Порядкові критерії

Порядкові критерії – це такі критерії, які для перевірки висунутих гіпотез про генеральну сукупність використовують не елементи вибірки, а лише їх порядок, співвідношення між ними. Зазвичай такі критерії застосовуються відразу принаймні до двох вибірок $x_1, \ldots, x_n$ та $y_1, \ldots, y_m$. Порядок між елементами цих вибірок визначаємо нерівностями виду $x_i < y_j$ або $x_i > y_j$ $(i = 1,..n,\ j = 1,..m)$. Такі критерії не залежать від функції розподілу генеральних сукупностей ξ і η, а тому їх часто називають критеріями, незалежними від розподілу або непараметричними критеріями.

Непараметричні критерії часто застосовують для порівняння двох методів. Нульова гіпотеза тоді формулюється у вигляді

H_0: нема різниці між двома методами.

Критерій знаків

Нехай $(x_1,\ y_1),\ (x_2,\ y_2),\ \ldots\ (x_n,\ y_n)$ - n пар спостережень над деякою випадковою змінною, і в кожній з цих пар спостереження x_i, y_i - незалежні і з неперервними функціями розподілу, відповідно $F_i(x)$ та $G_i(y)$.

H_0: $F_i(x) = G_i(y)$, $(i = 1,\ldots n)$ (розподіли співпадають)

Вважаємо, що $x_i \neq y_i$ у всіх парах спостережень. Тоді у випадку істинності гіпотези H_0, різниці $z_i = x_i - y_i$ повинні однаково часто бути додатними та від'ємними, тобто

$$P(x_i = y_i) = 0,\ P(z_i > 0) = P(z_i < 0) = \frac{1}{2},\ i = 1,\ldots n.$$

$\kappa(+)$ - кількість додатніх різниць. Тому кількість $\kappa(+)$ появ події A у таких незалежних випробуваннях є випадковою змінною, розподіленою за біномним законом, причому:

$$P(\kappa(+) = s) = C_n^s \frac{1}{2^s} \qquad s = 0,1,\ldots n.$$

Межі прийому гіпотези $(m,\ M)$ є розв'язками нерівностей:

(*) $\sum_{s=0}^{m-1} \frac{C_n^s}{2^s} \le \frac{\alpha}{2}$ та $\sum_{s=M+1}^{n} \frac{C_n^s}{2^s} \le \frac{\alpha}{2}$, відповідно.

Якщо при вибраному α значення $\kappa(+)$ попадає в інтервал (m, M), то вважатимемо, що експериментальні дані не суперечать сформульованій вище нульовій гіпотезі.

Статистика $\kappa(+)$ - біномно розподілена. Тому при великих n, ($n \ge 16$), для визначення області прийому гіпотези (m, M) можна скористатися інтегральною теоремою Муавра-Лапласа. Наприклад, оцінивши так ліві частини нерівностей (*) при $n \ge 16$ та α = 0,05 одержимо область прийому гіпотези:

$$(a - 1{,}96\sigma;\ a + 1{,}96\sigma), \text{ де } a = E(\kappa(+)) = \frac{n}{2}, \quad \sigma^2 = D(\kappa(+)) = \frac{n}{4}.$$

Отже, $m = [\frac{n}{2} - 0{,}98\sqrt{n}],\ M = \{\frac{n}{2} + 0{,}98\sqrt{n}\}$, де $[x]$ - ціла частина числа x, а $\{x\}$ - найменше ціле число $y \ge x$ (найближче до x ціле число)

<u>Зауваження.</u> Якщо серед пар $(x_i, y_i),\ i = 1,...n$ є такі, що $x_i = y_i$, то їх просто відкидаємо і n зменшуємо на кількість таких пар.

<u>Гіпотеза про медіану</u>

Критерій знаків можна використати для перевірки гіпотези про медіану неперервного розподілу генеральної сукупності: $H_0 : Me = a$.

Нехай x_1, ..., x_n - вибірка з генеральної сукупності. Утворимо пари $(x_1, a), (x_2, a), ...(x_n, a)$. Будемо вважати, що у всіх цих парах $x_i \ne a$. Тоді у випадку істинності гіпотези H_0, різниці $z_i = x_i - a$ повинні однаково часто бути додатними та від'ємними.

$$P(z_i = 0) = 0,\ P(z_i > 0) = P(z_i < 0) = \frac{1}{2},\ i = 1,...n.$$

<u>Зауваження.</u> Якщо серед пар (x_i, a) є такі, що $x_i = a$, то їх відкидаємо і зменшуємо n.

Критерій інверсій

Нехай $x_1, \ldots, x_n$ та $y_1, \ldots, y_m$ - незалежні вибірки незалежних спостережень з генеральних сукупностей, про які відомо, що вони описуються деякими неперервними функціями розподілу $F(x)$ та $G(y)$.

Нехай нульова гіпотеза H_0: $F(x)=G(y)$, (генеральні сукупності є стохастично еквівалентними випадковими змінними)

Ідея перевірки гіпотези H_0 за допомогою критерію інверсій полягає в тому, що у випадку істинності цієї гіпотези в середньому на кожному відрізку спільного варіаційного ряду з заданою кількістю елементів першої вибірки повинно бути приблизно стільки ж елементів другої вибірки. Якщо така пропорція буде значно порушуватися, то H_0 сумнівна.

Отже, критерієм обгрунтування H_0 може бути загальне число інверсій елементів однієї вибірки відносно іншої у спільному варіаційному ряді.

Елемент x_i однієї вибірки утворює одну інверсію з елементом y_k іншої вибірки, якщо він розміщений правіше від нього у спільному варіаційному ряду, тобто $x_i > y_k$.

Число інверсій елемента x_i відносно іншої вибірки – це кількість елементів y_k другої вибірки, які менші за x_i.

$W(x/y)$ - кількість інверсій елементів I вибірки відносно II.

$W(y/x)$ - кількість інверсій елементів II вибірки відносно I.

$0 \le W(x/y) \le n \cdot m$ і $0 \le W(y/x) \le n \cdot m$.

Рангом елемента називається порядковий номер цього елемента у спільному варіаційному ряді.

$R(x)$ - сума рангів елементів вибірки I.

$R(y)$ - сума рангів елементів вибірки II.

Наприклад, маємо такий спільний варіаційний ряд:

$x\ x\ y\ x\ y\ x\ y\ x\ x\ x\ y\ y\ x\ x\ y\ y$

$n=9$ - кількість x, $m=7$ - кількість y.

$W(y/x)$ = 1+2+3+3+3+5+5 = 22 - кількість *y*, які є перед *x*

$W(x/y)$ = 2+3+4+7+7+9+9 = 41 - кількість *x*, які є перед *y*.

$R(x)$ = 1+2+4+6+8+9+10+13+14 = 67

$R(y)$ = 3+5+7+11+12+15+16 = 69

Якщо всі елементи першої вибірки у спільному варіаційному ряді розташовані перед усіма елементами другої вибірки, то $R(x) = \frac{n(n+1)}{2}$

Коли ж усі елементи другої вибірки у спільному варіаційному ряді розміщені перед усіма елементами першої вибірки, то $R(x) = m \cdot n + \frac{n(n+1)}{2}$

Отже, $\frac{n(n+1)}{2} \le R(x) \le m \cdot n + \frac{n(n+1)}{2}$

Аналогічно: $\frac{m(m+1)}{2} \le R(y) \le m \cdot n + \frac{m(m+1)}{2}$

Тому $W(y/x) = R(x) - \frac{n(n+1)}{2}$, $\qquad W(x/y) = R(y) - \frac{m(m+1)}{2}$, (**)

Отже, $W(y/x) + W(x/y) = m \cdot n$,

тобто статистики $W(y/x)$ та $W(x/y)$ є рівноцінними для перевірки гіпотези H_0. З цією метою звичайно використовуємо одну з них, яку позначаємо W.

Критичні значення статистики W для малих m, n при рівні значущості $\alpha = 0{,}05$ наведені в таблиці (додаток 13). Однак, коли $m \ge 4,\ n \ge 4,\ m + n \ge 20$, то статистика W приблизно нормально розподілена з математичним сподіванням $a = E(W) = \frac{mn}{2}$ та дисперсією $\sigma^2 = D(W) = \frac{mn}{12}(m+n+1)$. Тому у таких випадках при $\alpha = 0{,}05$ з високим ступенем точності можна вважати, що область прийняття гіпотези є інтервал $(a - 1{,}96\sigma;\ a + 1{,}96\sigma)$.

Зауваження. Для великих вибірок легше обчислювати $R(x)$ та $R(y)$, а потім за формулами (**) знаходити $W(y/x)$ або $W(x/y)$, одне з яких приймаємо за емпіричне значення статистики W.

Завдання для самостійної роботи

1. Перевірялася швидкість десяти автомобілів за допомогою двох приладів. Результати представлені у вигляді наступної таблиці:

	70	85	63	54	65	80	75	95	52	55
	72	86	62	55	63	80	78	90	53	57

   Чи можна сказати, що швидкості відрізняються незначимо?

2. Випадковим чином із класу вибрали 10 учнів і перевірили їх середні оцінки з математики і укр.мови. Дані подані по 100-бальній шкалі (перша оцінка в парі – з математики):

(80, 53), (48, 61), (62, 56), (53, 72), (45, 48), (72, 50), (60, 45), (41, 58), (53, 50), (57, 46).

   Перевірити гіпотезу про те, що якщо учень має хороші оцінки з математики, то в нього хороші оцінки і з укр.мови.

3. Двома приладами вимірюють діаметри 16 однотипних деталей. Отримано такі результати:

   (4, 5), (8, 6), (12, 11), (7, 8), (5, 5), (7, 6), (4, 4), (4, 6), (6, 9), (8, 9) (3, 2), (5, 6), (7, 4), (10, 11), (1, 2), (6, 5).

   Перевірити гіпотезу про те, що результати вимірювань відрізняються незначимо.

4. Перевірити гіпотезу про те, що медіана популяції, з якої взято вибірку рівна 10: 6, 12, 16, 20, 13, 8, 5, 13, 15, 19.

5. Перевірити гіпотезу, що медіана популяції, з якої взята вибірка $Me = 15$:

   7; 8; 16; 14; 20; 19; 10; 17; 18; 12.

6. Перевірити гіпотезу про однорідність двох вибірок, отриманих в результаті вимірювань діаметрів втулок, що оброблялися станками.

Перша вибірка x: 0.28, 0.15, 0.25, 0.32, 0.23, 0.26, 0.29, 0.31, 0.34

Друга вибірка y: 0.30, 0.18, 0.35, 0.20, 0.24, 0.27, 0.14, 0.33, 0.22, 0.36, 0.12, 0.37

7. Перевірити гіпотезу про однорідність двох вибірок, отриманих в результаті вимірювань розмірів деталей, що оброблялися станками.

   Перша вибірка x: 15, 23, 25, 26, 28, 29

   Друга вибірка y: 12, 14, 18, 20, 22, 24, 27, 30

8. Перевірити гіпотезу про однорідність вибірок, отриманих в результаті вимірювання діаметрів деталей, що оброблялись на двох станках.

   Перша вибірка x: 9; 12; 15; 16; 17; 18; 24; 27; 28; 29; 31.

   Друга вибірка y: 5; 6; 8; 10; 14; 19; 20; 21; 22; 23; 25; 26; 26; 30; 32.