Змістовий модуль 1. ПРОПОЗИЦІЙНА ЛОГІКА

Тема 2. Закони пропозиційної логіки. Нормальні форми пропозиційної логіки.

План лекції.

- Закони пропозиційної логіки
- Алгебра Буля
- Джордж Буль
- Ауґустус де Морган
- Нормальні форми пропозиційної логіки

1.7. Закони пропозиційної логіки

Формули A і B називають *еквівалентними*, або *рівносильними, тотожними* (позначають $A \equiv B$, або $A \Leftrightarrow B$), тоді й тільки тоді, коли значення істинності A і B збігаються при кожній інтерпретації A і B.

Властивість еквівалентності формул A і B можна сформулювати у вигляді такого твердження.

Теорема 1.1. Формули A і B еквівалентні тоді й лише тоді, коли формула $A \leftrightarrow B$ загальнозначима, тобто $A \equiv B$ тоді й тільки тоді, коли $\models (A \leftrightarrow B)$.

Приклад 1.12. За допомогою таблиці істинності доведемо, що $p \to q \equiv \neg p \vee q$. Результат розв'язування задачі наведено в таблиці 1.8.

Табл. 1.8

p	q	$p \to q$	$\neg p$	$\neg p \vee q$	$(p \to q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$
T	T	T	F	T	T
T	F	F	F	F	T
F	T	T	T	T	T
F	F	T	T	T	T

Приклад 1.13. За допомогою таблиці істинності доведемо, що $p \to q$ не еквівалентно $q \to p$. Результат розв'язування задачі наведено в таблиці 1.9.

Табл. 1.9

p	q	$p \to q$	$q \to p$	$(p \to q) \leftrightarrow (q \to p)$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

Розглянемо еквівалентні формули, які задають правила перетворень. Такі логічні еквівалентності називають *законами пропозиційної логіки*. Перетворення виконують заміною якоїсь формули в складі іншої формули на еквівалентну їй формулу. Цю процедуру повторюють доти, доки не буде отримано формулу в потрібній формі. Основні закони пропозиційної логіки наведено в таблиці 1.10. У цих законах через **T** позначено складене висловлення, яке завжди істинне (має значення T в усіх інтерпретаціях), а через **F** позначено завжди фальшиве висловлення (має значення F в усіх інтерпретаціях).

Табл. 1.10

	Назва закону	Формулювання закону
(1)	Закони комутативності	*а*) $A\vee B\equiv B\vee A$ *б*) $A\wedge B\equiv B\wedge A$
(2)	Закони асоціативності	*а*) $(A\vee B)\vee C\equiv A\vee(B\vee C)$ *б*) $(A\wedge B)\wedge C\equiv A\wedge(B\wedge C)$
(3)	Закони дистрибутивності	*а*) $A\vee(B\wedge C)\equiv(A\vee B)\wedge(A\vee C)$ *б*) $A\wedge(B\vee C)\equiv(A\wedge B)\vee(A\wedge C)$
(4)	Закон подвійного заперечення	$\neg(\neg A)\equiv A$
(5)	Закони ідемпотентності	*а*) $A\vee A\equiv A$ *б*) $A\wedge A\equiv A$
(6)	Закони де Моргана	*а*) $\neg(A\vee B)\equiv\neg A\wedge\neg B$ *б*) $\neg(A\wedge B)\equiv\neg A\vee\neg B$
(7)	Закони поглинання	*а*) $(A\vee B)\wedge A\equiv A$ *б*) $(A\wedge B)\vee A\equiv A$
(8)	Закони тотожності	*а*) $A\wedge\mathbf{T}\equiv A$ *б*) $A\vee\mathbf{F}\equiv A$
(9)	Закони домінування	*а*) $A\vee\mathbf{T}\equiv\mathbf{T}$ *б*) $A\wedge\mathbf{F}\equiv\mathbf{F}$
(10)	Закони заперечення	*а*) $A\vee\neg A\equiv\mathbf{T}$ *б*) $A\wedge\neg A\equiv\mathbf{F}$

Закони асоціативності дозволяють записувати багатомісні диз'юнкції та кон'юнкції без дужок. Усі наведені в таблиці 1.10 закони можна довести, побудувавши таблиці істинності.

Два наступні закони дають змогу *усувати* логічні операції імплікації та еквіваленції з формул, тобто перетворювати їх у формули, які таких операцій не містять:

(11) $A\to B\equiv\neg A\vee B$,

(12) $A\leftrightarrow B\equiv(A\to B)\wedge(B\to A)$.

Ці закони можна також використовувати для *введення* імплікації та еквіваленції. Логічні еквівалентності (11), (12) також можна довести за допомогою таблиць істинності.

Застосовуючи закони пропозиційної логіки, можна доводити логічні еквівалентності формул уже без використання таблиць істинності, на основі тотожних перетворень. Покажемо на прикладах, як це робити.

Приклад 1.14. Застосувавши закони пропозиційної логіки, доведемо логічну еквівалентність формул $p\to(q\wedge r)$ і $(p\to q)\wedge(p\to r)$. Запишемо послідовність перетворень і назви використаних законів:

$p\to(q\wedge r)\equiv\neg p\vee(q\wedge r)$ (за законом усунення імплікації 11)

$\equiv(\neg p\vee q)\wedge(\neg p\vee r)$ (за законом дистрибутивності 3*а*)

$\equiv(p\to q)\wedge(p\to r)$ (за законом уведення імплікації).

Приклад 1.15. За допомогою законів пропозиційної логіки доведемо логічну еквівалентність формул $p\to q$ та $\neg q\to\neg p$. Цю логічну еквівалентність називають *законом контрапозиції*.

$p\to q\equiv\neg p\vee q$ (за законом усунення імплікації 11)

$\equiv q\vee\neg p$ (за законом комутативності 1*а*)

$\equiv\neg(\neg q)\vee\neg p$ (за законом подвійного заперечення 6)

$\equiv\neg q\to\neg p$ (за законом уведення імплікації 11).

1.8. Алгебра Буля

Уявимо тепер теорію, формули якої побудовані із атомарних формул (тобто змінних) за допомогою трьох операцій, які є аналогами $\wedge$, $\vee$, $\neg$ і аналогів двох формул **T** і **F** зі значеннями істинності T і F, відповідно. Якщо формули з таблиці 1.10 залишаються правильними при заміні $\wedge$, $\vee$, $\neg$, **T**, **F** на їхні аналоги, то ми маємо нову абстрактну алгебру, яку називають *алгеброю Буля*.

Отже, алгебра висловлень – це приклад алгебри Буля.

Алгебра висловлень – це булева алгебра логіки. Існують і інші булеві алгебри, наприклад, булева алгебра булевих функцій. Змінні в ній – це булеві змінні, операції $\wedge$, $\vee$, залишаються тими самими, $\neg x$, позначають $\bar{x}$, кожне **F** замінюють на 0, а кожне **T** – на 1. Інший приклад – теорія множин Кантора. Змінні в ній – це підмножини множини X. Роль операцій $\wedge$, $\vee$, $\neg$ відіграють перетин $\cap$, об'єднання $\cup$ та доповнення $\setminus$ (до X), а замість **T** і **F** потрібно взяти саму множину X і порожню множину $\varnothing$.

Зазначимо, що булеві алгебри можуть бути визначені різними способами. Найзагальніше визначення через властивості операцій дано, зокрема, в [Rosen, 7ed., p. 817]. Там же обговорюється визначення булевої алгебри з використанням поняття решітки.

1.9. Джордж Буль

Джордж Буль (George Boole), (2 листопада 1815, Лінкольн, Англія — 8 грудня 1864, Корк, Ірландія). Матеріальне становище його батьків було дуже скрутним; тому, не зважаючи на виражений потяг молодого Джорджа до знань, батьки не змогли дати йому систематичної освіти й, окрім початкових класів школи для дітей бідняків, Буль не вчився в жодному навчальному закладі. Нешаблонність наукової творчості Буля затримала визнання його заслуг, яке прийшло лише тоді, коли самого Буля вже давно не було в живих.

Публікація першої статті («Теорія математичних перетворень», 1839) призвела до дружби між Булем і Д. Ф. Грегорі (редактором «Кембриджського математичного журналу», де стаття була опублікована), що тривала до самої смерті останнього 1844 року. У цей журнал і «Кембриджський і дублінський математичний журнал», що наслідував його, Буль виклав двадцять дві статті. Усього Булем було опубліковано близько п'ятдесяти статей в різних виданнях і декілька монографій.

Другою людиною, підтримка якої виявилася дорогоцінною для Буля, був кембриджський математик, професор університету Аугустус де Морган. Сам де Морган цікавився питаннями логічного обґрунтовування математики, які незабаром стали наріжним каменем усіх роздумів Буля; перші публікації Джорджа Буля зацікавили де Моргана, а коротка брошура «Математичний аналіз логіки, що супроводжується нарисом числення дедуктивних міркувань» (1847) привела його у захват.

У тому ж 1847 р., кількома місяцями пізніше за «Математичний аналіз логіки», вийшов у світ твір самого де Моргана на ту ж тему: «Формальна логіка або числення виводів, необхідних і можливих», де, зокрема, містилися ті логічні закони, які нині називають «законами де Моргана»; ця обставина робила його високу оцінку роботи Буля особливо вагомою. Зусиллями де Моргана, Грегорі й інших друзів і прихильників, Буль став у 1849 р. професором математики знову відкритого католицького коледжу у м. Корк (Ірландія); тут він провів останні 15 років свого життя, нарешті отримавши можливість не лише забезпечити старість батьків, але і спокійно, без думок про хліб насущний, займатися наукою.

У Корку він одружується з Мері Еверест — донькою професора грецької мови у тому ж коледжі, і родичці колишнього генерал-губернатора Індії, іменем якого названа найвища вершина світу «Еверест»; це одруження сприяло зміцненню матеріального добробуту Буля і його соціального статусу. Мері Буль-Еверест багато допомагала чоловікові по роботі, а після його смерті залишила цікаві спогади про свого чоловіка і його наукову творчість. Вона стала матір'ю чотирьох доньок Буля, які всі виявилися чудовими людьми (у нашій країні найвідоміша Етель Ліліан Буль, у заміжжі Войнич, авторка роману «Ґедзь»).

1.10. Авґустус де Морган

Аугустус де Морган (Augustus de Morgan) (27 червня 1806 – 18 березня 1871). був британським математиком та логіком. Він сформулював закони Де Моргана і ввів термін математичної індукції.

1.11. Нормальні форми пропозиційної логіки

У цьому підрозділі розглянемо спеціальні форми для формул пропозиційної логіки – кон'юнктивні та диз'юнктивні нормальні форми.

1.11.1. Кон'юнктивні і диз'юнктивні нормальні форми

Літералом називають атом або його заперечення. Приклади літералів: p, $\neg q$, r. Літерал називають *позитивним*, якщо він не має знака заперечення, і *негативним*, якщо має. Пару літералів $\{p, \neg p\}$ називають *контрарною парою*.

Диз'юнктом (або *елементарною диз'юнкцією*) називають диз'юнкцію літералів. Зокрема, диз'юнкт може складатись з одного літерала. (Завдяки законам асоціативності багатомісні диз'юнкції записуємо без групування дужками.)

Формула A має *кон'юнктивну нормальну форму* (*КНФ*), якщо вона має вид $A= D_1 \wedge D_2 \wedge \ldots \wedge D_k$ ($k \geq 1$), де кожна з формул $D_1, D_2, \ldots, D_k$ – диз'юнкт.

Іншими словами, КНФ – це кон'юнкція диз'юнктів (може бути тільки один диз'юнкт).

Приклад 1.16. Нехай p, q й r – атоми. Тоді $A = (p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee q)$ – формула в КНФ. У ній $D_1 = (p \vee \neg q \vee \neg r)$ і $D_2 = (\neg p \vee q)$, тобто диз'юнкт D_1 – це диз'юнкція літералів p, $\neg q$ та $\neg r$, а D_2 – диз'юнкція літералів $\neg p$ та q.

Теорема 1.2. Для всякої формули A існує еквівалентна до неї формула A_1, яка має кон'юнктивну нормальну форму.

Елементарною кон'юнкцією називають кон'юнкцію літералів. Зокрема, елементарна кон'юнкція може складатись з одного літерала. (Завдяки законам асоціативності багатомісні кон'юнкції записуємо без групування дужками.)

Формула A має *диз'юнктивну нормальну форму* (*ДНФ*), якщо вона має вид $A = C_1 \vee C_2 \vee \ldots \vee C_k$ ($k \geq 1$), де кожна з формул $C_1, C_2, \ldots, C_k$ – елементарна кон'юнкція.

Іншими словами, ДНФ – це диз'юнкція елементарних кон'юнкцій (може бути тільки одна елементарна кон'юнкція).

Приклад 1.17. Нехай p, q й r – атоми. Тоді $A = (\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r)$ – формула в ДНФ. У ній $C_1 = (\neg p \wedge q)$ і $C_2 = (p \wedge \neg q \wedge \neg r)$; тут C_1 – кон'юнкція літералів $\neg p$ та q, а C_2 – кон'юнкція літералів p, $\neg q$ та $\neg r$.

Теорема 1.3. Для всякої формули A існує еквівалентна до неї формула A_1, яка має диз'юнктивну нормальну форму.

Довільну формулу можна перетворити в одну з нормальних форм. Це легко досягти, застосувавши закони пропозиційної логіки (таблиця 1.10).

Домовимося не розрізняти форми, які отримуються одна з одної застосуванням законів комутативності.

Алгоритм приведення формули до КНФ і ДНФ.

Крок 1. Застосувати закони (11) та (12) для усунення логічних операцій $\rightarrow$ та $\leftrightarrow$.

Крок 2. Застосувати закони де Моргана (6) та закон подвійного заперечення (4) для перенесення знака заперечення безпосередньо до атомів.

Крок 3. **Для КНФ.** Якщо формула містить підформулу виду $p\vee(q\wedge r)$ то за дистрибутивним законом (3а) замінити її формулою $(p\vee q)\wedge(p\vee r)$.

Для ДНФ. Якщо формула містить підформулу виду $p\wedge(q\vee r)$ то за дистрибутивним законом (3б) замінити її формулою $(p\wedge q)\vee(p\wedge r)$.

Для спрощення отриманих нормальних форм можна також використати інші закони.

Приклад 1.18. Знайдемо КНФ для формули $\neg(p\wedge\neg q)\wedge(p\rightarrow(q\wedge r))$. Послідовно маємо

$\neg(p\wedge\neg q)\wedge(p\rightarrow(q\wedge r)) \equiv \neg(p\wedge\neg q)\wedge(\neg p\vee(q\wedge r))$ за законом (11)
$\equiv(\neg p\vee\neg(\neg q))\wedge(\neg p\vee(q\wedge r))$ за законом (6б)
$\equiv(\neg p\vee q)\wedge(\neg p\vee(q\wedge r))$ за законом (4)
$\equiv(\neg p\vee q)\wedge((\neg p\vee q)\wedge(\neg p\vee r))$ за законом (3а)
$\equiv(\neg p\vee q)\wedge(\neg p\vee q)\wedge(\neg p\vee r)$ за законом (2б)
$\equiv(\neg p\vee q)\wedge(\neg p\vee r).$ за законом (5б)

Приклад 1.19. Знайдемо ДНФ для формули $\neg(p\leftrightarrow q)\wedge p$. Послідовно обчислюємо

$\neg(p\leftrightarrow q)\wedge p\equiv\neg((p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow p))\wedge p$ за законом (12)
$\equiv\neg((\neg p\vee q)\wedge(\neg q\vee p))\wedge p$ за законом (11)
$\equiv(\neg(\neg p\vee q)\vee\neg(\neg q\vee p))\wedge p$ за законом (6б)
$\equiv(\neg(\neg p)\wedge\neg q)\vee(\neg(\neg q)\wedge\neg p))\wedge p$ за законом (6а)
$\equiv((p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q))\wedge p$ за законами (1б) і (4)
$\equiv(p\wedge\neg q\wedge p)\vee(\neg p\wedge q\wedge p).$ за законами (3б) і (2б)

Це вже є ДНФ. Але її можна спростити, використавши закон (5б), закон (10б) і закон (8б) з таблиці (10):

$$(p\wedge\neg q\wedge p)\vee(\neg p\wedge q\wedge p)\equiv(p\wedge\neg q).$$

1.11.2. Досконала кон'юнктивна і досконала диз'юнктивна нормальні форми

Зазначимо, що може бути декілька еквівалентних КНФ чи ДНФ (тобто єдиності немає). Іноді ця обставина може виявитися незручною. Щоб її виключити, вводять більш вузьке поняття – досконалу кон'юнктивну форму (ДКНФ) і досконалу диз'юнктивну нормальну форму (ДДНФ).

Формула A є у *досконалій кон'юнктивній нормальній формі (ДКНФ)* відносно атомарних формул $p_1, p_2, \ldots, p_n$, якщо виконані такі умови:

1) $A=A(p_1, p_2, \ldots, p_n)$, тобто в запису формули наявні тільки $p_1, p_2, \ldots, p_n$.
2) A має кон'юнктивну нормальну форму, тобто $A=D_1\wedge D_2\wedge\ldots\wedge D_k$, де $D_1, D_2, \ldots, D_k$ – диз'юнкти;
3) кожний диз'юнкт містить один і тільки один із літералів p_i або $\neg p_i$ для будь-якого $i=1, 2, \ldots, k$;
4) A не містить однакових диз'юнктів.

Приклад 1.20. Формули p, $\neg p \vee q$, $(\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)$ є у ДКНФ відносно атомарних формул, які містяться в них, а формули $\neg(p \vee q)$, $(p \vee q) \wedge (\neg p \vee r)$, $(p \vee q \vee p) \wedge (\neg p \vee \neg q)$, $(p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \wedge (p \vee q)$ не є у ДКНФ (відносно атомарних формул, які містяться в них). Для першої формули не виконана друга умова, для другої і третьої – третя умова, для четвертої формули не виконана остання умова з означення ДКНФ.

Теорема 1.4. Для будь-якої формули A, яка не є загальнозначимою, існує еквівалентна до неї формула A_1, яка є у досконалій кон'юнктивній нормальній формі.

Алгоритм приведення формули до ДКНФ

Крок 1 – Крок 3 – ті самі, що й в алгоритмі приведення до КНФ.

Крок 4. Якщо диз'юнкт D не містить ні атомарної формули p_i, ні її заперечення $\neg p_i$ для деякого $i = 1, 2, \ldots, n$, то замінити D двома диз'юнктами $(D \vee p_i) \wedge (D \vee \neg p_i)$.

Зауваження. Це – *розщеплення диз'юнкта*, при перетвореннях використано закони (9а) і (3а) з таблиці 10: $D \equiv D \vee \mathbf{F} \equiv D \vee (p \wedge \neg p) \equiv (D \vee p_i) \wedge (D \vee \neg p_i)$.

Крок 5. Якщо диз'юнкт D містить два входження одного літерала, то одне з них викреслити. Якщо ж диз'юнкт D містить p_i і $\neg p_i$ для деякого $i = 1, 2, \ldots, n$, то викреслити весь диз'юнкт.

Крок 6. Якщо формула містить однакові диз'юнкти, то залишити тільки один із них.

Приклад 1.21. Знайдемо ДКНФ для формули $\neg(p \wedge \neg q) \wedge (p \to (q \wedge r))$. В одному з попередніх прикладів ми отримали КНФ для цієї формули, а саме кроки 1 – 3 привели до такого результату: $(\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee r)$. Ця КНФ не є досконалою, бо не виконана третя умова в означенні ДКНФ. Виконаємо кроки 4 і 6, тоді отримаємо:

$$(\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee r) \equiv (\neg p \vee q \vee (r \wedge \neg r)) \wedge (\neg p \vee (q \wedge \neg q) \vee r) \equiv$$
$$\equiv (\neg p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r) \equiv$$
$$\equiv (\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r).$$

Остання формула є у ДКНФ.

Природно виникає питання про те, навіщо у формулюванні теореми про ДКНФ вимагається, щоб формула A не була загальнозначимою? Неважко довести, що коли формула A – загальнозначима, тобто її значення при будь-якій інтерпретації дорівнює T, то після приведення A до КНФ кожний диз'юнкт міститиме хоча б одну контрарну пару літералів $\{p_i, \neg p_i\}$. Але в такому разі на кроці 5 усі диз'юнкти будуть викреслені.

Аналогічно до попереднього можна ввести поняття досконалої диз'юнктивної нормальної форми.

Формула A є у *досконалій диз'юнктивній нормальній формі* (*ДДНФ*) відносно атомарних формул $p_1, p_2, \ldots, p_n$, якщо виконані такі умови:

1) $A = A(p_1, p_2, \ldots, p_n)$, тобто в запису формули наявні тільки $p_1, p_2, \ldots, p_n$.
2) A має диз'юнктивну нормальну форму, тобто $A = C_1 \vee C_2 \vee \ldots \vee C_k$, де $C_1, C_2, \ldots, C_k$ – елементарні кон'юнкції;
3) кожна елементарна кон'юнкція містить один і тільки один із літералів p_i або $\neg p_i$ для будь-якого $i = 1, 2, \ldots, k$;
4) A не містить однакових елементарних кон'юнкцій.

Теорема 1.5. Для будь-якої виконуваної формули A існує еквівалентна до неї формула A_1, яка є у досконалій диз'юнктивній нормальній формі.

Алгоритм приведення до ДДНФ

Крок 1 – Крок 3 – ті самі, що й в алгоритмі приведення до ДНФ.

Крок 4. Якщо елементарна кон'юнкція C не містить ні атомарної формули p_i, ні її заперечення $\neg p_i$ для деякого $i = 1, 2, \ldots, n$, то замінити c двома елементарними кон'юнкціями $(C \wedge p_i) \vee (C \wedge \neg p_i)$.

Зауваження. Це – *розщеплення елементарної кон'юнкції*, при перетвореннях використано закони (9б) і (3б):

$$C \equiv C \wedge \mathbf{T} \equiv C \wedge (p_i \vee \neg p_i) \equiv (C \wedge p_i) \vee (C \wedge \neg p_i).$$

Крок 5. Якщо елементарна кон'юнкція C містить два входження одного літерала, то одне з них викреслити. Якщо ж елементарна кон'юнкція c містить p_i і $\neg p_i$ для деякого $i = 1, 2, \ldots, n$, то викреслити всю елементарну кон'юнкцію.

Крок 6. Якщо формула містить однакові елементарні кон'юнкції, то залишити тільки одну із них.

Приклад 1.22. Знайдемо ДДНФ для формули $(p \wedge q) \vee (p \wedge \neg r)$. Ця формула є у ДНФ, тому виконання алгоритму приведення до ДДНФ починається з кроку 4.

$$(p \wedge q) \vee (p \wedge \neg r) \equiv (p \wedge q \wedge (r \vee \neg r)) \vee (p \wedge (q \vee \neg q) \wedge \neg r) \equiv$$
$$\equiv (p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \equiv$$
$$\equiv (p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r).$$

Аналогічно до попереднього виникає питання про те, навіщо у формулюванні теореми про ДДНФ вимагається виконуваність формули A? Неважко довести, що коли формула A – суперечність, тобто її значення при будь-якій інтерпретації дорівнює F, то після приведення A до ДНФ кожна елементарна кон'юнкція міститиме хоча б одну контрарну пару літералів $\{p_i, \neg p_i\}$. Але в такому разі на кроці 5 усі елементарні кон'юнкції будуть викреслені.

Є ще один спосіб приведення формули до ДКНФ і до ДДНФ, який ґрунтується на побудові таблиці істинності заданої формули. Пояснимо цей спосіб на прикладі.

1.11.3. Побудова ДКНФ на основі таблиці істинності.

Приведемо формулу $A = p \wedge (q \to r)$ до ДКНФ. Складемо таблицю істинності для цієї формули (таблиця 1.11).

Табл. 1.11

	p	q	r	$q \to r$	$p \wedge (q \to r)$
♦	T	T	T	T	T
•	T	T	F	F	F
♦	T	F	T	T	T
♦	T	F	F	T	T
•	F	T	T	T	F
•	F	T	F	F	F
•	F	F	T	T	F
•	F	F	F	T	F

У таблиці виділимо рядки з інтерпретаціями, у яких формула має значення F – ці рядки позначено •. (Хоча б один такий рядок має бути, бо ця формула не є загальнозначимою.) Для кожної з інтерпретацій у виділених рядках побудуємо диз'юнкт, у який входять усі атоми, за таким правилом: атом береться із запереченням, якщо він має значення T в розглядуваній інтерпретації, і без заперечення, якщо має значення F.

Зауваження. Легко побачити, що тільки в інтерпретації, за якою побудований диз'юнкт, він має значення F, а в усіх інших інтерпретаціях – значення T.

Другому рядку таблиці відповідатиме диз'юнкт $(\neg p \vee \neg q \vee r)$, п'ятому – $(p \vee \neg q \vee \neg r)$, шостому – $(p \vee \neg q \vee r)$, сьомому – $(p \vee q \vee \neg r)$, восьмому – $(p \vee q \vee r)$. Тепер запишемо кон'юнкцію отриманих диз'юнктів. Формула

$$A_1 = (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee q \vee r)$$

має ДКНФ відносно p, q, r. У той же час A_1 має ту саму таблицю істинності, що й A – це одразу випливає із зауваження. З цього випливає, що формула A_1, яка є в ДКНФ, еквівалентна A. Отже, A_1 – шукана формула.

1.11.4. Побудова ДДНФ на основі таблиці істинності.

Тепер приведемо формулу $A = p \wedge (q \rightarrow r)$ до ДДНФ. Скористаємося таблицею 1.11.

У таблиці виділимо рядки з інтерпретаціями, у яких у стовпці A стоїть T – ці рядки позначено ♦. (Хоча б один такий рядок має бути, бо формула A виконувана.) Для кожної з інтерпретацій у виділених рядках побудуємо елементарну кон'юнкцію, у яку входять усі атоми, за таким правилом: атом береться без заперечення, якщо він має значення T в розглядуваній інтерпретації, та із запереченням, якщо має значення F.

Зауваження. Легко побачити, що тільки в інтерпретації, за якою побудована елементарна кон'юнкція, вона має значення T, а в усіх інших інтерпретаціях – значення F.

Першому рядку відповідає елементарна кон'юнкція $(p \wedge q \wedge r)$, третьому – $(p \wedge \neg q \wedge r)$, четвертому – $(p \wedge \neg q \wedge \neg r)$. Формула

$$A_1 = (p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r)$$

має ДДНФ відносно p, q, r. Із зауваження випливає, що формула A_1 має ту саму таблицю істинності, що й A. Це означає, що A_1 еквівалентна A. Отже, A_1 – шукана формула.