[redacted]

18.12.21

Екзаменаційна робота

з дисципліни "Чисельні методи"

Екзаменаційний білет №17

1) Ознака за якою система функцій є системою ~~[illegible]~~ Чебишева.

За одним означенням системи Чебишева важко перевірити, чи задана система функцій є системою Чебишева.

Теорема

Якщо для системи функцій $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ виконуються умови:

1) $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ є лінійно незалежною системою функцій на $[a, b]$;

2) $\varphi_i(x) \in C^{n+1}[a, b]$, $i = 0, 1, \ldots, n$;

3) $W_k[\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_k] \neq 0$ на $[a, b]$ для всіх k $(k = 0, 1, \ldots, n)$, де

$$W_k[\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_k] = \begin{vmatrix} \varphi_0(x) & \varphi_1(x) & \ldots & \varphi_k(x) \\ \varphi_0'(x) & \varphi_1'(x) & \ldots & \varphi_k'(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_0^{(k)}(x) & \varphi_1^{(k)}(x) & \ldots & \varphi_k^{(k)}(x) \end{vmatrix},$$

то система функцій $\{\varphi_i(x)\}$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ є системою Чебишева на $[a, b]$.

② Загальна квадратурна ф-ла Ньютона-Котеса.

Розглянемо квадратурні ф-ли інтерполяційного типу у випадку, якщо підінтегральна функція замінюється інтерполяційним многочленом Лагранжа, побудованим за рівновіддаленими вузлами інтерполювання. Такі формули наз. формулами Ньютона-Котеса.

$$A_k^{(n)} = \int_a^b \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{k+1})\dots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\dots(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_n)}\,dx$$

Зробимо в інтегралі $\int_a^b f(x)dx$ заміну $x = a+(b-a)t$. Отримаємо

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)\int_0^1 f(a+(b-a)t)\,dt = (b-a)\int_0^1 \varphi(t)dt,$$

де $\varphi(t) = f(a+(b-a)t)$. Якщо кожній точці x_k $(k=0,1,\dots,n)$ відповідатиме точка t_k за формулою $x_k = a+(b-a)t_k$, то послідовності точок $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ відповідатиме послідовність точок $0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, 1$. Тоді коефіцієнти цієї квадратурної ф-ли можна обчислити за ф-лою

$$C_k^{(n)} = \int_0^1 \frac{t(t-\frac{1}{n})(t-\frac{2}{n})\dots(t-\frac{k-1}{n})(t-\frac{k+1}{n})\dots(t-1)}{\frac{k}{n}(\frac{k}{n}-\frac{1}{n})(\frac{k}{n}-\frac{2}{n})\dots(\frac{k}{n}-\frac{k-1}{n})(\frac{k}{n}-\frac{k+1}{n})\dots(\frac{k}{n}-1)}\,dt \qquad (1.1)$$

отже:

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)\sum_{k=0}^{n} C_k^{(n)} f(x_k) \qquad (1.2)$$

Квадратурна ф-ла (1.2), коефіцієнти до якої обчислюються за ф-лою (1.1), наз. квадратурною ф-лою Ньютона-Котеса.

③ Ознака збіжності методу простої ітерації розв'язування систем нелінійних рівнянь.

Теорема 1 (Ознака збіжності методу простої ітерації). Якщо система р-нянь має розв'язок $x = a$ і в області

$$R = \{x \mid \rho(x, a) \leq r\}$$

система функцій $f_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ задовольняє умову Ліпшиця зі сталою $K < 1$, то послідовність $x^{(k+1)} = f(x^{(k)})$ $(k = 0, 1, \ldots)$ збігається до розв'язку $x = a$ системи при будь-якому початковому наближенні $x^{(0)} \in R$. При цьому справедлива оцінка

$$\rho(x^{(m)}, a) \leq K^m \rho(x^{(0)}, a).$$

④ Теорема 2 (Ознака існування розв'язку системи рівнянь). Якщо на множині R

$$R = \{ x \mid \rho(x, y_0) \le r \}$$

де y_0 – фіксований вектор, система функцій $\varphi_i(x)$ $(i = 1, 2, 3, ..., n)$ задовольняє умову Ліпшиця з сталою $k < 1$ і

$$\rho(\varphi(y_0), y_0) \le (1-k)r,$$

то система у R має єдиний розв'язок, котрий можна отримати як границю послідовності $x^{(k+1)} = \varphi(x^{(k)})$ $(k = 0, 1, 2, ...)$ при будь-якому початковому наближенні $x^{(0)} \in R$.

⑤ Многочлени Чебишева. Найкращий вибір вузлів інтерполювання

Многочлени Чебишева $T_n(x)$ визнач. так:

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad |x| \le 1.$$

При $n = 1$

$$T_1(x) = \cos(\arccos x) = x$$

при $n=2$

$$T_2(x)=\cos(2\arccos x)=2\cos^2(\arccos x)-1=2x^2-1$$

далі тотожності

$$\cos(n+1)\theta+\cos(n-1)\theta=2\cos n\theta\cos\theta$$

$$\cos(n+1)\theta=2\cos n\theta\cos\theta-\cos(n-1)\theta,$$

при $\theta=\arccos x$ одержимо

$$T_{n+1}(x)=2xT_n(x)-T_{n-1}(x)$$

Отже $T_n(x)$ справді є многочленами степеня n, причому коефф. при x^n дорівнює 2^{n-1}.

(4) Задача Коші для звичайних диференціальних рівнянь першого порядку. Умови, при яких задача має єдиний розв'язок.

Нехай дано диф. р-ня першого порядку $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$

Потрібно знайти функцію на відрізку від $x=a$ до $x=b$, що задовольняє, як рівняння, так і поч. умову $y(a)=y_0$ (при цьому завжди припускається, що існує єдиний розв'язок на цьому відрізку).

Основою чисельних методів розв'язання диф. р-нянь є розкладання ф-ції y в ряд Тейлора в околі поч. точки

$$y(x_0+h) = y(x_0) + hy'(x_0) + \frac{1}{2}h^2 y''(x_0) + \dots \frac{1}{k!}h^k y^{(k)}(x_0) \dots$$

⑥

$x_0 = 0$	$f(x_0) = -3$	
$x_1 = 1$	$f(x_1) = -5$	$\Delta^3 f(x_0)$ - ?
$x_2 = 2$	$f(x_2) = -3$	
$x_3 = 3$	$f(x_3) = 3$	

$$f(x_0, x_1, x_2, x_3) = f(x_1, x_2, x_3) - f(x_0, x_1, x_2)$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = f(x_2, x_3) - f(x_1, x_2)$$

$$f(x_0, x_1, x_2) = f(x_1, x_2) - f(x_0, x_1)$$

$f(x_0, x_1) = -2$	$f(x_0, x_1, x_2) = 4$	$\Rightarrow$
$f(x_1, x_2) = 2$	$f(x_1, x_2, x_3) = 4$	
$f(x, x_3) = 6$		

$\Rightarrow f(x_1, x_2, x_3) = 0$

$$f(x_0, x_1, x_2, x_3) = \frac{\Delta^3 f(x_0)}{3!} \Rightarrow \Delta^3 f(x_0) = 0$$

[redacted]

11:15