Практичне завдання №6

ЦИКЛІЧНІ КОДИ

Кравець Ольга ПМО-21

Варіант 9

6.1. Закодувати циклічними кодами для заданих параметрів d_{min} двійкову послідовність m довжиною k інформаційних елементів. Твірний поліном визначити з табл. 6.3. Визначити надлишковість коду та показати процес виправлення однократної помилки (для коду з d_{min} = 3) зазначеним способом або виявлення будь якої трикратної помилки (для коду з d_{min} = 4) у прийнятих двійкових послідовностях b.

m: d_{min}=3	m: d_{min}=4	b: d_{min}=3 (g) (I)	b: d_{min}=3 (g) (II)	b: d_{min}=4 (g)	b: d_{min}=4 (g)
1001110	01110101011	1001101011111 (23)	000110110000000 (23)	11001101111100010 (53)	01000011110100 (65)

а) закодовування циклічними кодами для $\mathbf{d_{min}=3}$ двійкової послідовності **X=1001110**

$$\boldsymbol{k=7} \rightarrow 2^r \geq k+r+1 \rightarrow 2^r \geq r+8 \rightarrow \boldsymbol{r=4} \rightarrow \boldsymbol{n} = k+r = \mathbf{11}$$

$\rho = 1 - \frac{7}{11} = \frac{4}{11}$ (~0.36)

Поліном інформаційної послідовності та похідний від нього:

$\mathbf{m(x)} = 1 + 0\cdot x + 0\cdot x^2 + 1\cdot x^3 + 1\cdot x^4 + 1\cdot x^5 + 0\cdot x^6 = \mathbf{1 + x^3 + x^4 + x^5}$

$\mathbf{x^r m(x)} = x^4\cdot m(x) = x^4(1 + x^3 + x^4 + x^5) = \mathbf{x^9 + x^8 + x^7 + x^4}$

Твірні поліноми:

$\boldsymbol{g_1(x) = 1 + x + x^4;}$ $\boldsymbol{g_2(x) = 1 + x^3 + x^4}$

$\mathbf{x^4\cdot m(x) / g_1(x)} = x^9 + x^8 + x^7 + x^4 / 1 + x + x^4 = \mathbf{x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1}$

$$
\begin{array}{l|l}
x^9 + x^8 + x^7 + x^4 & x^4 + x + 1 \\ \cline{2-2}
\underline{x^9 + x^6 + x^5} & x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1 \\
x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 & \\
\underline{x^8 + x^5 + x^4} & \\
x^7 + x^6 & \\
\underline{x^7 + x^4 + x^3} & \\
x^6 + x^4 + x^3 & \\
\underline{x^6 + x^3 + x^2} & \\
x^4 + x^2 & \\
\underline{x^4 + x + 1} & \\
x^2 + x + 1 = \rho_1(x) \rightarrow \rho_1 = (1110) &
\end{array}
$$

Code(X)$_1$ = <u>1110</u>1001110

$\mathbf{x^4 \cdot m(x) / g_2(x)} = x^9 + x^8 + x^7 + x^4 / 1 + x^3 + x^4 = \mathbf{x^5 + x^3 + x^2 + 1}$

$$
\begin{array}{l|l}
x^9 + x^8 + x^7 + x^4 & x^4 + x^3 + 1 \\
\cline{2-2}
x^9 + x^8 + x^5 & x^5 + x^3 + x^2 + 1 \\
\hline
x^7 + x^5 + x^4 & \\
x^7 + x^6 + x^3 & \\
\cline{1-1}
x^6 + x^5 + x^4 + x^3 & \\
x^6 + x^5 + x^2 & \\
\cline{1-1}
x^4 + x^3 + x^2 & \\
x^4 + x^3 + 1 & \\
\cline{1-1}
x^2 + 1 = \rho_1(x) \rightarrow \rho_1 = (1010) &
\end{array}
$$

Code(X)$_2$ = $\underline{1010}$1001110

б) закодовування циклічними кодами для $\mathbf{d_{min} = 4}$ послідовності **X=01110101011**

$\mathbf{d_{min} = 3}$: $\boldsymbol{k} = \mathbf{11} \rightarrow 2^r \geq k + r + 1 \rightarrow 2^r \geq r + 11 \rightarrow \boldsymbol{r} = \mathbf{4} \rightarrow \boldsymbol{n} = k + r = \mathbf{15}$

$\mathbf{d_{min} = 4}$: $\boldsymbol{r} = \mathbf{5} \rightarrow \ \boldsymbol{n} = \mathbf{16}$

$\rho = 1 - \frac{11}{16} = \frac{5}{16}$ (~0.3125)

Поліном інформаційної послідовності та похідний від нього:

$\mathbf{m(x)} = x + x^2 + x^3 + x^5 + x^7 + x^9 + x^{10}$

$\mathbf{x^r m(x)} = x^5 \cdot m(x) = x^5 (x + x^2 + x^3 + x^5 + x^7 + x^9 + x^{10}) = \mathbf{x^{15} + x^{14} + x^{12} + x^{10} + x^8 + x^7 + x^6}$

Твірні поліноми:

$\boldsymbol{g_1(x) = (x+1)\,(1 + x + x^4) = x^5 + x^4 + x^2 + 1}$

$\boldsymbol{g_2(x) = (x+1)\,(1 + x^3 + x^4) = x^5 + x^3 + x + 1}$

$\mathbf{x^5 \cdot m(x) / g_1(x)} = x^{15} + x^{14} + x^{12} + x^{10} + x^8 + x^7 + x^6 / x^5 + x^4 + x^2 + 1 = \mathbf{x^{10} + x^3 + x}$

$$
\begin{array}{l|l}
x^{15} + x^{14} + x^{12} + x^{10} + x^8 + x^7 + x^6 & x^5 + x^4 + x^2 + 1 \\
\cline{2-2}
x^{15} + x^{14} + x^{12} + x^{10} & x^{10} + x^3 + x \\
\hline
x^8 + x^7 + x^6 & \\
x^8 + x^7 + x^5 + x^3 & \\
\cline{1-1}
x^6 + x^5 + x^3 & \\
x^6 + x^5 + x^3 + x & \\
\cline{1-1}
\mathbf{x} = \rho_1(x) \rightarrow \rho_1 = (01000) &
\end{array}
$$

Code(X)$_1$ = $\underline{01000}$01110101011

$x^5 \cdot m(x)$ / $g_2(x)$ = $x^{15} + x^{14} + x^{12} + x^{10} + x^8 + x^7 + x^6 / x^5 + x^3 + x + 1 =$
$x^{10} + x^9 + x^8 + x^5 + x^3 + x^2 + x$

$$
\begin{array}{l|l}
x^{15} + x^{14} + x^{12} + x^{10} + x^8 + x^7 + x^6 & x^5 + x^3 + x + 1 \\
\cline{2-2}
x^{15} + x^{13} + x^{11} + x^{10} & x^{10} + x^9 + x^8 + x^5 + x^3 + x^2 + x \\
\cline{1-1}
x^{14} + x^{13} + x^{12} + x^{11} + x^8 + x^7 + x^6 & \\
x^{14} + x^{12} + x^{10} + x^9 & \\
\cline{1-1}
x^{13} + x^{11} + x^{10} + x^9 + x^8 + x^7 + x^6 & \\
x^{13} + x^{11} + x^9 + x^8 & \\
\cline{1-1}
x^{10} + x^7 + x^6 & \\
x^{10} + x^8 + x^6 + x^5 & \\
\cline{1-1}
x^8 + x^7 + x^5 & \\
x^8 + x^6 + x^4 + x^3 & \\
\cline{1-1}
x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 & \\
x^7 + x^5 + x^3 + x^2 & \\
\cline{1-1}
x^6 + x^4 + x^2 & \\
x^6 + x^4 + x^2 + x & \\
\cline{1-1}
x = \rho 1(x) \rightarrow \rho 1 = (01000) &
\end{array}
$$

Code(X)$_2$ = <u>01000</u>01110101011

в) процес виправлення однократної помилки для коду з **d_{min}**=3,
Y = 1001101011111, **g(x) = (23)** методом гіпотез

$g(x) = (23) = 10011 = 1 + x^3 + x^4 \longrightarrow r = 4$

b(x) = $x^{12} + x^{11} + x^{10} + x^9 + x^8 + x^6 + x^4 + x^3 + 1$

$$
\begin{array}{l|l}
x^{12} + x^{11} + x^{10} + x^9 + x^8 + x^6 + x^4 + x^3 + 1 & x^4 + x^3 + 1 \\
\cline{2-2}
x^{12} + x^{11} + x^8 & x^8 + x^6 + 1 \\
\cline{1-1}
x^{10} + x^9 + x^6 + x^4 + x^3 + 1 & \\
x^{10} + x^9 + x^6 & \\
\cline{1-1}
x^4 + x^3 + 1 & \\
x^4 + x^3 + 1 & \\
\cline{1-1}
0 \rightarrow \text{помилки нема} &
\end{array}
$$

Остача 0 – помилки немає.

г) процес виправлення однократної помилки для коду з **d_{min}=3**,
Y = 000110110000000, **g(x) = (23)** методом зсувів

$g(x) = (23) = 10011 = x^4 + x^3 + 1 \longrightarrow r = 4;$ $n = 15;$ $k = 11$

$2^r = n + 1 = 16 \rightarrow$ код повний

b(x) $= x^7 + x^6 + x^4 + x^3$

$$
\begin{array}{l|l}
x^7 + x^6 + x^4 + x^3 & x^4 + x^3 + 1 \\
\underline{x^7 + x^6 + x^3} & \overline{x^3 + 1} \\
x^4 & \\
\underline{x^4 + x^3 + 1} & \\
x^3 + 1 = \rho(x) \rightarrow \rho = (1001);\ w(\rho) = 2 &
\end{array}
$$

$b(x) / g(x) = x^3 + 1$ (остача $x^3 + 1$)

Отже є помилка.

$b_{мод} = 000110110000000$

Циклічно зсуваємо $b_{мод}$ на один біт вправо, тобто $b_{мод,1} = (000011011000000)$

$\mathbf{b_{мод,1}(x)} = x^8 + x^7 + x^5 + x^4$

$b_{мод,1}(x) / g(x) = x^3 + x + 1$ (остача $x^4 + x + 1$)

$$
\begin{array}{l|l}
x^8 + x^7 + x^5 + x^4 & x^4 + x^3 + 1 \\
\underline{x^8 + x^7 + x^4} & \overline{x^4 + x + 1} \\
x^5 & \\
\underline{x^5 + x^4 + x} & \\
x^4 + x & \\
\underline{x^4 + x^3 + 1} & \\
x^3 + x + 1 = \rho(x) \rightarrow \rho = (1101);\ w(\rho) = 3 &
\end{array}
$$

Циклічно зсуваємо $b_{мод,1}$ на один біт вправо, тобто $b_{мод,2} = (000001101100000)$

$\mathbf{b_{мод,2}(x)} = x^9 + x^8 + x^6 + x^5$

$b_{мод,2}(x) / g(x) = x^5 + x^2 + x + 1$ (остача $x^3 + x^2 + x + 1$)

$$
\begin{array}{l|l}
x^9 + x^8 + x^6 + x^5 & x^4 + x^3 + 1 \\
\underline{x^9 + x^8 + x^5} & \overline{x^5 + x^2 + x + 1} \\
x^6 & \\
\underline{x^6 + x^5 + x^2} & \\
x^5 + x^2 & \\
\underline{x^5 + x^4 + x} & \\
x^4 + x^2 + x & \\
\underline{x^4 + x^3 + 1} & \\
x^3 + x^2 + x + 1 = \rho(x) \rightarrow \rho = (1111);\ w(\rho) = 4 &
\end{array}
$$

Циклічно зсуваємо $b_{мод,2}$ на один біт вправо, тобто $b_{мод,3} = (000000110110000)$

b$_{мод,3}$**(x)** = $x^{10} + x^9 + x^7 + x^6$

b$_{мод,3}$(x) / g(x) = $x^6 + x^3 + x^2 + x + 1$ (остача $x^2 + x + 1$)

$$
\begin{array}{l|l}
x^{10} + x^9 + x^7 + x^6 & x^4 + x^3 + 1 \\ \cline{2-2}
x^{10} + x^9 + x^6 & x^6 + x^3 + x^2 + x + 1 \\ \cline{1-1}
x^7 & \\
x^7 + x^6 + x^3 & \\ \cline{1-1}
x^6 + x^3 & \\
x^6 + x^5 + x^2 & \\ \cline{1-1}
x^5 + x^3 + x^2 & \\
x^5 + x^4 + x & \\ \cline{1-1}
x^4 + x^3 + x^2 + x & \\
x^4 + x^3 + 1 & \\ \cline{1-1}
x^2 + x + 1 = \rho(x) \rightarrow \rho = (1110);\ w(\rho) = 3 &
\end{array}
$$

Циклічно зсуваємо b$_{мод,3}$ на один біт вправо, тобто b$_{мод,4}$ = (000000011011000)

b$_{мод,4}$**(x)** = $x^{11} + x^{10} + x^8 + x^7$

b$_{мод,4}$(x) / g(x) = $x^7 + x^4 + x^3 + x^2 + x$ (остача $x^3 + x^2 + x$)

$\rho(x^3 + x^2 + x) \rightarrow \rho = (0111);\ w(\rho) = 3$

Циклічно зсуваємо b$_{мод,4}$ на один біт вправо, тобто b$_{мод,5}$ = (000000001101100)

b$_{мод,5}$**(x)** = $x^{12} + x^{11} + x^9 + x^8$

b$_{мод,5}$(x) / g(x) = $x^8 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1$ (остача $x^2 + 1$)

$\rho(x^2 + 1) \rightarrow \rho = (1010);\ w(\rho) = 2$

Циклічно зсуваємо b$_{мод,5}$ на один біт вправо, тобто b$_{мод,6}$ = (000000000110110)

b$_{мод,6}$**(x)** = $x^{13} + x^{12} + x^{10} + x^9$

b$_{мод,6}$(x) / g(x) = $x^9 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x$ (остача $x^3 + x$)

$\rho(x^3 + x) \rightarrow \rho = (0101);\ w(\rho) = 2$

Циклічно зсуваємо b$_{мод,6}$ на один біт вправо, тобто b$_{мод,7}$ = (000000000011011)

b$_{мод,7}$**(x)** = $x^{14} + x^{13} + x^{11} + x^{10}$

b$_{мод,7}$(x) / g(x) = $x^{10} + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^2 + 1$ (остача $x^3 + x^2 + 1$)

$\rho(x^3 + x^2 + 1) \rightarrow \rho = (1011);\ w(\rho) = 3$

Циклічно зсуваємо b$_{мод,7}$ на один біт вправо, тобто b$_{мод,8}$ = (100000000001101)

b$_{мод,8}$**(x)** = $x^{14} + x^{12} + x^{11} + 1$

b$_{мод,8}$(x) / g(x) = $x^{10} + x^9 + x^7 + x^5 + x^4 + x$ (остача $x + 1$)

$\rho(x + 1) \rightarrow \rho = (1100);\ w(\rho) = 2$

Циклічно зсуваємо $b_{\text{мод},8}$ на один біт вправо, тобто $b_{\text{мод},9}$ = (110000000000110)

$\mathbf{b_{\text{мод},9}(x)} = x^{13} + x^{12} + x + 1$

$b_{\text{мод},9}(x) / g(x) = x^9 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1$ (остача $x^2 + x$)

$\rho(x^2 + x) \rightarrow \rho = (0110);\ w(\rho) = 2$

Циклічно зсуваємо $b_{\text{мод},9}$ на один біт вправо, тобто $b_{\text{мод},10}$ = (011000000000011)

$\mathbf{b_{\text{мод},10}(x)} = x^{14} + x^{13} + x^2 + x$

$b_{\text{мод},10}(x) / g(x) = x^{10} + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x$ (остача $x^3 + x^2$)

$\rho(x^3 + x^2) \rightarrow \rho = (0011);\ w(\rho) = 2$

Циклічно зсуваємо $b_{\text{мод},10}$ на один біт вправо, тобто $b_{\text{мод},11}$ = (101100000000001)

$\mathbf{b_{\text{мод},11}(x)} = x^{14} + x^3 + x^2 + 1$

$b_{\text{мод},11}(x) / g(x) = x^{10} + x^9 + x^8 + x^7 + x^5 + x^3 + x^2$ (остача 1)

$\rho(1) \rightarrow \rho = (1000);\ w(\rho) = 1$

$Y + \rho = x^{14} + x^3 + x^2 + 1 + 1$ = (001100000000001)

Виправлена кодова комбінація: b=(000100110000000).

д) виявлення будь якої трикратної помилки для коду з $\mathbf{d_{min}}$**=4**,
Y = 1100110111100010, **g(x) = (53)**

$\mathbf{g(x)} = (53) = (101011) = x^5 + x^4 + x^2 + 1$

$\mathbf{b(x)} = x^{14} + x^{10} + x^9 + x^8 + x^7 + x^5 + x^4 + x + 1$

$$
\begin{array}{l|l}
x^{14} + x^{10} + x^9 + x^8 + x^7 + x^5 + x^4 + x + 1 & x^5 + x^4 + x^2 + 1 \\
\cline{2-2}
x^{14} + x^{13} + x^{11} + x^9 & x^9 + x^8 + x^7 + x^4 + x^3 + x^2 \\
\hline
x^{13} + x^{11} + x^{10} + x^8 + x^7 + x^5 + x^4 + x + 1 & \\
x^{13} + x^{12} + x^{10} + x^8 & \\
\hline
x^{12} + x^{11} + x^7 + x^5 + x^4 + x + 1 & \\
x^{12} + x^{11} + x^9 + x^7 & \\
\hline
x^9 + x^5 + x^4 + x + 1 & \\
x^9 + x^8 + x^6 + x^4 & \\
\hline
x^8 + x^6 + x^5 + x + 1 & \\
x^8 + x^7 + x^5 + x^3 & \\
\hline
x^7 + x^6 + x^3 + x + 1 & \\
x^7 + x^6 + x^4 + x^2 & \\
\hline
x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = \rho(x) \neq 0 \rightarrow \text{є помилки} &
\end{array}
$$

Остача не дорівнює нулю, отже в коді є помилки.

е) виявлення будь якої трикратної помилки для коду з $\mathbf{d_{min}=4}$,
Y = 01000011110100, **g(x) = (65)**

g(x) = (65) = (110101) = $x^5 + x^3 + x + 1$

b(x) = $x^{11} + x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x$

$$
\begin{array}{l|l}
x^{11} + x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x & x^5 + x^3 + x + 1 \\
\cline{2-2}
x^{11} + x^9 + x^7 + x^6 & x^6 + x^3 + x \\
\cline{1-1}
x^8 + x & \\
x^8 + x^6 + x^4 + x^3 & \\
\cline{1-1}
x^6 + x^4 + x^3 + x & \\
x^6 + x^4 + x^2 + x & \\
\cline{1-1}
x^3 + x^2 = \rho(x) \neq 0 \rightarrow \text{є помилки} &
\end{array}
$$

Остача не дорівнює нулю, отже в коді є помилки.

6.2. Згідно з варіантом за довжиною коду та твірним поліномом, поданим у вигляді вісімкового числа, побудувати твірну та перевірну матриці циклічного коду здатного виправляти однократні помилки (d_{min}= 3)

Твірна матриця: n	Твірна матриця: g	Перевірна матриця: n	Перевірна матриця: g
20	75	18	51

а) твірна матриця: n = 20, g(x) = (75)

g(x) = (75) = (111101) = $x^5 + x^3 + x^2 + x + 1 \rightarrow$ r = 5, k = n - r = 20 - 5 = 15

$m_1(x) = 1$, $m_2(x) = x$, $m_3(x) = x^2$, $m_4(x) = x^3$, $m_5(x) = x^4$, $m_6(x) = x^5$, $m_7(x) = x^6$, $m_8(x) = x^7$, $m_9(x) = x^8$, $m_{10}(x) = x^9$, $m_{11}(x) = x^{10}$, $m_{12}(x) = x^{11}$, $m_{13}(x) = x^{12}$, $m_{14}(x) = x^{13}$, $m_{15}(x) = x^{14}$

$$\frac{x^5 * 1}{x^5 + x^3 + x^2 + x + 1} = \frac{x^5}{x^5 + x^3 + x^2 + x + 1} \rightarrow \rho_1(x) = x^3 + x^2 + x + 1$$
$$\rightarrow \quad \rho_1 = (11110)$$

$$\frac{x^6}{x^5 + x^3 + x^2 + x + 1} \rightarrow \rho_2(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x \rightarrow \rho_2 = (01111)$$

$$\frac{x^7}{x^5 + x^3 + x^2 + x + 1} \rightarrow \rho_3(x) = x^4 + x + 1 \rightarrow \rho_3 = (11001)$$

$$\frac{x^8}{x^5 + x^3 + x^2 + x + 1} \rightarrow \rho_4(x) = x^3 + 1 \rightarrow \rho_4 = (10010)$$

$$\frac{x^9}{x^5 + x^3 + x^2 + x + 1} \rightarrow \rho_5(x) = x^4 + x \rightarrow \rho_5 = (01001)$$

$$\frac{x^{10}}{x^5+x^3+x^2+x+1} \to \rho_6(x) = x^3+x+1 \to \rho_6 = (11010)$$

$$\frac{x^{11}}{x^5+x^3+x^2+x+1} \to \rho_7(x) = x^4+x^2+x \to \rho_7 = (01101)$$

$$\frac{x^{12}}{x^5+x^3+x^2+x+1} \to \rho_8(x) = x+1 \to \rho_8 = (11000)$$

$$\frac{x^{13}}{x^5+x^3+x^2+x+1} \to \rho_9(x) = x^2+x \to \rho_9 = (01100)$$

$$\frac{x^{14}}{x^5+x^3+x^2+x+1} \to \rho_{10}(x) = x^3+x^2 \to \rho_{10} = (00110)$$

$$\frac{x^{15}}{x^5+x^3+x^2+x+1} \to \rho_{11}(x) = x^4+x^3 \to \rho_{11} = (00011)$$

$$\frac{x^{16}}{x^5+x^3+x^2+x+1} \to \rho_{12}(x) = x^4+x^3+x^2+x+1 \to \rho_{12} = (11111)$$

$$\frac{x^{17}}{x^5+x^3+x^2+x+1} \to \rho_{13}(x) = x^4+1 \to \rho_{13} = (10001)$$

$$\frac{x^{18}}{x^5+x^3+x^2+x+1} \to \rho_{14}(x) = x^3+x^2+1 \to \rho_{14} = (10110)$$

$$\frac{x^{19}}{x^5+x^3+x^2+x+1} \to \rho_{15}(x) = x^4+x^3+x \to \rho_{15} = (01011)$$

$$G_{15x20} = \left| \begin{array}{ll}
11110 & 100000000000000 \\
01111 & 010000000000000 \\
11001 & 001000000000000 \\
10010 & 000100000000000 \\
01001 & 000010000000000 \\
11010 & 000001000000000 \\
01101 & 000000100000000 \\
11000 & 000000010000000 \\
01100 & 000000001000000 \\
00110 & 000000000100000 \\
00011 & 000000000010000 \\
11111 & 000000000001000 \\
10001 & 000000000000100 \\
10110 & 000000000000010 \\
01011 & 000000000000001
\end{array} \right|$$

б) перевірна матриця: $n = 18$, $g(x) = (51)$

g(x) $= (51) = (101001) = x^5 + x^2 + 1 \longrightarrow$ $r = 5,$ $k = n - r = 18 - 5 = 13$

$$\frac{x^5 * 1}{x^5 + x^2 + 1} = \frac{x^5}{x^5 + x^2 + 1} \to \rho_1(x) = x^2 + 1 \to \rho_1 = (10100)$$

$$\frac{x^6}{x^5 + x^2 + 1} \to \rho_2(x) = x^3 + x \to \rho_2 = (01010)$$

$$\frac{x^7}{x^5 + x^2 + 1} \to \rho_3(x) = x^4 + x^2 \to \rho_3 = (00101)$$

$$\frac{x^8}{x^5 + x^2 + 1} \to \rho_4(x) = x^3 + x^2 + 1 \to \rho_4 = (10110)$$

$$\frac{x^9}{x^5 + x^2 + 1} \to \rho_5(x) = x^4 + x^3 + x \to \rho_5 = (01011)$$

$$\frac{x^{10}}{x^5 + x^2 + 1} \to \rho_6(x) = x^4 + 1 \to \rho_6 = (10001)$$

$$\frac{x^{11}}{x^5 + x^2 + 1} \to \rho_7(x) = x^2 + x + 1 \to \rho_7 = (11100)$$

$$\frac{x^{12}}{x^5 + x^2 + 1} \to \rho_8(x) = x^3 + x^2 + x \to \rho_8 = (01110)$$

$$\frac{x^{13}}{x^5 + x^2 + 1} \to \rho_9(x) = x^4 + x^3 + x^2 \to \rho_9 = (00111)$$

$$\frac{x^{14}}{x^5 + x^2 + 1} \to \rho_{10}(x) = x^4 + x^3 + x^2 + 1 \to \rho_{10} = (10111)$$

$$\frac{x^{15}}{x^5 + x^2 + 1} \to \rho_{11}(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \to \rho_{11} = (11111)$$

$$\frac{x^{16}}{x^5 + x^2 + 1} \to \rho_{12}(x) = x^4 + x^3 + x + 1 \to \rho_{12} = (11011)$$

$$\frac{x^{17}}{x^5 + x^2 + 1} \to \rho_{13}(x) = x^4 + x + 1 \to \rho_{13} = (11001)$$

$$H_{5x18} = \begin{vmatrix} 10000\,1001011001111 \\ 01000\,0100101100111 \\ 00100\,1011001111100 \\ 00010\,0101100111110 \\ 00001\,0010110011111 \end{vmatrix}$$