

Кравець Ольга

Група - ПМО - 21

Дата 23.12.2021

Екзаменаційна робота з дисципліни
„Чисельні методи“

Екзаменаційний білет №6.

① Поняття порядку ітераційного процесу
Ітераційний процес $x_k = \varphi(x_{k-1})$ має порядок m ,
якщо $\varphi'(x) = \varphi''(x) = \dots = \varphi^{(m-1)}(x) = 0$, $\varphi^{(m)}(x) \neq 0$,
де $x = \alpha$ - корінь рівняння $x = \varphi(x)$

② Постановка задачі інтерполявання

На відріzkі $[a, b]$ у точках x_0, x_1, \dots, x_n , де
 $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$, задані значення деякої
функції $f(x)$: $f(x_0) = y_0, f(x_1) = y_1, \dots, f(x_n) = y_n$

Потреба побудувати функцію $F(x)$, яка нале-
жить до визначеного класу і в точках x_0, x_1, \dots, x_n
має такі ж значення, що й $f(x)$:
 $F(x_0) = y_0, F(x_1) = y_1, \dots, F(x_n) = y_n$

③ Ознака, за якою система функцій є
системою Чебишева

Якщо для системи функцій $\varphi_0(x),$
 $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ виконуються умови:

1) $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x) \in$ лінійно незалежною

системою функцій на $[a, b]$

2) $\varphi_i(x) \in C^{n_i}[a, b]$, $i=0, 1, \dots, n$

3) $\omega_k[\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_k] \neq 0$ на $[a, b]$ для всіх $k(k=0, 1, n)$,

$$\omega_k[\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_k] = \begin{vmatrix} \varphi_0(x) & \varphi_1(x) & \dots & \varphi_k(x) \\ \varphi_0'(x) & \varphi_1'(x) & \dots & \varphi_k'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_0^{(k)}(x) & \varphi_1^{(k)}(x) & \dots & \varphi_k^{(k)}(x) \end{vmatrix}, \text{ то система}$$

функцій $\{\varphi_i(x)\}$ є системою Чебишева на $[a, b]$.

④ Ознака збіжності методу Ейлера

Припустимо, що в області G , яка містить прямокутник $\{x_0 \leq x \leq x_0 + a, y - y_0 \leq b\}$, функція $f(x, y)$ неперервна і задовольняє умову Ліпшиця:

$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L |y_1 - y_2|$, $L = \text{const}$ і в області G виконується умова $\left| \frac{df}{dx} \right| = \left| \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} f \right| \leq N < \infty$,

N -стала. Тоді послідовність наближень y_1, y_2, \dots, y_n при $h \rightarrow 0$ рівномірно відносно x збігається до розв'язку $y = y(x)$.

⑤ Теревани та недовіки методів Ейлера, Рунге-Кутта та Адамса

Метод Ейлера - один з простіших методів, в ньому ^{і перевага} для обчислення y_{n+1} достатньо знати лише y_n (однокроковий метод)

Метод Адамса: для обчислення y_{n+1} треба знати не лише y_n , а й y_{n-i} ($i=1, 2, \dots, m$ - фіксоване число). (багатокроковий метод).

Теревага методу Рунге-Кутта: алгоритми, які одержують на їхній основі змінюються з переходами від однієї точки до іншої. Також, у цьому методі можна змінювати крок інтегрування відповідно до потреби точності (ϵ) обчислення, при цьому

алгоритм не надто ускладнюється. Головною є те, що для обчислення наближеного значення розв'язку в окремій точці, щоб обчислювати значення функції $f(x, y)$ у декількох точках. У методі Адамса перевагою є те, що треба лише одне обчислення значення $f(x, y)$ при пошуку наближеного значення розв'язку в окремій точці. Головною є те, що не можна просто змінити крок інтегрування в процесі розв'язування та щоб почати обчислення треба попередньо обчисл. наближ. значення у декількох початкових точках.

⑥ $0,5x^2 - 3,5x + 6 = 0$

$$[2,5; 3,5]; \quad x_0 = 2,6; \quad x_1 = ?$$

$$x = \varphi(x)$$

$$\varphi(x) = 0,5x^2 - 3,5x + 6 \Rightarrow \varphi'(x) = \frac{1}{2} \cdot 2x - \frac{7}{2} + 0$$

$$\varphi'(x) = x - \frac{7}{2}$$

$$\varphi'(2,6) = 2,6 - \frac{7}{2} = -0,9$$

$$f(2,5) = 0,5 \cdot (2,5)^2 - 3,5 \cdot 2,5 + 6 = 0,375$$

$$f(3,5) = 0,5 \cdot (3,5)^2 - 3,5 \cdot 3,5 + 6 = -0,125$$

$$x_1 = \varphi(x_0)$$

$$x_1 = 0,5 \cdot (2,5)^2 - 3,5 \cdot 2,5 + 6 = 0,375$$

Відповідь: $x_1 = 0,375$

$$\begin{array}{ll} \textcircled{7} & x_0 = -2 & f(x_0) = -16 \\ & x_1 = 0 & f(x_1) = 2 \\ & x_2 = 1 & f(x_2) = 2 \\ & x_3 = 2 & f(x_3) = 4 \end{array}$$

$$x = -1$$

$$\begin{aligned} P_n(x) &= f(x_0) + (x-x_0)f(x_0, x_1) + (x-x_0)(x-x_1)f(x_0, x_1, x_2) + (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) \\ &\quad \times f(x_0, x_1, x_2, x_3) = -16 + (x+2) \cdot 9 + (x+2)(x-0) \cdot (-3) + \\ &\quad + (x+2)(x-0)(x-1) \cdot 1 = -16 + \underline{9x} + 18 - \underline{3x^2} - \underline{6x} + \underline{x^3} + \underline{x^2} - \underline{2x} = \\ &= x^3 - 2x^2 + x + 2 \end{aligned}$$

$$f(x_0, x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{2 + 16}{0 + 2} = \frac{18}{2} = 9$$

$$f(x_0, x_1, x_2) = \frac{f(x_1, x_2) - f(x_0, x_1)}{x_2 - x_0} = \frac{0 - 9}{1 + 2} = -\frac{9}{3} = -3$$

$$f(x_1, x_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{2 - 2}{1 - 0} = 0$$

$$f(x_0, x_1, x_2, x_3) = \frac{f(x_1, x_2, x_3) - f(x_0, x_1, x_2)}{x_3 - x_0} = \frac{1 + 3}{2 + 2} = 1$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{f(x_2, x_3) - f(x_1, x_2)}{x_3 - x_1} = \frac{2 - 0}{2 - 0} = 1$$

$$f(x_2, x_3) = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} = \frac{4 - 2}{2 - 1} = 2$$

$$P_n(-1) = (-1)^3 - 2 \cdot (-1)^2 + (-1) + 2 = -2$$

Bignobigb: $P_n(-1) = -2$

$$8) \int_1^3 (2x-1)^2 dx$$

метод Симпсона

$$n=4$$

$$a=1$$

$$b=3$$

$$x_0=1, x_1=1.5, x_2=2, x_3=2.5, x_4=3$$

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{3-1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0.5$$

$$f(x) = (2x-1)^2$$

$$f(x_0) = f(1) = 1$$

$$4f(x_1) = 4 \cdot f(1.5) = 4 \cdot 4 = 16$$

$$2f(x_2) = 2 \cdot f(2) = 2 \cdot (2 \cdot 2 - 1)^2 = 2 \cdot 9 = 18$$

$$4f(x_3) = 4 \cdot f(2.5) = 4 \cdot 16 = 64$$

$$f(x_4) = f(3) = (2 \cdot 3 - 1)^2 = 25$$

$$\frac{h}{3} = \frac{0.5}{3} = \frac{1}{6}$$

$$\int_1^3 (2x-1)^2 dx = \frac{1}{6} (1 + 16 + 18 + 64 + 25) = \frac{124}{6} = \frac{62}{3}$$

Результат: $\frac{62}{3}$

$$9) [0, 2]$$

метод Эйлера

$$y' = \frac{1}{2}(x-y)$$

\leadsto

$$y' = f(x, y) = \frac{1}{2}(x-y)$$

$$y(0) = 1$$

\leadsto

$$y_0 = 1, x_0 = 0$$

$$h = 0.1$$

$$x_1 = 0.1;$$

$$y_1 = ?$$

$$f(x_0, y_0) = f(0, 1) = \frac{1}{2}(0 - 1) = -\frac{1}{2}$$

$$hf(x_0, y_0) = 0.1 \cdot (-0.5) = -0.05$$

$$x_1 = 0.1 \leadsto y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) = 1 + (-0.05) = 0.95$$

Результат: $y_1 = 0.95$

lac zgari: 10:45

$$E = \mu(1-x) = \mu(1-x) = \mu(1-x) = \mu(1-x)$$

$$\begin{aligned} \mu &= 1 \\ x &= 0 \\ E &= 1 \end{aligned}$$

$$E = \mu(1-x) = \mu(1-x) = \mu(1-x) = \mu(1-x)$$

$$(1-x)^2 = (1-x)^2$$

$$1 = (1-x)^2 = (1-x)^2$$

$$\partial_1 = \partial \cdot \mu = (1-x)^2 \cdot \mu = (1-x)^2 \cdot 1$$

$$\partial_2 = \partial \cdot x = (1-x)^2 \cdot x = (1-x)^2 \cdot x$$

$$\partial_3 = \partial \cdot \mu = (1-x)^2 \cdot \mu = (1-x)^2 \cdot 1$$

$$\partial_4 = \partial \cdot x = (1-x)^2 \cdot x = (1-x)^2 \cdot x$$

$$\frac{1}{E} = \frac{\partial_1}{E} = \frac{1}{E}$$

$$\frac{1}{E} = \frac{\partial_1}{E} = (1-x)^2 = (1-x)^2$$

$$\frac{1}{E} = (1-x)^2$$

lac zgari

lac zgari

$$(1-x)^2 = (1-x)^2$$

$$(1-x)^2 = (1-x)^2$$

$$0 = x, 1 = \mu$$

$$1 = 0, \mu = 1$$

$$1 = \mu$$

$$1 = \mu$$

$$1 = (1-0)^2 = (1-0)^2 = (1-0)^2$$

$$0 = (1-0)^2 = (1-0)^2 = (1-0)^2$$

$$0 = (1-0)^2 = (1-0)^2 = (1-0)^2$$