Перелік питань *до екзамену*
з дисципліни «Чисельні методи»

1. Стаціонарні і нестаціонарні методи розв’язування алгебраїчних і трансцендентних рівнянь.

2. Поняття стискаючого відображення в метричному просторі. Принцип стискаючих відображень.

3. Ознака збіжності ітераційного процесу. Ознака існування кореня рівняння $x = \varphi(x)$. Геометрична інтерпретація методу ітерації.
4. Поняття ітераційного процесу порядку $m \geq 1$.

5. Формула методу хорд. Якій умові повинно задовольняти нульове наближення в даному методі. Геометрична інтерпретація методу.

6. Формула методу дотичних. Як доцільно брати нульове наближення в даному методі. Геометрична інтерпретація методу.

7. Яким умовам повинні задовольняти перша і друга похідна від функції $f(x)$ в околі кореня рівняння $f(x)=0$ в методах хорд і дотичних.

8. Ознака збіжності методу простої ітерації розв’язування систем нелінійних рівнянь. Ознака існування розв’язку СНР.

9. Формула методу Ньютона розв’язування систем нелінійних рівнянь. Ознака збіжності методу Ньютона.

10. Формула модифікованого методу Ньютона розв’язування систем нелінійних рівнянь.

11. Постановка задачі інтерполювання. Поняття узагальненого інтерполяційного многочлена. Поняття системи функцій Чебишева. Критерій єдиності розв’язку задачі інтерполювання. Ознака, за якою система функцій є системою Чебишева. Приклади систем функцій Чебишева. Формула інтерполяційного многочлена Лагранжа.

12. Розділені різниці та їх властивості. Формула інтерполяційного многочлена Ньютона для нерівновіддалених вузлів інтерполювання (*вперед і назад*).
13. Скінчені різниці, їх властивості. Формула інтерполяційного многочлена Ньютона для рівновіддалених вузлів інтерполювання (*вперед і назад*).
14. Многочлени Чебишева, їх властивості. Найкращий вибір вузлів інтерполювання.

15. Великі квадратурні формули прямокутників, трапецій та Сімпсона. Загальна квадратурна формула Ньютона-Котеса.
16. Алгебраїчна міра точності квадратурної формули. Яка квадратурна формула називається квадратурною формулою найвищої алгебраїчної міри точності. Ознака за якою квадратурна формула інтерполяційного типу має найвищу алгебраїчну міру точності 2n + 1.
17. Задача Коші для звичайних диференціальних рівнянь першого порядку. Умова при якій задача має єдиний розв'язок. Формули методу Ейлера. Ознака збіжності методу Ейлера.
18. Формули методу Рунге-Кутта другого порядку.
19. Яка різниця в підходах до побудови інтерполяційного та екстраполяційного методів Адомса.
20. Переваги та недоліки методів Ейлера, Рунге-Кутта та Адамса.
21. Задача Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь першого порядку. Умова єдиності розв'язку задачі.

Типові практичні завдання:

1. Рівняння $x^2 - 6x + 8 = 0$ на проміжку [1,3] має корінь. Вибравши за x_0 один з кінців проміжку, обчислити перше наближення кореня x_1 за методом дотичних.

2. Рівняння $x^2 - 4x + 3 = 0$ на проміжку [0,2] має корінь. Вибравши за x_0 і x_1 точки кінців проміжка, обчислити x_2 за методом хорд.

3. Методом простої ітерації обчислити перше наближення кореня x_1 рівняння $\frac{x^2}{4} - 1 = 0$, якщо $x_0 = 1{,}6$.

4. Задана система нелінійних рівнянь $\begin{cases} 2x^2 - 3y^2 - 20 = 0, \\ xy - y^2 - 4 = 0. \end{cases}$ Обчислити визначник матриці Якобі в точці (1,2).

5. Методом Ньютона обчислити перше наближення x_1 і y_1 розв'язку системи нелінійних рівнянь $\begin{cases} 2x^2 - 3y^2 - 20 = 0, \\ xy - y^2 - 4 = 0, \end{cases}$ якщо нульове наближення $x_0 = 3, y_0 = 1$. У відповідь записати суму $x_1 + y_1$.

6. Обчислити значення інтерполяційного многочлена Лагранжа в точці $x = -2$, побудованого для функції $f(x)$ за вузлами $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, якщо $f(x_0) = 2$, $f(x_1) = 2$, $f(x_2) = -2$, $f(x_3) = -4$.

7. Задані точки $x_0 = 0$, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$ і значення функції $f(x)$ в цих точках $f(x_0) = -3$, $f(x_1) = -3$, $f(x_2) = 3$, $f(x_3) = 13$. Обчислити $f(x_0; x_1; x_2; x_3)$.

8. Обчислити значення інтерполяційного многочлена Ньютона для інтерполювання вперед, використовуючи розділені різниці, в точці $x = -1$, побудованого для функції $f(x)$ за вузлами $x_0 = -2$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, якщо $f(x_0) = -19$, $f(x_1) = -1$, $f(x_2) = -1$, $f(x_3) = 1$.

9. Задані точки $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$ і значення функції $f(x)$ в цих точках $f(x_0) = -3$, $f(x_1) = -4$, $f(x_2) = -3$, $f(x_3) = 6$. Обчислити $\Delta^3 f(x_0)$.

10. Розділена різниця $f(x_0; x_1; x_2; x_3) = 1$. Обчислити скінченну різницю $\Delta^3 f(x_0)$.

11. Обчислити значення інтерполяційного многочлена Ньютона для інтерполювання вперед, використовуючи скінченні різниці, в точці $t = -0{,}5$, побудованого для функції $f(x)$ за вузлами $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, якщо $f(x_0) = 2$, $f(x_1) = 2$, $f(x_2) = -2$, $f(x_3) = -4$.

12. Обчислити значення многочлена Чебишева $T_2(x)$ в точці $x = \frac{1}{2}$.

13. Побудувати для функції $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ інтерполяційний многочлен Лагранжа $L_2(x)$ за точками $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$. Обчислити $L_2(0{,}5) - f(0{,}5)$.

14. Обчислити $\int_{-1}^{3} (-x^2 + 2x + 3)dx$ за допомогою методу прямокутників, розбивши проміжок інтегрування на $n = 4$ однакових частин.

15. Обчислити $\int_{-1}^{3} (-x^2 + 2x + 3)dx$ за допомогою методу трапецій, розбивши проміжок інтегрування на $n = 4$ однакових частин.

16. Обчислити $3\int_{1}^{5} (x-1)^2 dx$ за допомогою методу Сімпсона, розбивши проміжок інтегрування на $n = 4$ однакових частин.

17. На проміжку [0,3] задана задача Коші $y' = \frac{1}{2}(x - y)$, $y(0) = 1$. Вибравши $h = 0{,}25$, за допомогою методу Ейлера обчислити наближене значення y_1 розв'язку в точці $x_1 = 0{,}25$.

18. На проміжку [0,3] задана задача Коші $y' = \frac{1}{2}(x - y), \quad y(0) = 1$. Вибравши $h = 1$, за допомогою методу Рунге-Кутта другого порядку обчислити наближене значення y_1 розв'язку в точці $x_1 = 1$.
19. На проміжку [0,3] задана задача Коші $y' = \frac{1}{2}(x - y), \quad y(0) = 1$. Вибравши $h = \frac{1}{2}$, за допомогою інтерполяційного методу Адамса при $m = 1$ обчислити наближене значення y_1 розв'язку в точці $x_1 = \frac{1}{2}$. У відповідь записати $3y_1$.

20. На проміжку [0,3] задана задача Коші для системи диференціальних рівнянь $\begin{cases} y' = 2y + z, & y(0) = 2, \\ z' = 3y + 4z, & z(0) = 1. \end{cases}$. Вибравши $h = 0{,}25$, за допомогою методу Ейлера обчислити наближені значення y_1 і z_1 в точці $x_1 = 0{,}25$. У відповідь записати $y_1 + z_1$.

Група ПМі- 21

Прізвище, ім'я ____

Екзаменаційний білет №

1.

2.

3.

4.

5.

6

7.

8.

9.

10.

Відповіді на теоретичні питання та розв'язок практичних завдань з відповідями надіслати на електронну адресу: hryhoriy.tsehelyk@gmail.com.

Екзамен триватиме 1 год.30 хв.; листки –відповіді переслати впродовж 20 хвилин після екзамену.