

Змістовий модуль 2. ЛОГІКА ПЕРШОГО ПОРЯДКУ (ЛОГІКА ПРЕДИКАТІВ)

Тема 5. Логічна еквівалентність і логічний наслідок

План лекції.

- Логічна еквівалентність у логіці першого порядку.
- Закони логіки першого порядку
- Логічний наслідок у логіці першого порядку
- Готлоб Фреге

2.6. Логічна еквівалентність. Закони логіки першого порядку

Формули A і B логіки першого порядку називають *еквівалентними*, або *рівносильними*, *тотожними*, тоді й тільки тоді, коли значення істинності A і B збігаються при кожній інтерпретації A і B .

Як і в пропозиційній логіці, у логіці першого порядку справджується твердження: формули A та B еквівалентні тоді й тільки тоді, коли формула $A \leftrightarrow B$ загальнозначима (тавтологія). Логічну еквівалентність формул A та B записують як $A \equiv B$ (або $A \leftrightarrow B$).

Еквівалентні формули пропозиційної логіки залишаються такими й у логіці першого порядку. Окрім них існують інші еквівалентності для формул, які містять квантори.

Нижче наведено такі еквівалентності. Зазначимо, що у формулах показано лише зв'язані змінні, а вільні змінні не показано.

Закони 1 і 2 показують, як заперечення можна внести всередину формули з кванторами (це – аналоги законів де Моргана).

$$1. \neg \forall x A(x) \equiv \exists x \neg A(x).$$

$$2. \neg \exists x A(x) \equiv \forall x \neg A(x).$$

Закони 3 і 4 показують, що квантор загальності можна розподілити за кон'юнкцією, а квантор існування – за диз'юнкцією.

$$3. \forall x (A(x) \wedge B(x)) \equiv \forall x A(x) \wedge \forall x B(x).$$

$$4. \exists x (A(x) \vee B(x)) \equiv \exists x A(x) \vee \exists x B(x).$$

Природно сформулювати питання, чи можна розподілити квантор загальності за диз'юнкцією, а квантор існування – за кон'юнкцією? Виявляється, що ні. Однак, якщо одна з формул A або B не містить змінної x , то це зробити можна.

$$5. \forall x (A(x) \wedge B) \equiv \forall x A(x) \wedge B.$$

$$6. \forall x (A(x) \vee B) \equiv \forall x A(x) \vee B.$$

$$7. \exists x (A(x) \wedge B) \equiv \exists x A(x) \wedge B.$$

$$8. \exists x (A(x) \vee B) \equiv \exists x A(x) \vee B.$$

Закони 9 і 10 стверджують, що однойменні квантори можна переставляти.

$$9. \forall x \forall y A(x, y) \equiv \forall y \forall x A(x, y).$$

$$10. \exists x \exists y A(x, y) \equiv \exists y \exists x A(x, y).$$

Закони 1 і 2 довести неважко.

1. $\neg \forall x A(x) \equiv \exists x \neg A(x)$.

2. $\neg \exists x A(x) \equiv \forall x \neg A(x)$.

Нехай I – довільна інтерпретація з областю M . Якщо $\neg \forall x A(x)$ істинна при I , то $\forall x A(x)$ фальшива при I . Це означає, що існує такий елемент $e \in M$, що $A(e)$ фальшива, тобто $\neg A(e)$ істинна при I . Отже, $\exists x \neg A(x)$ істинна при I . З іншого боку, якщо $\neg \forall x A(x)$ фальшива при I , то $\forall x A(x)$ істинна при I . Це означає, що $A(x)$ істинна для кожного елемента x із M , тобто $\neg A(x)$ фальшива для кожного елемента x із M . Отже, $\exists x \neg A(x)$ фальшива при I . Оскільки $\neg \forall x A(x)$ і $\exists x \neg A(x)$ завжди отримують одне й те саме значення при довільній інтерпретації, то за означенням $\neg \forall x A(x) \equiv \exists x \neg A(x)$. Тому закон 1 доведено. Аналогічно можна довести закон 2.

Доведемо закон 3. $\forall x (A(x) \wedge B(x)) \equiv \forall x A(x) \wedge \forall x B(x)$.

Нехай I – довільна інтерпретація на області M . Якщо $\forall x (A(x) \wedge B(x))$ істинна при I , то для довільного $a \in M$ істинна $A(a) \wedge B(a)$. Тому $A(a)$ і $B(a)$ одночасно істинні для довільного a , тобто $\forall x A(x) \wedge \forall x B(x)$ істинна. Якщо ж $\forall x (A(x) \wedge B(x))$ фальшива при I , то існує таке $e \in M$, що фальшива принаймні одна з формул $A(e)$ або $B(e)$. Це означає, що фальшива принаймні одна з формул $\forall x A(x)$ або $\forall x B(x)$, тобто формула $\forall x A(x) \wedge \forall x B(x)$ фальшива при I . Оскільки $\forall x (A(x) \wedge B(x))$ і $\forall x A(x) \wedge \forall x B(x)$ завжди отримують одне й те саме значення в довільній інтерпретації, то за означенням $\forall x (A(x) \wedge B(x)) \equiv \forall x A(x) \wedge \forall x B(x)$. Закон 3 доведено. Закон 4 доводять аналогічно.

Закони 5 – 8 очевидно справджуються, бо формула B не містить x і, отже, її можна внести в область дії квантора.

Зазначимо, що в законах 9 і 10 змінні в предикатах зв'язані однойменними кванторами, і їх можна переставляти. Доведення цих законів пропонуємо як вправу. Якщо ж квантори різні, то $\forall x \exists y A(x, y)$ та $\exists y \forall x A(x, y)$ не є еквівалентними. Наведемо приклад, який ілюструє це зауваження.

Приклад 2.30. Розглянемо двомісний предикат $P(x, y)$: « $x \geq y$ » на різних предметних областях. Формула $\exists x \forall y P(x, y)$ означає, що в предметній області існує максимальний елемент. Ця формула істинна на області, що являє собою будь-яку скінченну підмножину множини цілих чисел, але фальшива, наприклад, на множині $\{1/2, 2/3, 3/4, \dots, n/(n+1), \dots\}$. Висловлення $\forall y \exists x P(x, y)$ стверджує, що для довільного елемента y існує елемент x , не менший від y . Таке висловлення істинне на довільній непорожній множині. Отже, переставлення кванторів існування та загальності може змінити зміст висловлення та значення його істинності.

Ми вже зазначали, що квантор загальності неможна розподіляти за диз'юнкцією, а квантор існування – за кон'юнкцією, тобто

$$\forall x (A(x) \vee B(x)) \text{ не еквівалентно } \forall x A(x) \vee \forall x B(x),$$

$$\exists x (A(x) \wedge B(x)) \text{ не еквівалентно } \exists x A(x) \wedge \exists x B(x).$$

При еквівалентних перетвореннях у випадках, подібних цьому, потрібно поступати спеціальним чином. Оскільки кожен зв'язаний змінний у формулі можна розглядати лише як місце для підстановки якої завгодно змінної, то кожен зв'язаний змінний можна

перейменувати в z і формула $\forall x B(x)$ перетвориться в $\forall z B(z)$, тобто $\forall x B(x) \equiv \forall z B(z)$. Припустимо, що ми вибираємо змінну z , яка не зустрічається в $A(x)$. Тоді

$$\forall x A(x) \vee \forall x B(x) \equiv \forall x A(x) \vee \forall z B(z) \equiv \forall x \forall z (A(x) \vee B(z));$$

тут двічі використано закон 6.

Аналогічно,

$$\exists x A(x) \wedge \exists x B(x) \equiv \exists x A(x) \wedge \exists z B(z) \equiv \exists x \exists z (A(x) \wedge B(z)).$$

В останньому випадку двічі використано закон 7.

Отже, для цих двох випадків ми все ще можемо винести всі квантори цієї формули вліво. Таку ж методику використовують і при еквівалентних перетвореннях формул виду

$$\forall x A(x) \vee \exists x B(x) \equiv \forall x A(x) \vee \exists z B(z) \equiv \forall x \exists z (A(x) \vee B(z))$$

або

$$\exists x A(x) \wedge \forall x B(x) \equiv \exists x A(x) \wedge \forall z B(z) \equiv \exists x \forall z (A(x) \wedge B(z)).$$

У пропозиційній логіці застосовують два способи доведення еквівалентності формул: побудову спільної таблиці істинності та перехід від однієї формули до іншої за допомогою законів. У випадку логіки предикатів залишається лише другий спосіб. Покажемо його застосування на такому прикладі.

Приклад 2.31. Доведемо логічну еквівалентність формул

$$\neg \forall x \exists y ((P(x) \wedge \neg Q(x, y)) \vee \forall z (S(z) \wedge T(x, z)))$$

та

$$\exists x \forall y ((\neg P(x) \vee Q(x, y)) \wedge \exists z (\neg S(z) \vee \neg T(x, z))).$$

Використовуючи закони логіки першого порядку послідовно матимемо

$$\begin{aligned}
& \neg \forall x \exists y ((P(x) \wedge \neg Q(x, y)) \vee \forall z (S(z) \wedge T(x, z))) \equiv && \text{закони 1 і 2} \\
& \equiv \exists x \forall y \neg ((P(x) \wedge \neg Q(x, y)) \vee \forall z (S(z) \wedge T(x, z))) \equiv && \text{закон де Моргана} \\
& \equiv \exists x \forall y (\neg (P(x) \wedge \neg Q(x, y)) \wedge \neg \forall z (S(z) \wedge T(x, z))) \equiv && \text{закон 1} \\
& \equiv \exists x \forall y (\neg (P(x) \wedge \neg Q(x, y)) \wedge \exists z \neg (S(z) \wedge T(x, z))) \equiv && \text{закон де Моргана} \\
& \equiv \exists x \forall y ((\neg P(x) \vee Q(x, y)) \wedge \exists z (\neg S(z) \vee \neg T(x, z))).
\end{aligned}$$

Отже, для доведення еквівалентності двох формул логіки першого порядку використовують закони цієї логіки. Для доведення того, що дві формули не є еквівалентними, достатньо знайти *контрприклад*, тобто побудувати інтерпретацію, у якій одна формула істинна, а інша фальшива.

Приклад 2.32. Раніше ми зазначили, що $\forall x(G(x) \vee H(x))$ не еквівалентно $\forall xG(x) \vee \forall xH(x)$. Доведемо це.

Розглянемо таку інтерпретацію на області $M = \{1, 2\}$:

$G(1)$	$G(2)$	$H(1)$	$H(2)$
T	F	F	T

У цій інтерпретації $\forall x(G(x) \vee H(x))$ має значення T , а $\forall xG(x) \vee \forall xH(x)$ має значення F .

Коротко зупинимось на випадку, коли предметна область скінченна. Якщо $M = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ – скінченна предметна область предиката $P(x)$, то можна скористатись логічними еквівалентностями

$$\forall x P(x) \equiv P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge \dots \wedge P(a_n) \text{ та } \exists x P(x) \equiv P(a_1) \vee P(a_2) \vee \dots \vee P(a_n).$$

У такому разі заперечення квантифікованої формули дає той самий результат, що й застосування відповідного закону де Моргана. Це впливає з того, що

$$\neg \forall x P(x) \equiv \neg (P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge \dots \wedge P(a_n)) \equiv \neg P(a_1) \vee \neg P(a_2) \vee \dots \vee \neg P(a_n),$$

остання формула еквівалентна $\exists x \neg P(x)$.

Аналогічно,

$$\neg \exists x P(x) \equiv \neg (P(a_1) \vee P(a_2) \vee \dots \vee P(a_n)) \equiv \neg P(a_1) \wedge \neg P(a_2) \wedge \dots \wedge \neg P(a_n),$$

що еквівалентно $\forall x \neg P(x)$.

2.7. Логічний наслідок

Формулу B називають *логічним наслідком* формул A_1, A_2, \dots, A_n , якщо при кожній інтерпретації, у якій виконуються всі формули A_1, A_2, \dots, A_n , формула B також виконується.

Як і в пропозиційній логіці, в логіці першого порядку формули A_1, A_2, \dots, A_n називають *гіпотезами* (припущеннями, фактами, засновками, аксіомами), а формулу B – *висновком*.

Співвідношення між загальнозначимою формулою і логічним наслідком та суперечністю і логічним наслідком, які сформульовано в теоремах 1.6, 1.7 і 1.8 для формул пропозиційної логіки, залишаються правильними й у логіці першого порядку. Насправді логіку першого порядку можна розглядати як розширення пропозиційної логіки. Якщо формула в логіці першого порядку не містить змінних і кванторів, то її можна розглядати як формулу в пропозиційній логіці.

Тут ми подамо три приклади, які проілюструють застосування логіки першого порядку до розв'язування задач.

Приклад 2.33. Розглянемо формули

$$A_1: \forall x (P(x) \rightarrow Q(x)),$$

$$A_2: P(a)$$

Доведемо, що формула $Q(a)$ – логічний наслідок формул A_1 та A_2 .

Розглянемо будь-яку інтерпретацію I , яка задовольняє $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge P(a)$. Звичайно при цій інтерпретації $P(a)$ є істинною. Нехай $Q(a)$ фальшива при цій інтерпретації, тоді $\neg P(a) \vee Q(a)$, тобто $P(a) \rightarrow Q(a)$ фальшива при інтерпретації I . Це означає, що $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$ фальшива в I , що неможливо. Отже, $Q(a)$ має бути істинною при кожній інтерпретації, яка задовольняє $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge P(a)$. Це означає, що $Q(a)$ є логічним наслідком формул A_1 та A_2 .

Приклад 2.34. Дано дві гіпотези

$A_1: \quad \forall x(\text{ЛЮДИНА}(x) \rightarrow \text{СМЕРТНИЙ}(x)),$

$A_2: \quad \text{ЛЮДИНА}(\text{Конфуцій}).$

Із A_1 і A_2 потрібно одержати, що Конфуцій смертний, тобто довести, що $\text{СМЕРТНИЙ}(\text{Конфуцій})$ – логічний наслідок A_1 і A_2 .

Маємо

$A_1 \wedge A_2: \forall x(\text{ЛЮДИНА}(x) \rightarrow \text{СМЕРТНИЙ}(x)) \wedge \text{ЛЮДИНА}(\text{Конфуцій}).$

Якщо $A_1 \wedge A_2$ істинна при інтерпретації I , то обидві формули A_1 і A_2 істинні при I . Оскільки формула $(\text{ЛЮДИНА}(x) \rightarrow \text{СМЕРТНИЙ}(x))$ істинна для всіх x , то, коли x замінити на «Конфуцій», отримаємо формулу

$\text{ЛЮДИНА}(\text{Конфуцій}) \rightarrow \text{СМЕРТНИЙ}(\text{Конфуцій}),$

істинну при інтерпретації I , тобто формула

$\neg \text{ЛЮДИНА}(\text{Конфуцій}) \vee \text{СМЕРТНИЙ}(\text{Конфуцій})$

істинна при I . Проте $\neg \text{ЛЮДИНА}(\text{Конфуцій})$ фальшива при I , оскільки $\text{ЛЮДИНА}(\text{Конфуцій})$ істинна при інтерпретації I .

Отже, $\text{СМЕРТНИЙ}(\text{Конфуцій})$ має бути істинною при I . Ми довели, що $\text{СМЕРТНИЙ}(\text{Конфуцій})$ істинна при інтерпретації I , якщо $A_1 \wedge A_2$ – істинна при I . За означенням $\text{СМЕРТНИЙ}(\text{Конфуцій})$ є логічним наслідком A_1 і A_2 .

Приклад 2.35 (Чень, Лі). Деякі пацієнти довіряють усім своїм лікарям. Жоден пацієнт не довіряє знахарю. Отже, жодний лікар не є знахарем. Уведемо позначення:

$P(x)$: x – пацієнт,

$D(x)$: x – лікар,

$Q(x)$: x – знахар,

$L(x, y)$: x довіряє y .

Тоді гіпотези й висновок можна записати у вигляді формул так:

$A_1 : \exists x(P(x) \wedge \forall y(D(y) \rightarrow L(x, y)))$,

$A_2 : \forall x(P(x) \rightarrow \forall y(Q(y) \rightarrow \neg L(x, y)))$,

$B : \forall x(D(x) \rightarrow \neg Q(x))$.

Зараз ми доведемо, що B є логічним наслідком A_1 і A_2 . Нехай I – довільна інтерпретація на області M . Припустимо, що A_1 і A_2 істинні при I . Оскільки A_1 , тобто

$$\exists x(P(x) \wedge \forall y(D(y) \rightarrow L(x, y)))$$

істинна при I , то в M існує такий елемент e , що $(P(e) \wedge \forall y(D(y) \rightarrow L(e, y)))$ істинна при I .

Це означає, що як $P(e)$, так і $\forall y(D(y) \rightarrow L(e, y))$ істинні при I .

З іншого боку, оскільки A_2 , тобто $P(x) \rightarrow \forall y(Q(y) \rightarrow \neg L(x, y))$ істинна при I для всіх елементів x із M , то, безсумнівно, $P(e) \rightarrow \forall y(Q(y) \rightarrow \neg L(e, y))$ істинна при I . Оскільки $P(e)$ істинна при інтерпретації I , то й $\forall y(Q(y) \rightarrow \neg L(e, y))$ має бути істинною при I . Отже, ми знаємо, що для кожного елемента y із M як $(D(y) \rightarrow L(e, y))$, так і $(Q(y) \rightarrow \neg L(e, y))$ істинні при інтерпретації I . Якщо $D(y)$ фальшива при I , то $(D(y) \rightarrow \neg Q(y))$ істинна при I . Якщо ж $D(y)$ істинна при інтерпретації I , то $L(e, y)$ має бути істинною при цій інтерпретації, бо

$(D(y) \rightarrow L(e, y))$ – істинна. Отже, $Q(y)$ має бути фальшивою при I , бо $(Q(y) \rightarrow \neg L(e, y))$ істинна при інтерпретації I . Звідси доходимо висновку, що $(D(y) \rightarrow \neg Q(y))$ істинна при I . Це означає, що $(D(y) \rightarrow \neg Q(y))$ істинна для кожного y із M , тобто $\forall y(D(y) \rightarrow \neg Q(y))$ істинна при I . Отже, ми довели, що коли A_1 і A_2 істинні при інтерпретації I , то й $\forall y(D(y) \rightarrow \neg Q(y))$ істинна при I . Тим самим доведено, що формула B – логічний наслідок формул A_1 і A_2 .

У трьох наведених прикладах ми показали, що *висновок* впливає з *гіпотез* (говорять також *фактів*, *аксіом*). Обґрунтування того, як висновок впливає з гіпотез, називають *доведенням*.

Далі ми розглянемо правила виведення висновку із гіпотез і покажемо, як їх можна використати для доведення теорем.

2.8. Готлоб Фреге

Готлоб Фреге (Friedrich Ludwig Gottlob Frege) (1848 – 1925) – німецький логік, математик і філософ. Навчався в Йенському і Геттінгенському університетах. Сформулював ідею логіцизму, тобто напрямку в основах математики і філософії математики, основною тезою якого є твердження про «можливість зведення математики до логіки». Він, по суті справи, винайшов і аксіоматизував логіку предикатів, завдяки своєму відкриттю кванторів, використання яких поступово поширилося на всю математику, побудував першу систему формалізованої арифметики.