1. Обчислювані функції. Найпростіші функції. №24

Числові функції, значення яких можна обчислити за допомогою деякого (єдиного для заданої функції) алгоритму, називають <u>обчислюваними функціями</u>.

Найпростіші функції:

Позначимо N - множину всіх натуральних чисел, а $N^{(n)} = \{ \langle x_1, \dots, x_n \rangle \mid x_i \in N \}$ - множину цих можливих n натуральних чисел.

Числову функцію $\varphi : N \to N$ називають <u>функцією наступності</u>, якщо $\varphi(x) = x + 1$.

Числову функцію $\varphi : N^{(n)} \to N$ називають <u>тотожньо рівною нулю</u> (нуль - функцією), якщо $\varphi(x_1, \dots, x_n) = 0$.

Числову функція $\varphi_i : N^{(n)} \to N$ називають <u>(функцією вибору аргумента)</u>, якщо вона повторює значення свого i - го аргумента: $\varphi_i(x_1, \dots, x_n) = x_i$ $(1 \le i \le n)$

Позначимо функцію наступності через $S^1(x)$, нуль-функцію — $O^n(x_1, \ldots, x_n)$ і функцію вибору аргумента — через $I_i^n(x_1, \ldots, x_n)$

Функції $S^1(x)$, $O^n(x_1, \ldots, x_n)$, $I_i^n(x_1, \ldots, x_n)$ називають найпростішими.

Найпростіші функції є всюди визначені. Найпростішими є такі функції:

$S^1(5) = 6$; $O^4(3, 6, 2, 7) = 0$.

$$I_2^3(4, 3, 8) = 3.$$

② Методи розробки ефективних алгоритмів. Метод „поділяй і володарюй".

<u>Метод часткових цілей</u> пов'язаний зі зведенням важкої задачі до послідовності простіших задач.

Цей метод, особливо якщо його застосувати рекурсивно, часто приводить до ефективного розв'язку задачі, підзадачі якої є її меншими версіями.

Як і більшість загальних методів розробки алгоритмів, метод часткових цілей не завжди легко перенести на конкретну задачу. Осмислений вибір простіших задач – швидше мистецтво чи справа інтуїції, ніж науки. Крім того, не існує загального набору правил для визначення класу задач, які можна розв'язати за допомогою такого підходу.

Метод підйому починається з

прийняття початкового припущення або обчислення початкового розв'язку задачі. Потім відбувається якнайшвидший рух „вгору" від початкового розв'язку в напрямі до ліпших розв'язків, коли алгоритм досягає такої точки, з якої більше неможливо рухатися вверх, алгоритм зупиняється.

Метод підйому є корисним, коли треба швидко отримати наближений розв'язок.

У цьому разі, немає жодних гарантій, що кінцевий розв'язок буде оптимальним. Це й обмежує застосування методу підйому.

Метод відрахування назад

починають з цілі чи розв'язку і рухаються назад за напрямом до початкового формулювання задачі. Далі, якщо ці дії оборотні, рухаються знову до формулювання задачі до розв'язку.
Цей метод широко застосовують під час розв'язування різноманітних головоломок.

Рекурсія. Процедуру, яка прямо чи опосередковано звертається до себе, називають рекурсивною. Застосування рекурсії часто дозволяє побудувати більш зрозумілі і стислі алгоритми, ніж це було б зроблено без неї.

Рекурсія сама по собі не приводить до більш ефективного алгоритму. Але в поєднанні з іншими методами, наприклад „поділяй і володарюй", дає алгоритми, одночасно ефективні і елегантні.

Метод „Поділяй і володарюй"

Алгоритми вигляду „поділяй і володарюй" (ПВ) мають рекурсивну структуру: для розв'язування задачі вони рекурсивно викликають самі себе один чи декілька разів, щоб розв'язати допоміжну задачу, яка безпосередньо стосується сформульованої".

Такі алгоритми часто розробляють за допомогою методу часткових цілей: складну задачу розбивають на декілька простіших, які подібні до вихідної задачі, але мають менший обсяг; далі ці задачі розв'язують рекурсивним методом, після чого отримані розв'язки комбінують, щоб отримати розв'язок вихідної задачі.

У методі „поділяй і володарюй" на кожному рівні рекурсії виділяють три етапи.

1. Поділ задачі на декілька підзадач.

2. Рекурсивне розв'язування цих підзадач. Коли обсяг підзадачі достатньо малий, виділені підзадачі розв'язують безпосередньо.

~~3. Ком~~

3. Комбінування розв'язку вихідної задачі з розв'язків допоміжних задач.

③ Довести, що функція $f(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$ є примітивно рекурсивною.

$$f(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$$

$$f(x_1, 0) = x_1 \cdot 0 = 0^1(x_1) = g(x_1)$$

$$f(x_1, x_2+1) = x_1 \cdot (x_2+1) = x_1 \cdot x_2 + x_1 = f(x_1, x_2) + x_1 = h(x_1, x_2, f(x_1, x_2))$$

$$h(x_1, x_2, f(x_1, x_2)) = h(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_3 = I_1^3(x_1, x_2, x_3) + I_3^3(x_1, x_2, x_3)$$

- Оскільки, як було доведено вище $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ примітивно рекурсивна, то і $f(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$ також примітивно рекурсивна.