Екзамен
з теорії алгоритмів
студента групи ПМі-21
Кінка Ореста-Теодора

Білет №15

1 Проблема розпізнавання самозастосовності алгоритмів.

+ Алгоритмічну систему Тьюрінга використовують для доведення нерозв'язності задач. Розглянемо одну з алгоритмічно нерозв'язних проблем.

+ Нехай система правил П алгоритму $A = \langle \varphi, П \rangle$ закодована певним способом у вхідному алфавіті алгоритму А. Позначимо цей код системи П через $П^{cod}$.
Алгоритм $A = \langle \varphi, П \rangle$ називається самозастосовним, якщо слово $П^{cod}$ входить в область визначення А, і несамозастосовним в іншому випадку.

②

* Сформулюємо проблему розпізнавання самозастосовності алгоритмів так:
Знайти алгоритм, здатний за кодом П довільного алгоритму визначити, чи є А самозастосовним.

* Теорема: Проблема розпізнавання самозастосовності алгоритму є алгоритмічно нерозв'язною.

Цю теорему доводять на підставі алгоритмічної системи Тьюрінга.

* Нерозв'язність цієї проблеми часто використовують для доведення нерозв'язності інших масових проблем.

2.1. Оператор мінімізації.

+ Нехай задана часткова функція $f^n: N^{(n)} \to N$. Припустимо, що існує деяка механічна процедура для обчислення функції f^n, причому значення f^n не визначене лише в тому випадку, коли ця процедура працює безкінечно довго і не видає ніякого результату. Зафіксуємо перші $n-1$ аргументів цієї функції і розглянемо рівняння $f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, y) = x_n$; щоб знайти розв'язок y рівняння будемо послідовно обчислювати значення $f(x_1, \dots x_{n-1}, y)$ при $y = 0, 1, 2, \dots$ і порівнювати результати з x_n.

Найменше значення $y = a$, для якого

(4)

використовуючи рівність $f(x_1, \dots, x_{n-1}, a) = x_n$

недетально так $\mu y(f(x_1, \dots, x_{n-1}, y) = x_n)$

Процес знаходження найменшого значення виразу, наведеного вище, не дасть результату у таких трьох випадках:

1) значення $f(x_1, \dots, x_{n-1}, 0)$ невизначене;

2) значення $f(x_1, \dots, x_{n-1}, y)$ для $y = 0, 1, 2, \dots, k$ визначені, але не дорівнюють x_n, а для $y = k+1$ функція f не визначена.

3) значення $f(x_1, \dots, x_{n-1}, y)$ визначені для всіх $y = 0, 1, 2, \dots$, але відмінні від x_n (тобто рівняння $f(x_1, \dots, x_{n-1}, a) = x_n$ натуральних розв'язків немає).

У цих трьох випадках значення $\mu y(f(x_1, \dots, x_{n-1}, y) = x_n)$ вважають невизначеним. У всіх інших випадках процес буде скінченним і дає найменший розв'язок $y = a$ рівняння $f(x_1, \ldots, x_{n-1}, a) = x_n$, який є значенням виразу $\mu y(f(x_1, \ldots, x_{n-1}, y) = x_n)$

* Якщо функція є частковою, то вираз $\mu y(f(x_1, \ldots, x_{n-1}, y) = x_n)$ строго кажучи, не є найменшим розв'язком рівняння.

  Якщо ж функція $f(x_1, \ldots, x_{n-1}, y)$ всюди визначена і рівняння має розв'язок, то $\mu y(f(x_1, \ldots, x_{n-1}, y) = x_n)$ є найменшим розв'язком цього рівняння.

* Оператор, за допомогою якого з функції $f(x_1, \ldots, x_n)$ утворюється функція $\mu y(f(x_1, \ldots, x_{n-1}, y) = x_n)$ називають оператором мінімізації (або найменшого кореня).

6

Оператор мінімізації позначають M, як $\mu_y(f(x_1, \ldots, x_{n-1}, y) = x_n) = Mf$. У загальному випадку функція Mf є частковою.

2.2. Частково-рекурсивні функції.

* Часткову функцію f називають частково-рекурсивною відносно σ, якщо її можна отримати з функцій системи σ і найпростіших функцій з застосуванням скінченної кількості операторів суперпозиції, примітивної рекурсії та мінімізації.

$$\{s^1, 0^n, I_m^n, \sigma\} \xrightarrow{S^{n+1}, R, M} f$$

* Часткову функцію f називають частково-рекурсивною, якщо її можна отримати з найпростіших функцій з застосуванням скінченної кількості операторів суперпозиції, примітивної рекурсії та мінімізації:

$$\{s^1, 0^n, I_m^n\} \xrightarrow{S^{n+1}, R, M} f$$

+ Клас частково-рекурсивних функцій ($К_{ч.р.}$) — це найзагальніший клас конструктивно визначених арифметичних функцій.

+ В термінах імперативного програмування примітивно-рекурсивні функції відповідають програмним блокам, в яких використовуються тільки арифметичні операції, а також умовний оператор і арифметичний оператор циклу.

+ Поняття частково-рекурсивної функції — одне з головних понять теорії алгоритмів. Значення його полягає в тому, що:
1) Кожну задану частково-рекурсивну функцію можна обчислити за допо-

могого певної процедури механічного характеру (алгоритму).

2) Які б класи точно визначених алгоритмів не будували, у всіх випадках неодмінно виявляли, що числові функції, обчислювані за алгоритмами, у цих класів є частково-рекурсивними.

* Зокрема ці факти відображені в гіпотезі (тезі) Черча.

3. На машині Тюрінга скласти програму інверсії двійкового числа (замінити всі 0 на 1 і всі 1 на 0)

* Щоб побудувати відповідний алгоритм розглянемо таку функціональну схему:

	0	1	λ
q_0	$1q_1R$	$0q_1R$	R
q_1	$1R$	$0R$	$q_F H$

У поданій функціональній схемі алфавітом зовнішніх символів буде $A = \{0, 1, \lambda\}$, алфавітом внутрішніх станів $S = \{q_0, q_1, q_F\}$ (де q_0 – початковий стан; q_F – заключний), а також подано напрямки зміщення зчитувального пристрою (R – вправо; H – на місці).

Згідно з умовою, ця машина Тьюрінга описує ситуацію, коли у початковій конфігурації зчитувальний пристрій:

1) або попадає на значення "0". Тоді ми змінюємо значення нуля на одиницю та переходимо вправо зі станом q_1.

2) або попадає на значення "1". Тоді ми змінюємо значення одиниці на нуль та переходимо вправо зі станом q_1.

3) або зчитувальний пристрій попадає на порожній символ λ, тоді просто зміщуємось вправо, поки не натрапимо на 1 чи 0.

* Коли МТ перейшла у внутрішній стан q_1, вона, залежно від зчитувального символу, змінює його значення на інверсне двійкове число і переходить до наступного символу вправо, не змінюючи при цьому стан.

* Коли відповідний рядок символів, які ми розглядаємо, закінчується, пристрій зчитування помічає не порожній символ. У такому випадку ми не [illegible] переходимо у заключний стан q_F, що свідчить про завершення роботи даної машини Тьюрінга.

Приклад:

$$\underset{q_0}{0010010} \Rightarrow \underset{q_1}{1010010} \Rightarrow \underset{q_1}{1110010} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underset{q_1}{1100010} \Rightarrow \underset{q_1}{1101010} \Rightarrow \underset{q_1}{1101110} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underset{q_1}{1101100} \Rightarrow 1101101\underset{q_1}{\_} \Rightarrow 1101101$$