Змістовий модуль 6. Некласичні логіки

Тема 14. Інтуїціоністська логіка. Нечіткі підмножини і нечітка логіка

План лекції.

- Інтуїціоністська логіка
  1. Формально-аксіоматична система інтуїціоністської логіки
  2. Реляційна семантика інтуїціоністської логіки (моделі Кріпке)
- Нечіткі підмножини і нечітка логіка
  1. Нечіткі підмножини
  2. Операції над нечіткими підмножинами
  3. Нечітка логіка

6.1. Інтуїціоністська логіка

Повна реалізація програми Гільберта (див. початок теми 5) неможлива. Це стало зрозумілим після опублікування результатів, отриманих К. Ґеделем (див підрозділ 5.4.3). Проте ще задовго до цього сумніви в можливості повного обґрунтування математики на основі програми Гільберта висловив голландський математик Л. Брауер. Ще у 1908 р. Брауер стверджував, що закони математики не мають ні абсолютного, ні апріорного характеру. Вони є узагальненнями роботи зі скінченними множинами стійких у часі об'єктів, тому поширення таких законів на нескінченні множини об'єктів неадекватне. Отже, необхідно або цілком відмовитися від нескінченних множин, що не зовсім розумно, або перейти до нової логіки, інтуїтивно зрозумілої. Така логіка має описувати математичні твердження не як абстрактні істину чи фальш, а як твердження про можливість виконання деякої побудови. Математичне доведення має давати таку побудову та її обґрунтування. Такі методи, що дають побудову, Брауер назвав *ефективними*, а запропоновані ним логіку й математику – *інтуїціоністськими*.

Після появи інтуїціоністської логіки постало питання про її формалізацію. Дуже цікавим є той факт, що сам Брауер стверджував, що, на відміну від класичної, інтуїціоністська математика в принципі не може бути адекватно формалізованою. Водночас Брауер запропонував своєму учневі А. Гейтінгу створити формальні моделі інтуїціоністської логіки, що й було успішно зроблено у 1930 р. Згодом з'явились семантичні моделі (інтерпретації) інтуїціоністської логіки. Одну із таких моделей – модель Кріпке – ми розглянемо нижче.

Дуже цікаву інтерпретацію, яка базується на брауерівському розумінні формул як задач, запропонував А. М. Колмогоров. Таку інтерпретацію називають інтерпретацією Колмогорова, а також ВКН-інтерпретацією. У цій інтерпретації поняттю *істинності* формули класичної логіки відповідає поняття *реалізовності* формули як задачі.

Головна відмінність інтуїціоністської логіки від класичної полягає в тому, що в інтуїціоністській логіці не виконується один із основних законів класичної логіки, – закон виключеного третього, тобто $\models (A \vee \neg A)$ не справджується. Отже, інтуїціонізм відкидає ідею про те, що всі висловлення діляться на істинні й помилкові. Із цієї точки зору закон виключеного третього є безпідставним. Відмова від цього закону призводить до визнання існування «третьої можливості». Але, у такому разі, природно, доходимо до заборони доводити теореми методом «від протилежного». Останнє призводить до відмови від аксіоми $\models (\neg\neg A \to A)$. Справді, при доведенні від протилежного припускають, що насправді вірне $\neg A$, і після цього приходять до протиріччя. Це показує, що «не вірно» $\neg A$, тобто «вірно» $\neg\neg A$. З останнього доходимо, що «вірно» A. Іншими словами, маємо твердження $\models (\neg\neg A \to A)$.

Пропозиційні зв’язки $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\to$ в інтуїціоністській логіці незалежні, а еквівалентність виражається через імплікацію та кон’юнкцію:

$$A \leftrightarrow B = (A \to B) \wedge (B \to A).$$

Операції квантифікації $\forall x$ та $\exists x$ також незалежні. Аналогічно інтуїціоністському численню висловлень інтуїціоністське числення предикатів є послабленням числення предикатів. При цьому стають недоказовими формули $\forall x\, (A(x) \vee \neg A(x))$, а з $\neg\exists x\, A(x)$ не виводиться $\forall x\, \neg A(x)$.

6.1.1 Формально-аксіоматична система інтуїціоністської пропозиційної логіки

Розглянемо одну із формально-аксіоматичних систем пропозиційної інтуїціоністської логіки (тобто інтуїціоністської логіки висловлень).

1. Алфавіт.

- Знаки змінних висловлень (пропозиційних символів): p, q, r, …
- Знаки логічних зв'язок $\vee$, $\wedge$, $\neg$, $\rightarrow$.
- Допоміжні знаки (,).

2. Формули.

- Змінне висловлення є формулою.
- Якщо A і B – формули, то $(A\vee B)$, $(A\wedge B)$, $(A\rightarrow B)$ і $\neg A$ – формули.
- Інших формул немає.

Зовнішні дужки у формулах як правило домовляються випускати: наприклад, замість $(A\vee B)$ пишуть $A\vee B$.

3. Аксіоми.

1. $A\to(B\to A)$,
2. $(A\to(B\to C))\to((A\to B)\to(A\to C))$,
3. $(A\wedge B)\to A$,
4. $(A\wedge B)\to B$,
5. $A\to(B\to(A\wedge B))$,
6. $A\to(A\vee B)$,
7. $B\to(A\vee B)$,
8. $(A\to C)\to((B\to C)\to((A\vee B)\to C))$,
9. $(A\to B)\to((A\to\neg B)\to\neg A)$,
10. $\neg A\to(A\to B)$.

4. Правила виведення.

Правило виведення одне – *modus ponens*:

$$\frac{A, A\to B}{B}.$$

Зазначимо, що коли ми замінимо схему аксіом 10 схемою аксіом $\neg\neg A\to A$, то отримаємо класичне пропозиційне числення, розглянуте в 5.2 (система аксіом I).

Кожна теорема інтуїціоністського пропозиційного числення є теоремою класичного пропозиційного числення, але зворотне невірно. Зокрема, в інтуїціоністському пропозиційному численні не можна вивести формули $\neg\neg A\to A$, та $A\vee\neg A$, проте, можна довести $A\to\neg\neg A$.

6.1.2 Реляційна семантика інтуїціоністської пропозиційної логіки (моделі Кріпке)

На відміну від класичної логіки, яка є логікою конкретного знання, інтуїціоністська логіка передбачає накопичення знань. На цій ідеї Л. Брауера будуються найпопулярніші семантичні моделі інтуїціоністської логіки – *моделі можливих світів*, або *реляційні моделі*. Моделі можливих світів були започатковані Л. Брауером і А. Гейтінгом, далі вони були розвинуті С. Кріпке та Я. Хінтіккою. Ці моделі також успішно використовують для описання семантики модальних логік.

Моделлю можливих світів інтуїціоністської логіки, або *реляційною інтуїціоністською моделлю*, називають трійку $\boldsymbol{M} = (W, \preccurlyeq, \boldsymbol{I})$, де W – фіксована непорожня множина, яку називають *множиною можливих світів*, $\preccurlyeq$ – відношення часткового порядку на множині W і $\boldsymbol{I}$ – відображення інтерпретації атомарних формул на світах.

Позначимо через P_S множину пропозиційних символів, а через F_S – множину формул мови інтуїціоністської пропозиційної логіки.

Розглянемо відображення інтерпретації $\boldsymbol{I}: P_S \times W \to \{\mathrm{T}, \mathrm{F}\}$ для випадку інтуїціоністської пропозиційної логіки. Нехай $\alpha, \beta \in W$, тобто α і β – можливі світи. Світи узгоджуються за цим відношенням так. Нехай $p \in P_S$. Якщо $\alpha \preccurlyeq \beta$ і $\boldsymbol{I}(p, \alpha) = \mathrm{T}$, то $\boldsymbol{I}(p, \beta) = \mathrm{T}$; це означає, що при підйомі світами істинність атомарних формул не може перейти у фальш.

Відображення $\boldsymbol{I}: P_S \times W \to \{\mathrm{T}, \mathrm{F}\}$ індуктивно продовжується на відображення $\boldsymbol{J}: F_S \times W \to \{\mathrm{T}, \mathrm{F}\}$ так:

1) $\boldsymbol{J}(p, \alpha) = \boldsymbol{I}(p, \alpha)$ для всіх $p \in P_S$;

2) $\boldsymbol{J}(A \vee B, \alpha) = \mathrm{T} \Leftrightarrow \boldsymbol{J}(A, \alpha) = \mathrm{T}$ або $\boldsymbol{J}(B, \alpha) = \mathrm{T}$;

3) $\boldsymbol{J}(A \wedge B, \alpha) = \mathrm{T} \Leftrightarrow \boldsymbol{J}(A, \alpha) = \mathrm{T}$ та $\boldsymbol{J}(B, \alpha) = \mathrm{T}$;

4) $\boldsymbol{J}(\neg A, \alpha) = \mathrm{T} \Leftrightarrow$ для всіх світів β таких, що $\alpha \preccurlyeq \beta$, маємо $\boldsymbol{J}(A, \beta) = \mathrm{F}$;

5) $\boldsymbol{J}(A \to B, \alpha) = \mathrm{T} \Leftrightarrow$ для всіх світів β таких, що $\alpha \preccurlyeq \beta$, маємо: якщо $\boldsymbol{J}(A, \beta) = \mathrm{T}$, то $\boldsymbol{J}(B, \beta) = \mathrm{T}$.

Те, що $\boldsymbol{J}(A, \alpha) = \mathrm{T}$, тобто істинність формули A у світі α, позначають як $\alpha \models A$. Формула A *істинна в реляційної моделі* $\boldsymbol{M}$, якщо для всіх $\alpha \in W$ маємо $\alpha \models A$. Істинність формули A в реляційній моделі $\boldsymbol{M}$ позначають як $\boldsymbol{M} \models A$.

Формула A *інтуїціоністськи істинна*, якщо для кожної реляційної моделі $\boldsymbol{M}$ маємо $\boldsymbol{M} \models A$. Це позначають як ${}_i\!\models A$.

Приклад 6.1. Покажемо, що формула $p \vee \neg p$ не є інтуїціоністськи істинною. Для цього вкажемо для неї контрмодель – реляційну модель $\boldsymbol{M}$ таку, що $\boldsymbol{M} \not\models p \vee \neg p$ (див. рис. 6.1).

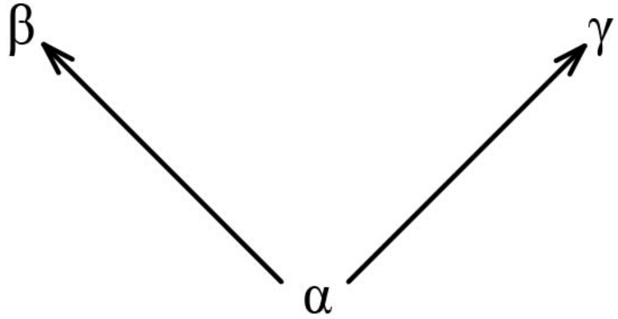

Рис. 6.1

Нехай $\boldsymbol{I}(p, \alpha) = \mathrm{F}$, $\boldsymbol{I}(p, \beta) = \mathrm{T}$, $\boldsymbol{I}(p, \gamma) = \mathrm{F}$. Зрозуміло, що, невірно $\alpha \models p$. Для того, щоб було $\alpha \models \neg p$, необхідно $\alpha \not\models p$, $\beta \not\models p$, $\gamma \not\models p$ (див. п. 4). Однак $\boldsymbol{I}(p, \beta) = \mathrm{T}$, тому $\beta \models p$. Отже, невірно $\alpha \models \neg p$, звідки $\alpha \not\models p \vee \neg p$, тому $\boldsymbol{M} \not\models p \vee \neg p$.

Приклад 6.2. Покажемо, що формула $(p \to q) \vee (q \to p)$ не є інтуїціоністськи істинною. Для цього вкажемо для неї контрмодель – реляційну модель $\boldsymbol{M}$ таку, що $\boldsymbol{M} \not\models (p \to q) \vee (q \to p)$ (див. рис. 6.1). Задамо $\boldsymbol{I}(p, \alpha) = \mathrm{F}$, $\boldsymbol{I}(q, \alpha) = \mathrm{F}$, $\boldsymbol{I}(p, \beta) = \mathrm{T}$, $\boldsymbol{I}(q, \beta) = \mathrm{F}$, $\boldsymbol{I}(p, \gamma) = \mathrm{F}$, $\boldsymbol{I}(q, \gamma) = \mathrm{T}$. Тоді $\beta \models p$ та $\beta \not\models q$. Звідси отримаємо, якщо врахувати $\alpha \preccurlyeq \beta$, що невірно $\alpha \models (p \to q)$. Далі, $\gamma \models q$ та $\gamma \not\models p$. З урахуванням $\alpha \preccurlyeq \gamma$, невірно, що $\alpha \models (q \to p)$. Отже, невірно, що $\alpha \models (p \to q) \vee (q \to p)$, тому $\boldsymbol{M} \not\models (p \to q) \vee (q \to p)$.

6.1.3 Семантичні таблиці для інтуїціоністської пропозиційної логіки

Конструкція семантичних таблиць переноситься і на некласичні логіки. Тут ми розглянемо її для інтуїціоністської пропозиційної логіки.

Інтуїціоністська специфікація – це вираз виду $\alpha \models$ або $\alpha =\!\!|$, де α – інтуїціоністський префікс, що описує множину світів, у якій специфікована формула має відповідне значення. *Інтуїціоністський префікс* – це кортеж (слово), компонентами якого є натуральні числа.

Початкову формулу позначаємо як фальшиву з порожнім інтуїціоністським префіксом: $=\!\!| \, A$.

Для префіксів пишемо $\alpha \leq \beta$, якщо β має вигляд $\alpha\gamma$.

Якщо $\alpha \leq \beta$ та $\alpha \neq \beta$, то пишемо $\alpha < \beta$.

Для префіксів $\alpha \leq \beta$ означає, що $\alpha \preccurlyeq \beta$, тобто світ β є наступником світу α.

Світ, який є безпосереднім наступником світу α, позначатимемо як αn.

Підтаблиця закривається (з'являється суперечність), якщо в ній є пара специфікованих формул виду $\alpha \models A$ та $\alpha\gamma =\!\!| \, A$. Це відповідає умові, що формула, істинна у світі α, зберігає істинність у всіх світах – наступниках світу α.

Крім того, уведемо такі додаткові умови, які закривають підтаблицю:

- поява в підтаблиці пари формул $\alpha \models \neg A$ та $\alpha\gamma \models A$;
- поява в підтаблиці пари формул $\alpha \models A$ та $\alpha\gamma \models \neg A$.

Зазначимо, що пара формул $\alpha =\!\!| \, A$ та $\alpha\gamma \models A$ не закриває підтаблицю, бо немає суперечності: A спростовується на більш ранньому рівні, ніж стверджується.

Правила побудови семантичної таблиці у випадку інтуїціоністської пропозиційної логіки модифікуються.

Правила для $\models (A \vee B)$, $\Dashv (A \vee B)$, $\models (A \wedge B)$, $\Dashv (A \wedge B)$ аналогічні відповідним правилам класичної логіки. Вони не змінюють інтуїціоністського префікса нових формул, що отримуються. Нижче наведено ці правила.

$$\frac{\alpha \models (A \wedge B)}{\alpha \models A \quad \alpha \models B} \qquad \frac{\alpha \Dashv (A \wedge B)}{\alpha \Dashv A \;\big|\; \alpha \Dashv B}$$

$$\frac{\alpha \models (A \vee B)}{\alpha \models A \;\big|\; \alpha \models B} \qquad \frac{\alpha \Dashv (A \vee B)}{\alpha \Dashv A \quad \alpha \Dashv B}$$

Як і в класичній логіці, якщо в правилі нижня частина не розділена, то формули, які є результатами декомпозиції, залишаються в тій самій підтаблиці. Інакше вони розподіляються по двох нових підтаблицях, котрі далі будуються незалежно. Підтаблиці семантичної таблиці утворюють бінарне дерево.

Для правил $\Dashv \neg A$ та $\Dashv (A \to B)$ нові формули стверджуються чи заперечуються НЕ у світі α основної формули, а у світі-наступнику αn. При цьому щоразу таке n вибирається новим (на шляху від початку таблиці). Наведемо ці правила:

$\dfrac{\alpha \Dashv \neg A}{\alpha n \models A}$	$\dfrac{\alpha \Dashv (A \to B)}{\alpha n \models A \quad \alpha n \Dashv B}$

Тут n – нове, відмінне від усіх натуральних чисел, що наявні у префіксах формул світів даної підтаблиці.

Правила для $\models \neg A$ та $\models (A \to B)$ вимагають багатократного розбиття основної формули, адже при появі нових світів-наступників світу α тут виникають спростовувані формули, які не можуть автоматично переноситися на світи-наступники.

Для правила $\models \neg A$ матимемо:

$$\frac{\alpha \models \neg A}{\alpha \models \neg A \;\big|\; \beta_1 \dashv A \;\big|\; \ldots \;\big|\; \beta_m \dashv A}$$

Тут $\beta_1, \ldots, \beta_m$ – світи-наступники світу α, які наявні у даній підтаблиці.

Розглянемо правило для $\models (A \to B)$.

Уважатимемо, що $\beta_1, \ldots, \beta_m$ – світи-наступники світу α, які наявні у даній підтаблиці. Це означає, що $\alpha \leq \beta_i$ для всіх $i \in \{1, \ldots, m\}$, при цьому вважаємо, що $\alpha = \beta_1$.

Розглянемо правило для $\alpha \models (A \to B)$. Позаяк з $\alpha \models (A \to B)$ випливає $\beta_i \models (A \to B)$ для всіх $i \in \{1, \ldots, m\}$, то починаючи з формули $\alpha \models (A \to B)$ будуємо підтаблиці, у яких можуть бути формули виду $\Phi_1, \ldots, \Phi_m$, де кожна з формул Φ_i має вид $\beta_i \dashv A$ чи $\beta_i \models B$ (див. далі приклад 6.5).

Якщо для деякої підтаблиці маємо $\beta_i \models B$, то, ураховуючи збереження істинності при русі по світах згідно відношення $\preccurlyeq$, подальша декомпозиція формул на шляхах із цієї вершини по світах β_j таких, що $\beta_i \leq \beta_j$, зайва.

При отриманні закритої підтаблиці подальша декомпозиція теж не виконується.

Наступні три приклади ілюструють техніку побудови семантичних таблиць для формул інтуїціоністської логіки.

Приклад 6.3. Розглянемо семантичну таблицю для закону виключеного третього.

$$
\begin{array}{c}
\Dashv (p \lor \neg p) \\
\hline
\Dashv p \\
\Dashv \neg p \\
\hline
1 \models p
\end{array}
$$

Таблиця не закривається: суперечності немає, бо p спростовується на більш ранньому рівні, ніж стверджується.

Приклад 6.4. Розглянемо тепер семантичну таблицю для формули $(\neg p \lor q) \to (p \to q)$.

$$
\begin{array}{c|c}
\multicolumn{2}{c}{\Dashv (\neg p \lor q) \to (p \to q)} \\
\multicolumn{2}{c}{1 \models \neg p \lor q} \\
\multicolumn{2}{c}{1 \Dashv p \to q} \\
\multicolumn{2}{c}{12 \models p} \\
\multicolumn{2}{c}{12 \Dashv q} \\
\hline
1 \models \neg p & 1 \models q \\
= & =
\end{array}
$$

Усі підтаблиці закрилися. Отже, формула $(\neg p \lor q) \to (p \to q)$ є інтуїціоністськи істинною. Для розуміння, чому закрилася перша підтаблиця, див. вище додаткову умову.

Приклад 6.5. Розглянемо семантичну таблицю для формули $(p \to q) \to (\neg p \vee q)$.

$$
\begin{array}{c}
\Dashv (p \to q) \to (\neg p \vee q) \\
\boxed{1 \vDash p \to q} \\
1 \Dashv \neg p \vee q \\
1 \Dashv \neg p \\
1 \Dashv q \\
12 \vDash p
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cc|c}
\multicolumn{2}{c|}{\boxed{1 \Dashv p}} & \boxed{1 \vDash q} \\
\hline
\boxed{12 \Dashv p} & \multicolumn{1}{|c|}{\boxed{12 \vDash q}} & = \\
= & \multicolumn{1}{|c|}{} &
\end{array}
$$

Затінений фрагмент виділяє декомпозицію формули $1 \vDash p \to q$. Тут декомпозиція виконується двічі: другий раз у світі 12, який наявний у таблиці і є наступником світу 1. Оскільки $12 \vDash q$, то подальша декомпозиція не виконується. З трьох підтаблиць одна не закрилася. Незакрита підтаблиця дає змогу вказати контрмодель $\boldsymbol{M}$ таку, що $\boldsymbol{M} \nvDash (p \to q) \to (\neg p \vee q)$:

$$
\begin{array}{c}
12 \\
\uparrow \\
1
\end{array}
$$

Користуючись незакритою підтаблицею, задаємо $\boldsymbol{I}(p, 1) = \mathrm{F}$, $\boldsymbol{I}(q, 1) = \mathrm{F}$, $\boldsymbol{I}(p, 12) = \mathrm{T}$, $\boldsymbol{I}(q, 12) = \mathrm{T}$. Отже, формула $(p \to q) \to (\neg p \vee q)$ не є інтуїціоністськи істинною.

6.2. Нечіткі підмножини і нечітка логіка

Нечітка логіка відрізняється від двозначної класичної логіки тим, що допускає континуальне число значень істинності для висловлень. Ці значення належать відрізку [0, 1] дійсних чисел. Іншими словами, між значеннями 0 (фальш) та 1 (істина) є незліченна множина проміжних значень істинності $p \in (0, 1)$. Ці значення характеризують степінь істинності.

Нечітку логіку широко використовують у сучасній прикладній математиці і технічних науках.

6.2.1 Нечіткі підмножини

Нехай E – якась фіксована множина і $M = [0, 1]$.

Нечітка підмножина A множини E – це множина пар виду

$$\{(x, \mu_A(x)) : x \in E\},$$

де μ_A: $E \to M$ – функція.

Пара $(x, \mu_A(x))$ інтерпретується як елемент $x \in E$, який *належить множині* A *зі степенем* $\mu_A(x)$.

Множину M називають *множиною належності*, а функцію μ_A – *функцією належності*.

6.2.2 Операції над нечіткими підмножинами

Над нечіткими множинами можна виконувати такі ж операції, як і над звичайними.

Об'єднання нечітких множин A і B – це нечітка множина

$$C = A \cup B,$$

для якої

$$\mu_C = \max\{\mu_A, \mu_B\}.$$

Нечітка множина C є *перетином* нечітких множин A і B

$$C = A \cap B,$$

якщо за означенням

$$\mu_C = \min\{\mu_A, \mu_B\}.$$

Нечітка множина B є доповнення для A, тобто

$$B = \overline{A},$$

якщо

$$\mu_B = 1 - \mu_A.$$

Якщо задані нечіткі множини A і B, то пишемо $A \subset B$ тоді і тільки тоді, коли

$$\forall x \in E \left(\mu_A(x) \le \mu_B(x)\right).$$

Для нечітких множин виконуються такі рівності

$$A \cap B = B \cap A,$$

$$A \cup B = B \cup A,$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C),$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),$$
$$A \cap A = A,$$
$$A \cup A = A,$$
$$A \cap E = A,$$
$$A \cup E = E,$$
$$A \cap \varnothing = \varnothing,$$
$$A \cup \varnothing = A,$$
$$\overline{\overline{A}} = A,$$
$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B},$$
$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

Проте

$$A \cap \overline{A} \neq \varnothing \text{ (окрім } A = \varnothing \text{ або } A = E\text{)},$$
$$A \cup \overline{A} \neq E \text{ (окрім } A = \varnothing \text{ або } A = E\text{)}.$$

Для звичайних множин виконується

$$A \cap \overline{A} = \varnothing,$$
$$A \cup \overline{A} = E.$$

Отже, множина нечітких множин не утворює булеву алгебру. Отже, можна очікувати, що логіка, побудована на нечітких множинах, буде некласичною.

6.2.3 Нечітка логіка

Означимо нечіткі логічні операції:

$$p \wedge q = \min(p, q),$$
$$p \vee q = \max(p, q),$$
$$\neg p = 1 - p.$$

Для нечіткої логіки висловлень

$$p \wedge \neg p \neq 0 \text{ (окрім } p = 0 \text{ або } p = 1\text{)},$$
$$p \vee \neg p \neq 1 \text{ (окрім } p = 0 \text{ або } p = 1\text{)}.$$

Отже, нечітка пропозиційна логіка не є класичною.

При розгляді предикатної нечіткої логіки означують поняття нечіткого n-місного відношення $P^{(n)}$ на множинах $A_1, A_2, \ldots, A_n$ у вигляді функції

$$\mu_P : A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \to [0, 1].$$

Зазначимо, що самі множини $A_1, A_2, \ldots, A_n$ не є нечіткими.

Приклад 6.6. Побудуємо нечітке бінарне відношення $\mu : A \times B \to [0, 1]$, яке описує спрощену схему пошуку несправностей в автомобілі. Це відношення задамо матрицею ваг.

З цією метою розглянемо множину A причин несправності $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, у якій a_1 – несправність акумулятора, a_2 – «несправність карбюратора», a_3 – «низька якість бензину», a_4 – «несправність системи запалювання». Множина $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ – це множина проявів несправності. Тут b_1 – «двигун не запускається», b_2 – «двигун працює нестійко», b_3 – «двигун не набирає повну потужність».

Функція μ, яка описує степінь упевненості в тому, що та чи інша причина несправності може призвести до того чи іншого наслідку, визначається виходячи із суб’єктивного досвіду механіка, марки автомобіля, умов його експлуатації та врахування інших факторів. Тут нечітке відношення може бути записане, наприклад, у виді такої нечіткої множини:

$\{((a_1, b_1), 1), ((a_1, b_2), 0.1), ((a_1, b_3), 0.2), ((a_2, b_1), 0.8), ((a_2, b_2), 0.9), ((a_2, b_3), 1), ((a_3, b_1), 0.7), ((a_3, b_2), 0.8), ((a_3, b_3), 0.5), ((a_4, b_1), 1), ((a_4, b_2), 0.5), ((a_4, b_3), 0.2)\}$.

Матриця ваг для цього нечіткого відношення така:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.1 & 0.2 \\ 0.8 & 0.9 & 1 \\ 0.7 & 0.8 & 0.5 \\ 1 & 0.5 & 0.2 \end{pmatrix}.$$

Розглянуті поняття дають змогу природним чином проінтерпретувати класичні логіки (числення висловлень і числення предикатів) у виді нечітких логік. Більше того, нечіткі логіки є узагальненням класичних логік, вони надають кожному висловленню якийсь степінь упевненості.

Нині теорія і практика, пов’язана з нечіткими логіками, інтенсивно розвиваються. Системи нечіткого виведення дають змогу розв’язувати задачі автоматичного керування, класифікації даних, розпізнавання образів, вироблення рішень, машинного навчання тощо. Ця проблематика досліджень тісно пов’язана з такими науково-прикладними напрямками, як нечітке моделювання, нечіткі експертні системи, нечітка асоціативна пам’ять, нечіткі регулятори і нечіткі системи

.