[redacted]

1. Нехай $f(x) \in \mathbb{R}$ і $x_0, x_1, \dots, x_n$ ($x_i \in [a;b]$, $x_i \neq x_j$ при $i \neq j$) — вузли інтерполювання.
Побудуємо інтерполяційний многочлен $\varphi(x)$, де за систему лінійно незалежних функцій $\{\varphi_i(x)\}$ виберемо систему:

$$\varphi_0(x) = 1,\ \varphi_1(x) = x,\ \varphi_2(x) = x^2, \dots,\ \varphi_n(x) = x^n$$

Запишу $\varphi(x)$ у вигляді:

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\,\Phi_{ni}(x).$$

де $\Phi_{ni}(x)$ — у цьому випадку многочлени степеня $n$, які задовільняють умову:

$$\Phi_{ni}(x_j) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } i = j \\ 0, & \text{якщо } i \neq j \end{cases}$$

2. Для зразка візьму формулу:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n} A_k^{(n)} f(x_k) + R_n(f)$$

Вважаємо що ця квадратурна формула має алгебраїчну міру точності $m$, якщо $R_n(f) = 0$ на множині $H_m$ всіх алгебр. многочленів степене не вище $m$. Тоді якщо $m$ - алгебр. міра точності то при $f(x) = P_m(x)$, де $P_m(x)$ - будь який алгебр. многочлен степене не вище $m$.

У такому випадку можна сказати, що квадратурна формула точна для всіх многочленів степеня до $m$. включно.

3. Ознаки збіжності Ньютона:

Якщо:

1) функції $f_i(x)$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ неперервні в опуклій області $G$ і в цій області мають неперервні частинні похідні першого порядку.

2) в області $G$ міститься розв'язок $x = \alpha$ для системи $f(x) = 0$

3) Якщо при $x = \alpha$ матриця $f_x(x)$ є невиродженою, то існує такий окіл $R = \{x \mid \| x - \alpha \| \leq \delta\}$, що при будь-якому $x^{(0)} \in R$ послідовність $\{x^{(n)}\}$ у методі Ньютона

збігається із розв'язком $x = \alpha$ системи $f(x) = 0$.

5. Припустимо, що в області $G$, яка містить прямокутник $\{x_0 \le x \le x_0 + a, \ |y - y_0| \le b\}$, функція $f(x, y)$ неперервна і задовільняє умову Ліпшиця по $y$, тобто:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \le L |y_1 - y_2|.$$

де $L$ - const, крім цього в області $G$ виконується умова:

$$\left|\frac{df}{dx}\right| = \left|\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} f\right| \le N < \infty$$

$N$ - стала

Тоді послідовність наближень $y^1, y^2, \dots y^n$, при $n \to \infty$ рівномірно відносно $x$ збігається до розв'язку $y = y(x)$.

6. $\begin{cases} x^2 - xy - 8 = 0 \\ y^2 - xy + 4 = 0 \end{cases}$ $x_0 = 3$ $y_0 = 1$ $x_1, y_1 = ?$

$x_1 + y_1 = ?$

$\frac{\partial f_1}{\partial x} = 2x - \cancel{x}y$

$\frac{\partial f_2}{\partial x} = -y$

$F'(x) = \begin{pmatrix} 2x-y & -x \\ -y & 2y-x \end{pmatrix}$

$\frac{\partial f_1}{\partial y} = -x$

$\frac{\partial f_2}{\partial y} = 2y - x$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix}^{-1} \cdot f\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot f \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$= \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

$x_1 = 4$

$y_1 = 2$

В: 6.

7.

$x_0 = 0 \qquad f(x_0) = -3$

$x_1 = 2 \qquad f(x_1) = -3$

$x_2 = 3 \qquad f(x_2) = 3$

$x_3 = 4 \qquad f(x_3) = 13$

$$f(x_0; x_1; x_2; x_3) = \frac{f(x_1, x_2, x_3) - f(x_0, x_1, x_2)}{x_3 - x_0} =$$

$$= \frac{f(x_1 x_2 x_3) - f(x_0, x_1, x_2)}{3}$$

$$f(x_1; x_2; x_3) = \frac{f(x_2; x_3) - f(x_1, x_2)}{x_3 - x_1} = \frac{f(x_2; x_3) - f(x_1; x_2)}{2} =$$

$$= \frac{10 - 6}{2} = 2$$

$$f(x_0, x_1, x_2) = \frac{f(x_1; x_2) - f(x_0; x_1)}{x_2 - x_0} = \frac{f(x_1; x_2) - f(x_0, x_1)}{3} =$$

$$= \frac{6 - 0}{3} = 2$$

$$f(x_1 x_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{3 - (-3)}{1} = 6$$

$$f(x_2; x_3) = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} = \frac{13 - 3}{1} = 10$$

$$f(x_0; x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \quad \frac{-3 + 3}{2} = 0$$

$$\left.\begin{aligned} f(x_0; x_1) &= 0 \\ f(x_1; x_2) &= 6 \\ f(x_2; x_3) &= 10 \end{aligned}\right| \Rightarrow \begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= 2 \\ f(x_0, x_1, x_2) &= 2 \end{aligned} \Rightarrow f(x_0, x_1, x_2, x_3) =$$

$$= \frac{2 - 2}{3} = 0$$

8. $y' = \frac{1}{2}xy \qquad y_3 = ?$

$x_0 = 0$

$y_0 = 1$

$h = 0,2$

$f(x_0, y_0) = f(0, 1) = \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot 1 = 0$

$hf(x_0, y_0) = 0,2 \cdot 0 = 0$

$x_1 = 0,2$

$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) = 1 + 0 = 1$

$x_2 = 0,4; \quad f(x_1\ y_1) = f(0,2; 1) = 0,1;$

$hf(x_1\ y_1) = 0,2 \cdot 0,1 = 0,002$

$y_2 = hf(x_1\ y_1) = 1 + 0,02 = 1,02$

$x_3 = 0,6$

$f(x_2, y_2) = f(0,4; 1,02) = \frac{1}{2} \cdot 0,4 \cdot 1,02 = 0,204$

$hf(x_2\ y_2) = 0,2 \cdot 0,204 = 0,0408$

$y_3 = y_2 + hf(x_2\ y_2) = 1,02 + 0,0408 = 1,0608.$

9. $\int_1^4 (x^2 - 2x)\,dx$

$n = 3$

$h = 1$

$h = \frac{b-a}{n} \Rightarrow b - a = 3$

$a = 1$

$b = 4$

$x_0 = 1$

$x_1 = 2$

$x_2 = 3$

$x_3 = 4$

$f\left(\frac{x_0 + x_1}{2}\right) = f\left(\frac{1+2}{2}\right) = f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{4} = -0{,}75$

$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = f\left(\frac{2+3}{2}\right) = f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{5}{4} = 1{,}25$

$f\left(\frac{x_2 + x_3}{2}\right) = f\left(\frac{3+4}{2}\right) = f\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{21}{4} = 5{,}25$

E

$\int_1^4 (x^2 - 2x)\,dx = 1 \cdot (-0{,}75 + 1{,}25 + 5{,}25) = 5{,}75$

Час: 10:37 [redacted]