[redacted]

18.12

Екзаменаційна робота з дисципліни „Чисельні Методи"

Екзаменаційна робота №6

1. Умова збіжності методу Ейлера:

Припустимо, що в області G, яка містить прямокутник $\{x_0 \le x \le x_0 + a \; |y - y_0| \le b\}$, функція $f(x,y)$ неперервна і задовольняє умову Ліпшиця по y, тобто

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \le L|y_1 - y_2|,$$ де $L = const$, і крім цього в області G виконується умова:

$$\left|\frac{df}{dx}\right| = \left|\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} f\right| \le N < \infty,$$ де N - певна стала.

Тоді послідовність наближень $y_1, y_2, \dots, y_n$ при $h \to 0$ рівномірно відносно x збігається до розв'язку $y = y(x)$.

2. Критерії єдиності розв'язку задачі інтерполювання:

Для того, щоб для будь-якої функції $f(x)$, визначеної на проміжку $[a,b]$, і для будь-якого набору вузлів $x_0, x_1 \dots x_n$, де $x_i \in [a,b]$, $x_i \ne x_j$ при $i \ne j$, задача інтерполювання мала єдиний розв'язок, необхідно і досить, щоб система функцій $\{\varphi_i(x)\}$ $(i = 0, 1, \dots n)$ була системою Чебишова на $[a,b]$

③ Ознака збіжності ітераційного процесу:

Якщо с-ма рівнянь $x=\varphi(x)$, де $x=(x_1, x_2, \dots, x_n)^T$; $\varphi(x)=(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x))^T$ має розв'язок $x=\alpha$ і в області $R=\{x \mid \rho(x,\alpha)\le r\}$ система функцій $\varphi_i(x)$ $(i=1,2,\dots,n)$ задовольняє умову Ліпшиця зі сталою $K<1$, то послід. $x^{(k+1)}=\varphi(x^{(k)})$ $k=(0,1,\dots)$ збігається до розв'язку $x=\alpha$ системи при будь-якому початковому наближенні $x^{(0)}\in R$. При цьому справедлива оцінка

$$\rho(x^{(m)},\alpha)\le K^m \rho(x^{(0)},\alpha)$$

Ознака існування кореня рівняння:

Якщо на множині $R=\{x \mid \rho(x,y_0)\le r\}$, де y_0 - фіксований вектор, с-ма функцій $\varphi_i(x)$ $(i=1,2,\dots,n)$ задовольняє умову Ліпшиця з сталою $K<1$ і

$\rho(\varphi(y_0), y_0)\le(1-K)r$, то с-ма у R має єдиний розв'язок, котрий можна отримати як границю послідовності $x^{(k+1)} = \varphi(x^{(k)})$ $(k=0,1,2\ldots)$ при будь-якому початковому наближенні $x^{(0)} \in R$

4 Многочлени Чебишова, їх властивості:

Многочлени Чебишова $T_n(x)$ визначаються так:

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \ |x| \le 1$$

При $n=1$ $T_1(x) = \cos(\arccos x) = x$

При $n=2$ $T_2(x) = \cos(2\arccos x) = 2\cos^2(\arccos x) - 1 = 2x^2 - 1$

Властивості:

Рекурентне співвідношення, старший коеф, симетрія, тригонометричний запис, екстремуми.

5 Загальна квадратурна формула Ньютона-Котеса

Розглянемо квадратурні ф-ли інтерполяційного типу у випадку, якщо підінтегральна функція замінюється інтерполяційним многочленом Лагранжа, побудованим за рівновіддаленими вузлами інтерполювання.

Такі ф-ли називаються ф-ами Ньютона-Котеса

$$A_k^{(n)} = \int_a^b \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\ldots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\ldots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\ldots(x_k-x_n)}\,dx$$

7. Задані точки $x_0=0$ $x_1=2$ $x_2=3$ $x_3=4$ і значення функції $f(x)$ в цих точках $f(x_0)=-1$ $f(x_1)=-1$ $f(x_2)=2$ $f(x_3)=7$.

Обчислити: $f(x_0; x_1; x_2; x_3)$.

Розв'язання:

$$f(x_0, x_1, x_2, x_3) = \frac{f(x_0, x_1, x_2) - f(x_1, x_2, x_3)}{4}$$

$$f(x_0, x_1, x_2) = \frac{f(x_1, x_2) - f(x_0, x_1)}{3}$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{f(x_2, x_3) - f(x_1, x_2)}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} f(x_0, x_1) = 0 \\ f(x_1, x_2) = 3 \\ f(x_2, x_3) = 5 \end{array}\right| \Rightarrow \left.\begin{array}{l} f(x_1, x_2, x_3) = 1 \\ f(x_0, x_1, x_2) = 1 \end{array}\right| \Rightarrow f(x_0, x_1, x_2, x_3) = 0$$

(8) $\int_1^5 (x-1)^2\,dx - ?$ $\quad n=4$

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{5-1}{4} = 1$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{n}\left(f\left(a+\frac{h}{2}\right) + f\left(a+\frac{3h}{2}\right) + \dots + \right.$$

$$\left. + f\left(a+\frac{(2n-1)\cdot h}{2}\right)\right) + \frac{(b-a)^3}{24\cdot n^2}\cdot f''(\eta)$$

$\eta \in [a,b]$ - метод прямокутників.

$$\int_1^5 (x-1)^2\,dx = 1\cdot f\left(\frac{3}{2}\right) + 1\cdot f\left(\frac{5}{2}\right) + 1\cdot f\left(\frac{7}{2}\right) +$$

$$1\cdot f\left(\frac{9}{2}\right) = \frac{1}{4} + \frac{9}{4} + \frac{25}{4} + \frac{49}{4} + \frac{4^3}{24\cdot 4^2}\cdot f''(\eta) = \frac{84}{4} +$$

$$+ \frac{4}{24}\cdot f''(\eta) = 21 + \frac{1}{6}\cdot f''(2) = 21 + \frac{1}{6}\cdot 2 = 21 + \frac{1}{3}$$

Відповідь: $\int_{1}^{5}(x-1)^2dx=21\frac{1}{3}$.