Лабораторна робота №3.

студентки групи ПМО-21

Кравець Ольги

Варіант-9.

Обчислення визначених інтегралів

$$\boxed{\int_2^3 e^x \sin 2x \, dx,} \quad \boxed{F(x) = \frac{e^x}{5}(\sin 2x - 2\cos 2x)}$$

$\varepsilon_1 = 10^{-6}$

Задача наближеного обчислення:

Нехай інтеграл, який потрібно визначити, представ. у вигляді: $\int_a^b p(x) f(x)\, dx$ (*)

Підінтегральна функція в формулі (*) є такою, що не дозволяє в функціональному вигляді отримати первісну функцію.

Цей інтеграл обчисл. за наближ. квадр. ф-лою:

$$\int_a^b p(x) f(x) dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k), \quad x_k \in [a, b], k = 0, 1, .., n,$$

де функція $f(x)$ - визначена і неперервна на інт. $[a, b]$, A_k - квадратур. коеф., n - довільне число інтервалів всередині відр. $[a, b]$.

Велика формула прямокутників

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{n}\left(f\left(a+\frac{h}{2}\right)+f\left(a+\frac{3h}{2}\right)+\ldots+\right.$$

$$\left.+f\left(a+\frac{2n-1}{2}\cdot h\right)\right)+\frac{(b-a)^3}{24n^2}f''(\eta)$$

$\eta \in (a;b)$

n - кількість однакових частин, на які поділено $[a;b]$

$h=\frac{b-a}{n}$ - довжина відрізка, на які поділили відрізок $[a;b]$

Велика формула трапецій

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2n}\left(f(a)+2f(a+h)+2f(a+2h)+\ldots+\right.$$

$$\left.+2f(a+(n-1)h)+f(b)\right)-\frac{1}{12n^2}(b-a)^3 f''(\xi)$$

$h=\frac{b-a}{n}$

n - кількість частин, на які розбито відрізок $[a;b]$

$\xi \in (a;b)$

Велика формула Сімпсона

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{6m}\Big(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) +$$

$$+ 2f(x_4) + \ldots + 2f(x_{2m-2}) + 4f(x_{2m-1}) + f(x_{2m})\Big) -$$

$$-\frac{(b-a)^5}{2} \cdot \frac{f^{(4)}(\xi_4)}{90m^4}$$

$\xi_4 \in (a, b)$; $x_0 = a$; $x_{2m} = b$

$x_i = x_0 + ih \; (i = 0, 1, \ldots, 2m)$

Велика формула „трьох восьмих"

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{3}{8} \cdot \frac{b-a}{n}\Big[\big(f(x_0) + f(x_n)\big) + 2\big(f(x_3) + f(x_6) + \ldots +$$

$$+ f(x_{n-3})\big) + 3\big(f(x_1) + f(x_2) + f(x_4) + f(x_6) +$$

$$+ f(x_5) + \ldots + f(x_{n-2}) + f(x_{n-1})\big)\Big] - \frac{(b-a)^5}{5!\,80n^4} f^{IV}(\xi_4)$$

$\xi_4 \in (a, b)$

$n = 3k,\; k \in \mathbb{Z}$

$x_i = x_0 + ih$; $(i = 0, 1, \ldots, n)$

Вибір кроку інтегрування

Вибір кроку за теоретичними оцінками похибки: $|R| < \frac{\xi}{2}$

- похибка для методу прямокутників:

$$R(f) = \frac{f''(\xi)}{24}(b-a)\cdot h^2$$

- похибка для методу трапецій:

$$R(f) = -\frac{f''(\xi)}{12}(b-a)h^2$$

- похибка для методу Сімпсона:

$$|R(f)| \le \frac{(b-a)^5 m_4}{180n^4} \le \xi$$

Формула Ньютона-Лейбніца дає результат: $\boxed{-9,65017}$

Формула прямокутників: -9,73061

Ф-ла трапецій: -9,48936

Ф-ла Сімпсона: -9,65019

Ф-ла „трьох восьмих": -9,36328

Найнаближеніший варіант відповіді дає метод Сімпсона (тут похибка = = -0,00002);

Похибка для методу прямокутників: -0,08044;

Похибка для методу трапецій: 0,16081;

Похибка для методу „трьох восьмих": 0,28689.

Код програми (C++):

```cpp
#include <iostream>
#include<math.h>
using namespace std;
double f(double x)
{
	return exp(x) * sin(2 * x);
}

double Rectangle(double a, double b, int n)
{

	double s = 0, k = 0, i = a;
	double h = (b - a) / n;
	while (i < b)
	{
		k = (h)*f((2 * i + h) / 2.0);
		i += h;
		s += k;
	}
	return s;
}

double Trapezia(double a, double b, int n)
{
	double h = (b - a) / n;
	double s = 0;
	for (int i = 0; i < n; i++)
	{
		double x1 = a + i * h;
		double x2 = a + (i + 1) * h;
		s += 0.5 * (x2 - x1) * (f(x1) + f(x2));
	}

	return s;
}

double Sympson(double a, double b, int n)
{
	double h = (b - a) / n;
	double x = a;
	double s = 0.5 * f(x) + 0.5 * f(a + n * h);
	for (int i = 1; i < n;i++)
	{
		s += f(a + i * h);
	}
	for (int i = 1; i <= n; i++)
	{
		s += 2 * f((a + (i - 1) * h + a + i * h) / 2);
	}
	s *= h / 3;
	return s;
}

float ThreeEights(double a, double b, int n)
{
	double h = (b - a)/ n;
	double s = f(a) + f(b);

	for (int i = 1; i < n; i++)
	{
		if (i % 3 == 0)
		{
			s = s + 2 * f(a + i * h);
		}
		else
		{
			s = s + 3 * f(a + i * h);
		}
	}
	return (3 * h / 8) * s;
}

double Newton_Leibniz(double a, double b)
{
	double x = 0;
	x = (exp(b) / 5) * (sin(2 * b) - 2 * cos(2 * b)) - (exp(a) / 5) * (sin(2 * a) - 2 * cos(2 * a));
	return x;
}
```

```
int main()
{
	double a = 2.0, b = 3.0, eps = 0.00001, n = 5;
	cout << "Rectangles method = " << Rectangle(a, b, n) << '\n';
	cout << "\Trapezia method = " << Trapezia(a, b, n) << '\n';
	cout << "\Sympson method = " << Sympson(a, b, n) << '\n';
	cout << "\Method of three eighths = " << ThreeEights(a, b, n) << '\n';
	cout << "Newton Leibniz formula = " << Newton_Leibniz(a, b) << endl;

	cout << '\n';
	system("pause");
	return 0;
}
```

Результат виконання програми:

```
Rectangles method = -9.73061
Trapezia method = -9.48936
Sympson method = -9.65019
Method of three eighths = -9.36328
Newton Leibniz formula = -9.65017

Press any key to continue . . .
```