Теорема Пуассона. Теорема Бернуллі

Якщо число n випробувань у схемі Бернуллі велике, а ймовірність $p = P(A)$ мала, то ймовірності $P_n(m)$ і $P_n\left(m_1 \le m \le m_2\right)$ доцільно обчислювати за наближеними ***формулами Пуассона***:

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}, \tag{1.22}$$

$$P_n(m_1 \le m \le m_2) = \sum_{i=m_1}^{m_2} \frac{\lambda^i}{i!} \cdot e^{-\lambda}, \tag{1.23}$$

де $\lambda = np$.

Ці величини також є табульовані (для $\lambda \le 20$) і наведені в Додатках 3 і 4, відповідно.

Ймовірність того, що при n незалежних випробуваннях за схемою Бернуллі відхилення відносної частоти $W_n(A)$ появ події A в цій серії випробувань від імовірності $p = P(A)$ появи цієї події в кожному окремому випробуванні не перевищує числа $\varepsilon > 0$, обчислюємо за формулою:

$$P\left(\left|W_n(A) - p\right| \le \varepsilon\right) = 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right). \tag{1.24}$$

Приклад 1. Підручник видано тиражем 100 000 екземплярів. Імовірність того, що підручник зшитий неправильно, дорівнює 0,0001. Знайти ймовірність того, що тираж містить рівно п’ять бракованих із-за зазначеної причини книг.

Розв’язання. У даній задачі йдеться про схему випробувань Бернуллі, у якій n=100 000. Подія A – вибрана навмання одна книга зшита неправильно, і потрібно знайти ймовірність появи події A рівно п’ять разів у цій серії випробувань. Оскільки ймовірність $P(A) = p = 0,0001$ події A є малою і число випробувань достатньо велике, то знаходити ймовірність $P_n(m)$ треба за формулою Пуассона. У цьому випадку

$\lambda = n \cdot p = 100000 \cdot 0,0001 = 10$

і $P_{100000}(5) = \frac{10^5}{5!} \cdot e^{-10} = \frac{100000}{120} \cdot \frac{1}{e^{10}} \approx 0,038$.

Приклад 2. Імовірність потрапляння стрільця в мішень (подія A) дорівнює 0,75. Знайти:

а) імовірність того, що під час виконання 500 пострілів відносна частота потрапляння стрільцем у мішень відхилиться від його ймовірності за абсолютною величиною не більше ніж на 0,02;

б) число пострілів, для яких з імовірністю 0,874 відносна частота потрапляння стрільцем у мішень відхилиться від ймовірності потрапляння за абсолютною величиною не більше ніж на 0,01.

Розв’язання. а) Для визначення шуканої ймовірності використовуємо формулу (1.24), прийнявши в ній p = 0,75, q = 0,25, n = 500. Шукана ймовірність

$$P\left(\left|W_n - 0,75\right| < 0,02\right) = 2 \cdot \Phi\left(0,02 \cdot \sqrt{\frac{500}{0,75 \cdot 0,25}}\right) = 2\Phi\left(0,02 \cdot \sqrt{\frac{500}{0,1875}}\right) =$$

$$= 2 \cdot \Phi\left(0,02 \cdot 51,64\right) = 2 \cdot \Phi\left(1,03\right).$$

За таблицею Додатка 2 знаходимо $\Phi(1,03) = 0,3485$ і маємо, що

$$P\left(\left|W_n - 0,75\right| < 0,02\right) = 2 \cdot 0,3485 = 0,697.$$

б) Для визначення числа пострілів також використаємо формулу (1.24), прийнявши в ній p = 0,75, q = 0,25, $\varepsilon = 0,01$ і

$P\left(\left|W_n - 0,75\right| < 0,01\right) = 0,874 \Rightarrow$

$$0,874 = 2\Phi\cdot\left(0,01\cdot\sqrt{\frac{n}{0,75\cdot 0,25}}\right) \Rightarrow 0,437 = \Phi\left(0,01\cdot\sqrt{\frac{n}{0,1875}}\right).$$

За таблицею Додатка 2 знаходимо $\Phi(x) = 0,437,$ якщо x = 1,53. Тому

$$0,01\cdot\sqrt{\frac{n}{0,1875}} = 1,53 \Rightarrow \sqrt{\frac{n}{0,1875}} = 153 \Rightarrow \frac{n}{0,1875} = 23409 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = 4389,1875.$$

Отже, шукане число пострілів повинно бути не менше ніж 4 390.

Задачі для самостійного розв'язування

1. У фірмі працює 730 співробітників. Знайти ймовірність, що у двох співробітників день народження припаде на Новий рік. Вважати, що кількість днів у році 365.

2. Магазин одержав 1 000 пляшок мінеральної води. Імовірність того, що під час транспортування пляшка розіб'ється, дорівнює 0,003. Знайти ймовірність, що магазин одержить розбитих пляшок:

1) рівно дві;
2) менше ніж дві;
3) більше ніж дві;
4) хоча б одну.

3. До банку надійшло 5 000 пачок грошових знаків. Імовірність того, що пачку неправильно вкомплектовано, дорівнює 0,0004. Знайти ймовірність того, що серед одержаних пачок буде не більш як одна неправильно укомплектована.

4. Пристрій складається із 2 000 елементів, які працюють незалежно один від одного. Імовірність відмови кожного елемента дорівнює 0,002. Знайти ймовірність відмови принаймні одного елемента.

5. Імовірність того, що під час епідемії грипу мешканець міста захворіє на цю хворобу, становить у середньому 0,03%. Яка ймовірність того, що серед навмання вибраних 300 мешканців міста хворих на грип виявиться:

1) п'ять осіб;
2) не більш як три особи.

6. Телефонна станція обслуговує 1000 абонентів. Імовірність того, що протягом години абонент розмовлятиме по телефону, дорівнює в середньому 0,002. Яка ймовірність того, що протягом години одночасно розмовлятимуть по телефону:

1) п'ять абонентів;
2) не більш як п'ять абонентів?

7. Під час виготовлення деталей у цеху брак становить у середньому 8%. Скільки деталей має перевірити контролер, щоб імовірність того, що абсолютна величина відхилення відносної частоти появи стандартної деталі від ймовірності p виготовлення такої деталі не перевищувала $\varepsilon = 0,002$, дорівнювала 0,988.

8. Імовірність того, що дилер, який торгує цінними паперами, продасть їх, дорівнює 0,8. Скільки повинно бути цінних паперів, щоб можна було стверджувати з імовірністю 0,992, що доля проданих серед них відхилиться від 0,8 не більш ніж на 0,05 (за абсолютною величиною)?

9. Верстат-автомат виготовляє стандартну деталь з імовірністю 0,9. Із продукції беруть партію деталей. Скільки деталей має містити партія, щоб з імовірністю 0,9973 можна було стверджувати: у партії відхилення відносної частоти появи нестандартної деталі від імовірності її виготовлення не перевищуватиме 0,03? Визначити можливу кількість нестандартних деталей у партії за даних умов.

10. Імовірність виходу з ладу виробу під час проведення експерименту, який має на меті виявити надійність виробу в роботі, дорівнює 0,2. Було перевірено 400 виробів. Чому дорівнює ймовірність такої події: абсолютна величина відхилення відносної частоти виходу із ладу виробів від імовірності p = 0,2 становить ε = 0,01?

11. У разі автоматичного виготовлення втулок брак становить у середньому 10%. Скільки втулок має взяти контролер, щоб імовірність того, що абсолютна величина відхилення відносної частоти появи стандартної втулки $W(A)$ (A – випадкова подія, яка полягає в появі стандартної втулки) від імовірності p виготовлення такої втулки не перевищує $\varepsilon = 0,001$, дорівнювала 0,999?

12. Імовірність появи випадкової події в кожному з 900 незалежних експериментів є величиною сталою і дорівнює 0,75. Яким має бути значення $\varepsilon > 0$, щоб $P(|W(A) - p| < \varepsilon) = 0,99$?

13. Для кожного з 900 першокурсників імовірність закінчити інститут дорівнює 0,9. Знайти межі, в яких перебуватиме відносна частота кількості першокурсників, які закінчать інститут з імовірністю 0,88.

14. Проводяться n незалежних випробувань, у кожному з яких деяка подія A настає зі сталою ймовірністю $p = 0,8$.

1) Знайти імовірність того, що в 625 випробуваннях відносна частота появи події відхилиться від її імовірності не більш ніж на 0,03.
2) Скільки потрібно провести випробувань, щоб з імовірністю 0,9 гарантувати, що відхилення відносної частоти від імовірності настання події A не перевищить 0,01?
3) У яких межах може міститися відносна частота настання події A в 1 000 випробуваннях, якщо відхилення відносної частоти від імовірності настання події A в одному випробуванні потрібно гарантувати з імовірністю 0,7?

15. Імовірність виготовити на заводі виріб найвищої якості дорівнює 0,85. Навмання беруть 700 виробів. Визначити межі, в яких перебуватиме відносна частота появи виробів найвищої якості з імовірністю 0,999.

16. Імовірність появи випадкової події в кожному з n незалежних експериментів є величиною сталою і дорівнює p. Яка ймовірність того, що при цьому виконуватиметься нерівність $np - 1,5\sqrt{npq} \le m \le np + 1,5\sqrt{npq}$?