Локальна та інтегральна теорема Муавра-Лапласа

Локальна теорема Муавра-Лапласа. Якщо у схемі Бернуллі кількість випробувань n досить велика, ймовірність $p = P(A)$ появи події A в цих випробуваннях однакова і $0 < p < 1$, то ймовірність $P_n(m)$ появи події A m разів в n випробуваннях обчислюють за наближеною формулою:

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x_0), \text{ де } x_0 = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}. \qquad (1.20)$$

Цю формулу доцільно використовувати, коли $n \ge 100$ і $\sqrt{npq} > 20$.

Функцію вигляду

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

називають ***диференціальною функцією Лапласа***.

Значення цієї функції часто використовують і вони наведені у Додатку 1 для $0 \le x \le 3{,}9$. Для значень $x \ge 4,\ x \le -4$ приймають, що $\varphi(x) = 0$, а для від'ємних значень аргумента x використовують парність функції: $\varphi(-x) = \varphi(x)$.

Інтегральна теорема Муавра-Лапласа. Якщо у схемі Бернуллі в кожному з n незалежних випробувань подія A може з'явитися з однаковою ймовірністю $p = P(A)$ і $0 < p < 1$, то ймовірність $P_n(m_1 \le m \le m_2)$ появ події A в цих випробуваннях не менше ніж m_1 разів і не більше ніж m_2 разів обчислюють за формулою:

$$P_n(m_1 \le m \le m_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \qquad (1.21)$$

де $x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}$.

Функцію вигляду

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

називають ***інтегральною функцією Лапласа***.

Цю функцію також часто використовують на практиці, тому її значення для $0 \le x < 5$ наведені у Додатку 2. Для $x \ge 5$ приймаємо, що $\Phi(x) = 0{,}5$, а для від'ємних значень аргумента x використовуємо непарність цієї функції: $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.

Приклад 1. Керівництво прикордонної застави зібрало дані, які свідчать, що 80% автомобілів, які перетинають кордон, легкові. Якщо на кордон прибуде 400 автомобілів, то яка ймовірність, що:

а) 330 з них будуть легкові?

б) серед них буде від 300 до 350 легкових?

Розв'язання. Тут є послідовність випробувань за схемою Бернуллі, в якій кількість випробувань $n = 400$, а подія A – навмання вибраний автомобіль – легковий $p = P(A) = 0{,}8$.

а) Імовірність $P_{400}(330)$ того, що 330 автомобілів з 400 є легкові обчислимо за формулою (1.20), бо число випробувань велике:

$$x_0 = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} = \frac{330 - 400 \cdot 0{,}8}{\sqrt{400 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = \frac{10}{20 \cdot 0{,}4} \approx \frac{10}{8} = 1{,}25;$$

$$P_{400}(330) = \frac{\varphi(1{,}25)}{\sqrt{400 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} \approx \frac{0{,}1826}{8} = 0{,}0226.$$

$\varphi(1{,}25) = 0{,}1826$ знайдено за таблицею Додатка 1.

б) Імовірність $P_{400}\left(300 \le m \le 350\right)$ того, що з 400 автомобілів легковими будуть від 300 до 350, обчислимо за формулою (1.21):

$$x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{300 - 400 \cdot 0,8}{\sqrt{400 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} \approx \frac{-20}{8} = -2,5;$$

$$x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{350 - 400 \cdot 0,8}{\sqrt{400 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} \approx \frac{30}{8} = 3,75;$$

$$P_{400}\left(300 \le m \le 350\right) \approx \Phi\left(3,75\right) - \Phi\left(-2,5\right) = \Phi\left(3,75\right) + \Phi\left(2,5\right) = \frac{\Phi(3,5) + \Phi(4,0)}{2} + \Phi(2,5) =$$

$$= \frac{0,49977 + 0,499968}{2} + 0,4938 = 0,993669.$$

Значення $\Phi\left(3,75\right)$ і $\Phi\left(2,5\right)$ знайдені за таблицею Додатка 2.

Приклад 2. Імовірність того, що навмання вибране підприємство з 2 000 у регіоні є рентабельним, дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що серед цих 2 000 підприємств є рентабельними:

а) не менше 1 550 і не більше ніж 1 700;

б) не менше ніж 1 750;

в) не більше ніж 1 800.

Розв'язання. У даній серії випробувань за схемою Бернуллі кількість n = 2 000. Подія A полягає в тому, що навмання вибране одне підприємство є рентабельним. При цьому $p = P\left(A\right) = 0,8$, $q = P\left(\bar{A}\right) = 1 - 0,8 = 0,2$.

а) Імовірність $P_{2000}(1500 \le m \le 1700)$ того, що в числі 2 000 підприємств регіону рентабельних є не менше 1 550 і не більше ніж 1 700 обчислимо за формулою (1.21):

$$\sqrt{npq} = \sqrt{2000 \cdot 0,8 \cdot 0,2} = \sqrt{320} \approx 17,89;$$

$$x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{1550 - 2000 \cdot 0,8}{17,89} = \frac{-50}{17,89} \approx -2,80;$$

$$x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{1700 - 2000 \cdot 0,8}{17,89} = \frac{100}{17,89} \approx 5,6;$$

$$P_{2000}\left(1550 \le m \le 1700\right) \approx \Phi\left(5,58\right) - \Phi\left(-2,80\right) = \Phi\left(5,58\right) + \Phi\left(2,80\right) = 0,5 + 0,49735 = 0,99735,$$

бо за таблицею Додатка 2 приймаємо, що $\Phi\left(5,58\right)$=0,5,

$$\Phi\left(2,79\right) = \frac{\Phi\left(2,78\right) + \Phi\left(2,80\right)}{2} = \frac{0,4973 + 0,49734}{2} = 0,49735.$$

б) Шукану ймовірність $P_{2000}(m \ge 1750)$ обчислюємо за формулою (1.21), враховуючи, що $1750 \le m \le 2000$:

$$x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{1750 - 2000 \cdot 0,8}{17,9} = \frac{150}{17,9} \approx 8,38;$$

$$x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{2000 - 2000 \cdot 0,8}{17,9} = \frac{400}{17,9} = 22,35;$$

$$P_{2000}(m \ge 1750) = P\left(1750 \le m \le 2000\right) = \Phi\left(22,35\right) - \Phi\left(8,38\right) = 0,5 - 0,5 = 0,$$

Тобто подія $(m \ge 1750)$ неможлива.

в) Імовірність $P_{2000}\left(m \le 1800\right)$ обчислюємо за формулою (1.21), враховуючи, що $0 \le m \le 1800$:

$$x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{0 - 2000 \cdot 0,8}{17,9} = -89,38;$$

$$x_2=\frac{m_2-np}{\sqrt{npq}}=\frac{1800-2000\cdot 0,8}{17,9}=\frac{200}{17,9}\approx 11,8;$$

$P_{2000}(m\le 1800)=P_{2000}\left(0\le m\le 1800\right)=\Phi\left(11,8\right)-\Phi\left(-89,38\right)$=0,5+0,5=1**,**

тобто подія $\left(m\le 1800\right)$ вірогідна.

Задачі для самостійного розв'язування

1. Частка 2-го сорту деякої масової продукції в середньому становить 20 %. Навмання взято 100 примірників цієї продукції. Яка кількість виробів 2-го сорту в утвореній групі найімовірніша і яка імовірність того, що в цій групі буде саме така кількість виробів 2-го сорту?

2. На кожні 40 відштампованих виробів у середньому припадає чотири дефектних. З усієї продукції навмання узято 400 виробів. Знайти ймовірність того, що серед них 350 виробів будуть без дефектів.

3. Посівний фонд містить 92 % насіння 1-го сорту. Навмання взято 150 зерен. Знайти ймовірність того, що серед них 140 зерен 1-го сорту.

4. Частка заготівок із відхиленням від установленого стандарту при обточуванні таких заготівок становить у середньому 0,11 усієї кількості обточених заготівок. Знайти ймовірність того, що із 700 обточених заготівок 620 відповідають стандарту.

5. Стандартних деталей автомат штампує у 5 раз більше, ніж нестандартних. Навмання вибрано 200 деталей. Знайти ймовірність того, що серед них 30 деталей нестандартні.

6. Імовірність того, що посіяне зерно ячменю проросте в лабораторних умовах, у середньому дорівнює 0,9. Було посіяно 700 зернин ячменю в лабораторних умовах. Визначити найімовірніше число зернин, які проростуть із цієї кількості зернин, та обчислити ймовірність цього числа.

7. Під час дослідження статутних фондів комерційних банків з'ясовано, що четверта частина банків має статутний фонд вище ніж 100 млн грн. Знайти ймовірність того, що серед 300 банків мають статутний фонд вище 100 млн грн.:

1) рівно 70;
2) від 70 до 80 включно;
3) більше ніж 80;
4) менше ніж 60.

8. Зерна пшениці проростають з імовірністю 0,95. Знайти ймовірність того, що із 2 000 посіяних зерен зійде від 1 880 до 1 920.

9. Деталі 1-го сорту становлять у середньому 2/3 від усіх деталей, що їх виготовляє верстат-автомат. Навмання взято 300 деталей. Знайти ймовірність того, що серед них буде від 190 до 210 деталей 1-го сорту.

10. Обстежується 500 проб руди. Імовірність промислового вмісту металу в кожній пробі дорівнює 0,7. Знайти ймовірність того, що кількість проб із промисловим вмістом металу буде в межах від 300 до 370?

11. Імовірність того, що покупець, який завітав до взуттєвого магазину, здійснить покупку, дорівнює в середньому 0,1. Яка ймовірність того, що із 900 покупців, що завітали до магазину, здійснять покупку:

1) 90 покупців;
2) від 100 до 180 покупців?

12. Фабрика випускає 75% виробів 1-го сорту. Із партії готових виробів навмання беруть 400 деталей. Обчислити ймовірність того, що виробів 1-го сорту виявиться 290 шт.

13. Верстат-автомат виготовляє однотипні деталі. Імовірність того, що виготовлена одна деталь виявиться стандартною, є величиною сталою і дорівнює 0,95. За зміну верстатом було виготовлено 800 деталей. Яка ймовірність того, що стандартних деталей серед них буде:

1) від 720 до 780 шт.;
2) від 740 до 790 шт.?

14. В електромережу ввімкнено незалежно одну від одної 500 електролампочок, які освітлюють у вечірній час виробничий цех заводу. Імовірність того, що електролампочка в електромережі не перегорить, є величиною сталою і дорівнює 0,8. Яка ймовірність того, що з 500 електролампочок не перегорить:

1) не більш як 380 шт.;

2) не менш як 390 шт.

15. У партії однотипних деталей стандартні становить 82%. Навмання з партії беруть 400 деталей. Яка ймовірність того, що серед них стандартних буде:

1) 355;

2) від 355 до 300.

Знайти найімовірніше число появи стандартних деталей і обчислити відповідну ймовірність.