Задачі для самостійного розв'язування

1. Нехай предикат $P(x)$ означає « $x = x^2$ », а предметна область змінної x –множина цілих чисел. Знайти значення істинності висловлювань:

а) $P(0)$; б) $P(1)$; в) $\exists x P(x)$; г) $P(-1)$; д) $\forall x P(x)$

2 Нехай предикат $Q(x, y)$ означає « $x + y = x - y$ », а предметна область кожної змінної – множина цілих чисел. Знайти значення істинності висловлювань:

а) $Q(1,1)$;
б) $Q(2,0)$;
в) $\forall y Q(1, y)$;
г) $\exists x Q(x,2)$;
д) $\exists x \exists y Q(x, y)$;
е) $\forall x \exists y Q(x, y)$;
є) $\forall x \forall y Q(x, y)$;
ж) $\exists x \forall y Q(x, y)$;
з) $\forall y \exists x Q(x, y)$;
и) $\exists y \forall x Q(x, y)$.

3. Знайти значення істинності кожного з наведених нижче висловлювань, якщо предметна область кожної змінної – множина цілих чисел:

а) $\forall n \exists m (n^2 < m)$;
б) $\exists n \forall m (n < m^2)$;
в) $\forall n \exists m (n + m = 0)$;
г) $\exists n \forall m (nm = m)$;
д) $\exists n \exists m (n^2 + m^2 = 5)$;
е) $\forall n \forall m \exists p (p = (m + n) / 2)$;
є) $\exists n \exists m (n + m = 5 \wedge n - m = 1)$;
и) $\exists n \exists m (n^2 + m^2 = 6)$;
і) $\exists n \exists m (n + m = 4 \wedge n - m = 2)$.

4. Знайти значення істинності кожного з наведених нижче висловлювань, якщо предметна область кожної змінної – множина дійсних чисел.

а) $\forall x \exists y (x^2 = y)$;
б) $\exists x \exists y (x + y \neq y + x)$;
в) $\forall x \exists y (x = y^2)$;
г) $\forall x (x \neq 0 \rightarrow \exists y (xy = 1))$;
д) $\exists x \forall y (xy = 0)$;
е) $\exists x \forall y (y \neq 0 \rightarrow xy = 1)$;
є) $\forall x \exists y (x + y = 1)$;
ж) $\exists x \exists y (x + 2y = 2 \wedge 2x + 4y = 5)$;
з) $\forall x \exists y (x + y = 2 \wedge 2x - y = 1)$;
и) $\forall x \forall y \exists z (z = (x + y) / 2)$.

5. Предметна область кожної змінної предиката $P(x, y)$ - множина $\{1,2,3\}$. Записати наведені нижче висловлювання за допомогою логічних операцій кон'юнкції та диз'юнкції:

а) $\exists x P(x,3)$;
б) $\forall x \forall y P(x, y)$;
в) $\forall y P(1, y)$;
г) $\exists x \exists y P(x, y)$;
д) $\forall y \exists x P(x, y)$.
е) $\exists x \forall y P(x, y)$;

6. Подати наступні математичні твердження, використовуючи предикати, квантори та логічні операції:

а) добуток двох від'ємних дійсних чисел – число додатне;
б) різниця між дійсним числом і ним самим дорівнює нулю;
в) кожне додатне дійсне число має два значення квадратного кореня;
г) від'ємне дійсне число не має в множині дійсних чисел квадратного кореня.

7. Перекласти наступні речення, які подають певні математичні твердження, українською мовою. Предметна область кожної змінної – множина дійсних чисел.

а) $\forall x \forall y (((x \geq 0) \wedge (y < 0)) \rightarrow (x - y) > 0))$;
б) $\exists x \exists y (((x \leq 0) \wedge (y \leq 0)) \wedge (x - y > 0))$;
в) $\forall x \forall y (((x \neq 0) \wedge (y \neq 0) \leftrightarrow (xy \neq 0))$;
г) $\forall x \forall y (((x < 0) \wedge (y < 0)) \rightarrow (xy > 0))$;
д) $\exists x \exists y ((x^2 > y) \wedge (x < y))$;
е) $\forall x \forall y \exists z (x + y = z)$.

8. Позначення $\exists! xP(x)$ відповідає реченню: «У предметній області існує таке єдине *x,* що $P(x)$ істинне». Нехай множина цілих чисел – предметна область змінної *x.* Знайти значення істинності наведених нижче формул.

а) $\exists! x(x > 1)$;

б) $\exists! x(x^2 = 1)$;

в) $\exists! x(x + 3 = 2x)$;

г) $\exists! x(x = x + 1)$.

9. Знайти значення істинності наведених нижче формул:

а) $\exists! xP(x) \rightarrow \exists xP(x)$;

б) $\forall xP(x) \rightarrow \exists! xP(x)$;

в) $\exists! x\neg(P(x)) \rightarrow (\neg(\forall xP(x)))$.

10. Знайти контрприклад, якщо це можливо, для наведених нижче висловлювань з квантором загальності, якщо предметна область обох змінних – множина цілих чисел:

а) $\forall x\exists y(x = 1/y)$;

б) $\forall x\exists y(y^2 - x < 100)$;

в) $\forall x\forall y(x^2 \neq y^3)$.

11. Задано предметну область *M*={1, 2, 3} змінної *x*. Записати висловлювання $\exists! xP(x)$ за допомогою операцій заперечення, кон'юнкції та диз'юнкції.

12. Знайти значення істинності висловлювання $\exists x\forall y(x \le y^2)$, якщо предметні області для обох змінних такі:

а) множина додатних дійсних чисел;

б) множина цілих чисел;

в) множина дійсних чисел, відмінних від нуля.

13. У наведених нижче виразах заперечення перемістити до окремих атомів (тобто заперечення не мають стосуватись кванторів і виразів з логічними операціями):

а) $\neg(\exists y\exists xP(x, y))$;

б) $\neg(\forall x\exists yP(x, y))$;

в) $\neg(\exists y(Q(y) \wedge \forall x\neg(P(x, y)))$;

г) $\neg(\exists y(\exists xR(x, y) \vee \forall xS(x, y)))$;

д) $\neg(\exists y(\forall x\exists zT(x, y, z) \vee \exists x\forall zS(x, y, z)))$.

14. Записати заперечення наведених нижче виразів і перетворити їх так, щоб заперечення перемістилось до окремих атомів:

а) $\forall x\forall y\forall zT(x, y, z)$;

б) $\forall x\exists yP(x, y) \vee \forall x\exists yQ(x, y)$;

в) $\forall x\exists y(P(x, y) \wedge \exists zR(x, y, z))$;

г) $\forall x\exists y(P(x, y) \rightarrow Q(x, y))$;

д) $\exists x\exists y(Q(x, y) \leftrightarrow Q(y, x))$.

15. Подати наведені нижче речення у вигляді формул логіки першого ступеня. Записати заперечення одержаних формул і перетворити їх так, щоб заперечення були лише безпосередньо над атомами. Записати отримані висловлювання реченням української мови:

а) кожний студент групи любить математику;

б) у групі є студент, який прослухав усі запропоновані математичні курси;

в) у групі є студент, який ніколи не бачив комп'ютера;

г) у групі є студент, який побував принаймні в одній аудиторії кожного з навчальних корпусів університету.

16. Нехай на універсальній множині людей $Б(q, Z)$ означає: «q – батько Z», $M(p, Z)$ означає: «*p* – мати *Z*», *Ч(Z)* означає: «*Z* – чоловік». Записати через предикати Б, М, Ч, що:

а) c – брат d;

б) c і d – брати.

17. Нехай на універсальній множині людей $Б(q, Z)$ і $M(p, Z)$ мають те ж саме значення що в задачі 1, а $C(a, x)$ означає: «a – сестра x». Записати через предикати Б, М, С, що «a – тітка b» (охоплюючи всі можливі випадки).

18. Запровадивши відповідні позначення для індивідуальних предикатів і предметних сталих, записати символічною мовою речення:

а) «Петро любить Ніну, але не любить Ольгу, а Ніна любить Андрія, Андрій Ольгу, Ольга – сама себе»;

б) «Борис і Ольга розмовляють під час лекції»;

в) «Дмитро купив лотерейний білет, на який припав виграш - автомобіль»;

19. Записати символікою предикатів твердження:

а) Всі цілі числа – раціональні, проте деякі раціональні числа є цілими;

б) Кожне число, кратне 10, кратне 2 і кратне 5;

в) Діагоналі будь якого прямокутника рівні між собою;

г) Всі числа, кратні 48, кратні 8 і кратні 6, але не всяке число, кратне 8 і кратне 6, є кратним 48;

д) Всі трансцендентні числа – ірраціональні, але не всі ірраціональні числа – трансцендентні;

е) Кожний квадрат є ромбом, але не правильно, що всякий ромб є квадратом

20. Записати символікою предикатів твердження:

а) Деякі алгебраїчні числа – раціональні, а деякі - ірраціональні;

б) Деякі обмежені множини є скінченними;

в) Існує просте число, яке є парним;

г) Деякі вписані в коло 4-кутники є квадратами;

д) Не існує числа, яке кратне 6 і разом з тим не кратне 3;

е) Жодне раціональне число не є трансцендентним і жодне трансцендентне число не є раціональним, разом з тим деякі раціональні числа не є цілими і додатними.

21. Використовуючи символіку логіки предикатів, записати математичні твердження:

а) В множині всіх натуральних чисел існує найменше число;

б) В множині всіх натуральних чисел не існує найбільшого числа.

22. Використовуючи символіку логіки предикатів, записати:

а) твердження про виконуваність дії додавання і дії множення на множині N всіх натуральних чисел;

б) твердження про те, що результат віднімання двох натуральних чисел може не бути натуральним числом.

23. Застосовуючи символіку логіки предикатів, записати означення:

а) об'єднання двох множин A і B;

б) перетину двох множин A і B;

в) різниці множин A і B;

г) симетричної різниці множин A і B;

д) декартового добутку множин A і B.

24. Записати логіко-математичною символікою, використовуючи символи логічних і математичних операцій, факт існування множини всіх підмножин (булеана) для кожної множини.

25. Запровадивши позначення для відповідних індивідуальних предикатів, записати символікою логіки предикатів речення:

а) Друг мого друга – мій друг;

б) Всі студенти, крім студентів 5-го курсу, ідуть у похід;

в) Деякі студенти під час лекції – неуважні;

г) Кожний, хто любить математику, любить мислити, а всі ті, що не люблять математики, люблять не всі чудові речі;

д) Або кожний любить декого і ніхто не любить всіх, або хтось любить всіх і є такі, що не люблять нікого.

26. Нехай *Л (x, y)* означає:" *x* любить *y*" (*x, y* на множині людей). Перевірити, чи має предикат властивості рефлективності, симетричності, транзитивності.

27. Задані індивідуальні предикати: $Б(x,y)$ означає: «x – батько y», $M(x,y)$ означає: «x – мати y», $Бр(x,y)$ означає: «x – брат y» на множині людей. Записати через ці предикати і квантори твердження:

а) Існує така людина, що має рідного дядька;

б) У Петра є рідний дядько;

в) Іван – дядько Петра.

28. Використовуючи символіку логіки предикатів, записати твердження:

а) Існує таке x, що $P(x)$ – хибне;

б) «Існує таке x, що $P(x)$ – хибне».

Проаналізуйте ці твердження. Котре з цих тверджень є сильнішим?

29. Використовуючи символіку логіки предикатів, записати твердження:

а) «Для кожного x $P(x)$» – хибне;

б) $P(x)$ – хибне для кожного x.

Проаналізуйте ці твердження. Котре з цих тверджень є сильнішим?

30. Використовуючи символіку логіки предикатів, вводячи відповідні індивідуальні предикати, записати твердження та оцінити їх значення істиності:

а) Для кожного додатного числа існує менше додатне число;

б) Неправильно, що для кожного невід'ємного числа існує менше невід'ємне число;

в) Для кожного дійсного числа x знайдеться таке дійсне число y, що виконуватиметься нерівність $x+y \le x-y$ і разом з тим рівність $x+y=xy$;

г) Для довільної пари натуральних чисел a, b знайдеться пара натуральних чисел q і r така, що $a=bq+r$;

д) Жоден точний квадрат не є простим числом, проте деякі числа, що не є простими, є точними квадратами.

31. Виразити твердження «a є простим числом» через символи операцій логіки предикатів, індивідуального предиката рівності і арифметичні константи «1» та «$\bullet$» (знак множення).

32. Подати наведені нижче формули у випередженій нормальній формі:

а) $\forall x(P(x)\to\exists yQ(x,y))$;

б) $\neg\left(\forall xP(x)\vee\forall xQ(x)\right)$;

в) $\exists xP(x)\to\exists xQ(x)$;

г) $\forall x(\neg\left(\exists y(P(x)\to Q(y))\right)$;

д) $\exists x(\neg((\exists y(P(x,y))\to(\exists zQ(z)\to R(x))))$;

е) $\forall x\forall y(\exists zP(x,y,z)\wedge(\exists uQ(x,u)\to\exists vQ(y,v)))$;

є) $\exists x(\neg(\forall y(P(x,y,z)\to\exists uQ(x,u)))\wedge\forall t(\neg(\forall v(A(t)\vee B(v))))$.

33. Подати наведені нижче формули у сколемівській нормальній формі:

а) $\forall x(P(x)\to\exists yQ(x,y))$;

б) $\neg\left(\forall xP(x)\vee\forall xQ(x)\right)$;

в) $\exists xP(x)\to\exists xQ(x)$;

г) $\forall x(\neg\left(\exists y(P(x)\to Q(y))\right)$;

д) $\exists x(\neg((\exists y(P(x,y))\to(\exists zQ(z)\to R(x))))$;

е) $\forall x\forall y(\exists zP(x,y,z)\wedge(\exists uQ(x,u)\to\exists vQ(y,v)))$;

є) $\exists x(\neg(\forall y(P(x,y,z)\to\exists uQ(x,u)))\wedge\forall t(\neg(\forall v(A(t)\vee B(v))))$.

34. Довести рівносильність формул логіки предикатів

$$\forall x(P(x)\wedge Q(x)) \text{ і } \forall xP(x)\wedge\forall xQ(x).$$

35. Побудувати інтерпретацію формули логіки предикатів $(\forall x\exists yF(x,y)\wedge\forall x\neg F(x,x)\wedge\forall x\forall y\forall z(F(x,y)\wedge F(y,z)))\to F(x,z)$ над множиною $\{1,2,3\}$, заміщуючи предикатну змінну $F(x,z)$ на $x<y$. Оцінити істинність здобутого при цьому висловлювання.

36. Побудувати аналогічну інтерпретацію над множиною всіх натуральних чисел, визначити істинність здобутого при цьому висловлювання і порівняти з результатом попередньої вправи.

37. Задано дві формули логіки предикатів: $\alpha = \forall x(P(x) \to P(y))$ і $\beta = \forall x(P(x)) \to P(y)$ та множина M={Петро, Іван}. Побудувати таку інтерпритацію формул α і β над M, щоб β мала в цій інтерпритації значення – T, α - F.

38. Довести, що формули предикатів $\alpha = \forall x(P(x) \to P(y))$ і $\beta = \forall x(P(x)) \to P(y)$

а) рівносильні на будь якій одноелементній множині;

б) не рівносильні на множині, яка містить три елементи (побудувавши відповідну інтерпретацію).

39. Довести, що формули логіки предикатів

$$\forall x \exists y(F(x,y) \wedge G(x,y)) \text{ і } \forall x(\exists y(F(x,y) \wedge \exists y G(x,y))$$

а) рівносильні на одноелементній множині;

б) не рівносильні на множині, яка містить два елементи (побудувавши відповідну інтерпретацію).

40. Показати, що формули логіки предикатів $\neg(\exists x P(x))$ і $\exists x \neg P(x)$

а) рівносильні на одноелементній множині;

б) не рівносильні на множині, яка містить два елементи, отже, не є рівносильними просто.

41. Довести, що формули логіки предикатів: $\exists x(P(x) \vee Q(x))$ і $\exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$ – рівносильні.

42. Довести, що формули логіки предикатів не є рівносильні, побудувавши відповідну інтерпретацію (контрприклад):

а) $\exists x(P(x) \wedge Q(x))$ і $\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$

б) $\forall x(P(x) \vee Q(x))$ і $\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$.

43. Довести, що формули логіки предикатів не є просто рівносильні:

а) $\forall x(P(x) \to Q(x))$ і $\forall x P(x) \to \forall x Q(x)$

б) $\exists x(P(x) \to Q(x))$ і $\exists x P(x) \to \exists x Q(x)$

Чи є ці формули рівносильні на 1) одноелементній , 2) двоелементній множині?

44. Довести чи спростувати твердження про рівносильність таких пар формул логіки предикатів:

а) $\exists x(P(x) \leftrightarrow Q(x))$ і $\exists x P(x) \leftrightarrow \exists x Q(x)$

б) $\forall x(P(x) \leftrightarrow Q(x))$ і $\forall x P(x) \leftrightarrow \forall x Q(x)$

в) $\forall x(P(x) \to (Q(x) \to \mathrm{R}(x)))$ і $\forall x(Q(x) \to (P(x) \to R(x)))$

г) $\forall x(P(x) \to (Q(x) \to \mathrm{R}(x)))$ і $\forall x(P(x) \to (R(x) \to Q(x)))$

д) $\forall x(P(x) \to \forall y Q(y))$ і $\forall x \forall y(P(x) \to Q(y))$

е) $\forall y \forall x(P(x) \to Q(y))$ і $\forall y(\forall x P(x) \to Q(y))$

є) $\forall x(P(x) \to Q(y))$ і $\forall x(P(x)) \to Q(y)$

ж) $\exists x(P(x)) \to Q(y)$ і $\exists x(P(x) \to Q(y))$

з) $\forall x(P(x) \to P(y))$ і $\forall x(P(x)) \to P(y)$

к) $Q(y) \to \exists x P(x)$ і $\exists x(Q(y) \to P(x))$

л) $\exists x P(x) \wedge \mathrm{Q}(y)$ і $\exists x(P(x) \wedge \mathrm{Q}(y))$

45. Довести такі рівносильності:

а) $\forall x(P(x)) \wedge Q(y) \equiv \forall x(P(x) \wedge Q(y))$

б) $\forall x(P(x)) \vee Q(y) \equiv \forall x(P(x) \vee Q(y))$

в) $\exists x(P(x)) \vee Q(y) \equiv \exists x(P(x) \vee Q(y))$

г) $\exists x(P(x)) \wedge Q(y) \equiv \exists x(P(x) \wedge Q(y))$

д) $\exists x(P(x)) \to Q(y) \equiv \forall x(P(x) \to Q(y))$

е) $\forall x(P(x)) \to Q(y) \equiv \exists x(P(x) \to Q(y))$

46. Визначити, які з тверджень логічно еквівалентні:

а) Неправильно, що всі числа, кратні 4, є точними квадратами.

б) Всі числа, кратні 4, не є точними квадратами.

в) Не всі числа, кратні 4, є точними квадратами.

г) Існує число, кратне 4, яке не є точним квадратом.

д) Деякі числа, не кратні 4, не є точними квадратами.

47. Чи формули логіки предикатів є логічно загальнозначущі. Якщо ні, то в яку сторону виконується імплікація?

$$\exists x(P(x) \wedge Q(x)) \quad \text{і} \quad \exists xP(x) \wedge \exists xQ(x)$$

48. Чи формули логіки предикатів є логічно загальнозначущі:

а) $\exists x(P(x) \rightarrow P(y))$

б) $\exists x(P(x)) \rightarrow P(y)$

49. Довести, формули логіки предикатів є тотожно істинні:

а) $\forall x(P(x) \wedge Q(x))$ і $\forall xP(x) \wedge \forall xQ(x)$

б) $\exists x(P(x) \vee Q(x))$ і $\exists xP(x) \vee \exists xQ(x)$

50. Визначити, котра з формул логіки предикатів є тотожно істинною:

а) $(\forall xP(x) \vee \forall xQ(x)) \rightarrow (\forall x(P(x) \vee Q(x)))$

б) $(\forall x(P(x) \vee Q(x))) \rightarrow (\forall xP(x) \vee \forall xQ(x))$

51. Визначити, котра з формул логіки предикатів є тотожно істинною:

а) $(\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))) \rightarrow (\forall xP(x) \rightarrow \forall xQ(x))$

б) $(\forall xP(x) \rightarrow \forall xQ(x)) \rightarrow (\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)))$

52. Визначити, котра з формул логіки предикатів є тотожно істинною:

а) $(\exists x(P(x) \rightarrow Q(x))) \rightarrow (\exists xP(x) \rightarrow \exists xQ(x))$

б) $(\exists xP(x) \rightarrow \exists xQ(x)) \rightarrow (\exists x(P(x) \rightarrow Q(x)))$

53. Визначити, котра з формул логіки предикатів є тотожно істинною:

а) $(\forall x(P(x) \leftrightarrow Q(x))) \rightarrow (\forall xP(x) \leftrightarrow \forall xQ(x))$

б) $(\forall xP(x) \leftrightarrow \forall xQ(x)) \rightarrow (\forall x(P(x) \leftrightarrow Q(x)))$

54. Довести чи спростувати твердження про те, що запропонована формула є тотожно істинною:

а) $(\exists xP(x) \wedge \exists x(P(x) \rightarrow Q(x))) \rightarrow \exists xQ(x)$

б) $(\exists xP(x) \wedge \forall x(P(x) \rightarrow Q(x))) \rightarrow \exists xQ(x)$

в) $(\forall xP(x) \wedge \exists x(P(x) \rightarrow Q(x))) \rightarrow \exists xQ(x)$

г) $(\forall x(P(x) \rightarrow (Q(x) \rightarrow R(x)))) \rightarrow (\forall x((P(x) \vee Q(x)) \rightarrow R(x)))$

д) $(\forall x((P(x) \vee Q(x)) \rightarrow R(x))) \rightarrow (\forall x(P(x) \rightarrow (Q(x) \rightarrow R(x))))$

55. Для наступних формул у випадку, коли формула – тотожно істинна, довести її, а в іншому разі – навести контор приклад:

а) $\forall x \exists y F(x, y) \rightarrow \exists y F(y, y)$

б) $\forall x \exists y F(x, y) \rightarrow \exists y F(x, x)$

в) $\forall y(F(x, y)) \rightarrow F(y, y)$

г) $\forall x \exists z F(x, \mathrm{z}) \rightarrow \exists z F(y, \mathrm{z})$

д) $F(x, x) \rightarrow \exists y F(x, y)$

е) $F(x, x) \rightarrow \exists y F(y, y)$

є) $\exists x \forall y \forall z F(x, y, z) \rightarrow \forall z \exists x F(x, x, z)$

56. Довести, що формули логіки предикатів є логічно загальнозначущі:

а) $(\forall xP(x) \rightarrow \exists xQ(x)) \leftrightarrow (\exists x(P(x) \rightarrow Q(x)))$

б) $(\exists xP(x) \rightarrow \forall xQ(x)) \rightarrow \forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$

57. Довести, що в наведених нижче прикладах висновки можна вивести з наведених гіпотез.

а) Гіпотези: «Усі леви – жорстокі істоти», «Деякі леви не п'ють кави». Висновок: «Деякі жорстокі істоти не п'ють кави».

б) Гіпотези: «Усі колібрі мають яскраве пір'я», «Жодний великий птах не їсть меду та не має яскравого пір'я». Висновок: «Колібрі – маленькі птахи».

в) Гіпотези: «Кожний атлет сильний», «Кожний, хто сильний і розумний, досягне успіху», «Петро - атлет», «Петро - розумний». Висновок: «Петро досягне успіху».

58. Перевірити чи є правильним міркування:

Деякі паралелограми – ромби. У всіх ромбів діагоналі взаємно перпендикулярні. Отже, у деяких паралелограмів діагоналі взаємно перпендикулярні.

59. Перевірити чи є правильним міркування:

Всі ромби – паралелограми. Деякі паралелограми – квадрати. Отже, деякі ромби – квадрати.

60. Чи змінна y є вільною для x у формулі логіки предикатів $\alpha(x)$:

а) $\alpha(x) = \exists y F(x, y)$

б) $\alpha(x) = \forall y(F(x, y)) \vee P(x)$

в) $\alpha(x) = P(x) \to \forall \mathrm{y} \mathrm{Q}(\mathrm{y})$

г) $\alpha(x) = Q(y) \to \forall z P(x, y, z)$

61. Чи змінна x є вільною для y у формулах:

а) $(Q(x) \wedge \forall x(F(x, y))) \vee F(z, x)$

б) $Q(\mathrm{z}, \mathrm{y}) \vee \exists x F(x, \mathrm{y}, \mathrm{z})$

62. Перевірити, чи випливають на базі логіки предикатів з даних припущень зроблені з них висновки:

а) Деякі вписані в коло 4-кутники є прямокутниками. Кожний прямокутник є паралелограмом. Отже, деякі вписані в коло 4-кутники є паралелограмами.

б) Кожна збіжна послідовність – обмежена. Кожна обмежена послідовність має точну верхню і точну нижню межі. Отже, кожна збіжна послідовність має точну верхню і точну нижню межі.

в) Кожне число, кратне 153, кратне 17 і кратне 9. Кожне число – кратне 9 тільки тоді, коли сума цифр запису цього числа в десятковій системі кратна 9. Сума цифр запису числа 23878 – не кратна 9. Отже, 23878 – не кратне 153.

г) Деякі парні функції – трансцендентні. Не всі трансцендентні функції – елементарні. Отже, деякі парні функції не є елементарними.

д) Деякі рівнобедрені трикутники – прямокутні. Жодний прямокутний трикутник не є правильним. Отже, деякі рівнобедрені трикутники не є правильними.

е) Кожна зчисленна множина є нескінченною. Кожна незчисленна множина є нескінченною.. Дана множина Е – скінченна. Жодна скінченна множина не є нескінченною. Отже, існує множина, яка не є зчисленною і не є незчисленною.

є) Кожне ціле число, кратне всім цілим числам, крім 0, рівне 0. m і n – цілі числа. $m \neq 0$. n – не кратне m. Отже, $n \neq 0$.

ж) Кожний математик мислить логічно. Той, хто мислить логічно, не робить логічних помилок. Антон робить логічні помилки. Отже , Антон – не є математик.

з) Наталка любить тільки тих, хто добре вчиться і вміє танцювати. Микола добре вчиться, але не вміє танцювати. Петро вміє танцювати, але не вчиться добре. Отже, Наталка не любить ні Петра, ні Миколу.

и) Якщо хтось може виграти шахову партію, то якийсь майстер з шахів зробить це. Петров – майстер по шахам, але не виграв в цій позиції. Отже, в цій позиції ніхто не виграє.

ї) Множина M – відкрита. Кожна множина є скінченна або зчисленна, або незчисленна. Жодна зчисленна множина не є відкритою. Жодна скінченна множина не є відкритою. Отже, M – незчисленна множина.

й) Для кожної нескінченної множини існує її зчисленна підмножина. Множина всіх ірраціональних чисел – нескінченна. Кожна множина має потужність не меншу, ніж будь яка її підмножина. Отже, множина всіх ірраціональних чисел має потужність не меншу, ніж зчисленна.

63. Показати, що в запропонованому міркуванні зроблений висновок не випливає логічно з наведених посилок. Показати, де обірветься дедуктивний ланцюжок.

Кожна нескінченна обмежена множина має хоч одну граничну точку. Деякі обмежені множини – замкнені. Деякі обмежені множини – нескінченні. Отже, деякі замкнені множини мають хоч одну граничну точку.

64. Знайти помилку в «доведенні»:

Нехай a – довільний елемент універсальної множини *U*. Тоді з огляду на довільність *a* маємо:

1) $P(a) \models \forall x P(x)$
2) $\forall x P(x) \models \forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$
3) $P(a) \models \forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$
4) $Q(a) \models \forall x Q(x)$
5) $\forall x Q(x) \models \forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$
6) $Q(a) \models \forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$
7) $P(a) \vee \mathrm{Q}(a) \models \forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$
8) $\forall x (P(x) \vee Q(x)) \models P(a) \vee Q(a)$
9) $\forall x (P(x) \vee Q(x)) \models \forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$

Проаналізуйте кожний крок «доведення».

65. З посилок:

1) $\forall x \forall y \forall z (F(x,z) \wedge F(y,z) \to F(x,y))$
2) $\forall x \exists y F(x,y)$

вивести: $\forall x \forall y \forall z (F(x,y) \wedge F(y,z) \to F(x,z))$.

66. Знайти помилку в «доведенні»:

1) $\forall x \exists y F(x,y)$ гіп.
2) $\exists y F(a,y)$ (У.К. до 1)
3) $F(a,\mathrm{c})$ (Е.К. до 2)
4) $\forall x F(x,c)$ (У.У. до 3)
5) $\exists y \forall x F(x,y)$ (Е.У. до 4).

Отже, доведено $\forall x \exists y F(x,y) \models \exists y \forall x F(x,y)$, що, як відомо, що є хибним.

67. Зазначити номер чи номери (у висхідному порядку) всіх помилкових кроків у міркуваннях, які нібито доводять твердження: «якщо $\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$ істинне, то $\exists x (P(x) \wedge Q(x))$ істинне».

Крок	**Міркування**
1) $\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$	гіпотеза
2) $\exists x P(x)$	вилучення кон’юнкції до 1
3) $P(c)$	екзистенційна конкретизація до 2
4) $\exists x Q(x)$	вилучення кон’юнкції до 1
5) $Q(c)$	екзистенційна конкретизація до 4
6) $P(c) \wedge Q(c)$	уведення кон’юнкції до 3 і 5
7) $\exists x (P(x) \wedge Q(x))$	екзистенційне узагальнення до 6

68 Зазначити номер чи номери (у висхідному порядку) всіх помилкових кроків у міркуваннях, які нібито доводять твердження: «якщо $\forall x (P(x) \vee Q(x))$ істинне, то $\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$ істинне».

Крок	**Міркування**
1) $\forall x (P(x) \vee Q(x))$	гіпотеза
2) $P(c) \vee Q(c)$	отримано з 1
3) $P(c)$	отримано з 2
4) $\forall x P(x)$	отримано з 3
5) $Q(c)$	отримано з 2
6) $\forall x Q(x)$	отримано з 5
7) $\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$	отримано з 4 і 6.

69. Методом семантичних таблиць розв’яжіть приклад 2.38.

70. Методом семантичних таблиць знайдіть спростовуючу інтерпретацію для прикладу 2.39.

71. Побудувати семантичну таблицю для формули

$$\exists x\, (A(x) \wedge B(x)) \to \exists x\, A(x) \wedge \forall x\, B(x).$$

Якщо ця формула не є загальнозначимою (тобто якщо таблиця не закрилася), то знайти спростовуючу інтерпретацію.

72. Знайти сколемівську нормальну форму для кожної з формул:

а) $\neg\forall x\,P(x)\rightarrow\exists y\,\forall z\,Q(y,z)$;

б) $\forall x\,(\neg E(x,0)\rightarrow(\exists y(E(y,g(x))\wedge\forall z(E(z,g(x))\rightarrow E(y,z)))))$;

в) $\neg(\forall x\,P(x)\rightarrow\exists y\,P(y))$.

73. Нехай S_1 та S_2 – сколемівські нормальні форми формул F_1 і F_2 відповідно. Якщо $S_1\equiv S_2$, то чи істинно $F_1\equiv F_2$. Відповідь обґрунтувати.

74. Розглянемо такі твердження.

F_1: Кожний, хто зберігає гроші, отримує проценти.

F_2: Якщо не виплачують жодних процентів, то ніхто не зберігає гроші.

Нехай $S(x,y)$, $M(x)$, $P(x)$, $E(x,y)$ означає, відповідно, «x зберігає y», «x – гроші», «x – проценти», «x отримує y».

а) Записати F_1 і F_2 у вигляді формул логіки першого порядку.

б) Знайти сколемівські нормальні форми для F_1 і $\neg F_2$.