Змістовий модуль 3. Теорема Ербрана
Тема 7. Ербранівський універсум множини диз'юнктів

План лекції.

- Алгоритмічна нерозв'язність задачі виявлення загальнозначущості формул у логіці першого порядку
- Стандартне подання формул
- Ербранівський універсум і ербранівський базис
- Основний приклад диз'юнкта
- *H*-інтерпретація
- Важливі твердження щодо *H*-інтерпретації

3.1. Алгоритмічна нерозв'язність задачі виявлення загальнозначущості формул у логіці першого порядку

Ми побачили, як розв'язувати задачі способом доведення теорем. Зараз ми починаємо розглядати процедури пошуку доведення. Насправді пошук загальної процедури для перевірки загальнозначущості формули розпочався давно. Першим намагався знайти таку процедуру Лейбніц (1646 – 1716 р.р.), у подальшому зробили нові спроби Пеано (на самому початку XX століття) і школа Гільберта у 1920-х роках.

Ці спроби продовжувалися допоки Чорч і Тьюрінг у 1936 р. незалежно один від одного довели, що не існує алгоритму для перевірки загальнозначущості формул у логіці першого порядку. Проте існують алгоритми пошуку доведення, які можуть підтвердити, що формула загальнозначуща, якщо вона насправді такою є. Для незагальнозначущих формул ці алгоритми, на загал, не закінчують свою роботу. Беручи до уваги результат Чорча й Тьюрінга, це найкраще, чого ми можемо очікувати від алгоритму пошуку доведення.

Дуже важливий підхід до автоматичного доведення теорем був даний Ербраном (Herbrand J.) у 1930 р. За означенням загальнозначуща формула – це формула, яка є істинною в усіх інтерпретаціях. Ербран розробив алгоритм пошуку інтерпретації, котра *спростовує* дану формулу (тобто у цій інтерпретації формула набуває значення F). Проте, якщо дана формула й справді загальнозначуща, то такої інтерпретації не існує й алгоритм закінчує роботу за скінченну кількість кроків. Метод Ербрана слугує основою для більшості алгоритмів пошуку доведення. Ґілмор одним із перших реалізував процедуру Ербрана на комп'ютері. Оскільки формула загальнозначуща тоді й тільки тоді, коли її заперечення є невиконуваною формулою, то його програма призначена виявляти невиконуваність заперечення даної формули. Програма Ґілмора справилася з доведенням декількох простих формул, але під час доведення інших формул логіки першого порядку виникли великі труднощі. Девіс і Патнем удосконалили метод Ґілмора, але він все ще був незручним для практичної реалізації. І лише у 1965 році Дж. Робінсон (Robinson J.A.) запропонував метод резолюцій, який практично застосовують як метод пошуку доведення теорем.

Головним застосуванням логіки першого порядку у комп'ютерних інформаційних технологіях є автоматизація ***пошуку доведень*** *теорем. Ця проблема актуальна при розв'язуванні задач штучного інтелекту, задач, які виникають у базах даних і знань, при вирішенні питань представлення знань і роботи з ними.*

3.2. Стандартне подання формул

Процедури пошуку доведень за *Ербраном* та за *методом резолюцій*, які ми розглядатимемо нижче, насправді є процедурами *пошуку спростування*, тобто замість доведення *загальнозначущості формули* доводиться, що заперечення формули є *невиконувана формула*. Це тільки питання зручності: при використанні процедур спростування не відбувається втрати загальності. Окрім того, ці процедури спростування застосовують до формули у сколемівській нормальній формі, яку також називають *сколемівською стандартною формою*. Ця стандартна форма була уведена Майклом Девісом і Гіларі Патнемом у 1960 р. Вони довели, що , що будь-яке висловлення в логіці першого порядку (без використання рівності) можна записати у такій формі. Нагадаємо, як отримується ця форма (див. п. 2.11.2).

1. Формулу логіки першого порядку зводять до випередженої нормальної форми (префікс є послідовністю кванторів а матриця не містить ніяких кванторів).

2. Матрицю зводять до кон'юнктивної нормальної форми (це завжди можна зробити, бо матриця не містить кванторів).

3. Елімінують (вилучають) квантори існування шляхом використання сколемівських функцій. (При цьому невиконуваність формули зберігається.)

У результаті отримуємо сколемівську нормальну форму.

Раніше (див приклад 2.46) для формули

$$\forall x\, \exists y\, \exists z\, ((\neg P(x, y) \wedge G(x, z)) \vee R(x, y, z)).$$

ми отримали таку стандартну форму:

$$\forall x\, ((\neg P(x, f(x)) \vee R(x, f(x), g(x))) \wedge (G(x, g(x))) \vee R(x, f(x), g(x)))).$$

Матриця цієї стандартної форми складається з двох диз'юнктів. У подальшому стандартну форму будемо подавати у вигляді множини диз'юнктів S. У нашому прикладі

$$S = \{\neg P(x, f(x)) \vee R(x, f(x), g(x)),\ \ G(x, g(x))) \vee R(x, f(x), g(x))\}.$$

Надалі вважатимемо, що множина диз'юнктів S подає кон'юнкцію всіх диз'юнктів із S, де кожна предметна змінна в S є під дією квантора загальності.

3.3. Ербранівський універсум і ербранівський базис

У подальшому істотно використовується співвідношення між суперечністю і логічним наслідком, сформульоване у теоремі 1.7 (див. п. 1.12 та п. 2.7). Нагадаємо цей результат: доведення теореми $(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k) \rightarrow B$ еквівалентне доведенню того, що «розширена» множина формул $\{A_1, A_2, \ldots, A_k, \neg B\}$, утворена об'єднанням множини аксіом $\{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$ і заперечення цільового твердження $\{\neg B\}$, невиконувана. Для застосування алгоритмів пошуку доведення теорем кожну з формул множини $\{A_1, A_2, \ldots, A_k, \neg B\}$ зводять до сколемівської стандартної форми; в отриманих формах викреслюють квантори загальності і символи операції кон'юнкції. Як результат отримують множину диз'юнктів $S = \{D_1, D_2, \ldots, D_m\}$, у якій всі предметні змінні вважаються зв'язаними кванторами загальності.

За означенням множина диз'юнктів S невиконувана тоді й тільки тоді, коли для будь-якої інтерпретації в множині S знайдеться диз'юнкт, фальшивий при цій інтерпретації. Оскільки незручно й неможливо розглядати всі інтерпретації на всіх предметних областях, було би зручно, якби ми могли зафіксувати одну таку спеціальну область H, що множина S невиконувана тоді й тільки тоді, коли вона фальшива в усіх інтерпретаціях на цій області. На щастя, така область існує. Її називають ербранівським універсумом множини S.

Нехай S – множина диз'юнктів. Позначимо через H_0 множину констант, які містяться в диз'юнктах множини S. Якщо диз'юнкти з S не містять констант, то H_0 складається з однієї константи, скажімо a, тобто $H_0 = \{a\}$.

Для $i = 0, 1, 2, \ldots$ множина H_{i+1} є об'єднанням множини H_i і множини всіх термів виду $f(t_1,\ldots,t_n)$, де $t_1, t_2, \ldots, t_n \in H_i$, f – символ n-місної функції, яка зустрічається хоча б в одному з диз'юнктів множини S.

Кожну множину H_i *називають множиною констант* i-го рівня для множини диз'юнктів S, а множину H_∞ називають *ербранівським універсумом* множини S.

Приклад 3.1. Нехай $S = \{P(x),\ \neg P(x) \vee Q(f(y)),\ \neg Q(f(a))\}$. Тоді

$$H_0 = \{a\};$$
$$H_1 = \{a,\ f(a)\};$$
$$H_2 = \{a,\ f(a),\ f(f(a))\}$$
....
$$H_\infty = \{a,\ f(a),\ f(f(a)),\ f(f(f(a))), \ldots\}.$$

Приклад 3.2. Нехай $S = \{P(x),\ Q(x) \vee \neg R(y)\}$. Диз'юнкти з множини S не містять констант, тому $H_0 = \{a\}$. Оскільки диз'юнкти в S не містять функціональних символів, то

$$H_0 = H_1 = H_2 = \ldots = H_\infty = \{a\}.$$

Приклад 3.3. Нехай $S=\{P(f(x), a, g(y), b)\vee Q(x)\}$. Тоді

$$H_0=\{a, b\};$$
$$H_1=\{a, b, f(a), f(b), g(a), g(b)\};$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$H_\infty=\{a, b, f(a), f(b), g(a), g(b), f(f(a)), f(f(b)), f(g(a)), f(g(b)),$$
$$g(f(a)), g(f(b)), g(g(a)), g(g(b)), f(f(f(a))), \ldots\}.$$

Ербранівський універсум, як ми побачили, визначений не всією множиною диз'юнктів S, а тільки символами функцій і константами, які входять у диз'юнкти з множини S.

Множину атомарних формул виду $P(t_1, \ldots, t_n)$, де $t_1, \ldots, t_n \in H_\infty$, а P – символ n-місного предиката, який входить у диз'юнкти з S, називають *ербранівським базисом* множини диз'юнктів S.

Для множини диз'юнктів S з прикладу 3.1 ербранівським базисом є множина атомарних формул

$$B=\{P(a), Q(a), P(f(a)), Q(f(a)), P(f(f(a))), Q(f(f(a))), \ldots\}.$$

Ербранівським базисом множини диз'юнктів S з прикладу 3.2 є множина

$$B=\{P(a), Q(a), R(a)\}.$$

Ербранівським базисом множини диз'юнктів S з прикладу 3.3 є множина

$$B=\{P(t_1, t_2, t_3, t_4),\ Q(t)\colon t_1, t_2, t_3, t_4, t \text{ пробігають елементи ербранівського універсуму множини } S\}.$$

Зауваження. Звернемо увагу, що у формулах ербранівського базису B множини диз'юнктів S відсутні предметні змінні.

Нехай термін «*вираз*» означає терм, атом, літерал або диз'юнкт. Тоді *основним виразом* називатимемо вираз, який не містить предметних змінних.

Очевидно, що ербранівський базис множини S складається з основних атомів (тобто атомів, які не містять предметних змінних).

3.4. Основний приклад диз'юнкта

Нехай D – диз'юнкт із множини диз'юнктів S. *Основним прикладом диз'юнкта* D називають диз'юнкт, отриманий із D заміною предметних змінних на елементи ербранівського універсуму H_∞.

Нехай S – множина диз'юнктів із прикладу 3.1. Тоді диз'юнкт $\neg Q(f(a))$ має один основний приклад – це сам цей диз'юнкт; множина основних прикладів диз'юнкта $\neg P(x) \vee Q(f(y))$ нескінченна:

$$\{\neg P(a) \vee Q(f(a)), \neg P(f(a)) \vee Q(f(a)), \neg P(a) \vee Q(f(f(a))), \ldots\}.$$

Якщо S – множина диз'юнктів із прикладу 3.2, то кожний диз'юнкт цієї множини має один основний приклад.

Приклад 3.4. Нехай множина диз'юнктів $S = \{P(x),\ Q(f(y)) \vee R(y)\}$.

Ербранівський універсум $H_\infty = \{a,\ f(a),\ f(f(a)),\ f(f(f(a))),\ldots\}$.

Нехай диз'юнкт $D(x) = P(x)$. Тоді $P(a)$, $P(f(a))$, $P(f(f(a)))$, $P(f(f(f(a))))$, … є основними прикладами диз'юнкта $D(x)$ (їх нескінченне число).

Нехай диз'юнкт $D(y) = Q(f(y)) \vee R(y)$. Тоді $Q(f(a)) \vee R(a)$, $Q(f(f(a))) \vee R(f(a))$, $Q(f(f(f(a)))) \vee R(f(f(a)))$, … є основними прикладами диз'юнкта $D(y)$ (їх також нескінченне число).

Зауваження. Основний приклад диз'юнкта $D(x_1,\ldots,x_k)$ не містить предметних змінних. Він отримується заміною предметних змінних $x_1,\ldots,x_k$ деякими термами з ербранівського універсуму.

У подальшому ми припускатимемо, що формула не містить вільних предметних змінних. Якщо вони все ж таки є, то розглядаються як предметні константи.

Як було зазначено на початку підрозділу 3.3 (і буде доведено в подальшому), для розв'язування питання про невиконуваність множини диз'юнктів *S*, як предметну область достатньо розглядати тільки ербранівський універсум. Виявляється, можна ще обмежити й саму інтерпретацію до так званої *H*-інтерпретації.

3.5. Н-інтерпретація

Почнемо з означення.

Нехай H_∞ – ербранівський універсум множини диз'юнктів S. Інтерпретацію ***IH*** з предметною областю H_∞ називають *H-інтерпретацією множини* S, якщо вона задовольняє таким умовам:

1) інтерпретація ***IH*** відображає всі константи, які входять у диз'юнкти множини S, у самих себе;
2) якщо f – символ n-місної функції, яка входить у диз'юнкти множини S, та $h_1, \ldots, h_n$ – елементи H_∞, то в ***IH*** через f позначається функція, яка відображає $(h_1,\ldots,h_n)$ – елемент $(H_\infty)^n$ у $f(h_1,\ldots,h_n)$ – елемент H_∞;
3) значення предикатів в S на елементах із H_∞ не обмежено нічим.

Якщо $B=\{B_1, B_2,\ldots,B_n,\ldots\}$ – ербранівський базис множини диз'юнктів S, то H-інтерпретацію ***IH*** зручно подати як множину літералів

$$\{L_1, L_2,\ldots,L_n,\ldots\},$$

де $L_i = B_i$, якщо ***IH***(B_i) = T, і $L_i = \neg B_i$, якщо ***IH***(B_i) = F (тут T і F – значення істинності).

Зауваження. <u>Задати ербранівську інтерпретацію – означає задати істинісні значення для атомів ербранівського базису</u>.

Приклад 3.5. Нехай S – множина диз'юнктів із прикладу 3.1:
$S=\{\,P(x),\ \neg P(x)\vee Q(f(y)),\ \neg Q(f(a))\,\}$. Тоді ербранівський універсум H_∞ такий:

$$H_0=\{a\};$$
$$H_1=\{a,\ f(a)\};$$
$$H_2=\{a,\ f(a),\ f(f(a))\}$$

....

$$H_\infty=\{a,\ f(a),\ f(f(a)),\ f(f(f(a))),\ldots\}.$$

Нижче наведено деякі H-інтерпретації:

$\boldsymbol{IH}_1=\{P(a), Q(a), P(f(a)), Q(f(a)), P(f(f(a))),\ldots\},$

$\boldsymbol{IH}_2=\{P(a),Q(a),\neg P(f(a)),\neg Q(f(a)),P(f(f(a))),Q(f(f(a))),\neg P(f(f(f(a)))),\ldots\},$

$\boldsymbol{IH}_3=\{P(a),\neg Q(a),P(f(a)),\neg Q(f(a)),P(f(f(a))),\neg Q(f(f(a))),\ldots\}.$

Останнє, що залишилося зробити для доведення головного результату, – увести поняття H-інтерпретації $\boldsymbol{I^*H}$, яка відповідає (будь-якій) інтерпретації $\boldsymbol{I}$ множини диз'юнктів S.

Нехай $\boldsymbol{I}$ – інтерпретація на області M. H-інтерпретацією $\boldsymbol{I^*H}$, яка відповідає $\boldsymbol{I}$, є інтерпретація, яка задовольняє таку умову. Нехай h_1, …, h_n – елементи ербранівського універсуму H_∞. Нехай кожний h_i відображається в якійсь d_i із M. Якщо $P(d_1,\ldots,d_n)$ отримує в інтерпретації $\boldsymbol{I}$ логічне значення T (або F), то $P(h_1,\ldots,h_n)$ також отримує логічне значення T (відповідно F) в інтерпретації $\boldsymbol{I^*H}$ для будь-якого символу предиката P. Іншими словами, для довільних елементів h_1, …, h_n ербранівського універсуму й будь-якого символу предиката P виконується еквівалентність

$$(\boldsymbol{I^*H}P)\,(h_1,\ldots,h_n) = (\boldsymbol{I}P)\,(\boldsymbol{I}(h_1),\ldots,\boldsymbol{I}(h_n)).$$

Приклад 3.6. Нехай S – множина диз'юнктів із прикладу 3.1. Нагадаємо, що

$$S = \{ P(x),\ \neg P(x) \vee Q(f(y)),\ \neg Q(f(a)) \}.$$

Розглянемо інтерпретацію $\boldsymbol{I}$ на області $M = \{1, 2\}$, яку визначено рівністю $\boldsymbol{I}(a) = 1$ і таблицею

$f(1)$	$f(2)$	$P(1)$	$P(2)$	$Q(1)$	$Q(2)$
2	1	F	T	T	T

Для такої інтерпретації $\boldsymbol{I}$ можна визначити H-інтерпретацію $\boldsymbol{I^*H}$, яка відповідає інтерпретації $\boldsymbol{I}$. Це виконують так. Спочатку будують ербранівський базис множини диз'юнктів S:

$$B = \{ P(a), Q(a), P(f(a)), Q(f(a)), P(f(f(a))), Q(f(f(a))), \dots \}.$$

Тепер, користуючись інтерпретацією $\boldsymbol{I}$, задають значення кожного члена ербранівського базису B:

$$P(a) = P(1) = \mathrm{F};$$
$$Q(a) = Q(1) = \mathrm{T};$$
$$P(f(a)) = P(f(1)) = P(2) = \mathrm{T};$$
$$Q(f(a)) = Q(f(1)) = Q(2) = \mathrm{T};$$
$$P(f(f(a))) = P(f(f(1))) = P(f(2)) = P(1) = \mathrm{F};$$
$$Q(f(f(a))) = Q(f(f(1))) = Q(f(2)) = Q(1) = \mathrm{T};$$

....

Останнє можна записати так

$P(a)$	$Q(a)$	$P(f(a))$	$Q(f(a))$	$P(f(f(a)))$	$Q(f(f(a)))$	…
F	T	T	T	F	T	…

Інакше це можна записати так:

$$\boldsymbol{I^*H} = \{\neg P(a), Q(a), P(f(a)), Q(f(a)), \neg P(f(f(a))), Q(f(f(a))), \ldots\}.$$

Побудову інтерпретації множини S на ербранівському універсумі закінчують, коли з кожною атомарною формулою ербранівського базису зв'язано відповідне значення істинності. Нагадаємо, що тут H-інтерпретацію $\boldsymbol{I^*H}$ подано як множину літералів $\{L_1, L_2, \ldots, L_n, \ldots\}$, де $L_i = B_i$, якщо $\boldsymbol{I^*H}(B_i)$ = T, і $L_i = \neg B_i$, якщо $\boldsymbol{I^*H}(B_i)$ = F (T і F – значення істинності).

Розглянемо тепер випадок, коли диз'юнкти з множини S не містять констант. Нехай $\boldsymbol{I}$ – інтерпретація множини S на області M і a – константа, яку використано, щоб почати ербранівський універсум H_∞. У цьому випадку значення $\boldsymbol{I}(a)$ не визначено. Для отримання H-інтерпретації $\boldsymbol{I^*H}$ розширимо функцію $\boldsymbol{I}$ на a, для чого візьмемо $\boldsymbol{I}(a)$ рівним будь-якому елементу з M. Далі поступаємо так, як щойно описано. Якщо множина M неодноелементна, то можна отримати не одну H-інтерпретацію $\boldsymbol{I^*H}$, яка відповідає $\boldsymbol{I}$. Неважко навести приклад, коли H-інтерпретацій $\boldsymbol{I^*H}$ стільки ж, скільки елементів у множині M.

Приклад 3.7. Нехай $S = \{P(x), Q(y, f(y, z))\}$ і для S вибрана така інтерпретація $\boldsymbol{I}$:

$M = \{1, 2\}$;

$f(1, 1)$	$f(1, 2)$	$f(2, 1)$	$f(2, 2)$
1	2	2	1

$P(1)$	$P(2)$	$Q(1, 1)$	$Q(1, 2)$	$Q(2, 1)$	$Q(2, 2)$
T	F	F	T	F	T

Тоді інтерпретації $\boldsymbol{I}$ відповідатимуть дві H-інтерпретації:

$\boldsymbol{I^*H_1} = \{\neg P(a), Q(a, a), P(f(a, a)), \neg Q(a, f(a, a)), Q(f(a, a), a),$
$\neg Q(f(a, a), f(a, a)), \ldots\}$, якщо $a = 1$;

$\boldsymbol{I^*H_2} = \{P(a), \neg Q(a, a), P(f(a, a)), \neg Q(a, f(a, a)), \neg Q(f(a, a), a),$
$\neg Q(f(a, a), f(a, a)), \ldots\}$, якщо $a = 2$.

Пропонується докладно виписати кроки побудови цих інтерпретацій, як це зроблено у прикладі 3.6.

Лема 3.1. Якщо інтерпретація ***I*** на деякій області *M* задовольняє множину диз'юнктів *S*, то довільна *H*-інтерпретація ***I*H***, яка відповідає інтерпретації ***I***, також задовольняє множину *S*.

Доведення. Нехай інтерпретація ***I*** задовольняє множину диз'юнктів *S* на області *M*. Це означає, що довільна формула з *S* приймає значення T на області *M* при інтерпретації ***I***. Але тоді за побудовою інтерпретації ***I*H***, яка відповідає ***I***, кожна з формул множини *S* теж приймає значення T при інтерпретації ***I*H***, тобто задовольняє множину *S*.

Теорема 3.1 (про *H*-інтерпретацію). Множина диз'юнктів *S* невиконувана (не виконується при всіх інтерпретаціях) тоді й тільки тоді, коли *S* не виконується при всіх *H*-інтерпретаціях множини *S*.

Доведення. Необхідність умов теореми очевидна. Справді, за означенням множина *S* невиконувана тоді й тільки тоді, коли ця множина фальшива при будь-якій інтерпретації, у тому числі й при будь-якій *H*-інтерпретації.

Достатність випливає з леми 3.1, бо якщо *S* виконувана, то існує хоча б одна інтерпретація ***I***, при якій усі диз'юнкти з *S* істинні. Але тоді всі диз'юнкти з *S* будуть істинні й при *H*-інтерпретації ***I*H***, яка відповідає інтерпретації ***I***. А це суперечить тому, що *S* невиконувана при всіх *H*-інтерпретаціях множини *S*.

Теорему про *H*-інтерпретацію доведено. Ця теорема дуже важлива, бо дає змогу розглядати тільки інтерпретації над ербранівським універсумом (і навіть обмежитись *H*-інтерпретаціями) для перевірки невиконуваності множини диз'юнктів.

3.6. Важливі твердження щодо Н-інтерпретації

Звернемо увагу на такі очевидні твердження.

1. Основний приклад D' диз'юнкта D виконується в H-інтерпретації $\boldsymbol{IH}$ тоді і тільки тоді, коли існує основний літерал L' в D', такий, що L' є також в $\boldsymbol{IH}$, $D' \cap \boldsymbol{IH} \neq \varnothing$. (В останній формулі вважаємо, що D' подано як множину літералів.)

2. Диз'юнкт D виконується в H-інтерпретації $\boldsymbol{IH}$ тоді і тільки тоді, коли кожний основний приклад диз'юнкта D виконується в $\boldsymbol{IH}$.

3. Диз'юнкт D спростовується H-інтерпретацією $\boldsymbol{IH}$ тоді і тільки тоді, коли існує такий основний приклад D' для D, що D' не виконується в $\boldsymbol{IH}$.

4. Множина диз'юнктів S невиконувана (в жодній інтерпретації) тоді і тільки тоді, коли для кожної H-інтерпретації $\boldsymbol{IH}$ існує основний приклад D' якогось диз'юнкта D із S, що D' не виконується в $\boldsymbol{IH}$.

Приклад 3.8. Розглянемо диз'юнкт $D = \neg P(x) \vee Q(f(x))$ і такі H-інтерпретації:

$$\boldsymbol{IH}_1 = \{\neg P(a), \neg Q(a), \neg P(f(a)), \neg Q(f(a)), \neg P(f(f(a))), \neg Q(f(f(a))), \ldots\};$$

$$\boldsymbol{IH}_2 = \{P(a), Q(a), P(f(a)), Q(f(a)), P(f(f(a))), Q(f(f(a))), \ldots\};$$

$$\boldsymbol{IH}_3 = \{P(a), \neg Q(a), P(f(a)), \neg Q(f(a)), P(f(f(a))), \neg Q(f(f(a))), \ldots\}.$$

Тут кожну H-інтерпретацію подано як множину літералів $\{L_1, L_2, \ldots, L_n, \ldots\}$, де $L_i = B_i$, якщо $\boldsymbol{I}(B_i)$ = T, і $L_i = \neg B_i$, якщо $\boldsymbol{I}(B_i)$ = F.

Диз'юнкт D виконується в H-інтерпретаціях $\boldsymbol{IH}_1$ і $\boldsymbol{IH}_2$, бо кожний його основний приклад виконується в цих інтерпретаціях – це означає, що кожний основний приклад цього диз'юнкта містить літерал, який також є в цих інтерпретаціях, представлених у вигляді множин літералів. Зокрема, розглянемо основний приклад $D' = \neg P(f(a)) \vee Q(f(f(a)))$ цього диз'юнкта. Літерал $\neg P(f(a))$ є в інтерпретації $\boldsymbol{IH}_1$, отже, D' виконується в цій інтерпретації. Літерал $Q(f(f(a)))$ є в інтерпретації $\boldsymbol{IH}_2$, отже, D' виконується також і в інтерпретації $\boldsymbol{IH}_2$. Легко побачити, що аналогічні твердження справджуються і для будь-яких основних прикладів цього диз'юнкта.

Але диз'юнкт $D = \neg P(x) \vee Q(f(x))$ спростовується H-інтерпретацією $\boldsymbol{IH}_3$. Справді, основний приклад $D' = \neg P(a) \vee Q(f(a))$ не виконується в $\boldsymbol{IH}_3$, бо ні літерала $\neg P(a)$, ні літерала $Q(f(a))$ у цій інтерпретації немає. Іншими словами, $D' \cap \boldsymbol{IH}_3 = \varnothing$, тут $D' = \{\neg P(a), Q(f(a))\}$, тобто подано як множину літералів.

Приклад 3.9. Розглянемо множину диз'юнктів $S = \{P(x), \neg P(a)\}$. Існує тільки дві H-інтерпретації: $\boldsymbol{IH}_1 = \{P(a)\}$ і $\boldsymbol{IH}_2 = \{\neg P(a)\}$. Для H-інтерпретації $\boldsymbol{IH}_1$ існує основний приклад другого диз'юнкта: $\neg P(a)$, який не виконується в цій інтерпретації, а в H-інтерпретації $\boldsymbol{IH}_2$ не виконується основний приклад $P(a)$ першого диз'юнкта. Отже, множина S невиконувана, бо спростовується цими двома H-інтерпретаціями.