1. Класифікація подій. Класичне поняття ймовірності (комбінаторна ймовірність).

- Випадкова (стохастична) подія – якщо при певній сукупності умов вона може відбу ись, а може і не відбутись.

- Масова подія – сукупність умов, які її породжують можна повторити безліч раз.

- Протилежна подія до події А полягає в тому. що подія А не відбувається.$\overline{u} = v$

- Об'єднання (сума) подій А і В – подія яка полягає в тому, що відбувається або А, або В,

або А і В одночасно. Позначається $A + B$, $A \cup B$.

- Суміщення (добуток) подій А і В – подія яка полягає в тому, що відбувається і А, і В

одночасно. Позначається $A \cdot B$, $A \cap B$.

- Бувають випадки, коли ймовірність появи деякої події А залежить від виконання іншої події Б. Наприклад, поява події B може змінити сукупність умов Б, що породжує нову повну сукупність подій, конкретизує її; або (і) після цього змінюється множина сприятливих подій

для появи події А. Ймовірність появи події А в цьому випадку називається умовною ймовірністю і позначається $P(A/B)$.

- Еквівалентні події – якщо поява кожної з них супроводжується появою іншої. $A + \overline{A} = u, A \cdot \overline{A} = v$.

- Несумісні – якщо їх добуток є неможливою подією. $A \cdot B = v$.

- Повна система подій – якщо вони попарно несумісні, а в об'єднанні – вірогідна подія.

Події $A_1, A_2, \dots, A_n$ називаються сприятливими для події А, якщо вони попарно несумісні, а їх об'єднання дає подію А.

Якщо рівноможливі події $E_1, E_2, \dots, E_n$ утворюють повну сукупність несумісних події, і з них деякі є сприятливими для події А, то ймовірністю події А є відношення кількості сприятливих для А подій до кількості подій в повній сукупності.

2. Теореми про ймовірність суми подій.

Т. Ймовірність появи несумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій: P(A+B) = P(A) + P(B), якщо A·B=V.

Доведення: Нехай повна сукупність рівно можливих несумісних подій складається з n елементарних подій. Нехай А розпадається на k сприятливих подій, В – на m сприятливих подій. Оскільки А і В несумісні, то немає подій, які сприятливі для А і В одночасно. Тому P(A+B) = (k+m)/n =k/n + m/n = P(A) + P(B).

Т. Ймовірність суми двох довільних подій рівна сумі їх ймовірностей мінус ймовірність їх суміщення. P(A+B) = P(A) + P(B) – P(A·B).

Доведення: з діаграм Вена. (або алгебраїчно через суму несумісних). ■

3. Умовні ймовірності (ймовірності добутку подій).

Бувають випадки, коли ймовірність появи деякої події А залежить від виконання іншої події Б. Наприклад, поява події B може змінити сукупність умов Б, що породжує нову повну сукупність подій, конкретизує її; або (і) після цього змінюється множина сприятливих подій для появи події А. Ймовірність появи події А в цьому випадку називається умовною ймовірністю і позначається $P(A/B)$.

Якщо ймовірність виконання події А залежить від виконання іншої події В, то ймовірність появи події А в цьому випадку називається умовною ймовірністю. P(A/B) – ймовірність події А, за умови, що відбулась подія В.

Т. Ймовірність добутку двох подій рівна добутку ймовірності однієї на умовну ймовірність другої, за умови, що відбулась перша: P(A·B) = P(A) · P(B/A) = P(B) · P(A/B).

Доведення: Нехай події $E_1, E_2, \dots, E_n$ утворюють повну сукупність рівноможливих подій, з яких r сприятливі для А, s – для В, m – для А і В одночасно. Тоді P(A·B) = m/n = (m/s) · (s/n) = P(B) ·P(A/B)   P(A·B) = m/n = (m/r) · (r/n) = P(A) ·P(B/A). ■

4. Незалежні події.

Озн. Якщо подія А не змінює ні сукупності умов S, ні сприятливих подій для події В, то *подія В* називається *незалежною від події А*. Формальніше можна сказати так: подія А незалежна від події В, якщо P(A/B) = P(A). Аналогічно: подія В незалежна від події А, якщо P(B/A) = P(B). Отже, з теореми про добуток подій отримуємо, що для незалежних подій P(A·B) = P(A) ·P(B).

Т. Якщо подія А не залежить від події В, то і подія В не залежить від події А.

Доведення: Якщо P(A/B) = P(A), то P(A·B) = P(B) · P(A/B) = P(A) ·P(B) = P(A) ·P(B/A) => P(B) = P(B/A) => В не залежить від А. ■

5. Незалежні в сукупності події.

Якщо подій більше двох, то вони можуть бути попарно залежні, незалежні, можуть зустрічатись ті чи інші види залежності в підмножинах подій.

Озн. *Події $A_1, A_2, \dots, A_n$* називаються *незалежні в сукупності*, якщо для будь-якої підмножини їх $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_k}$ виконується P($A_{i_1} \cdot A_{i_2} \cdot \dots \cdot A_{i_k}$) = P($A_{i_1}$) · P($A_{i_2}$) · … · P($A_{i_k}$).

Це означає, що події можуть бути попарно незалежні, а в сукупності – ні. Однак, коли події незалежні в сукупності, то вони й попарно незалежні.

6. Формула повної ймовірності.

Повна сукупність несумісних подій – якщо вони попарно несумісні і хоча б одна з них точно відбувається.

Т. Нехай задана повна сукупність несумісних подій $H_1, H_2, \dots, H_n$ і подія А може відбутись лише в парі з однією з цих подій. Тобто: А = H_1·A + H_2·A + … + H_n·A. Тоді $H_1, H_2, \dots, H_n$ називаються гіпотезами, а ймовірність події А обчислюється так: $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A/H_i)$.

Доведення: Якщо події $H_1, H_2, \dots, H_n$ попарно несумісні, то попарно несумісні будуть і події H_i·A (i=1..n). Тому з теореми про добуток несумісних подій маємо:

$P(A) = P(\sum_{i=1}^{n} H_i \cdot A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i \cdot A)$, а з теореми про ймовірність залежних подій:

$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i \cdot A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A/H_i)$. Це і є формула повної ймовірності. ■

7. Формула гіпотез (Байєса).

Нехай задана повна сукупність несумісних подій $H_1, H_2, \dots, H_n$, і подія А може відбутись лише в парі з однією з цих подій. Тобто: А = H_1·A + H_2·A + … + H_n·A. Тоді $H_1, H_2, \dots, H_n$, називаються гіпотезами. Нехай тепер відомо, що подія А відбулась, обчислимо $P(H_i/A)$, тобто уточнити ймовірності гіпотез, виходячи з того факту, що подія А відбулась.

З теореми про ймовірність залежних подій маємо: $P(H_i) \cdot P(A/H_i) = P(A) \cdot P(H_i/A) (i = \overline{1, \dots, n})$.

Звідси, і з формули повної ймовірності отримуємо: $P(H_i/A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A/H_i)}{P(A)}$, $P(H_i/A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A/H_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(H_k) \cdot P(A/H_k)}, (i = \overline{1, \dots, n})$. Остання формула і називається *формулою Байєса*. Ймовірності $P(H_i)$ називаються *апріорні*, а $P(H_i/A)$ – *апостеріорні*.

8. Послідовність незалежних спроб. Схема Бернуллі. Формула Бернуллі.

Реалізацією сукупності умов S, в результаті якої може відбутися деяка подія Те що нас цікавить, будемо називати *експериментом, спробою, спостереженням*. Нехай здійснено послідовно n спроб, тобто маємо впорядковану множину, послідовність спроб. В і-тій спробі може появитися одна з подій $A_1^{(i)}, A_2^{(i)}, \dots, A_{k_i}^{(i)}$ $(i = \overline{1,n})$. Тому результат всіх спостережень є добутком $A_{j_1}^{(1)} \cdot A_{j_2}^{(2)} \dots A_{j_n}^{(n)}$.

Озн. *Кажемо, що маємо послідовність незалежних випробувань, якщо для будь-яких допустимих наборів індексів $j_1, j_2, \dots, j_n$ має місце рівність*

$P\left(A_{j_1}^{(1)} \cdot A_{j_2}^{(2)} \dots A_{j_n}^{(n)}\right) = P(A_{j_1}^{(1)}) \cdot P(A_{j_2}^{(2)}) \dots P(A_{j_n}^{(n)})$.

Нехай в кожній спробі схеми незалежних випробовувань може відбутися або деяка подія А, або $\bar{A}$, причому подія А відбувається з постійною ймовірністю

Для знаходження ймовірності того, що в схемі Бернуллі після n випробувань подія А відбулась s разів використовують формулу: p (0<p<1), тобто *P(A)=p, P($\bar{A}$)=q=1-p.* Така схема незалежних випробувань називається найпростішою схемою незалежних випробувань, схемою Бернуллі. Для схеми Бернуллі всі k_i рівні двом. Очевидно, число можливих послідовностей рівне 2^n.

$b(s,n,p) = C_n^s p^s q^{n-s}$ $(s = \overline{0,n})$ Цю формулу називають формулою Бернуллі.

9. Біномний розподіл.

Фіксований набір чисел (ймовірностей), сума яких = 1 називають розподілом ймовірностей. Якщо маємо схему Бернуллі, то для чисел s=0…n можемо поставити у відповідність ймовірності появи s подій А у n спробах. З формули біному Ньютона маємо:

$$(p+q)^n = \sum_{s=0}^{n} C_n^s p^s \, q^{n-s} = \sum_{s=0}^{n} b(s,n,p)$$

Оскільки p+q = 1, то ми отримали розподіл ймовірностей. Цей розподіл називається біномним розподілом. Аналогічно можна отримати і від'ємний біномний розподіл, якщо числам m=1..n поставити у відповідність ймовірності того, що подія А у n-ій спробі з'явилась m-ий раз:

$$P_n(\mu = m) = C_{n-1}^{m-1} p^m q^{n-m}, (m = \overline{1,n})$$

10. Найімовірніше число успіхів у схемі Бернуллі.
Нехай потрібно знайти найбільше число в послідовності b(0,n,p), b(1,n,p), … ,b(n,n,p). Це число буде відповідати найімовірнішому числу успіхів в схемі Бернуллі. Розглянемо для цього відношення двох послідовних чисел b(s-1,n,p) і b(s,n,p): $\frac{b(s,n,p)}{b(s-1,n,p)} = \frac{C_n^s p^s q^{n-s}}{C_n^{s-1} p^{s-1} q^{n-1+1}} = 1 + \frac{(n+1)p-s}{sq}$

Отже, коли s<(n+1)p наступний член більший від попереднього s=[(n+1)p]

коли s>(n+1)p наступний член менший від попереднього s=[(n+1)*p]

коли s=(n+1)p маємо два однакових члени послідовності
s1=(n+1)ps2=np-q

11. Локальна теорема Муавра-Лапласа.
Т. *Нехай в схемі Бернуллі ймовірність появи події A = p (0<p<1), тоді:* $\lim_{n\to\infty}(b(s,n,p):(\frac{1}{\sqrt{npq}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{t_{sn}^2}{2}})) = 1$, *де* $t_{sn} = \frac{s-np}{\sqrt{npq}}$ *при цьому s повинно бути таким, щоб* $-\infty < a \le t_{sn} \le b < +\infty$.

Доведення: використаємо формулу Стірлінга: $x! \sim \sqrt{2\pi\cdot x}\cdot x^x\cdot e^{-x}\cdot e^{\frac{\theta_x}{12x}}, (0 < \theta_x < 1)$

З означення t_{sn} і умови, що t_{sn} обмежене випливає, що при n → INF маємо, що s→INF і n-s → INF. Дійсно: $s = t_{sn}\cdot\sqrt{npq} + np$. Тоді з того, що t_{sn} обмежене маємо, що при n → INF s також → INF. Аналогічно $n - s = nq - t_{sn}\cdot\sqrt{npq}$.

Тому при n→INF можемо по формулі Стірлінга розкласти n!, s!, (n-s)!. Тоді

$$b(s,n,p) = C_n^s p^s q^{n-s} = \frac{n!}{s!\,(n-s)!}p^s q^{n-s} =$$
$$= \frac{\sqrt{2\pi\cdot n}\cdot p^s\cdot q^{n-s}\cdot n^n\cdot e^{-n}\cdot e^{\frac{\theta_n}{12n}}}{\sqrt{2\pi\cdot s}\cdot s^s\cdot e^{-s}\cdot e^{\frac{\theta_s}{12s}}\cdot\sqrt{2\pi\cdot(n-s)}\cdot(n-s)^{n-s}\cdot e^{-(n-s)}\cdot e^{\frac{\theta_{n-s}}{12(n-s)}}}$$

Тепер розглянемо

$$b(s,n,p):\left(\frac{1}{\sqrt{npq}\sqrt{2\pi}}\cdot e^{\frac{-t_{sn}^2}{2}}\right) = \frac{\sqrt{2\pi n}\cdot p^s\cdot q^{n-s}\cdot n^n\cdot e^{-n}\cdot e^{\frac{\theta_n}{12n}}\sqrt{npq}\cdot\sqrt{2\pi}\cdot e^{\frac{t_{sn}^2}{2}}}{\sqrt{2\pi s}\cdot s^s\cdot e^{-s}\cdot e^{\frac{\theta_n}{12s}}\sqrt{2\pi\cdot(n-s)}\cdot(n-s)^{n-s}\cdot e^{-(n-s)}\cdot e^{\frac{\theta_{n-s}}{12(n-s)}}} =$$
$$\sqrt{\frac{n^2pq}{s(n-s)}}\cdot e^{\left(\frac{\theta_n}{12n}-\frac{\theta_s}{12s}-\frac{\theta_{n-s}}{12(n-s)}\right)}\left(\frac{np}{s}\right)^s\left(\frac{nq}{n-s}\right)^{n-s}e^{\frac{t_{sn}^2}{2}}.$$

Нехай $\alpha_n = \sqrt{\frac{n^2pq}{s(n-s)}}, \beta_n = e^{\left(\frac{\theta_n}{12n}-\frac{\theta_s}{12s}-\frac{\theta_{n-s}}{12(n-s)}\right)}, \gamma_n = \left(\frac{np}{s}\right)^s\left(\frac{nq}{n-s}\right)^{n-s}$.

Оцінимо α_n, β_n, γ_n.

$a_n^2 = \frac{np}{s}\cdot\frac{nq}{n-s} = \left(\frac{s}{np}\right)^{-1}\left(\frac{n-s}{nq}\right)^{-1} = \left(1 + t_{sn}\sqrt{\frac{q}{np}}\right)^{-1}\left(1 - t_{sn}\sqrt{\frac{p}{nq}}\right)^{-1}$, отже $a_n = 1 + O(\frac{1}{\sqrt{n}})$.

$$|\ln\beta_n| = \left|\frac{\theta_n}{12n} - \frac{\theta_s}{12s} - \frac{\theta_{n-s}}{12(n-s)}\right| \le \frac{1}{12}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{s}+\frac{1}{n-s}\right) = O(\frac{1}{n})$$

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots = 1 + O(x)$, отже $b_n = 1 + O(\frac{1}{n})$

Оцінивши $\ln\gamma_n = -s\ln\frac{s}{np} - (n-s)\ln\frac{n-s}{nq} + \frac{t_{sn}^2}{2}$, отримаємо, що $g_n = 1 + O(\frac{1}{\sqrt{n}})$.
На основі цих оцінок отримаємо потрібне. ■

12. Теорема Пуасона.
Локальна теорема Муавра-Лапласа дає досить зручне наближення для b(s,n,p). Але, при p близьких до 0 або 1 вона дає значну похибку. Тому краще використовувати наближення Пуасона.

Теорема Пуассона. *Нехай у кожній схемі послідовності схем Бернуллі* $0<p_n<1$ *і* $n\cdot p_n=\lambda_n$, *причому* $\lim_{n\to\infty}\lambda_n = \lambda < \infty$. *Тоді* $\lim_{n\to\infty} b(s,n,p):\left(\frac{\lambda^s}{s!}\cdot e^{-\lambda}\right) = 1$.

Доведення: з формули Бернуллі:

$$b(s,n,p_n) = C_n^s p_n^s q_n^{n-s} = \frac{n!}{s!\,(n-s)}p_n^s(1-p_n)^{n-s} =$$
$$= \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-(s-1))}{s!}\left(\frac{\lambda_n}{n}\right)^s\cdot\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^{-s} =$$
$$= \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-s+1)}{n^s}\cdot\frac{\lambda_n^s}{s!}\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^n\cdot\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^{-s} =$$
$$= 1\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{s-1}{n}\right)\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^{-s}\frac{\lambda_n^s}{s!}\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^n$$

Перейшовши до границі, при n → INF, маємо, що $b(s,n,p) \approx \frac{\lambda^s}{s!}e^{-\lambda}$. ■

13. Інтегральна теорема Муавра-Лапласа.
Теорема Муавра-Лапласа. *Нехай в схемі Бернуллі 0<p<1, m – число успіхів при n незалежних випробуваннях. Тоді:* $\lim_{n\to\infty} P\left(a < \frac{\mu-np}{\sqrt{npq}} < b\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{\frac{-x^2}{2}}dx$.

Доведення: З локальної теореми Муавра-Лапласа:

$P\left(a < \frac{\mu-np}{\sqrt{npq}} < b\right) = \sum_{a<\frac{s-np}{\sqrt{npq}}<b}\frac{1}{\sqrt{npq}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{\frac{-t_{sn}^2}{2}}\left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) = \sum_{a<t_{sn}<b}\Delta t_{sn}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t_{sn}^2}{2}} + O(\frac{1}{\sqrt{n}})$.■

14. Практичні застосування інтегральної теореми Муавра-Лапласа. Теорема Бернуллі.
При великих значеннях n в схемі Бернуллі з великим ступенем точності можна вважати:

$P\left(a < \frac{\mu-np}{\sqrt{npq}} < b\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{\frac{-x^2}{2}}dx = \Phi(b) - \Phi(a)$, де Φ(x) = той інтеграл від 0 до x

Теорема Бернуллі. *Нехай m – число успіхів в схемі Бернуллі, а ймовірність успіху в кожній спробі (0<p<1). Тоді:* $\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{\mu}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1$, *для будь-якого числа ε >0.*

Доведення:З теоретичного висновку інтегральної теореми Лапласа маємо:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{\mu}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 2\lim_{n\to\infty}\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) + \lim_{n\to\infty}O(\frac{1}{\sqrt{n}}) = 2\Phi(+\infty) = 2\cdot 0.5 = 1.$$ ■

15. Геометричні ймовірності. Задача Бюффона.

Все різноманіття задач, в яких повна сукупність подій не є скінченною, вкладається в таку схему. Нехай в n- мірному евклідовому просторі дано область D обмеженої міри, і в ній розташовано підобласть d. В області D навмання фіксуємо точку M. Ймовірність того, що точка M попаде в область d дорівнює відношенню міри області d до міри області D. $P(M \in d) = \frac{mesd}{mesD}$. Тут d – область сприятливих елементарних подій, D – область всіх можливих елементарних подій. Така визначена ймовірність називається геометричною ймовірністю.

Задача Бюффона. Площину розграфили паралельними прямими, між якими відстань $2a$. На цю площину кидають голку довжини $2l$ $(l < a)$. Яка ймовірність, що голка перетне якусь пряму? Розв'язок: голка матиме 2 незалежні координати: $0 < x < a$ – відстань донайближчої прямої до центру голки, $0 < \varphi < \pi$ – кут між напрямком прямої і напрямком голки. Область всіх можливих події рівна $x\cdot a$. Голка перетне пряму, коли $x \le l\cdot\sin(\varphi)$. Область сприятливих подій обмежена стороною прямокутника довжини π та синусоїдою. Тому $P(A) = \frac{mes\ d}{mes\ D} = \frac{\int_0^\pi l\sin\varphi d\varphi}{a\cdot\pi} = \frac{2l}{\pi\cdot a}$.

16. Аксіоматика теорії ймовірності.

Це система аксіом разом з основними об'єктами та співвідношеннями між ними. Вимагається несуперечність (якщо з неї неможливо логічно вивести два твердження, які суперечать одне одному), незалежність (якщо жодна з цих аксіом не є наслідком з інших аксіом цієї ж системи) та повнота системи аксіом(це система аксіом, яких є достатньо для побудови тої чи іншої теорії). Для обчислення ймовірності використовують або класичне поняття, або геометричні ймовірності, або статистичні дані. Перші два способи називаються апріорними, а останній – апостеріорним. Для введення єдиного поняття ймовірності Колмогоров ввів наступні принципи і аксіоми:

Перший принцип: Кожна ситуація S породжує повну систему подій U.

Аксіома 1.1: Якщо A належить U, то і Ā належить U.
Аксіома 1.2: Якщо A = B і A належить U, то і B належить U.
Аксіома 1.3: Якщо A належить U, B належить U, то і A + B належить U.
Якщо U задовольняє 1.1-1.3, то це – фазовий простір.

Другий принцип: В фазовому просторі можна задавати відображення.

Аксіома 2.1: Кожній події A ставиться у відповідність певне число P(A) ≥ 0. Якщо A – достовірна, то P(A) = 1.
Аксіома 2.2: A = B => P(A) = P(B).
Аксіома 2.3: A·B = V => P(A+B) = P(A) + P(B).
Фазовий простір задовольняє 2.1-2.3 => імовірнісний простір.

17. Випадкові змінні, функції розподілу, їх властивості.

Озн. *Випадковою величиною* називають сукупність випадкових подій з заданим розподілом їх ймовірностей. Отже випадкова змінна приймає свої значення з певними ймовірностями, які в сукупності утворюють розподіл ймовірностей. Ймовірність того, що випадкова змінна ξ набуває значення не більше ніж x, називається функцією розподілу цієї випадкової змінної і позначається F(x). $F(x) = P(\xi \le x)$.

Властивості: 1) $0 < F(x) < 1$; 2) $F(-\infty) = 0$; 3) $F(\infty) = 1$; 4) $P(a < \xi \le b) = F(b) - F(a)$;

5) $P(x_1 < \xi \le x_2) = F(x_2) - F(x_1) \ge 0$; 6) $\lim_{\varepsilon\to 0} F(x+\varepsilon) = F(x+0) = F(x)$;

Функція розподілу може мати не більше ніж зчислену множину розподілів і лише скінченних.

18. Класи випадкових змінних

Озн. Випадкова змінна називається *дискретною*, якщо множина значень, які вона приймає зліченна, або скінченна. Випадкова змінна називається *абсолютно неперервною*, якщо її функція розподілу має вигляд $F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)dt$, тут p(x) – густина розподілу.

Властивості густини розподілу: 1) $p(x) \geq 0;$ 2) $P(a < \xi \leq b) = \int_{a}^{b} p(x)dx;$ 3) $\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1;$ 4) $p(-\infty) = 0; p(+\infty) = 0$ (випливає з необхідності умови збіжності інтеграла).

19. Випадкові вектори. Незалежні випадкові вектори.

Озн. Впорядкована сукупність випадкових змінних $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n$ називається *n-вимірною випадковою змінною ξ, або випадковим вектором.*
n-вимірною функцією розподілу називається ймовірність виконання системи нерівностей $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(\xi_1 \leq x_1, \xi_2 \leq x_2, \dots, \xi_n \leq x_n)$
Якщо всі значення вектора дискретні, то він дискретний.
Якщо функція розподілу має вигляд $F(x_1, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} p(t_1, \dots, t_n)\, dt_1 \dots dt_n$, то вектор абсолютно неперервний.
Випадкові вектори $(\xi_1,\dots\xi_k)$ та $(\mu_1,\dots,\mu_n)$ незалежні, якщо для довільних значень $(x_1,\dots,x_k)$
і $(y_1,\dots y_n)$ виконується співвідношення $P(\xi_1 \leq x_1, \dots, \xi_k \leq x_k;\ \mu_1 \leq y_1, \dots, \mu_n \leq y_n) = P(\xi_1 \leq x_1, \dots, \xi_k \leq x_k) \cdot P(\mu_1 \leq y_1, \dots, \mu_n \leq y_n)$.

20. Перетворення ймовірностей. Приклад.

Нехай випадковий вектор $\xi(\xi_1, \dots, \xi_n)$ має щільність розподілу $P(x_1, \dots, x_n)$ і задано k функцій від вектора ξ. Знайти щільність розподілу.

Нехай випадковий вектор $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_n)$має щільну розподілену $\rho(x_1, \dots, x_n)$, нехай задано k функцію від вектора ρ

$$\begin{cases} h_1 = h_1(\rho_1, \dots, \rho_n) \\ \quad\vdots \\ h_k = h_k(\rho_1, \dots, \rho_n) \end{cases} \text{k – функція.}$$

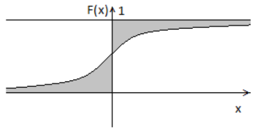
Утворимо новий вектор $h = (h_1, \dots, h_k)$. Знайдемо щільність розподілу вектора $h = (h_1, \dots, h_k)$? $g = (g_1, \dots, g_k)$ $P(y_1, \dots, y_k) = P\{h_1 \leq y_1, \dots, h_k \leq y_k\} = P(h_1(\rho_1, \dots, \rho_n) \leq y_1, \dots, h_k(\rho_1, \dots, \rho_n) \leq y_k) = P\{(\rho_1, \dots, \rho_n) \in D\} = \int \dots \int_D P(t_1, \dots, t_n)dt_n \dots dt_1$.

$g = (g_1, \dots, g_k) = \frac{\partial^2 P^D(y_1,\dots,y_k)}{\partial y_1 \dots \partial y_k}$.

21. Числові характеристики випадкових змінних.

Нехай дискретна випадкова змінна може переймати значення $x_1, \dots, x_n$з ймовірностями $p_1, \dots, p_n$. Тоді математичне сподівання називається: $E(\xi) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$; у випадку абсолютно неперервної випадкової змінної $E(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx$.

Механічна інтерпретація: центр мас множини точок з масами p_i і координатами вздовж x_i..



Геометрична інтерпретація: $S_1(\text{зверху}) - S_2(\text{знизу})$.

Властивості математичного сподівання: А) $E(C) = C;$ Б) $|E(x)| < E(|x|);$ В) $E(cx) = cE(x);$ Г) $E(x + y) = E(x) + E(y);$ Д) $E(xy) = E(x)E(y);$

Дисперсія: $D(x) = E\big(x - E(x)\big)^2 = E(xx) - E\text{^}2(x)$.

Властивості дисперсії: А) $D(x) \geq 0;$ Б) $D(cx) = cD(x);$ В) $D(x + y) = D(x) + D(y);$ Г) $D(C) = 0;$ Д) $D(xy) = D(x)D(y)$.

22. Математичні сподівання.

Озн. Математичне сподівання випадкової змінної x, якщо воно існує називається $E(\xi) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$.

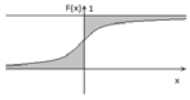
Озн. Математичне сподівання випадкової змінної x, якщо воно існує,називається $E(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx$.

23. Механічна інтерпретація математичного сподівання.

Якщо випадкова змінна ξ дискретна і може приймати значення $x_1, \dots, x_n$ відповідно з ймовірностями $p_1, \dots, p_n$то $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.Звідси випливає $E(\xi) = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i p_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i}$. Звідси зауважимо, що $p_i > 0$,і тому ми можемо трактувати їх як маси, зосереджені в точках x_iосі абсцис.

Якщо випадкова змінна x абсолютно неперервна і $p(x)$ її густина, то $\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1$. То звідси слідує наступне $E(\xi) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx}$. Отже за цією формулою обчислюємо абсцису центру абсолютної неперервної маси зосередженої вздовж осі абсцис так, що густина маси в кожній точці з абсцисою x рівна $p(x)$

24. Геометрична інтерпретація математичного сподівання.



Озн. *Геометрична інтерпретація математичного сподівання* - розподіл випадкових змінних математичного сподівання рівне різниці площ обмежених віссю ординат, прямою $y = 1$ і графік $y = f(x)$на додатковій частинні осі і віссю ординат відносно абсцис і $y = f(x)$ на лівій частин і лівої $M(\xi) = S_2 - S_1$, якщо змінна абцис пере направимо то за означенням: $M(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx = \log_{a\to-\infty} \int_{a}^{+\infty} \frac{xp(x)dx}{dF(x)} + \log_{b\to+\infty} \int_{-\infty}^{b} \frac{xp(x)dx}{dF(x)} = \log_{a\to-\infty}[\,xF(x)|_{a}^{0} - \int_{a}^{0} F(x)dx] + \log_{b\to+\infty}[\,xF(x)|_{0}^{b} - \int_{0}^{b} F(x)dx] = \log_{a\to-\infty} \int_{a}^{0}(F(x) - F(a))dx + \log_{b\to+\infty} \int_{0}^{b}\big(F(b) - F(x)\big)dx = -\int_{-\infty}^{0} F(x)dx + \int_{0}^{+\infty}\big(1 - F(x)\big)dx = -S_1 + S_2$.

25. Властивості математичного сподівання.

А) $E(C) = C;$ Б) $|E(x)| < E(|x|);$ В) $E(cx) = cE(x);$ Г) $E(x + y) = E(x) + E(y);$ Д) $E(xy) = E(x)E(y)$.

26. Дисперсія та її властивості.

Дисперсія: $D(x) = E\big(x - E(x)\big)^2 = E(xx) - E\text{^}2(x)$. Властивості дисперсії: А) $D(x) \geq 0;$ Б) $D(cx) = cD(x);$ В) $D(x + y) = D(x) + D(y);$ Г) $D(C) = 0;$ Д) $D(xy) = D(x)D(y)$.

27. Закон великих чисел. Нерівність Маркова, Чебишева.

Озн. *Законом великих чисел* називається довільне твердження в якому йдеться про деяку масову випадкову подію, кожна з яких має на основну незначний вплив.

Нерівність Маркова. Нехай дано E(ξ) <+∞, a> 0. Тоді: P{ $\xi \leq$ a}≥1-E ξ/a.
Доведення: P{ $\xi \leq$ a}=$\int_{0}^{a} dF(X)$=$\int_{0}^{\infty} dF(X)$-$\int_{a}^{\infty} dF(X)$= 1 - $\int_{a}^{\infty} dF(X)$та $\int_{a}^{\infty} dF(X) \leq \int_{a}^{\infty} \frac{x}{a} dF(X) \leq \frac{1}{a} \int_{0}^{\infty} xdF(X)$=$\frac{E\xi}{a}$.

Нерівність Чебишева. Нехай випадкова змінна ξ має D(ξ)<+∞, тоді для довільної $\xi > 0$:P{| ξ - Eξ |≤ ε}≥1-$\frac{D\xi}{\varepsilon^2}$. ***Доведення:*** P{|$\xi$-E$\xi$|≤ ε}=P{($\xi - \mu(\xi))^2 < \varepsilon^2$}≥1-$\frac{\mu(\xi - \mu(\xi))^2}{\varepsilon^2}$ = 1 - $\frac{D(\xi)}{\varepsilon^2}$. ■

28. Закон великих чисел у формі Чебишева.

Т. Нехай$\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n, \dots$ послідовність попарно незалежних випадкових змінних, що мають дисперсії обмежені в сукупності,тобто, $D\xi_i \leq C, (i = 1,2 \dots)$,де C деяка константа. Тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$

$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E\xi_i\right| \leq \varepsilon\right) = 1.$ ***Доведення:*** Розглянемо випадкову змінну $\eta = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi_i$.Знайдемо її математичне сподівання та дисперсію: $E\eta = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi_i\right) = \frac{1}{n}E(\sum_{i=1}^{n} \xi_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E\xi_i, D(\eta) = D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi_i\right) = \frac{1}{n^2}D(\sum_{i=1}^{n} \xi_i)$.

Оскількиξ_i попарно незалежні,то $D(\eta) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} D\xi_i \leq \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} C = \frac{C}{n}$, тобто, $D(\eta) \leq \frac{C}{n}$. Отже,згідно нерівності Чебишова: $P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E\xi_i\right| \leq \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{D(\eta)}{\varepsilon^2} = 1 - \frac{C}{n\varepsilon^2}$.
Звідси $\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E\xi_i\right| \leq \varepsilon\right) = 1$. ■

29. Деякі наслідки Теореми Чебишова.
Правило середніх арифметичних

Нехай $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n, \dots$ – послідовність незалежних вимірювань з обмеженою точністю, тобто $D\xi_i \leq C, (i = 1,2 \dots)$, без систематичної похибки, тобто $E\xi_i = a, (i = 1,2 \dots)$. Тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$ $\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi_i - a\right| \leq \varepsilon\right) = 1$.

Доведення: Математичне сподівання змінної$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi_i$ буде рівним $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E\xi_i = \frac{1}{n}(E\xi_1 + \dots + E\xi_n) = \frac{1}{n}(a + \dots + a) = a$. Тому ця теорема є теоремою Чебишова. ■

Т. Пуассона Нехай в послідовності незалежних випробувань ймовірність появи події А в і-ому випробуванні дорівнює p_i $(i = 1,2 \dots)$, μ- кількість появи події А в цій схемі випробувань. Тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$ $\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{\mu}{n} - \frac{p_1 + p_2 + \dots + p_n}{n}\right| \leq \varepsilon\right) = 1$.

Доведення: Введемо в розгляд послідовність випадкових змінних

$$\xi_i = \begin{cases} 1, \text{якщо А відбулося в } i - \text{й спробі} \\ 0, \text{якщо в цій спробі А не відбулося.} \end{cases}$$

Тоді $\mu = \sum_{i=1}^{n} \xi_i, E\xi_i = 1 * p_i + 0 * (1 - p_i) = p_i, E{\xi_i}^2 = 1^2 * p_i + 0^2 * (1 - p_i) = p_i$.

Але ж $D(\xi_i)$ =$E(\xi_i)^2 - (E\xi_i)^2$. Тому $D\xi_i = p_i - {p_i}^2 \leq \frac{1}{4} = C$, (бо $0 \leq p_i \leq 1$).
Отже, виконуюються всі умови теореми Чебишова і тому $\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{\mu}{n} - \frac{p_1 + p_2 + \dots + p_n}{n}\right| \leq \varepsilon\right) = 1$.

Т. Маркова Нехай $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n$ – послідовність будь-яких випадкових змінних для яких існують дисперсії, причому $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n^2}D(\sum_{i=1}^{n} \xi_i)) = 0$.

Тоді має місце висновок теореми Чебишова. Дійсно: $P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E\xi_i\right| \leq \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E\xi_i\right)}{\varepsilon^2} = 1 - \frac{\frac{1}{n^2}D(\sum_{i=1}^{n} \xi_i)}{\varepsilon^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$. ■

30. Характеристична функція випадкової змінної

Характеристичну функцію випадкової змінної можна отримати, застосувавши до неї перетворення Фур'є.

Озн. *Характеристичною функцією випадкової змінної* ξ називається математичне сподівання випадкової змінної $e^{is\xi}$, $i = \sqrt{-1},\ s \in R$.

З означення математичного сподівання та того, що $\left|e^{is\xi}\right| = |\cos(sx) + isin(sx)| = \sqrt{cos^2(sx) + sin^2(sx)} = 1$ випливає, що характер завжди існує і, як правило, є комплексно значною функцією дійсного аргументу. $C(s) = E\left(e^{is\xi}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{is\xi} dF(x)$. Отже характер дискретної випадкової змінної ξ рівний $C(s) = \sum_{k=1} p_k\, e^{is\xi}$. Нехай абсолютно неперервна випадкова змінна ξ має густину $p(x)$. Тоді $C(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{is\xi} p(x)dx$.

31. Властивості характеристичних функцій.

1. $|C(s)| \leq 1$; 2. $C(0) = 1$; 3. Якщо випадкова змінна ξ має початковий момент m_k порядку *k*, то $m_k = \frac{C^{(k)}(0)}{i^k}$; 4. Якщо випадкова змінна має дисперсію, то $E(\xi) = \frac{1}{i}\Psi'(0); D(\xi) = -\Psi''(0)$де $\Psi\quad(s) = \ln C(s)$; 5. Лінійно перетворена змінна $\eta = a\xi + b$ де *a* і *b*– дійсні числа, має характер $C_\eta(s) = e^{ibs}C_\xi(as)$; 6. Характер суми незалежних випадкових змінних ξ та η дорівнює добутку характерів цих змінних. $C_{\xi+\eta}(s) = C_\xi(s)C_\eta(s)$; 7. Якщо $\xi_1, \xi_2, .., \xi_n$ незалежні однаково розподілені випадкові змінні, що мають характер $C(s)$, то характер їх середнього арифметичного $\eta = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \xi_k$ рівний $C_\eta(s) = (C\left(\frac{s}{n}\right))^2$.

32. Взаємно однозначна відповідність між функцією розподілу і характеристичною функцією.

$\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x} dx = \frac{\pi}{2} sign(a)$, де $sign(a) = \begin{cases} 1, a > 0 \\ 0, a = 0 \\ -1, a < 0 \end{cases}$

Покажемо, що $(V.P.)\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iax}}{ix} dx = \pi sign(a)$.

Доведення: $\lim\limits_{c\to+\infty} \int_{-c}^{c} \frac{e^{iax}}{ix} dx = \lim\limits_{c\to+\infty} (\int_{-c}^{0} \frac{e^{iax}}{ix} dx + \lim\limits_{c\to+\infty} \int_0^c \frac{e^{iax}}{ix} dx) = \lim\limits_{c\to+\infty} \int_{-c}^{c} \frac{e^{iax} - e^{-iax}}{ix} dx = 2\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin ax}{x} dx = \pi\ sign(a)$. ■

Озн. *Обмежник* – функція, яка на інтервалі $(a, b]$ = 1, а ззовні інтервалу = 0.

Озн. *Точковий обмежник* – функція, яка в одній точці = 1, а у всіх інших = 0.

Т. Нехай випадкова змінна ξ має функцію розподілу *F(x)* та характеристичну функцію *f(s)*. Тоді приріст функції розподілу на $(a, b]$, де $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, рівний $F(b) - F(a) = (V.P)\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-is(a+0)} - e^{-is(b+0)}}{2\pi is} f(s)ds$.

Доведення: $\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{(V.P.)\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-is(a-x+0)} - e^{-is(b-x+0)}}{2\pi is} ds\right\} dF(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{sgh(x-a-0) - sgh(x-b-0)}{2} dF(x) = \int_a^b dF(x) = F(b) - F(a)$. ■

Т. Характеристична функція однозначно визначає свою функцію розподілу, причому

$$F(x) = \lim_{a\to-\infty}(V.P.)\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-is(a+0)} - e^{-is(x+0)}}{2\pi is} f(s)ds.$$

Доведення: так, як і в попередній теоремі, але $b = x$ і $a \to -\infty$. ■

33. Теореми про суми характеристичних функцій.

Т. Сума незалежних біномно розподілених випадкових змінних – біномно розподілена змінна, причому: $B(n_1, p) +..+ B(n_k, p) = B(n_1 +..+ n_k, p)$.

Доведення: Нехай $B(m, p)$ та $B(n, p)$ незалежні. Характери цих змінних відповідно $(pe^{is} + q)^m$та $(pe^{is} + q)^n$. $B(m, p) + B(n, p) = (pe^{is} + q)^m(pe^{is} + q)^n = (pe^{is} + q)^{n+m} = B(n + m, p)$. ■

Т. Сума пуасонівсько розподілених незалежних випадкових змінних буде пуасонівсько розподіленою змінною, причому: $p(\lambda_1) +..+ p(\lambda_k) = p(\lambda_1 +..+ \lambda_k)$.

Доведення: Нехай $p(\lambda),\ p(\mu)$ незалежні випадкові змінні розподілені за законом Пуассона. $e^{\lambda(e^{is}-1)}$ та $e^{\mu(e^{is}-1)}$ їхні характеристики $p(\lambda) + p(\mu) = e^{\lambda(e^{is}-1)}e^{\mu(e^{is}-1)} = p(\lambda + \mu)$. ■

Аналогічно для:

Нормально розподілених $N(a_1, \sigma_1^2) + \ldots + N(a_k, \sigma_k^2) = N(a_1 + \ldots + a_k, \sigma_1^2 + \ldots \sigma_k^2)$.

Незалежних γ випадкових змінних $\gamma(\sigma, \nu_1) + \ldots + \gamma(\sigma, \nu_k) = \gamma(\sigma, \nu_1 + \ldots + \nu_k)$.

Незалежних χ^2 випадкових змінних $\chi^2(n_1) + \ldots + \chi^2(n_k) = \chi^2(n_1 + \ldots + n_k)$.

34. Стохастичні процеси, ланцюг Маркова.

Озн. *Стохастичний процес* – це процес, реалізація якого залежить від випадку, і для якого визначена ймовірність того, чи іншого, перебігу.

Нехай в послідовності незалежних спроб в кожній спробі може виникнути одна з деяких подій $E_1, E_2, .., E_m$. Нехай після n кроків сталиcь події $E_{j0}, E_{j1}, .., E_{jn}$ (1). Цю складну подію будемо називати *конфігурацією*.

Послідовність спроб утворює ланцюг Маркова, якщо ймовірність появи кожної конфігурації виду (1): $P\left(E_{j0}, E_{j1}, \ldots, E_{jn}\right) = P\left(E_{j0}\right)P\left(\frac{E_{j1}}{E_{j0}}\right)\ldots P(\frac{E_{jn}}{E_{j(n-1)}})$.

Отже, ланцюг Маркова задано, якщо відомі імовірності $a_i = P(E_i)$ появи події в початковій спробі, та умовні ймовірності $p_{jk} = P\left(\frac{E_k}{E_j}\right)$ появи події E_k в наступній спробі, якщо безпосередньо попередньо відбулася подія E_j.

Озн. Вектор з невід'ємними координатами, сума яких = 1 називається *стохастичним*.

Озн. Квадратна матриця з невід'ємними елементами, сума по кожному рядку в якій = 1 називається *стохастичною*.

Отже ланцюг Маркова задано – коли задано стохастичний вектор і стохастичну матрицю однакової розмірності. Вектор – ймовірності перебування системи в різних станах у початковий момент часу. Матриця – ймовірності переходу системи зі стану в стан за одиницю часу.

35. Ймовірність переходу зі стану в стан за n кроків.

Нехай ймовірність переходу зі стану E_jв стан E_kза *n* кроків є$p_{jk}^{(n)}$. Знайдемо цю ймовірність методом математичної індукції.

При n=1 $p_{jk}^{(1)} = p_{jk}$.

При n=2 маємо наступне: ми перейшли з стану E_j в деякий стан E_1 і з нього в стан E_k. Тому $p_{jk}^{(2)} = \sum_{l=1}^{m} p_{jl}p_{lk}$.

Матриця $\left\|p_{jk}^{(2)}\right\| = P^2$ стохастична. Для цього достатньо довести:

$\sum_{k=1}^{n} p_{jk}^{(2)} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m} p_{jl}p_{lk} = \sum_{l=1}^{m} p_{jl}\sum_{k=1}^{n} p_{lk} = \sum_{l=1}^{m} p_{jl} = 1.$

Методом математичної індукції доводимо, що $p_{jk}^{(n+1)} = \sum_s p_{js}p_{sk}^{(n)}$(1) та $p_{jk}^{(m+n)} = \sum_s p_{js}^{(m)}p_{sk}^{(n)}$. Звідси $\left\|p_{jk}^{(m+n)}\right\| = P^{m+n}$.

За індукцією, з (1) випливає, що $p_{jk}^{(m+n)} \geq 0$ та що матриця $\left\|p_{jk}^{(m+n)}\right\|$ стохастична. Отже всі натуральні степені стохастичної матриці є стохастичними.

36. Стаціонарний розподіл ланцюга Маркова.

Нехай існують границі $\lim\limits_{n\to\infty} p_{\cdot k}^{(n)} = p_{\cdot k}$причому $\sum_{k=1} p_{\cdot k} = 1$. Позначимо вектор граничних ймовірностей через $p = \left(p_{\cdot 1}, .., p_{\cdot k}, ..\right)$.

Перейдемо у співвідношенні $p(n+1) = p(n)P$ до границі при $n \to \infty$. Тоді $p = pP$, тобто $pI = pP$, *I* – одинична матриця. Отже $p(P - I) = 0$. Матриця $D = P - I$ називається *динамічною матрицею*.

Розв'язок: $\begin{cases} pD = 0 \\ \sum_{k=1} p_{\cdot k} = 1 \end{cases}$. Він називається стаціонарним режимом ланцюга Маркова.

37. Процес Пуассона.

Нехай деяка система може перебувати в деяких станах $\mathrm{E}_0, \mathrm{E}_1, \ldots, \mathrm{E}_\text{к}$, …1, причому, якщо в деякий момент часу t вона перебуває в стані $\mathrm{E}_\text{к}$, то за час Δt вона буде перебувати в стані $\mathrm{E}_{\text{к}+1}$з ймовірністю $\lambda \cdot \Delta\mathrm{t} + {}_0(\Delta\mathrm{t})$, $\lambda > 0$ ($\lambda = \mathrm{const}$). З імовірністю $1 - (\lambda \cdot \Delta\mathrm{t} + {}_0(\Delta\mathrm{t}))$ вона залишиться в стані $\mathrm{E}_\text{к}$, і з ймовірністю величини порядку ${}_0(\Delta\mathrm{t})$ вона перейде в інші стани. В початковий момент часу вона знаходиться в стані 0. Треба знайти ймовірність $p_\text{к}(t)$, (к = 1,2, …) того, що в момент часу t система перебуває в стані $\mathrm{E}_\text{к}$, якщо в початковий момент часу вона перебувала в стані E_0, тобто $p_0(0) = 1$. Можна зобразити це графом. Згідно формули повної ймовірності можна записати $p_0(t + \Delta\mathrm{t}) = p_0(t)(1 - \lambda\Delta\mathrm{t}) + {}_0(\Delta\mathrm{t})$.

Аналогічно: $p_\text{к}(t + \Delta\mathrm{t}) = p_\text{к}(t)(1 - \lambda\Delta\mathrm{t}) + p_{\text{к}-1}(t)(\lambda\Delta\mathrm{t}) + {}_0(\Delta\mathrm{t})$

Отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{p_0(t+\Delta\mathrm{t}) - p_0(t)}{\Delta\mathrm{t}} = -\lambda p_0(t) + \frac{{}_0(\Delta\mathrm{t})}{\Delta\mathrm{t}} \\ \frac{p_\text{к}(t+\Delta\mathrm{t}) - p_\text{к}(t)}{\Delta\mathrm{t}} = -\lambda p_\text{к}(t) + \lambda p_{\text{к}-1}(t) + \frac{{}_0(\Delta\mathrm{t})}{\Delta\mathrm{t}} \end{cases} \qquad (1).$$

Перейдемо в (1) до границі при $\Delta\mathrm{t} \to 0$. Отримаємо задачу Коші:

$$\begin{cases} p_0'(t) = -\lambda p_0(t) \\ p_k'(t) = \lambda p_{\text{к}-1}(t) - \lambda p_\text{к}(t) \\ p_0(0) = 1 \end{cases} \qquad (2).$$

Задачу (2) розв'яжемо методом генератрис (твірних функцій). Нехай $g(s, t) = \sum_{k=0}^{\infty} p_\text{к}(t)s^\text{к}$. Помножимо друге рівняння системи (2) на $s^k (k = 1,2, \ldots)$ та додамо після цього всі рівняння цієї перетвореної системи. В результаті отримаємо таке: $\sum_{k=0}^{\infty} p_k'(t)s^\text{к} = \lambda\sum_{k=0}^{\infty} p_{\text{к}-1}(t)s^\text{к} - \lambda\sum_{k=0}^{\infty} p_\text{к}(t)s^\text{к}$. Але $\sum_{k=0}^{\infty} p_k'(t)s^\text{к} = \frac{\partial g(s,t)}{\partial t}$, і $\sum_{k=0}^{\infty} p_{\text{к}-1}(t)s^\text{к} = s * g(s, t)$. Тому систему (2) можна переписати у вигляді одного диференціального рівняння для генератриси

$$\frac{\partial g(s,t)}{\partial t} = \lambda(s - 1)g(s, t) \text{ при } g(s, 0) = 1 \qquad (4)$$

Розв'язавши (4) отримаємо розв'язок $g(s, t) = e^{-\lambda t}e^{\lambda ts} = e^{-\lambda t}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} s^k$. Тому $p_\text{к}(t) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}$.

38. Процеси розмноження і вимирання.

Нехай деяка система може перебувати в деяких станах $\mathrm{E}_0, \mathrm{E}_1, \dots, \mathrm{E}_\text{к}$, причому, якщо в деякий момент часу t вона перебуває в стані E_0, то за час Δt вона буде перебувати в стані E_1з ймовірністю $\lambda_0(t) \cdot \Delta\mathrm{t} + {}_0(\Delta\mathrm{t})$, $\lambda > 0$ ($\lambda = \mathrm{const}$). з ймовірністю $1 - (\lambda_0(t) \cdot \Delta\mathrm{t} + {}_0(\Delta\mathrm{t}))$залишається в стані E_0. Усі інші переходи мають ймовірність величини ${}_0(\Delta\mathrm{t})$. Якщо є у момент часу t система перебуває в стані $E_k (k = 1,2, \dots)$то за час Δt вона перейде в стан E_{k+1}з ймовірністю $\lambda_k(t) \cdot \Delta\mathrm{t} + {}_0(\Delta\mathrm{t})$; у стан E_{k-1} з ймовірністю $\mu_k(t) \cdot \Delta\mathrm{t} + {}_0(\Delta\mathrm{t})$; з ймовірністю 1-$\big((\mu_k(t)+\lambda_k(t)) \cdot \Delta\mathrm{t} + {}_0(\Delta\mathrm{t})\big)$вона залишається в стані E_k. Треба знайти ймовірність $p_\text{к}(t), (\text{к} = 1,2, \dots)$ того, що в момент часу t система перебуває в стані $\mathrm{E}_\text{к}$, якщо в початковий момент часу вона перебувала в стані E_i, тобто $p_i(0) = 1$. Якщо розглядати цю схему, як поведінку колонії бактерій чи інших живих істот, а перехід з стану k в k+1 – як збільшення популяції на 1або перехід від стану k в k-1 стан – як зменшення популяції на 1, то вона називається процесом розмноження і вимирання. Параметри $\lambda_k(t)$ називають інтесивностями розмноження системи у станах $\mathrm{E}_\text{к}$ залежно від часу t, а параметри $\mu_k(t)$ - інтесивностями вимирання системи в тих же станах залежно від часу t. Граф в книжці п.8.5.1.

Згідно з формули повної ймовірності отримаємо систему

$$\begin{cases} p_0(t + \Delta\mathrm{t}) = p_0(t)(1 - \lambda_0(t) \cdot \Delta\mathrm{t}) + p_1(t)(\mu_1(t) \cdot \Delta\mathrm{t}) + {}_0(\Delta\mathrm{t}) \\ p_k(t + \Delta\mathrm{t}) = p_k(t)\big(1 - (\lambda_k(t) + \mu_k(t)) \cdot \Delta\mathrm{t}\big) + p_{k-1}(t)\big((\lambda_{k-1}(t) * \Delta\mathrm{t}\big) + \\ \quad + p_{k+1}(t)((\mu_{k+1}(t) \cdot \Delta\mathrm{t}) + \\ \quad + {}_0(\Delta\mathrm{t}) \\ k = 1,2, \dots \end{cases}$$

Аналітично розв'язати цю систему в загальному випадку неможливо. Але існують окремі випадки коли її можливо розв'язати. Такими випадками цієї задачі є, коли вона є математичною моделлю таких процесів: А) чистого розмноження(лише розмноження) із незалежними від часу інтенсивностями; Б) чистого розмноження (лише розмноження) із незалежними від станів інтенсивностями; В) чистого вимирання (лише вимирання) із незалежними від часу інтесивностями; Г) чистого вимирання (лише вимирання) із незалежними від станів інтесивностями.

39. Процеси чистого розмноження з незалежними від часу інтесивностями.

Нехай деяка система може перебувати в деяких станах $\mathrm{E}_0, \mathrm{E}_1, \dots, \mathrm{E}_\text{к}, \dots$, причому, якщо в деякий момент часу t вона перебуває в стані E_0, то за час Δt вона буде перебувати в стані E_1з ймовірністю $\lambda_0(t) \cdot \Delta\mathrm{t} + {}_0(\Delta\mathrm{t})$, $\lambda > 0$ ($\lambda = \mathrm{const}$). з ймовірністю $1 - (\lambda_0(t) \cdot \Delta\mathrm{t} + {}_0(\Delta\mathrm{t}))$ залишається в стані E_0. Усі інші переходи мають ймовірність величини ${}_0(\Delta\mathrm{t})$. Якщо є у момент часу t система перебуває в стані $E_k (k = 1,2, \dots)$ то за час Δt вона перейде в стан E_{k+1} з ймовірністю $\lambda_k(t) \cdot \Delta\mathrm{t} + {}_0(\Delta\mathrm{t})$; у стан E_{k-1} з ймовірністю $\mu_k(t) \cdot \Delta\mathrm{t} + {}_0(\Delta\mathrm{t})$; з ймовірністю 1-$\big((\mu_k(t)+\lambda_k(t)) \cdot \Delta\mathrm{t} + {}_0(\Delta\mathrm{t})\big)$ вона залишається в стані E_k. Треба знайти ймовірність $p_\text{к}(t), (\text{к} = 1,2, \dots)$ того, що в момент часу t система перебуває в стані $\mathrm{E}_\text{к}$, якщо в початковий момент часу вона перебувала в стані E_i, тобто $p_i(0) = 1$. Якщо розглядати цю схему, як поведінку колонії бактерій чи інших живих істот, а перехід з стану k в k+1 – як збільшення популяції на 1 або перехід від стану k в k-1 стан – як зменшення популяції на 1, то вона називається процесом розмноження і вимирання. Параметри $\lambda_k(t)$ називають інтесивностями розмноження системи у станах $\mathrm{E}_\text{к}$ залежно від часу t, а параметри $\mu_k(t)$ - інтесивностями вимирання системи в тих же станах залежно від часу t.

$$\begin{cases} p_0(t + \Delta\mathrm{t}) = p_0(t)(1 - \lambda_0(t) * \Delta\mathrm{t}) + p_1(t)(\mu_1(t) * \Delta\mathrm{t}) + {}_0(\Delta\mathrm{t}) \\ p_k(t + \Delta\mathrm{t}) = p_k(t)\big(1 - (\lambda_k(t) + \mu_k(t)) * \Delta\mathrm{t}\big) + p_{k-1}(t)\big((\lambda_{k-1}(t) * \Delta\mathrm{t}\big) + \\ \quad + p_{k+1}(t)((\mu_{k+1}(t) * \Delta\mathrm{t}) + \\ \quad + {}_0(\Delta\mathrm{t}) \\ k = 1,2, \dots \end{cases}$$

Такі процеси характеризуються тим що в них $\lambda_k(t) = \lambda_k, \mu_k(t) = 0$. Зробивши перетворення отриманої вище системи отримаємо нову систему

$$\begin{cases} p_0'(t) = -\lambda_0 p_0(t) \\ p_k'(t) = \lambda_{k-1} p_{\text{к}-1}(t) - \lambda_k p_\text{к}(t). \\ k = 1,2, \dots \end{cases}$$

Яку розв'язуємо при початковій умові $p_0(0) = 1,\ p_k(0) = 0$. Цю задачу Коші розв'язуємо послідовно. Отримали розв'язок $p_0(t) = Ce^{-\lambda_0 t}$. Врахувавши початкову умову отримаємо $p_0(t) = e^{-\lambda_0 t}$. Далі підставляємо цей розвязок у друге рівняння отриманої системи. І так послідовно знаходимо $p_k(t)$.

40. Процеси чистого розмноження з незалежними від станів інтесивностями.

Нехай деяка система може перебувати в деяких станах $\mathrm{E}_0, \mathrm{E}_1, \dots, \mathrm{E}_\text{к}, \dots$, причому, якщо в деякий момент часу t вона перебуває в стані E_0, то за час Δt вона буде перебувати в стані E_1з ймовірністю $\lambda_0(t) * \Delta\mathrm{t} + {}_0(\Delta\mathrm{t})$, $\lambda > 0$ ($\lambda = \mathrm{const}$). з ймовірністю $1 - (\lambda_0(t) \cdot \Delta\mathrm{t} + {}_0(\Delta\mathrm{t}))$залишається в стані E_0. Усі інші переходи мають ймовірність величини ${}_0(\Delta\mathrm{t})$. Якщо є у момент часу t система перебуває в стані $E_k (k = 1,2, \dots)$то за час Δt вона перейде в стан E_{k+1}з ймовірністю $\lambda_k(t) \cdot \Delta\mathrm{t} + {}_0(\Delta\mathrm{t})$; у стан E_{k-1} з ймовірністю $\mu_k(t) \cdot \Delta\mathrm{t} + {}_0(\Delta\mathrm{t})$; з ймовірністю 1-$\big((\mu_k(t)+\lambda_k(t)) \cdot \Delta\mathrm{t} + {}_0(\Delta\mathrm{t})\big)$вона залишається в стані E_k. Треба знайти ймовірність $p_\text{к}(t), (\text{к} = 1,2, \dots)$ того, що в момент часу t система перебуває в стані $\mathrm{E}_\text{к}$, якщо в початковий момент часу вона перебувала в стані E_i, тобто $p_i(0) = 1$. Якщо розглядати цю схему, як поведінку колонії бактерій чи інших живих істот, а перехід з стану k в k+1 – як збільшення популяції на 1 або перехід від стану k в k-1 стан – як зменшення популяції на 1, то вона називається процесом розмноження і вимирання. Параметри $\lambda_k(t)$ називають інтесивностями розмноження системи у станах $\mathrm{E}_\text{к}$ залежно від часу t, а параметри $\mu_k(t)$ - інтесивностями вимирання системи в тих же станах залежно від часу t.

$$\begin{cases} p_0(t + \Delta\mathrm{t}) = p_0(t)(1 - \lambda_0(t) \cdot \Delta\mathrm{t}) + p_1(t)(\mu_1(t) \cdot \Delta\mathrm{t}) + {}_0(\Delta\mathrm{t}) \\ p_k(t + \Delta\mathrm{t}) = p_k(t)\big(1 - (\lambda_k(t) + \mu_k(t)) \cdot \Delta\mathrm{t}\big) + p_{k-1}(t)\big((\lambda_{k-1}(t) \cdot \Delta\mathrm{t}\big) + \\ \quad + p_{k+1}(t)((\mu_{k+1}(t) \cdot \Delta\mathrm{t}) + \\ \quad + {}_0(\Delta\mathrm{t}) \\ k = 1,2, \dots \end{cases}$$

Такі процеси характеризуються тим що в них $\lambda_k(t) = \lambda(t),\ \mu_k(t) = 0$. Зробивши перетворення отриманої вище системи отримаємо нову систему

$$\begin{cases} p_0'(t) = -\lambda(t) p_0(t) \\ p_k'(t) = \lambda(t) p_{\text{к}-1}(t) - \lambda(t) p_\text{к}(t). \\ k = 1,2, \dots \end{cases}$$

Яку розв'язуємо при початковій умові $p_0(0) = 1, p_k(0) = 0$. Цю задачу Коші розв'язуємо послідовно. $\frac{p_0'(t)}{p_0(t)} = -\lambda(t), \ln p_0(t) = -\int_0^t \lambda(\tau) d\tau$. Позначимо $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(\tau) d\tau$. Тоді $p_0(t) = e^{-\Lambda(t)}$. Друге рівняння отриманої системи матиме такий вигляд: $p_1'(t) + \lambda(t) p_1(t) = \lambda(t) e^{-\Lambda(t)}$. Розвязавши це рівняння отримаємо $p_1(t) = e^{-\Lambda(t)} \Lambda(t)$. В загальному випадку $p_k(t) = e^{-\Lambda(t)} \frac{(\Lambda(t))^k}{k!}$, де $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(\tau) d\tau$.

41. Процеси чистого вимирання з незалежними від часу інтесивностями.

Нехай деяка система може перебувати в деяких станах $\mathrm{E}_0, \mathrm{E}_1, \dots, \mathrm{E}_\text{к}$, причому, якщо в деякий момент часу t вона перебуває в стані E_0, то за час Δt вона буде перебувати в стані E_1 з ймовірністю $\lambda_0(t) \cdot \Delta\mathrm{t} + {}_0(\Delta\mathrm{t})$, $\lambda > 0$ ($\lambda = \mathrm{const}$). з ймовірністю $1 - (\lambda_0(t) \cdot \Delta\mathrm{t} + {}_0(\Delta\mathrm{t}))$ залишається в стані E_0. Усі інші переходи мають ймовірність величини ${}_0(\Delta\mathrm{t})$. Якщо є у момент часу t система перебуває в стані $E_k (k = 1,2, \dots)$ то за час Δt вона перейде в стан E_{k+1} з ймовірністю $\lambda_k(t) \cdot \Delta\mathrm{t} + {}_0(\Delta\mathrm{t})$; у стан E_{k-1} з ймовірністю $\mu_k(t) \cdot \Delta\mathrm{t} + {}_0(\Delta\mathrm{t})$; з ймовірністю 1-$\big((\mu_k(t)+\lambda_k(t)) \cdot \Delta\mathrm{t} + {}_0(\Delta\mathrm{t})\big)$ вона залишається в стані E_k. Треба знайти ймовірність $p_\text{к}(t), (\text{к} = 1,2, \dots)$ того, що в момент часу t система перебуває в стані $\mathrm{E}_\text{к}$, якщо в початковий момент часу вона перебувала в стані E_i, тобто $p_i(0) = 1$. Якщо розглядати цю схему, як поведінку колонії бактерій чи інших живих істот, а перехід з стану k в k+1 – як збільшення популяції на 1 або перехід від стану k в k-1 стан – як зменшення популяції на 1, то вона називається процесом розмноження і вимирання. Параметри $\lambda_k(t)$ називають інтесивностями розмноження системи у станах $\mathrm{E}_\text{к}$ залежно від часу t, а параметри $\mu_k(t)$ - інтесивностями вимирання системи в тих же станах залежно від часу t.

$$\begin{cases} p_0(t + \Delta\mathrm{t}) = p_0(t)(1 - \lambda_0(t) * \Delta\mathrm{t}) + p_1(t)(\mu_1(t) * \Delta\mathrm{t}) + {}_0(\Delta\mathrm{t}) \\ p_k(t + \Delta\mathrm{t}) = p_k(t)\big(1 - (\lambda_k(t) + \mu_k(t)) * \Delta\mathrm{t}\big) + p_{k-1}(t)\big((\lambda_{k-1}(t) * \Delta\mathrm{t}\big) + \\ \quad + p_{k+1}(t)((\mu_{k+1}(t) * \Delta\mathrm{t}) + \\ \quad + {}_0(\Delta\mathrm{t}) \\ k = 1,2, \dots \end{cases}$$

Такі процеси характеризуються тим що в них $\mu_k(t) = \mu_k,\ \lambda_k(t) = 0$. Зробивши перетворення отриманої вище системи отримаємо нову систему

$$\begin{cases} p_0'(t) = \mu_1 p_1(t) \\ p_k'(t) = -\mu_k p_\text{к}(t) + \mu_{k+1} p_{\text{к}+1}(t). \\ k = 1,2, \dots \end{cases}$$

Яку розв'язуємо при початковій умові $p_n(0) = 1, p_k(0) = 0\ (k = 1,2, \dots, n-1)$. З огляду на те, що в такому стохастичному процесі в кожен момент часу система може або залишатись в тому стані, в якому вона перебувала до цього моменту або переходить лише в безпосередньо попередній стан описану вище систему можна переписати.

$$\begin{cases} p_n'(t) = -\mu_n(t) p_n(t) \\ p_k'(t) = \mu_{k+1} p_{\text{к}+1}(t) - \mu_k p_\text{к}(t), k = n-1, n-2, \dots, 1. \\ p_0'(t) = \mu_1 p_1(t) \end{cases}$$

$p_n(0) = 1, p_k(0) = 0\ (k = 1,2, \dots, n-1)$.

Цю задачу Коші розв'язуємо послідовно. Зокрема якщо всі μ_k однакові, то розв'язком буде скінченний розподіл Пуассона порядку n: $p_n(t) = e^{-\mu t}, p_k(t) = e^{-\mu t} \frac{(\mu t)^k}{k!}, k = 1,2, \dots, n-1$

$p_0(t) = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} e^{-\mu t} \frac{(\mu t)^k}{k!}$.

42. Процеси чистого вимирання з незалежними від станів інтесивностями.

Нехай деяка система може перебувати в деяких станах $\mathrm{E}_0, \mathrm{E}_1, \ldots, \mathrm{E}_{к}, \ldots$, причому, якщо в деякий момент часу t вона перебуває в стані E_0, то за час Δt вона буде перебувати в стані E_1з ймовірністю $\lambda_0(t)\cdot\Delta\mathrm{t} + {}_0(\Delta\mathrm{t})$, $\lambda > 0$ ($\lambda = \mathrm{const}$). з ймовірністю $1 - (\lambda_0(t)\cdot\Delta\mathrm{t} + {}_0(\Delta\mathrm{t}))$залишається в стані E_0. Усі інші переходи мають ймовірність величини ${}_0(\Delta\mathrm{t})$. Якщо є у момент часу t система перебуває в стані $E_k(k = 1,2, \ldots)$то за час Δt вона перейде в стан E_{k+1}з ймовірністю $\lambda_k(t)\cdot\Delta\mathrm{t} + {}_0(\Delta\mathrm{t})$; у стан E_{k-1} з ймовірністю $\mu_k(t)\cdot\Delta\mathrm{t} + {}_0(\Delta\mathrm{t})$; з ймовірністю 1-$\left((\mu_k(t)+\lambda_k(t))\cdot\Delta\mathrm{t} + {}_0(\Delta\mathrm{t})\right)$ вона залишається в стані E_k. Треба знайти ймовірність $p_{к}(t)$, ($к = 1,2, \ldots$) того, що в момент часу t система перебуває в стані $\mathrm{E}_{к}$, якщо в початковий момент часу вона перебувала в стані E_i, тобто $p_i(0) = 1$. Якщо розглядати цю схему, як поведінку колонії бактерій чи інших живих істот, а перехід з стану k в k+1 – як збільшення популяції на 1 або перехід від стану k в k-1 стан – як зменшення популяції на 1, то вона називається процесом розмноження і вимирання. Параметри $\lambda_k(t)$ називають інтесивностями розмноження системи у станах $\mathrm{E}_{к}$ залежно від часу t, а параметри $\mu_k(t)$ - інтесивностями вимирання системи в тих же станах залежно від часу t.

$$\begin{cases} p_0(t+\Delta\mathrm{t}) = p_0(t)(1-\lambda_0(t)*\Delta\mathrm{t}) + p_1(t)(\mu_1(t)*\Delta\mathrm{t}) + {}_0(\Delta\mathrm{t}) \\ p_k(t+\Delta\mathrm{t}) = p_k(t)\left(1-(\lambda_k(t)+\mu_k(t))*\Delta\mathrm{t}\right) + p_{k-1}(t)\left((\lambda_{k-1}(t)*\Delta\mathrm{t}\right) + \\ p_{k+1}(t)((\mu_{k+1}(t)*\Delta\mathrm{t}) + \\ + {}_0(\Delta\mathrm{t}) \\ k = 1,2,\ldots \end{cases}$$

Такі процеси характеризуються тим що в них $\mu_k(t) = \mu(t),\ \lambda_k(t) = 0$. Зробивши перетворення отриманої вище системи отримаємо нову систему

$$\begin{cases} p_0'(t) = -\mu(t)p_1(t) \\ p_k'(t) = -\mu(t)p_{к}(t) + \mu(t)p_{к+1}(t). \\ k = 1,2,\ldots \end{cases}$$

Яку розв'язуємо при початковій умові $p_n(0) = 1, p_k(0) = 0$ ($k = 1,2,\ldots,n-1$). З огляду на те, що в такому стохастичному процесі в кожен момент часу система може або залишатись в тому стані, в якому вона перебувала до цього моменту або переходить лише в безпосередньо попередній стан описану вище систему можна переписати.

$$\begin{cases} p_n'(t) = -\mu(t)p_n(t) \\ p_k'(t) = \mu(t)p_{к+1}(t) - \mu(t)p_{к}(t), k = n-1, n-2, \ldots, 1. \\ p_0'(t) = \mu(t)p_1(t) \end{cases}$$

$p_n(0) = 1, p_k(0) = 0$ ($k = 1,2,\ldots,n-1$). Цю задачу Коші розв'язуємо послідовно. З першого рівняння отримуємо $\ln p_n(t) - \ln p_n(0) = -\int_0^t \mu(\tau)d\tau$.Позначимо $M(t) = \int_0^t \mu(\tau)d\tau$. Тоді врахувавши початкові умови маємо: $p_n(t) = e^{-M(t)}$.Продовжуючи і так далі отримуємо:

$$\begin{cases} p_n(t) = e^{-M(t)} \\ p_{n-k}(t) = e^{-M(t)}\frac{(M(t))^k}{k!}, k = 1,2,\ldots,n-1. \\ p_0(t) = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} e^{-M(t)}\frac{(M(t))^k}{k!} \end{cases}$$

43.Суть математичної статистики, предмет, методи.

Предметом математичної статистики є вибірка.

Якщо в результаті багаторазового проведення експерименту, спостерігають значення $x_1, \ldots, x_n$ випадкової змінної t, то $x_1, \ldots, x_n$ називається вибіркою, а їх кількість – об'ємом вибірки. При цьому кожне окреме спостереження називається елементом статистичного матеріалу.

Суть математичної статистики полягає в пізнанні випадкової змінної на основі спостережень. Тому її називають статистичною змінною.

Основна задача математичної статистики полягає у максимальному використанні наявної у вибірці інформації для найбільш правдоподібного опису деякої випадкової змінної.

Серед інших задач, можна виділити такі: А) оцінка параметрів розподілу ймовірностей значень випадкової змінної на основі отриманої вибірки; Б) перевірка гіпотез про однорідність деяких вибірок; В) перевірка гіпотез про стохастичну еквівалентність деяких генеральних сукупностей; Г) визначення інтервалів довіри для значень невідомих параметрів розподілу ймовірностей генеральної сукупності; Ґ) виявлення тенденції, закономірностей, залежностей між випадковими змінними, на основі наявних вибірок із відповідних генеральних сукупностей.

Основні методи формування вибірки: А) Без розбиття генеральної сукупності на частини (простий випадковий вибір, випадковий вибір без повторень). Б) З розбиттям генеральної сукупності на частини (механічний вибір, груповий вибір, типовий вибір, серійний вибір).

44. Представлення статистичного матеріалу
Нехай в результаті експериментів було отримано деяку вибірку $\mathrm{x}_1 \ldots \mathrm{x}_n$, де x_i- результат i-того спостереження над деякою статистичною змінною X. Для уніфікації і загального представлення вибірки розмістимо її елементи в порядку зростання $x_i \le x_{i+1}$. Таке представлення вибірки називається варіаційним рядомабо статистичним розподілом змінної X. Статистична змінна X може бути дискретною чи неперервною.

Нехай всі елементи вибірки дискретної статистичної змінної X належать множині $x_{(1)}, \ldots, x_{(k)}$, де $x_{(1)} \le x_{(k)}$. Для кожного x_i в таблиці задається частота його появи. Якщо вибірка є вибіркою малого, або середнього об'єму з неперервної генеральної сукупності, то табличне її представлення таке ж як і дискретних варіант. Якщо цю частотну таблицю зобразити в вигляді діаграми, то отримаємо діаграму частот. Якщо в вигляді графіку, то отримаємо полігон частот.

Якщо вибірка є вибіркою середнього, або великого об'єму з неперервної генеральної сукупності, то ділимо інтервал зміни статистичних даних $[x_1, x_n]$ на r+1 інтервал. В частотну таблицю вносимо середини побудованих відрізків і кількість елементів які попадають в відповідний інтервал. Цю таблицю можна графічно зобразити за допомогою гістограми.

Аналітично можна представити вибірку в вигляді емпіричної функції розподілу.

45. Числові характеристики статистичної змінної. Числові характеристики центральної тенденції.
Озн. Числова характеристика – це кількісний опис деякої ознаки вибірки.

Характерними ознаками вибірки є точки скупчення її елементів; характер розкиданості, розсіювання елементів вибірки, в околі точок скупчення та вздовж осі ОХ; щільність їх. Числові характеристики описують ці ознаки, тому поділяються на числові характеристики центральної тенденції; характеристики розсіювання та характеристики форми.

Кожна функція елементів статистичного матеріалу називається статистикою. Отже, числові характеристики є статистиками вибірки.

Числові характеристики центральної тенденції: *Медіана, мода, середнє вибіркове*.

Якщо об'єм статистичного матеріалу парний, то $Me = \frac{x_{(k)}+x_{(k+1)}}{2}$.

Якщо об'єм статистичного матеріалу непарний, то $Me = x_{(k+1)}$.

Модою називається той елемент вибірки, який найчастіше зустрічається в ній.

Середнім вибірковим називається середнє арифметичне елементів даної вибірки.

46. Числові характеристики розсіяння.
Статистики розсіяння вимірюють ступінь розкиданості елементів вибірки в околі точок їх скупчення. До цих характеристик належить розмах, варіанса (s^2), стандарт (s), вибіркова дисперсія (D), варіація (v).

Розмах вибірки = $\max(x_1, \ldots, x_n) - \min(x_1, \ldots, x_n)$.

$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})^2$; s = $+\sqrt{s^2}$; $D = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})$; $v = \frac{s}{x}$.

47. Квантилі. Інтерквантильні широти.
Озн. *Квантиль порядку α* – такий елемент статистичного матеріалу, до якого включно з ним маємо α процентів елементів статистичного матеріалу. Вибірка об'єму n має лише квантилі порядків кратних $\frac{100}{n}$.

Озн. Різниця між квантилем порядку β і квантилем порядку α (α<β) називається *інтерквантильною широтою порядку β-α*. Для вибірки об'єму n існують інтерквантильні широти лише порядків $q_{ij} = (j-i)\frac{100}{n}(j > i; i = \overline{1, n-1}, j = \overline{2, n})$.

Квантилі порядку 25, 50, 75 – *квартилі* (Q_1, Q_2, Q_3 відповідно). Інтерквартильна широта = $Q_3 - Q_1$.

Кванлиті порядку 10, 20, … , 90 – *децилі* (D_i). Інтердецильна широта = $D_9 - D_1$.
Квантилі порядку 1, … , 99 – *центилі* (C_i). Інтерцентильна широта = $C_{99} - C_1$.
Квантилі порядку 1, … , 999 – мілілі (M_i). Інтермілільна широта = $M_{999} - M_1$.

48. Моменти випадкової змінної
Озн. *Моментом мінливої величини, або статистичним моментом порядку k* відносно константи c називається величина $M_k(c) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (x_i - c)^k$, ($k = 0,1,\ldots$), де n об'єм вибірки.

При c = 0 момент називається *початковим*, а при c = середнє вибіркове – *центральним*.

49. Числові характеристики форми
Озн. *Асиметрія* - це відношення третього центрального моменту до другого центрального в степені 1,5. Якщо > 0, то більшість статистичного матеріалу в лівій половині інтервалу $[x_1; x_n]$. Якщо =0, то симетрично. Якщо < 0, то справа.

Озн. *Ексцес* - це відношення четвертого центрального моменту до другого центрального в степені 2 і відняти від того 3.

Він виражає ступінь концентрації елементів вибірки в околі її середнього. Якщо > 0 – то статистичний матеріал *високовершинний*, < 0 – *низьковершинний*, = 0 - *нормальновершинний*.

50. Схема статистичного доведення. Приклади статистичного доведення.
Завжди маємо одну або кілька вибірок.

1. Формулюємо нульову гіпотезу (початкове твердження про генеральну сукупність, яке хочемо довести, або спростувати). 2. Вибираємо рівень значущості (точність, з якою будемо робити висновки). 3. Вибираємо відповідно до гіпотези статистику. 4. Знаходимо розподіл цієї статистики. 5. Знаходимо критичні значення статистики (критичну область), відповідно до рівня значущості. 6. За результатами спостережень знаходимо емпіричне (дослідне) значення статистики. 7. На основі отриманих даних робимо висновки про гіпотезу. Якщо емпіричне значення попадає в критичну область – то гіпотезу приймаємо, інакше – відкидаємо.

51. Критерій χ^2.

Нехай дано вибірку з генеральної сукупності. Гіпотеза: функція розподілу буде F(x).

Розіб'ємо простір S на r+1 комірок. В S_i попаде m_i матеріалу. Ймовірність попадання елемента в комірку є p_i.

За міру відхилення гіпотетичного розподілу від вибірки Пірсон прийняв критерій

χ^2 (r,n,F) = $\sum_{i=1}^{r+!}\frac{(m_i-np_i)^2}{np_i}$, Він довів, що при n→∞незалежно від гіпотетичної функції F, якщо гіпотеза вірна, то χ^2 прямує до одного і того ж розподілу з r ступенями вільності.

Для використання χ^2 потрібно, щоб n було досить велике, і в кожному комірку попало велике число елементів.

52. Метод максимуму правдоподібності.

Нехай $x_1, x_2, \dots, x_n$ – ряд незалежних спостережень над статистичною змінною X, що має функцію розподілу залежну від s невідомих параметрів.

Мета: оцінити невідомі параметри на основі вибірки.

Будемо вибирати параметри так, щоб саме для нашої вибірки вони були максимально правдоподібні. Тобто, щоб наша вибірка мала найбільшу можливість появи.

Для цього введемо функцію правдоподібності. $L(x_1, \dots, x_n, \alpha_1, \dots, \alpha_s)$. Якщо змінна є абсолютно неперервна, то L має вигляд добутку $\prod_{i=1}^{n} p(x_i,\ \alpha_1, \dots\ , \alpha_s)$.

Якщо змінна дискретна то $\prod_{i=1}^{n} p_{x_i}(\alpha_1, \dots, \alpha_s)$

Нам треба знайти такі параметри $\alpha_1, \dots, \alpha_s$, які б максимізували функцію L. Для цього запишемо систему лінійних рівнянь: $\frac{\partial lnL}{\partial a_i} = 0$, i = 1…s. Розв'язавши її, отримаємо шукані значення параметрів.

53., 54 Статистичне оцінювання параметрів нормальної популяції.

Нехай $x_1, \dots, x_n$ – ряд незалежних спостережень над нормальною статистичною змінною X. Потрібно перевірити гіпотезу про те, що математичне сподівання = a, де a – деяка константа.

Порахуємо середнє вибіркове і стандартне вибірки. Розглянемо наступну статистику: $t = \frac{\bar{x}-a}{s}\sqrt{n}$

Госсет довів, що ця статистика має розподіл близький до нормального для заданої кількості ступенів вільності. На основі цього розподілу для даного рівня значущості знаходимо критичні значення з умови. $P\{|t_{emp}|>t_{kp}\}$=рівню значущості. Тоді обчислюємо t_{emp}для нашої вибірки, і перевіряємо, чи воно попадає в критичну область.

55. Порівняння математичних сподівань двох нормально розподілених генеральних сукупностей.

Нехай $x_1, \dots, x_n$ – ряд незалежних спостережень над нормальною статистичною змінною X, а $y_1, \dots, y_n$ – над нормальною статистичною змінною Y. Потрібно перевірити гіпотезу про те, що генеральні сукупності для X і Y мають однакове математичне сподівання. Отже нульова гіпотеза така: E(X) = E(Y).

Знайдемо середні вибіркові для обох вибірок і їхні варіанти. Тоді розглянемо статистику:

$t = \frac{\bar{x}-\bar{y}}{\sqrt{\frac{(m-1)s_1^2+(n-1)s_2^2}{m+n-2}}}\sqrt{\frac{mn}{m+n}}$; Фішер довів що ця статистика має розподіл Стьюдента з ступенем вільності m + n - 2.

56. Інтервал довіри для невідомого математичного сподівання

При визначенні критичної області для гіпотези про спів падіння, на підставі рівня значущості, одержуємо співвідношення: $P\{|\frac{a-\bar{x}}{s}|<t_{\frac{a}{2}}\} = 1 - a$. Отже, з ймовірності 1 - a випадковий інтервал (інтервал довіри): $(\bar{x} - \frac{s}{\sqrt{n}}t_{\frac{a}{2}};\bar{x} + \frac{s}{\sqrt{n}}t_{\frac{a}{2}})$.

57. Оцінка дисперсії нормального розподілу популяції.

Нехай $x_1, x_2, \dots, x_n$ – вибірка з нормальної популяції ξ.Потрібно перевірити гіпотезу про те, що дисперсія цієї генеральної сукупності рівна σ^2, тобто, $H_0: D\xi = \sigma^2$.

Знайдемо середнє вибіркове і варіансу $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$, $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$.

Розглянемо статистику $\frac{s^2}{\sigma^2}$.Якщо гіпотеза вірна, то ця статистика має розподіл $\frac{\chi^2}{(d.f.)}$.

Тоді знаходимо нижнє критичне і верхнє критичне для цієї статистики, а саме $\frac{\chi^2_{\alpha/2}}{(d.f.)}$і $\frac{\chi^2_{1-\alpha/2}}{(d.f.)}$. Будуємо критичну область, і перевіряємо, чи наше емпіричне значення попадає в критичну область.

58. Інтервал довір'я для невідомого значення дисперсії нормальної популяції.

З критерію $\frac{s^2}{\sigma^2}$використовуючи означення рівня значущості отримуємо, що

$$P\left\{\frac{\chi^2_{\alpha/2}}{(d.f.)} < \frac{s^2}{\sigma^2} < \frac{\chi^2_{1-\alpha/2}}{(d.f.)}\right\} = 1 - \alpha.$$

Якщо потрібно знайти інтервал, який з ймовірністю $1 - \alpha$ буде містити невідоме значення σ^2, то провівши перетворення отримуємо:

$P\left\{\frac{s^2}{\chi^2_{\alpha/2}/_{(d.f.)}} < \sigma^2 < \frac{s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}/_{(d.f.)}}\right\} = 1 - \alpha$. Отже, даний інтервал з ймовірністю $1 - \alpha$ накриває невідоме значення дисперсії генеральної сукупності. Він і називається $100(1 - \alpha)\%$, довірчим інтервалом.

59. Порівняння дисперсій двох нормальних популяцій. Критерій Колмогорова.

Нехай $x_1,\ x_2, \dots,\ x_n$ – вибірка з нормальної популяції ξ, а $y_1,\ y_2, \dots,\ y_n$ – вибірка з нормальної популяції η. Потрібно перевірити гіпотезу про те, що дисперсії генеральних сукупностей, з яких взяті ці вибірки, однакові, тобто, $H_0: D\xi = D\eta$.

Знайдемо середні вибіркові для обох вибірок і їхні варіанси: $\bar{x}, \bar{y}$, $s_1^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(x_i - \bar{x})^2$, $s_2^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2$і розглянемо статистику: $F = \frac{s_1^2}{s_2^2}$. Фішер довів, що ця статистика має розподіл з густиною $\rho(x) = \frac{\Gamma(\frac{\nu_1+\nu_2}{2})}{\Gamma(\frac{\nu_1}{2})\Gamma(\frac{\nu_2}{2})}\left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)^{\frac{\nu_1}{2}} x^{\frac{\nu_1}{2}-1}\left(1 + \frac{\nu_1}{\nu_2}x\right)^{-\frac{\nu_1+\nu_2}{2}}$.

Густину $\rho(x)$ називаютьг. Фішера з $d.f. = (\nu_1, \nu_2)$. Вибираємо верхнє і нижня критичне (очевидно, що гіпотеза приймається, коли значення статистики близьке до одиниці), і перевіряємо, чи емпіричне значення$F = \frac{s_1^2}{s_2^2}$ попадає в критичну область.

Критерій Колмогорова використовується для того, щоб перевірити, чи вибірка $x_1, x_2, \dots, x_n$з абсолютно неперервної популяції має функцію розподілу $F(x)$, тобто $H_0: P\{\xi \le x\} = F(x)$.

Для цього розглянемо статистику $D_n = \sup_{-\infty \le x \le \infty}|F_n(x) - F(x)|$, де $F_n(x)$ – емпірична функція розподілу. Колмогоров довів, що статистика $K_n = \sqrt{n}D_n$має розподіл незалежний від гіпотетичної ф-ї розподілу$F(x)$, при $n \to \infty$збігається до розподілу:$K(x) = \begin{Bmatrix} 0,\ x < 0 \\ \sum_{k=-\infty}^{+\infty}(-1)^k e^{-2x^2k^2}, x \ge 0 \end{Bmatrix}$.

Тоді, для перевірки гіпотези знаходимо критичне значення статистики для даного рівня значущості, і перевіряємо, чи K_n попадає в область прийому.

60. Критерій Смирнова.

Нехай $x_1, x_2, \dots, x_n$ – вибірка з абсолютно неперервної популяції ξі $y_1, y_2, \dots, y_n$ – вибірка з абсолютно неперервної популяції η. Потрібно перевірити наступну нульову гіпотезу H_0: обидві генеральні сукупності однаково розподілені.

Знайдемо емпіричні функції розподілу для вибірок $x_1, x_2, \dots, x_n$ і $y_1, y_2, \dots, y_n$ – $F_m(x), G_n(x)$. Тоді розглянемо статистику $D_{mn} = \sup_{-\infty \le x \le \infty}|F_m(x) - G_n(x)|$.

Смирнов довів, що статистика $S_{mn} = \sqrt{\frac{mn}{m+n}}D_{mn}$ при $n, m \to \infty$ має розподіл Колмогорова.

Тоді, для перевірки гіпотези знаходимо критичне значення статистики для даного рівня значущості, і перевіряємо, чи S_{mn} попадає в область прийому.

61. Критерій знаків. Інтервал для прийняття рішень.

Нехай дано ряд незалежних пар $(x_1, y_1); (x_2, y_2); \dots; (x_n, y_n)$. Тут x_i – спостереження над змінними з неперервними ф-ями розподілу $F_i(x)$, а y_i - спостереження над змінними з неперервними ф-ями розподілу $G_i(x)$. Потрібно перевірити гіпотезуH_0 про те, що розподіли спостережень співпадають, тобто $F_i(x) = G_i(x),\ i = \overline{1,..n}$.

Для цього за статистику приймемо, скільки є додатних різниць $x_i - y_i$. Очевидно, ця статистика біномно розподілена $(P(x_i - y_i < 0) = P(x_i - y_i > 0) = \frac{1}{2})$. Тоді, дле перевірки гіпотези знаходимо критичне значення статистики для даного рівня значущості, і перевіряємо, чи емпіричне значення $k(+)$ попадає в область прийому.

Інтервал для прийняття рішень можна знайти з того, що біномний розподіл при великих n асимптотично добре наближається інтегральною теоремою Муавра-Лапласа. Тому

$P\left\{\left|\frac{\mu-\frac{n}{2}}{\frac{\sqrt{n}}{2}}\right| < z_{\frac{\alpha}{2}}\right\} = 1 - \alpha$, $z_{\frac{\alpha}{2}}$ – табличне. $P\left\{\frac{n}{2} - z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sqrt{n}}{2} < \mu < \frac{n}{2} + z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sqrt{n}}{2}\right\} = 1 - \alpha$.

62.Гіпотеза про медіану.

Критерій знаків можна використати для перевірки гіпотези про медіану неперервного розподілу генеральної сукупності $H_0: Me = a$.

Нехай $x_1, x_2, \dots, x_n$ – вибірка з такої сукупності. Для цього потрібно утворити пари $(x_1, a), \dots, (x_n, a)$. Тоді з означення медіани різниці $x_i - a$ повинні бути однаково часто додатніми і від'ємними. Отже, висновки про прийом гіпотези здійснюємо на основі критерію знаків.

63.Критерій Вілкоксона.

Нехай $x_1,\ x_2, \dots, x_n$ і $y_1, y_2, \dots, y_n$– незалежні вибірки незалежних спостережень, отримані з генеральних сукупностей, що описуються неперервними функціями $F(x)$ та $G(x)$. Нехай нульова гіпотеза $H_0: F(x) = G(x)$, тобто вони є стохастично еквівалентними.

Ідея критерію полягає в тому, що якщо змінні однаково розподілені, то на проміжку, де зустрічається деяке число елементів варіаційного ряду першої вибірки, повинно зустрічатись близьке значення елементів варіаційного ряду другої вибірки. Отже виберемо за критерій кількість інверсій однієї вибірки відносно елементів іншої. Тут під інверсією елемента з вибірки розуміється кількість елементів з іншої вибірки, менших за нього. При великих значеннях об'єму вибірок $(m \ge 4, n \ge 4, m + n \ge 20)$ статистика інверсій стає практично нормально розподіленою, а тому з великою точністю можна вважати, що областю прийому гіпотези є $(a - 1{,}96\sigma; a + 1{,}96\sigma)$, де $a = \frac{mn}{2}$,$\sigma^2 = \frac{mn}{12}(m + n + 1)$. При малих – значення табличні.

64.Однофакторний варіансний аналіз.
Нехай дано вибірку $x_1, x_2, \dots, x_N$ незалежних спостережень над деякою нормально розподіленою мінливою величиною, елементи якої можна згрупувати на m груп, елементи яких можна згрупувати по ступеню деякого фактора. Потрібно перевірити вплив фактора на елементи в генеральній сукупності.

Обчислимо середні значення в кожній групі та середнє вибіркове.

Можна довести, що повна варіанса залежить від варіанси по рядках і по стовпцях.

$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}(x_{ij} - x_{..})^2 = \sum_{i=1}^{m} n_i(x_{i.} - x_{..})^2 + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}(x_{ij} - x_{i.})^2.$

З цієї формули і слідує те, що повна варіанса $s^2 = a_1 s_1^2 + a_2 s_2^2$, де $a_1 = \frac{N-m}{N-1}$, $a_2 = \frac{m-1}{N-1}$ та варіанса між групами $s_1^2 = \frac{1}{N-m}\sum_{i=1}^{m} n_i(x_{i.} - x_{..})^2$та варіанса у групах $s_2^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}(x_{ij} - x_{i.})^2$.

Кожну групу можна вважати окремою вибіркою. Якщо фактор не впливає на значення в цих вибірках – то вони однорідні. Якщо вони однорідні, то між їхніми середніми арифметичними не має бути суттєвої відмінності. А це означає, що s_1^2 і s_2^2 повинні бути варіансами з однорідних вибірок. Тоді до них можна застосувати критерій Фішера з статистикою s_1^2/s_2^2. Вибираємо рівень значущості α і рівень ступенів вільності (m-1,N-m) і знаходимо критичні значення $F_{\text{ниж.крит}}$ та $F_{\text{верх крит}}$ статистики Фішера. Якщо $F_{\text{ниж.крит}} < F_{\text{емп}} < F_{\text{верх крит}}$, то виділений фактор не впливає на генереальну сукупуність, в іншому випадку, цей вплив суттєвий.

65.Двофакторний варіансний аналіз.
Нехай дано вибірку $x_1, x_{2.} \dots x_N$ незалежних спостережень над деякою одновимірною нормально розподіленою величиною, елементи якої можна згрупувати по ступеням проявів двох факторів А та В. Нехай фактор А має m ступенів прояву, В – n ступенів. Очевидно, що N= n*m. Припустимо, що для кожного конкретного ступеня А і В дано рівно одне спостереження. Тоді всі дані можна записати в таблицю.

Знайдемо середнє по стрічках, середнє по стовпчиках, середнє вибіркове.

Можна довести, що

$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(x_{ij} - x_{..})^2 = n\sum_{i=1}^{m}(x_{i.} - x_{..})^2 + m\sum_{j=1}^{n}(x_{.j} - x_{..})^2 + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(x_{ij} - x_{i.} - x_{.j} + x_{..})^2.$

Тоді з цієї формули можна отримати, що$s^2 = a_1 s_A^2 + a_2 s_B^2 + a_3 s_r^2$, де $a_1 = \frac{m-1}{mn-1}$, $a_2 = \frac{n-1}{mn-1}$, $a_3 = \frac{(n-1)(m-1)}{mn-1}$ та варіанса між групами ознаки А є $s_A^2 = \frac{n}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(x_{i.} - x_{..})^2$ між групами ознаки В - $s_B^2 = \frac{m}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(x_{.j} - x_{..})^2$ і залишкова варіанса $s_r^2 = \frac{1}{(n-1)(m-1)}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(x_{ij} - x_{i.} - x_{.j} + x_{..})^2$.

Кожен рядок і стовпець можна вважати окремою вибіркою. Якщо фактори А і В не впливають на значення в цих вибірках – то вони однорідні. Якщо вони однорідні, то між їхніми середніми арифметичними не має бути суттєвої відмінності. А це означає, що s_A^2 і s_B^2 і s_r^2повинні бути варіансами з однорідних вибірок. Тоді до них можна застосувати критерій Фішера з статистикою s_A^2/s_r^2для перевірки гіпотези про те, що фактор А не впливає на генеральну сукупність, і з статистикою s_B^2/s_r^2для перевірки гіпотези про те, що фактор В не впливає на генеральну сукупність.

66.Трифакторний варіансний аналіз.
Нехай дано вибірку незалежних спостережень $x_1, x_{2.} \dots x_N$ над деякою нормально розподіленою мінливою величиною, елементи якої можна розділити на n груп за проявом фактора А, m груп за проявом фактора В,та l груп за проявом фактора С. Тоді можна довести, що

$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{l}(x_{ijk} - x_{\dots})^2 = nl\sum_{i=1}^{m}(x_{i..} - x_{\dots})^2 + ml\sum_{j=1}^{n}(x_{.j.} - x_{\dots})^2 + mn\sum_{k=1}^{l}(x_{..k} - x_{\dots})^2 + l\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(x_{ij.} - x_{i..} - x_{.j.} + x_{\dots})^2 + n\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{l}(x_{i*k} - x_{i..} - x_{..k} + x_{\dots})^2 + m\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{l}(x_{.jk} - x_{.j.} - x_{..k} + x_{\dots})^2 + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{l}(x_{ijk} - x_{.jk} - x_{i*k} - x_{ij.} + x_{i..} + x_{.j.} + x_{..k} + x_{\dots})^2.$

З цієї формули можна отримати, що повна варіанса є лінійною комбінацією варіанс по групам n, l і m.

Тепер можна довести, що якщо фактори А,В,С не впливають на генеральну сукупність, то вибірки по групам n,l,m і загальна вибірка є однорідні, а отже до них можна застосувати критерій Фішера. Для впливу факторів А,В,С на генеральну сукупність використаємо статистики s_A^2/s_r^2, s_B^2/s_r^2, sC^2/s_r^2, а для сумісного впливу факторів А і В статистику s_{AB}^2/s_r^2.

67. Варіансний аналіз за схемою латинського квадрата.

Озн. *Латинським квадратом розміру n×n* з елементів $a_1 \dots a_n$ наз матриця, в кожній стрічці і в кожному стовпчику якої зустрічається лише 1 раз кожен з елементів $a_1 \dots a_n$.

Виберемо латинський квадрат m×m і розташуємо вибіркові знач $\mathrm{x}_1 \dots \mathrm{x}_n$, класифікуючи їх по рядках за ознакою А, а по стовпцях за ознакою В так, щоб при цьому за 3-тьою ознакою С вони утворили цей вибраний лат квадрат. В результаті отримаємо таблицю, значення 3-тього індексу якої(номер рівня фактора С) утворює вибраний латинський квадрат. Можна довести, що $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}(x_{ijk} - x_{\dots}) = m\sum_{i=1}^{m}(x_{i..} - x_{\dots})^2 + m\sum_{j=1}^{m}(x_{.j.} - x_{\dots})^2 + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}(x_{ijk} - x_{i..} - x_{.j.} - x_{..k} + 2x_{\dots})^2 + m\sum_{k=1}^{m}(x_{..k} - x_{\dots})^2$. (1)

З (1) випливає, що загальна девіація = сумі девіацій в групах по проявах ознак А, В, С і залишком девіації.

$s_A^2 = m\frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(x_{i..} - x_{\dots})^2$,$s_B^2 = m\frac{1}{m-1}\sum_{j=1}^{m}(x_{.j.} - x_{\dots})^2$, $s_C^2 = m\frac{1}{m-1}\sum_{k=1}^{m}(x_{..k} - x_{\dots})^2$, $s_r^2 = \frac{1}{(m-1)(m-2)}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}(x_{ijk} - x_{i..} - x_{.j.} - x_{..k} + 2x_{\dots})^2$.

Варіанси є незміщеними оцінками дисперсії генеральної сукупності. Тому для перевірки гіпотези про вплив факторів на генеральну популяцію можна застосувати статистики Фішера: $F_A = \frac{S_A^2}{S_r^2}$, $F_B = \frac{S_B^2}{S_r^2}$, $F_C = \frac{S_C^2}{S_r^2}$. Варіансний аналіз за схемою латинського квадрата є неповним три факторним варіантним аналізом. Він вимагає в m разів менше спостережень і обчислень, але всі три фактори повинні мати однакове число в m рівнів.

68. Кореліційний аналіз (коваріація, кореляція, регресія).

Озн. *Коваріацією* між випадковими змінними ξ та η наз другий змішаний центральний момент цих випадкових змінних, тобто $cov(\xi,\eta) = E((\xi - E\xi)(\eta - E\eta))$.

Властивості: 1) симетрія: $cov(\xi,\eta) = cov(\eta,\xi)$. 2) якщо незалежні випадкові змінні, то $cov(\xi,\eta) = 0$.

Озн. *Кореляцією* між випадковими змінними ξ та η наз величина $\rho(\xi,\eta) = \frac{cov(\xi,\eta)}{\sqrt{D\xi}\sqrt{D\eta}}$

Властивості: 1) симетрія: $\rho(\xi,\eta) = \rho(\eta,\xi)$. 2) якщо незалежні випадкові змінні, то $\rho(\xi,\eta) = 0$.

Озн. *Регресії* змінної η на ξ наз величина $R(\eta,\xi) = \rho(\xi,\eta)\frac{\sqrt{D\eta}}{\sqrt{D\xi}}$.

69. Пряма регресія.

Нехай маємо n пар (x_i, y_i), (i = 1,…,n) незалежних спостережень проведених в однакових умовах над двовимірним випадковим вектором (ξ,η). Випадкові змінні ξ та η нам невідомі, тому на основі даних спостережень хочемо зробити висновок про кореляцію між ними.

Вибіркова коваріація вектора: $c_{12} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$, вибіркова кореляція: $r_{12} = \frac{c_{12}}{s_1 s_2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}}$, вибіркова регресія другої координати на першу: $b_{21} = r_{12}\frac{s_2}{s_1} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$, вибіркова регресія першої координати на другу: $b_{12} = r_{12}\frac{s_1}{s_2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}$. Вибірковим аналогом дисперсії випадкової змінної $\tau = -a\xi + \eta$, (a>0, a = const) є варіанта $s_\tau^2 = a^2 s_1^2 - 2ac_{12}s_1 s_2 + s_2^2$, яка при $a = b_{12} = r_{12}\frac{s_1}{s_2}$ досягає мінімуму $(s_\tau^2)_{min} = (1 - r_{12}^2)s_2$.(1)

З (1) випливає, що $-1 \le r_{12} \le 1$. Зокрема, якщо $r_{12} = \pm 1$, то $(s_\tau^2)_{min} = 0$. Отже всі $-ax_i + y_i$ приймають однакове значення b = const, тобто, всі точки (x_i, y_i),…, (x_n, y_n), лежать на одній прямій $y = ax + b$. Якщо $-1 < r_{12} < 1$, то проведемо через точку $(\bar{x}, \bar{y})$ пряму $y = ax + b$, яка мінімізує суму квадратів відхилень вибіркових значень вектора(ξ,η) в напрямку осі OY. Отже потрібно мінімізувати функцію $f(a,b) = \sum_{i=1}^{n}(y_i - ax_i - b)^2$. Точка (a,b) є точкою мінімуму ф-ції, тобто сума відхилень точок вибірки (x_i, y_i), (i=1,…,n) від прямої $y - \bar{y} = b_{21}(x - \bar{x})$ в напрямку осі OY є найменшою. Ця пряма називається прямою регресії другої компонента вектора (ξ,η) на першу. Аналогічно $x - \bar{x} = b_{12}(y - \bar{y})$ мінімізує суму квадратів відхилень від точок даної вибірки в напрямку осі OX. І називається прямою регресії першої компонента вектора(ξ,η) на другу.

70. Кореляція вищих порядків ξ.

Нехай маємо випадковий вектор $(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n)$. Хочемо вивчити кореляцію, наприклад, між ξ_1 та ξ_2. Для цього будемо вважати всі інші координати $\xi_3, \xi_4 \ldots \xi_n$зафіксованими. Але проблема в тому, що кореляція між нашими вибраними змінними може бути обумовлена тим, що вони можуть бути залежними від третьої змінною ξ_i , а в випадку з фіксованою третьою змінною, вони будуть стохастично незалежні. Тому спочатку треба розглянути кореляцію наших 2 елементів у тривимірному векторі (ξ_1, ξ_2, ξ_3). Вплив третьої координати на перші дві нейтралізуємо заміною $\overline{\xi_1}=\xi_1 - \lambda\xi_3$ та $\overline{\xi_2}=\xi_2 - \mu\xi_3$, коефіцієнти кореляції яких зξ_3рівні 0. Якщо $E(\xi_1)=E(\xi_2)=E(\xi_3)=0$, то коефіційєнти кореляції $\rho(\xi_1, \xi_2) = \frac{E(\xi_1,\xi_2)}{\sqrt{D(\xi_1)}\sqrt{D(\xi_2)}}$ (*). Множники λ,μ вибираємо так, щоб $E(\xi_1, \xi_3)=E(\xi_1\xi_3 - \lambda\xi_3^2)=0$ та $E(\xi_2, \xi_3) = E(\xi_2\xi_3 - \lambda\xi_3^2)=0$ Звідси виражаємо множники λ,μ. І тепер можемо виразити коефіцієнт кореляції між ξ_1 та ξ_1 без впливу змінної ξ_3: $\rho((\xi_1, \xi_2)/\xi_3) = \frac{E((\xi_1-\lambda\xi_3)(\xi_2-\mu\xi_3))}{\sqrt{D(\xi_1-\lambda\xi_3)}\sqrt{D(\xi_2-\mu\xi_3)}}$. Розкривши дужки та використовуючи властивості мат сподівання і формулу (*) переконаємось, що

$E((\xi_1 - \lambda\xi_3)(\xi_2 - \mu\xi_3)) = \rho(\xi_1, \xi_2)\sqrt{D(\xi_1)}\sqrt{D(\xi_2)} - \lambda\, \rho(\xi_2, \xi_3)\sqrt{D(\xi_2)}\sqrt{D(\xi_3)} - \mu\rho(\xi_1, \xi_3)\sqrt{D(\xi_1)}\sqrt{D(\xi_3)} + \lambda\mu\, D(\xi_3)$

Виразивши λ,μ отримаємо: $E((\xi_1 - \lambda\xi_3)(\xi_2 - \mu\xi_3)) = (\rho(\xi_1, \xi_2)- \rho(\xi_1, \xi_3))\sqrt{D(\xi_1)}\sqrt{D(\xi_2)}$.

Аналогічно покажемо, що $D(\xi_1 - \lambda\xi_3)=E(\xi_1 - \lambda\xi_3)^2 = (1-\rho^2(\xi_1, \xi_3))D(\xi_1)$.

$D(\xi_2 - \lambda\xi_3)=E(\xi_2 - \lambda\xi_3)^2=(1-\rho^2(\xi_2, \xi_3))D(\xi_2)$.

Підставивши попередні формули, отримаємо: $\rho((\xi_1, \xi_2)/\xi_3) = \frac{\rho(\xi_1,\xi_2)- \rho(\xi_1,\xi_3)\rho(\xi_2,\xi_3)}{\sqrt{(1- \rho^2(\xi_1,\xi_3))}\sqrt{(1- \rho^2(\xi_2,\xi_3))}}$ (**)

Використовуючи замість випадкових зміннихξ_1, ξ_2, ξ_3 їх вибіркові значення відповідно x_i, y_i, z_i цілком так само, як отримано формулу (**), отримаємо співвідношення

$r_{12[3} = \frac{r_{12}-r_{13}r_{23}}{\sqrt{1-r_{13}^2}\sqrt{1-r_{23}^2}}$, де r_{12}, r_{13}, r_{23} вибіркові кореляції відповідно між першою і другою координатою, першою і третьою, другою і третьою координатою випадкового вектора (ξ_1, ξ_2, ξ_3), $r_{12[3}$ – умовна кореляція між першою і другою координатою цього вектора при зафіксованій третій координаті. Формулу (9) узагальнюємо індукцією по розмірності простору випадкових змінних наступним чином. Індекси, які відповідають постійним значенням змінних, будемо називати німими, а кількість німих індексів – порядком частинної кореляції. Німі індекси записуватимемо після відкриваючої квадратної дужки. Тоді, наприклад, $r_{12[34\ldots m}$ – частинна вибіркова кореляція (m-2)-го порядку між координатами ξ_1 та ξ_2. Визначимо рекурентну частинну вибіркову кореляцію (m-2)-го порядку через три частинні вибіркові кореляції (m-3)-го порядку за формулою: $r_{12[34\ldots m} = \frac{r_{12[34\ldots(m-1)}-r_{1m[34\ldots(m-1)}r_{2m[34\ldots(m-1)}}{\sqrt{1-r_{1m[34\ldots(m-1)}^2}\sqrt{1-r_{2m[34\ldots(m-1)}^2}}$.

1. Класифікація подій. Класичне поняття ймовірності (комбінаторна ймовірність
2. Теореми про ймовірність суми подій.
3. Умовні ймовірності (ймовірності добутку подій).
4. Незалежні події.
5. Незалежні в сукупності.
6. Формула повної ймовірності.
7. Формула гіпотез (формула Байєса
8. Послідовність незалежних спроб. Схема Бернуллі. Формула Бернуллі
9. Біномний розподіл
10. Найімовірніше число успіхів у схемі Бернуллі
11. Локальна теорема Муавра - Лапласа.
12. Теорема Пуасона.
13. Інтегральна теорема Муавра - Лапласа.
14. Практичні застосування інтегральної теореми Муавра - Лапласа. Теорема Бернуллі
15. Геометричні ймовірності. Задача Бюффона
16. Аксіоматика теорій ймовірності.
17. Випадкові змінні, функції розподілу, їх властивості.
18. Класи випадкових змінних.
19. Випадкові вектори. Незалежні випадкові вектори
20. Перетворення ймовірностей. Приклади
21. Числові характеристики випадкових змінних
22. Математичні сподівання
23. Механічна інтерпретація математичного сподівання
24. Геометрична інтерпретація математичного сподівання
25. Властивості математичного сподівання
26. Дисперсія та її властивості
27. Закон великих чисел. Нерівність Маркова, Чебишева.
28. Закон великих чисел у формі Чебишева
29. Деякі наслідки теореми Чебишева
30. Характеристична функція випадкової змінної.
31. Властивості характеристичних функцій.
32. Взаємно однозначна відповідність між функцією розподілу і характеристичною функцією.
33. Теореми про суми характеристичних функцій.
34. Стохастичні процеси, ланцюг Маркова.
35. Ймовірність переходу системи із стану в стан за n кроків.
36. Стаціонарний розподіл для ланцюга Маркова.
37. Пуасонівський процес.
38. Процеси розмноження та вимирання.
39. Процес чистого розмноження з незалежними від часу інтенсивностями.
40. Процес чистого розмноження з незалежними від стану інтенсивностями.
41. Процес чистого вимирання з незалежними від часу інтенсивностями.
42. Процес чистого вимирання з незалежними від стану інтенсивностями.
43. Суть математичної статистики, предмет та методи.
44. Представлення статистичного матеріалу
45. Числові характеристики статистичної змінної. Числові характеристики центральної тенденції.
46. Числові характеристики розсіяння.
47. Квантилі. Інтерквантильні широти.
48. Моменти випадкової змінної.
49. Числові характеристики форми.
50. Схема статистичного доведення. Приклади статистичного доведення.
51. Критерійх2-
52. Метод максимуму правдоподібності.
53. Статистичне оцінювання параметрів нормальної популяції.
54. Оцінка невідомого математичного сподівання нормальної генеральної сукупності...
55. Порівняння математичних сподівань двох нормально розподілених генеральних сукупностей.
56. Інтервал довір'я невідомого математичного сподівання.
57. Оцінка дисперсії нормального розподілу популяції.
58. Інтервал довір'я для невідомої дисперсії нормального розподілу популяції.
59. Порівняння дисперсій двох нормальних популяцій. Критерій Колмогорова.
60. Критерій Смирнова.
61. Критерій знаків. Інтервал для прийняття рішень.
62. Гіпотеза про медіану.
63. Критерій Вілкоксона.
64. Однофакторний варіансний аналіз
65. Двофакторний варіансний аналіз.
66. Трифакторний варіансний аналіз.
67. Варіансний аналіз за схемою латинського квадрата.
68. Кореляційний аналіз (коваріація, кореляція, регресія).
69. Пряма регресія.
70. Кореляції вищих порядків