Розділ 1. Випадкові події

1.1.Елементи комбінаторики

Під час розв'язуваннябагатьох задач у теорії ймовірностей використовують елементи комбінаторики: перестановки, розміщення та комбінації. У комбінаториці оперують множинами однотипних елементів.

Загалом множини бувають упорядковані та невпорядковані.

Множину називають *упорядкованою*, якщо під час її побудови важливий порядок розміщення елементів.

В іншому разі множину називають *невпорядкованою*.

Правило суми. Нехай A і B–скінченні множини, які не перетинаються $(A\bigcap B=\varnothing)$, $|A|=m$, $|B|=n$. Тоді $|A\bigcup B|=m+n$.

У комбінаториці це твердження називають***правилом суми***,його формулюють так: Якщо об'єкт a може бути вибраний m способами, об'єкт b – іншими n способами, то вибір «або a, або b» може бути здійснений $m+n$ способами.

Правило суми можна застосуватиу випадку декількох множин: якщо $A_1, A_2, ..., A_k$ – скінченні множини, які попарно не перетинаються, тобто $A_i\bigcap A_j=\varnothing$, при $i\neq j$, то $|\bigcup_{i=1}^{k} A_i|=\sum_{i=1}^{k}|A_i|$.

Якщо множини A і B мають спільні елементи, то $|A\bigcup B|=|A|+|B|-|A\bigcap B|$.
Це справджується для k множин:

$$|\bigcup_{i=1}^{k} A_i|=\sum_{1\le i\le k}|A_i|-\sum_{1\le i<j\le k}|A_i\bigcap A_j|+\sum_{1\le i<j<p\le k}|A_i\bigcap A_j\bigcap A_p|-...+(-1)^{k+1}|A_1\bigcap A_2\bigcap...\bigcap A_k|.$$

Приклад 1.У групі 15 студентів відвідують секцію плавання, 16 – секцію легкої атлетики, 5 студентів беруть участь у роботі обох секцій. Скільки студентів у групі, якщо кожен відвідує принаймні одну з цих секцій?

Розв'язання. Нехай A – множина студентів, які відвідують секцію плавання;B – множина студентів, які відвідують секцію легкої атлетики; $A\bigcap B$ – множина студентів, які беруть участь у роботі обох секцій. Тоді
$N=|A\bigcup B|=|A|+|B|-|A\bigcap B|=15+16-5=26$.

Правило добутку. Нехай A і B–скінченні множини, які не перетинаються $(A\bigcap B=\varnothing)$, $|A|=m$, $|B|=n$. Тоді $|A\times B|=mn$.

У комбінаториці це твердження називають***правилом добутку***, його формулюють так: якщо об'єкт a може бути вибраний m способами і після кожного з таких виборів об'єкт b може бути вибраний n способами, то вибір «a та b» у зазначеному порядку можна виконати mn способами. Це правило використовують тоді, коли a і b незалежні.

Правило добутку можна застосуватиу випадку декількох множин. Тоді його формулюють так: якщо $A_1, A_2, ..., A_k$ – скінченні множини (які попарно не перетинаються, тобто $A_i\bigcap A_j=\varnothing$, при $i\neq j$), $|A_i|=n_i$, $i=1,2,...,k$, тоді $|A_1\times A_2\times...\times A_k|=n_1 n_2...n_k$.

Приклад 2.З пункту A до пункту B є 4 дороги, з пункту A до пункту C є 3 дороги, з пункту B до пунктуD – 2 дороги, з пункту C до пункту D – 3 дороги. Пункти B і C між собою дорогами не сполучені. Скількома способами можна добратися з пункту A до пункту D?

Розв'язання. З пункту A до пункту D можна добратися через B. Тоді $n_1=4\cdot 2=8$. Або з пункту A до пункту D можна добратися через C. Тоді$n_2=3\cdot 3=9$.Звідси $n=n_1+n_2=8+9=17$способами можна добратися з пункту A до пункту D.

Перестановки. Перестановкамиз n елементів називають такі впорядковані множини з n елементів, які різняться між собою порядком їхнього розміщення.

Кількість таких упорядкованих множин обчислюють за формулою $P_n = n!$,
де $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\ldots(n-1)\,n$. За означенням 0! = 1.

Приклад 3. Скласти всі можливі перестановки з трьох елементів *(a, b, c).*

Розв'язання. Можливі такі з'єднання: *abc, bac, cab, acb, bca, cba*.Тобто $P_3 = 3! = 1\cdot 2\cdot 3 = 6$

Приклад 4.Скількома способами можна розташувати на полиці в ряд чотири різні книги?

Розв'язання. Загальну кількість можливих способів розташування книг визначаютькількістю перестановок $P_4 = 4! = 24$.

Такий же результат можна одержати, застосовуючиправило множення.На перше місце на полицю можна поставити будь-яку з 4 книг $n_1 = 4$ способами, після чого на друге місце – будь-яку з трьох, що залишилися $n_2 = 3$ способами**,** потім – будь-яку з двох, $n_3 = 2$ способами**,** на останньому четвертому місці будестояти остання не розміщена книга $n_4 = 1$**.** За правилом множення отримуємо $N = n_1\cdot n_2\cdot n_3\cdot n_4 = 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 24$способи.

Розміщення. Розміщенням із n елементів по m $(0 \le m \le n)$ називають такі впорядковані множини, кожна з яких містить m елементів і які відрізняються між собою порядком розташування цих елементів або хоча б одним елементом.

Кількість таких множин обчислюють за формулою

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} = n(n-1)(n-2)\ \ldots\ (n-m+1).$$

Зазначимо, $A_n^n = n!$.

Приклад 5.Скласти всі можливі розміщення з трьох елементів *(a, b, c)* по 2елементи.

Розв'язання. Можливі такі з'єднання: *ab, ac, bc, ba,ca, cb*. Тобто

$$A_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{6}{1} = 6.$$

Приклад 6.Скількома способами можна вибрати дві книги з чотирьох і розташувати їх у ряд на полиці?

Розв'язання. Загальну кількість можливих способів розташування книг визначають відповідно $\mathrm{A}_4^2 = \frac{4!}{(4\text{-}2)!} = \frac{24}{2} = 12$ $A_4^2 = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{24}{2} = 12$.

Комбінації. Комбінаціями з n елементів по m $(0 \le m \le n)$ називають такі множини з m елементів, які різняться між собою хоча б одним елементом. Нас цікавить склад набору, а не порядок елементів. Кількість таких множин

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Зазначимо, $\mathrm{C}_n^n = 1$, $\mathrm{C}_n^0 = 1$, $\mathrm{C}_n^1 = C_n^{n-1} = n$.

Приклад 7.Скласти всі можливі комбінації з трьох елементів *(a, b, c)* по 2елементи.

Розв'язання. Можливі такі з'єднання: *ab, ac, bc.* Тобто

$$C_3^2 = \frac{3!}{2!(3-2)!} = \frac{3!}{2!\cdot 1!} = \frac{6}{2} = 3.$$

Приклад 8. Скількома можливими способами можна вибрати з 15 людей делегацію в складі 3 осіб?

Розв'язання. Шукане число є числом комбінацій із 15 по 3:

$$C_{15}^3 = \frac{15!}{3!(15-3)!} = \frac{15\cdot 14\cdot 13}{1\cdot 2\cdot 3} = 1365.$$

Перестановки з повтореннями. Нехай скінченну множину з n елементів розбито на r підмножин, у кожній з яких міститься n_i $(i = 1,2,\ldots,r)$ однакових елементів, причому

$\sum_{i=1}^{r} n_i = n.$ Упорядкуємо цю множину. Тоді перестановкою з повтореннями з n елементів називають будь-яке впорядкування n-елементноїмножини,у якій є однакові елементи.

$$P_n\left(n_1, n_2, ..., n_r\right) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot ... \cdot n_r!}.$$

Приклад 9. Скільки різних слів можна утворити, переставляючи літери слова «КОЛОСОК»?

Розв'язання. У цьому слові є повторні входження літер, тому

$$P_7\left(3,2,1,1\right) = \frac{7!}{3! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{2} = 420.$$

Розміщення з повтореннями. Якщо в розміщеннях з n по m елементів деякі (або всі) елементи можуть бути однакові, то такі розміщення називають розміщеннями з повтореннями з n елементів по m. Кількість усіх розміщень з повтореннями обчислюються за формулою $\tilde{A}_n^m = n^m$.

Приклад 10. Скільки можна скласти слів з чотирьох літер, якщо дано тільки літери «м» та «а»?

Розв'язання. Оскільки літери у словах будуть повторюватися, то матимемо розміщення з повтореннями з двох елементів по чотири: $\tilde{A}_2^4 = 2^4 = 16$.

Комбінації з повтореннями. Нехай M – скінченна множина з n елементів, де кожний елемент утворює певний тип. Тоді для будь-яких чисел $n, k \in N$ можна застосувати таку формулукількості комбінацій з повтореннями з n елементів по k:

$$H_n^k = \tilde{C}_n^k = C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$$

Приклад 11. Ухлібному відділі магазину є буханці білого та чорного хліба. Скількома способами можна купити 6 буханців хліба?

Розв'язання. Є два типи хліба, тому $H_2^6 = \tilde{C}_2^6 = C_{2+6-1}^6 = \frac{7!}{6!1!} = 7$.

Задачі для самостійного розв'язування

1. У бібліотеці є 6 різних книг з вищої математики, 4 різні книги з теорії ймовірностей, 3 зі статистики. Скількома способами студент може зробити вибір по одній книзі із зазначених предметів?
2. Пасажир залишив речі в автоматичній камері схову, а коли повернувся за ними, то з'ясувалось, що він забув номер коду, який складався з п'яти цифр. Він запам'ятав, що код містить числа 32 і 24. Яку найбільшу кількість варіантів номерів коду потрібно перебрати, щоб відкрити камеру схову?
3. У крамниці є 6 екземплярів підручника з "Комбінаторики", 3 підручники з "Теорії ймовірності", 4 підручники з "Математичної статистики", 5 підручників, що мають розділи комбінаторики та теорії ймовірності, 7 підручників, що мають розділи теорії ймовірності та математичної статистики. Скількома способами можна зробити покупку,щоб мати по одному екземпляру кожного з трьох розділів?
4. У 9 класі 12 навчальних предметів і 6 різних уроків щодня. Скількома способами можна скласти розклад на понеділок?
5. Студентам потрібно скласти 4 екзамени протягом восьми днів.
   а) Скількома способами це можна зробити?
   б) Скількома способами це можна зробити, якщо відомо, що останній екзамен складають на восьмий день?
6. Скільки чотирицифрових чисел, які складені з цифр 0,1,2,3,4,5,6 і містять цифру 3, якщо цифри у числах не повторюються?
7. Скільки п'ятицифрових чисел можна утворити з цифр 0,1,2,3,4 так,щоб жодна з них в числі не повторювалася?

8. На полиці стоять 12 різних підручників. Скільки можна зробити з них перестановок, щоб два певних підручники стояли поряд?
9. Скількома способами можна переставляти n елементів так, щоб деякі два елементи не були поряд?
10. Скільки різних слів можна утворити з усіх букв слова “людина”? Скільки серед них таких,що букви “н” і “а” стоять поряд? Скільки серед них таких, що букви “н” і “а” не стоять поряд?
11. Скількома способами можна розмістити на книжковій полиці десятитомників творів Дж. Лондона так, щоб:

а) вони стояли у довільному порядку?

б) I,V,IXстояли поряд у довільному порядку?

в) I,II,III не стояли поряд?

12. Дано m великих букв A,B,...,K і n малих букв a,b,…,e. Скільки перестановок можна зробити з цих букв так, щоб кожна перестановка починалася великою, а закінчувалася малою буквою?
13. Скільки різних п’ятизначних чисел,які більші за 200 000, можна одержати з цифр 1,2,3,4, якщо 2,3,4 не повторюються в числах, а цифра 1 двічі повторюється у кожному числі?
14. Із двох юнаків і десяти дівчат потрібно створити групу у складі восьми учнів для чергування. Скількома способами можна створити таку групу, щоб до неї входив принаймні один юнак?
15. Виготовлено 12 виробів. Для вибіркового контролю треба взяти три з них. Скількома способами це можна зробити?
16. У скількох точках перетинаються десять прямих, якщо між ними немає паралельних і ніякі три прямі не проходять через одну точку?
17. Скількома способами можна утворити дозор із трьох солдатів та одного офіцера, коли у підрозділі 80 солдатів і 30 офіцерів?
18. На шаховому турнірі зіграно 45 партій, при цьому кожен учасник зіграв з кожним з учасників по одній партії. Скільки шахістів брало участь у турнірі?
19. Скількома способами можна розподілити шість різних предметів між трьома особами так, щоб кожній особі дісталося два предмети?
20. Скількома способами можна 15 шахістів поділити на три команди по 5 осіб?
21. В урну складено 50 лотерейних квитків, вісім із яких виграшні. Студент бере п’ять квитків. Скількома способами він може їх взяти,щоб:

а) серед них було два виграшні?

б) було принаймні два виграшні?

22. Скільки доданків, що містять чотири букви, можна одержати після розкриття дужок у виразі $(a+1)(b+1)(c+1)(d+1)(k+1)$?
23. На конкурс по заміщенню вакансій у компанію прислали анкети 10 економістів і дев’ять бухгалтерів. Визначити, скількома способами можна прийняти на роботу трьох спеціалістів, причому серед них повинен бути принаймні один економіст і принаймні один бухгалтер.
24. Для проходження практики 30 студентами виділено 10 місць у школі №12, вісіммісць у школі №23, сіммісць у школі №2, п’ять місць у школі №3.Скількома способами можна розподілити студентів по школах так,щоб певні 3 особи потрапили до однієї школи?
25. Скількома способами з колоди 52 карт можна взяти вісім карт, щоб серед них:

а) був один туз?

б) було рівно два тузи?

в) був принаймні один туз?

г) було не менше двох тузів?

26. Двоє учасників шахового турніру вибули, зігравши тільки по три партії кожен з рештою учасників турніру, тому на турнірі було зіграно всього 84 партії. Скільки учасників було спочатку, якщо вони грали один з одним по одній партії?
27. Дано k великих букв, m голосних, n приголосних. Скільки різних слів можна скласти з цих букв, якщо в кожному слові на першому місці має стояти велика буква, серед інших букв повинно бути p різних голосних та q приголосних?

28. Дресирувальнику звірів потрібно вивести на арену цирку п'ять левів і чотирьох тигрів, при цьому не можна, щоб два тигри йшли один за одним. Скількома способами це можна зробити?
29. Скільки п'ятицифрових чисел можна утворити з цифр 0,1,2,3?
30. Телефонний номер складається з шести цифр. Скільки є телефонних номерів, які складаються тільки з цифр 2,5,7,8?
31. Дві листоноші повинні віднести 10 листів. Скількома способами вони можуть розподілити між собою роботу?
32. Скільки цілих чисел менших за мільйон можна записати за допомогою цифр 7,8,9?
33. Скільки семицифрових чисел можна скласти з цифр 1,2,3, якщо цифра 1 повинна повторюватися три рази, цифра 2 – два рази, цифра 3 – два рази?
34. Абонент пам'ятає, що потрібний йому семицифровий номер телефону, який починається з цифри 4, містить три одиниці і три двійки. Проте розташування цифр він не пам'ятає. Скільки спроб повинен зробити абонент, щоб набрати потрібний номер?
35. Скількома способами можна розселити 10 студентів по чотирьох кімнатах: одномісній, двомісній, тримісній, чотиримісній?
36. Скількома способами можна розкласти 24 різних предмети по шести ящиках так, щоб у кожному ящику було по чотири предмети?
37. Скільки слів з восьми букв можна скласти з букв "о" і "в" таких, що кількість букв "о" в словах не перевищує три?
38. Для премій на математичній олімпіаді виділено три екземпляри однієї книжки, два екземпляри – другої книжки й один екземпляр третьої книжки. Скількома способами можуть бути вручені премії, якщо в олімпіаді приймало участь 20 учнів і жодному не вручать трьох книжок?
39. Скількома способами можна переставити букви слова "логарифм" так, щоб 2, 4 і 6 місце були зайняті приголосними буквами?
40. Скількома способами можна переставити букви слова"кавоварка" так щоб, голосні і приголосні чергувались?
41. Скільки чотиризначних чисел можна скласти із цифр числа 321153?
42. Скільки існує трикутників, довжини сторін яких набувають одне з таких значень:6 см, 7 см, 9 см, 10 см, 12 см?
43. У поштовому відділенні зв'язку продаються листівки 10 видів. Скількома способами можна купити:
   а) 12 листівок?
   б) 8 листівок?
   в) 8 різних листівок?
44. Скількома способами можна вибрати три букви із 12 букв А,А,А,Т,Т,Т,Г,Г,Г,Ц,Ц,Ц?
45. У кондитерській є сім сортів тістечок і п'ять сортів морозива. Скількома способами можна купити вісім тістечок і чотириморозива?
46. Четверо студентів складають іспит. Скількома способами можуть бути поставлені їм оцінки, якщо відомо, що ніхто не одержав «незадовільно»?
47. На шкільному вечорі присутні 17 дівчат і 15 хлопців. Скількома способами можна вибрати з них чотири пари?
48. Скільки п'ятизначних чисел без повторення цифр можна скласти з цифр 1,2,3,4,5 так, щоб парні не стояли поряд?
49. З лабораторії, де працює 20 осіб, п'ять співробітників мають поїхати у відрядження. Скільки є варіантів вибору, якщо начальник, заступник та головний інженер не можуть поїхати одночасно?