Залежно від вигляду щільності розподілу неперервної випадкової величини ξ її закони розподілу класифікують на різні типи. Наведемо основні закони розподілу неперервної випадкової величини.

- ***Рівномірний закон розподілу***: *випадкову величину* ξ *називають* ***рівномірно розподіленою*** *на проміжку* $[a, b]$, *якщо усі її можливі значення зосереджені на цьому проміжку, і щільністю розподілу її ймовірностей є стала, тобто*

$$f(x) = \begin{cases} C = \dfrac{1}{b-a}, & x \in [a,b]; \\ 0, & x \notin [a,b]. \end{cases} \tag{2.27}$$

Значення $C = \dfrac{1}{b-a}$ визначають з умови нормування.

Функція рівномірного розподілу неперервної випадкової величини ξ має такий вигляд:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a; \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a \le x < b; \\ 1, & x \ge b. \end{cases} \tag{2.28}$$

Якщо випадкова величина ξ рівномірно розподілена на проміжку $[a, b]$, то

$$P(\alpha < \xi < \beta) = \frac{\beta - \alpha}{b-a}; \tag{2.29}$$

числові характеристики знаходять за формулами

$$E(\xi) = \frac{a+b}{2}; \quad D(\xi) = \frac{(b-a)^2}{12}; \quad \sigma(\xi) = \frac{b-a}{2\sqrt{3}} \quad . \tag{2.30}$$

- ***Нормальний закон розподілу***: *випадкову величину* ξ *називають* ***нормально розподіленою***, *якщо щільність розподілу її ймовірностей*

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \tag{2.31}$$

де $a = E(\xi), \quad \sigma = \sigma(\xi)$.

Функція розподілу нормально розподіленої випадкової величини ξ має вигляд:

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(z-a)^2}{2\sigma^2}} dz. \tag{2.32}$$

Якщо випадкова величина ξ нормально розподілена, то

$$P(\alpha < \xi < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right) \tag{2.33}$$

де $\Phi(x)$ – інтегральна функція Лапласа.

Наголосимо, що на підставі властивостей інтегральної функції Лапласа $\Phi(-x) = -\Phi(x), \Phi(+\infty) = 0,5; \quad \Phi(-\infty) = -0,5$) маємо рівності:

$$\begin{aligned} P(\xi < \beta) &= 0,5 + \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right), \\ P(\xi > \alpha) &= 0,5 - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right). \end{aligned} \tag{2.34}$$

Якщо випадкова величина ξ нормально розподілена, то подія $|\xi - a| < 3\sigma$ є вірогідною: $P(|\xi - a| < 3\sigma) = 0,9973$ (***правило трьох сигм***). На практиці правило трьох сигм використовують так: якщо $|\xi - a| < 3\sigma$, то можна припустити, що випадкова величина ξ нормально розподілена.

- ***Експонентний закон розподілу***: *випадкову величину ξ називають **розподіленою за експонентним законом**, якщо її щільність розподілу ймовірностей*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \ge 0, \end{cases} \tag{2.35}$$

де $\lambda > 0$ – параметр розподілу.

Функція експонентного розподілу

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \ge 0. \end{cases} \tag{2.36}$$

Якщо випадкова величина ξ розподілена за експонентним законом, то

$$P(\alpha < \xi < \beta) = e^{-\lambda\alpha} - e^{-\lambda\beta} \tag{2.37}$$

$$E(\xi) = \frac{1}{\lambda}, \quad D(\xi) = \frac{1}{\lambda^2}, \quad \sigma(\xi) = \frac{1}{\lambda}. \tag{2.38}$$

Приклад 1. Випадкова величина ξ рівномірно розподілена на проміжку [1,5]. Виконати такі дії:

а) записати щільність і функцію розподілу та накреслити їхні графіки;

б) обчислити ймовірності, що значення випадкової величини ξ потраплять у проміжки (0,3) і (2,4);

в) обчислити $E(\xi)$, $D(\xi)$, $\sigma(\xi)$.

Приклад 2. Статистичні дані про дохід на душу населення показали, що річний дохід мешканців регіону має нормальний розподіл із середнім значенням доходу 9 тис. грн і середнім квадратичним відхиленням 1,5 тис. грн. Записати щільність розподілу ймовірностей випадкової величини ξ – розміру середнього доходу на душу населення та обчислити ймовірності, що річний дохід навмання вибраного мешканця регіону є:

а) більш ніж 6 тис. грн;

б) менше ніж 10,6 тис. грн;

в) між 8,5 та 12,2 тис. грн;

г) між 12,4 та 13 тис. грн.

Приклад 3. Середній місячний прибуток однотипних приватних підприємств регіону становить 10 000 грн. і є нормально розподіленою випадковою величиною із середнім квадратичним відхиленням 250 грн. У яких межах можна практично гарантувати прибуток цих підприємств?

Приклад 4. Неперервна випадкова величина розподілена за експонентним законом з параметром $\lambda = 3$. Виконати такі дії:

а) написати щільність та функцію розподілу і накреслити їхні графіки;

б) обчислити ймовірність того, що її значення потрапить в інтервал (0,5; 1,5);

в) обчислити $E(\xi)$, $D(\xi)$, $\sigma(\xi)$.

Завдання для самостійної роботи

1. Випадкова величина ξ рівномірно розподілена на проміжку [-3, 2]. Знайти:

а) вираз для щільності розподілу ймовірностей і функції розподілу випадкової величини ξ та побудувати їхні графіки;

б) імовірність нерівностей: $0 < \xi < 3$; $\quad -2 < \xi < 1$;

в) математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення випадкової величини ξ.

2. Випадкова величина ξ має рівномірний розподіл із математичним сподіванням $E(\xi) = 3$ і дисперсією $D(\xi) = \frac{4}{3}$. Знайти функцію розподілу випадкової величини ξ.

3. Банк виконав дослідження про наявність річних заощаджень в осіб, вік яких є не менший ніж 21 рік. Дослідження показали, що річні заощадження на одну особу нормально розподіляються із середнім числом 1 850 грн і середнім квадратичним відхиленням – 350 грн. Визначити ймовірність того, що навмання вибрана особа має заощадження:

а) більше ніж 2 200 грн;
б) менше ніж 1 500 грн;
в) у межах від 1 080 грн до 2 375 грн;
г) менше ніж 800 грн.

4. Верстат-автомат виготовляє вироби, які вважаються придатними, якщо відхилення ξ від проектного розміру за абсолютним значенням не перевищує 0,8 мм. Яка ймовірність такого відхилення? Яке найімовірніше число придатних виробів із 200, якщо ξ має нормальний розподіл із параметром $\sigma = 0{,}4$ мм?

5. Помилки в обчисленнях, допущені бухгалтером під час складання балансу, розподілені у відсотках за нормальним законом з параметрами a=1,5 і σ=0,01. Написати щільність і функцію розподілу цих помилок та накреслити їхні графіки. У яких межах містяться помилки обчислень з імовірністю 0,9973?

6. Час безвідмовної роботи елемента деякого приладу T розподілений за показниковим законом розподілу з $\lambda = \frac{1}{540}$. Виконати такі дії:

а) знайти щільність та функцію розподілу ймовірностей випадкової величини T та накреслити їхні графіки;

б) обчислити $E(\xi)$, $D(\xi)$, $\sigma(\xi)$;

в) знайти ймовірності подій: A – {елемент безвідмовно працюватиме не менше 648 год}, B – {елемент відмовив протягом 700 год}, C – {елемент безвідмовно працюватиме не менше трьох діб}.