(16) Інтегральна ознака збіжності ряду.

Т. 12.3.4 (Інтегральна ознака збіжності ряду). Якщо ф-я $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$ невід'ємна і незростаюча, то

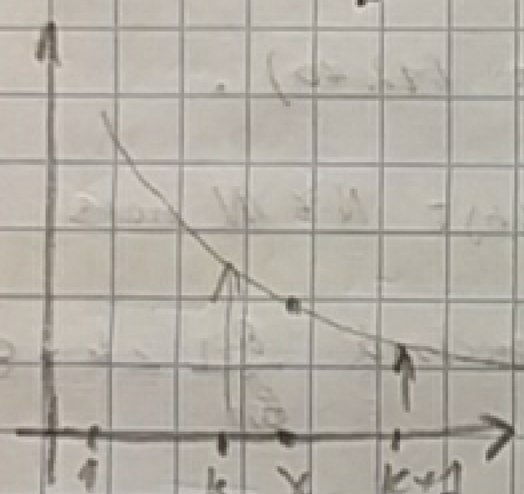
$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f(n)<+\infty\right)\Leftrightarrow\left(\int_1^{+\infty} f(x)\,dx<+\infty\right). \qquad (12.12)$$

▼ Якщо $k\le x\le k+1$, то, оскільки ф-я f незростаюча, маємо

$$f(k)\ge f(x)\ge f(k+1).$$

Тому

$$f(k)=\int_k^{k+1} f(k)\,dx \ge \int_k^{k+1} f(x)\,dx \ge \int_k^{k+1} f(k+1)\,dx = f(k+1)$$



Отже, для всіх $n\in\mathbb{N}$ виконуються співвідношення $\sum_{k=1}^{n} f(k)\ge\int_1^{n+1} f(x)\,dx \ge \sum_{k=1}^{n} f(k+1)$

Позначивши $S_n=\sum_{k=1}^{n} f(k)$, отримаємо

$$S_n\ge\int_1^{n+1}f(x)\,dx\ge S_{n+1}-f(1). \qquad (12.13)$$

(⇒) Якщо $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)\overset{def}{=}S<\infty$, то зрозуміло, що $(\forall n\in\mathbb{N})\{S_n\le S\}$, отже, з огляду на (12.13) маємо $\int_1^{n+1} f(x)\,dx\le S$. Тому $\forall b\in[1,+\infty)$ виконується $F(b)=\int_1^{b} f(x)\,dx\le\int_1^{[b]+1} f(x)\,dx\le S$
$\Rightarrow$ цей інтеграл у правій частині (12.12) збігається.

(⇐) Якщо цей інтеграл збігається, то $\forall$ $n\in\mathbb{N}$ буде правильним $\int_1^{n+1} f(x)\,dx\le\int_1^{+\infty} f(x)\,dx \Rightarrow S_{n+1}\le f(1)+\int_1^{+\infty}f(x)\,dx$.

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f(n)<+\infty$ ▲