Змістовий модуль 5. Формальні теорії (числення)
Тема 13. Числення предикатів

План лекції.

- Числення предикатів
  - Мова і правила виведення числення предикатів
  - Приклади доведення в численні предикатів
  - Повнота і несуперечливість числення предикатів
  - Нерозв’язність числення предикатів
- Формальна арифметика
  - Аксіоми формальної арифметики
  - Несуперечливість формальної арифметики. Теорема Ґенцена
  - Теореми Ґеделя про неповноту
- Курт Ґедель
- Питання для самоконтролю до лекцій 12-13

5.3. Числення предикатів

5.3.1. Мова і правила виведення числення предикатів

Числення предикатів – це формальна теорія, отримана в спосіб додавання до числення висловлень нових знаків, поняття терму, нових формул і нових правил виведення.

1. Доповнення в алфавіт.

- Предметні змінні: $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$
- Предметні константи: $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$
- Предикатні букви:

$$P_1^{(n_1)}(\cdot,\ldots,\cdot),\ P_2^{(n_2)}(\cdot,\ldots,\cdot),\ \ldots$$

- Функціональні букви:

$$f_1^{(n_1)}(\cdot,\ldots,\cdot),\ f_2^{(n_2)}(\cdot,\ldots,\cdot),\ \ldots$$

- Логічні знаки (квантори): $\forall$, $\exists$.
-

Зауваження. Верхній індекс означає *місність* (кількість аргументів) у знаку предиката чи операції.

2. Терми.

- Предметні змінні $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$. – це терми.
- Предметні константи $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$. – це терми.
- Якщо $f_m^{(n)}(\cdot,\ldots,\cdot)$ – n-місна функціональна буква, а $t_1, \ldots, t_n$ – терми, то $f_m^{(n)}(t_1,\ldots,t_n)$ – терм.

3. Формули.

- Якщо $P_m^{(n)}(\cdot,\ldots,\cdot)$ – n-місна предикатна буква, а $t_1, \ldots, t_n$ – терми, то $P_m^{(n)}(t_1,\ldots,t_n)$ – формула (атомарна); усі входження предметних змінних у формулу виду $P_m^{(n)}(t_1,\ldots,t_n)$ називаються *вільними*.
- Якщо A і B – формули, то $(A \vee B)$, $(A \wedge B)$, $(A \rightarrow B)$ і $\neg A$ – формули; усі входження предметних змінних, вільні в A і B, є вільними й у зазначених чотирьох видах формул.
- Якщо $A(x)$ – формула, яка містить вільне входження предметної змінної x, то $\forall x\, A(x)$, $\exists x\, A(x)$ – формули; у цих формулах всі входження змінної x називаються *зв'язаними*, входження решти змінних в A залишаються вільними.
- Інших формул немає.

Зауваження. Зовнішні дужки у формулах як правило домовляються випускати: наприклад, замість $(A \vee B)$ пишуть $A \vee B$. Замість синтаксично зручнішого знака $\neg$ можна використовувати риску над формулою.

Функціональні букви і терми введені «взапас» для цілей різних прикладних числень предикатів. *Чисте* числення предикатів будується для довільної області інтерпретації, структура цієї області та зв'язки між її елементами не мають значення, тому в ньому функціональні букви й терми не обов'язкові. Зокрема, аксіоми Р.1 і Р.2, які наведені нижче, не враховують наявності термів у формулах. Для числення з термами й функціональними буквами ці аксіоми мають вигляд Р.1′ і Р.2′ (див. далі).

У прикладних дослідженнях (наприклад, у формальній арифметиці) структура предметної області істотна, тому в численні необхідно мати засоби для опису зв'язків між елементами, тобто функцій і відношень, визначених на області. Відношенням відповідають предикатні букви, функціям – функціональні букви. Терми – це імена елементів області інтерпретації, які побудовані за допомогою функцій. Вони можуть бути сталими (якщо вони побудовані із предметних констант) і змінними. Формули – це висловлення про терми. Наприклад, $4+5\cdot3$ – сталий терм будь-якого числення, яке містить функціональні букви $+$ і $\cdot$, а $x+7$ – змінний терм того самого числення. Вираз $4+5\cdot3 = x+7$ – це змінне висловлення, отримане підстановкою двох термів у двомісний предикат рівності; його істинність залежить від значення змінної x.

4. Додаткові аксіоми.

$$\text{P.1. } \forall x\, A(x) \rightarrow A(y),$$
$$\text{P.2. } A(y) \rightarrow \exists x\, A(x).$$

У цих аксіомах $A(x)$ – будь-яка формула, яка містить вільні входження x, причому жодне з них не є в області дії квантора по y; формула $A(y)$ отримується із $A(x)$ заміною всіх вільних входжень x на y.

Щоб пояснити істотність вимоги до входжень x в A, розглянемо в ролі $A(x)$ формулу $\exists y P(y, x)$, де ця вимога порушена: вільне входження x є в області дії $\exists y$. Підстановка цієї формули в аксіому Р.1 дасть формулу $\forall x \exists y P(y, x) \rightarrow \exists y P(y, y)$. Якщо останню формулу проінтерпретувати на множині N натуральних чисел із предикатом P «бути більше», то одержимо висловлення «якщо для всякого x знайдеться y більший ніж x, то знайдеться y, більший самого себе». Засновок цієї імплікації істинний на N, а її висновок фальшивий, отже, само висловлення фальшиве.

5. **Додаткові правила виведення.**

Правило узагальнення ($\forall$ – уведення):

$$\frac{B \to A(x)}{B \to \forall x\, A(x)},$$

де $A(x)$ містить вільні входження x, а B їх не містить.

Правило $\exists$ – уведення:

$$\frac{A(x) \to B}{\exists x\, A(x) \to B},$$

при тих самих вимогах до A і B, що і в попередньому правилі.

Порушення цих вимог може призвести до хибних висновків із істинних висловлень. Нехай, наприклад, $P(x)$ – предикат «x ділиться на 6», $Q(x)$ – предикат «x ділиться на 3». Формула $P(x) \to Q(x)$, очевидно, істинна для будь-якого x, проте застосування до нього правила узагальнення дає формулу $P(x) \to \forall x Q(x)$, яка не є завжди істинною. Якщо ж до $P(x) \to Q(x)$ застосувати правило $\exists$ – уведення, то одержимо формулу $\exists x P(x) \to Q(x)$, із якої уже коректним застосуванням правила узагальнення отримаємо висловлення, фальшиве на множині натуральних чисел.

5.3.2. Приклади доведення в численні предикатів

Приклад 5.9. Покажемо, що в численні предикатів із виводимості формули $A(x)$, яка містить вільні входження x, жодне з яких не є в області дії квантора по y, випливає виводимість $A(y)$. Це твердження називають *правилом перейменування вільних змінних*.

1. $\vdash A(x)$. За умовою.
2. $A(x)\to(B\to A(x))$. Аксіома ІІ.1 числення висловлень, а як B вибираємо будь-яку доказову формулу, яка не містить вільних входжень x; її доказовість знадобиться на кроці 5, а обмеження на x – на кроці 4.
3. $B\to A(x)$. Правило modus ponens до кроків 1 і 2.
4. $B\to\forall xA(x)$. Правило узагальнення до кроку 3.
5. $\forall xA(x)$. Правило modus ponens до B і кроку 4.
6. $A(y)$. Правило modus ponens до кроку 5 і аксіоми Р.1.

Приклад 5.10. У численні предикатів із виводимості $\forall xA(x)$ випливає виводимість $\forall yA(y)$, а із виводимості $\exists xA(x)$ – виводимість $\exists yA(y)$, за умови, що $A(x)$ не містить вільних входжень y і містить вільні входження x, жодне з яких не входить в область дії квантора по y. Це – *правило перейменування зв'язаних змінних*.

Доведемо це правило для квантора загальності.

1. $\vdash \forall xA(x)$. За умовою.

2. $\forall xA(x) \to A(y)$. Аксіома Р.1.

3. $\forall xA(x) \to \forall yA(y)$. Правило узагальнення до кроку 2.

4. $\forall yA(y)$. Правило modus ponens до кроків 1 і 3.

Доведення для $\exists$ цілком аналогічне, але використовує аксіому Р.2 і правило $\exists$-уведення.

5.3.3. Повнота і несуперечливість числення предикатів

Теорема 5.6 (Ґедель, 1930). Формула логіки предикатів є загальнозначимою тоді і тільки тоді, коли вона є теоремою в чистому численні предикатів.

Іншими словами, для чистого числення предикатів вірним є твердження:

$$\models A \text{ тоді і тільки тоді, коли } \vdash A.$$

Теорема 5.7. Чисте числення предикатів – повна теорія.

Доведення отримаємо з твердження «із $\models A$ випливає $\vdash A$» теореми 5.6.

Теорема 5.8. Чисте числення предикатів – несуперечлива теорія.

Доведення отримуємо з твердження «із $\vdash A$ випливає $\models A$» теореми 5.6. Справді, якби була доказовою формула $A = B\wedge\neg B$, то була би загальнозначимою формула $B\wedge\neg B$. Але остання формула фальшива.

5.3.4. Нерозв’язність числення предикатів

Теорема 5.9 (Чорч, 1936). Числення предикатів – нерозв’язна теорія.

Незважаючи на повноту числення предикатів, розв’язний алгоритм, пов’язаний з обчисленням істинності предикатних формул, побудувати не вдається з причини нескінченності області інтерпретації, яка призводить у загальному випадку до нескінченних таблиць істинності. Ідея доведення теореми Чорча полягає в тому, щоб у чистому численні предикатів описати предикат $Q(i, a, x)$: «машина Тьюрінга з номером i, яку застосовано до початкових даних a, закінчить обчислення в момент x». Предикат $\exists x Q(i, a, x)$ – це предикат зупинки, а $\exists x Q(a, a, x)$ – предикат самозастосовності. Нерозв’язність обох предикатів доводилась у курсі дискретної математики.

Зазначимо, що важливий для застосувань фрагмент числення предикатів розв’язний: числення одномісних предикатів (тобто числення, яке допускає у формулах тільки одномісні предикатні букви) є розв’язним.

5.4. Формальна арифметика

Побудоване числення предикатів називають численням предикатів першого порядку. У численнях другого порядку можливі квантори за предикатами, тобто вирази типу $\forall P(P(x))$. Застосування таких числень зустрічаються набагато менше, і ми числення другого порядку не розглядатимемо.

Числення предикатів, яке не містить функціональних букв і предметних констант, називають *чистим численням предикатів*. По суті досі розглядалося саме чисте числення предикатів, хоча мова числення (тобто формули) була означена з урахуванням її застосування в прикладних численнях.

Прикладні числення (теорії першого порядку) характерні тим, що в них до чисто логічних аксіом добавлені власні аксіоми, у яких, як правило, беруть участь конкретні (індивідуальні) предикатні букви і предметні константи. Типовими прикладами індивідуальних предикатних букв є предикати =, <, функціональних букв – знаки арифметичних операцій, предметних констант – натуральні числа, одиниця в теорії груп, порожня множина в теорії множин.

Інша важлива особливість прикладних числень полягає в тому, що в схемах аксіом P.1 і P.2 присутні уже не предметні змінні, а довільні терми. З урахуванням сказаного ці схеми виглядатимуть так:

$$\text{P.1}'.\ \forall x\, A(x) \to A(t),$$

$$\text{P.2}'.\ A(t) \to \exists x\, A(x).$$

Тут $A(t)$ – результат підстановки терму t у $A(x)$ замість усіх вільних входжень x, причому всі змінні в t мають бути вільними в $A(t)$. Це означає, що коли терм $t = t(y_1, \ldots, y_n)$, то в формулі A немає кванторів $\forall y_i$, $\exists y_i$ ($i = 1, \ldots, n$).

Більшість прикладних досліджень містить предикат рівності = і аксіоми, які його визначають:

E.1. $\forall x(x = x)$ (конкретна аксіома);

E.2. $(x = y)\rightarrow(A(x, x)\rightarrow A(x, y))$ (схема аксіом).

У схемі E.2 формула $A(x, y)$ отримується із $A(x, x)$ заміною деяких (не обов'язково всіх) входжень x на y за умови, що y у цих входженнях також залишається вільним. Всяку теорію, у якій E.1 і E.2 є теоремами чи аксіомами, називають *теорією* (або *численням*) *із рівністю*. Річ у тім, що із E.1 і E.2 вивідні основні властивості рівності – рефлексивність, симетричність і транзитивність.

5.4.1. Аксіоми формальної арифметики

Формальна арифметика – це прикладне числення з рівністю, у якому додатково є:

1. Предметна константа 0.
2. Двомісні операції + і · та одномісна операція $'$.
3. Знак рівності =.
4. Нелогічні аксіоми рівності E.1 і E.2 і такі нелогічні аксіоми арифметики:

    A.1. $(A(0) \wedge \forall x(A(x) \to A(x'))) \to \forall x A(x)$;

    A.2. $(t_1' = t_2') \to (t_1 = t_2)$;

    A.3. $\neg(t' = 0)$;

    A.4. $(t_1 = t_2) \to ((t_2 = t_3) \to (t_1 = t_3))$;

    A.5. $(t_1 = t_2) \to (t_1' = t_2')$;

    A.6. $t + 0 = t$;

    A.7. $(t_1 = t_2') = (t_1 = t_2)'$;

    A.8. $t \cdot 0 = 0$;

    A.9. $t_1 \cdot t_2' = t_1 \cdot t_2 + t_1$.

Тут A – довільна формула, а t, t_1, t_2 – будь-які терми.

Аксіома А.1 – це відомий спосіб доведення за допомогою математичної індукції. Якщо замість t' писати $t+1$, то зрозуміло, що t' – це наступне натуральне число після t. Іншими словами, аксіоми арифметики визначають натуральні числа і правила дій з ними за допомогою операцій додавання і множення.

У цих аксіомах використані три функціональних символи $+$, $\cdot$, $'$, один індивідуальний предикат (предикатна буква) $=$ і одна предметна константа 0. Зазначимо, що в аксіомах використано більш уживану нотацію для предиката $=$, а саме, пишемо $t_1 = t_2$ замість $=(t_1, t_2)$.

5.4.2. Несуперечливість формальної арифметики. Теорема Ґенцена

Метод математичної індукції, який входить як аксіома у формальну арифметику, може бути посилений за рахунок розширення області його застосування до так званих трансфінітних чисел, котрі, як можна побачити з їхньої назви, «ідуть слідом» за фінітними, тобто натуральними числами. Отримується більш потужний спосіб доведення теорем, який називають *методом трансфінітної індукції*.

Теорема 5.10 (Ґенцен, 1936). Несуперечливість формальної арифметики доводиться в більш широкій формальній теорії, яка містить формальну арифметику і принцип трансфінітної індукції.

5.4.3. Теореми Ґеделя про неповноту

Теорема 5.11 (перша теорема Ґеделя про неповноту). Всяка несуперечлива формальна теорія $\mathcal{T}$, яка містить формальну арифметику, неповна: в ній існує (і може бути ефективно побудована) закрита формула A, така, що A істинна, але ні A, ні $\neg A$ не є доказовими (тобто не є вивідними в теорії $\mathcal{T}$).

Теорема 5.12 (друга теорема Ґеделя про неповноту). Для всякої несуперечливої формальної теорії $\mathcal{T}$, яка містить формальну арифметику, формула, яка виражає несуперечливість $\mathcal{T}$, недоказова в $\mathcal{T}$.

Ці дві знамениті теореми Ґеделя мають важливе методологічне значення. Із першої теореми випливає, що для достатньо багатих математичних теорій не існує адекватних формалізацій. Правда, всяку неповну теорію $\mathcal{T}$ можна розширити, добавивши, наприклад, до неї як нову аксіому істинну, але не вивідну в $\mathcal{T}$ формулу. Проте, за першою теоремою Ґеделя нова теорія $\mathcal{T}$ також буде неповною.

Другу теорему Ґеделя можна тлумачити як неможливість дослідження метавластивостей теорії засобами самої теорії (знову неможливість самозастосування!); іншими словами, метатеорія теорії $\mathcal{T}$ для можливості доводити хоча би несуперечливість теорії $\mathcal{T}$, має бути багатшою ніж $\mathcal{T}$. За суттю при цьому ставиться під сумнів першопочаткова, «максималістська» програма фінітного підходу: неможливо побудувати математику як якусь фіксовану сукупність засобів, які можна було би оголосити єдино законними і з їхньою допомогою будувати метатеорії будь-яких теорій.

З іншого боку неможна тлумачити результати Ґеделя як крах формального підходу. Наявність алгоритмічно нерозв'язних проблем зовсім не кидає тінь на теорію алгоритмів, а лише відкриває «сувору правду» про устрій світу, який вивчає ця теорія. Із цієї правди не випливає, що алгоритмічний, конструктивний підхід до розв'язання проблеми непридатний; хоча він чогось і не може, але тільки тому, що цього не може ніхто. Так само неможливість повної формалізації змістовно визначених теорій – це не недолік підходу чи то концепції, а об'єктивний факт, який не можна усунути ніякою концепцією. Формальний підхід залишається основним конструктивним засобом вивчення множин висловлень. Неможливість адекватної формалізації теорії означає, що потрібно або шукати фрагменти теорії, які можна формалізувати, або будувати якусь сильнішу формальну теорію. Хоча ця сильніша теорія знову буде неповною, але, можливо, буде містити всю вихідну теорію. Наприклад, методами, які не формалізуються у формальній арифметиці, Ґенцен довів несуперечливість формальної арифметики (теорема 5.10).

5.5. Курт Ґедель

Курт Ґедель (Kurt Gödel) народився 28 квітня 1906 р. у Брюнні (нині місто Брно, Чехія). Закінчив Віденський університет, де захистив докторську дисертацію. 1940 року, після аншлюсу емігрував до США. З 1953 року професор Принстонського інституту перспективних досліджень, член Національної АН США та Американського філософського товариства. Помер у 1978 р.

Ґедель був логіком і філософом науки. Найвідоміше досягнення Ґеделя – це сформульовані й доведені ним теореми про неповноту, опубліковані 1931 року.

5.6. Питання для самоконтролю до лекцій 12-13

1. У чому полягала суть програми Гільберта?
2. Дайте означення формальної теорії (числення).
3. Дайте означення поняття доведення формули у формальній теорії.
4. Що таке несуперечливість теорії?
5. Що таке повнота теорії?

6. Що таке розв’язність теорії?
7. Опишіть мову числення висловлень.
8. Сформулюйте теорему дедукції.
9. Доведіть закон виключеного третього: $\vdash A \vee \neg A$.
10. Сформулюйте теореми про повноту і несуперечливість числення висловлень.
11. Сформулюйте теорему про розв’язність числення висловлень. На чому ґрунтується доведення цієї теореми?
12. Опишіть мову числення предикатів.
13. Сформулюйте теореми про повноту і несуперечливість числення предикатів.
14. Сформулюйте теорему Чорча про нерозв’язність числення предикатів. У чому полягає ідея доведення цієї теореми?
15. Чи є розв’язним числення одномісних предикатів (тобто числення, яке допускає у формулах тільки одномісні предикатні букви)?
16. Що таке формальна арифметика?
17. Сформулюйте теорему Ґенцена про несуперечливість формальної арифметики. У чому полягає її методологічне значення?
18. Сформулюйте першу теорему Ґеделя про неповноту. У чому полягає її методологічне значення?
19. Сформулюйте другу теорему Ґеделя про неповноту. У чому полягає її методологічне значення?