Екзамен
з теорії алгоритмів
Козак Володимир
група ПМЛ-21

Білет 16.

1. Важкорозв'язні задачі. Поліноміальні алгоритми та важкорозв'язні задачі.

Задачу називають важкорозв'язною, якщо не існує поліноміальних алгоритмів для її розв'язування.

Визначимо клас P як множину всіх мов, які допускають ДМТ (детермінована машина Тюрінга) з поліноміальною часовою складністю.

Клас NP - це множина всіх мов, які допускають НМТ (недетермінована машина Тюрінга) з поліноміальною часовою складністю.

NP задачі. Задачі, для яких неможливо придумати алгоритми вирішення (розв'язок буде неоптимальним). Мова йде про неможливість вирішення всіх завдань даного класу одним і тим самим прийомом.
Проблеми доведення повноти задач присвячені дослідження багатьох вчених з теорії алгоритмів. Будь-які доведення NP-повноти складні, але процедуру доведення можна спростити, застосувавши поняття зведення. Для цього достатньо показати, що будь-яка з відомих NP-повних задач може бути зведена до цієї задачі.
Приклади:
1) Задача про кліку для неорієнтованих графів.
У графі G k-клікою називають

k-вузловий повний підграф графа G.
Задачу формулюють так: чи містить заданий граф G k-кліку (k – задане число)?
Мову L, яка описує задачу про кліку, утворюють такі ланцюжки вигляду $k(i_1, j_1)(i_2, j_2)(i_3, j_3)\ldots(i_m, j_m)$ що граф з ребрами (i_r, j_r), $1 \leq r \leq m$, містить k-кліку.
2) Задача про комівояжера.
В цій задачі задано скінченну множину міст і вартість подорожі між ними. Необхідно визначити порядок, у якому треба відвідати всі міста (рівно один раз) і повернутися у початкове місто, щоб загальна вартість подорожі була мінімальною.
3) Задача про розфарбування (чи існує розфарбування неорієнтованого графа в k кольорів?).

4) Задача про гамільтонів цикл (Чи існує в заданому неорієнтованому графі гамільтонів цикл?).

Сформулюємо головну властивість NP-повних задач: якщо деяка NP-повна задача розв'язна за поліноміальний час, то P = NP. Тобто, якщо в класі NP існує задача, не розв'язна за поліноміальний час, то всі NP-повні задачі такі ж. Отже, гіпотеза P ≠ NP означає, що NP-повні задачі не можуть бути розв'язані за поліноміальний час.

2. Основні властивості алгоритмів. Способи запису алгоритмів.

Властивості алгоритмів:

1) Дискретність. Алгоритм описує процес послідовної побудови величин, який відбувається в дискретному часі. У початковий момент t_0 задається сон-

чену систему 6_0 вхідних величин. Далі в кінцевий інтервал часу (t_i, t_{i+1}) із системи 6_i величин, які були в момент часу t_i, за певним правилом алгоритму отримують систему величин 6_{i+1}. Перехід від 6_i до 6_{i+1} називають елементарним кроком алгоритму. Інтервали (t_i, t_{i+1}) є різними для різних елементарних кроків.

2) Ефективність. Елементарні кроки, які необхідно зробити в алгоритмі, повинні бути ефективними, тобто виконуватись точно і за короткий відрізок часу. Це означає, що кроки алгоритму повинні містити лише операції з набору середовищ виконання. Тобто різні виконавці, згідно з алгоритмом, повинні діяти однаково і прийти до одного й того ж результату.

3) Скінченність. Алгоритм завжди повинен закінчуватися після скінченної кількості операцій (кроків).

4) Результативність. Алгоритм завжди забезпечує отримання певного результату розв'язання задачі, що є наслідком скінченної кількості елементарних кроків та їхньої ефективності. Якщо деякий елементарний крок не дає результату, то має бути зазначено, що саме треба вважати результатом алгоритму.

5) Масовість. Алгоритм повинен бути застосовним до цілого класу задач, а не до однієї задачі. Це означає, що початкову систему величин b_0 можна вибирати з деякої потенційно нескінченної множини.

Існують такі способи запису алгоритмів:

1) Словесний запис (псевдокоди);

2) Графічний запис (блок-схеми);

3) Запис мовою програмування (алгоритмічною мовою).

3. Показати елементарність функції $f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2)^3$.

Елементарною функцією називається така функція, яка утворюється з основних елементарних функцій за допомогою скінченного числа операцій додавання, віднімання, множення і ділення, а також операції суперпозиції.

$f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2)^3 = x_1^3 - 3x_1^2 x_2 + 3x_1 x_2^2 - x_2^3 \Rightarrow$

$\Rightarrow g(x_1) - h(x_1, x_2) + h(x_2, x_1) - g(x_2)$, де $g(x) = x^2$, $h(x, y) = 3x^2 y$

За означенням, композиція кількох елементарних функцій буде елементарною.

Доведемо, що $g(x) = x \cdot x \cdot x$ – елементарна.

Оскільки множення, це нічого інше як

додавання числа „$x \cdot x$" x разів (аналогічно для $x \cdot x$), тоді за означенням $g(x_1)$ та $g(x_2)$ – елементарні.
Аналогічно для $h(x, y)$
Звідси випливає, що $f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2)^3$ – елементарна.