Факультет прикладної математики та інформатики
Дисципліна «Чисельні методи»

Екзаменаційний білет № 14

По 6б:

1. Ознака збіжності методу ітерації.
2. Ознака збіжності інтерполяційного процесу.
3. Яким умовам повинні задовольняти перша і друга похідна від функції f (x) в околі кореня рівняння f (x)=0 в методах хорд і дотичних.
4. Формула модифікованого методу Ньютона розв'язування систем нелінійних рівнянь.
5. Ознака за якою квадратурна формула інтерполяційного типу має найвищу алгебраїчну міру точності 2n + 1.

По 5б:

6. Рівняння $x^2-4x+3=0$ на проміжку [0,2] має корінь. Вибравши за x_0 один з кінців проміжка, обчислити перше наближення кореня x_1 за методом дотичних.
7. Задані точки $x_0=0$, $x_1=2$, $x_2=3$, $x_3=4$ і значення функції $f(x)$ в цих точках $f(x_0)=-1$, $f(x_1)=-1$, $f(x_2)=2$, $f(x_3)=7$. Обчислити $f(x_0;x_1;x_2;x_3)$.
8. Обчислити $\int_1^5 (x-1)^2 dx$ за допомогою методу прямокутників, розбивши проміжок інтегрування на $n=4$ однакових частин.
9. На проміжку [0,3] задана задача Коші $y'=\frac{1}{2}(x-y)$, $y(0)=1$. Вибравши $h=1$, за допомогою методу Рунге-Кутта другого порядку обчислити наближене значення y_1 розв'язку в точці $x_1=1$.

Викладач

[redacted] 18.12.2021

Екзаменаційна робота з дисципліни

"Чисельні методи"

Екзаменаційний білет № 14

18.12.2021

Кулик Данило

Група ПМі-24 18.12.2021

Екзаменаційний білет № 114

№1. Ознака збіжності методу ітерацій

Припустимо, що рівняння $x = \varphi(x)$ має корінь $x = \alpha$ і в околі цього кореня $R = \{x \mid |x - \alpha| \leq r\}$ функція $\varphi(x)$ задовольняє умову Ліпшиця зі сталою L, тобто:

$$|\varphi(x') - \varphi(x'')| \leq L\,|x' - x''|,$$ для будь-яких точок $x', x'' \in R$

Якщо функція $\varphi(x)$ в околі R задовольняє умову Ліпшиця зі сталою $L < 1$, то послідовність

$$x_k = \varphi(x_{k-1}) \quad (k = 1, 2, \dots)$$

збігається до кореня $x = \alpha$ при будь-якому $x_0 \in R$. Причому швидкість збіжності характеризується нерівністю

$$|x_n - \alpha| \leq L^n |x_0 - \alpha|$$

№2. Ознака збіжності інтерполяційного процесу

Нехай $f(x) \in R$. Розглянемо на проміжку $[a, b]$ систему вузлів:

$$X^{(0)} = \{x_0^{(0)}\},$$

$$X^{(1)} = \{x_0^{(1)}, x_1^{(1)}\},$$

$$X^{(2)} = \{x_0^{(2)}, x_1^{(2)}, x_2^{(2)}\},$$

$$\dots\dots\dots$$

$$X^{(n)} = \{x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \dots, x_n^{(n)}\}$$

Кожній послідовності вузлів $X^{(n)}$

відповідає інтерполяційний многочлен Лагранжа $L_n(x)$ $(n=0,1,\dots)$, побудований для функції $f(x)$ за вузлами інтерполювання $x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \dots, x_n^{(n)}$. Побудована таким чином послідовність інтерполяційних многочленів $\{L_n(x)\}$ називається інтерполяційним процесом.

Інтерполяційний процес є збіжним, якщо

$$\lim_{n\to\infty} L_n(x) = f(x), \quad x\in[a,b]$$

Цей процес рівномірно збігається на $[a,b]$, якщо послідовність $\{L_n(x)\}$ рівномірно збігається до $f(x)$ на $[a,b]$.

Якщо функція $f(x)$ нескінченно диференційована і всі її похідні обмежені в сукупності на проміжку $[a,b]$, тобто $\exists\, M>0$, що для всіх $x\in[a,b]$. $(n=0,1,\dots)$

виконується нерівність: $|f^{(n)}(x)| \leq M$

то інтерполяційний процес для ф-ї $f(x)$

збігається рівномірно до $f(x)$ на $[a,b]$.

N3 Умови для $f'(x)$ і $f''(x)$ (хорд і дотичних

Достатня умова збіжності:

Існує окіл точки $x=\alpha$, в якому

виконується нерівність:

$$|f'(x)| \leq L < 1$$

Існує окіл точки $x=\alpha$, $x=x_0$ - початкове

наближення, взяте із цього околу.

$$f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$$

№4. Формула модифікованого методу Ньютона

Векторне рівняння: $f(x)=0$ зобразимо

як: $x = \Psi(x)$

$$\Psi(x) = x - f_x^{-1}(x^{(0)})f(x),$$

$x^{(0)}$ – початкове наближення розв'язку. Тоді формула модиф. методу Ньютона:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - f_x^{-1}(x^{(0)})f(x^{(k)}) \quad (k=0,1,\dots)$$

№5 Ознака ... міра точності $2n+1$

Для того щоб квадратурна формула

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n} C_k f(x_k) + R_n(f)$$

інтерполяційного типу мала алгебраїчну міру точності $2n+1$, необхідно і досить щоб її абсциси $x_0, x_1, \dots, x_n$

були коренями многочлена:

$$\omega_{n+1}(x) = (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n),$$

ортогонального на $[a,b]$ до будь-якого многочлена $q_n(x)$ степеня не вище n,

тобто:

$$\int_a^b \omega_{n+1}(x)\, q_n(x)\, dx = 0$$

N 7

$x_0 = 0,\ x_1 = 2,\ x_2 = 3,\ x_3 = 4$

$f(x_0) = -1,\ f(x_1) = -1,\ f(x_2) = 2,\ f(x_3) = 7$

$f(x_0; x_1; x_2; x_3)$ — ?

$$f(x_0, x_1, x_2, x_3) = \frac{f(x_1, x_2, x_3) - f(x_0, x_1, x_2)}{4}$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{f(x_2, x_3) - f(x_1, x_2)}{2}$$

$$f(x_0, x_1, x_2) = \frac{f(x_1, x_2) - f(x_0, x_1)}{3}$$

$$f(x_1, x_2) = \frac{f(x_2) - f x_1)}{1} = \frac{2+1}{1} = 3$$

$$f(x_2, x_3) = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{1} = 5$$

f(x

f(

f(

f

-

Від

$$f(x_{0,1}) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{2} = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} f(x_0, x_1) = 0 \\ f(x_1, x_2) = 3 \\ f(x_2, x_3) = 5 \end{array}\right| \Rightarrow \left.\begin{array}{l} f(x_1, x_2, x_3) = 1 \\ f(x_0, x_1, x_2) = 1 \end{array}\right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x_0, x_1, x_2, x_3) = \frac{1-1}{4} = 0$$

Відповідь: $f(x_0, x_1, x_2, x_3) = 0$

N 8

$$\int_1^5 (x-1)^2 dx - ? \quad ; n = 4$$

$$h = \frac{5-1}{4} = 1 \Rightarrow \begin{array}{l} x_{1c} = 1,5 \\ x_{2c} = 2,5 \\ x_{3c} = 3,5 \\ x_{4c} = 4,5 \end{array}$$

$$\Rightarrow \int_1^5 (x-1)^2 dx = h \cdot \left(f(x_1c) + f(x_2c) + f(x_{3c}) + f(x_{4c}) \right)$$

$$+ \tilde{R}_0(f)$$

$$\int_1^5 (x-1)^2\,dx = 1\cdot(0{,}25 + 2{,}25 + 6{,}25 + 12.25) + \tilde{R}$$

$$+ \frac{\cancel{16}}{24\cdot\cancel{16}}\cdot 2 = 21\frac{1}{24}$$

Відповідь: $21\frac{1}{24}$

Підпис: [redacted]

Час здачі: 11:11