Змістовий модуль 3. Теорема Ербрана

Тема 8. Семантичні дерева. Теорема Ербрана

План лекції.

- Семантичні дерева
- Теорема Ербрана.
- Застосування теореми Ербрана
- Жак Ербран
- Питання для самоконтролю

3.7. Семантичні дерева

Нагадаємо, що літералом називають атом чи його заперечення. Якщо P – атом, то два літерали P та $\neg P$ називають контрарними, а множину $\{P, \neg P\}$ – контрарною парою. Диз'юнкт є загальнозначущою формулою (тавтологією), якщо він містить контрарну пару.

Раніше ми побачили, що для отримання відповіді про виконуваність множини диз'юнктів можна розглядати не всі інтерпретації, а тільки H-інтерпретації. Тут ми підемо далі. Ми фактично покажемо, що для розв'язування цього питання можна обмежитися скінченними підмножинами ербранівського універсуму. Головним поняттям тут є поняття *семантичного дерева* (не плутати із семантичною таблицею).

Нехай S – множина диз'юнктів, $B = \{P_1, P_2, \dots\}$ – її ербранівський базис (складається з атомарних формул для S без предметних змінних: замість предметних змінних підставлено елементи ербранівського універсуму). Задати ербранівську інтерпретацію (H-інтерпретацію) означає задати істинісні значення для елементів ербранівського базису (див. приклад 3.6). Інтерпретацію подаватимемо як множину літералів, наприклад, множина літералів $\{P_1, \neg P_2, \neg P_3, P_4, \neg P_5, \dots\}$ означає таку інтерпретацію:

P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	…
T	F	F	T	F	…

Сформулюємо означення. Нехай S – множина диз'юнктів і $B = \{P_1, P_2, \dots\}$ її ербранівський базис. *Семантичне дерево T* для S – це бінарне дерево, на кожному рівні якого із кожної вершини N виходять два ребра, одне з яких позначено як P_i, а інше – як $\neg P_i$ (рис. 3.1).

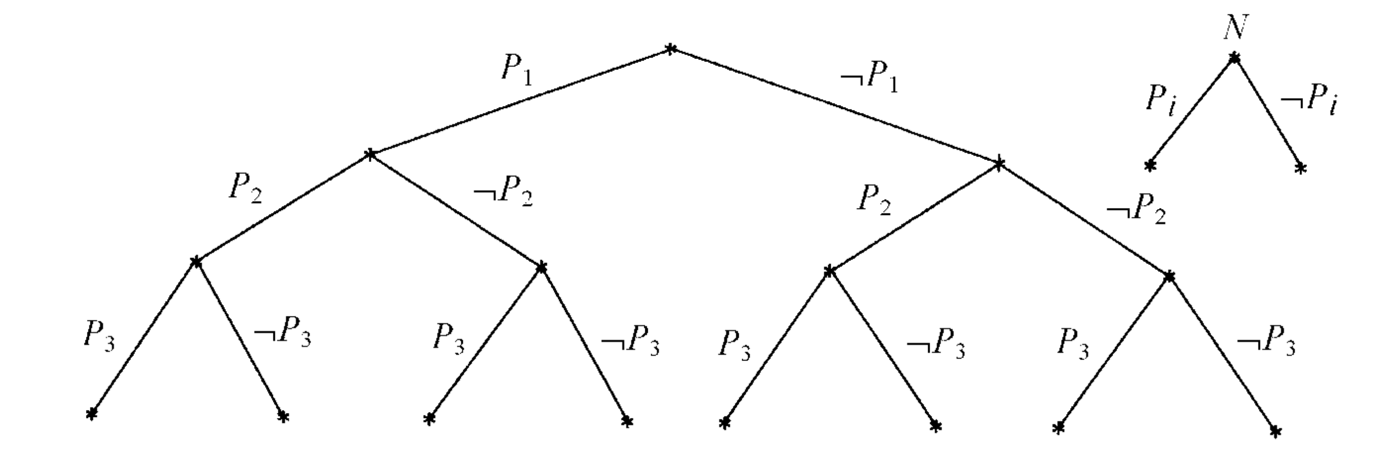

Рис. 3.1

Отже, ребра позначаються літералами, що подають істинісні значення атомів, які є елементами ербранівського базису *B* для множини диз'юнктів *S*. Нагадаємо, що довільна *H*-інтерпретація задається наданням значень істинності атомам ербранівського базису.

Звідси випливає, що всяка гілка дерева *T* задає деяку *H*-інтерпретацію. Семантичне дерево *T* вичерпує всі *H*-інтерпретації для *S*.

Вершину *N* семантичного дерева *T* називають *вершиною-спростуванням*, якщо шлях у *T* від кореня до вершини *N* містить істинісні значення атомів із ербранівського базису *B*, при яких спростовується якийсь основний приклад деякого диз'юнкта з множини *S*. При цьому жодна інша вершина від кореня до *N* зазначеної властивості спростовування не має.

Приклад 3.10.
Множина диз'юнктів (з прикладу 3.1): $S=\{P(x),\ \neg P(x)\vee Q(f(y)),\ \neg Q(f(a))\}$.

Ербранівський універсум: $H_\infty=\{a,\ f(a),\ f(f(a)),\ f(f(f(a))),\dots\}$.

Ербранівський базис: $B=\{P(a), Q(a), P(f(a)), Q(f(a)), P(f(f(a))), Q(f(f(a))),\dots\}$.

Семантичне дерево *T* для множини диз'юнктів *S* зображено на рис. 3.2.

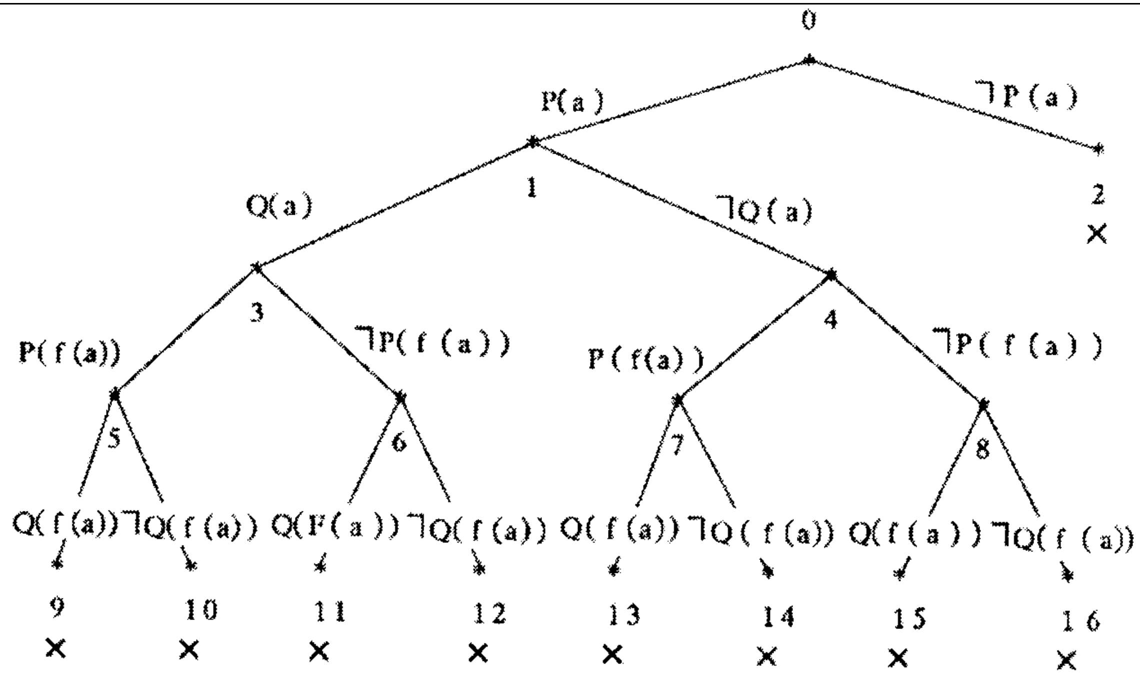

Рис. 3.2

На рис. 3.2 вершини-спростування позначено хрестиками. Вкажемо відповідні цим вершинам *H*-інтерпретації, які спростовують розглядувану множину диз'юнктів *S*.

Вершина	*H*-інтер-претація	$P(a)$	$Q(a)$	$P(f(a))$	$Q(f(a))$	…
Вершина 2	$\boldsymbol{IH}_1$	F	…	…	…	…
Вершина 9	$\boldsymbol{IH}_2$	T	T	T	T	…
Вершина 10	$\boldsymbol{IH}_3$	T	T	T	F	…
Вершина 11	$\boldsymbol{IH}_4$	T	T	F	T	…
Вершина 12	$\boldsymbol{IH}_5$	T	T	F	F	…
Вершина 13	$\boldsymbol{IH}_6$	T	F	T	T	…
Вершина 14	$\boldsymbol{IH}_7$	T	F	T	F	…
Вершина 15	$\boldsymbol{IH}_8$	T	F	F	T	…
Вершина 16	$\boldsymbol{IH}_9$	T	F	F	F	…

У вершині 2 спростовується диз'юнкт $D \equiv P(x)$ бо його основний приклад $D' \equiv P(a)$ фальшивий, тобто формула $P(x)$ при інтерпретації $\boldsymbol{IH}_1$ фальшива.

У вершині 9 спростовується диз'юнкт $D \equiv \neg Q(f(a))$ бо його основний приклад – сам цей диз'юнкт – фальшивий при інтерпретації $\boldsymbol{IH}_2$.

У вершині 10 спростовується диз'юнкт $D \equiv \neg P(x) \vee Q(f(y))$ бо його основний приклад $D' \equiv \neg P(a) \vee Q(f(a))$ фальшивий при $\boldsymbol{IH}_3$, тобто формула $\neg P(x) \vee Q(f(y))$ при інтерпретації $\boldsymbol{IH}_3$ фальшива.

У вершині 11 спростовується диз'юнкт $D \equiv \neg Q(f(a))$ бо його основний приклад – сам цей диз'юнкт – фальшивий при інтерпретації $\boldsymbol{IH}_4$.

У вершині 12 спростовується диз'юнкт $D \equiv \neg P(x) \vee Q(f(y))$ бо його основний приклад $D' \equiv \neg P(a) \vee Q(f(a))$ фальшивий при $\boldsymbol{IH}_5$.

У вершині 13 спростовується диз'юнкт $D \equiv \neg Q(f(a))$ бо його основний приклад – сам цей диз'юнкт – фальшивий при інтерпретації $\boldsymbol{IH}_6$.

У вершині 14 спростовується диз'юнкт $D \equiv \neg P(x) \vee Q(f(y))$ бо його основний приклад $D' \equiv \neg P(a) \vee Q(f(a))$ фальшивий при $\boldsymbol{IH}_7$.

У вершині 15 спростовується диз'юнкт $D \equiv \neg Q(f(a))$ бо його основний приклад – сам цей диз'юнкт – фальшивий при інтерпретації $\boldsymbol{IH}_8$.

У вершині 16 спростовується диз'юнкт $D \equiv \neg P(x) \vee Q(f(y))$ бо його основний приклад $D' \equiv \neg P(a) \vee Q(f(a))$ фальшивий при $\boldsymbol{IH}_9$.

Множина диз'юнктів S невиконувана, бо S спростовується при кожній H-інтерпретації, тобто будь-яка H-інтерпретація спростовує один з диз'юнктів множини S (робить фальшивим один із членів у кон'юнкції диз'юнктів множини S). Скінченна множина вершин дерева {2, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16} породжує скінченну множину $\{P(a),\ Q(f(a)),\ \neg P(a) \vee Q(f(a))\}$ основних прикладів, невиконувану при будь-якій H-інтерпретації (а тому й при довільній інтерпретації). Зазначимо, що сама множина основних прикладів диз'юнктів нескінченна, бо нескінченним є ербранівський універсум.

3.8. Теорема Ербрана.

Тут ми розглянемо один із варіантів знаменитої теореми математичної логіки, яка є основою алгоритмів пошуку доведення теорем. Це – теорема Ербрана. Попередньо доведемо такий результат.

Лема 3.2. Нехай S – невиконувана множина диз'юнктів. Тоді:

1) кожна гілка семантичного дерева T для S містить вершину-спростування;

2) множина всіх вершин-спростувань в S скінченна.

Доведення. Нехай V – гілка в семантичному дереві T, $\boldsymbol{IH}_V$ – H-інтерпретація, яка відповідає гілці V. Множина S фальшива при інтерпретації $\boldsymbol{IH}_V$, тобто S містить диз'юнкт D, для якого існує основний приклад D', фальшивий при H-інтерпретації, яка відповідає гілці V. Основний приклад D' має скінченну кількість атомів. Тому на шляху від кореня гілкою V існує вершина N така, що на цьому шляху визначені всі істинісні значення атомів із D'. Оскільки D' фальшивий при інтерпретації $\boldsymbol{IH}_V$, то D' спростовується у вершині N. Як вершину-спростування N візьмемо на шляху гілкою V найближчу до кореня вершину із зазначеною властивістю. Отже, кожна гілка в дереві T має вершину-спростування.

Покажемо, що число вершин-спростувань в T скінченне. Обрізаємо дерево T, відкидаючи в T кожне піддерево з коренем у вершині-спростуванні (саму вершину-спростування залишаємо). Отримаємо дерево T'. Покажемо, що дерево T' скінченне (має скінченну кількість вершин). Припустимо, що дерево T' нескінченне. Серед вершин рівня 1 в T' виберемо піддерево T_x з коренем x, яке містить нескінченну кількість вершин (у T'). Вершина x, очевидно, не є вершиною-спростуванням. У дереві T_x виберемо піддерево T_y з коренем y серед вершин рівня 2, яке містить нескінченну кількість вершин дерева T'. (Рівень вершин визначається відносно дерева T'.) Вершина y не є вершиною спростуванням. І так далі. Як результат отримаємо нескінченну гілку, яка проходить через вершини x, y, … і не має вершини-спростування. Суперечність із наявністю вершини-спростування на кожній гілці дерева T. Отже, множина вершин-спростувань у дереві T скінченна.

Теорема 3.2 (Ербран). Множина диз'юнктів S невиконувана (не виконується при всіх інтерпретаціях) тоді й тільки тоді, коли існує **скінченна** невиконувана (не виконується при всіх інтерпретаціях) підмножина S' множини **всіх основних прикладів диз'юнктів** із S.

Зауваження. Зверніть увагу, що множина S є множиною диз'юнктів логіки першого порядку, а множина S' є множиною диз'юнктів пропозиційної логіки. Саме цей факт буде істотно використаний у наступному розділі для доведення теореми 4.3 (про повноту методу резолюцій у логіці першого прядку).

Доведення. Необхідність. Припустимо, що множина диз'юнктів S невиконувана. Візьмемо семантичне дерево T для S і позначимо в T всі вершини-спростування (їхня кількість скінченна). Для кожної вершини-спростування візьмемо один основний приклад того диз'юнкта із S, який спростовується в цій вершині. Створюється **скінченна** невиконувана при будь-якій H-інтерпретації (а тому й при довільній інтерпретації) підмножина S' основних прикладів диз'юнктів із S, бо для будь-якої H-інтерпретації є фальшивим один із основних прикладів у S' того диз'юнкта із S, який спростовується у вершині-спростуванні на тій гілці семантичного дерева T, яка відповідає цій H-інтерпретації. Наведений вище приклад 3.10 є ілюстрацією ідеї цього доведення.

Достатність. Навпаки, нехай існує скінченна невиконувана (не виконується при всіх інтерпретаціях) підмножина S' множини основних прикладів диз'юнктів із S. Покажемо, що множина диз'юнктів S невиконувана. Допустимо протилежне: множина S виконувана. Тоді існує інтерпретація, а, отже, і деяка H-інтерпретація, у якій ця множина виконується. Тоді будь-який диз'юнкт $D(x_1,\ldots,x_k)$ із множини S виконується у цій H-інтерпретації. Але всі предметні змінні зв'язані кванторами всезагальності, тому виконується і будь-який диз'юнкт $D(t_1,\ldots,t_k)$ для всіх $t_1,\ldots,t_k$ з ербранівського універсуму H_∞ для множини S. Але тоді виконується і множина основних прикладів S', бо всякий основний приклад D' із S' отримується із деякого диз'юнкта D із S підходящою заміною предметних змінних $x_1,\ldots,x_k$ в $D(x_1,\ldots,x_k)$ на деякі елементи $t_1,\ldots,t_k$ ербранівського універсуму H_∞. Суперечність з невиконуваністю S'. Отже, наше припущення хибне, і множина S невиконувана.

Приклад 3.11. Нехай $S=\{\neg P(x)\vee Q(f(x),x),\quad P(g(b)),\quad \neg Q(y,z)\}$. Множина S невиконувана. Одна із невиконуваних множин основних прикладів диз'юнктів множини S така:

$$S'=\{\neg P(g(b))\vee Q(f(g(b)),g(b)),\quad P(g(b)),\quad \neg Q(f(g(b)),g(b))\}.$$

Доведення невиконуваності множини диз'юнктів S називають *спростуванням* цієї множини.

3.9. Застосування теореми Ербрана

Теорема Ербрана дає змогу формально побудувати процедуру спростування (метод Ербрана). Для виявлення невиконуваності множини диз'юнктів S потрібно: 1) утворювати множини S_0', S_1', S_2', …, S_i', … основних прикладів диз'юнктів для кожного рівня i ербранівського універсуму;

2) послідовно перевіряти їх на невиконуваність. За теоремою Ербрана, якщо S невиконувана, то процедура виявить такий рівень N, що множина S'_N буде невиконуваною.

Гілмор (Gilmore P.C.) одним з перших застосував цю процедуру. У 1960 році він написав машинну програму, яка успішно будувала множини S'_0, S'_1, S'_2, …, де S'_i – множина всіх основних прикладів диз'юнктів, отриманих заміною змінних в S константами з H_i – множини констант i-го рівня для S. Оскільки кожну множину S'_i можна подати як кон'юнкцію основних прикладів диз'юнктів, то можна використати будь-який метод, щоб перевірити її невиконуваність. Гілмор використовував *мультиплікативний* метод: приводив кожну побудовану множину S'_i до *диз'юнктивної* нормальної форми. Після цього кожна кон'юнкція в диз'юнктивній нормальній формі, яка містила контрарні пари, вилучалася. Якщо якесь S'_i виявлялося порожнім, то невиконуваність S виявлялася доведеною.

Приклад 3.12. Нехай $S = \{P(a), \neg P(f(x)) \vee Q(x), \neg Q(f(a))\}$.

Тоді $H_0 = \{a\}$ – множина констант нульового рівня для S;

$S'_0 = \{P(a), \neg P(a) \vee Q(f(a)), \neg Q(f(a))\}$ – множина основних прикладів диз'юнктів для нульового рівня.

Подамо множину S'_0 у вигляді кон'юнкції: $S'_0 = P(a) \wedge (\neg P(a) \vee Q(f(a))) \wedge \neg Q(f(a))$.

Після тривіальних перетворень отримаємо:

$$S'_0 \equiv P(a) \wedge (\neg P(a) \vee Q(f(a))) \wedge \neg Q(f(a)) \equiv \qquad \text{КНФ}$$

$$\equiv (P(a) \wedge \neg P(a) \wedge \neg Q(f(a))) \vee (P(a) \wedge Q(f(a)) \wedge \neg Q(f(a))) \equiv \qquad \text{ДНФ}$$

$$\equiv \mathbf{F} \vee \mathbf{F} \equiv \mathbf{F}. \qquad \text{Результат}$$

Отже, доведено, що множина S невиконувана.

Зазначимо, що мультиплікативний метод неефективний. Легко побачити, що для малопотужної множини із десяти основних диз'юнктів, кожний з яких складається з двох літералів, існує 2^{10} кон'юнкцій. *Ефективним методом для автоматичного доведення теорем, який зараз використовується, є метод резолюцій.*

3.10. Жак Ербран

Жак Ербран (Jacques Herbrand), 12 лютого 1908 – 27 липня 1931 – французький математик. Хоча він помер в 23 роки, він вважався одним з «найвидатніших математиків молодшого покоління». Його професорами були Гельмут Гассе і Ріхард Курант.

Він працював над **математичною логікою** та теорією полів класів. Увів поняття функціональної рекурсії. *Теорема Ербрана* відноситься до двох зовсім різних тем. Перша теорема (теорема Ербрана) є результатом його **дисертаційної роботи з теорії доведень**, а друга – теорема Ербрана–Рібета, стосується іншої тематики.

Займаючись альпінізмом у французьких Альпах з двома друзями, він насмерть розбився в гранітних горах масиву де Екрінс.

3.11. Питання для самоконтролю

1. Що таке ербранівський універсум множини диз'юнктів?
2. Що таке ербранівський базис множини диз'юнктів?
3. Що таке основний приклад диз'юнкта?
4. Що таке *H*-інтерпретація множини диз'юнктів?
5. Сформулюйте теорему про *H*-інтерпретацію.
6. Що таке семантичне дерево?
7. Що таке вершина-спростування в семантичному дереві?
8. Сформулюйте теорему Ербрана.
9. Опишіть процедуру спростування множини диз'юнктів на основі теореми Ербрана. Чому ця процедура неефективна?