Практичне заняття № 4.
Метод пірамід для розпаралелювання циклів, його недоліки та можливості модифікації.

Метод пірамід.

Усі обчислювальні системи за *ступенем комутації* між процесорами можна розділити на *сильнозв'язані та слабозв'язані*. У системах *першого* типу доступ до даних сусіднього процесора здійснюється достатньо просто. В ідеальному випадку – це процесори, що працюють над спільною пам'яттю. У системах *другого* типу обмін даними між процесорами не є елементарною операцією і потребує великих накладних (часових) затрат. Наприклад, у системах з розподіленою пам'яттю він вимагає спеціальних дій з налаштування комутатора. Розпаралелювання для систем такого типу є найефективнішим тоді, коли унаслідок нього одержуємо повністю автономні гілки, що не потребують під час обчислень синхронізації і обміну інформацією. На організацію таких гілок і зорієнтований *метод пірамід* для розпаралелювання циклів.

Цей метод грунтується на наступному. На *першому етапі* в просторі ітерацій знаходяться *результуючі ітерації*, тобто такі, що не «впливають» на жодні інші ітерації. Потім до кожної із цих ітерацій «приєднуються» всі ітерації, що впливають на неї безпосередньо, далі – всі ітерації, що впливають на приєднані ітерації, і т.д. Таким чином для кожної результуючої ітерації одержуємо ціле *сімейство* ітерацій. При цьому деякі ітерації тіла циклу можуть увійти більш, ніж в одне таке сімейство. На *другому етапі* із одержаних сімейств формуються паралельні гілки. При цьому кожне сімейство інформаційно зв'язаних ітерацій *є пірамідою* в просторі ітерацій, що і стало передумовою для назви методу розпаралелювання циклів.

Тобто, у чистому вигляді *метод пірамід* дає, як результуючу конструкцію, сукупність повністю *автономних гілок*, кожна з яких формується шляхом обходу деякої піраміди в просторі ітерацій. У *двовимірному випадку* піраміда є *трикутником*, «вирізаним» із простору ітерацій, у вершині якого знаходиться результуюча ітерація (див. рис. 1).

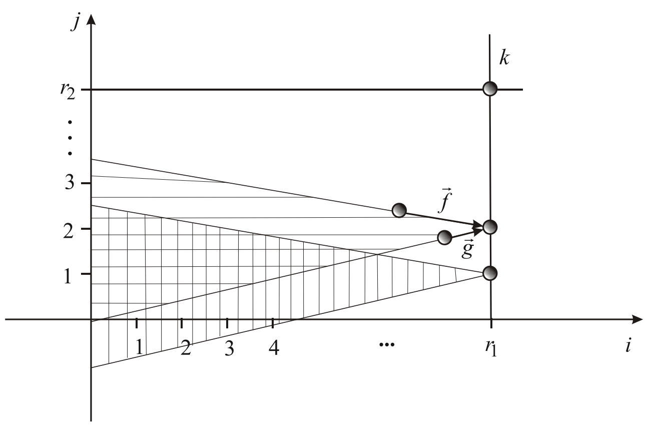

Рис. 1

Вектори $\vec{f} = (f_1, f_2)$ і $\vec{g} = (g_1, g_2)$, які породжують трикутник, є *крайніми* (найбільш «відхилюваними») векторами залежностей зі спектру векторів залежності всього простору ітерацій. Якщо результуюча ітерація має координати (r_1, k'), то початки векторів $\vec{f}$ та $\vec{g}$ матимуть відповідно координати $(r_1 - f_1, k' + |f_2|)$ та $(r_1 - g_1, k' - g_2)$. За таких припущень метод пірамід перетворює цикл

$$\begin{array}{l} FOR \;\; i = 1, r_1 \;\; DO \\ FOR \;\; j = 1, r_2 \;\; DO \\ T(i, j) \end{array} \tag{1}$$

в еквівалентну паралельну конструкцію

$$\begin{array}{l} \quad FOR \;\; k = 1, r_2 \;\; DO \;\; PAR \\ \{ \;\; FOR \;\; i = 1, r_1 \;\; DO \\ \quad FOR \;\; j = \max\{1, k - [(r_1 - i) g_2 / g_1]\}, \min\{r_2, k + [(r_1 - i)|f_2| / f_1]\} \;\; DO \\ \quad T(i, j) \;\; \}. \end{array} \tag{2}$$

Тут і надалі $[\cdot]$ означає взяття цілої частини.

Застосування методу.

Розглянемо декілька прикладів циклів і використаємо для їх розпаралелювання метод пірамід.

<u>Приклад 1.</u>

$$\begin{array}{l} FOR \;\; i = 1, 6 \;\; DO \\ FOR \;\; j = 1, 8 \;\; DO \\ x(i, j) := x(i-1, j) + x(i-1, j-1). \end{array} \tag{3}$$

Простір ітерацій цього циклу та залежності між ними зображено на рис. 2. Легко бачити, що кількість результуючих ітерацій циклу дорівнює **8**. Отже, кількість сімейств ітерацій теж дорівнює **8** і на підставі них формуємо паралельні гілки.

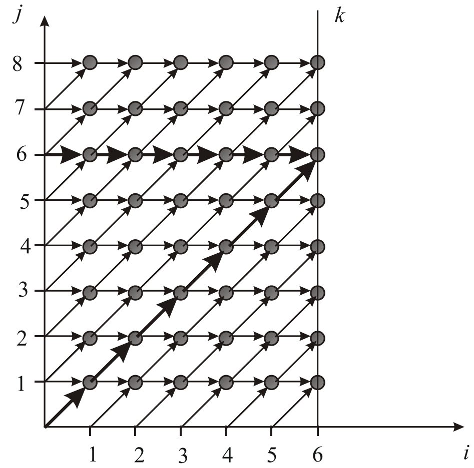

Рис. 2

Паралельна конструкція циклу (3) має вигляд:

$$\begin{array}{l} FOR\ \ k=1,8\ \ DO\ \ PAR \\ \{\ FOR\ \ i=1,6\ \ DO \\ \ \ FOR\ \ j=\max\{1,\ i+k-6\},\ k\ \ \ DO \\ \ \ x(i,\ j):=x(i-1,\ j)+x(i-1,\ j-1)\ \ \}. \end{array} \qquad (4)$$

<u>Приклад 2.</u>

Розглянемо інший приклад циклу.

$$\begin{array}{l} FOR\ \ i=1,4\ \ DO \\ \ FOR\ \ j=1,5\ \ DO \\ \ \ x(i,\ j):=2*x(i-1,\ j+1)+x(i-1,\ j-1)+x(i-2,\ j)/3. \end{array} \qquad (5)$$

Простір ітерацій цього циклу зображено на рис. 3, звідки видно, що кількість результуючих ітерацій цього циклу, а, отже, і кількість пірамід (трикутників) дорівнює **5**. На рис. 3 *а* жирними лініями виділено четверту піраміду, а на рис. 3 *б* темними кружечками зображено її ітерації, які впливають на результуючу (4, 4).

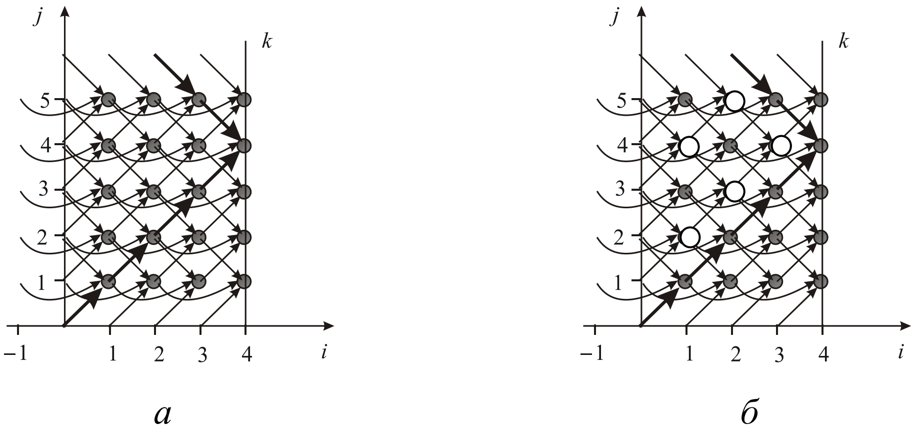

Рис. 3

Для результуючих ітерацій шукаємо найбільш відхилювані вектори і формуємо паралельні автономні гілки. Результуюча паралельна конструкція матиме вигляд:

$$\begin{array}{l} FOR\ \ k=1,5\ \ DO\ \ PAR \\ \{\ FOR\ \ i=1,4\ \ DO \\ \ \ l=\max\{1,i+k-4\} \\ FOR\ \ \ j=\{\ IF(a(k,i)=0)\ \ THEN\ \ l+1\ \ ELSE\ \ l\ \},\ \min\{5,\ k+4-i\},\ 2\ \ \ DO \\ \ \ x(i,\ j):=2*x(i-1,\ j+1)+x(i-1,\ j-1)+x(i-2,\ j)/3\ \ \}. \end{array} \qquad (6)$$

Тут $a(k,i)$ $(k=\overline{1,5};\ i=\overline{1,4})$ – деякий допоміжний масив, який дозволяє формувати паралельні гілки, залучаючи виключно ітерації, які впливають на кожну результуючу ітерацію:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

<u>Приклад 3.</u>

Розглянемо ще один приклад циклу.

$$\begin{array}{l} FOR\ \ i=1,4\ \ DO \\ \ FOR\ \ j=1,6\ \ DO \\ \ \{\ x(i,\ j):=x(i-1,\ j+2)**2 \\ \ \ y(i,\ j):=y(i-1,\ j+1)*3+10\ \}. \end{array} \tag{7}$$

Простір ітерацій цього циклу зображено на рис. 4. Неважко встановити, що кількість результуючих ітерацій дорівнює **9**. Отже, кількість автономних пірамід (трикутників) теж дорівнює **9**.

Результуюча паралельна конструкція має вигляд:

$$\begin{array}{l} \ FOR\ \ k=1,9\ \ DO\ \ PAR \\ \{\ FOR\ \ i=1,4\ \ DO \\ \{\ j_1=\max\{1,\ k-i+1\},\ \ j_2=\min\{6,\ 2k-2i+1\} \\ \ IF(\ j_1\le j_2)\ \ THEN\ \ \{ \\ \ \ FOR\ \ j=j_1,\ j_2\ \ DO \\ \ \{\ x(i,\ j):=x(i-1,\ j+2)**2 \\ \ \ y(i,\ j):=y(i-1,\ j+1)*3+10\ \ \}\ \ \} \\ \ \ \}\ \ \}. \end{array} \tag{8}$$

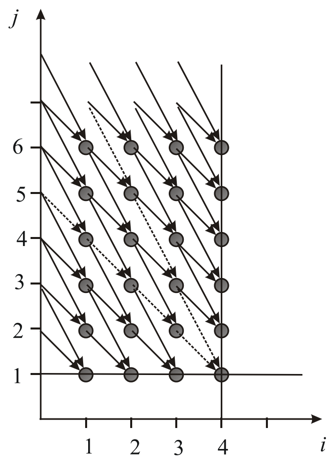

Рис. 4

Недолік методу пірамід та можливості його усунення.

Головним недоліком методу пірамід є його *неекономність*, причиною якої є *дублювання* обчислень у різних пірамідах. Стосовно конструкції (2) легко оцінити, що виконання кожної ітерації $(i,\ j)$ за умови нехтування «крайовими ефектами» здійснюється i_t разів, де $i_t = [(\left|f_2\right| / f_1 + g_2 / g_1)(r_1 - i)] + 1$. Звичайно, у такому випадку виникає проблема зменшення частки ітерацій, які дублюються. Одним із шляхів вирішення цієї проблеми є звуження пірамід шляхом ігнорування деяких зв'язків, які найбільш «відхиляються» та реалізація цих зв'язків за допомогою спеціальних операторів обміну (або способів обміну). Один із таких *способів* організації обмінів полягає в *конвеєрному запуску* «обрізаних» пірамід.

Вправа для самостійної роботи.

На підставі методу пірамід розпаралелити виконання таких циклів:

а) $FOR\ \ i = 1,\ 3\ \ DO$
$FOR\ \ j = 1,\ 5\ \ DO$
$\{\ x(i,\ j) := x(2i - 4,\ j - 1) + 4$
$z(i,\ j) := z(i - 1,\ j - 1) + z(i - 1,\ j + 2)\ \}$

б) $FOR\ \ i = 1,\ 4\ \ DO$
$FOR\ \ j = 1,\ 10\ \ DO$
$x(i,\ j) := (x(i - 1,\ j) + x(i - 1, j + 1)) ** 0.5$

в) $FOR\ \ i = 1,\ 5\ \ DO$
$FOR\ \ j = 1,\ 6\ \ DO$
$x(i,\ j) := (x(i - 1,\ j) - x(i,\ j - 1) + x(i - 2,\ j)) * 3$