Практичне заняття № 3.
Розв'язання одновимірної задачі цифрової фільтрації з використанням методу гіперплощин для розпаралелювання циклів.

Проблема розпаралелювання циклів.

Основна робота, яку виконує ЕОМ (ПК) – це опрацювання *циклів* і інших повторюваних ділянок програм. Тому теорія розпаралелювання циклів є одним із важливих напрямків паралельного програмування.

Про розпаралелювання циклів прийнято говорити в термінах простору ітерацій (Лемпорт Л. (Leslie Lamport)).

Розглянемо такий циклічний фрагмент програми:

$$\begin{array}{c} FOR \;\; i_1 = 1, r_1 \;\; DO \\ FOR \;\; i_2 = 1, r_2 \;\; DO \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ FOR \;\; i_n = 1, r_n \;\; DO \\ T(i_1, i_2, \ldots., i_n), \end{array} \qquad (1)$$

де T – це тіло циклу.

Конструкцію (1), яку утворюють вкладені цикли, називатимемо *гніздом циклів*.

Простором ітерацій гнізда циклів (1) називається множина цілочисельних векторів:

$$I = \{(i_1, i_2, \ldots, i_n):\; 1 \le i_k \le r_k, 1 \le k \le n\}.$$

Розглянемо таке гніздо циклів:

$$\begin{array}{c} FOR \;\; i = 1, 6 \;\; DO \\ FOR \;\; j = 1, 3 \;\; DO \\ T(i,\; j). \end{array}$$

У даному випадку простором ітерацій буде така множина цілочисельних векторів: $I_0 = \{(i, j):\; 1 \le i \le 6; 1 \le j \le 3\}$.

Графічно простір ітерацій можна подати так, як зображено на рис. 1.

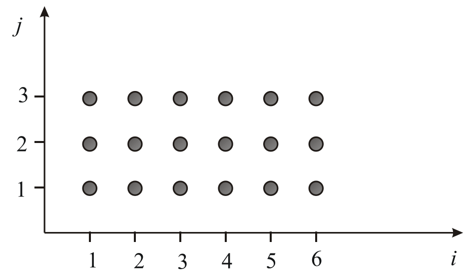

Рис. 1

У термінах простору ітерацій *задача розпаралелювання* гнізда циклів (1) ставиться як задача розбиття множини I на деякі підмножини $I_1, I_2, \ldots, I_s$ такі, що для будь-якого l обчислення тіла циклу $T(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ на ітераціях I_l можуть бути виконані одночасно (із збереженням інформаційних зв'язків вихідного циклу).

Залежно від типу областей $I_1, I_2, ..., I_s$ виділяють різні *методи розпаралелювання* циклів, зокрема:

- метод паралелепіпедів;
- метод гіперплощин.

У дещо іншому аспекті розглядається метод пірамід для розпаралелювання циклів.

Згадані методи розпаралелювання застосовуються лише у разі виконання *низки обмежень* на оператори тіла циклу. Ці обмеження залежать від типу паралельної обчислювальної системи і методу розпаралелювання. Наведемо *головні* із цих *обмежень*:

- тіло циклу не містить *умовних і безумовних переходів* поза тіло;
- в межах тіла циклу *передача керування* здійснюється лише *вперед*;
- тіло циклу *не містить* операторів *вводу-виводу* і *звернень до підпрограм*;
- всі *індексні вирази є лінійними*, тобто відсутні індекси вигляду $i * j * k$, i^2, j^3 тощо;
- відсутня *непряма адресація* вигляду $x(y(i))$;
- *індекси не змінюються* в тілі циклу;
- не виконується *умова Рассела* (використання в тілі циклу простої неіндексованої змінної раніше, ніж тій змінній у тілі циклу присвоюється деяке значення).

Ідея методу гіперплощин.

Гіперплощина – це множина точок *n*-вимірного простору, яку неможливо зобразити графічно, однак координати цих точок задовольняють лінійне рівняння

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + ... + a_n x_n = b .$$

Тут $a_1, a_2, \dots, a_n, b$ – задані коефіцієнти (величини), а $x_1, x_2, \dots, x_n$ – змінні. Очевидно, що у трьохвимірному просторі гіперплощина вироджується у *площину*, а в двовимірному – у *пряму лінію*.

Метод гіперплощин, як і *метод паралелепіпедів*, може бути використаний для розпаралелювання циклів у векторноконвеєрних, векторнопаралельних та багатопроцесорних обчислювальних системах.

Ідея *методу гіперплощин* розпаралелювання циклів полягає у відшуканні в просторі ітерацій *I* деякого вихідного циклу такого сімейства паралельних гіперплощин, щоб будь-які дві ітерації p_1, p_2, що лежать в одній із цих гіперплощин, були інформаційно і конкуренційно не зв'язані, тобто задовольняли умові:

$$(In(T(p_1)) \cap Out(T(p_2))) \cup (In(T(p_2)) \cap Out(T(p_1))) \cup (Out(T(p_1)) \cap Out(T(p_2))) = \varnothing,$$

де $In(T(p_1))$ – сукупність вхідних змінних тіла циклу *T* на ітерації p_1;
$Out(T(p_2))$ – сукупність вихідних змінних тіла циклу *T* на ітерації p_2.

За аналогією визначаємо $In(T(p_2))$ та $Out(T(p_1))$. У наведеній вище умові об'єднання перших двох сукупностей означає, що ітерації p_1, p_2 не зв'язані інформаційно, а долучення третьої сукупності означає, що згадані ітерації не зв'язані конкуренційно.

Тобто фактично розпаралелювання циклів за методом гіперплощин полягає в перетворенні конструкції із вкладених *n* циклів з тілом $T(i_1, i_2, ..., i_n)$ в еквівалентну паралельну конструкцію вигляду:

$$FOR \quad \nu = 1, q \quad DO$$
$$FOR \quad ALL \quad (i_1, i_2, ..., i_n) \in \{(i_1, i_2, ..., i_n): a_1 \cdot i_1 + a_2 \cdot i_2 + ... + a_n \cdot i_n = b(\nu) \wedge \wedge (1 \le i_1 \le r_1) \wedge (1 \le i_2 \le r_2) \wedge ... \wedge (1 \le i_n \le r_n)\} \quad DO \quad PAR \tag{2}$$
$$T(i_1, i_2, ..., i_n).$$

Очевидно, що у наведеній конструкції (2) нам необхідно знайти (обчислити) кількість гіперплощин q і рівняння для цілого їх сімейства, а точніше вирази для величин $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$ у кожному конкретному випадку простору ітерацій на підставі аналізу інформаційної та конкуренційної залежностей цих ітерацій.

Розглянемо декілька прикладів циклів, щоб продемонструвати застосування методу гіперплощин на практиці.

<u>Приклад 1.</u>

$$FOR \;\; i = 1, 5 \;\; DO$$
$$FOR \;\; j = 1, 7 \;\; DO \tag{3}$$
$$x(i, j) := x(i-1, j) + x(i-2, j-1) + x(i, j-1).$$

Зобразимо простір ітерацій цього циклу та інформаційні зв'язки між ними (див. рис. 2).

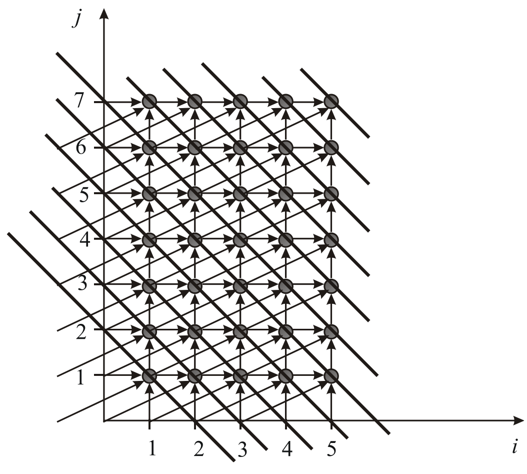

Рис. 2

Сімейство паралельних прямих також зображене на даному рисунку. Ітерації, що лежать на кожній з цих прямих, можуть бути виконані одночасно, тобто паралельно. Кількість таких прямих дорівнює **11**. Далі знаходимо рівняння для цього сімейства прямих: $j = -i + \nu + 1$, де $\nu = \overline{1, 11}$.

У даному разі паралельна конструкція для циклу (3) матиме вигляд:

$$FOR \quad \nu = 1, 11 \quad DO$$
$$FOR \quad ALL \ (i,\ j) \in \{(i,\ j):\ j = -i + \nu + 1 \wedge (1 \le i \le 5) \wedge (1 \le j \le 7)\} \quad DO \quad PAR \tag{4}$$
$$x(i,\ j) := x(i-1,\ j) + x(i-2,\ j-1) + x(i,\ j-1).$$

<u>Приклад 2.</u>

Розглянемо інший цикл.

$$FOR \ \ i = 3, 7 \ \ DO$$
$$FOR \ \ j = 1, 5 \ \ DO \tag{5}$$
$$x(i,\ j) := 0.5 * x(i-1,\ j+1) + x(i-2,\ j) + x(i-1,\ j-1).$$

Зобразимо графічно простір ітерацій цього циклу та інформаційні зв'язки між ними (див. рис. 3).

Кількість шуканих гіперплощин (прямих) дорівнює **5**. Рівняння для цілого сімейства матиме вигляд: $i = \nu + 2$, де $\nu = \overline{1, 5}$.

Відповідна паралельна конструкція для циклу (5) матиме вигляд:

$$FOR \quad \nu = 1, 5 \quad DO$$
$$FOR \quad ALL \ (i,\ j) \in \{(i,\ j):\ i = \nu + 2 \wedge (3 \le i \le 7) \wedge (1 \le j \le 5)\} \quad DO \quad PAR \tag{6}$$
$$x(i,\ j) := 0.5 * x(i-1,\ j+1) + x(i-2,\ j) + x(i-1,\ j-1).$$

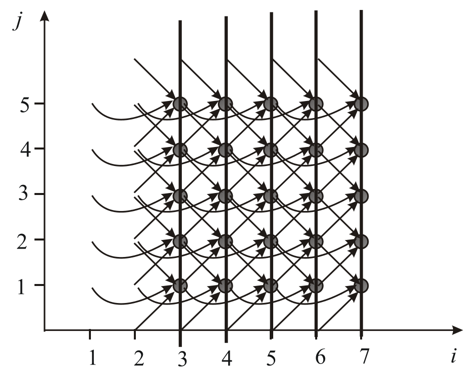

Рис. 3

Розв'язання одновимірної задачі цифрової фільтрації.

Як було вказано на попередньому практичному занятті, *стандартний послідовний алгоритм* розв'язання одновимірної задачі фільтрації має вигляд:

$$
\begin{array}{l}
FOR \ \ j = 1, k \ \ DO \\
\{ \ FOR \ i = 1, n \ \ DO \\
\quad \{ \ p = 0 \\
\quad\ \ FOR \ s = -m, m \ \ DO \\
\quad\ \ \{ \ p = p + x_{i+s} * f_s \ \} \\
\quad\quad x_i = p \ \} \ \}.
\end{array} \tag{7}
$$

Використовуючи *метод гіперплощин* для розпаралелювання циклів стосовно послідовного алгоритму (7), одержуємо *паралельний алгоритм*, який має такий вигляд:

$$
\begin{array}{l}
FOR \;\; t=1, n+(k-1)(1+m) \;\; DO \\
\;\{ \; FOR \;\; ALL \;\; (j,i) \in \{(j,i) : i=(m+1)(1-j)+t \wedge 1 \le j \le k \wedge 1 \le i \le n\} \;\; DO \;\; PAR \\
\;\;\{ \; p_i = 0 \\
\;\;\; FOR \;\; s=-m, m \;\; DO \\
\;\;\;\{ \; p_i = p_i + x_{i+s} * f_s \; \} \\
\;\;\;\; x_i = p_i \; \} \; \}.
\end{array}
\qquad (8)
$$

Наведена конструкція (8) задає незалежне (одночасне, паралельне) виконання ітерацій, які знаходяться на одній гіперплощині (прямій). Для параметрів задачі фільтрації $m=1, n=5, k=4$ простір ітерацій та сімейство гіперплощин зображені на рис. 4. У даному разі максимальна кількість ітерацій, що лежать на одній прямій, дорівнює **3**.

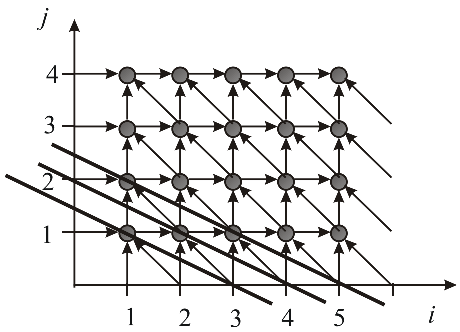

Рис. 4

Для своєї реалізації паралельний алгоритм (8) потребує за часом виконання

$$2(2m+1)(n+(k-1)(1+m))$$

арифметичних операцій. Враховуючи, що послідовний алгоритм (7) потребує для свого виконання

$$2(2m+1)nk$$

операцій, отримуємо прискорення для (8):

$$S = nk/(n+(k-1)(1+m)) = k/(1+(k-1)(1+m)/n).$$

Оскільки зазвичай на практиці $k << n$ та $m << n$, то прискорення побудованого паралельного алгоритму буде приблизно дорівнювати кількості переобчислень згладжування, тобто $S \approx k$.

Вправа для самостійної роботи.

Для двох наборів параметрів задачі цифрової фільтрації $m=2, n=6, k=4$ та $m=3, n=7, k=3$ згідно з паралельним алгоритмом (8) зобразити простір ітерацій та сімейство паралельних гіперплощин. Інформаційні зв’язки можна зображати лише для окремих ітерацій циклу. Знайти прискорення паралельних обчислень для цих двох випадків реалізації алгоритму (8).