Кравець Ольга

Група - ПМО - 21 Дата 23.12.2021

Екзаменаційна робота з дисципліни
,,Чисельні методи"

Екзаменаційний білет №6.

① Поняття порядку ітераційного процесу

Ітераційний процес $x_k = \varphi(x_{k-1})$ має порядок m, якщо $\varphi'(\alpha) = \varphi''(\alpha) = \ldots = \varphi^{(m-1)}(\alpha) = 0$, $\varphi^{(m)}(\alpha) \neq 0$, де $x = \alpha$ - корінь рівняння $x = \varphi(x)$

② Постановка задачі інтерполювання

На відрізку $[a, b]$ у точках $x_0, x_1, \ldots, x_n$, де $a \leq x_0 < x_1 < \ldots < x_n \leq b$, задані значення деякої функції $f(x)$; $f(x_0) = y_0$, $f(x_1) = y_1, \ldots$, $f(x_n) = y_n$

Треба побудувати функцію $F(x)$, яка належить до визначеного класу і в точках $x_0, x_1, \ldots, x_n$ набуває таких же значень, що й $F(x)$:

$F(x_0) = y_0$, $F(x_1) = y_1, \ldots$, $F(x_n) = y_n$

③ Ознака, за якою система функцій є системою Чебишева

Якщо для системи функцій $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ виконуються умови:

1) $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ є лінійно незалежною

системою функцій на $[a, b]$

2) $\varphi_i(x) \in C^{n+1}[a, b]$, $i = 0, 1, \dots, n$

3) $\omega_k[\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_k] \neq 0$ на $[a, b]$ для всіх $k (k = 0, 1, n)$,

$$\omega_k[\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_k] = \begin{vmatrix} \varphi_0(x) & \varphi_1(x) & \dots & \varphi_k(x) \\ \varphi_0'(x) & \varphi_1'(x) & \dots & \varphi_k'(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_0^{(k)}(x) & \varphi_1^{(k)}(x) & \dots & \varphi_k^{(k)}(x) \end{vmatrix}$$, то система

функцій $\{\varphi_i(x)\}$ є системою Чебишева на $[a, b]$.

④ Ознака збіжності методу Ейлера

Припустимо, що в області G, яка містить прямокутник $\{x_0 \le x \le x_0 + a,\ y - y_0 \le b\}$, функція $f(x, y)$ неперервна і задовольняє умову Ліпшиця: $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \le h\, |y_1 - y_2|$, $h = const$ і в області G виконується умова $\left|\frac{df}{dx}\right| = \left|\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} f\right| \le \nu < \infty$, ν - стала. Тоді послідовність наближень $y_1, y_2, \dots, y_n$ при $h \to 0$ рівномірно відносно x збігається до розв'язку $y = y(x)$.

⑤ Переваги та недоліки методів Ейлера, Рунге-Кутта та Адамса

Метод Ейлера - один із простіших методів, в цьому і перевага.

Метод Рунге-Кутта: для обчислення y_{n+1} достатньо знати лише y_n (однокроковий метод)

Метод Адамса: для обчислення y_{n+1} треба знати не лише y_n, а й y_{n-i} ($i = 1, 2, \dots, m$ - фіксоване число). (багатокроковий метод).

Перевага методу Рунге-Кутта: алгоритми, які одержують на їхній основі не змінюються з переходом від однієї точки до іншої. Також, у цьому методі можна змінювати крок інтегрування відповідно до потреби точності (ε) обчислення, причому алгоритм не надто ускладнюється. Недоліком є те, що для обчислення наближеного значення розв'язку в окремій точці, необх. обчислювати значення функції $f(x,y)$ у декількох точках. У методі Адамса перевагою є те, що треба лише одне обчислення значення ф-ї $f(x,y)$ при пошуку наближеного значення розв'язку в окремій точці. Недоліком є те, що не можна просто змінити крок інтегрування в процесі розв'язування та щоб почати обчислення треба попередньо обчисл. наближ. значення у декількох початкових точках.

6. $0,5x^2 - 3,5x + 6 = 0$

$[2,5;\ 3,5]$; $x_0 = 2,6$; $x_1 - ?$

$x = \varphi(x)$

$\varphi(x) = 0,5x^2 - 3,5x + 6 \Rightarrow \varphi'(x) = \frac{1}{2} \cdot 2x - \frac{7}{2} + 0$

$\varphi'(x) = x - \frac{7}{2}$

$\varphi'(2,6) = 2,6 - \frac{7}{2} = -0,9$

$f(2,5) = 0,5 \cdot (2,5)^2 - 3,5 \cdot 2,5 + 6 = 0,375$

$f(3,5) = 0,5 \cdot (3,5)^2 - 3,5 \cdot 3,5 + 6 = -0,125$

$x_1 = \varphi(x_0)$

$x_1 = 0,5 \cdot (2,5)^2 - 3,5 \cdot 2,5 + 6 = 0,375$

Відповідь: $x_1 = 0,375$

⑦ $x_0 = -2$ $f(x_0) = -16$

$x_1 = 0$ $f(x_1) = 2$

$x_2 = 1$ $f(x_2) = 2$

$x_3 = 2$ $f(x_3) = 4$

$x = -1$

$$P_n(x) = f(x_0) + (x-x_0) f(x_0, x_1) + (x-x_0)(x-x_1) f(x_0, x_1, x_2) + (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) \times$$
$$\times f(x_0, x_1, x_2, x_3) = -16 + (x+2)\cdot 9 + (x+2)(x-0)\cdot(-3) +$$
$$+ (x+2)(x-0)(x-1)\cdot 1 = -16 + 9x + 18 - 3x^2 - 6x + x^3 + x^2 - 2x =$$
$$= x^3 - 2x^2 + x + 2$$

$$f(x_0, x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{2+16}{0+2} = \frac{18}{2} = 9$$

$$f(x_0, x_1, x_2) = \frac{f(x_1, x_2) - f(x_0, x_1)}{x_2 - x_0} = \frac{0-9}{1+2} = -\frac{9}{3} = -3$$

$$f(x_1, x_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{2-2}{1-0} = 0$$

$$f(x_0, x_1, x_2, x_3) = \frac{f(x_1, x_2, x_3) - f(x_0, x_1, x_2)}{x_3 - x_0} = \frac{1+3}{2+2} = 1$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{f(x_2, x_3) - f(x_1, x_2)}{x_3 - x_1} = \frac{2-0}{2-0} = 1$$

$$f(x_2, x_3) = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} = \frac{4-2}{2-1} = 2$$

$$P_n(-1) = (-1)^3 - 2\cdot(-1)^2 + (-1) + 2 = -2$$

Відповідь: $P_n(-1) = -2$

⑧ $\int_1^3 (2x-1)^2 dx$ метод Сімпсона

$n=4$
$a=1$
$b=3$

$x_0=1$, $x_1=1{,}5$; $x_2=2$; $x_3=2{,}5$; $x_4=3$

$$h=\frac{b-a}{n}=\frac{3-1}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}=0{,}5$$

$$f(x)=(2x-1)^2$$

$f(x_0)=f(1)=1$

$4f(x_1)=4\cdot f(1{,}5)=4\cdot 4=16$

$2f(x_2)=2\cdot f(2)=2\cdot(2\cdot 2-1)^2=2\cdot 9=18$

$4f(x_3)=4\cdot f(2{,}5)=4\cdot 16=64$

$f(x_4)=f(3)=(2\cdot 3-1)^2=25$

$$\frac{h}{3}=\frac{0{,}5}{3}=\frac{1}{6}$$

$$\int_1^3 (2x-1)^2 dx=\frac{1}{6}(1+16+18+64+25)=\frac{124}{6}=\frac{62}{3}$$

Відповідь: $\frac{62}{3}$

⑨ $[0,2]$ метод Ейлера

$y'=\frac{1}{2}(x-y) \rightsquigarrow y'=f(x,y)=\frac{1}{2}(x-y)$

$y(0)=1 \rightsquigarrow y_0=1$, $x_0=0$

$h=0{,}1$

$x_1=0{,}1$; $y_1-?$

$f(x_0,y_0)=f(0,1)=\frac{1}{2}(0-1)=-\frac{1}{2}$

$hf(x_0,y_0)=0{,}1\cdot(-0{,}5)=-0{,}05$

$x_1=0{,}1 \rightsquigarrow y_1=y_0+hf(x_0,y_0)=1+(-0{,}05)=0{,}95$

Відповідь: $y_1=0{,}95$

Час здачі: 10:45