

## **Практичне заняття № 8.**

### **Систолічні алгоритми обчислень та їх оцінювання.**

#### **Вимоги до систолічних алгоритмів.**

Для ефективної реалізації обчислень на *систолічній системі* необхідні так звані *систолічні алгоритми* (СА), тобто алгоритми, зорієнтовані на апаратну систолічну реалізацію. Вони повинні задовольняти певним *вимогам*, серед яких:

- 1) регулярність, однонапрявленість графу обчислень;
- 2) ациклічність алгоритму;
- 3) можливість розбиття алгоритму на етапи однакової складності (тривалості виконання) для побудови конвеєра;
- 4) можливість розпаралелювання обчислень;
- 5) відсутність необхідності у великих обсягах пам'яті для зберігання проміжних результатів і накопичення інформації;
- 6) локальність пересилання інформації, відсутність потреби у довгих пересиланнях;
- 7) мінімальна кількість розгалужень в алгоритмі;
- 8) мінімальна кількість вхідних та вихідних точок алгоритму (вхідні дані та результат обчислень);
- 9) мінімальна кількість різних типів обчислень і операцій, які використовує алгоритм;
- 10) можливість розбиття алгоритму на менші фрагменти, а з іншого боку – нарощування алгоритму для розв'язання задач більшої вимірності.

#### **Приклади використання.**

Розглянемо дещо спрощену *задачу цифрової фільтрації* (ЗЦФ), яка полягає у виконанні одного переобчислення масиву значень  $n$  змінних за формулою:

$$x'_i = \sum_{s=-m}^m x_{i+s} \cdot f_s, \quad i = \overline{1, n}. \quad (1)$$

Тут переобчислення згладжування здійснюється через рухоме вікно розміром  $2m+1$ . При цьому в (1) значення  $x_{1-m}, x_{2-m}, \dots, x_0; x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m}$  та вагові коефіцієнти  $f_{-m}, f_{-m+1}, \dots, f_m$  – задані константи. Вагові коефіцієнти вибираються такими, щоб  $\sum_{s=-m}^m f_s = 1$ .

#### **Приклад 1.**

На рис. 1 наведено *систолічну систему* (СС), яка реалізує алгоритм розв'язання сформульованої вище задачі у разі, коли  $m = 1$ . Ця СС складається з **3** однотипних процесорних елементів (ПЕ) з протилежнонаправленими потоками даних. На кожному такті спрацювання системи в ПЕ здійснюється виконання двох арифметичних операцій (додавання, множення) та транспортування даних. Насправді ж тут корисна (обчислювальна) робота буде виконуватися елементами системи через такт (якщо не враховувати розгону та гальмування конвеєра). Зауважимо,

що під час оцінювання систолічних обчислень не враховуватимуться обмінні операції.

Для здійснення обчислень за схемою, зображеною на рис. 1, необхідно виконати  $2(2m+1)-1+2(n-1)=2n+4m-1$  такт, а, враховуючи, що  $m=1$ , одержуємо  $2n+3$  такти. Якщо б довелось виконувати ті ж обчислення на одному ПЕ, то кількість тактів дорівнювала б  $(2m+1)n$ , тобто  $3n$ . Тоді прискорення СА будемо обчислювати за формулою:

$$S_3 = \frac{3n}{2n+3}.$$

Для якзавгодно великого  $n$  ( $n \rightarrow \infty$ ) одержуємо, що  $S_3 \rightarrow 1.5$ . А для ефективності алгоритму маємо формулу:

$$E_3 = \frac{3n}{(2n+3)3} = \frac{n}{2n+3}.$$

Для якзавгодно великого  $n$   $E_3 \rightarrow 0.5$ .

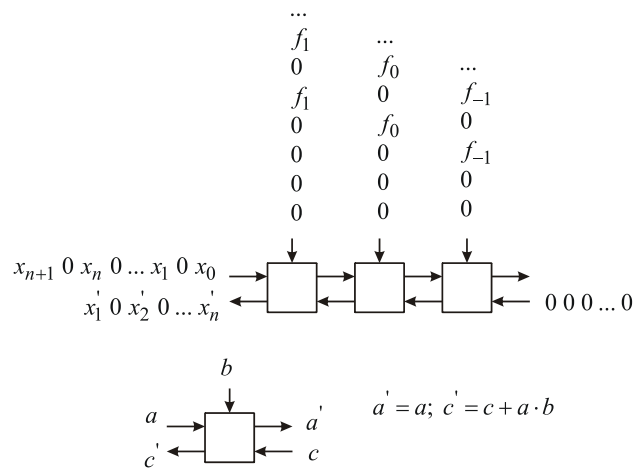
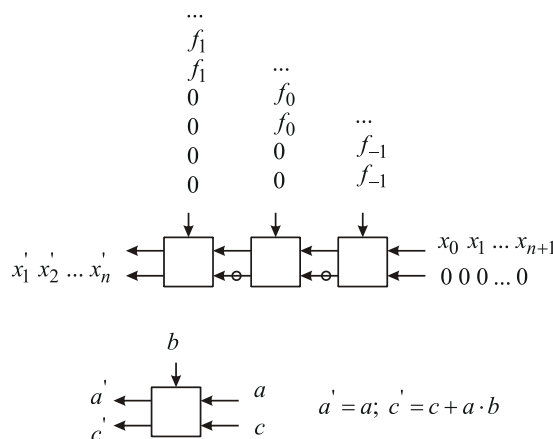


Рис. 1

### Приклад 2.

Для розв'язання сформульованої задачі фільтрації можна запропонувати інший СА, який реалізує система, зображена на рис. 2.



o – означає, що потік затримується на один такт

Рис. 2

Для здійснення обчислень за схемою, зображеною на рис. 2, необхідно виконати  $2(2m+1) - 1 + (n-1) = n + 4m$  такти, а, враховуючи, що  $m=1$ , одержуємо  $n + 4$  такти. Якщо б довелось виконувати ті ж обчислення на одному ПЕ, то кількість тактів дорівнювала б також, як і в попередньому прикладі,  $(2m+1)n$ , тобто  $3n$ . Тоді прискорення СА в даному разі будемо обчислювати за формулою:

Для якзавгодно великого  $n$  одержуємо, що  $S_3 \rightarrow 3$ . А для ефективності цього алгоритму маємо формулу:

Отже, СА, реалізований за схемою, наведеною на рис. 2, є більш ефективним.

$$\begin{aligned} w_1 &= a_1x_1 + y_1b_1 + z_1c_1 + v_1d_1; \\ w_2 &= a_2x_2 + y_2b_2 + z_2c_2 + v_2d_2; \\ &\dots\dots\dots \\ w_n &= a_nx_n + y_nb_n + z_nc_n + v_nd_n. \end{aligned}$$

Наведена СС складається з 4-х однотипних ПЕ. На кожному такті її спрацювання виконуються операції множення та додавання в кожному ПЕ. Якщо не зважати на час розгону та гальмування конвеєра, то можна зробити висновок, що ця СС повністю завантажена корисною роботою. Для реалізації систолічних обчислень необхідно  $4 + (n - 1) = n + 3$  такти, а для виконання таких же обчислень на одному ПЕ потрібно уже  $4n$  тактів. Тоді прискорення систолічних обчислень

При цьому ефективність обчислень

$$E_4 = \frac{4n}{(n+3)4} = \frac{n}{n+3} = \frac{1}{1+3/n}.$$

У разі  $n \rightarrow \infty$  одержимо, що  $E_4 \rightarrow 1$ .

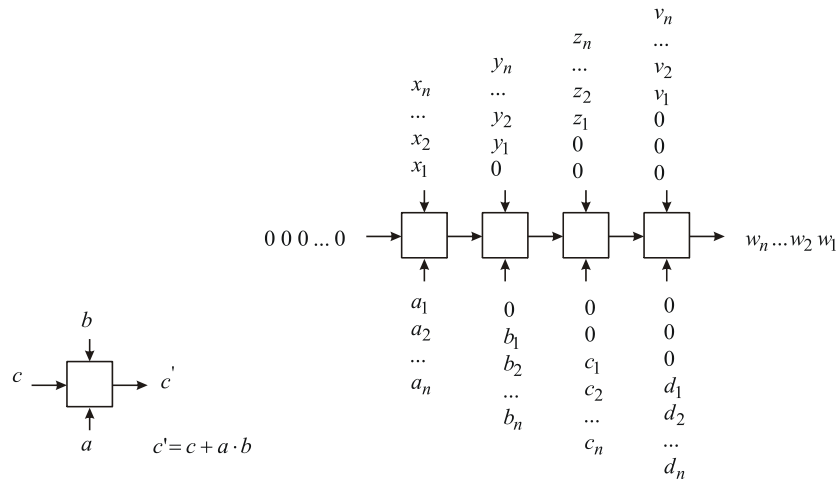


Рис. 3

#### Приклад 4.

На рис. 4 зображено СС для виконання таких же обчислень, як і у попередньому прикладі, однак сама система дещо відрізняється своєю структурою.

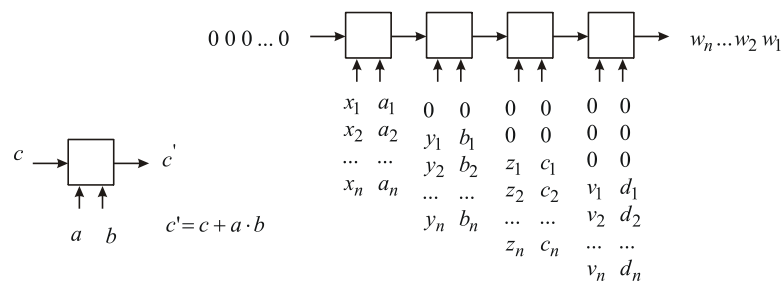


Рис. 4

Усі характеристики СА в даному разі будуть ті ж, що і в прикладі 3.

#### Приклад 5.

Обчислення із прикладу 3 можна реалізувати на СС, зображений на рис. 5.

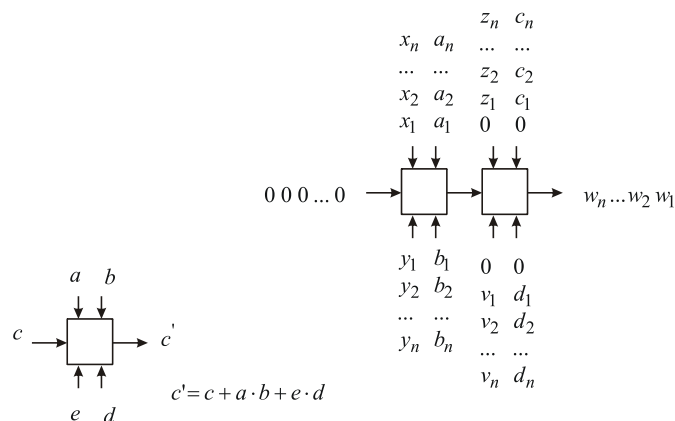


Рис. 5

Для виконання систолічних обчислень необхідно  $2 + (n - 1) = n + 1$  такт. У разі виконання цих же обчислень на одному ПЕ потрібно  $2n$  тактів. Тоді прискорення

$$S_2 = \frac{2n}{n+1} = \frac{2}{1+1/n}.$$

Для  $n \rightarrow \infty$  одержуємо, що  $S_2 \rightarrow 2$ .

При цьому ефективність обчислень

$$E_2 = \frac{2n}{(n+1)2} = \frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+1/n}.$$

У разі  $n \rightarrow \infty$  одержимо, що  $E_2 \rightarrow 1$ .

### **Вправи для самостійної роботи.**

1. Зобразити лінійну СС з протилежнонаправленими потоками даних для реалізації СА розв'язання сформульованої ЗЦФ у разі, коли  $m = 2$ . Оцінити прискорення та ефективність алгоритму обчислень.
2. Зобразити лінійну СС з однаковоюнаправленими потоками даних для реалізації СА розв'язання задачі фільтрації у разі, коли  $m = 3$ . Оцінити прискорення та ефективність алгоритму обчислень.