П р и к л а д. Знайти розв'язки системи рівнянь:

$$\begin{aligned} 100x_1 + 6x_2 - 2x_3 &= 200; \\ 6x_1 + 200x_2 - 10x_3 &= 600; \\ x_1 - 2x_2 + 100x_3 &= 500 \end{aligned} \qquad (7.11)$$

$\oplus\ |100| > |6| + |-2|$

$\oplus\ |200| > |6| + |-10|$

$\oplus\ |100| > |1| + |-2|$

$\oplus$

методом ітерацій з похибкою 0.001.

Перетворимо цю систему рівнянь до вигляду (7.9). Для цього поділимо перше рівняння на коефіцієнт при x_1 (100), друге – на коефіцієнт при x_2 (200), третє – на коефіцієнт при x_3 (100) та матимемо:

$$\begin{aligned} x_1 + 0.06x_2 - 0.02x_3 &= 2; \\ 0.03x_1 + x_2 - 0.05x_3 &= 3; \\ 0.01x_1 - 0.02x_2 + x_3 &= 5. \end{aligned}$$

Запишемо систему рівнянь для визначення невідомих x_1, x_2, x_3 з кожного з обчислених рівнянь відповідно:

$$\begin{aligned} x_1 &= -0.06x_2 + 0.02x_3 + 2; \\ x_2 &= -0.03x_1 + 0.05x_3 + 3; \\ x_3 &= -0.01x_1 + 0.02x_2 + 5 \end{aligned}$$

$x = Cx + \beta$

або у матричному вигляді:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}^{(k+1)} = \begin{bmatrix} 0 & -0.06 & 0.02 \\ -0.03 & 0 & 0.05 \\ -0.01 & 0.02 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}^{(k)} + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}. \qquad (7.12)$$

Обчисл. $\|C\|_I = \max\left(|-0{,}06| + |0{,}02|;\ |-0{,}03| + |0{,}05|;\ |-0{,}01| + |0{,}02|\right) =$

Оберемо вектор початкових значень

$k = 0$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}^{(0)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix},$$

$-0{,}08$

$0{,}08$

$= \max(0{,}08;\ 0{,}08,\ 0{,}03 = 0{,}08$

підставимо його значення в систему (7.12) та обчислимо перше наближення розв'язку системи рівнянь

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & -0.06 & 0.02 \\ -0.03 & 0 & 0.05 \\ -0.01 & 0.02 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.92 \\ 3.19 \\ 4.92 \end{bmatrix}.$$

$$\|x^{(2)} - x^{(1)}\| \leq \frac{1 - \|C\|^{<1}}{\|C\|} \cdot \varepsilon$$

Здобуті значення першого наближення розв'язку підставимо знов у систему (7.12) та обчислимо друге наближення розв'язку системи рівнянь

$k=1:$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & -0.06 & 0.02 \\ -0.03 & 0 & 0.05 \\ -0.01 & 0.02 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.92 \\ 3.19 \\ 4.92 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.907 \\ 3.1884 \\ 4.917 \end{bmatrix}.$$

$$\left\| \begin{pmatrix} 1{,}907 - 1{,}92 \\ 3{,}1884 - 3{,}19 \\ 4{,}917 - 4{,}92 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} -0{,}013 \\ -0{,}0016 \\ -0{,}003 \end{pmatrix} \right\|$$

Продовживши ітераційний процес, матимемо вектор третього наближення розв'язку системи рівнянь

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 & -0.06 & 0{,}02 \\ -0.03 & 0 & 0.05 \\ -0.01 & 0.02 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.907 \\ 3.1884 \\ 4.917 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.907036 \\ 3.18864 \\ 4.917162 \end{bmatrix}.$$

$= \max(|..|;\ |..|;\ |..|)$

$= 0{,}013$

$0{,}013 \ ?\ \frac{1}{} \cdot 0{,}001$

$\leqslant \quad \Rightarrow \quad x^{(2)} = x^*$

$> \quad \Rightarrow$ шук. $x^{(3)}$

і 1-8