Розділ 2. Випадкові величини

Величину називають *випадковою*, якщо внаслідок проведення експерименту під впливом випадкових факторів вона набуває того чи іншого можливого числового значення з певною ймовірністю.

Якщо множина можливих значень випадкової величини є скінченною або зліченною, то таку величину називають *дискретною*. В іншому разі її називають *неперервною*.

Приклад 1. Задано множину цілих чисел $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Навмання беруть одне число. Елементарними подіями будуть такі: поява одного з чисел - 1, 2, 3,…,10 з певною ймовірністю. Множина можливих значень є дискретною, а тому й випадкова величина – поява одного з чисел множини Ω – буде дискретною.

Приклад 2. Вимірюють силу струму за допомогою амперметра. Результати вимірювання, зазвичай, округлюють до найближчої поділки на шкалі для вимірювання сили струму. Похибка вимірювання, що виникає внаслідок округлення, є неперервною випадковою величиною.

Випадкові величини позначатимемо літерами грецького алфавіту $\xi, \eta, \zeta ...$, а їх можливі значення – *x, y, z*, … .

Для опису випадкової величини потрібно навести не лише множину можливих її значень, а й зазначити, з якими ймовірностями ця величина набуває того чи іншого можливого значення.

З цією метою вводять поняття закону розподілу ймовірностей.

Законом розподілу випадкової величини *називають таке співвідношення, яке визначає зв'язок між можливими її значеннями та відповідними їм імовірностями.*

Закон розподілу ймовірностей можна подати ще в одній формі, яка придатна і для дискретних, і для неперервних випадкових величин, а саме: як функцію розподілу ймовірностей випадкової величини $F(x)$, так звану інтегральну функцію.

Інтегральною функцією розподілу (функцією розподілу) ймовірностей F(x) *випадкової величини* ξ *називають імовірність того, що* ξ *набуде значення, не більшого за число* x, *тобто*

$$F(x) = P(\xi \le x). \qquad (2.1)$$

Тобто, функцією розподілу випадкової величини ξ є ймовірність події $\xi \le x$, де x – довільне дійсне число.

Функція розподілу випадкової величини ξ має такі загальні ***властивості***:

а) $0 \le F(x) \le 1$;

б) *функція розподілу є неспадною, тобто* $F(x_2) \ge F(x_1)$, *якщо* $x_2 \ge x_1$;

в) *якщо всі можливі значення випадкової величини* ξ *належать інтервалу* (a, b), *то* $F(x) = 0$ при $x \le a$ і $F(x) = 1$ *при* $x \ge b$;

г) *якщо* $x \to +\infty$, *то* $F(x) \to 1$, *і якщо* $x \to -\infty$, *то* $F(x) \to 0$.

д) функція розподілу неперервна справа, тобто $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} F(x+\varepsilon) = F(x)$ де $\varepsilon > 0$.

е) $P(a < \xi \le b) = F(b) - F(a)$

Дві випадкові величини називають ***взаємно незалежними***, *якщо закон розподілу однієї з них не залежить від того, якого з можливих своїх значень набуває друга величина.*

2.1. Дискретна випадкова величина

Основні поняття, означення та відношення

1. *Випадкову величину називають* ***дискретною****, якщо вона може набувати окремих, ізольованих одне від одного, числових значень з певними ймовірностями.*

Множина значень дискретної випадкової величини може бути скінченною або зліченною.

2. ***Законом розподілу*** *дискретної випадкової величини називають відповідність між всіма можливими її значеннями та їхніми ймовірностями.* Його записують у вигляді таблиці:

$\xi = x_i$	x_1	x_2	…	x_n
$p = p_i$	p_1	p_2	…	p_n

де $p_i = P(\xi = x_i)$. Очевидно, що

$$p_1 + p_2 + ... + p_n = 1, \text{ бо } (\xi = x_1) \cup (\xi = x_2) \cup ... \cup (\xi = x_n) = \Omega .$$

3. ***Функція розподілу*** $F(x) = P(\xi \le x)$ *дискретної випадкової величини* ξ *є розривною у точках* $x = x_i$ $\left(i = \overline{1,n}\right)$*, і її аналітичний вираз описують функцією*

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < x_1; \\ p_1, & x_1 \le x < x_2; \\ p_1 + p_2, & x_2 \le x < x_3; \\ \text{.................................} & \\ p_1 + ... + p_{n-1}, & x_{n-1} \le x < x_n; \\ 1, & x \ge x_n. \end{cases} \qquad (2.2)$$

Графік функції розподілу дискретної випадкової величини ξ є східчастою фігурою. Він зображений на рис. 2.1.

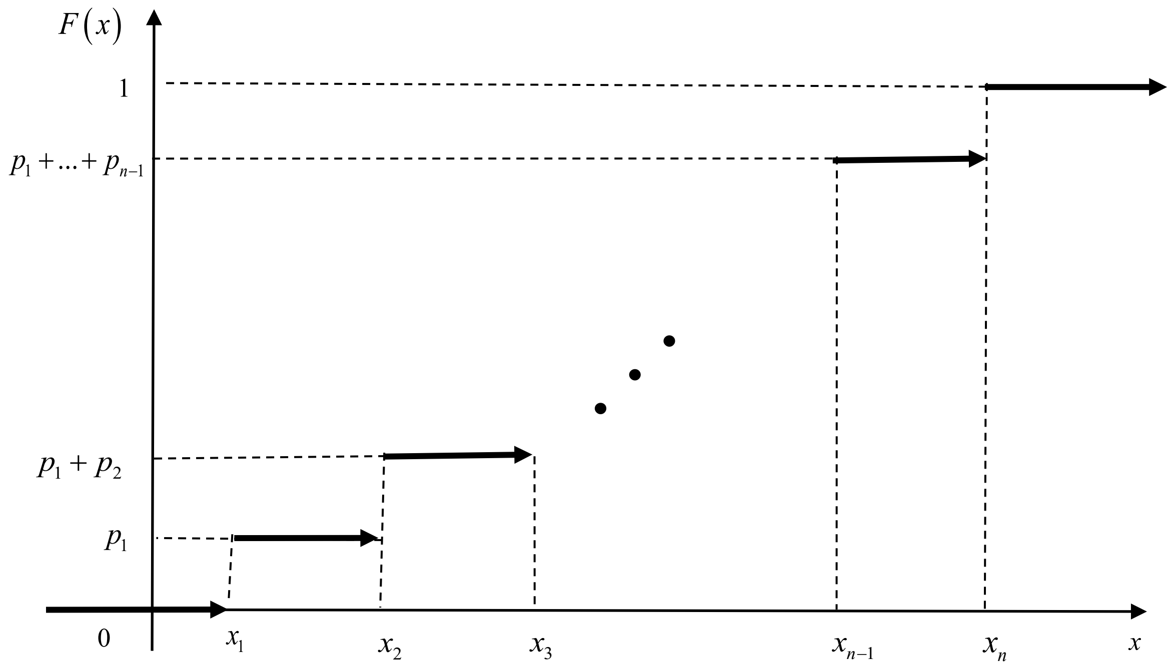

Рис. 2.1. Графік функції розподілу дискретної випадкової величини

Залежно від того за якими формулами обчислюють імовірності набуття дискретною випадковою величиною ξ своїх значень, одержуємо різні закони розподілу. Розглянемо основні з них:

Біномний закон розподілу описує випадкову величину ξ – число появ події A у серії випробувань за схемою Бернуллі, де $p = P(A)$ – ймовірність появи події A в кожному окремому випробуванні.

Якщо число випробувань дорівнює n, тоді випадкова величина ξ може набути значень 0,1,2,…,n, а ймовірність подій $\xi = i$ обчислюють за формулою Бернуллі (1.16):

$$p_i = P(\xi = i) = P_n(i) = C_n^i p^i q^{n-i}. \qquad (2.3)$$

Записують біномний закон розподілу у вигляді таблиці:

$\xi = i$	0	1	2	…	n
$P = p_i$	q^n	$C_n^1 pq^{n-1}$	$C_n^2 p^2 q^{n-2}$	…	p^n

Закон розподілу Пуассона також описує випадкову величину ξ – числопояв події A в серії зnвипробувань, якщо ймовірність $p = P(A)$ близька до нуля або до одиниці. У цьому випадку ймовірності $p_i = P(\xi = i)$ обчислюють за формулою Пуассона (1.22):

$$p_i = P(\xi = i) = \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda}, \text{ де } \lambda = n \cdot p. \qquad (2.4)$$

Закон розподілу Пуассона записують у вигляді таблиці:

$\xi = i$	0	1	2	…	n	…
p_i	$e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda}{1!} e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2}{2!} e^{-\lambda}$	…	$\frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$	…

Цей закон використовують у задачах статистичного контролю якості, в теорії масового обслуговування, теорії надійності і т.п.

Зауважимо, що в законі розподілу Пуассона наведена таблиця є нескінченною, бо

$$e^{-\lambda} + \frac{\lambda}{1!} e^{-\lambda} + \frac{\lambda^2}{2!} e^{-\lambda} + \ldots + \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} + \ldots = e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\lambda^i}{i!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1.$$

Якщо число випробувань n є скінченне, то ймовірність p_n обчислюємо за рівністю $p_n = 1 - \sum_{i=1}^{n-1} p_i$.

Геометричний розподіл описує випадкову величину ξ – число випробувань за схемою Бернуллі до першої появи події A, якщо $p = P(A)$ – ймовірність появи події A в кожному окремому випробуванні. Випадкова величина ξ може набувати значень 1, 2, 3, …, n, …, а відповідні їм імовірності обчислюємо за формулою:

$$p_i = P(\xi = i) = pq^{i-1}, \; q = 1 - p, \qquad (2.5)$$

бо перша поява події A в i – му випробуванні означає, що в попередніх $i-1$ випробуваннях вона не з’явилася, а в i – мувипробуванні з’явилася.

Геометричний закон розподілу записують у вигляді таблиці:

$\xi = i$	1	2	3	…	n	…
p_i	p	pq	pq^2	…	pq^{n-1}	…

Коли випробування закінчуються на n – мукроці, то ймовірність $p_n = P(\xi = n)$ не обчислюють за формулою (2.5), а для її знаходження користуються рівністю:

$$p_n = 1 - (p + pq + pq^2 + ... + pq^{n-2}).$$

4. Поряд із законом розподілу дискретну випадкову величину характеризують ще так званими інтегральними ознаками, які називають ***числовими характеристиками***. До основних з них належать математичне сподівання, дисперсія і середнє квадратичне відхилення.

Математичним сподіванням E(ξ) *дискретної випадкової величини ξ називають число, яке дорівнює сумі добутків можливих значень величини ξ на відповідні їм імовірності, тобто*

$$E(\xi) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i . \tag{2.6}$$

Якщо ξ може набувати нескінченної зліченної кількості значень, то

$$E(\xi) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i , \tag{2.6′}$$

при цьому ряд повинен бути збіжним.

Математичне сподівання дискретної випадкової величини ξ характеризує середнє арифметичне значення випадкової величини ξ із врахуванням їхніх імовірностей і є центром розподілу цих значень.

Математичне сподівання дискретної випадкової величини має такі ***властивості:***

- *математичне сподівання сталої величини дорівнює цій сталій величині, тобто $E(C) = C$, якщо C =* const;
- *математичне сподівання суми випадкових величин дорівнює алгебраїчній сумі їхніх математичних сподівань, тобто*

$$E(\sum_{i=1}^{n} \xi_i) = \sum_{i=1}^{n} E(\xi_i); \tag{2.7}$$

- *математичне сподівання добутку декількох взаємно незалежних випадкових величин дорівнює добутку їхніх математичних сподівань, тобто*

$$E(\xi_1 \cdot \xi_2 \cdot ... \cdot \xi_n) = E(\xi_1)E(\xi_2)...E(\xi_n); \tag{2.8}$$

- *сталий множник можна виносити за знак математичного сподівання, тобто*

$$E(C\xi) = CE(\xi), C = \text{const}. \tag{2.9}$$

Якщо випадкова величина ξ є число появ події A у серії випробувань за схемою Бернуллі, то

$$E(\xi) = np . \tag{2.10}$$

Для розподілу Пуассона $E(\xi) = \lambda = np$.

Дисперсією D(ξ) *дискретної випадкової величини ξ називають число, яке дорівнює математичному сподіванню квадрата відхилення величини ξ від її математичного сподівання, тобто*

$$D(\xi) = E(\xi - E(\xi))^2) = \sum_{i=1}^{n} [x_i - E(\xi)]^2 \cdot p_i . \tag{2.11}$$

Формула (2.11) елементарними перетвореннями набуває вигляду:

$$D(\xi)=E(\xi^2)-E^2(\xi)=\sum_{i=1}^{n} x_i{}^2 \cdot p_i - E^2(\xi). \qquad (2.11')$$

Дисперсія дискретної випадкової величини ξ характеризує розсіювання можливих значень величини ξ відносно її центру розподілу – математичного сподівання.

Дисперсія дискретної випадкової величини ξ має такі ***властивості*:**

- *дисперсія будь-якої дискретної випадкової величини* ξ *невід'ємна, тобто* $D(\xi) \geq 0$;
- *дисперсія сталої величини дорівнює нулю, тобто* $D(C)=0$*,коли* C = const;
- *дисперсія алгебричної суми дискретних незалежних випадкових величин дорівнює сумі дисперсій цих величин, тобто*

$$D(\xi_1 \pm \xi_2 \pm ... \pm \xi_n) = D(\xi_1)+D(\xi_2)+...+D(\xi_n); \qquad (2.12)$$

- *сталий множник можна винести за знак дисперсії, при цьому його треба піднести у квадрат, тобто* $D(C\xi)=C^2 D(\xi)$ *,якщо* C=const.

У випадку, коли випадкова величина ξ – число появ події у серії випробувань за схемою Бернуллі, то дисперсію величини ξ обчислюють за простішою формулою:

$$D(\xi)=npq, \qquad (2.13)$$

де $p=P(A)$ – ймовірність появи події A в кожному окремому випробуванні і $q=1-p=P(\overline{A})$.

Для розподілу Пуассона дисперсія дорівнює параметру Пуассона $D(\xi)=\lambda$.

Середнім квадратичним відхиленням $\sigma(\xi)$ *дискретної випадкової величини* ξ *називають число, яке дорівнює квадратному кореню з дисперсії* $D(\xi)$, *тобто*

$$\sigma(\xi)=\sqrt{D(\xi)}. \qquad (2.14)$$

Середнє квадратичне відхилення $\sigma(\xi)$ також характеризує розсіювання можливих значень величини ξ відносно центру, але на відміну від $D(\xi)$ вимірюється в тих самих одиницях, що й величина ξ.

5. Якщо дискретні випадкові величини $\xi_1, \xi_2, ...\xi_n$ взаємно незалежні й однаково розподілені ($E(\xi_i)=E=const$, $D(\xi_i)=D=const$, $\sigma(\xi_i)=\sigma=const$), а випадкова величина

$$\overline{\xi}=\frac{\xi_1+\xi_2+...+\xi_n}{n}, \qquad (2.15)$$

то:

$$E(\overline{\xi})=E, \quad D(\overline{\xi})=\frac{D}{n}, \quad \sigma(\overline{\xi})=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}. \qquad (2.16)$$

Наголосимо, що випадкові величини $\xi_1, \xi_2, ...\xi_n$ взаємно незалежні, якщо закон розподілу кожної з них не залежить від того, якого значення набула інша величина.

Наведені формули для чисельних характеристик середнього арифметичного значення $\overline{\xi}$ випадкових величин $\xi_1, \xi_2, ...\xi_n$ мають важливе практичне застосування: якщо вибрати за значення вимірюваної величини середнє арифметичне результатів проведених вимірювань $\xi_1, \xi_2, ...\xi_n$, то воно буде ближчим до істинного значення цієї величини, ніж результат кожного вимірювання, тобто надійнішим. Це випливає з того, що розсіювання випадкової величини – середнього арифметичного результатів вимірювання – є меншим, ніж розсіювання кожної випадкової величини – результату кожного вимірювання. При цьому зі збільшенням числа n вимірювань розсіювання їхнього середнього арифметичного зменшується.

Приклад 1.На іспиті з математики, який складали 25 студентів, бал „5” отримали п’ятьстудентів, бал „4” – десять студентів, бал „3” – вісім студентів, бал „2” – два студенти. Написати закон розподілу випадкової величини ξ – число балів навмання вибраного з групи студента. Виконати такі дії:

а) знайти ймовірність того, що вибраний навмання студент має не менше ніж чотири бали (подія *A*);

б) обчислити числові характеристики $E(\xi)$, $D(\xi)$, $\sigma(\xi)$.

Розв’язання.Випадкова величина ξ може набути значень: $x_1 = 2$ (студент отримав бал „2”), $x_2 = 3$ (студент отримав бал „3”), $x_3 = 4$ (студент отримав бал „4”), $x_4 = 5$ (студент отримав бал „5”). Обчислимо ймовірності, що відповідають цим значенням випадкової величини ξ:

$$p_1 = P(\xi = 2) = \frac{2}{25} = 0,08,$$

$$p_2 = P(\xi = 3) = \frac{8}{25} = 0,32,$$

$$p_3 = P(\xi = 4) = \frac{10}{25} = 0,4,$$

$$p_4 = P(\xi = 5) = \frac{5}{25} = 0,2.$$

Закон розподілу описаної у задачі випадкової величини ξ має вигляд:

$\xi = x_i$	2	3	4	5
p_i	0,08	0,32	0,4	0,2

Зробимо перевірку:

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 0,08 + 0,32 + 0,4 + 0,2 = 1.$$

а) Якщо студент отримає не менше ніж бал „4”, то він склав іспит або на чотири або на п’ять. Тому подія *A* є сумою подій $\xi = 4$ і $\xi = 5$, які несумісні. Тоді за формулою додавання несумісних подій маємо:

$$P(A) = P(\xi = 4 \cup \xi = 5) = P(\xi = 4) + P(\xi = 5) = 0,4 + 0,2 = 0,6.$$

б) Математичне сподівання $E(\xi)$, дисперсію $D(\xi)$ і середнє квадратичне відхилення $\sigma(\xi)$ обчислюємо за формулами відповідно:

$$E(\xi) = 2 \cdot 0,08 + 3 \cdot 0,32 + 4 \cdot 0,4 + 5 \cdot 0,2 = 0,16 + 0,96 + 1,6 + 1 = 3,72.$$

Середнє арифметичне можливих значень величини ξ дорівнює:

$$\bar{\xi} = \frac{2+3+4+5}{4} = \frac{14}{4} = 3,5.$$

Отже, $E(\xi) \approx \bar{\xi}$.

$$D(\xi) = E(\xi^2) - E^2(\xi) = \sum_{i=1}^{4} x_i^2 \cdot p_i - 3,72^2 =$$

$$2^2 \cdot 0,08 + 3^2 \cdot 0,32 + 4^2 \cdot 0,4 + 5^2 \cdot 0,2 - 3,72^2 = 4 \cdot 0,08 + 9 \cdot 0,32 + 16 \cdot 0,4 + 25 \cdot 0,2 - 13,8384 =$$

$$= 0,32 + 2,88 + 6,4 + 5 - 13,8384 = 0,7616$$

$$\sigma(\xi) = \sqrt{D(\xi)} = \sqrt{0,7616} \approx 0,8727.$$

Приклад 2. Написати закон розподілу ймовірностей випадкової величини ξ – числа сімей з чотирьох навмання вибраних, які мають заборгованості в оплаті комунальних послуг, якщо 70% сімей регіону своєчасно їх сплачують. Виконати такі дії:

а) знайти найімовірніше число сімей серед чотирьох вибраних, які мають заборгованість в оплаті комунальних послуг;

б) написати аналітичний вираз функції розподілу $F(x)$ випадкової величини ξ та накреслити її графік.

Розв'язання. Нехай подія A – вибрана навмання сім'я в регіоні має заборгованість в оплаті комунальних послуг. Тоді подія $\overline{A}$ – вибрана навмання сім'я не має заборгованості в оплаті комунальних послуг. За умовою задачі $q = P(\overline{A}) = 0,7$ і $p = P(A) = 0,3$.

Випадкова величина ξ може набувати значень: $x_0 = 0$ (жодна сім'я з чотирьох вибраних не має заборгованості), $x_1 = 1$ (одна сім'я має заборгованість), $x_2 = 2$ (дві сім'ї мають заборгованість), $x_3 = 3$ (три сім'ї мають заборгованість), $x_4 = 4$ (чотири сім'ї мають заборгованість).

Оскільки вибір чотирьох сімей можна розглядати як послідовність 4 випробувань за схемою Бернуллі, в кожному з яких з'являється подія A або $\overline{A}$, то закон розподілу випадкової величини ξ є біномним, і ймовірності, що відповідають значенням $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 4$, обчислимо за формулою Бернуллі (2.3):

$$p_0 = C_4^0 \cdot 0,3^0 \cdot 0,7^4 = \frac{4!}{0! \cdot 4!} \cdot 1 \cdot 0,2401 = 1 \cdot 1 \cdot 0,2401 = 0,2406;$$

$$p_1 = C_4^1 \cdot 0,3^1 \cdot 0,7^3 = \frac{4!}{1! \cdot 3!} \cdot 0,3 \cdot 0,343 = 4 \cdot 0,3 \cdot 0,343 = 0,4116;$$

$$p_2 = C_4^2 \cdot 0,3^2 \cdot 0,7^2 = \frac{4!}{2! \cdot 2!} \cdot 0,09 \cdot 0,49 = 6 \cdot 0,09 \cdot 0,49 = 0,2646;$$

$$p_3 = C_4^3 \cdot 0,3^3 \cdot 0,7^1 = \frac{4!}{3! \cdot 1!} \cdot 0,027 \cdot 0,7 = 4 \cdot 0,027 \cdot 0,7 = 0,0756;$$

$$p_4 = C_4^4 \cdot 0,3^4 \cdot 0,7^0 = \frac{4!}{4! \cdot 0!} \cdot 0,0081 \cdot 1 = 1 \cdot 0,0081 \cdot 1 = 0,0081.$$

Зробимо перевірку:

$$p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 0,2401 + 0,4116 + 0,2646 + 0,0756 + 0,0081 = 1.$$

Закон розподілу випадкової величини ξ записуємо у вигляді таблиці:

$\xi = x_i$	0	1	2	3	4
p_i	0,2401	0,4116	0,2646	0,0756	0,0081

а) Із закону розподілу випливає, що найбільшу ймовірність має значення $x_1 = 1$ випадкової величини ξ, тому найімовірніше, що серед чотирьох вибраних сімей заборгованість в оплаті за комунальні послуги має одна сім'я.

б) За формулою (2.2) записуємо функцію розподілу $F(x)$ випадкової величини ξ:

якщо $x < 0$, то $F(x) = P(\xi \le x)$ дорівнює нулю, бо випадкова величина ξ не має від'ємних значень і подія $\xi < 0$ неможлива;

якщо $0 \le x < 1$, то $F(x) = P(\xi \le x) = 0,2401$, бо величина ξ має єдине значення, яке менше за одиницю, і $P(\xi \le 0) = P(\xi = 0) = 0,2401$;

якщо $1 \le x < 2$, то $F(x) = P(\xi \le x) = P(\xi = 0) + P(\xi = 1) = 0,2401 + 0,4116 = 0,6517$, бо подія $\xi \le x$ є сумою несумісних подій $\xi = 0$ і $\xi = 1$;

якщо $2 \le x < 3$, то $F(x) = P(\xi \le x) = P(\xi = 0) + P(\xi = 1) + P(\xi = 2) = 0,9163$, бо подія $\xi \le x$ єсумою трьох несумісних подій $\xi = 0$, $\xi = 1$ і $\xi = 2$;

якщо $3 \le x < 4$, то $F(x) = P(\xi \le x) = P(\xi = 0) + P(\xi = 1) + P(\xi = 2) + P(\xi = 3) = 0,9919$ бо подія $\xi \le x$ є сумою чотирьох несумісних подій $\xi = 0$, $\xi = 1$, $\xi = 2$ і $\xi = 3$;

якщо $x \ge 4$, $F(x) = P(\xi \le x) = 1$, бо подія $\xi \le x$ вірогідна, оскільки є сумою несумісних подій $\xi = 0$, $\xi = 1$, $\xi = 2$ і $\xi = 3$, $\xi = 4$.

Функція $F(x)$ розподілу випадкової величини ξ має вигляд:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0; \\ 0,2401, & 0\le x<1; \\ 0,6517, & 1\le x<2; \\ 0,9163, & 2\le x<3; \\ 0,9919, & 3\le x<4; \\ 1, & x\ge 4. \end{cases}$$

Графік цієї функції розподілу зображено на рис. 2.2.

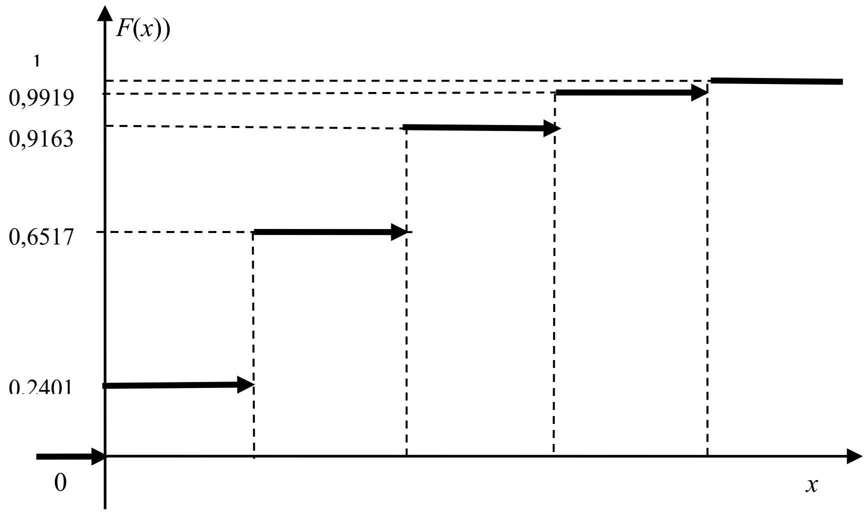

Рис. 2.2. Графік функції розподілу.

Приклад 3. Дискретна випадкова величина ξ характеризується функцією розподілу

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<-4; \\ 0,2, & -4\le x<5; \\ 0,3, & 5\le x<8; \\ 0,6, & 8\le x<9; \\ 0,8, & 9\le x<10; \\ 1, & x\ge 10. \end{cases}$$

Обчислити числові характеристики $E(\xi)$, $D(\xi)$, $\sigma(\xi)$

Розв'язання. Щоб обчислити зазначені числові характеристики, потрібно знайти закон розподілу випадкової величини ξ, можливими значеннями якої є числа: -4, 5, 8, 9, 10, а для цього виходячи з означення функції розподілу $F(x)=P(\xi\le x)$, знайдемо їхні ймовірності:

$P(\xi=-4)=0,2$, бо при $-4\le x<5$ маємо, що $F(x)=P(\xi\le x)=0,2=P(\xi=-4)$;

$P(\xi=5)=0,1$, бо при $5\le x<8$ функція $F(x)=P(\xi\le x)=P(\xi=-4)+P(\xi=5)=0,3\Rightarrow$

$\Rightarrow P(\xi=5)=0,3-P(\xi=-4)=0,3-0,2=0,1$;

$P(\xi=8)=0,3$, бо при $8\le x<9$ функція

$F(x)=P(\xi\le x)=P(\xi=-4)+P(\xi=5)+P(\xi=8)=0,6\Rightarrow$

$\Rightarrow P(\xi=8)=0,6-P(\xi=-4)-P(\xi=5)=0,6-0,2-0,1=0,3$.

Аналогічно знайдемо: $P(\xi=9)=0,8-0,2-0,1-0,3=0,2$;

$P(\xi=10)=1-0,2-0,1-0,3-0,2=0,2$.

Таблиця, якою виражений закон розподілу випадкової величини ξ, має вигляд:

$\xi = x_i$	-4	5	8	9	10
p_i	0,2	0,1	0,3	0,2	0,2

За формулами (2.6), (2.11) і (2.14) обчислюємо числові характеристики величини ξ:

$$E(\xi) = \sum_{i=1}^{5} x_i \cdot p_i = -4 \cdot 0,2 + 5 \cdot 0,1 + 8 \cdot 0,3 + 9 \cdot 0,2 + 10 \cdot 0,2 = -0,8 + 0,5 + 2,4 + 1,8 + 2 = 5,9.$$

$$D(\xi) = \sum_{i=1}^{5} (x_i - E(\xi))^2 \cdot p_i = (-9,9)^2 \cdot 0,2 + 0,9^2 \cdot 0,1 + 2,1^2 \cdot 0,3 + 3,1^2 \cdot 0,2 + 4,1^2 \cdot 0,2 =$$

$$= 19,602 + 0,081 + 1,323 + 1,922 + 3,362 = 26,29,$$

або

$$D(\xi) = \sum_{i=1}^{5} x_i^2 \cdot p_i - E^2(\xi) = (-4)^2 \cdot 0,2 + 5^2 \cdot 0,1 + 8^2 \cdot 0,3 + 9^2 \cdot 0,2 + 10^2 \cdot 0,2 - 5,9^2 =$$

$$= 3,2 + 2,5 + 19,2 + 16,2 + 20 - 34,81 = 26,29.$$

$$\sigma(\xi) = \sqrt{D(\xi)} = \sqrt{26,29} \approx 5,13.$$

Приклад 4. Імовірність дефекту електролампочки (подія A) дорівнює 0,2. Виконати такі дії:

а) написати закон розподілу випадкової величини ξ – кількості перевірених електролампочок до виявлення дефектної, якщо перевіряють п'ять електролампочок;

б) знайти ймовірність того, що до виявлення електролампочки з дефектом їх буде перевірено більше ніж три (подія B).

Розв'язання. Імовірність появи події A – перевірена електролампочка має дефект дорівнює $p = P(A) = 0,2$ і $q = P(\overline{A}) = 1 - 0,2 = 0,8$.

Множиною можливих значень випадкової величини ξ є натуральні числа 1, 2, 3 ,4, 5. Обчислимо ймовірності набуття величиною ξ цих значень:

якщо $\xi = 1$, то перша перевірена електролампочка має дефект і $p_1 = P(\xi = 1) = P(A) = 0,2$;

якщо $\xi = 2$, то перша електролампочка доброї якості, а друга дефектна, тому подія $\xi = 2$ є добутком незалежних подій $\overline{A}$ і A і $p_2 = P(\xi = 2) = P(\overline{A}) \cdot P(A) = 0,8 \cdot 0,2 = 0,16$;

якщо $\xi = 3$, то перша і друга електролампочки дефектів не мають, а третя – має дефект і $p_3 = P(\xi = 3) = P(\overline{A}) \cdot P(\overline{A}) \cdot P(A) = 0,8 \cdot 0,8 \cdot 0,2 = 0,128$;

якщо $\xi = 4$, то перші три електролампочки доброї якості, а четвертамає дефект, тому

$$p_4 = P(\xi = 4) = P(\overline{A}) \cdot P(\overline{A}) \cdot P(\overline{A}) \cdot P(A) = 0,8^3 \cdot 0,2 = 0,1024;$$

якщо $\xi = 5$, то у жодній з перших чотирьох перевірених електролампочок дефекту не виявлено, а п'ята має дефект або дефекту не має, тобто подія $\xi = 5$ є сумою несумісних подій $\overline{A} \cap \overline{A} \cap \overline{A} \cap \overline{A} \cap A$ і $\overline{A} \cap \overline{A} \cap \overline{A} \cap \overline{A} \cap \overline{A}$ і тому

$$p_5 = P(\xi = 5) = P(\overline{A}) \cdot P(\overline{A}) \cdot P(\overline{A}) \cdot P(\overline{A}) \cdot P(A) + P(\overline{A}) \cdot P(\overline{A}) \cdot P(\overline{A}) \cdot P(\overline{A}) \cdot P(\overline{A}) =$$

$$= 0,8^4 \cdot 0,2 + 0,8^5 = 0,4096.$$

Закон розподілу випадкової величини ξ геометричний, його записують таблицею:

$\xi = x_i$	1	2	3	4	5
p_i	0,2	0,16	0,128	0,1024	0,4096

Перевірка:

$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = 0,2 + 0,16 + 0,128 + 0,1024 + 0,4096 = 1$.

б) Подія B є сумою несумісних подій $\xi = 4$ і $\xi = 5$, тому

$P(B) = P(\xi = 4) + P(\xi = 5) = 0,1024 + 0,4096 = 0,512$.

Приклад 5. Визначити математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення випадкової величини ξ, можливі значення якої та їхні частоти задані таблицею:

$\xi = x_i$	– 2	– 1	1	5	10	15
n_i	4	35	34	20	4	3

Розв'язання. За значення ймовірностей p_i набуття випадковою величиною ξ своїх значень x_i приймаємо їхні відносні частоти $w_i = \dfrac{n_i}{n}$, де $n = \sum_{i=1}^{6} n_i = 100$:

$$p_1 = \frac{4}{100},\ p_2 = \frac{35}{100},\ p_3 = \frac{34}{100},\ p_4 = \frac{20}{100},\ p_5 = \frac{4}{100}.\ p_6 = \frac{3}{100}.$$

Далі за відповідними формулами обчислюємо числові характеристики:

$$E(\xi) = \sum_{i=1}^{6} x_i \cdot p_i = -2 \cdot 0,04 + (-1) \cdot 0,35 + 1 \cdot 0,34 + 5 \cdot 0,2 + 10 \cdot 0,04 + 15 \cdot 0,03 =$$

$$= -0,08 - 0,35 + 0,34 + 1 + 0,4 + 0,45 = 1,76;$$

$$D(\xi) = \sum_{i=1}^{6} x_i^2 \cdot p_i - E^2(\xi) =$$

$$= (-2)^2 \cdot 0,04 + (-1)^2 \cdot 0,35 + 1^2 \cdot 0,34 + 5^2 \cdot 0,2 + 10^2 \cdot 0,04 + 15^2 \cdot 0,03 -$$

$$= -1,76^2 = 16,6 - 3,0976 = 13,5024;$$

$$\sigma(\xi) = \sqrt{D(\xi)} = \sqrt{13,5024} \approx 3,675.$$

Приклад 6. Імовірність того, що член туристичної групи правильно заповнив митну декларацію (подія A), дорівнює 0,9. Знайти середнє число туристів у групі з 50 осіб, які правильно заповнили митні декларації, а також межі, між якими може коливатися це число туристів.

Розв'язання. У даному випадку випадкова величина ξ – кількість туристів серед 50 осіб, які правильно заповнили митну декларацію, є кількість появ події A у серії з 50 випробувань за схемою Бернуллі. У цьому випадку числові характеристики можемо обчислити за формулами (2.10) і (2.13):

$E(\xi) = n \cdot p = 50 \cdot 0,9 = 45$;

$D(\xi) = n \cdot p \cdot q = 50 \cdot 0,9 \cdot 0,1 = 4,5$;

$\sigma(\xi) = \sqrt{D(\xi)} = 2,12$.

За ймовірнісним змістом $E(\xi)$ наближено дорівнює середньому арифметичному $\overline{\xi}$ значень величини ξ. Тому середнє число туристів у групі з 50 осіб, які правильно заповнили митну декларацію, наближено дорівнює $\overline{\xi} \approx 45$.

Проміжок $(E(\xi) - \sigma(\xi), E(\xi) + \sigma(\xi)) = (45 - 2,12; 45 + 2,12)$ =(42,88; 47,12) визначає приблизні межі, в яких може коливатися кількість туристів, що правильно заповнили митну декларацію.

Приклад 7. Однаково розподілені випадкові величини $\xi_1, \xi_2, ... \xi_{10}$ задані математичним сподіванням $E(\xi_i) = 4,8$ і дисперсіями $D(\xi_i) = 2,5$. Обчислити $E(\overline{\xi})$, $D(\overline{\xi})$, $\sigma(\overline{\xi})$, де $\overline{\xi}$ – середнє арифметичне величин $\xi_1, \xi_2, ... \xi_{10}$.

Розв'язання. Середнє арифметичне $\overline{\xi} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}\xi_i$. Використовуючи властивості математичного сподівання і дисперсії, отримаємо:

$$E(\overline{\xi}) = E(\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}\xi_i) = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}E(\xi_i) = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}4,8 = \frac{1}{10}\cdot 10\cdot 4,8 = 4,8;$$

$$D(\overline{\xi}) = D(\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}\xi_i) = \frac{1}{10^2}\sum_{i=1}^{10}D(\xi_i) = \frac{1}{100}\sum_{i=1}^{10}2,5 = \frac{1}{100}\cdot 10\cdot 2,5 = 0,25;$$

$$\sigma(\overline{\xi}) = \sqrt{D(\overline{\xi})} = \sqrt{0,25} = 0,5.$$

Завдання для самостійної роботи

1. У грошовій лотереї розігрують: два квитки по 500 грн, 10 квитків по 50 грн, 20 квитків по 1 грн. Всього є 200 лотерейних квитків. Покупець навмання придбав один з них. Побудувати закон розподілу ймовірностей випадкової величини ξ – величини виграшу. Знайти:
   а) функцію розподілу ймовірностей та побудувати її графік;
   б) обчислити $E(\xi)$, $D(\xi)$, $\sigma(\xi)$.
2. Виконують постріли з двох гармат. Імовірності влучення в мішень, відповідно, дорівнюють 0,55 і 0,6. Знайти закон розподілу випадкової величини ξ – загальної кількості влучень у мішень, якщо з кожної гармати здійснено по 1 пострілу. Знайти функцію розподілу випадкової величини ξ та побудувати її графік.
3. Імовірність того, що футболіст реалізує пенальті, дорівнює 0,85. Футболіст виконав три таких удари. Побудувати закон розподілу ймовірностей дискретної випадкової величини ξ – числа реалізованих пенальті. Знайти:
   а) ймовірність того, що реалізованих пенальті буде не більше двох;
   б) найімовірніше число реалізованих пенальті.
4. Для виконання вправи гімнасту надають можливість зробити до трьох спроб. Імовірність виконати вправу в кожній спробі дорівнює 0,6. Знайти закон розподілу, математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини ξ – кількості спроб, використаних спортсменом для виконання вправи.
5. Єтри ящики. У першому містяться шість стандартних і чотири браковані однотипні деталі, у другому – вісім стандартних і двібраковані деталі, а в третьому – п'ять стандартних і п'ять бракованих. Із кожного ящика навмання беруть по одній деталі. Побудувати закон розподілу ймовірностей дискретної випадкової величини ξ – появи кількості стандартних деталей серед трьох навмання взятих; визначити $F(x)$ та побудувати графік цієї функції.
6. Троє студентів складають іспит із теорії ймовірностей. Імовірність того, що перший студент складе екзамен, становить 0,9, для другого та третього студентів ця ймовірність дорівнює, відповідно, 0,85; 0,8. Побудувати закон розподілу ймовірностей дискретної випадкової величини ξ – числа студентів, які складуть іспит з теорії ймовірностей, побудувати $F(x)$ і накреслити її графік.
7. У першому ящику міститься сім стандартних і три браковані деталі, у другому – шість стандартних і чотири браковані. Навмання з першого ящика беруть чотири деталі, а з другого– одну. Побудувати закон розподілу ймовірностей дискретної випадкової величини ξ – появи кількості стандартних деталей серед чотирьох навмання взятихі побудувати $F(x)$.

8. В озері було 15 000 риб, з яких 1 000 − мічені. Було відловлено 150 риб. Знайти математичне сподівання мічених риб серед відловлених. У яких межах може змінюватися кількість мічених риб?

9. Визначити математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення випадкової величини ξ, частоти можливих значень якої задано таблицею:

x_i	-3	1	7	15	100
n_i	5	34	35	25	1

10. Випадкова величина ξ набуває двох можливих значень x_1 та x_2 з ймовірностями, відповідно,p_1та p_2. Знайти x_1та x_2і записати її закон розподілу,якщо: $x_1 > x_2$, $p_1 = 2/3$, $E(\xi) = -1/3$, $D(\xi) = 8/9$.

11. За заданим законом розподілу дискретної випадкової величини ξ:

$\xi = x_i$	-3	-2	1	3	5	7
p_i	a	$1{,}5a$	$0{,}5a$	$3{,}5a$	$2{,}5a$	a

знайти:

а) параметр a;

б) $P(\xi < 2)$, $\quad P(-4 < \xi \le 6)$;

в) функцію розподілу ймовірностей та побудувати її графік.

12. Обчислити $E(\xi)$, $D(\xi)$, $\sigma(\xi)$, якщо закон розподілу ймовірностей дискретної випадкової величини ξ задано функцією розподілу

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -5; \\ 0{,}1, & -5 \le x < -4; \\ 0{,}3, & -4 \le x < 1; \\ 0{,}4, & 1 \le x < 2; \\ 0{,}65, & 2 \le x < 4; \\ 1, & x \ge 4. \end{cases}$$

13. Відомо, що однаково розподілені випадкові величини $\xi_1, \xi_2, ...\xi_{25}$ мають математичне сподівання $E(\xi_i) = 12{,}1$ і дисперсії $D(\xi_i) = 4{,}11 \quad (i = \overline{1,25})$. Обчислити $E(\overline{\xi})$, $D(\overline{\xi})$, $\sigma(\overline{\xi})$, де $\overline{\xi}$ – середнє арифметичне величин $\xi_1, \xi_2, ...\xi_{25}$.

14. Закон розподілу дискретної випадкової величини ξ задано таблицею:

$\xi = x_i$	– 4	– 1	2	6	9	13
p_i	0,1	0,2	0,1	0,3	0,1	0,2

Побудувати функцію розподілу $F(x)$ та її графік.

15. Відділ технічного контролю перевіряє вироби на стандартність. Імовірність того, що виріб стандартний, становить 0,9. У кожній партії є п’ять виробів. Знайти математичне сподівання кількості партій, у кожній з яких буде чотири стандартні вироби, якщо всього перевіряють 50 партій.

16. Знайти дисперсію дискретної випадкової величини ξ – кількості появ події A в 10 незалежних випробуваннях, якщо ймовірності появи події в цих випробуваннях однакові й відоме математичне сподівання $E(\xi) = 6$.

2.2. Неперервна випадкова величина

Основні поняття, означення та відношення

1. *Випадкову величину називають* ***неперервною***, *якщо вона може набувати будь-якого числового значення і скінченного або нескінченного інтервалу* (*a, b*). *Множина можливих значень такої величини є нескінченною*.

2. Випадкова величина ξ є неперервна тоді і тільки тоді, коли її інтегральна функція розподілу $F(x) = P(\xi \le x)$ і $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt$ неперервна.

Графіком функції розподілу неперервної випадкової величини ξ є неперервна лінія. Зокрема, якщо значення неперервної випадкової величини ξ заповнюють інтервал (*a, b*), то її функція розподілу

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a; \\ g(x), & a \le x < b; \\ 1, & x \ge b. \end{cases} \tag{2.17}$$

Графік такої функції розподілу зображено на рис. 2.3.

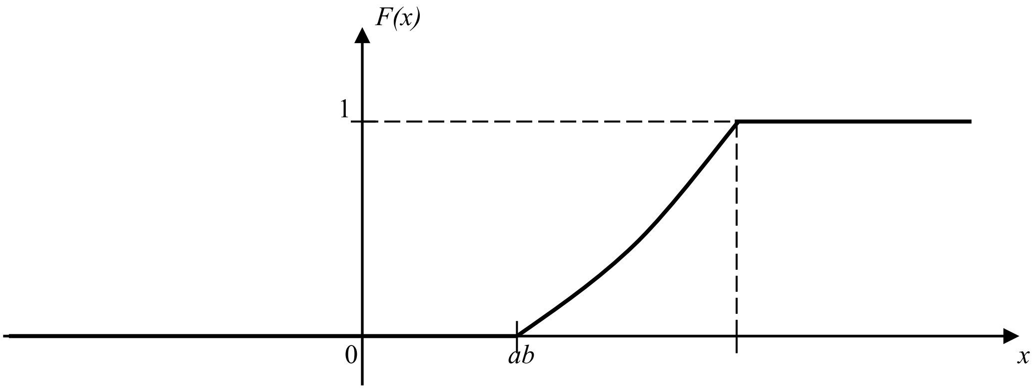

Рис 2.3. Графік функції розподілу неперервної випадкової величини ξ, якщо $\xi \in [a,b]$.

Якщо значення неперервної випадкової величини ξ розсіяні по всій числовій осі, тобто її аналітичний вираз описують функцією $F(x) = g(x)$ для $x \in (-\infty, +\infty)$, то її графік є суцільною лінією, яка „надвисає" над всією віссю *Ox,* і її графік схематично зображений на рис. 2.4.

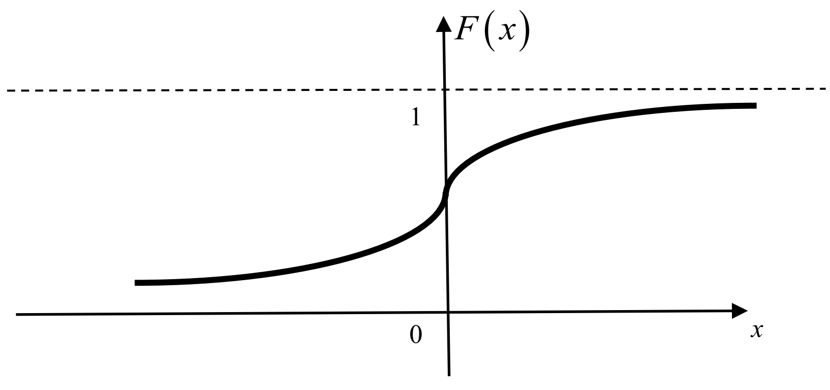

Рис.2.4. Графік функції розподілу неперервної випадкової величини ξ, якщо $\xi \in (-\infty, +\infty)$

За допомогою функції розподілу неперервної випадкової величини ξ легко обчислюють імовірності попадання її значень у будь-який проміжок (замкнений або відкритий), а саме: ймовірність того, що випадкова величина ξ набуде значення з проміжку [a, b], дорівнює приросту функції розподілу на цьому проміжку:

$$P(a \le \xi \le b) = F(b) - F(a). \tag{2.18}$$

Наголосимо, що імовірність того, що неперервна величина ξ набуде певного числового значення $\xi = x_0$, дорівнює нулю, тобто $P(\xi = x_0) = 0$. Це випливає з неперервності функції розподілу $F(x)$.

3. ***Диференціальною функцією розподілу*** або ***щільністю (густиною) розподілу*** $f(x)$ ***ймовірностей*** *неперервної випадкової величини ξ називають похідну від її функції розподілу, тобто*

$$f(x) = F'(x). \tag{2.19}$$

Поняття щільності (густини) розподілу ймовірностей вводять для неперервної випадкової величини з кусково-диференційовною функцією розподілу.

Якщо всі значення випадкової величини ξ зосереджені в інтервалі (a,b),то щільність розподілу її імовірностей має такий аналітичний вигляд:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < a; \\ g'(x), & a \le x < b; \\ 0, & x \ge b. \end{cases} \tag{2.20}$$

Її графік може мати один із виглядів, які зображено на рис. 2.5.

4. Якщо відома диференціальна функція розподілу $f(x)$ неперервної випадкової величини ξ, то її інтегральну функцію розподілу можна знайти за формулою:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt. \tag{2.21}$$

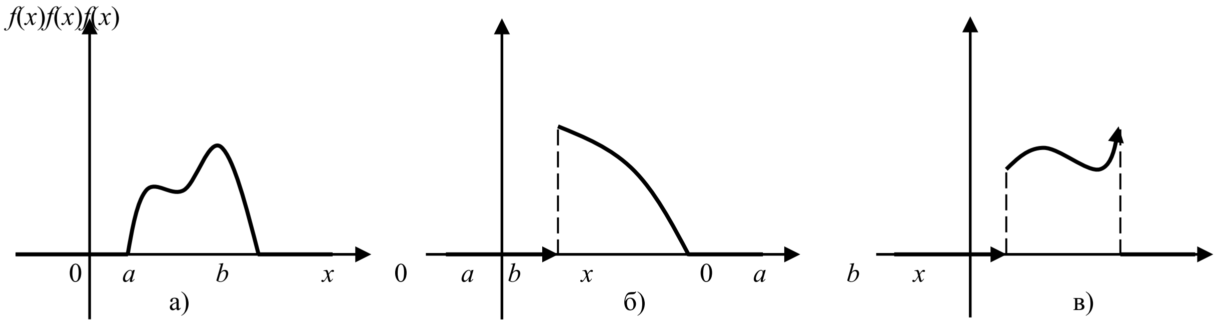

Рис. 2.5. Графік щільності розподілу неперервної випадкової величини

$$F(x) = \begin{cases} \int_{a}^{x} f(t)dt, & a \le x < b; \\ 1, & x \ge b. \end{cases} \tag{2.21′}$$

5. Імовірність того, що неперервна випадкова величина ξ зі щільністю розподілу $f(x)$ набуде значень з проміжку [a, b], обчислюють за формулою:

$$P(a \le \xi \le b) = \int_{a}^{b} f(x)dx. \tag{2.22}$$

Ця ж імовірність може бути обчислена також за допомогою функції розподілу за формулами (2.18).

6. Якщо неперервна випадкова величина ξ характеризується щільністю розподілу $f(x)$, то

$$\int_a^b f(x)dx = 1, \tag{2.23}$$

коли ξ набуває значень з проміжку [a, b], і

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1, \tag{2.23′}$$

коли ξ набуває значень зі всієї числової осі (***умова нормування***).

7. Аналогічно, як і дискретна випадкова величина, неперервна випадкова величина може характеризуватись інтегральними (числовими) характеристиками.

Математичне сподівання $E(\xi)$ неперервної випадкової величини ξ, яка набуває значень з проміжку [a, b], обчислюють за формулою:

$$E(\xi) = \int_a^b x \cdot f(x)dx. \tag{2.24}$$

Якщо неперервна випадкова величина ξ набуває значень зі всієї числової осі Ox, то її математичне сподівання $E(\xi)$ обчислюють за формулою:

$$E(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx. \tag{2.24′}$$

При цьому припускають, що невласний інтеграл є збіжний.

Дисперсію $D(\xi)$ неперервної випадкової величини ξ, яка набуває значень з проміжку[a, b], обчислюють за формулою:

$$D(\xi) = E(\xi - E(\xi))^2 = \int_a^b (x - E(\xi))^2 \cdot f(x)dx = \int_a^b x^2 \cdot f(x)dx - E^2(\xi). \tag{2.25}$$

Якщо неперервна випадкова величина ξ набуває значень зі всієї числової осі Ox, то:

$$D(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(\xi))^2 \cdot f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x)dx - E^2(\xi). \tag{2.25′}$$

Середнє квадратичне відхилення $\sigma(\xi)$ неперервної випадкової величини ξ обчислюють за формулою:

$$\sigma(\xi) = \sqrt{D(\xi)}. \tag{2.26}$$

8. ***Законом розподілу ймовірностей*** *неперервної випадкової величини* ξ *називають щільність її розподілу*.

Залежно від вигляду щільності розподілу неперервної випадкової величини ξ її закони розподілу класифікують на різні типи. Наведемо основні закони розподілу неперервної випадкової величини.

- ***Рівномірний закон розподілу:*** *випадкову величину* ξ *називають* ***рівномірно розподіленою*** *на проміжку* $[a, b]$, *якщо усі її можливі значення зосереджені на цьому проміжку, і щільністю розподілу її ймовірностей є стала, тобто*

$$f(x)=\begin{cases} C=\dfrac{1}{b-a}, & x\in[a,b]; \\ 0, & x\notin[a,b]. \end{cases}$$
(2.27)

Значення $C=\dfrac{1}{b-a}$ визначають з умови нормування.

Функція рівномірного розподілу неперервної випадкової величини ξ має такий вигляд:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<a; \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a\le x<b; \\ 1, & x\ge b. \end{cases} \qquad (2.28)$$

Якщо випадкова величина ξ рівномірно розподілена на проміжку $[a,b]$, то

$$P(\alpha<\xi<\beta)=\frac{\beta-\alpha}{b-a}; \qquad (2.29)$$

числові характеристики знаходять за формулами

$$E(\xi)=\frac{a+b}{2};\quad D(\xi)=\frac{(b-a)^2}{12};\quad \sigma(\xi)=\frac{b-a}{2\sqrt{3}}\ . \qquad (2.30)$$

- ***Нормальний закон розподілу***:*випадкову величину* ξ *називають* ***нормально розподіленою****, якщо щільність розподілу її ймовірностей*

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \qquad (2.31)$$

де $a=E(\xi),\quad \sigma=\sigma(\xi)$.

Функція розподілу нормально розподіленої випадкової величини ξ має вигляд:

$$F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(z-a)^2}{2\sigma^2}}dz\ .$$
(2.32)

Якщо випадкова величина ξ нормально розподілена, то

$$P(\alpha<\xi<\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right) \qquad (2.33)$$

де $\Phi(x)$ – інтегральна функція Лапласа.

Наголосимо, що на підставі властивостей інтегральної функції Лапласа $\Phi(-x)=-\Phi(x), \Phi(+\infty)=0,5;\quad \Phi(-\infty)=-0,5$) маємо рівності:

$$\begin{aligned} P(\xi<\beta)&=0,5+\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right), \\ P(\xi>\alpha)&=0,5-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right). \end{aligned} \qquad (2.34)$$

Якщо випадкова величина ξ нормально розподілена, то подія $|\xi-a|<3\sigma$ є вірогідною: $P(|\xi-a|<3\sigma)=0,9973$ (***правило трьох сигм***). На практиці правило трьох сигм використовують так: якщо $|\xi-a|<3\sigma$, то можна припустити, що випадкова величина ξ нормально розподілена.

- ***Експонентний закон розподілу***:*випадкову величину* ξ *називають* ***розподіленою за експонентним законом****, якщо її щільність розподілу ймовірностей*

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x<0; \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \ge 0, \end{cases} \qquad (2.35)$$

де $\lambda > 0$ –параметр розподілу.

Функція експонентного розподілу

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0; \\ 1-e^{-\lambda x}, & x \ge 0. \end{cases} \qquad (2.36)$$

Якщо випадкова величина ξ розподілена за експонентним законом, то

$$P(\alpha<\xi<\beta)=e^{-\lambda\alpha}-e^{-\lambda\beta} \qquad (2.37)$$

$$E(\xi)=\frac{1}{\lambda}, \quad D(\xi)=\frac{1}{\lambda^2}, \quad \sigma(\xi)=\frac{1}{\lambda}. \qquad (2.38)$$

Приклад 1. Функція розподілу ймовірностей $F(x)$ неперервної випадкової величини ξ має вигляд:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<3; \\ m(x-3)^2, & 3 \le x < 5; \\ 1, & x \ge 5. \end{cases}$$

Виконати такі дії:

а) визначити коефіцієнт m;

б) знайти щільність розподілу $f(x)$ та накреслити графіки $F(x)$ і $f(x)$;

в) обчислити ймовірності потрапляння значень випадкової величини ξ у проміжки [4,6] і(2, 4).

Розв'язання. а) Коефіцієнт m визначаємо з умови неперервності $F(x)$, бо випадкова величина ξ неперервна. Функція $F(x)$ є неперервна на проміжках $(-\infty,3)$, $[3,5)$ і $[5,+\infty)$. Точками розриву функції $F(x)$ можуть бути лише $x = 3$ і $x = 5$.

Щоб функція $F(x)$ була неперервна у точках $x=3$ і $x=5$, повинні виконуватися рівності: $\lim\limits_{x\to 3-0} F(x)=\lim\limits_{x\to 3+0} F(x)$ і $\lim\limits_{x\to 5-0} F(x)=\lim\limits_{x\to 5+0} F(x)$. З'ясуємо, для яких m ці рівності виконуються:

$\lim\limits_{x\to 3-0} F(x)=\lim\limits_{x\to 3-0} 0=0;$ $\lim\limits_{x\to 3+0} F(x)=\lim\limits_{x\to 3+0} m(x-3)^2=0 \Rightarrow$ у точці x=3 функція $F(x)$ неперервна для будь-якого m;

$\lim\limits_{x\to 5-0} F(x)=\lim\limits_{x\to 5-0} m(x-3)^2=4m,$ $\lim\limits_{x\to 5+0} F(x)=\lim\limits_{x\to 5+0} 1=1 \Rightarrow F(x)$ неперервна у точці $x=5$, якщо $4m=1 \Rightarrow m=\frac{1}{4}$.

Отже, функція розподілу $F(x)$ неперервної випадкової величини ξ має такий аналітичний вираз:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<3; \\ \frac{1}{4}(x-3)^2, & 3 \le x < 5; \\ 1, & x \ge 5. \end{cases}$$

б) За формулою $f(x)=F'(x)$ щільність розподілу має вигляд:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x<3; \\ \frac{1}{2}(x-3), & 3 \le x < 5; \\ 0, & x \ge 5. \end{cases}$$

Графіки функції розподілу $F(x)$ та щільності розподілу $f(x)$ зображено на рис 2.6 і рис. 2.7.

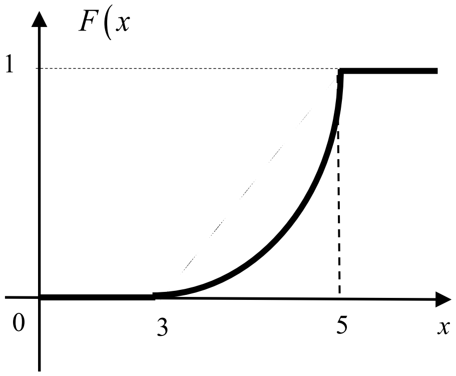

Рис. 2.6. Графік функції розподілу $F(x)$

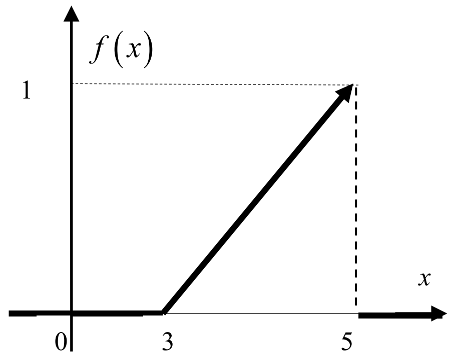

Рис. 2.7. Графік щільності розподілу $f(x)$

в) Шукані ймовірності можемо обчислити за формулами (2.18) і (2.22). За формулою (2.18) отримуємо:

$$P(4 \le \xi \le 6) = \int_4^6 f(x)dx = \int_4^5 \frac{1}{2}(x-3)dx + \int_5^6 0dx =$$

$$\frac{1}{2}\int_4^5 (x-3)d(x-3) = \frac{1}{2}\frac{(x-3)^2}{2}\Bigg|_4^5 = \frac{1}{4}(4-1) = 0,75.$$

За формулою (2.22)

$$P(4 \le \xi \le 6) = F(6) - F(4) = 1 - \frac{1}{4}(4-3)^2 = 1 - \frac{1}{4} = 0,75.$$

Аналогічно, $P(2 < \xi < 4) = F(4) - F(2) = \frac{1}{4}(4-3)^2 - 0 = \frac{1}{4} = 0,25$.

Приклад 2. Щільність розподілу $f(x)$ неперервної випадкової величини ξ задана формулою

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ m \cdot \cos x, & 0 \le x < \dfrac{\pi}{2}; \\ 0, & x \ge \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Виконати такі дії:

а) визначити коефіцієнт m;

б) знайти функцію розподілу $F(x)$ випадкової величини ξ;

в) побудувати графіки густини і функції розподілу;

г) знайти ймовірності потрапляння значень випадкової величини ξ у проміжки $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ і $(\frac{\pi}{6}, \pi)$;

д) обчислити числові характеристики випадкової величини ξ: математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення.

Розв'язання. а) Коефіцієнт m знаходимо з умови $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$. Підставивши $f(x)$ у цю рівність, отримаємо:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{0} 0 \cdot dx + \int\limits_{0}^{\pi/2} m\cos x dx + \int\limits_{\pi/2}^{+\infty} 0 \cdot dx = m\int\limits_{0}^{\pi/2} \cos x dx =$$

$$m\sin x\Big|_0^{\pi/2} = m(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0) = m = 1.$$

Щільність розподілу випадкової величини ξ дорівнює

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \cos x, & 0 \le x < \dfrac{\pi}{2}; \\ 0, & x \ge \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

б) Функція розподілу $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt$ (див. формулу (2.21)). Щоб обчислити $F(x)$, розглянемо випадки:

якщо $x < 0$, то $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} 0dt = 0$;

якщо $0 \le x < \dfrac{\pi}{2}$, то $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{0} 0dt + \int\limits_{0}^{x} \cos t dt = \sin t\Big|_0^x = \sin x - \sin 0 = \sin x$;

якщо $x \ge \dfrac{\pi}{2}$, то $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{0} 0dt + \int\limits_{0}^{\pi/2} \cos t dt + \int\limits_{\pi/2}^{x} 0dt = \sin t\Big|_0^{\pi/2} = 1$.

У результаті,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \sin x, & 0 \le x < \dfrac{\pi}{2}; \\ 1, & x \ge \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

в) Графік щільності розподілу $f(x)$ „простягається" на всю вісь Ox і складається з частини косинусоїди на проміжку $[0, \dfrac{\pi}{2})$, а за межами цього проміжку – з прямих, які є частинами осі Ox (рис. 2.8). Він має розрив у точці $x = 0$.

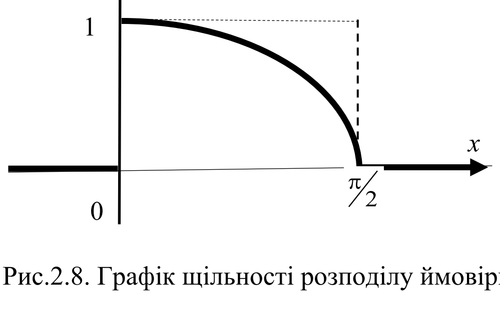

Рис.2.8. Графік щільності розподілу ймовірностей до *прикладу 2*

Графік функції розподілу також простягається на всю вісь Ox і складається з частини синусоїди на проміжку $[0,\frac{\pi}{2})$, а за межами цього проміжку – з двох півпрямих $y = 0$ та$y = 1$ (рис. 2.9). Він є неперервною лінією, що відповідає неперервності функції розподілу.

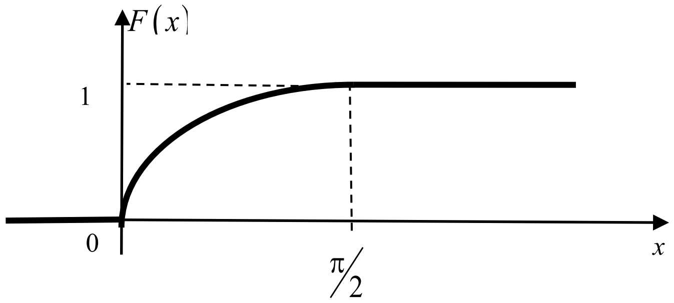

Рис. 2.9. Графік функції розподілу ймовірностей до *прикладу 2*

г) Шукані ймовірності можна знайти за допомогою щільності і функції розподілу ймовірностей.
За формулою (2.22) обчислюємо

$$P(\frac{\pi}{4}<\xi<\frac{\pi}{2})=\int_{\pi/4}^{\pi/2} f(x)dx=\int_{\pi/4}^{\pi/2}\cos xdx=\sin x\Big|_{\pi/4}^{\pi/2}=\sin\frac{\pi}{2}-\sin\frac{\pi}{4}=1-\frac{\sqrt{2}}{2}\approx 1-0,7=0,3;$$

$$P(\frac{\pi}{6}<\xi<\pi)=\int_{\pi/6}^{\pi} f(x)dx=\int_{\pi/6}^{\pi/2}\cos xdx+\int_{\pi/2}^{\pi}0dx=\sin x\Big|_{\pi/6}^{\pi/2}+0=\sin\frac{\pi}{2}-\sin\frac{\pi}{6}=1-\frac{1}{2}=0,5.$$

За формулою (2.18)отримаємо:

$$P(\frac{\pi}{4}<\xi<\frac{\pi}{2})=F(\frac{\pi}{2})-F(\frac{\pi}{4})=\sin\frac{\pi}{2}-\sin\frac{\pi}{4}=1-\frac{\sqrt{2}}{2}\approx 0,3;$$

$$P(\frac{\pi}{6}<\xi<\pi)=F(\pi)-F(\frac{\pi}{6})=1-\sin\frac{\pi}{6}=1-\frac{1}{2}=0,5.$$

д) Числові характеристики обчислюємо за формулами (2.24)–(2.26), застосовуючи інтегрування частинами:

$$E(\xi)=\int_0^{\pi/2}x\cos xdx=\int_0^{\pi/2}xd(\sin x)=x\cdot\sin x\Big|_0^{\pi/2}-\int_0^{\pi/2}\sin xdx=\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}-0\cdot\sin 0-(-\cos x)\Big|_0^{\pi/2}=$$

$$=\frac{\pi}{2}+(\cos\frac{\pi}{2}-\cos 0)=\frac{\pi}{2}-1\approx 0,57;$$

$$D(\xi)=\int_0^{\pi/2}x^2 f(x)dx-E^2(\xi)=\int_0^{\pi/2}x^2\cos xdx-(\frac{\pi}{2}-1)^2=\int_0^{\pi/2}x^2 d(\sin x)-(\frac{\pi}{2}-1)^2=x^2\cdot\sin x\Big|_0^{\pi/2}-$$

$$-2\int_0^{\pi/2}x\sin xdx-(\frac{\pi}{2}-1)^2=\frac{\pi^2}{4}+2\int_0^{\pi/2}xd(\cos x)-(\frac{\pi}{2}-1)^2=$$

$$=\frac{\pi^2}{4}+2(x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\pi/2}\cos xdx-(\frac{\pi}{2}-1)^2=$$

$$=\frac{\pi^2}{4}-2\sin x\Big|_0^{\pi/2}-(\frac{\pi^2}{4}-\pi+1)=\frac{\pi^2}{4}-2(\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0)-\frac{\pi^2}{4}+\pi-1=\pi-3\approx 0,14;$$

$$\sigma(\xi)=\sqrt{D(\xi)}=\sqrt{0,14}\approx 0,37.$$

Приклад 3. Випадкова величина ξ рівномірно розподілена на проміжку [1,5]. Виконати такі дії:

а) записати щільність і функцію розподілу та накреслити їхні графіки;

б) обчислити ймовірності, що значення випадкової величини ξ потраплять у проміжки (0,3) і (2,4);

в) обчислити $E(\xi)$, $D(\xi)$, $\sigma(\xi)$.

Розв'язання. а) За формулою (2.27)

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{4}, & x\in(1,5);\\ 0, & x\notin(1,5),\end{cases}$$

а за формулою (2.28)

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<1;\\ \dfrac{x-1}{4}, & 1\le x<5;\\ 1, & x\ge 5.\end{cases}$$

Графіки щільності та функції розподілу зображено на рис. 2.10 і рис. 2.11.

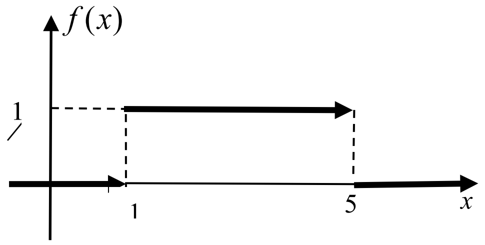

Рис. 2.10. Графік щільності розподілу до *прикладу 3*.

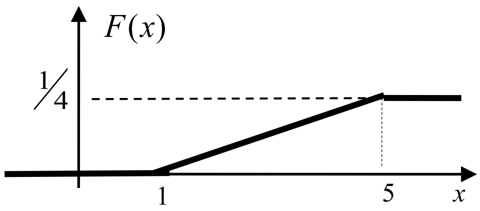

Рис. 2.11. Графік функції розподілу до *прикладу 3*.

б) Шукані ймовірності обчислюємо за формулою (2.29):

$$P(0<\xi<3)=\frac{3-0}{5-1}=\frac{3}{4}=0,75;$$

$$P(2<\xi<4)=\frac{4-2}{5-1}=\frac{2}{4}=0,5.$$

в) Числові характеристики $E(\xi)$, $D(\xi)$, $\sigma(\xi)$ обчислюємо за формулами (2.30):

$$E(\xi)=\frac{5+1}{2}=3,\quad D(\xi)=\frac{(5-1)^2}{12}=\frac{16}{12}=1,(3),\quad \sigma(\xi)=\frac{(5-1)}{2\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\approx 1,15.$$

Приклад 4. Статистичні дані про дохід на душу населення показали, що річний дохід мешканців регіону має нормальний розподіл із середнім значенням доходу 9 тис. грн і середнім квадратичним відхиленням 1,5 тис. грн. Записати щільність розподілу ймовірностей випадкової величини ξ – розміру середнього доходу на душу населення та обчислити ймовірності, що річний дохід навмання вибраного мешканця регіону є:

а) більш ніж 6 тис. грн;

б) менше ніж 10,6 тис. грн;

в) між 8,5 та 12,2 тис. грн;

г) між 12,4 та 13 тис. грн.

Розв'язання. Щільність нормального розподілу випадкової величини ξ

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

де $a = E(\xi), \sigma = \sigma(\xi)$. Оскільки $E(\xi) \approx \overline{\xi}$ – середньому арифметичному величини ξ, то треба прийняти $a = 9, \sigma = 1,5$, і щільністю розподілу величини ξ, описаної у даній задачі, є функція

$$f(x) = \frac{1}{1,5\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-9)^2}{2\cdot 1,5^2}}.$$

Шукані ймовірності обчислюємо за формулою

$$P(\alpha < \xi < \beta) = \Phi(\frac{\beta - a}{\sigma}) - \Phi(\frac{\alpha - a}{\sigma}),$$

де $\Phi(x)$ – інтегральна функція, яка табульована в таблиці *додатку* 2 :

$$P(\xi > 6) = P(6 < \xi < +\infty) = \Phi(\frac{+\infty - 9}{1,5}) - \Phi(\frac{6-9}{1,5}) = \Phi(+\infty) + \Phi(2) = 0,5 + 0,4772 = 0,9772;$$

$$P(\xi < 10,6) = P(-\infty < \xi < 10,6) = \Phi(\frac{10,6-9}{1,5}) - \Phi(\frac{-\infty - 9}{1,5}) = \Phi(1,07) - \Phi(-\infty) =$$

$$= 0,3577 + 0,5 = 0,8577;$$

$$P(8,5 < \xi < 12,2) = \Phi(\frac{12,2-9}{1,5}) - \Phi(\frac{8,5-9}{1,5}) = \Phi(2,13) + \Phi(0,33) = 0,4973 + 0,1293 = 0,6266;$$

$$P(12,4 < \xi < 13) = \Phi(\frac{13-9}{1,5}) - \Phi(\frac{12,4-9}{1,5}) = \Phi(2,67) + \Phi(2,27) = 0,4967 + 0,4884 = 0,9846.$$

Приклад 5. Середній місячний прибуток однотипних приватних підприємств регіону становить 10 000 грн. і є нормально розподіленою випадковою величиною із середнім квадратичним відхиленням 250 грн. У яких межах можна практично гарантувати прибуток цих підприємств?

Розв'язання. За правилом „трьох сигм” подія $|\xi - a| < 3\sigma$ майже вірогідна і $P(|\xi - a| < 3\sigma) = 0,9973$. Використовуючи це правило,отримаємо:

$$|\xi - 10000| < 3 \cdot 250 \Leftrightarrow -750 < \xi - 10000 < 750 \Leftrightarrow 9250 < \xi < 10750.$$

Отже, можна гарантувати (з імовірністю 0,9973), що прибуток підприємств коливається у межах від 9 250 грн до 10 750 грн.

Приклад 6. Неперервна випадкова величина розподілена за експонентним законом з параметром $\lambda = 3$. Виконати такі дії:

а) написати щільність та функцію розподілу і накреслити їхні графіки;

б) обчислити ймовірність того, що її значення потрапить в інтервал (0,5; 1,5);

в) обчислити $E(\xi)$, $D(\xi)$, $\sigma(\xi)$.

Розв'язання. а) За формулою (2.35) аналітичний вираз щільності розподілу описуютьфункцією

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 3e^{-3x}, & x \ge 0, \end{cases}$$

а за формулою (2.36) функція розподілу

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 1 - e^{-3x}, & x \ge 0. \end{cases}$$

Графіки щільності і функції розподілу зображено на рис. 2.12 і рис. 2.13

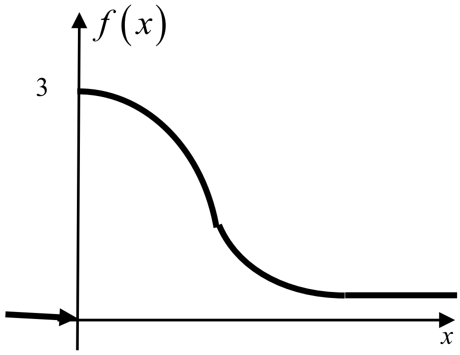

Рис. 2.12. Графік щільності розподілу до *прикладу 6*.

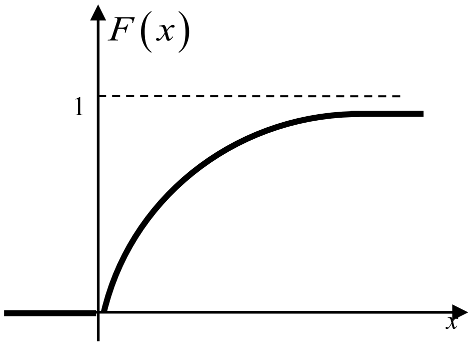

Рис. 2.13. Графік функції розподілу до *прикладу 6*.

б) Шукану ймовірність можна обчислити за допомогою щільності і функції розподілу за формулою (2.37):

$$P(0,5<\xi<1,5)=\int_{0,5}^{1,5} f(x)dx=\int_{0,5}^{1,5} 3e^{-3x}dx=-e^{-3x}\Big|_{0,5}^{1,5}=e^{-3\cdot 0,5}-e^{-3\cdot 1,5}=e^{-1,5}-e^{-4,5}=$$

$$=0,223-0,011=0,212$$

(прийнято, що $e\approx 2,7$), а за формулою (2.38):

$$P(0,5<\xi<1,5)=e^{-3\cdot 0,5}-e^{-3\cdot 1,5}=0,212.$$

в) Обчислимо числові характеристики за формулами (2.39): $E(\xi)=\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{3}$, $D(\xi)=\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{9}$, $\sigma(\xi)=\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{3}$.

Завдання для самостійної роботи

1. Щільність розподілу ймовірностей $f(x)$ випадкової величини задано формулами:

$$f(x)=\begin{cases} a(x-3)^2, & 3\le x\le 5; \\ 0, & x<3 \text{ або } x>5. \end{cases}$$

Виконати такі дії:

1) знайти коефіцієнт *a*;

2) знайти функцію розподілу випадкової величини ξ;

3) побудувати графіки щільності розподілу ймовірностей та функції розподілу;

4) знайти ймовірність потрапляння випадкової величини ξ в інтервал:

а) $I=[0;0,5]$; б) $I=(3;4)$; в) $I=[0;5]$; г) $I=[\pi/4;\pi/3]$;

5) знайти математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення випадкової величини ξ.

2. Функцію розподілу ймовірностей $F(x)$ неперервної випадкової величини ξ задано формулою:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<-2\pi; \\ a+a\cos\frac{x}{2}, & -2\pi\le x<0; \\ 1, & x\ge 0. \end{cases}$$

Виконати такі дії:

1) знайти коефіцієнт *a*;

2) знайти щільність розподілу $f(x)$;

3) побудувати графіки функції розподілу та щільності розподілу;

4) знайти математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення;

5) знайти ймовірність потрапляння випадкової величини ξ в інтервал $I = (-\pi/2; 0)$.

3. Випадкова величина ξ рівномірно розподілена на проміжку [-3, 2]. Знайти:

а) вираз для щільності розподілу ймовірностей і функції розподілу випадкової величини ξ та побудувати їхні графіки;

б) імовірність нерівностей: $0 < \xi < 3$; $-2 < \xi < 1$;

в) математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення випадкової величини ξ.

4. Випадкова величина ξ має рівномірний розподіл із математичним сподіванням $E(\xi) = 3$ і дисперсією $D(\xi) = \frac{4}{3}$. Знайти функцію розподілу випадкової величини ξ.

5. Банк виконав дослідження про наявність річних заощаджень в осіб, вік яких є не менший ніж 21 рік. Дослідження показали, що річні заощадження на одну особу нормально розподіляються із середнім числом 1 850 грн і середнім квадратичним відхиленням – 350 грн. Визначити ймовірність того, що навмання вибрана особа має заощадження:

а) більше ніж 2 200 грн;
б) менше ніж 1 500 грн;
в) у межах від 1 080 грн до 2 375 грн;
г) менше ніж 800 грн.

6. Верстат-автомат виготовляє вироби, які вважаються придатними, якщо відхилення ξ від проектного розміру за абсолютним значенням не перевищує 0,8 мм. Яка ймовірність такого відхилення? Яке найімовірніше число придатних виробів із 200, якщо ξ має нормальний розподіл із параметром $\sigma = 0{,}4$ мм?

7. Помилки в обчисленнях, допущені бухгалтером під час складання балансу, розподілені у відсотках за нормальним законом з параметрами a=1,5і σ=0,01. Написати щільність і функцію розподілу цих помилок та накреслити їхні графіки. У яких межах містяться помилки обчислень з імовірністю 0,9973?

8. Час безвідмовної роботи елемента деякого приладу T розподілений за показниковим законом розподілу з $\lambda = \frac{1}{540}$. Виконати такі дії:

а) знайти щільність та функцію розподілу ймовірностей випадкової величини T та накреслити їхні графіки;

б) обчислити $E(\xi)$, $D(\xi)$, $\sigma(\xi)$;

в) знайти ймовірності подій: A – {елемент безвідмовно працюватиме не менше 648 год}, B – {елемент відмовив протягом 700 год}, C – {елемент безвідмовно працюватиме не менше трьох діб}.

9. Закон розподілу неперервної випадкової величини ξ такий:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1; \\ \frac{(x+1)^2}{64}, & -1 \le x < 3; \\ 1, & x \ge 3. \end{cases}$$

Знайти $f(x)$ і побудувати графіки функцій $f(x)$, $F(x)$. Обчислити $P(0 < \xi < 2)$.

10. Задано щільність розподілу ймовірностей неперервної випадкової змінної

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < -2; \\ a\sqrt{x+2}, & -2 \le x < 7; \\ 0, & x \ge 7. \end{cases}$$

Знайти значення сталої a та функцію $F(x)$. Побудувати графіки функцій $f(x)$, $F(x)$.

11. Випадкова величина ξ має закон розподілу ймовірностей Коші:

$$f(x) = \frac{a}{1+x^2}, \quad -\infty < x < +\infty$$

Знайти a і $F(x)$.

12. За заданими функціями

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 5\sqrt{x}, & 0 \le x < 1; \\ 0, & x \ge 1. \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \dfrac{3}{5}\sqrt[5]{x}, & 0 \le x < 1; \\ 0, & x \ge 1. \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \dfrac{8}{5}\sqrt[5]{x^3}, & 0 \le x < 1; \\ 0, & x \ge 1. \end{cases}$$

визначити, яка з них є щільністю випадкової величини ξ, визначеної на проміжку [0; 1].

2.3. Граничні теореми теорії ймовірності: закон великих чисел і центральна гранична теорема

Основні поняття, означення та відношення.

1. Суть ***закону великихчисел*** полягає в тому, що в разі великого числа випадкових явищ усереднений їхній результат перестає бути випадковим і може бути передбачений з великою часткою вірогідності. Наприклад, відносна частота події при великому числі n експериментів, середнє значення великого числа n випадкових величин зі збільшеннямnстабілізуються і по суті перестають бути випадковими величинами.

2. Зміст закону великих чисел охоплює такі основні відношення:

• ***нерівність Маркова:*** якщо випадкова величина ξ набуває тільки невід'ємних значень і $E(\xi) < \infty$, то для будь-якого $K > 0$ виконується нерівність:

$$P(\xi \geq K) \leq \frac{\mathrm{E}(\xi)}{K} \qquad (2.40)$$

Нерівність Маркова встановлює оцінку зверху для імовірності події$\xi \geq K$. Вона також може бути тривіальною, коли$\frac{\mathrm{E}(\xi)}{K} \geq 1$;

• ***нерівність Чебишева:*** якщо випадкова величина ξ має скінченні математичне сподівання і дисперсію, то для довільного числа $\varepsilon > 0$ виконується нерівність:

$$P(|\xi - E(\xi)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D(\xi)}{\varepsilon^2} \qquad (2.41)$$

Нерівність Чебишева встановлює оцінку знизу для імовірності події $|\xi - E(\xi)| < \varepsilon$. Вона може виявитися тривіальною у випадку, коли $1 - \frac{D(\xi)}{\varepsilon^2} \leq 0$, бо ймовірність будь-якої події є невід'ємною;

• ***теорема Чебишева***:нехай$\xi_1, \xi_2, ... \xi_n$ – незалежні випадкові величини, які мають обмежені математичні сподівання і дисперсії. Розглянемо середнє арифметичне цих величин:$\overline{\xi} = \frac{\xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_n}{n}$

і середнє арифметичне їхніх математичних сподівань

$$E(\overline{\xi}) = \frac{E(\xi_1) + E(\xi_2) + ... + E(\xi_n)}{n}$$

Тоді для будь-якого числа $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \to \infty} P(|\overline{\xi} - E(\overline{\xi})| < \varepsilon) = 1. \qquad (2.42)$$

Тобто, подія $|\overline{\xi} - E(\overline{\xi})| < \varepsilon$ є вірогідною для великої кількості випробувань n.

• ***теорема Бернуллі:*** якщо в кожному з n незалежних випробувань за схемою Бернуллі ймовірність $p = P(A)$ є однаковою, то для будь-якого числа $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \to \infty} P(|W_n(A) - p| < \varepsilon) = 1, \qquad (2.43)$$

де $W_n(A)$ – відносна частота події A.

Тобто, при великій кількостіnвипробувань подія $|W_n(A) - p| < \varepsilon$ є майже вірогідною.

Нерівність Чебишева в умовах послідовності незалежних випробувань за схемою Бернуллі має такий вигляд:

$$P(\left|W_n(A)-p\right|<\varepsilon)\geq 1-\frac{pq}{n\varepsilon^2}.$$

(2.44)

3. Суть центральної граничної теореми полягає в тому, що вона встановлює граничні закони розподілу суми великого числа випадкових величин.

4. Зміст центральної граничної теореми охоплює різні умови, за яких граничний закон розподілу суми великого числа випадкових величин є близьким до нормального і містить такі основні твердження:

- ***центральна гранична теорема:*** нехай $\xi_1, \xi_2, ...\xi_n$ – незалежні однаково розподілені випадкові величини і $E(\xi_i)=0,\ D(\xi_i)=D$. Розглянемо випадкову величину

$$\eta_n=\sum_{i=1}^{n}\xi_i,$$

для якої, очевидно, виконуються рівності: $E(\eta_n)=0,\ D(\eta_n)=n\cdot D$.

При $n\to\infty$ функція розподілу

$$F_{\eta_n}(x)=P(\eta_n<x)\to\frac{1}{\sqrt{2\pi nD}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{z^2}{2nD}}dz, \qquad (2.45)$$

тобто випадкова величина η_n розподілена за законом, близьким до нормального, з математичним сподіванням $E(\eta_n)=0$ і середнім квадратичним відхиленням $\sigma(\eta_n)=\sqrt{nD}$

- ***теорема Ляпунова:*** нехай $\xi_1, \xi_2, ...\xi_n$ – незалежні випадкові величини такі, що $E(\xi_i)=0,\ D(\xi_i)=D_i^2$. Розглянемо суму цих випадкових величин

$$\eta_n=\sum_{i=1}^{n}\xi_i.$$

Якщо $\frac{1}{D_n^3}\sum_{i=1}^{n}E^3(\xi_i)\to 0$ при $n\to\infty$, де $D_n=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}D_i^2}$, то сума η_n має закон розподілу, який є близьким до нормального, з математичним сподіванням $E(\eta_n)=0$ і середнім квадратичним відхиленням $\sigma(\eta_n)=D_n$.

Використовуючи інтегральну теорему Лапласа і враховуючи, що у випадку схеми Бернуллі $E(\xi)=np,\quad D(\xi)=npq,\quad \sigma(\xi)=\sqrt{npq}$, для обчислення ймовірності події $\alpha<\sum_{i=1}^{n}\xi_i<\beta$ скористаємося формулою Муавра–Лапласа:

$$P(\alpha<\sum_{i=1}^{n}\xi_i<\beta)=\Phi(\frac{\beta-np}{\sqrt{npq}})-\Phi(\frac{\alpha-np}{\sqrt{npq}}), \qquad (2.46)$$

яку читаємо так: *якщо виконуютьn незалежних випробувань за схемою Бернуллі,і ймовірність події A в кожному випробуванні однакова, то ймовірність того, що сумарна кількість появ події A потрапить в інтервал* (α,β) *дорівнює приросту інтегральної функції Лапласа* $\Phi(x)$ *на проміжку* $\frac{\alpha-np}{\sqrt{npq}}\leq x\leq\frac{\beta-np}{\sqrt{npq}}$.

Нагадаємо, що значення функції $\Phi(x)$знаходимо за таблицею *додатка*2.

Приклад 1. Банк кредитує агрофірми, і середній обсяг кредитів дорівнює 100 тис. грн, а їх середнє квадратичне відхилення – 20 тис. грн. У яких межах коливаються обсяги кредитів з імовірністю, не меншою ніж 0,75?

Розв'язання. Нехай випадкова величина ξ – обсяг кредиту, виданий агрофірмі. За умовою задачі $E(\xi)=100,\ D(\xi)=\sigma^2(\xi)=400$. Застосуємо нерівність Чебишева (2.41):

$$P(|\xi - 100| < \varepsilon) \ge 1 - \frac{400}{\varepsilon^2}$$

Оскільки $P(|\xi - 100| < \varepsilon) \ge 0,75$, то можемо прийняти, що

$$1 - \frac{400}{\varepsilon^2} = 0,75 \Rightarrow 0,25\varepsilon^2 = 400 \Rightarrow \varepsilon^2 = 1600 \Rightarrow \varepsilon = 40 .$$

Тоді отримаємо: $|\xi - 100| < 40 \Leftrightarrow -40 < \xi - 100 < 40 \Leftrightarrow 60 < \xi < 140$.

Приклад 2. Середня кількість опадів у регіоні протягом місяця становить 80 см. Оцінити ймовірність того, що в регіоні місячна кількість опадів буде не більшою ніж 100 см.

Розв'язання. Позначимо через ξ – місячну кількість опадів у регіоні. За умовою задачі $E(\xi) = 80$.

Подія $\xi \le 100$ є протилежною до події $\xi > 100$, тому $P(\xi \le 100) = 1 - P(\xi > 100)$.

Для оцінки ймовірності $P(\xi > 100)$ використовуємо нерівність Маркова (2.40), за якою

$$P(\xi > 100) \le \frac{80}{100} = 0,8 .$$

Звідси

$$P(\xi \le 100) \ge 1 - 0,8 = 0,2 .$$

Приклад 3. Імовірність того, що навмання вибрана деталь якісна, дорівнює 0,9. Скільки потрібно перевірити деталей, щоб з імовірністю, не меншою ніж 0,95, можна було стверджувати, що відхилення відносної частоти якісних деталей від їхньої імовірності не перевищує 0,1?

Розв'язання. Нехай подія A – вибрана навмання деталь якісна. За умовою задачі $p = P(A) = 0,9$ і $q = P(\overline{A}) = 1 - 0,9 = 0,1$.

Оскільки у даній ситуації є послідовність випробувань за схемою Бернуллі, то використаємо нерівність Чебишева (2.44) в умовах схеми Бернуллі, за якою

$$P(|W_n(A) - 0,9| < 0,1) \ge 1 - \frac{0,9 \cdot 0,1}{n \cdot 0,1^2} .$$

Сформульована в умові задачі нерівність

$$P(|W_n(A) - 0,9| < 0,1) \ge 0,95$$

буде виконана, якщо

$$1 - \frac{0,9 \cdot 0,1}{n \cdot 0,1^2} \ge 0,95 \Rightarrow \frac{0,9}{0,1n} \le 1 - 0,95 = 0,05 \Rightarrow \frac{1}{n} \le \frac{0,05}{9} \approx 0,00556$$

$$n \ge \frac{1}{0,00556} = 179,9 .$$

Приклад 4. Кожна з незалежних випадкових величин $\xi_i, i = \overline{1,50}$ має показниковий розподіл з параметром $\lambda = 0,2$. Написати наближено щільність і функцію розподілу випадкової величини $\eta = \sum_{i=1}^{50} \xi_i$.

Розв'язання. Щільність розподілу випадкової величини ξ_i описують функцією

$$f_i(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 0,2e^{-0,2x}, & x \ge 0 \end{cases}$$

Обчислимо числові характеристики випадкових величин ξ_i:

$$E(\xi_i)=\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{0,2}=5.$$

Оскільки $\eta=\sum_{i=1}^{50}\xi_i$ є сумою досить великого числа однаково розподілених випадкових величин, то закон розподілу випадкової величини η є близький до нормального (див. (2.45)) з параметрами розподілу $a=5, \sigma=5$. Тому

$$f(x)\approx\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}=\frac{1}{5\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-5)^2}{2\cdot 5^2}}=\frac{1}{5\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-5)^2}{50}},$$

$$F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}dt=\frac{1}{5\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(t-5)^2}{50}}dt.$$

Завдання для самостійної роботи

1. Дискретна випадкова величина ξ задана законом розподілу

x_i	0,3	0,6
p_i	0,49	0,51

Використовуючи нерівність Чебишева, оцінити ймовірність того, що $|\xi-E(\xi)|<0,2$.

2. Дано: $P(|\xi-E(\xi)|<\varepsilon)\ge 0,9$; $D(\xi)=0,004$.Використовуючи нерівність Чебишева, знайти ε.

3. Сума чека, виписаного на банк, підпорядковується нормальному закону розподілу із середньою сумою 84 екю і стандартним (середнім квадратичним) відхиленням 12 екю. Якщо вибрано чек навмання, то яка ймовірність, що сума цього чека є:

а) більшою ніж 70 екю?

б) між 60 та 90 екю?

в) оцінити ймовірність того, що сума цього чека є більшою, ніж 70 екю за нерівністю Маркова.

г) оцінити ймовірність того, що сума цього чека є в проміжку [24, 144], використовуючи нерівність Чебишева.

4. Школа в зимовий період споживає для опалення щоденно в середньому 250 м^3 газу. Яку можна очікувати спожити кількість газу за один день з імовірністю, не меншою ніж 0,96, якщо середнє квадратичне відхилення споживання газу становить 16 м^3?

5. Унаслідок медичного огляду 900 допризовників було виявлено, що середня маса кожного з них на 1,2 кг більша від середньої маси попереднього призову. Чи можна це констатувати як випадковість, якщо середнє відхилення маси допризовника дорівнює 8 кг?

6. Імовірність вчасної реалізації продукції дорівнює 0,4. Оцінити ймовірність того, що в 100 незалежно реалізованих одиниць продукції відхилення відносної частоти реалізації від імовірності 2/5 за абсолютним значенням буде не меншим від 0,1 та порівняти з точним значенням.

7. Імовірність виготовлення нестандартної радіолампи дорівнює 0,04. Яку найменшу кількість радіоламп треба відібрати, щоб з імовірністю 0,88 можна було б стверджувати, що частка нестандартних радіоламп серед них буде відрізнятися від імовірності виготовлення нестандартної радіолампи за абсолютним значенням не більше ніж на 0,02?

8. Добові витрати води в населеному пункті є випадковою величиною із середнім квадратичним відхиленням 10 000 літрів. Знайти ймовірність того, що витрати води в цьому пункті протягом дня відхиляються від математичного сподівання за абсолютною величиною не більше, ніж на 25 000 літрів.

9. Середнє добове споживання електроенергії в населеному пункті дорівнює 12 000 кВт·год. Оцінити ймовірність того, що протягом даної доби споживання електроенергії буде більше ніж 50 000 кВт·год.

10. У касі певного закладу в наявності є 6 500 грн. У черзі стоїть 25 працівників. Сума ξ, яку потрібно виплатити кожному, є випадковою величиною з математичним сподіванням, що дорівнює 250 грн, і середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 50$ грн. Знайти ймовірність того, що суми, яка є в касі, не вистачить усім людям, які стоять у черзі.

2.4. Двовимірна випадкова величина

Основні поняття, означення та відношення

1. *Якщо на тому самому просторі елементарних подій* $\Omega = \{\omega_i\}$ *задано дві одновимірні випадкові величини* ξ *і* η, *то їхню упорядковану сукупність* (ξ, η) *називають* ***двовимірною випадковою величиною*** або ***системою двох випадкових величин***.

Аналогічно вводять поняття n - вимірної випадкової величини, яка є упорядкованою сукупністю $(\xi_1, \xi_2, ... \xi_n)$ n одновимірних випадкових величин.

2. *Двовимірну випадкову величину* (ξ, η) *називають* ***дискретною***, *якщо її складові* ξ *і* η *є дискретними, і* ***неперервною***, *якщо її складові* ξ *і* η *є неперервними одновимірними випадковими величинами.*

Складові ξ і η двовимірної випадкової величини (ξ, η) називають ще її ***компонентами***.

3. ***Законом розподілу ймовірностей*** (***законом розподілу***) *двовимірної дискретної випадкової величини* (ξ, η) *називають перелік її можливих значень* $(x_i, y_j),\ i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,m}$ *та відповідних їм ймовірностей* $p(x_i, y_j) = P(\xi = x_i \cap \eta = y_j)$.

Закон розподілу дискретної випадкової величини (ξ, η) записують у вигляді таблиці:

$\eta = y_j$ \ $\xi = x_i$	x_1	x_2	$\dots$	x_n	$p(y_j)$
y_1	$p(x_1, y_1)$	$p(x_2, y_1)$	$\cdots$	$p(x_n, y_1)$	$p(y_1)$
y_2	$p(x_1, y_2)$	$p(x_2, y_2)$	$\cdots$	$p(x_n, y_2)$	$p(y_2)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
y_m	$p(x_1, y_m)$	$p(x_2, y_m)$	$\cdots$	$p(x_n, y_m)$	$p(y_m)$
$p(x_i)$	$p(x_1)$	$p(x_2)$	$\dots$	$p(x_n)$	1

де $$p(x_i) = \sum_{j=1}^{m} p(x_i, y_j), \quad i = 1, 2, ... n;$$

$$p(y_j) = \sum_{i=1}^{n} p(x_i, y_j), \quad j = 1, 2, ... m; \tag{2.47}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p(x_i, y_j) = \sum_{i=1}^{n} p(x_i) = \sum_{j=1}^{m} p(y_j) = 1.$$

Зазначимо, що закон розподілу дискретної випадкової величини (ξ, η) має вигляд частини таблиці, яка виділена жирними лініями.

Перелік значень x_i та відповідних їм імовірностей $p(x_i)$ становить закон розподілу одновимірної випадкової величини ξ, а перелік значень y_j та відповідних їм імовірностей $p(y_j)$ – закон розподілу одновимірної випадкової величини η.

4. ***Функцією розподілу ймовірностей*** *двовимірної випадкової величини* (ξ, η) *називають функцію* $F(x, y)$, *яка для будь-яких чисел x і y визначає ймовірність сумісної появи подій* $\xi < x$ і $\eta < y$, *тобто*

$$F(x, y) = P(\xi < x \cap \eta < y). \tag{2.48}$$

Отже, функція розподілу $F(x,y)$ двовимірної випадкової величини (ξ,η) є ймовірністю того, що її складова ξ набуде значення, меншого за число x і складова η набуде одночасно значення меншого за число y.

Геометрично рівність (2.48) тлумачимо так: функція розподілу $F(x,y)$ є ймовірністю того, що значення двовимірної випадкової величини (ξ,η) потрапляють у безмежний прямокутник з вершиною (x,y), який розміщений нижче і лівіше від цієї вершини (рис. 2.14)

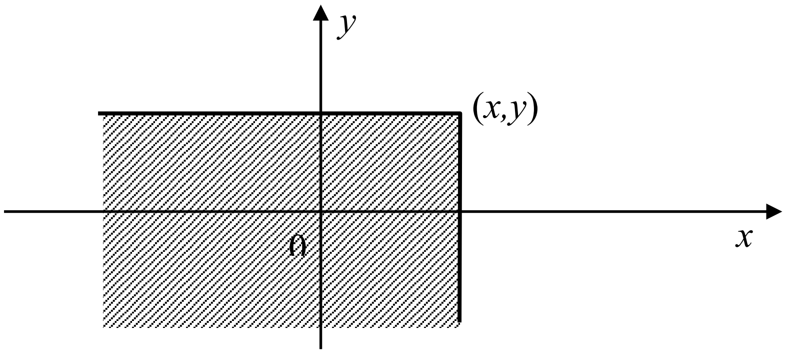

Рис. 2.14 Геометричне тлумачення функції розподілу $F(x,y)$

Функція розподілу $F(x,y)$ має такі ***властивості***:

- *значення функції розподілу задовольняють подвійну нерівність*
  $0 \le F(x,y) \le 1$; (2.49)
- $F(x,y)$ *є неспадною функцією за кожним аргументом,* тобто:
  $F(x_2,y) \ge F(x_1,y)$ *при* $x_2 \ge x_1$;
  $F(x,y_2) \ge F(x,y_1)$ *при* $y_2 \ge y_1$; (2.50)
- *для функції* $F(x,y)$ *виконуються граничні співвідношення*:
  $F(-\infty,y) = 0, \quad F(x,-\infty) = 0,$
  $F(-\infty,-\infty) = 0, \quad F(+\infty,+\infty) = 1$; (2.51)
- *при* $y \to \infty$ *функція розподілу* $F(x,y)$ *двовимірної випадкової величини* (ξ,η) *наближається до функції розподілу* $F_1(x)$ *складової* ξ, *а при* $x \to \infty$ *– до функції розподілу* $F_2(y)$ *складової* η,тобто:
  $\lim\limits_{y\to\infty} F(x,y) = F(x,\infty) = F_1(x)$
  $\lim\limits_{x\to\infty} F(x,y) = F(\infty,y) = F_2(y)$
- *ймовірність потрапляння значень двовимірної випадкової величини* (ξ,η) *у прямокутник* $Q = \{(x,y) : a < \xi < b, c < \eta < d\}$ *обчислюють за формулою*:

$$P(a < \xi < b, c < \eta < d) = \left[F(b,d) - F(a,d)\right] - \left[F(b,c) - F(a,c)\right] \quad (2.53)$$

Зрозуміло, що у лівій частині формули (2.53) знак „ $<$ ” може бути замінений знаком „ $\le$ ”, а права її частина при цьому не зміниться.

5. ***Щільністю (густотою) розподілу ймовірностей*** *$f(x,y)$ двовимірної неперервної випадкової величини (ξ,η) називають другу мішану похідну від її функції розподілу, тобто*:

$$f(x,y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}. \quad (2.54)$$

Щільність розподілу ймовірностей двовимірної випадкової величини ще називають ***двовимірною щільністю розподілу***.

Щільність розподілу ймовірностей $f(x,y)$ має ***властивості***:

- *щільність розподілу ймовірностей невід'ємна:* $f(x,y) \geq 0$;
- *подвійний невласний інтеграл з безмежними межами інтегрування від двовимірної щільності розподілу дорівнює одиниці*:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy = 1; \qquad (2.55)$$

- *якщо всі значення* (x, y) *двовимірної випадкової величини* (ξ,η) *містяться у прямокутнику* $\Omega = \{a < x < b, c < y < d\}$ *і* $f(x,y)$ *– щільність її розподілу, то*

$$\int_a^b\int_c^d f(x,y)dxdy = \int_a^b dx\int_c^d f(x,y)dy = 1; \qquad (2.55')$$

- *функцію розподілу* $F(x,y)$ *двовимірної неперервної випадкової величини* (ξ,η) *визначають за двовимірною щільністю* $f(x,y)$ *цієї величини за допомогою рівності*:

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(z,t)dzdt = \int_{-\infty}^{x} dz\int_{-\infty}^{y} f(z,t)dt;. \qquad (2.56)$$

Якщо можливі значення двовимірної неперервної випадкової величини (ξ,η) *розміщені у прямокутнику* $Q = \{(\xi,\eta) : a < \xi < b, c < \eta < d\}$, *то формула* (2.56) *набуває вигляду*:

$$F(x,y) = \int_a^x\int_c^y f(z,t)dzdt = \int_a^x dz\int_c^y f(z,t)dt; \qquad (2.56')$$

- *ймовірність потрапляння значень двовимірної неперервної випадкової величини* (ξ,η) *у прямокутник* $Q = \{(\xi,\eta) : a < \xi < b, c < \eta < d\}$ *виражають формулою*:

$$P(a < \xi < b, c < \eta < d) = \int_a^b\int_c^d f(x,y)dxdy = \int_a^b dx\int_c^d f(x,y)dy. \qquad (2.57)$$

Зауважимо, що знак „ $<$ ” у лівій частині рівності можна на кожному окремому місці замінити знаком „ $\leq$ ”.

- *Якщо* $f(x,y)$ *– щільність розподілу двовимірної випадкової величини* (ξ,η), *то щільності розподілів* $f_1(x)$ *і* $f_2(y)$ *одновимірних випадкових величин, відповідно,* ξ *і* η *визначають за формулами*

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy \quad f_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx. \qquad (2.58)$$

6. *Дві випадкові величини називаються* ***незалежними***, *якщо закон розподілу кожної з них не залежить від того, якого значення набула інша.*

Незалежність дискретних випадкових величин ξ і η рівносильна тому, що

$$P(\xi = x_i \cap \eta = y_j) = P(\xi = x_i)\cdot P(\eta = y_j)$$

або

$$p(x_i, y_j) = p(x_i)\cdot p(y_j). \qquad (2.59)$$

Незалежність дискретних або неперервних випадкових величин ξ і η рівносильна тому, що

$$F(x,y) = F_1(x)\cdot F_2(y), \qquad (2.60)$$

де $F(x, y)$ – функція розподілу двовимірної випадкової величини (ξ,η), $F_1(x)$ – функція розподілу складової ξ, $F_2(y)$ – функція розподілу складової η.

Незалежність неперервних випадкових ξ і η рівносильна тому, що

$$f(x,y) = f_1(x)\cdot f_2(y), \qquad (2.61)$$

де $f(x,y)$ – щільність розподілу двовимірної випадкової величини (ξ,η), $f_1(x)$– щільність розподілу складової ξ, $f_2(y)$– щільність розподілу складової η.

7. Для з'ясування залежності випадкових величин ξ і η та взаємозв'язку між ними використовують ***коваріацію і коефіцієнт кореляції***.

Коваріацією (кореляційним моментом) K_{xy} *випадкових величин ξ і η називають математичне сподівання добутку відхилень цих величин від їхніх сподівань*, *тобто*

$$K_{xy}=E\{[\xi-E(\xi)]\cdot[\eta-E(\eta)]\}. \qquad (2.62)$$

Формулу для обчислення K_{xy} дискретної випадкової величини можна записати ще у вигляді

$$K_{xy}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}x_i y_j p(x_i,y_j)-E(\xi)E(\eta), \qquad (2.62')$$

а для неперервної випадкової величини – у вигляді

$$K_{xy}=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xy\, f(x,y)\,dxdy-E(\xi)E(\eta). \qquad (2.63)$$

Недоліком коваріації є те, що її величина має різні значення залежно від того, в яких одиницях вимірюють випадкові величини. Це створює труднощі під час порівняння випадкових величин.

Коефіцієнтом кореляції *r_{xy} випадкової величини ξ і η називають відношення коваріації K_{xy} до добутку середніх квадратичних відношень σ_x і σ_y цих величин*, *тобто*

$$r_{xy}=\frac{K_{xy}}{\sigma_x\cdot\sigma_y}. \qquad (2.64)$$

Коефіцієнт кореляції задовольняє нерівність: $|r_{xy}|\le 1 \Leftrightarrow -1\le r_{xy}\le 1$.

Коефіцієнт кореляції є безрозмірною випадковою величиною і він є зручніший під час порівняння випадкових величин.

Правильне таке **твердження**: *якщо випадкові величини ξ і η незалежні*, *то коваріація K_{xy} =0 (коефіцієнт кореляції r_{xy} =0)*; *якщо коваріація $K_{xy}\ne 0$ (коефіцієнт кореляції $r_{xy}\ne 0$), то випадкові величини ξ і η залежні.*

Наголосимо, що коли $K_{xy}=0$ ($r_{xy}=0$), то випадкові величини можуть бути як незалежними, так і залежними.

*Дві випадкові величини ξ і η називають **корельованими***, *якщо їхня коваріація $K_{xy}\ne 0$* (*коефіцієнт кореляції $r_{xy}\ne 0$*). Дві корельовані величини завжди є залежні. Однак залежні випадкові величини можуть бути як корельованими, так і некорельованими.

8. Якщо відомий сумісний закон розподілу випадкових величин ξ і η, тобто закон розподілу двовимірної випадкової величини (ξ,η), то за формулами (2.47), (2.52), (2.58) завжди можна знайти закони розподілу, функції розподілу і щільності розподілу складових ξ і η. Якщо ж відомі закони розподілу складових ξ і η, які є незалежними випадковими величинами, то закон розподілу, функцію розподілу і щільність розподілу випадкової величини (ξ,η) можна знайти за формулами (2.59), (2.60), (2.61).

Щоб знайти закон розподілу, функцію розподілу, щільність розподілу двовимірної випадкової величини (ξ,η), знаючи закони розподілу, функцію розподілу чи щільності розподілу залежних складових ξ і η, потрібно ще знати ***умовні закони розподілу*** або ***умовні щільності розподілу цих складових***.

9. Позначимо через $p(x_i\,|\,y_j)$– імовірність того, що випадкова величина ξ набуде значення x_i за умови, що випадкова величина η набула значення y_j, і через $p(y_j\,|\,x_i)$

імовірність того, що випадкова величина η набуде значення y_j за умови, що випадкова величина ξ набула значення x_i. Імовірності $p(x_i \mid y_j)$ і $p(y_j \mid x_i)$ назвемо ***умовними***.

Умовним законом *розподілу дискретної випадкової величини* ξ *при фіксованому значенні* $\eta = y_j$ *називають перелік усіх можливих значень* x_i *величини* ξ *та їх умовних ймовірностей* $p(x_i \mid y_j)$, *і його записують у вигляді таблиці*:

$\xi = x_i$	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
$p(x_i \mid y_j)$	$p(x_1 \mid y_j)$	$p(x_2 \mid y_j)$	$\cdots$	$p(x_n \mid y_j)$

Умовні ймовірності $p(x_i \mid y_j)$ обчислюють за формулами

$$p(x_i \mid y_j) = \frac{p(x_i, y_j)}{p(y_j)} \tag{2.65}$$

і $\sum_{i=1}^{n} p(x_i \mid y_j) = 1$.

Умовним законом *розподілу дискретної випадкової величини* η *при фіксованому значенні* $\xi = x_i$ *називають перелік всіх можливих значень* y_j *величин* η *та їхніх умовних ймовірностей* $p(y_j \mid x_i)$, *і його записують у вигляді таблиці*:

$\eta = y_j$	y_1	y_2	$\cdots$	y_n
$p(y_j \mid x_i)$	$p(y_1 \mid x_i)$	$p(y_2 \mid x_i)$	$\cdots$	$p(y_n \mid x_i)$

Умовні ймовірності $p(y_j \mid x_i)$ обчислюють за формулами

$$p(y_j \mid x_i) = \frac{p(x_i, y_j)}{p(x_i)} \tag{2.65′}$$

і $\sum_{j=1}^{m} p(y_j \mid x_i) = 1$.

З формул (2.65) і (2.65′) отримаємо:

$$p(x_i, y_j) = p(y_j) \cdot p(x_i \mid y_j) \text{ і } p(x_i, y_j) = p(x_i) \cdot p(y_j \mid x_i).$$

Звідси випливає, що, знаючи закони розподілу складових ξ і η двовимірної випадкової величини (ξ, η) та їхні умовні закони розподілу, можна знайти закон розподілу системи випадкових величин (ξ, η).

Умовні закони розподілу складових ξ і η двовимірної випадкової величини (ξ, η) зумовлюють ***умовні числові характеристики***

- *умовні математичні сподівання:*

$$E(\xi \mid \eta = y_j) = \sum_{i=1}^{n} x_i p(x_i \mid y_j) = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{p(x_i, y_j)}{p(y_j)} = \frac{1}{p(y_j)} \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p(x_i, y_j); \tag{2.66}$$

$$E(\eta \mid \xi = x_i) = \sum_{j=1}^{m} y_j p(y_j \mid x_i) = \sum_{j=1}^{m} y_j \frac{p(x_i, y_j)}{p(x_i)} = \frac{1}{p(x_i)} \sum_{j=1}^{m} y_j \cdot p(x_i, y_j);$$

- *умовні дисперсії:*

$$D(\xi \mid \eta = y_j) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p(x_i \mid y_j) - E^2(\xi \mid \eta = y_j) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \frac{p(x_i, y_j)}{p(y_j)} - E^2(\xi \mid \eta = y_j) =$$
$$= \frac{1}{p(y_j)} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p(x_i, y_j) - E^2(\xi \mid \eta = y_j);$$

(2.67)

$$D(\eta \mid \xi = x_i) = \sum_{j=1}^{m} y_j^2 p(y_j \mid x_i) - E^2(\eta \mid \xi = x_i) = \sum_{j=1}^{m} y_j^2 \frac{p(x_i, y_j)}{p(x_i)} - E^2(\eta \mid \xi = x_i) =$$
$$= \frac{1}{p(x_i)} \sum_{j=1}^{m} y_j^2 p(y_j, x_i) - E^2(\eta \mid \xi = x_i);$$

- *умовні середні квадратичні відхилення*:

$$\sigma(\xi \mid \eta = y_j) = \sqrt{D(\xi \mid \eta = y_j)}\ ; \qquad (2.68)$$
$$\sigma(\eta \mid \xi = x_i) = \sqrt{D(\eta \mid \xi = x_i)}$$

10. Нехай (ξ,η) – двовимірна випадкова величина, $f(x,y)$ – щільність її сумісного розподілу, $f_1(x)$ – щільність розподілу складової ξ, $f_2(y)$ – щільність розподілу складової η.

Умовною щільністю *$\varphi(x \mid y)$ розподілу складової ξ двовимірної випадкової величини (ξ,η) при фіксованому значенні $\eta = y$ називають відношення щільності її сумісного розподілу $f(x,y)$ до щільності розподілу $f_2(y)$ складової η, тобто*

$$\varphi(x \mid y) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)}. \qquad (2.69)$$

Умовною щільністю *$\psi(y \mid x)$ розподілу складової η двовимірноївипадкової величини (ξ,η) при фіксованому значенні $\xi = x_i$ називають відношення щільності її сумісного розподілу $f(x,y)$ до щільності розподілу $f_1(x)$ складової ξ, тобто*

$$\psi(y \mid x) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)}. \qquad (2.70)$$

З формул (2.69) і (2.70) отримуємо:

$$f(x,y) = f_2(y) \cdot \varphi(x \mid y) \text{ і } f(x,y) = f_1(x) \cdot \psi(y \mid x). \qquad (2.71)$$

Звідси випливає, що, знаючи щільність розподілу складових ξ і η двовимірної випадкової величини (ξ,η) та їхні умовні щільностірозподілу, можна знайти щільність сумісного розподілу системи випадкових величин (ξ,η).

Аналогічно, як у випадку дискретної випадкової величини, для неперервних випадкових величин є:

- *умовні математичні сподівання*:

$$E(\xi \mid \eta = y) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi(x \mid y)dx,$$
$$E(\eta \mid \xi = x) = \int_{-\infty}^{+\infty} y\psi(y \mid x)dy;$$

- *умовні дисперсії*:

$$D(\xi \mid \eta = y) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\varphi(x \mid y)dx - E^2(\xi \mid \eta = y)$$
$$D(\eta \mid \xi = x) = \int_{-\infty}^{+\infty} y^2\psi(y \mid x)dy - E^2(\eta \mid \xi = x), \qquad (2.73)$$

- *умовні середні квадратичні відхилення*

$\sigma(\xi \mid \eta = y) = \sqrt{D(\xi \mid \eta = y)}$ $\sigma(\eta \mid \xi = x) = \sqrt{D(\eta \mid \xi = x)}$. (2.74)

Умовне математичне сподівання $E(\eta \mid \xi = x)$ є функцією від x:

$E(\eta \mid \xi = x) = f(x)$, (2.75)

яку називають ***функцією регресії*** η відносно ξ, а умовне математичне сподівання $E(\xi \mid \eta = y)$ є функцією від y:

$E(\xi \mid \eta = y) = g(y)$, (2.76)

яку називають ***функцією регресії*** ξ відносно η.

Приклад 1. Одночасно кидають на підлогу дві монети. Написати закон розподілу випадкової величини (ξ,η), де ξ – кількість випадань герба на першій монеті, η – кількість випадань герба на другій монеті. Обчислити $E(\xi)$, $E(\eta)$, $D(\xi)$, $D(\eta)$, $\sigma(\xi)$, $\sigma(\eta)$, $K_{\xi\eta}$, $r_{\xi\eta}$.

Розв'язання. ξ і η – одновимірні випадкові величини, кожна з яких набуває значень 0,1, причому кожного свого значення ξ і η набувають з імовірністю 0,5:

$P(\xi = 0) = P(\xi = 1) = P(\eta = 0) = P(\eta = 1) = 0,5$.

Двовимірна випадкова величина (ξ,η) може набувати значень $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$, $(1,1)$. Для складання закону розподілу двовимірної випадкової величини (ξ,η) потрібно обчислити ймовірності $p(x_i, y_j)$, де $i = 1,2$ і $j = 1,2$.

Оскільки випадковівеличини ξ і η незалежні, то шуканіймовірності обчислюємо за формулою

$p(x_i, y_j) = p(x_i) \cdot p(y_j)$.

За цією формулою отримаємо:

$p(x_1, y_1) = P(\xi = 0 \cap \eta = 0) = P(\xi = 0) \cdot P(\eta = 0) = 0,5 \cdot 0,5 = 0,25$ – імовірність того, що герб не випав ні на першій, ні на другій монетах;

$p(x_2, y_1) = P(\xi = 1 \cap \eta = 0) = P(\xi = 1) \cdot P(\eta = 0) = 0,5 \cdot 0,5 = 0,25$ – імовірність того, що на першій монеті випав герб, а на другій не випав.

$p(x_1, y_2) = P(\xi = 0 \cap \eta = 1) = P(\xi = 0) \cdot P(\eta = 1) = 0,5 \cdot 0,5 = 0,25$ – імовірність того, що на першій монеті герб не випав, а на другій випав;

$p(x_2, y_2) = P(\xi = 1 \cap \eta = 1) = P(\xi = 1) \cdot P(\eta = 1) = 0,5 \cdot 0,5 = 0,25$ – імовірність того, що на першій і другій монетах випав герб.

Отже, закон розподілу двовимірної випадковоївеличини записують у вигляді таблиці:

$\eta = y_j$ \ $\xi = x_i$	0	1	$p(y_j)$
0	0,25	0,25	0,5
1	0,25	0,25	0,5
$p(x_i)$	0,5	0,5	

Обчислимо числові характеристики складових ξ і η:

$$E(\xi) = \sum_{i=1}^{2} x_i \cdot p(x_i) = 0 \cdot 0,5 + 1 \cdot 0,5 = 0,5;$$

$$E(\eta) = \sum_{j=1}^{2} y_j \cdot p(y_j) = 0 \cdot 0,5 + 1 \cdot 0,5 = 0,5;$$

$$D(\xi)=\sum_{i=1}^{2} x_i^{2}\cdot p(x_i)-E^2(\xi)=0^2\cdot 0,5+1^2\cdot 0,5-0,5^2=0,5-0,25=0,25;$$

$$D(\eta)=\sum_{j=1}^{2} y_j^{2}\cdot p(y_j)-E^2(\eta)=0^2\cdot 0,5+1^2\cdot 0,5-0,5^2=0,5-0,25=0,25;$$

$$\sigma(\xi)=\sqrt{D(\xi)}=\sqrt{0,25}=0,5;$$

$$\sigma(\eta)=\sqrt{D(\eta)}=\sqrt{0,25}=0,5\,.$$

Точка $(E(\xi),E(\eta))=(0,5;0,5)$ на площині Oxy є центром ваги можливих значень випадкових величин ξ і η.

Коваріацію обчислюємо за формулою (2.62′):

$$K_{xy}=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} x_i y_j p(x_i,y_j)-E(\xi)\cdot E(\eta)=0\cdot 0\cdot 0,25+1\cdot 0\cdot 0,25+0\cdot 1\cdot 0,25+$$

$$+1\cdot 1\cdot 0,25-0,5\cdot 0,5=0;$$

а за формулою (2.64) знайдемо коефіцієнт кореляції:

$$r_{xy}=\frac{K_{xy}}{\sigma(\xi)\cdot\sigma(\eta)}=\frac{0}{0,5\cdot 0,5}=0.$$

Приклад 2. Закон розподілу двовимірної дискретної випадкової величини заданий таблицею:

$\eta=y_j$ \ $\xi=x_i$	2	4	6	8
–6	0,1 a	0,5 a	0,4 a	a
–4	0,9 a	0,4 a	0,5 a	0,2 a
–2	a	2,1 a	1,1 a	1,8 a

Виконати такі дії:

а) визначити параметр a;

б) записати закони розподілу складових ξ і η;

в) обчислити $E(\xi)$, $\sigma(\xi)$, $E(\eta)$, $\sigma(\eta)$;

г) знайти $P(4\le\xi<8\cap -6\le\eta<-2)$;

д) з’ясувати чи величини ξ і η є залежні або незалежні.

Розв’язання. а) Значення параметра a знаходимо з умови

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p(x_i,y_j)=1\,,$$

(формула (2.47)). У даному випадку

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p(x_i,y_j)=0,1a+0,5a+0,4a+a+0,9a+0,4a+0,5a+$$

$$+0,2a+a+2,1a+1,1a+1,8a=10a=1\Rightarrow a=\frac{1}{10}$$

З урахуванням значення параметра a закон розподілу має вигляд:

$\eta=y_j$ \ $\xi=x_i$	2	4	6	8	$p(y_j)$
–6	0,01	0,05	0,04	0,1	0,2
–4	0,09	0,04	0,05	0,02	0,2
–2	0,1	0,21	0,11	0,18	0,6

$p(x_i)$	0,2	0,3	0,2	0,3	

б) Закон розподілу складових ξ і η виписуємо з останньої таблиці:

$\xi = x_i$	2	4	6	8
$p(x_i)$	0,2	0,3	0,2	0,3

$\eta = y_j$	–6	–4	–2
$p(y_j)$	0,2	0,2	0,6

в) Обчислимо числові характеристики:

$$E(\xi) = \sum_{i=1}^{4} x_i p(x_i) = 2 \cdot 0,2 + 4 \cdot 0,3 + 6 \cdot 0,2 + 8 \cdot 0,3 = 5,2;$$

$$D(\xi) = \sum_{i=1}^{4} x_i^2 p(x_i) - E^2(\xi) = 2^2 \cdot 0,2 + 4^2 \cdot 0,3 + 6^2 \cdot 0,2 + 8^2 \cdot 0,3 - 5,2^2 =$$

$$= 0,8 + 4,8 + 7,2 + 19,2 - 27,04 = 4,96;$$

$$\sigma(\xi) = \sqrt{D(\xi)} = \sqrt{4,96} \approx 2,23;$$

$$E(\eta) = \sum_{j=1}^{3} y_j p(y_j) = -6 \cdot 0,2 - 4 \cdot 0,2 - 2 \cdot 0,6 = -3,2;$$

$$D(\eta) = \sum_{j=1}^{3} y_j^2 p(y_j) - E^2(\eta) = (-6)^2 \cdot 0,2 + (-4)^2 \cdot 0,2 + (-2)^2 \cdot 0,6 - (-3,2)^2 =$$

$$= 7,2 + 3,2 + 2,4 - 10,24 = 2,56;$$

$$\sigma(\eta) = \sqrt{D(\eta)} = \sqrt{2,56} = 1,6 \ .$$

г) Шукана ймовірність

$$P(4 \le \xi < 8 \cap -6 \le \eta < -2) = P(\xi = 4 \cap \eta = -6) + P(\xi = 6 \cap \eta = -6) + P(\xi = 4 \cap \eta = -4) +$$

$$+ P(\xi = 6 \cap \eta = -4) = 0,05 + 0,04 + 0,04 + 0,05 = 0,18.$$

д) Для з’ясування залежності чи незалежності випадкових величин ξ і η обчислимо $K_{\xi\eta}(r_{\xi\eta})$. За формулами (2.62′), (2.64) отримаємо:

$$K_{\xi\eta} = 2 \cdot (-6) \cdot 0,01 + 4 \cdot (-6) \cdot 0,05 + 6 \cdot (-6) \cdot 0,04 + 8 \cdot (-6) \cdot 0,1 + 2 \cdot (-4) \cdot 0,09 +$$

$$+4 \cdot (-4) \cdot 0,04 + 6 \cdot (-4) \cdot 0,05 + 8 \cdot (-4) \cdot 0,02 + 2 \cdot (-2) \cdot 0,1 + 4 \cdot (-2) \cdot 0,21 + 6 \cdot (-2) \cdot 0,11 +$$

$$+8 \cdot (-2) \cdot 0,18 - 5,2 \cdot (-3,2) - 6 \cdot (2 \cdot 0,01 + 4 \cdot 0,05 + 6 \cdot 0,04 + 8 \cdot 0,1) -$$

$$-4 \cdot (2 \cdot 0,09 + 4 \cdot 0,04 + 6 \cdot 0,05 + 8 \cdot 0,02) - 2 \cdot (2 \cdot 0,1 + 4 \cdot 0,21 + 6 \cdot 0,11 + 8 \cdot 0,18) +$$

$$+5,2 \cdot 3,2 = -0,4$$

$$r_{\xi\eta} = \frac{-0,4}{2,23 \cdot 1,6} \approx -0,11.$$

Оскільки $K_{\xi\eta} = -0,4 \ne 0$ $(r_{\xi\eta} \approx -0,11 \ne 0)$, то випадкові величини залежні і корельовані.

Приклад 3. Закон розподілу двовимірної випадкової величини заданий таблицею:

$\eta = y_j$ \ $\xi = x_i$	2	5
10	0,25	0,10
12	0,15	0,05
14	0,32	0,13

Знайти:

а) безумовні закони розподілу складових ξ і η;

б) умовний закон розподілу випадкової величини ξ за умови, що випадкова величина η набула значення $\eta = 10$;

в) умовний закон розподілу складової η за умови, що випадкова величина ξ набула значення $\xi = 5$;

г) умовні числові характеристики $E(\xi|\eta=10)$, $E(\eta|\xi=5)$, $D(\xi|\eta=10)$, $D(\eta|\xi=5)$, $\sigma(\xi|\eta=10)$, $\sigma(\eta|\xi=5)$.

Розв'язання. а) Щоб записати безумовні закони розподілу складових ξ і η, потрібно за формулою (2.47) обчислити ймовірності $p(x_i)$, $p(y_j)$:

$$p(x_1) = p(\xi = 2) = 0,25 + 0,15 + 0,32 = 0,72;$$

$$p(x_2) = p(\xi = 5) = 0,10 + 0,05 + 0,13 = 0,28;$$

$$p(y_1) = p(\eta = 10) = 0,25 + 0,10 = 0,35;$$

$$p(y_2) = p(\eta = 12) = 0,15 + 0,05 = 0,2;$$

$$p(y_3) = p(\eta = 14) = 0,32 + 0,13 = 0,45.$$

Закон розподілу складових ξ і η запишемо такими таблицями:

$\xi = x_i$	2	5
$p(x_i)$	0,72	0,28

$\eta = y_j$	10	12	14
$p(y_j)$	0,35	0,2	0,45

Перевірка: $p(x_1) + p(x_2) = 0,72 + 0,28 = 1$;

$p(y_1) + p(y_2) + p(y_3) = 0,35 + 0,2 + 0,45 = 1$.

б) Щоб скласти умовний закон розподілу складової ξ за умови, що складова $\eta = 10$, потрібно обчислити відповідні умовні ймовірності. За формулою (2.65) отримуємо:

$$p(x_1|y_1) = \frac{p(x_1, y_1)}{p(y_1)} = \frac{0,25}{0,35},$$

$$p(x_2|y_1) = \frac{p(x_2, y_1)}{p(y_1)} = \frac{0,10}{0,35}.$$

Умовний закон розподілу складової ξ за умови, що $\eta = 10$, має такий вигляд:

$\xi = x_i \vert \eta = 10$	2	5
$p(x_i \vert y_1)$	$\frac{0,25}{0,35}$	$\frac{0,10}{0,35}$

Перевірка: $p(x_1|y_1) + p(x_2|y_1) = \frac{0,25}{0,35} + \frac{0,10}{0,35} = 1$.

в) Для запису умовного закону розподілу складової η за умови, що $\xi = 5$, також потрібно обчислити відповідні умовні ймовірності. За формулою (2.65´) знаходимо:

$$p(y_1|x_2) = \frac{p(x_2, y_1)}{p(x_2)} = \frac{0,10}{0,28},$$

$$p(y_2|x_2) = \frac{p(x_2, y_2)}{p(x_2)} = \frac{0,05}{0,28},$$

$$p(y_3|x_2) = \frac{p(x_2, y_3)}{p(x_2)} = \frac{0,13}{0,28}.$$

Шуканий умовний закон розподілу складової η за умови, що $\xi = 5$ має вигляд такої таблиці:

$\eta = y_j \mid \xi = 5$	10	12	14
$p(y_j \mid x_2)$	$\frac{0,10}{0,28}$	$\frac{0,05}{0,28}$	$\frac{0,13}{0,28}$

Перевірка:

$$p(y_1|x_2) + p(y_2|x_2) + p(y_3|x_2) = \frac{0,10}{0,28} + \frac{0,05}{0,28} + \frac{0,13}{0,28} = 1.$$

г)Умовні числові характеристики обчислюємо за формулами (2.66), (2.67), (2.68):

$$E(\xi|\eta = 10) = 2 \cdot \frac{0,25}{0,35} + 5 \cdot \frac{0,10}{0,35} = \frac{0,5 + 0,5}{0,35} = \frac{1}{0,35} \approx 2,86;$$

$$E(\eta|\xi = 5) = 10 \cdot \frac{0,10}{0,28} + 12 \cdot \frac{0,05}{0,28} + 14 \cdot \frac{0,13}{0,28} = \frac{1 + 0,6 + 1,82}{0,28} \approx 12,21;$$

$$D(\xi|\eta = 10) = 2^2 \cdot \frac{0,25}{0,35} + 5^2 \cdot \frac{0,10}{0,35} - 2,86^2 = 1,82;$$

$$D(\eta|\xi = 5) = 10^2 \cdot \frac{0,10}{0,28} + 12^2 \cdot \frac{0,05}{0,28} + 14^2 \cdot \frac{0,13}{0,28} - 12,21^2 \approx 3,34;$$

$$\sigma(\xi|\eta = 10) = \sqrt{D(\xi|\eta = 10)} \approx 1,35;$$

$$\sigma(\eta|\xi = 5) = \sqrt{D(\eta|\xi = 5)} \approx 1,83.$$

Приклад 4. Функцію розподілу неперервної двовимірної випадкової величини (ξ, η) описують функцією

$$F(x, y) = \begin{cases} 0, & x < 0 \text{ або } y < 0; \\ \sin x, & 0 \le x \le \frac{\pi}{2},\ y > \frac{\pi}{2}; \\ \sin x \sin y, & 0 \le x \le \frac{\pi}{2}, 0 \le y \le \frac{\pi}{2}; \\ \sin y, & x > \frac{\pi}{2}, 0 \le y \le \frac{\pi}{2}; \\ 1, & x > \frac{\pi}{2},\ y > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Виконати такі дії :

а) визначити щільність розподілу величини (ξ, η);

б) знайти функції і щільності розподілу складових ξ і η;

в) обчислити $P(0 \le \xi \le \frac{\pi}{3} \cap 0 \le \eta \le \frac{\pi}{4})$.

Розв'язання. а) Щільність розподілу $f(x, y)$ двовимірної випадкової величини (ξ, η) є другою мішаною похідною від функції розподілу $F(x, y)$, тобто

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$$

(див формулу 2.54).

Якщо $x < 0$ або $y < 0$, то $f(x, y)$=0, бо $F(x, y) = 0$;

якщо $0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}$ і $0 \le y \le \dfrac{\pi}{2}$, то $f(x,y) = (\sin x \sin y)''_{xy} = (\cos x \sin y)'_y = \cos x \cos y;$

якщо $0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}$ і $y > \dfrac{\pi}{2}$, то $f(x,y) = (\sin x)''_{xy} = (\cos x)'_y = 0;$

якщо $x > \dfrac{\pi}{2}$ і $0 \le y \le \dfrac{\pi}{2}$, то $f(x,y) = (\sin y)''_{xy} = 0'_y = 0.$

Звідси випливає, що щільність розподілу описують функцією

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & x \notin \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right] \text{ або } y \notin \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]; \\ \cos x \cos y, & x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right] \text{ і } y \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]. \end{cases}$$

Зазначимо, що частинні похідні функції двох змінних обчислюють за таким правилом: при диференціюванні по одній змінній другу змінну вважаємо сталою. Крім того,

$$F''_{xy} = (F'_x(x,y))'_y.$$

б) Якщо $F_1(x)$ – функція розподілу складової ξ і $F_2(y)$ – функція розподілу складової η, то за формулою (2.52) отримаємо:

$$F_1(x) = \lim_{y \to +\infty} F(x,y) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \sin x, & 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}; \\ 1, & x > \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

$$F_2(y) = \lim_{x \to +\infty} F(x,y) = \begin{cases} 0, & y < 0; \\ \sin y, & 0 \le y \le \dfrac{\pi}{2}; \\ 1, & y > \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Щільності розподілу $f_1(x)$ і $f_2(y)$ складових ξ і η обчислюємо за формулами (2.58):

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \begin{cases} 0, & x \notin \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]; \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cos y dy, & x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right] \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 0, & x \notin \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]; \\ \cos x \cdot \sin y\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}, & x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right] \end{cases} == \begin{cases} 0, & x \notin \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]; \\ \cos x, & x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx = \begin{cases} 0, & y \notin \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]; \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cos y dx, & y \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right] \end{cases} =$$

$$=\begin{cases} 0, & y\notin\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]; \\ cos\,y\cdot sin\,x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}, & y\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right] \end{cases}==\begin{cases} 0, & y\notin\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]; \\ cos\,y, & y\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$

в) Шукану ймовірність обчислюємо за формулою (2.53) або за формулою (2.57):

$$P(0\le\xi\le\frac{\pi}{3}\cap 0\le\eta\le\frac{\pi}{4})=\left[F(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{4})-F(0,\frac{\pi}{4})\right]-\left[F(\frac{\pi}{3},0)-F(0,0)\right]=$$

$$(sin\frac{\pi}{3}\cdot sin\frac{\pi}{4}-sin\,0\cdot sin\frac{\pi}{4})-(sin\frac{\pi}{3}\cdot sin\,0-sin\,0\cdot sin\,0)=$$

$$=(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-0)-(0-0)=\frac{\sqrt{6}}{4}\approx 0,61,$$

або за формулою (2.57):

$$P(0\le\xi\le\frac{\pi}{3}\cap 0\le\eta\le\frac{\pi}{4})=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\int_0^{\frac{\pi}{4}}cos\,x\,cos\,ydxdy=\int_0^{\frac{\pi}{3}}cos\,xdx\cdot\int_0^{\frac{\pi}{4}}cos\,ydy=$$

$$=sin\,x\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}\cdot sin\,y\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=(sin\frac{\pi}{3}-sin\,0)\cdot(sin\frac{\pi}{4}-sin\,0)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{4}\approx 0,61.$$

Приклад 5. Щільність розподілу двовимірної випадкової величини (ξ,η) задана функцією

$$f(x,y)=\begin{cases} 0, & (x,y)\notin Q; \\ m, & (x,y)\in Q, \end{cases}$$

де $Q=\{(x,y): 0\le x\le 2, 1\le y\le 4\}$.

Виконати такі дії:

а) визначити параметр m;

б) знайти функцію розподілу;

в) знайти функції розподілів складових ξ і η;

г) обчислити числові характеристики $E(\xi)$, $E(\eta)$, $D(\xi)$, $D(\eta)$, $\sigma(\xi)$, $\sigma(\eta)$, $K_{\xi\eta}$, $r_{\xi\eta}$;

д) з'ясувати, чи величини ξ і η є залежні чи незалежні.

Розв'язання. а) Параметр m обчислюємо з умови, що

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dydx=1\Rightarrow\int_0^2\int_1^4 mdxdy=1\Rightarrow m\int_0^2 dx\int_0^4 dy=1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow m\cdot x\Big|_0^2\cdot y\Big|_1^4=1\Rightarrow m\cdot 2\cdot 3=1\Rightarrow m=\frac{1}{6}.$$

Щільність розподілу двовимірної випадкової величини (ξ,η) описують функцією:

$$f(x,y)=\begin{cases} 0, & (x,y)\notin Q; \\ \dfrac{1}{6}, & (x,y)\in Q, \end{cases}$$

б) Функція розподілу $F(x,y)$ виражається через щільністьрозподілу формулою

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(\xi,\eta)d\xi d\eta.$$

Для обчислення $F(x,y)$ накреслимо прямокутник Q і поділимо частину площини Oxy, розміщену за межами цього прямокутника, на сектори Q_1,Q_2,Q_3,Q_4 (рис. 2.15)

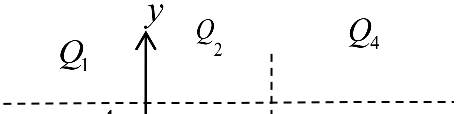

Рис. 2.15. До *прикладу 5*.

Розглянемо такі випадки:

1) якщо $(x,y)\in Q_1=\{(x,y): x\le 0 \quad або \quad y\le 1\}$, то

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(\xi,\eta)d\xi d\eta=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} 0d\xi d\eta=0;$$

2) якщо $(x,y)\in Q=\{(x,y): 0<x\le 2 \quad i \quad 1<y\le 4\}$, то

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(\xi,\eta)d\xi d\eta=\int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{1} 0d\xi d\eta+\int_{0}^{x}\int_{1}^{y}\frac{1}{6}d\xi d\eta=0+\frac{1}{6}\int_{0}^{x}d\xi\int_{1}^{y}d\eta=$$

$$=\frac{1}{6}\xi\Big|_0^x\cdot\eta\Big|_1^y=\frac{1}{6}x(y-1);$$

3) якщо $(x,y)\in Q_2=\{(x,y): 0<x\le 2 \quad i \quad 4<y<+\infty\}$, то

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(\xi,\eta)d\xi d\eta=\int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{1} 0d\xi d\eta+\int_{0}^{x}\int_{1}^{4}\frac{1}{6}d\xi d\eta+\int_{0}^{x}\int_{4}^{y}0d\xi d\eta=$$

$$=\frac{1}{6}\int_{0}^{x}d\xi\int_{1}^{4}d\eta=\frac{1}{6}\xi\Big|_0^x\cdot\eta\Big|_1^4=\frac{1}{6}\cdot x\cdot(4-1)=\frac{1}{2}x;$$

4) якщо $(x,y)\in Q_3=\{(x,y): 2<x<+\infty \quad i \quad 1<y\le 4\}$, то

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(\xi,\eta)d\xi d\eta=\int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{1} 0d\xi d\eta+\int_{0}^{2}\int_{1}^{y}\frac{1}{6}d\xi d\eta+\int_{2}^{4}\int_{1}^{4}0d\xi d\eta=$$

$$\frac{1}{6}\int_{0}^{2}d\xi\int_{1}^{y}d\eta=\frac{1}{6}\xi\Big|_0^2\cdot\eta\Big|_1^y=\frac{1}{6}\cdot 2\cdot(y-1)=\frac{1}{3}(y-1);$$

5) якщо $(x,y)\in Q_4=\{(x,y): x>2 \quad i \quad y>4\}$, то

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(\xi,\eta)d\xi d\eta=\int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{1} 0d\xi d\eta+\int_{0}^{2}\int_{1}^{4}\frac{1}{6}d\xi d\eta+\int_{0}^{2}\int_{4}^{y}0d\xi d\eta+$$

$$+\int_{2}^{x}\int_{1}^{4}0d\xi d\eta+\int_{2}^{x}\int_{4}^{y}0d\xi d\eta=\frac{1}{6}\int_{0}^{2}d\xi\int_{1}^{4}d\eta=\frac{1}{6}\xi\Big|_0^2\cdot\eta\Big|_1^4=\frac{1}{6}\cdot 2\cdot 3=1.$$

Отже,

$$F(x,y)=\begin{cases}0, & x\le 0 \text{ або } y\le 1;\\ \frac{1}{2}x, & 0<x\le 2,\ y>4;\\ \frac{1}{6}x(y-1), & 0<x\le 2, 1<y\le 4;\\ \frac{1}{3}(y-1), & x>2, 1<y\le 4;\\ 1, & x>2, y>4.\end{cases}$$

в) За формулою (2.52) і з вигляду функції розподілу $F(x,y)$ одержуємо, що функції розподілу $F_1(x)$ і $F_2(y)$ складових ξ і η мають вигляд:

$$F_1(x)=\lim_{y\to+\infty}F(x,y)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \frac{1}{2}x, & 0<x\le 2;\\ 1, & x>2.\end{cases}$$

$$F_2(y)=\lim_{x\to+\infty}F(x,y)=\begin{cases}0, & y\le 1;\\ \frac{1}{3}(y-1), & 1<y\le 4;\\ 1, & y>4.\end{cases}$$

За формулами (2.58) обчислюємо щільності розподілу $f_1(x)$ і $f_2(y)$ складових ξ і η, відповідно:

$$f_1(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}0, & x\notin[0,2];\\ \int_1^4\frac{1}{6}dy, & x\in[0,2]\end{cases}=\begin{cases}0, & x\notin[0,2];\\ \frac{1}{2}, & x\in[0,2];\end{cases}$$

$$f_2(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}0, & y\notin[1,4];\\ \int_0^2\frac{1}{6}dx, & y\in[1,4]\end{cases}=\begin{cases}0, & y\notin[1,4];\\ \frac{1}{3}, & y\in[1,4].\end{cases}$$

г) Обчислюємо числові характеристики складових ξ і η:

$$E(\xi)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot f_1(x)dx=\int_0^2 x\cdot\frac{1}{2}dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^2=1;$$

$$E(\eta)=\int_{-\infty}^{+\infty}y\cdot f_2(y)dy=\int_1^4 y\cdot\frac{1}{3}dy=\frac{1}{3}\cdot\frac{y^2}{2}\Big|_1^4=\frac{1}{6}(4^2-1^2)=\frac{15}{6}=2{,}5;$$

$$D(\xi)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\cdot f_1(x)dx-E^2(\xi)=\int_0^2 x^2\cdot\frac{1}{2}dx-1=\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^2-1=\frac{8}{6}-1=\frac{1}{3};$$

$$D(\eta)=\int_{-\infty}^{+\infty}y^2\cdot f_2(y)dy-E^2(\eta)=\int_1^4 y^2\cdot\frac{1}{3}dy-(\frac{5}{2})^2=\frac{1}{3}\cdot\frac{y^3}{3}\Big|_1^4-\frac{25}{4}=\frac{(4^3-1^3)}{9}-\frac{25}{4}=\frac{3}{4}=0{,}75;$$

$$\sigma(\xi)=\sqrt{D(\xi)}=\sqrt{\frac{1}{3}}\approx 0{,}58;$$

$$\sigma(\eta)=\sqrt{D(\eta)}=\sqrt{\frac{3}{4}}\approx 0{,}87.$$

Коваріацію $K_{\xi\eta}$ і коефіцієнт кореляції $r_{\xi\eta}$ обчислюємо за формулами (2.63) і (2.64):

$$K_{\xi\eta}=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xy\,f(x,y)\,dxdy-E(\xi)E(\eta)=\frac{1}{6}\int_0^2\int_1^4 xy\,dxdy-1\cdot\frac{5}{2}=\frac{1}{6}\int_0^2 xdx\int_1^4 y\,dy-\frac{5}{2}=$$

$$=\frac{1}{6}\frac{x^2}{2}\bigg|_0^2\cdot\frac{y^2}{2}\bigg|_1^4-\frac{5}{2}=\frac{1}{6}\cdot\frac{4}{2}\cdot\frac{16-1}{2}-\frac{5}{2}=\frac{15}{6}-\frac{5}{2}=0.$$

$$r_{\xi\eta}=\frac{K_{\xi\eta}}{\sigma(\xi)\cdot\sigma(\eta)}=0\ .$$

Оскільки $K_{\xi\eta}=0(r_{\xi\eta}=0)$, то випадкові величини ξ і η є не корельованими, але можуть бути як залежними, так і незалежними.

д) Оскільки двовимірна функція розподілу є добутком функцій розподілу компонент, тобто виконується співвідношення (2.60), то випадкові величини ξ і η справді є незалежними.

Приклад 6. Двовимірна випадкова величина (ξ,η) задана щільністю розподілу

$$f(x,y)=\begin{cases}0, & (x,y)\notin Q;\\ x\cdot y, & (x,y)\in Q,\end{cases}$$

де $Q=\{(x,y):0\le x\le 1, 0\le y\le 2\}$.

Виконати такі дії:

а) знайти умовні щільності розподілу складових ξ і η;

б) обчислитихарактеристики $E(\xi|\eta=y)$, $E(\eta|\xi=x)$, $D(\xi|\eta=y)$, $D(\eta|\xi=x)$;

в) записати функції регресії η відносно ξ та ξ відносно η.

Розв'язання. а) Для обчислення умовних щільностей розподілу обчислимо спочатку щільності розподілу $f_1(x)$ і $f_2(y)$ складових ξ і η, відповідно.

За формулою (2.58) знаходимо:

$$f_1(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\int_0^2 xydy=x\int_0^2 ydy=x\frac{y^2}{2}\bigg|_0^2=x\cdot\frac{4}{2}=2x;$$

$$f_2(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\int_0^1 xydx=y\int_0^1 xdx=y\frac{x^2}{2}\bigg|_0^1=\frac{y}{2}.$$

Наголосимо, що $f(x,y)=f_1(x)\cdot f_2(y)$ і складові ξ і η незалежні.

За формулами (2.69) і (2.70) знаходимо умовні щільності розподілу складових:

$$\varphi(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_2(y)}=\begin{cases}0, & x\notin[0,1];\\ \dfrac{xy}{\frac{y}{2}}=2x, & x\in[0,1];\end{cases}$$

$$\psi(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_1(x)}=\begin{cases}0, & y\notin[0,2];\\ \dfrac{xy}{2x}=\dfrac{y}{2}, & y\in[0,2].\end{cases}$$

б) Числові характеристики обчислюємо за формулами (2.72), (2.73):

$$E(\xi|\eta=y)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot\varphi(x|y)dx=\int_0^1 x\cdot 2xdx=2\int_0^1 x^2dx=2\frac{x^3}{3}\bigg|_0^1=\frac{2}{3};$$

$$E(\eta|\xi=x)=\int_{-\infty}^{+\infty}y\cdot\psi(y|x)dy=\int_0^2 y\cdot\frac{y}{2}dy=\frac{1}{2}\int_0^2 y^2dy=\frac{1}{2}\frac{y^3}{3}\bigg|_0^2=\frac{1}{2}\cdot\frac{8}{3}=\frac{4}{3};.$$

$$D(\xi|\eta=y)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}x^2\cdot\varphi(x|y)dx-E^2(\xi|\eta=y)=\int\limits_0^1 x^2\cdot 2xdx-\left(\frac{2}{3}\right)^2=2\int\limits_0^1 x^3dx-\frac{4}{9}=$$

$$=2\frac{x^4}{4}\bigg|_0^1-\frac{4}{9}=\frac{1}{2}-\frac{4}{9}=\frac{1}{18};$$

$$D(\eta|\xi=x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}y^2\cdot\psi(y|x)dy-E^2(\eta|\xi=x)=\int\limits_0^2 y^2\cdot\frac{y}{2}dy-\left(\frac{4}{3}\right)^2=\frac{1}{2}\int\limits_0^2 y^3dy-\frac{16}{9}=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{y^4}{4}\bigg|_0^2-\frac{16}{9}=2-\frac{16}{9}=\frac{2}{9}.$$

в) У нашому випадку $E(\eta|\xi=x)$ не залежить від x і $E(\xi|\eta=y)$ не залежить від y, тому функції регресії η відносно ξ (2.75) і ξ відносно η (2.76) є сталими величинами:

$$E(\eta|\xi=x)=\frac{4}{3}=f(x),\ E(\xi|\eta=y)=\frac{2}{3}=g(y).$$

Завдання для самостійної роботи

1.Дано дві дискретні випадкові величини ξ та η

$\xi=x_i$	-1	0
$p(x_i)$	0,1	0,9

$\eta=y_i$	0	2	4
$p(y_i)$	0,2	0,4	0,4

Побудувати закон розподілу двовимірної випадкової величини (ξ,η), якщо випадкові величини ξ та η незалежні.

2.У першій партії 75%, а в другій – 50% виробів високої якості. З першої партії навмання виймають три вироби, а з другої – один. ξ – кількість високоякісних виробів, узятих із першої партії, η – з другої. Написати закон розподілу двовимірної випадкової величини (ξ,η). Обчислити числові характеристики складових ξ та η.

3.Задано дискретну двовимірну випадкову величину (ξ,η):

$\eta=y_j$ \ $\xi=x_i$	2	5	8
0,4	0,15	0,30	0,35
0,8	0,05	0,12	0,03

Знайти:

а) безумовні закони розподілу випадкових величин ξ і η;

б) умовний закон розподілу випадкової величини ξ за умови, що випадкова величина η набула значення y_1=0,4;

в) умовний закон розподілу випадкової величини η за умови, що випадкова величина ξ набула значення x_2 = 5;

г) $E(\xi)$, $E(\eta)$, $D(\xi)$, $D(\eta)$, $\sigma(\xi)$, $\sigma(\eta)$;

д) $P(5\le\xi<8\bigcap 0,4\le\eta\le 0,6)$;

е) з'ясувати чи величини ξ та η залежні чи незалежні.

4.Закон розподілу системи двох дискретних випадкових величин (ξ,η) задано таблицею:

$\eta=y_j$ \ $\xi=x_i$	5,2	10,2	15,2
2,4	0,1a	2a	0,9a
4,4	2a	0,2a	1,8a
6,4	1,9a	0,8a	0,3a

Виконати такі дії:

а) знайти a;

б) обчислити $E(\xi)$, $E(\eta)$, $D(\xi)$, $D(\eta)$, $\sigma(\xi)$, $\sigma(\eta)$, $K_{\xi\eta}$, $r_{\xi\eta}$;

в) обчислити умовні числові характеристики $E(\xi|\eta=4,4)$, $E(\eta|\xi=5,2)$, $\sigma(\xi|\eta=4,4)$, $\sigma(\eta|\xi=5,2)$;

г) $P(5,2\le\xi<15,2\cap 2,4<\eta\le 6,4)$.

5.Задано функцію розподілу двовимірної випадкової величини (ξ,η):

$$F(x,y)=\begin{cases}0, & x<0 \text{ або } y<0;\\ 1-3^{-x}-3^{-y}+3^{-x-y}, & x\ge 0 \text{ і } y\ge 0.\end{cases}$$

Знайти:

а) двовимірну щільністьрозподілу ймовірностей системи (ξ,η);

б) функції розподілів та щільності розподілів складових ξ та η;

в) числові характеристики її складових ξ та η;

г) $P(1<\xi<2\cap 3<\eta<5)$.

6.Задано $f(x,y)=\begin{cases}0, & (x,y)\notin Q;\\ a, & (x,y)\in Q,\end{cases}$

де $Q=\{(x;y):-6\le x\le 2;\ -3\le y\le 5\}$. Знайти:

а) параметр a;

б) функцію розподілу двовимірної випадкової величини (ξ,η);

в) функції щільності розподілів складових;

г) коефіцієнт кореляції r_{xy};

д) $P(-4<\xi<1\cap -2<\eta<4)$;

е) з'ясувати залежні чи незалежні випадкові величини ξ та η.

7. Неперервні випадкові величини ξ та η незалежні, їхні густини розподілу ймовірностей, відповідно, дорівнюють:

$$f_1(x)=\begin{cases}0, & |x|>2;\\ \frac{1}{4}, & |x|\le 2;\end{cases}\quad f_2(y)=\begin{cases}0, & y\le 0;\\ e^{-y}, & y>0.\end{cases}$$

Визначити види законів розподілу випадкових величин ξ та η. Записати щільність розподілу двовимірної випадкової величини (ξ,η) та обчислити числові характеристики її складових $E(\xi)$, $E(\eta)$, $D(\xi)$, $D(\eta)$, $\sigma(\xi)$, $\sigma(\eta)$, $r_{\xi\eta}$.

8**.** Двовимірну випадкову величину (ξ,η) задано щільністю розподілу ймовірностей:

$$f(x,y)=\begin{cases}a\cos\pi x\cdot\cos\pi y, & 0\le x\le 0,5,\quad 0\le y\le 0,5;\\ 0, & \text{у решті випадків}.\end{cases}$$

Знайти:

а) сталу a;

б) умовні щільності розподілів складових та їхні умовні математичні сподівання.

2.5. Анаморфоза розподілу

Нехай відомий розподіл випадкового вектора $\xi = (\xi_1, \xi_2, ...\xi_n)$ і координати випадкового вектора $\eta = (\eta_1, \eta_2, ...\eta_n)$ пов'язані з кооординатами вектора ξ за допомогою відомих співвідношень

$$\begin{cases} \eta_1 = \eta_1(\xi_1, ...\xi_n); \\ \quad ... \\ \eta_n = \eta_n(\xi_1, ...\xi_n). \end{cases} \quad (2.77)$$

Анаморфозою розподілу випадкового вектора ξ називають перетворення розподілу цього випадкового вектора в результаті перетворення його координат за співвідношеннями (2.77).

Приклад 1. Випадкова змінна ξ має функцію розподілу (кумуляту) $F_\xi(x) = e^{-e^{-x}}, x \in (-\infty; +\infty)$. Знайти кумуляту і щільність випадкової змінної $\eta = e^\xi$.

Розв'язання. Згідно з означенням функції розподілу $G_\eta(y) = P(\eta \le y)$. Враховуючи залежність η від ξ, отримаємо $G_\eta(y) = P(e^\xi \le y) = P(\xi \le \ln y); y \in (0; +\infty)$, а це згідно з означенням є кумулятою випадкової змінної ξ: $P(\xi \le \ln y) = F_\xi(\ln y) = e^{-e^{-\ln y}} = e^{-\frac{1}{y}}$. Отже, функція розподілу випадкової змінної η має вигляд $G_\eta(y) = e^{-\frac{1}{y}}, \quad y \in (0; +\infty)$. Для того, щоб відшукати щільність цієї випадкової змінної, скористаємось співвідношенням (2.19):

$$g(y) = G_\eta'(y) = \frac{1}{y^2} e^{-\frac{1}{y}}; y \in (0; +\infty).$$

Приклад 2. Випадкова змінна ξ має щільність $f(x) = \frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}}, 0 \le x \le +\infty$. Знайти щільність випадкової змінної $\eta = \ln \xi$.

Розв'язання. Знайдемо спочатку функцію розподілу випадкової змінної ξ, скориставшись (2.21):

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_0^x \frac{1}{2} e^{-\frac{t}{2}} dt = -\int_0^{-x/2} e^z dz = 1 - e^{-\frac{x}{2}}.$$

Кумулята випадкової змінної η

$$G_\eta(y) = P(\eta \le y) = P(\ln \xi \le y) = P(\xi \le e^y) = 1 - e^{-\frac{e^y}{2}}, -\infty \le y \le +\infty,$$

а щільність відповідно

$$g(y) = G_\eta'(y) = (1 - e^{-\frac{e^y}{2}})'_y = -e^{-\frac{e^y}{2}} \cdot (-\frac{1}{2} e^y) = \frac{1}{2} e^{y - \frac{e^y}{2}}; y \in (-\infty; +\infty)$$

Завдання для самостійної роботи

1. Випадкова змінна ξ має функцію розподілу $F_\xi(x) = 1 - e^{-2x}, x \in (0; +\infty)$. Знайти функцію розподілу і щільність випадкової змінної $\eta = \frac{1}{\xi}$.
2. Випадкова змінна ξ має функцію розподілу $F_\xi(x) = 1 - e^{-x}, x \in (0; +\infty)$. Знайти кумуляту і щільність випадкової змінної $\eta = e^{-\xi}$.
3. Випадкова змінна ξ має щільність $f(x) = e^{-x}, 0 \le x \le +\infty$. Знайти щільність випадкової змінної $\eta = \sqrt{\xi}$.

4. Випадкова змінна ξ має щільність $f(x) = 3e^{-3x}, 0 \le x \le +\infty$. Знайти щільність і функцію розподілу випадкової змінної $\eta = 3\xi$.

5. Випадкова змінна ξ має щільність $f(x), 0 \le x \le +\infty$. Знайти щільність випадкової змінної $\eta = \xi^3$.