Послідовність незалежних випробувань (схема Бернуллі)

Якщо всі n незалежних випробувань (експериментів) проводять в однакових умовах, і ймовірність появи події A в кожному випробуванні однакова (не залежить від появи чи непояви події A в інших випробуваннях), то таку послідовність випробувань називають ***схемою Бернуллі***.

Імовірність $P_n(m)$ появи події A рівно m разів в n випробуваннях (експериментах) за схемою Бернуллі обчислюють за ***формулою Бернуллі:***

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}, \tag{1.16}$$

де $p = P(A)$ – ймовірність появи події A в окремому випробуванні, $q = 1 - p = P(\bar{A})$, C_n^m – кількість комбінацій з n елементів по m елементів.

Імовірність $P_n(k \le m)$ появи події A не більше m разів в n випробуваннях за схемою Бернуллі обчислюють за формулою:

$$P_n(k \le m) = P_n(0) + P_n(1) + ... + P_n(m). \tag{1.17}$$

Імовірність $P_n(k \ge m)$ появи події A не менше m разів в n випробуваннях за схемою Бернуллі обчислюють за формулою:

$$P_n(k \ge m) = P_n(m) + P_n(m+1) + ... + P_n(n). \tag{1.18}$$

Найімовірніше число m_0 появи події A в n випробуваннях за схемою Бернуллі визначають співвідношенням:

$$np - q \le m_0 \le np + p, \tag{1.19}$$

де $p = P(A)$, $q = 1 - p$ і число $m_0 \ge 0$ є цілим.

Зазначимо, що довжина відрізка $[np - q, np + p]$ дорівнює одиниці, бо $(np + p) - (np - q) = p + q = 1$. Якщо $np - q$ і $np + p$ – дробові числа, то всередині цього відрізка є тільки одне число m_0, а в іншому випадку m_0 має два значення, які збігаються з кінцями проміжку.

Приклад 1. У місцевій лікарні протягом дня передбачають народження п’яти немовлят. Відомо, що ймовірність народження хлопчика дорівнює 0,51. Знайти ймовірність, що серед народжених немовлят:

а) два хлопчики;
б) не більше ніж два хлопчики;
в) більше ніж два хлопчики;
г) не менше ніж два і не більше ніж три хлопчики?

Яка найімовірніша кількість хлопчиків народиться?

Розв’язання. Нехай подія A – у лікарні народився хлопчик. У цьому випадку є серія $n = 5$ випробувань за схемою Бернуллі, у кожному з яких подія A може з’явитися з імовірністю $P(A) = p = 0,51$; $q = P(\bar{A}) = 1 - 0,51 = 0,49$.

Імовірність $P_5(2)$ народження двох хлопчиків серед 5-ти немовлят обчислюємо за формулою (1.16):

$$P_5(2) = C_5^2 \cdot 0,51^2 \cdot 0,49^3 = \frac{5!}{2! \cdot 3!} \cdot 0,51^2 \cdot 0,49^3 = \frac{3! \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3!} \cdot 0,51^2 \cdot 0,49^3 =$$
$$= 10 \cdot 0,2601 \cdot 0,117649 \approx 0,306.$$

б) Імовірність $P_5(0 \le m \le 2)$ народження не більше двох хлопчиків серед 5-ти немовлят обчислюємо за формулою (1.17):

$$P_5(0 \le m \le 2) = P_5(0) + P_5(1) + P_5(2) = C_5^0 \cdot 0,51^0 \cdot 0,49^5 +$$
$$+ C_5^1 \cdot 0,51 \cdot 0,49^4 + C_5^2 \cdot 0,51^2 \cdot 0,49^3 = \frac{5!}{0! \cdot 5!} \cdot 0,49^5 +$$

$$+\frac{5!}{1!\cdot 4!}\cdot 0,51\cdot 0,49^4+\frac{5!}{2!\cdot 3!}\cdot 0,51^2\cdot 0,49^3=0,49^5+$$
$$+5\cdot 0,51\cdot 0,49^4+10\cdot 0,51^2\cdot 0,49^3\approx 0,028+0,147+0,306=0,481.$$

(Нагадаємо, що 0!=1).

в) Імовірність того, що народиться більше ніж два хлопчики, обчислюємо за формулою (1.18):

$$P_5(m>2)=P_5(3)+P_5(4)+P_5(5)=C_5^3\cdot 0,51^3\cdot 0,49^2+C_5^4\cdot 0,51^4\cdot 0,49+$$
$$+C_5^5\cdot 0,51^5\cdot 0,49^0=\frac{5!}{3!\cdot 2!}\cdot 0,51^3\cdot 0,49^2+\frac{5!}{4!\cdot 1!}\cdot 0,51^4\cdot 0,49+$$
$$+\frac{5!}{5!\cdot 0!}\cdot 0,51^5=10\cdot 0,51^3\cdot 0,49^2+5\cdot 0,51^4\cdot 0,49+0,51^5=0,318+0,166+0,306=0,79.$$

г) Імовірність $P_5(2\le m\le 3)$ народження не менше ніж двох і не більше ніж трьох хлопчиків серед п'яти немовлят обчислюємо за допомогою об'єднання формул (1.17) і (1.18):

$$P_5(2\le m\le 3)=P_5(2)+P_5(3)=C_5^2\cdot 0,51^2\cdot 0,49^3+C_5^3\cdot 0,51^3\cdot 0,49^2\approx 0,306+0,318=0,624.$$

Найімовірніше число m_0 народження хлопчиків серед п'яти немовлят знаходимо за формулою (1.19):

$$5\cdot 0,51-0,49\le m_0\le 5\cdot 0,51+0,51\Leftrightarrow 2,55-0,49\le m_0\le 2,55+0,51\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2,06\le m_0\le 3,06\,.$$

Одержану нерівність задовольняє одне ціле число $m_0=3$, тому найімовірнішим є народження трьох хлопчиків.

Задачі для самостійного розв'язування

1. Із партії, в якій 12 стандартних і чотири нестандартні деталі, навмання беруть 3 деталі з поверненням. Знайти ймовірність того, що серед узятих деталей:

1) усі три стандартні;
2) не більш як одна нестандартна;
3) принаймні одна нестандартна.

2. Робітник обслуговує шість верстатів-автоматів. Імовірність того, що протягом години верстат-автомат потребує уваги робітника, є величиною сталою і дорівнює 0,6. Яка ймовірність того, що за годину уваги робітника потребують:

1) три верстати;
2) від двох до п'яти верстатів;
3) принаймні один верстат.

3. Завод виготовляє однотипні телевізори, з яких 85% вищої якості. З партії виготовлених заводом телевізорів навмання вибирають сім. Яка ймовірність того, що серед них телевізорів вищої якості буде:

1) чотири;
2) не менш як чотири.

4. У кожному із семи ящиків міститься по шість стандартних і чотири браковані однотипні деталі. Навмання з кожного ящика беруть по одній деталі. Обчислити ймовірність того, що серед семи взятих деталей стандартних буде:

1) три;
2) не менш як три;
3) не більш як три.

5. На кожні 30 штампованих виробів у середньому припадає 6 виробів з дефектом. Знайти ймовірність того, що з 5 навмання взятих виробів 3 виявляться без дефекту.

6. Деталі 2-го сорту становлять 2/3 усіх деталей, які є в партії. Знайти ймовірність того, що з 4 навмання взятих деталей 3 виявляться 2-го сорту.

7. Частка 3-го сорту становить у деякій масовій продукції у середньому 20 %. Знайти ймовірність того, що з п'яти узятих примірників продукції не менш як три будуть 3-го сорту.

8. У партії, у якій містяться вироби двох сортів, виробів другого сорту в 1,5 раза більше, ніж першого. Знайти ймовірність того, що серед трьох навмання взятих виробів принаймні один буде першого сорту.

9. Для забезпечення роботи на деякому будівельному об’єкті автопідприємство має шість автомобілів. Імовірність виходу кожного автомобіля на лінію в першу зміну дорівнює 0,8. Знайти ймовірність нормальної роботи автопідприємства, якщо для цього в першу зміну потрібно мати на лінії не менш як чотири автомобілі.

10. Під час тестування з математики студент має дати правильні відповіді на 5 запитань. Імовірність того, що він на позитивну оцінку відповість на одне запитання, у середньому дорівнює 0,8. Щоб скласти тест, студентові необхідно дати відповідь не менш ніж на три питання. Знайти ймовірність того, що студент складе тест.

11. На автобазі є 12 пасажирських автобусів. Імовірність того, що на маршрутну лінію вийде автобус, у середньому дорівнює 0,85. Знайти ймовірність того, що автобаза працюватиме в нормальному режимі, якщо для цього потрібно, аби на маршрутну лінію виїхало не менш як 9 автобусів.

12. Садівник восени посадив сім саджанців яблуні. Імовірність того, що будь-який із саджанців навесні проросте, у середньому становить 0,7. Обчислити ймовірність того, що із семи саджанців яблуні навесні проростуть:

1) три саджанці;
2) не менш як три.

Знайти найімовірніше число саджанців, які навесні проростуть, і обчислити відповідну ймовірність.

13. Імовірність виготовлення робітником деталі відмінної якості становить 0,75. Яка ймовірність того, що серед шести виготовлених деталей робітником хоча б одна буде відмінної якості? Знайти найімовірнішу кількість виготовлених робітником деталей відмінної якості й обчислити ймовірність цієї кількості.

14. У разі додержання певної технології 90% усієї продукції, виготовленої заводом, є найвищого сорту. Знайти найімовірніше число виробів найвищого сорту в партії з 200 штук.

15. У партії однотипних деталей кількості стандартних і бракованих деталей відносяться як 5:2. Навмання з партії беруть вісім деталей. Яка ймовірність того, що серед них стандартних виявиться шість? Знайти найімовірнішу кількість стандартних деталей серед семи навмання взятих й обчислити відповідну ймовірність.

16. Імовірність виходу з ладу конденсатора дорівнює $\frac{3}{11}$. Навмання беруть 10 конденсаторів і вмикають паралельно в електричну мережу. Знайти найімовірнішу кількість m_0 конденсаторів, які вийдуть із ладу, та обчислити відповідну ймовірність.

17. Відомо, що серед виробів заводу стандартні деталі становлять у середньому 85%. Скільки потрібно взяти цих деталей, щоб найімовірніше число стандартних деталей було $m_0 = 65$?

18. Автомат штампує вироби 1-го сорту з імовірністю 0,6. Скільки виробів має містити партія, щоб найімовірніша кількість виробів 1-го сорту становила 55?

19. Частка довгих волокон у партії бавовни становить у середньому 0,6 від загальної кількості волокон. Скільки потрібно взяти волокон, щоб найімовірніше число довгих волокон серед них дорівнювало 40?

20. За один цикл автомат виготовляє 10 деталей. За скільки циклів імовірність виготовлення принаймні однієї бракованої деталі буде не менш як 0,8, якщо ймовірність виготовлення бракованої деталі для автомата становить 0,01?

21. Знайти найімовірнішу кількість зупинок прядильного верстата протягом години роботи, якщо середня кількість зупинок за кожні 12 хв дорівнює 4.

22. Яку частку (у відсотках) виробів 1-го сорту має виробляти автомат, щоб у партії із 100 навмання взятих виробів найімовірніша кількість виробів 1-го сорту дорівнювала 80?

23. У яких межах має перебувати ймовірність появи випадкової події в одному експерименті, коли відомо, що в результаті проведення $n = 600$ незалежних експериментів за схемою Бернуллі $m_0 = 60$?