[redacted]

Дата 18.12.2021

Екзаменаційна робота з дисципліни „Чисельні методи"

Екзаменаційний білет № 13

1. Поняття системи функцій Чебишева

Система лінійно незалежних на $[a, b]$ функцій $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots \varphi_n(x)$ - система Чебишева на цьому проміжку, якщо кожен узагальнений многочлен $\varphi(x)$, побуд. на основі цієї системи, хоч би один коефіцієнт котрого відмінний від 0, має на $[a, b]$ не більше n нулів.

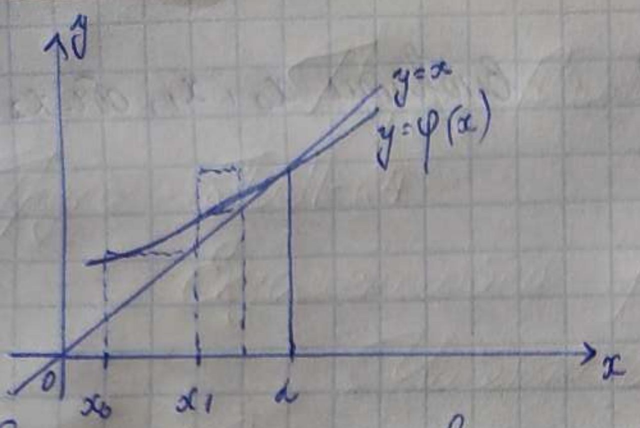
2. Припустимо, що в обл. G, яка містить прямокутник $\{x_0 \le x \le x_0 + a, |y - y_0| \le b\}$, ф-ція $f(x,y)$ неперерв. і задовольняє ум. Ліпшиця по y: $|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \le L|y_1 - y_2|$, $L = const$ і виконується умова в обл. G $\left|\frac{df}{dx}\right| = \left|\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} f\right| \le N < \infty$, N-стала. Тоді $|\varepsilon_n| \le \frac{Nh}{2L}(e^{La} - 1)$ - випливає, що метод Ейлера збіжний.

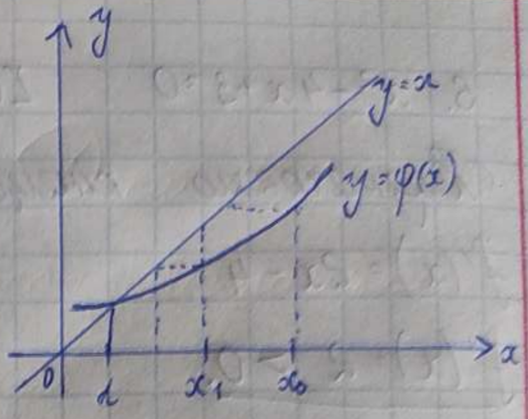
3. На основі $f(x)$ будують ф-цію $\varphi(x)$ таку, що шуканий корінь $x = \alpha$ р-ня $f(x) = 0$ є і коренем р-ня $x = \varphi(x)$. Потім будують послід точок $\{x_n\}$ за допомогою співвіднош. $x_n = \varphi(x_{n-1})$ $(n = 1, 2, ...)$, виходячи з x_0, ф-ція φ не залежить від k — стаціонарний метод.

Відомий окіл, у якому існує єдиний корінь $x = \alpha$ р-ня $f(x) = 0$. У цьому околі обирають т. x_0 — початкове наближення кореня, близьку до $x = \alpha$ і за допомогою $x_k = \varphi_k(x_0, x_1, ... x_{k-1})$ шукають послід точок $x_1, x_2, ... x_n, ...$ що збігаються до $x = \alpha$. — нестаціонарний метод.

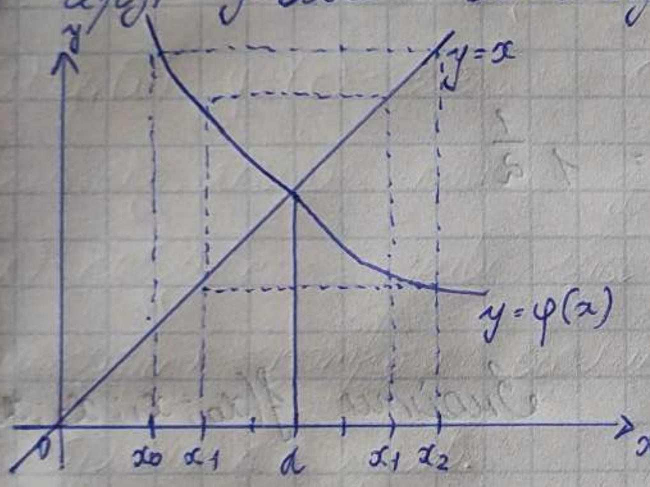
4. Якщо $\varphi(x)$ — дійсна функція дійсної змінної x і $x = \alpha$ — дійсн. корінь р-ня $x = \varphi(x)$, метод прост. ітер. має геометричну інтерпретацію.

Якщо в околі кореня $0 < \varphi'(x) \leq k < 1$, то посл. $\{x_n\}$ монотонно збігається до кореня з того боку, з якого розміщене початкове наближення x_0.





Якщо в околі кореня $-1 < -k \leq \varphi(x) < 0$, то послід. наближення $\{x_n\}$ монотонно збігаються до кореня по черзі з обох боків від кореня.



5. Теорема (Ознака збіжності методу Ньютона). Якщо
1) ф-ції $f_i(x)$ $(i=1,2,\dots,n)$ неперервні в опуклій обл. G і в цій обл. мають неперервні частинні похідні першого порядку;
2) в обл. G міститься розв'язок $x=\alpha$ системи;
3) при $x=\alpha$ матриця $f_x(x)$ є невиродженою, то існ. окіл $R=\{x \mid \|x-\alpha\| \leq \delta\}$, що при будь-якому $x^{(0)} \in R$ посл. $\{x^{(m)}\}$ у м. Ньютона збігається до р-ку $x=\alpha$ сист.

6. $x^2-4x+3=0$ $[0,2]$ Вибрати x_0 і x_1, обч. x_2.

Визначаємо кінець:

$f'(x)=2x-4$

$f''(x)=2>0$

$f(x_0)\cdot f''(x_0)>0$

$f(0)=3>0$ $f(2)=-1<0$

Отже $f(0)\cdot f''(0)>0$, значить $x_0=0$, $x_1=2$

$$x_2=x_0-\frac{(x_1-x_0)\cdot f(x_0)}{f(x_1)-f(x_0)}$$

$$x_2=0-\frac{2\cdot 3}{(-1)-3}=0+\frac{6}{4}=1\frac{1}{2}$$

Відповідь: 1,5.

7.

x	0	2	3	4
$f(x)$	-3	-3	3	13

Знайти $f(x_0;x_1;x_2;x_3)$

$$f(x_0;x_1;x_2;x_3)=\frac{f(x_0)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}+\frac{f(x_1)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}+$$

$$+\frac{f(x_2)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}+\frac{f(x_3)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}=\frac{-3}{(-2)\cdot(-3)\cdot(-4)}+$$

$$+\frac{-3}{2\cdot(-1)\cdot(-2)}+\frac{3}{3\cdot 1\cdot(-1)}+\frac{13}{4\cdot 2\cdot 1}=\frac{-3}{-24}+\frac{-3}{4}+\frac{3}{(-3)}+$$

$$+\frac{13}{8}=\frac{1}{8}-\frac{3}{4}-1+\frac{13}{8}=\frac{14}{8}-\frac{^{2/}7}{4}=\frac{14-14}{8}=0.$$

Відповідь: 0.

8. $\int_{-1}^{3}(-x^2+2x+3)dx$ метод трапецій $n=4$.

$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2n}\left(\sum_{i=1}^{n-1} 2f(a+i\cdot h)+f(a)+f(b)\right)-\frac{(b-a)^3}{12n^2}\cdot f''(\eta)$.

$h=\frac{b-a}{n}$; $h=\frac{3+1}{4}=1$. Нехай $\eta=a+h \Rightarrow \eta=-1+1=0$.

$f'(x)=-2x+2$ $\quad$ $x=\{-1,0,1,2,3\}$.

$f''(x)=-2$.

$\int_{-1}^{3}(-x^2+2x+3)dx=\frac{3+1}{8}\left(f(-1)+2\cdot f(0)+2\cdot f(1)+2\cdot f(2)+f(3)\right)$

$-\frac{4^3}{12\cdot 16}\cdot(-2)=\frac{1}{2}(0+6+8+6+0)-\frac{64}{192}\cdot(-2)=$

$=10+\frac{128}{192}=10,667$.

Відповідь: 10,667.

9. $[0,3]$ $\quad y'=\frac{1}{2}(x-y)$, $y(0)=1$. $h=0,25$. Обч. y_1 у т. $x_1=0,25$

$u_{n+1}=u_n+hf(x_n,u_n)$, $n=0,1\dots$

$y_0=1$ $\quad x_0=0$. $\quad f(0,1)=\frac{1}{2}(0-1)=-\frac{1}{2}$

$y_1=1+0,25\cdot f(0,1)=1+0,25\cdot(-0,5)=1+(-0,125)=0,875$.

Відповідь: $y_1(0,25)=0,875$.

[redacted]

10:50