Неперервна випадкова величина

Основні поняття, означення та відношення

1. *Випадкову величину називають* ***неперервною****, якщо вона може набувати будь-якого числового значення і скінченного або нескінченного інтервалу* (*a, b*). *Множина можливих значень такої величини є нескінченною*.

2. Випадкова величина ξ є неперервна тоді і тільки тоді, коли її інтегральна функція розподілу $F(x) = P(\xi \le x)$ і $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt$ неперервна.

Графіком функції розподілу неперервної випадкової величини ξ є неперервна лінія. Зокрема, якщо значення неперервної випадкової величини ξ заповнюють інтервал (*a, b*), то її функція розподілу

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a; \\ g(x), & a \le x < b; \\ 1, & x \ge b. \end{cases} \qquad (2.17)$$

Графік такої функції розподілу зображено на рис. 2.3.

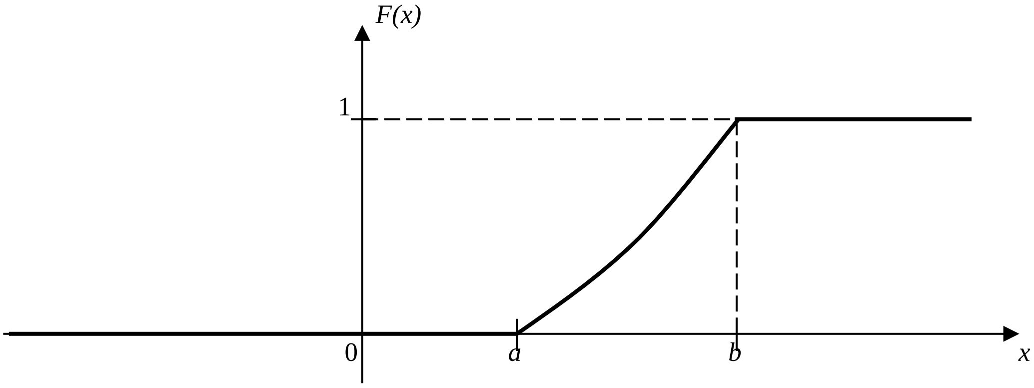

Рис 2.3. Графік функції розподілу неперервної випадкової величини ξ,
якщо $\xi \in [a, b]$.

Якщо значення неперервної випадкової величини ξ розсіяні по всій числовій осі, тобто її аналітичний вираз описують функцією $F(x) = g(x)$ для $x \in (-\infty, +\infty)$, то її графік є суцільною лінією, яка „надвисає" над всією віссю *Ox*, і її графік схематично зображений на рис. 2.4.

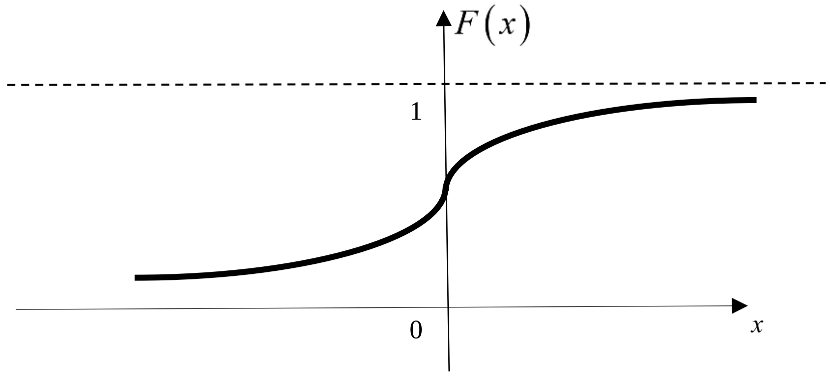

Рис.2.4. Графік функції розподілу неперервної випадкової величини ξ, якщо
$\xi \in (-\infty, +\infty)$

За допомогою функції розподілу неперервної випадкової величини ξ легко обчислюють імовірності попадання її значень у будь-який проміжок (замкнений або відкритий), а саме: ймовірність того, що випадкова величина ξ набуде значення з проміжку [a, b], дорівнює приросту функції розподілу на цьому проміжку:

$$P(a \le \xi \le b) = F(b) - F(a). \qquad (2.18)$$

Наголосимо, що імовірність того, що неперервна величина ξ набуде певного числового значення $\xi = x_0$, дорівнює нулю, тобто $P(\xi = x_0) = 0$. Це випливає з неперервності функції розподілу $F(x)$.

3. ***Диференціальною функцією розподілу*** або ***щільністю (густиною) розподілу*** $f(x)$ ***ймовірностей*** *неперервної випадкової величини* ξ *називають похідну від її функції розподілу, тобто*

$$f(x) = F'(x). \qquad (2.19)$$

Поняття щільності (густини) розподілу ймовірностей вводять для неперервної випадкової величини з кусково-диференційовною функцією розподілу.

Якщо всі значення випадкової величини ξ зосереджені в інтервалі (a, b), то щільність розподілу її імовірностей має такий аналітичний вигляд:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < a; \\ g'(x), & a \le x < b; \\ 0, & x \ge b. \end{cases} \qquad (2.20)$$

Її графік може мати один із виглядів, які зображено на рис. 2.5.

4. Якщо відома диференціальна функція розподілу $f(x)$ неперервної випадкової величини ξ, то її інтегральну функцію розподілу можна знайти за формулою:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt. \qquad (2.21)$$

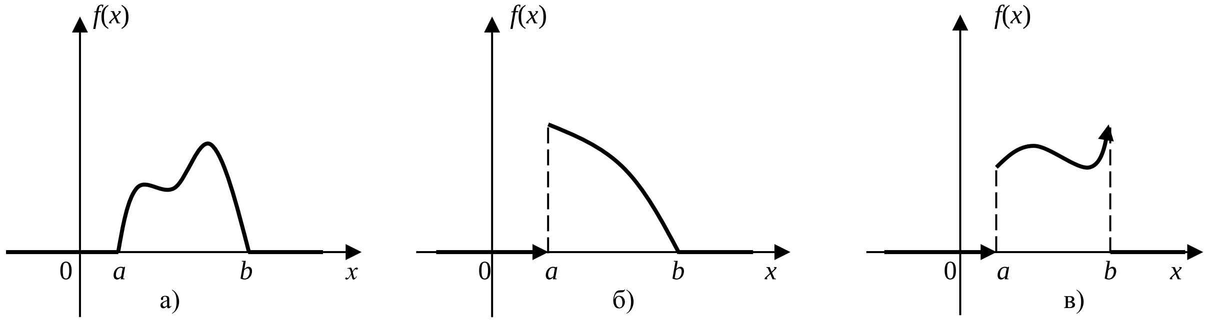

Рис. 2.5. Графік щільності розподілу неперервної випадкової величини

$$F(x) = \begin{cases} \int_{a}^{x} f(t)dt, & a \le x < b; \\ 1, & x \ge b. \end{cases} \qquad (2.21')$$

5. Імовірність того, що неперервна випадкова величина ξ зі щільністю розподілу $f(x)$ набуде значень з проміжку [a, b], обчислюють за формулою:

$$P(a \le \xi \le b) = \int_{a}^{b} f(x)dx. \qquad (2.22)$$

Ця ж імовірність може бути обчислена також за допомогою функції розподілу за формулами (2.18).

6. Якщо неперервна випадкова величина ξ характеризується щільністю розподілу $f(x)$, то

$$\int_a^b f(x)dx = 1, \tag{2.23}$$

коли ξ набуває значень з проміжку [a, b], і

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1, \tag{2.23′}$$

коли ξ набуває значень зі всієї числової осі (***умова нормування***).

7. Аналогічно, як і дискретна випадкова величина, неперервна випадкова величина може характеризуватись інтегральними (числовими) характеристиками.

Математичне сподівання $E(\xi)$ неперервної випадкової величини ξ, яка набуває значень з проміжку [a, b], обчислюють за формулою:

$$E(\xi) = \int_a^b x \cdot f(x)dx. \tag{2.24}$$

Якщо неперервна випадкова величина ξ набуває значень зі всієї числової осі Ox, то її математичне сподівання $E(\xi)$ обчислюють за формулою:

$$E(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx. \tag{2.24′}$$

При цьому припускають, що невласний інтеграл є збіжний.

Дисперсію $D(\xi)$ неперервної випадкової величини ξ, яка набуває значень з проміжку [a, b], обчислюють за формулою:

$$D(\xi) = E(\xi - E(\xi))^2 = \int_a^b (x - E(\xi))^2 \cdot f(x)dx = \int_a^b x^2 \cdot f(x)dx - E^2(\xi). \tag{2.25}$$

Якщо неперервна випадкова величина ξ набуває значень зі всієї числової осі Ox, то:

$$D(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(\xi))^2 \cdot f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x)dx - E^2(\xi). \tag{2.25′}$$

Середнє квадратичне відхилення $\sigma(\xi)$ неперервної випадкової величини ξ обчислюють за формулою:

$$\sigma(\xi) = \sqrt{D(\xi)}. \tag{2.26}$$

8. ***Законом розподілу ймовірностей*** *неперервної випадкової величини* ξ *називають щільність її розподілу.*

Приклад 1. Функція розподілу ймовірностей $F(x)$ неперервної випадкової величини ξ має вигляд:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 3; \\ m(x-3)^2, & 3 \le x < 5; \\ 1, & x \ge 5. \end{cases}$$

Виконати такі дії:

а) визначити коефіцієнт m;

б) знайти щільність розподілу $f(x)$ та накреслити графіки $F(x)$ і $f(x)$;

в) обчислити ймовірності потрапляння значень випадкової величини ξ у проміжки [4,6] і (2, 4).

Приклад 2. Щільність розподілу $f(x)$ неперервної випадкової величини ξ задана формулою

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x<0; \\ m\cdot\cos x, & 0\le x<\dfrac{\pi}{2}; \\ 0, & x\ge\dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Виконати такі дії:

а) визначити коефіцієнт m;

б) знайти функцію розподілу $F(x)$ випадкової величини ξ;

в) побудувати графіки густини і функції розподілу;

г) знайти ймовірності потрапляння значень випадкової величини ξ у проміжки $(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$ і $(\frac{\pi}{6},\pi)$;

д) обчислити числові характеристики випадкової величини ξ: математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення.

Завдання для самостійної роботи

1. Щільність розподілу ймовірностей $f(x)$ випадкової величини задано формулами:

$$f(x)=\begin{cases} a(x-3)^2, & 3\le x\le 5; \\ 0, & x<3 \text{ або } x>5. \end{cases}$$

Виконати такі дії:

1) знайти коефіцієнт a;

2) знайти функцію розподілу випадкової величини ξ;

3) побудувати графіки щільності розподілу ймовірностей та функції розподілу;

4) знайти ймовірність потрапляння випадкової величини ξ в інтервал:

а) $I=[0;0,5]$; б) $I=(3;4)$; в) $I=[0;5]$; г) $I=[\pi/4;\pi/3]$;

5) знайти математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення випадкової величини ξ.

2. Функцію розподілу ймовірностей $F(x)$ неперервної випадкової величини ξ задано формулою:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<-2\pi; \\ a+a\cos\dfrac{x}{2}, & -2\pi\le x<0; \\ 1, & x\ge 0. \end{cases}$$

Виконати такі дії:

1) знайти коефіцієнт a;

2) знайти щільність розподілу $f(x)$;

3) побудувати графіки функції розподілу та щільності розподілу;

4) знайти математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення;

5) знайти ймовірність потрапляння випадкової величини ξ в інтервал $I=(-\pi/2;0)$.

3. Закон розподілу неперервної випадкової величини ξ такий:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<-1; \\ \dfrac{(x+1)^2}{64}, & -1\le x<3; \\ 1, & x\ge 3. \end{cases}$$

Знайти $f(x)$ і побудувати графіки функцій $f(x)$, $F(x)$. Обчислити $P(0<\xi<2)$.

4. Задано щільність розподілу ймовірностей неперервної випадкової змінної

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x<-2; \\ a\sqrt{x+2}, & -2\le x<7; \\ 0, & x\ge 7. \end{cases}$$

Знайти значення сталої a та функцію $F(x)$. Побудувати графіки функцій $f(x)$, $F(x)$.

5. Задано функцію розподілу ймовірностей

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0; \\ \sin x, & 0\le x<\dfrac{\pi}{2}; \\ 1, & x\ge \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Знайти $f(x)$. Побудувати графіки $F(x)$, $f(x)$ і обчислити $P(\dfrac{\pi}{6}<\xi<\dfrac{\pi}{3})$.

6. Густину розподілу неперервної випадкової величини ξ задано у вигляді:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x<0; \\ \dfrac{1}{2}\sin x, & 0\le x<\pi; \\ 0, & x\ge \pi. \end{cases}$$

Знайти $F(x)$ і побудувати графіки функцій $f(x)$, $F(x)$. Обчислити $P(\dfrac{\pi}{6}<\xi<\dfrac{\pi}{2})$.

7. Випадкова величина ξ має закон розподілу ймовірностей Коші:

$$f(x)=\frac{a}{1+x^2}, \quad -\infty<x<+\infty$$

Знайти a і $F(x)$.

8. За заданими функціями

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x<0; \\ 5\sqrt{x}, & 0\le x<1; \\ 0, & x\ge 1. \end{cases} \qquad f(x)=\begin{cases} 0, & x<0; \\ \dfrac{3}{5}\sqrt[5]{x}, & 0\le x<1; \\ 0, & x\ge 1. \end{cases} \qquad f(x)=\begin{cases} 0, & x<0; \\ \dfrac{8}{5}\sqrt[5]{x^3}, & 0\le x<1; \\ 0, & x\ge 1. \end{cases}$$

визначити, яка з них є щільністю випадкової величини ξ, визначеної на проміжку [0; 1].