3.161. $u=a^u$; 3.162. $y=\ln\sqrt{u^2+v^2}$; 3.163. $y=\operatorname{arctg}\frac{u}{v}$.

Знайти похідні y'_x, y''_{x^2}, y'''_{x^3} від функції $y=y(x)$, заданої параметрично, якщо:

3.164. $\begin{cases} x=2t-t^2, \\ y=3t-t^3, \end{cases}$ 3.165. $\begin{cases} x=a\cos t, \\ y=a\sin t; \end{cases}$

a 3.166. $\begin{cases} x=a(t-\sin t), \\ y=a(1-\cos t); \end{cases}$ 3.167. $\begin{cases} x=e^t\cos t, \\ y=e^t\sin t. \end{cases}$

Знайти похідні y'_x, y''_{x^2}, y'''_{x^3} від функції $y=y(x)$, заданої неявно, якщо:
3.168. $x^2+y^2=25$. Чому дорівнюють ці похідні в точці M(3,4)?
a 3.169. $y^2=2px$; 3.170. $x^2-xy+y^2=1$.
Знайти y'_x, y''_{x^2}, якщо:
a 3.171. $y^2+2\ln y=x^4$; 3.172. $\sqrt{x^2+y^2}=ae^{\operatorname{arctg} y/x}$.

Знайти похідні вказаного порядку.

a 3.173. $y=\frac{a}{x^m}$; знайти y'''; 3.174. $y=x(2x-1)^2(x+3)^3$; знайти $y^{(7)}$;

a 3.175. $y=\sqrt{x}$; знайти $y^{(10)}$; 3.176. $y=\frac{x^2}{1-x}$; знайти $y^{(8)}$;

3.177. $y=\frac{1+x}{\sqrt{1-x}}$; знайти $y^{(100)}$; a 3.178. $y=x^2e^{2x}$; знайти $y^{(20)}$;

3.179. $y=\frac{e^x}{x}$; знайти $y^{(10)}$; 3.180. $y=x\ln x$; знайти $y^{(5)}$;

3.181. $y=\frac{\ln x}{x}$; знайти $y^{(5)}$; 3.182. $y=x^2\sin 2x$; знайти $y^{(50)}$;

3.183. $y=\frac{\cos 3x}{\sqrt[3]{1-3x}}$; знайти y'''; 3.184. $y=\sin x\sin 2x\sin 3x$; знайти $y^{(10)}$;

a 3.185. $y=x\operatorname{sh} x$; знайти $y^{(100)}$; 3.186. $y=e^x\cos x$; знайти y^{IV};

3.187. $y=\sin^2 x\ln x$; знайти $y^{(6)}$.

Вважаючи x незалежною змінною, знайти диференціали вказаного порядку.

3.188. $y=x^5$; знайти d^6y; 3.189. $y=1/\sqrt{x}$; знайти d^3y;

a 3.190. $y=x\cos 2x$; знайти $d^{10}y$; 3.191. $y=e^x\ln x$; знайти d^4y;

3.192. $y=\cos x\cdot\operatorname{ch} x$; знайти d^6y.

Нехай u — функція від x, диференційована необхідне число раз. Знайти диференціали вказаного порядку.

3.193. $y=u^2$; знайти $d^{10}y$; 3.194. $y=e^u$; знайти d^4y.

3.195. $y=\ln u$; знайти d^3y.

Знайти $y^{(n)}$, якщо:

3.196. $y=\frac{x}{x(1-x)}$; 3.197. $y=\frac{1}{x^2-3x+2}$; 3.198. $y=\sin^2 x$; $=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)$

3.199. $y=\frac{x}{\sqrt[3]{1+x}}$; 3.200. $y=\frac{1}{\sqrt{1-2x}}$; 3.201. $y=\cos^2 x$;

3.202. $y=\sin^3 x$; 3.203. $y=\sin ax\sin bx$; 3.204. $y=\cos^3 x$;

3.205. $y=\cos ax\cos bx$; 3.206. $y=\sin^2 ax\cos bx$; a 3.207. $y=x\cos ax$;

3.208. $y=\sin ax\cos bx$; a 3.209. $y=\sin^4 x+\cos^4 x$; 3.210. $y=x^2\sin ax$;

3.211. $y=e^x/x$; 3.212. $y=e^x\cos x$; 3.213. $y=e^x\sin x$;

3.214. $y=(x^2+2x+2)e^{-x}$.

Д/з для ПМі-13, ПМі-14: ПМо-11: 3.141, 3.142, 3.157, 3.165, 3.170, 3.175, 3.178, 3.180, 3.190, 3.198, 3.200, 3.207 вивчити формули

3.4. Правило Лопіталя

1. *Невизначеності* $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$. Якщо функції $f(x)$ та $g(x)$ диференційовні в $\overset{\circ}{U}(a)$, причому $g'(x)\neq 0$, і якщо

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)=0 \quad \text{або} \quad \lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)=\infty,$$

то

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)},$$

(3.137) $y = x\sqrt{1+x^2}$; Знайти y'' - ?

$$y' = 1\cdot\sqrt{1+x^2} + x\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}(0+2x) = \sqrt{1+x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1+2x^2}{\sqrt{1+x^2}};$$

$$y'' = (y')' = \frac{(0+4x)\sqrt{1+x^2} - (1+2x^2)\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}\cdot 2x}{1+x^2} = \frac{4x(1+x^2) - x(1+2x^2)}{(1+x^2)^{3/2}} =$$

$$= \frac{4x+4x^3-x-2x^3}{(1+x^2)^{3/2}} = \frac{2x^3+3x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}.$$

(3.138) $y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$;

$$y' = \frac{1\cdot\sqrt{1-x^2} - \frac{x}{2\sqrt{1-x^2}}\cdot(-2x)}{1-x^2} = \frac{1-x^2+x^2}{\sqrt{(1+x^2)^3}} = \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}};$$

$$y'' = -\frac{3}{2}(1+x^2)^{-\frac{5}{2}}\cdot 2x = \frac{-3x}{\sqrt{(1+x^2)^5}}.$$

(3.139) $y = e^{-x^2}$;

$$y' = e^{-x^2}\cdot(-2x);$$

$$y'' = e^{-x^2}\cdot(-2x)\cdot(-2x) + e^{-x^2}(-2) = e^{-x^2}(4x^2-2).$$

(3.140) $y = tg\,x$;

$$y' = \frac{1}{\cos^2 x};$$

$$y'' = -2(\cos x)^{-3}\cdot(-\sin x) = \frac{2\sin x}{\cos^3 x}.$$

(3.141) $y = (1+x^2)\,arctg\,x$;

$$y' = 2x\cdot arctg\,x + (1+x^2)\frac{1}{1+x^2} = 2x\,arctg\,x + 1;$$

$$y'' = 2\,arctg\,x + \frac{2x}{1+x^2} = 2\left(arctg\,x + \frac{x}{1+x^2}\right).$$

(3.142) $y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$;

$$y' = \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\sqrt{1-x^2} - \arcsin x\,\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\cdot(-2x)}{1-x^2} = \frac{1+\arcsin x\cdot\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{(1-x^2)^{3/2}},$$

Зан 33 Похідні і диференціали вищих порядків

приклад І курс І сем

Т! 1. Якщо визначена $y^{(n-1)}(x)$, то похідна n-го пор-ку:

$$\boxed{y^{(n)}(x) = \left(y^{(n-1)}(x)\right)'.}$$

Зокрема, $y''(x) = (y'(x))'$; $y'''(x) = (y''(x))'$.

2. Якщо $\exists\ u^{(n)}(x),\ v^{(n)}(x)$, то

$$\boxed{(c_1 u + c_2 v)^{(n)} = c_1 \cdot u^{(n)} + c_2 \cdot v^{(n)}};$$

формула Лейбніца

$$(u \cdot v)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)} = u^{(n)} \cdot v + n \cdot u^{(n-1)} v' + \frac{(n-1)n}{2!} u^{(n-2)} v'' + \ldots + u \cdot v^{(n)},$$ де

$u^{(0)} = u$, $v^{(0)} = v$, $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

3. Таблиця похідних вищих порядків:

1) $(x^k)^{(n)} = k(k-1) \cdot \ldots \cdot (k-n+1) x^{k-n}$;

2) $(a^x)^{(n)} = a^x \cdot \ln^n a$

3) $(\ln x)^n = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n}$;

4) $(\sin x)^n = \sin\left(\frac{\pi}{2} n + x\right)$

5) $(\cos x)^n = \cos\left(\frac{\pi}{2} n + x\right)$

4. Диференціали вищих порядків

$d^2 y = d(dy)$; $d^3 y = d(d^2 y)$; ... ; $d^n y = d(d^{n-1} y)$

Якщо $y = f(x)$, де x – незал. зм, то $d^2 y = y''(dx)^2$; $d^3 y = y'''(dx)^3$; ...

Якщо $y = f(u)$, де $u = \varphi(x)$, то $d^2 y = f''(u)(du)^2 + f'(u) d^2 u$; ...

$$y''=\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+\arcsin x\cdot\frac{\sqrt{1-x^2}-x\cdot\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}(-2x)}{1-x^2}\right)(1-x^2)^{3/2}}{(1-x^2)^3}-$$

$$-\frac{\left(1\cancel{\ldots}+\arcsin x\cdot\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)\cdot\frac{3}{2}(1-x^2)^{\frac{1}{2}}(-2x)}{(1-x^2)^3}=$$

$$=\frac{\left(\frac{x}{1-x^2}+\arcsin x\cdot\frac{1-x^2+x^2}{(1-x^2)^{3/2}}\right)(1-x^2)^{3/2}-\left(-3x\sqrt{1-x^2}-3x^2\arcsin x\right)}{(1-x^2)^3}$$

$$=\frac{x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x+3x\sqrt{1-x^2}+3x^2\arcsin x}{(1-x^2)^3}=$$

$$=\frac{4x\sqrt{1-x^2}+(1+3x^2)\arcsin x}{(1-x^2)^3}.$$

3.143 $y=x\ln x;$

$$y'=1\cdot\ln x+x\cdot\frac{1}{x}=\ln x+1;$$

$$y''=\frac{1}{x}.$$

3.144 $y=\ln f(x);$

$$y'=\frac{1}{f(x)}\cdot f'(x);$$

$$y''=-\frac{1}{f^2(x)}\cdot\left(f'(x)\right)^2+\frac{1}{f(x)}\cdot f''(x)=\frac{-\left(f'(x)\right)^2+f(x)\cdot f''(x)}{f^2(x)}=$$

$$=\frac{f(x)\cdot f''(x)-\left(f'(x)\right)^2}{f^2(x)}.$$

3.145 $y=x\left(\sin(\ln x)+\cos(\ln x)\right);$

$$y'=\sin(\ln x)+\cos(\ln x)+x\left(\cos(\ln x)\frac{1}{x}-\sin(\ln x)\frac{1}{x}\right)=$$

$$=\cancel{\sin(\ln x)}+\cos(\ln x)+\cos\ln(x)-\cancel{\sin(\ln x)}=$$

$$=2\cos(\ln x);$$

$$y''=-2\sin(\ln x)\cdot\frac{1}{x}.$$

(3.146) Знайти $y(0)$, $y'(0)$, $y''(0)$, якщо $y = e^{\sin x}\cdot\cos(\sin x)$.

▼ $y(0) = e^{\sin 0}\cos(\sin 0) = e^0\cdot\cos 0 = 1\cdot 1 = 1$;

$$y'(x)\Big|_{x=0} = \left(e^{\sin x}\cdot\cos x\cdot\cos(\sin x) + e^{\sin x}\cdot(-\sin(\sin x))\cdot\cos x\right)\Big|_{x=0} =$$

$$= e^0\cdot\cos 0\cdot\cos 0 + e^0\cdot(-\sin 0)\cos 0 = 1 + 0 = 1;$$

$$y''(x)\Big|_{x=0} = \Big(\big(e^{\sin x}\cos^2 x\cdot\cos(\sin x) + e^{\sin x}\cdot(-\sin x)\cdot\cos(\sin x) +$$

$$+ e^{\sin x}\cos x\cdot(-\sin(\sin x))\cdot\cos x\big) +$$

$$+ e^{\sin x}\cdot\cos^2 x\cdot(-\sin(\sin x)) + e^{\sin x}\cdot(-\cos(\sin x))\cdot\cos^2 x +$$

$$+ e^{\sin x}(-\sin(\sin x))\cdot(-\sin x)\Big)\Big|_{x=0} = 1 + 1 = 2.$$

$y(0) = 1$; $y'(0) = 1$, $y''(0) = 2$.

(3.147) Нехай $u = \varphi(x)$, $v = \psi(x)$ – двічі диференційовні ф-ї. Знайти y'':

$y = u^2$;
$y' = 2u\cdot u'$;
$y'' = 2(u')^2 + 2u\cdot u''$.

(3.148) $y = \ln\frac{u}{v}$;

$$y' = \frac{v}{u}\cdot\frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{u'v - uv'}{uv};$$

$$y'' = \frac{(u''\cdot v + u'\cdot v' - u'v' - uv'')uv - (u'v - uv')\cdot(u'v + uv')}{u^2v^2} =$$

$$= \frac{u''\cdot v^2 u - v''u^2 v - (u')^2v^2 + u^2(v')^2}{u^2v^2} =$$

$$= \frac{u^2((v')^2 - v''\cdot v) + v^2(u''\cdot u - (u')^2)}{u^2v^2}.$$

3.152 $y = f\left(\frac{1}{x}\right);$

$y' = -f'\left(\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x^2};$

$y'' = -\left(f''\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\left(-\frac{1}{x^4}\right) + f'\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\left(-\frac{2}{x^3}\right)\right) = \frac{1}{x^4}f''\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{2}{x^3}f'\left(\frac{1}{x}\right);$

$y''' = -\frac{4}{x^5}f''\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^4}f'''\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) + \frac{2(-3)}{x^4}f'\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{2}{x^3}f''\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)$

$= f''\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{4}{x^5} - \frac{2}{x^5}\right) + f'''\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^6}\right) - \frac{6}{x^4}f'\left(\frac{1}{x}\right) =$

$= -\frac{1}{x^6}f'''\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{6}{x^5}f''\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{6}{x^4}f'\left(\frac{1}{x}\right).$

3.153 $y = f(e^x);$

$y' = f'(e^x)\cdot e^x;$

$y'' = f''(e^x)\cdot e^{2x} + f'(e^x)\cdot e^x;$

$y''' = f'''(e^x)\cdot e^{3x} + f''(e^x)\cdot e^{2x}\cdot 2 + f''(e^x)\cdot e^{2x} + f'(e^x)e^x =$

$= f'''(e^x)e^{3x} + 3e^{2x}\cdot f''(e^x) + f'(e^x)\cdot e^x.$

3.154 $y = f(\ln x)$

$y' = f'(\ln x)\cdot\frac{1}{x};$

$y'' = f''(\ln x)\cdot\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2}f'(\ln x);$

$y''' = f'''(\ln x)\cdot\frac{1}{x^3} - f''(\ln x)\frac{2}{x^3} - f''(\ln x)\cdot\frac{1}{x^3} + f'(\ln x)\frac{2}{x^3}$

Знайти d^2y, якщо

3.155 $y = \sqrt{1+x^2};$

$dy = y'dx; \quad dy = \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}\cdot 2x\,dx = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$

$d^2y = y''(dx)^2; \quad d^2y = \frac{\sqrt{1+x^2} - x\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}\cdot 2x}{1+x^2}(dx)^2 =$

$= \frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^{3/2}}(dx)^2 = \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}(dx)^2 = \frac{(dx)^2}{\sqrt{(1+x^2)^3}}.$

3.149

$$y=\sqrt{u^2+v^2};$$

$$y'=\frac{1}{2\sqrt{u^2+v^2}}\cdot(2u\cdot u'+2v\cdot v')=\frac{u\cdot u'+v\cdot v'}{\sqrt{u^2+v^2}};$$

$$y''=\frac{((u')^2+u\cdot u''+(v')^2+v\cdot v'')\sqrt{u^2+v^2}-(u u'+v\cdot v')\frac{2(u\cdot u'+2v v')}{2\sqrt{u^2+v^2}}}{u^2+v^2}=$$

$$=\frac{((u')^2+u\cdot u''+(v')^2+v\cdot v'')(u^2+v^2)-u^2(u')^2-2u u'\cdot v\cdot v'-v^2(v')^2}{(u^2+v^2)^{3/2}}$$

$$=\frac{(u')^2u^2+u^3\cdot u''+u^2(v')^2+u^2 v\cdot v''+v^2(u')^2+v^2 u\cdot u''+v^2(v')^2+v^3 v''-}{(u^2+v^2)^{3/2}}$$

$$\frac{-(u^2)(u')^2-2u\cdot u'\cdot v\cdot v'-v^2\cdot(v')^2}{\ldots}=$$

$$=\frac{u^3u''+u^2(v')^2+u^2 v\cdot v''+v^2\cdot(u')^2+v^2 u u''+v^3 v''-2u\cdot u'\cdot v\cdot v'}{(u^2+v^2)^{3/2}}$$

3.150

$$y=u^v\ (u>0);$$

$$y'=v\cdot u^{v-1}\cdot u'+u^v\ln u\cdot v';$$

$$y''=(v'\cdot u^{v-1}\cdot u'+v((v-1)u^{v-2}\cdot u'+u^{v-1}\ln u\cdot v')\cdot u'+v'\cdot u^{v-1}\cdot u'')+$$

$$+(v\cdot u^{v-1}\cdot u'+u^v\ln u\cdot v')\ln u\cdot v'+$$

$$+u^v\cdot\frac{1}{u}\cdot u'\cdot v'+u^v\cdot\ln u\cdot v''.$$

Нехай $f(x)$ – тричі диференційовна функція. Знайти y' і y''', якщо:

3.151

$$y=f(x^2);$$

$$y'=f'(x^2)\cdot 2x;$$

$$y''=f''(x^2)\cdot 4x^2+2f'(x^2);$$

$$y'''=f'''(x^2)\cdot 8x^3+f''(x^2)\cdot 8x+2f''(x^2)\cdot 2x.$$

3.156 $d^2y - ?$

$y = \frac{\ln x}{x}$;

$dy = y'dx$; $dy = \frac{\frac{1}{x}\cdot x + \ln x\cdot 1}{x^2}dx = \overbrace{\frac{1+\ln x}{x^2}}^{=y'}dx$

$d^2y = y''dx^2$; $d^2y = \frac{(1+\frac{1}{x})x^2 + (\ln x+1)2x}{x^4}(dx)^2 = \frac{1+3x+2x\ln x}{x^4}(dx)^2$

3.157 $y = x^x$; $d^2y - ?$

$dy = y'dx$; $dy = (x'\cdot x^{x-1} + x^x\ln x)dx = (x^x + x^x\ln x)dx =$ $x^x(1+\ln x)dx$; $=y'$

$d^2y = y''(dx)^2$; $d^2y = ((x\cdot x^{x-1} + x^x\ln x)(1+\ln x) + x^x\cdot\frac{1}{x})(dx)^2 =$

$= (x^x(1+\ln x)^2 + x^{x-1})(dx)^2 =$

$= (x^x + 2x^x\ln x + x^x(\ln x)^2 + x^{x-1})(dx)^2$.

Нехай $u = \varphi(x)$ і $v = \psi(x)$ — двічі диф-ні ф-ї. Зн. d^2y -?

3.158 $y = uv$

$dy = v\,du + u\,dv$

$d^2y = dv\,du + v\,d^2u + du\cdot dv + u(dv)^2 = 2du\cdot dv + v\,d^2u + u\,d^2v$.

3.159 $y = \frac{u}{v}$;

$dy = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}$

$d^2y = \frac{d(v\,du - u\,dv)\cdot v^2 - (v\,du - u\,dv)\,d(v^2)}{v^4} =$

$= \frac{(dv\,du + v\,d^2u - du\,dv - u\,d^2v)v^2 - (v\,du - u\,dv)\,2v\,dv}{v^4} =$

$= \frac{v^3d^2u - uv^2d^2v - 2v^2du\,dv + 2uv(dv)^2}{v^4}$

3.160 $y = u^m v^n$;

$dy = m\cdot u^{m-1}du\cdot v^n + u^m\cdot n\cdot v^{n-1}dv = m\cdot u^{m-1}v^n du + nu^m v^{n-1}dv$

$d^2y = m(m-1)u^{m-2}v^n(du)^2 + u^{m-1}nv^{n-1}dv\,du + u^{m-1}\cdot v^n\cdot d^2u) +$

$$+n\left(m u^{m-1} du \cdot v^{n-1} dv + u^m (n-1) v^{n-2} (dv)^2 + u^m v^{n-1} d^2 v\right).$$

3.161 $y = a^u$

$$dy = a^u \ln a \cdot u' du$$

$$d^2y = \left(a^u \cdot \ln a (u')^2 (du)^2 + a^u u'' (du)^2 + a^u u' d^2 u\right) \ln a.$$

3.162 $y = \ln \sqrt{u^2+v^2}$

$$dy = \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}} \left(2u u' du + 2v v' dv\right) \cdot \frac{1}{2\sqrt{u^2+v^2}} = \frac{u u' du + v v' dv}{u^2+v^2}$$

$$d^2y = \frac{\left((u')^2 (du)^2 + u u'' (du)^2 + u u' d^2u + (v')^2 (dv)^2 + v v'' (dv)^2 + v \cdot v' \cdot d^2 v\right)(u^2+v^2) - (u u' du + v v' dv) \cdot (2u u' du + 2v v' dv)}{(u^2+v^2)^2}.$$

3.163 $y = \operatorname{arctg} \frac{u}{v}$

$$dy = \frac{1}{1+\frac{u^2}{v^2}} \cdot \frac{v\,du - u\,dv}{v^2} = \frac{v\,du - u \cdot dv}{v^2+u^2}$$

$$d^2y = \frac{\left(\cancel{dv\,du} + v\,d^2u - \cancel{du\,dv} - u\,d^2v\right)(v^2+u^2) - (v\,du - u\,dv)(2v\,dv + 2u\,du)}{(v^2+u^2)^2}$$

$$= \frac{(v \cdot d^2u - u\,d^2v)(v^2+u^2) - (v\,du - u\,dv)(2v \cdot v' dv + 2u \cdot u' du)}{(v^2+u^2)^2} =$$

$$= \frac{v^3 d^2u - u v^2 d^2 v + v u^2 d^2 u - u^3 d^2 v - \left(2v^2 v' du\,dv - 2uv v' (dv)^2 + 2uv u' (du)^2 - 2u^2 u' du\,dv\right)}{(v^2+u^2)^2}.$$

3.166 $\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}$

$$\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y'_x=\dfrac{a\sin t}{a(1-\cos t)}=\dfrac{\sin t}{1-\cos t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y''_{x^2}=\dfrac{\cos t(1-\cos t)-\sin t\cdot\sin t}{a(1-\cos t)^3}=\dfrac{\cos t-\cos^2 t-\sin^2 t}{a(1-\cos t)^3}=\dfrac{\cos t-1}{a(1-\cos t)^3}= \end{cases}$$

$$=\frac{-1}{a(\cos t-1)^2}=-\frac{1}{a}(\cos t-1)^{-2}$$

$$\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y'''_{x^3}=\dfrac{-\frac{1}{a}(-2)(\cos t-1)^{-3}\cdot(-\sin t)}{a(1-\cos t)}=\dfrac{2\cdot\sin t}{a\ (\cos t-1)^4} \end{cases}$$

3.167 $\begin{cases} x=e^t\cos t \\ y=e^t\sin t \end{cases}$

$$\begin{cases} x=e^t\cos t \\ y=e^t\sin t \end{cases} \qquad \begin{cases} x=e^t\cos t \\ y'_x=\dfrac{\cancel{e^t}\sin t+\cancel{e^t}\cos t}{\cancel{e^t}\cos t-\cancel{e^t}\sin t}=\dfrac{\sin t+\cos t}{\cos t-\sin t} \end{cases}$$

$x=e^t\cos t$

$$y''_{x^2}=\frac{\dfrac{(\cos t-\sin t)^2-(\sin t+\cos t)(\sin t-\cos t)}{(\cos t-\sin t)^2}}{e^t\cos t-e^t\sin t}=\frac{\cos^2 t-2\cos t\sin t+\sin^2 t-}{e^t(\cos t-\sin t)^3}$$

$$\frac{-\sin^2 t-2\sin t\cos t-\cos^2 t}{}=\frac{-4\cos t\ \sin t}{e^t(\cos t-\sin t)^3}$$

Знайти похідні y'_x, y''_{x^2}, y'''_{x^3} від неявно заданої функції $y = y(x)$ в т. $M(3,4)$, якщо

3.168 $x^2 + y^2 = 25$

∇ $2x + 2yy'_x = 0$

$$y'_x = -\frac{x}{y} \; ; \; y'_x\Big|_{(3,4)} = -0{,}75.$$

$$y''_{x^2} = -\frac{1\cdot y - x\cdot y'_x}{y^2} = \frac{xy'_x - y}{y^2} = \frac{x\left(-\frac{x}{y}\right) - y}{y^2} =$$

$$= \frac{-x^2 - y^2}{y^3} \; ; \; y''_{x^2}\Big|_{M(3,4)} = \frac{-9-16}{64} = \frac{-25}{64}.$$

$$y'''_{x^3} = \frac{(-2x - 2y\cdot y'_x)y^3 + (x^2+y^2)\cdot 3y^2\cdot y'_x}{y^6} =$$

$$= \frac{\cancel{-2xy^3} + \cancel{2y\cdot\frac{x}{y}\cdot y^3} + 3x^2y^2\left(-\frac{x}{y}\right) + 3y^4\left(-\frac{x}{y}\right)}{y^6} =$$

$$= \frac{-3x^3y - 3y^3x}{y^6} = \frac{-3yx(x^2+y^2)}{y^6} \Rightarrow$$

$$y'''_{x^3}\Big|_{M(3,4)} = \frac{-3\cdot\cancel{4}\cdot 3\cdot 25}{\cancel{64}_{16}\cdot 64} = \frac{-9\cdot 25}{16\cdot 64} = \frac{-225}{1024}. \; \Delta$$

3.173 $y = \frac{a}{x^m}$, $y''' - ?$

∇ $y = a\cdot x^{-m}$

$$y''' = a\cdot(-m)(-m-1)(-m-2)\; x^{-m-3} = \frac{-a\cdot m\cdot(m+1)(m+2)}{x^{m+3}}. \; \Delta$$

3.174 $y = x(2x-1)^2(x+3)^3$; $y^{(7)} - ?$

∇ $y = x(4x^2-4x+1)(x^3+9x^2+27x+27) = (4x^3-4x^2+x)(\quad\quad) = \ldots$

$y^{(7)}$ = аналог. до попер. … Δ

Знайти похідні $y'_x, y''_{xx}, y'''_{x^3}$ від функції $y=y(x)$, задані параметрично.

3.164

$$\begin{cases} x = 2t - t^2 \\ y = 3t - t^3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y'_x = \dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2t - t^2 \\ y'_x = \dfrac{3-3t^2}{2-2t} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 2t - t^2 \\ y''_{x^2} = \dfrac{\dfrac{-6t(2-2t)+2(3-3t^2)}{(2-2t)^2}}{2-2t} = \end{cases}$$

$$= \frac{-12t + 12t^2 + 6 - 6t}{(2-2t)^3} =$$

$$= \frac{12t^2 - 18t + 6}{2^3(1-t)^3} = \frac{6t^2 - 9t + 3}{4(1-t)^3}.$$

$$\begin{cases} x = 2t - t^2 \\ y''_{x^2} = \dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{6t^2 - 9t + 3}{(1-t)^3} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 2t - t^2 \\ y'''_{x^3} = \dfrac{1}{4}\dfrac{\dfrac{(12t-9)(1-t)^3 + (6t^2-9t+3)\,3(1-t)^2}{(1-t)^6}}{2-2t} = \end{cases}$$

$$= -\frac{1}{8}\cdot\frac{(12t-9)(1-t)^3 + 3(1-t^2)(6t^2-9t+3)}{(1-t)^7}.$$

$$\begin{cases} x = 2t - t^2 \\ y'''_{x^3} = \dfrac{(12t-9)(1-t)^3 + 3(1-t^2)(6t^2-9t+3)}{8\,(1-t)^7}. \end{cases}$$

3.165

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y'_x = \dfrac{a\cos t}{-a\sin t} = -\operatorname{ctg} t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y''_{x^2} = \dfrac{\dfrac{1}{\sin^2 t}}{-a\sin t} = -\dfrac{1}{a\sin^3 t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y'''_{x^3} = \dfrac{-\frac{1}{a}(-3)\sin^{4}t\cdot\cos t}{-a\sin t} = \dfrac{3\cos t}{-a^2\sin^5 t}. \end{cases}$$

3.175 $y=\sqrt{x}$, $y^{(10)}$ - ?

∇ $y = x^{\frac{1}{2}}$

$y^{(10)}$ = аналог.

3.176 $y=\frac{x^2}{1-x}$; $y^{(8)}$ - ?

∇ $y = \underbrace{x^2}_{v}\,\underbrace{(1-x)^{-1}}_{u}$

$$y^{(8)} = \left[(u\cdot v)^{(8)} = \sum_{k=0}^{8} C_8^k\, u^{(n-k)} v^{(k)}\right] = \frac{8!}{0!(8-0)!}\cdot x^2\left((1-x)^{-1}\right)^{(8)} +$$

$$+ \frac{8!}{1!(8-1)!}\,2x\cdot\left((1-x)^{-1}\right)^{(7)} + \frac{8!}{\cancel{2}!(8-2)!}\,2\cdot\left((1-x)^{-1}\right)^{(6)} +$$

$$+ \frac{8!}{3!(8-3)!}\,0 + 0 \dots + 0 = x^2\left((1-x)^{-1}\right)^{(8)} + 16x\left((1-x)^{-1}\right)^{(7)} +$$

$$+ 56\left((1-x)^{-1}\right)^{(6)} = x^2(+1)(+2)(+3)\dots(+1+7)(1-x)^{-1-8} +$$

$$+16x(+1)(+2)\dots(+1+6)(1-x)^{-1-7} + 56(+1)(+2)\dots(+1+5)(1-x)^{-1-6} =$$

$$= \frac{7!x^2}{(1-x)^{+9}} + \frac{7!\,16x}{(1-x)^8} + \frac{6!\,56}{(1-x)^7} = \frac{7!x^2}{(1-x)^9} + \frac{2\cdot 8!x}{(1-x)^8} +$$

$$+ \frac{8!}{(1-x)^7}.\ \Delta$$

3.178 $y = \underbrace{x^2}_{v}\,\underbrace{e^{2x}}_{u}$; $y^{(20)}$ - ?

$$\nabla\ y^{(20)} = \left[(u\cdot v)^{(20)} = \sum_{k=0}^{20} C_{20}^k\, u^{(n-k)}\cdot v^k\right] =$$

$$= 1\cdot x^2\left(e^{2x}\right)^{(20)} + 20\cdot 2x\cdot\left(e^{2x}\right)^{(19)} + \frac{20!}{2!\,18!}\,2\cdot\left(e^{2x}\right)^{(18)} + \frac{20!}{3!\,17!}\,0 =$$

$$= x^2\left(e^{2x}\right)^{20}\cdot 2^{20} + 20\cdot 2x\cdot\left(e^{2x}\right)^{19}\cdot 2^{19} + 19\cdot 20\cdot\left(e^{2x}\right)^{18}\cdot 2^{18} =$$

$$= 2^{18}\cdot e^{36x}\left(4\cdot x^2\cdot e^{4x} + 80x\cdot e^{2x} + 380\right).\ \Delta$$

3.184 $y = \sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x$; $y^{(10)} - ?$

∇

$$y = \sin 2x \,(\sin x \cdot \sin 3x) = \sin 2x \cdot \frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 4x) =$$

$$= \frac{1}{2}(\sin 2x \cdot \cos 2x \cdot 2)\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sin 2x \cdot \cos 4x =$$

$$= \frac{1}{4}\sin 4x - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\left(\sin 6x + \sin(-2x)\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\sin 4x - \frac{1}{4}\sin 6x + \frac{1}{4}\sin 2x.$$

$$y^{(10)} = \frac{1}{4}\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot 10 + 4x\right)\cdot 4^{10} - \frac{1}{4}\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot 10 + 6x\right)\cdot 6^{10} +$$

$$+ \frac{1}{4}\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot 10 + 2x\right)\cdot 2^{10} = \frac{1}{4}4^{10}\sin(\pi + 4x) - \frac{1}{4}\sin(\pi + 6x)\,6^{10} +$$

$$+ \frac{1}{4}\sin(\pi + 2x)\cdot 2^{10} = -4^{9}\sin 4x + \frac{6^{10}}{4}\sin 6x - 2^{8}\sin 2x.$$

Δ

Вважаючи x незал. змінною, знайти диференціали вказаного порядку:

3.188 $y = x^5$

∇ $d^5 y = 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot x^0 = 5!$ Δ

3.190 $y = \underbrace{x}_{v}\underbrace{\cos 2x}_{u}$; $d^{10}y - ?$

∇ $d^{10}y = y^{(10)}(dx)^{10}$

$$y^{(10)} = \left[(uv)^{(10)} = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^{k}\, u^{(10-k)} v^{k}\right] = 1\cdot x\cdot(\cos 2x)^{(10)} + \frac{10!}{1!\,9!}\,1\cdot(\cos 2x)^{(9)}$$

$$+ \frac{10!}{2!\,8!}\cdot 0 = x\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot 10 + 2x\right)\cdot 2^{10} + 10\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot 9 + 2x\right)\cdot 2^{9} =$$

$$= 2^{10}\left(x\cdot\cos(\pi + 2x) + 5\cos\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right)\right) = 2^{10}(-x\cdot\cos 2x - 5\cos 2x).$$

Δ

3.194 $u=u(x)$ – диф-на необх. число раз

d^4y – ?

$y=e^u$

∇

$dy = e^u du;$

$d^2y = e^u du\, du + e^u d^2u = e^u (du)^2 + e^u d^2u;$

$d^3y = e^u du\,(du)^2 + e^u\, 2du \cdot d^2u + e^u du\, d^2u + e^u d^3u =$

$= e^u (du)^3 + 3e^u du\, d^2u + e^u d^3u$

$d^4y = e^u \cdot du (du)^3 + e^u \cdot 3(du)^2 d^2u + 3e^u \cdot du\, du\, d^2u +$

$+ 3e^u \cdot d^2u\, d^2u + 3e^u \cdot du \cdot d^3u + e^u du\, d^3u + e^u d^4u$

$= e^u (du)^4 + 3e^u (du)^2 d^2u + 3e^u (du)^2 d^2u +$

$+ 3e^u (d^2u)^2 + 3e^u \cdot du\, d^3u + e^u du\, d^3u + e^u d^4u =$

$= e^u (du)^4 + 6e^u (du)^2 d^2u + 3e^u (d^2u)^2 + 4e^u du\, d^3u +$
$+ e^u d^4u$

Δ

3.195 $y = \ln u$, $u = u(x)$ – диференційовне необхідне число раз

d^3y – ?

∇

$dy = \frac{1}{u} du;$

$d^2y = -\frac{1}{u^2} du \cdot du + \frac{1}{u} d(du) = -\frac{(du)^2}{u^2} + \frac{d^2u}{u};$

$d^3y = -\frac{d((du)^2)\cdot u^2 - (du)^2 \cdot 2u \cdot du}{u^4} + \frac{d(d^2u)\cdot u - d^2u \cdot du}{u^2} =$

$= \frac{-2du \cdot d^2u \cdot u^2 + 2u(du)^3 + u^3 d^3u - u^2 d^2u\, du}{u^4} =$

$= \frac{1}{u^4}\left(-3u^2 du \cdot d^2u + 2u(du)^3 + u^3 d^3u\right).$ Δ

Знайти $y^{(n)}$, якщо:

(3.196) $y = \frac{x}{x(1-x)}$; $D(y)$: $x \in \mathbb{R} \setminus \{0;1\}$

∇ $y = (1-x)^{-1}$

$y' = (-1)\cdot(1-x)^{-1-1}\cdot(-1) = (1-x)^{-2}$

$y'' = (-2)\cdot(1-x)^{-2-1}\cdot(-1) = 2(1-x)^{-3} = 2!\,(1-x)^{-3}$

$y''' = 2\cdot(-3)(1-x)^{-4}\cdot(-1) = 2\cdot3\cdot(1-x)^{-4} = 3!\,(1-x)^{-4}$

$y^{IV} = 2\cdot3\cdot(-4)\cdot(1-x)^{-5}\cdot(-1) = 2\cdot3\cdot4\,(1-x)^{-5} = 4!\,(1-x)^{-5}$

$\dots$

$y^{(n)} = n!\,(1-x)^{-(n+1)} = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$. Δ

(3.197) $y = \frac{1}{x^2-3x+2}$; $y^{(n)}$ - ?

∇

$y = \frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{\overset{x-1}{\cancel{1}}}{x-2} - \frac{\overset{x-2}{\cancel{1}}}{x-1} = \underbrace{(x-2)^{-1}}_{y_1} - \underbrace{(x-1)^{-1}}_{y_2}$

$y_1' = -1\cdot(x-2)^{-2}$

$y_1'' = (-1)\cdot(-2)\cdot(x-2)^{-3} = 2!\,(x-2)^{-3}$

$y_1''' = (-1)\cdot(-2)\cdot(-3)(x-2)^{-4} = (-1)\cdot3!\,(x-2)^{-4}$

$y_1^{(n)} = (-1)^n\cdot n!\,(x-2)^{-n-1}$

$-$

$y_2^{(n)} = (-1)^n\cdot n!\,(x-1)^{-n-1}$

$y^{(n)} = (-1)^n\cdot n!\left((x-2)^{-n-1} - (x-1)^{-n-1}\right) = \frac{(-1)^n\cdot n!}{1}\left(\frac{1}{(x-2)^{n+1}} - \frac{1}{(x-1)^{n+1}}\right)$

3.198 $y = \sin^2 x; \quad y^{(n)} - ?$

∇ $y' = 2\sin x \cdot \cos x = 2^1 \sin x \cdot \cos x = 2^0 \sin 2x$

$y'' = 2\cos x \cdot \cos x - 2\sin x \cdot \sin x = 2\cos^2 x - 2\sin^2 x = 2^1 \cos 2x$

$y''' = 2(-2\cos x \cdot \sin x - 2\sin x \cdot \cos x) = -8\sin x \cdot \cos x = -2^3 \sin x \cdot \cos x =$

$= -2^2 \sin 2x$

$y^{IV} = -2^2 2\cos 2x = -2^3 \cos 2x$

$y^{(5)} = +2^3 \sin 2x \cdot 2 = 2^4 \sin 2x$

$y^{(6)} = 2^5 \cos 2x$

$y^{(7)} = -2^6 \sin 2x$

$y^{(8)} = -2^7 \cos 2x$ ...

$$y^{(n)} = -2^{n-1} \cos\left(\frac{\pi}{2} n + 2x\right). \quad \Delta$$

3.209 $y = \sin^4 x + \cos^4 x \; ; \quad y^{(n)} - ?$

∇ $y = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x$

$y' = -\frac{1}{2} \cdot 2\sin 2x \cos 2x \cdot 2 = -2\sin 2x \cdot \cos 2x = -\sin 4x$

$y'' = -4\cos 4x$

$y''' = +4^2 \sin 4x$

$y'''' = 4^3 \cos 4x$

...

$$y^{(n)} = 4^{n-1} \cos\left(\frac{\pi}{2} n + 4x\right).$$