Москва Максим

Група ПМІ-24 18.12.2021

Екзаменаційна робота з дисципліни

„Чисельні методи"

Екзаменаційний білет №-27

18.12.2021

$6x + 8 = 0$, $[a, b] = [1, 3]$, x_2 - ?

12.2021 1) Якщо ф-я $\varphi(x)$ в околі R задовільняє умову Ліпшиця з сталою $L < 1$, то послідовність: $x_k = \varphi(x_{k-1})$, $(k = 1, 2 \dots)$

збігається до кореня $x = \alpha$ при будь-якому $x_0 \in R$. Причому швидкість збіжності характеризується нерівністю: $|x_n - \alpha| \leq L^n |x_0 - \alpha|$

2) Для того щоб для будь-якої ф-ї $f(x)$, визначеної на проміжку $[a, b]$, і для будь-якого набору вузлів $x_0, x_1, \dots, x_n$, де $x_i \in [a, b]$, $x_i \neq x_j$ при $i \neq j$, задача інтерполювання мала єдиний розв'язок, необхідно і досить, щоб система ф-й $\{\varphi_i(x)\}$ $(i = 0, 1, \dots, n)$ була системою Чебишева на $[a, b]$.

4) Многочлени Чебишева $T_n(x)$ визначаються так

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad |x| \leq 1.$$

При $n=1$ $\quad T_1(x) = \cos(\arccos x) = x$

При $n=2$ $\quad T_2(x) = \cos(2 \arccos x) = 2\cos^2(\arccos x) - 1 = 2x^2 - 1$.

Властивості:

1. Рекурентне співвідношення

2. Старший коеф.

3. Симетрія

4. Тригонометричний запис

5. Екстремуми

---

3) Нехай $f(x) \in R$ і $x_0, x_1, \dots, x_n$ – система вузлів інтерполювання, де $x_i \neq x_j$ при $i \neq j$, $x_i \in [a, b]$ $(i = 0, 1, \dots, n)$. Утворимо відношення

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f(x_0; x_1), \quad \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f(x_1; x_2)$$

$$\frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}} = f(x_{n-1}; x_n)$$: ці відношення називаються розділеними відношеннями 1-го порядку.

Відношення: $\frac{f(x_1, x_2) - f(x_0, x_1)}{x_2 - x_0} = f(x_0; x_1; x_2)$,

$$\frac{f(x_2; x_3) - f(x_1; x_2)}{x_3 - x_1} = f(x_1; x_2; x_3) \quad \frac{f(x_{n-1}; x_n) - f(x_{n-2}, x_{n-1})}{x_n - x_{n-2}} =$$

$= f(x_{n-2}; x_{n-1}; x_n)$: називаються розділеними різницями 2-го порядку. Аналогічно визначаються розділені різниці третього, четвертого, і т. д. до k-го порядку. Якщо ми вже визначили розділені різниці k-го порядку $f(x_i; x_{i+1}; \dots; x_{i+k})$ $(i = 0, 1 \dots, n-k)$, то розділені різниці $(k+1)$-го порядку обчислюються за допомогою ф-ли:

$$\frac{f(x_i; x_{i+1}; \dots; x_{i+k}) - f(x_{i-1}; x_i; \dots; x_{i+k-1})}{x_{i+k} - x_{i-1}} =$$

$$= f(x_{i-1}; x_i; \dots; x_{i+k}) \quad (i = 1, 2, \dots, n-k$$

Властиво-сті: симетричні, ~~ро~~

5) Метод називається екстраполяційним тому, що інтерполяційний многочлен побудований $f(x, y(x))$ за точками $x_{i-m}, x_{i-m+1}, \dots, x_i$ проміжку $[x_{i-m}, x_i]$ використовують для екстраполяції цієї ф-ї в точці x_{i+1}. Також екстраполяційний метод Адамса є багатокроковим.

~~6) $x^2 - 6x + 8 = 0$ $x_0 = 1$, $x_1 = 3$~~

6) $x^2 - 6x + 8 = 0$, $[a, b] = [1, 3]$, x_2 - ?

метод хорд

$$x_{n+1} = \frac{x_0 f(x_n) - x_n f(x_0)}{f(x_n) - f(x_0)}$$

Визначення x_0 на x_1:

Умова для визначення x_0:

$$f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$$

1) $f(1) \cdot f''(1) = 3 \cdot 2 > 0$

Отже $x_0 = 1$ звідси $x_1 = 3$

$$x_2 = \frac{x_0 f(x_1) - x_1 \cdot f'(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)} = \frac{1 \cdot (-1) - 3 \cdot 3}{-1 - 3} = \frac{-1-9}{-4} = 2.5$$

Відповідь: $x_2 = 2.5$

8) $x = 3 \Rightarrow f(x)$ - ?

$x_0 - 1$; $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$

$f(x_0) = -2$, $f(x_1) = 2$, $f(x_2) = ?$ $f(x_3) = 4$

Лагранж:

$$L_3(3) = \sum_{i=0}^{3} f(x_i) \frac{\prod_{i=0}^{3} (x - x_i)}{\prod_{j=0}^{3} (x_i - x_j)} =$$

$$= (-2) \cdot \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{(-1) \cdot (-2) \cdot (-3)} = (-2) \cdot \frac{6}{-6} = \cancel{4} \; 2$$

$$2 \cdot \frac{(3+1)(3-1)(3-2)}{(1)(-1)(-2)} = \cancel{2} \cdot \frac{4 \cdot 2 \cdot 1}{\cancel{2}} = 8$$

$$2 \cdot \frac{(3+1)(3)(3-2)}{(1+1)(1-0)(1-2} = 2\,\frac{(3+1)(3)(3-2)}{(1+1)\cdot(1-0)(1-2)} = 4$$

$$4 \cdot \frac{(3+1)(3-0)(3-1)}{(2+1)(2-0)(2-1)} = 4 \cdot \frac{24}{6} = 0$$

$2+8+4=14$

В: 14

11:00

Мш