Теорема 6.2.2. Теорема Лагранжа.

Нехай ф-я $y = f(x)$

1) неперервна на відрізку $[a, b]$;

2) диференційована на інтервалі $(a; b)$

Тоді існує точка $\varepsilon \in (a; b)$ така, що $f(b) - f(a) =$
$= f'(\varepsilon)(b - a)$ (6.1)

Доведення ∇ Розглянемо на відр. $[a, b]$ ф-ю

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Зауважимо, що ф-я $y = F(x)$ задовільняє всі умови теореми Ролля. Справді, ф-я $y = F(x)$ є неперервною на $[a; b]$, диференційована на (a, b) причому $F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$, і $F(a) = F(b) = 0$. Тому з огляду на теор. Ролля знайдеться точка $\varepsilon \in (a; b)$, для якої $F'(\varepsilon) = f'(\varepsilon) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$, звідки випливає співвідношення (6.1) Δ.

Теорема 6.2.3. Теорема Коші

Нехай ф-ї $f(x)$ та $g(x)$:

1) неперервні на відрізку $[a; b]$;

2) диференційовані на інтервалі $(a; b)$;

3) $(\forall x \in (a, b))\{g'(x) \neq 0\}$

Тоді існує точка $\varepsilon \in (a; b)$ така, що

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\varepsilon)}{g'(\varepsilon)} \quad (6.2)$$

Доведення: ∇ Доведемо, що співвідношення (6.2) має сенс, тобто що $g(b) \neq g(a)$. Насправді, якби $g(a) = g(b)$, то для ф-ї $g(x)$ виконувались б умови теореми Ролля і згідно з цією теор. існувала б точка $\eta \in (a; b)$ така, що $g'(\eta) = 0$. А це суперечило б умові теореми. Отже, $g(a) \neq g(b)$. Розглянемо ф-ю $F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot (g(x) - g(a))$

З огляду на умови теореми ф-я $F(x)$ задовільняє умови Ролля, тому існує точка $\varepsilon \in (a, b)$ така, що $F'(\varepsilon) = 0$, тобто $f'(\varepsilon) = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g'(\varepsilon)$

Звідки випливає співвідношення. (6.2) Δ

Теорема 6.2.1. Теорема Ролля.

Нехай ф-я $y = f(x)$:

1) Неперервна на відрізку $[a; b]$;

2) диференційована на інтервалі $(a; b)$;

3) $f(a) = f(b)$

Тоді існує точка $\varepsilon \in (a; b)$ така, що $f(c) = 0$

Доведення: Оскільки ф-я $y = f(x)$ неперервна на відр $[a; b]$, то з огляду на теорему Вайєрштрасса вона досягає на цьому відрізку найбільшого та найменшого значень. Нехай $M = \max\limits_{[a; b]} f(x)$, $m = \min\limits_{x \in [a; b]} f(x)$. Тоді $(\forall x \in [a; b])\{m \leq f(x) \leq M\}$

Можливі два випадки: $m = M$ та $m < M$

Розглянемо перший випадок. Тоді $(\forall x \in [a; b])$ $\{f(x) = m = M = const\}$. Звідси $(\forall x \in [a; b])\{f'(x) = 0\}$

Отже, за ε можна взяти будь-яку точку з інтервалу $(a; b)$

Розглянемо другий випадок. Оскільки $f(a) = f(b)$, то хоча б одне зі значень m та M ф-я досягає у якійсь точці $\varepsilon \in (a; b)$. Отже, точка

ξ є точкою екстремуму ф-ї $y = f(x)$. Тому з огляду на диференційованість ф-ї $y = f(x)$ в точці ξ та згідно з теоремою Ферма отримуємо, що $f'(\xi) = 0$ Δ.