

Практичне завдання 5

5.1, 5.2, 5.3, 5.4, 5.5

5.1.

Закодувати двійкову послідовність $x = 10101010100$ кодами, що виявляють помилки (ПрН, ПрП, ПП, ІК). Виявити, у якому з отриманих повідомлень, закодованих першим та другим кодом є помилка.

Прийняті повідомлення:

ПрН, ПрП: $y_1 = 110110010100111$, $y_2 = 011001001101011$

ПП: $y_1 = 1010001110100111$, $y_2 = 0101100101011001$

ІК: $y_1 = 1010001110100011$, $y_2 = 101011001010111110$

$x = 10101010100$

$y_1 = 110110010100111, y_2 = 011001001101011$

ПрН (код з перевіркою на непарність)

$\text{Code}(x) = 10101010100\underline{0}$

$y_1 = 11011001010011\underline{1}; w(11011001010011) = 8; \text{ помилки немає}$

$y_2 = 01100100110101\underline{1}; w(01100100110101) = 7; \text{ є помилка}$

$x = 10101010100$

$y_1 = 110110010100111, y_2 = 011001001101011$

ПрП (код з перевіркою на парність)

$\text{Code}(x) = 10101010100\underline{1}$

$y_1 = 11011001010011\underline{1}; w(11011001010011) = 8; \text{ є помилка}$

$y_2 = 01100100110101\underline{1}; w(01100100110101) = 7; \text{ помилки немає}$

$x = 10101010100$

$y_1 = 1010001110100111, y_2 = 0101100101011001$

ПП (код з простим повторенням)

$\text{Code}(x) = 1010101010010101010100$

$y_1 = 1010001110100111; \quad 10100\textcolor{red}{0}11 \neq 10100\textcolor{red}{1}11; \quad \text{є помилка}$

$y_2 = 0101100101011001; \quad 01011001 = 01011001; \quad \text{помилки немає}$

$x = 10101010100$

$y1 = 1010001110100011, y2 = 101011001010111110$

ІК (інверсний код)

$\text{Code}(x) = 1010101010001010101011$

$y1 = 1010001110100011; \quad 10100011 = 10100011; \quad \text{помилки немає}$

$y2 = 10101100101011110; \quad \text{inv}(101011001) = 010100110; \quad \text{є помилка}$

5.2.

Закодувати двійкову послідовність $x = 1101000000000011$ ітеративним кодом, здатним виявляти та виправляти однократні помилки, та визначити надлишковість коду.

Показати процес виявлення та виправлення однократної помилки у прийнятій двійковій послідовності $y = 1101000000000000011001100$.

$x = 1101000000000011$

$k = 16 \rightarrow 4 \times 4$

1	1	0	1		1
0	0	0	0		0
0	0	0	0		0
0	0	1	1		0

1	1	1	0		1

$\text{Code}(x) = 110110000000000011011101$

$p = 1 - 16/25 = 0.36$

Y = 1101000000000000011001100

k = 25 -> 4x4

1	1	0	1		0
0	0	0	0		0
0	0	0	0		0
0	0	1	1		0

0	1	1	0		0

x = 01010000000000011

5.3

Визначити, які з двійкових послідовностей ($y_1 = 100100000$; $y_2 = 010011111$; $y_3 = 10001101$) лінійного блокового (5,9)-коду містять помилку та виправити її, якщо відомо, що код побудований за твірною матрицею

$$G_{5,9} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$G_{5,9} = \left(\begin{array}{ccccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$k = 5; \quad n = 9; \quad r = n - k = 4$$

$$Y = \text{Code}(X) = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, y_1, y_2, y_3, y_4) = X \cdot G$$

$$\begin{cases} y_1 = x_4 + x_5 \\ y_2 = x_2 + x_3 \\ y_3 = x_1 + x_3 + x_5 \\ y_4 = x_1 + x_2 + x_4 \end{cases}$$

$$Y1 = 100100000$$

$$\begin{cases} y1 = x4 + x5 \\ y2 = x2 + x3 \\ y3 = x1 + x3 + x5 \\ y4 = x1 + x2 + x4 \end{cases}$$

$$0 \neq 1 \oplus 0$$

$$0 = 0 \oplus 0$$

$$0 \neq 1 \oplus 0 \oplus 0$$

$$0 = 1 \oplus 0 \oplus 1$$

Помилка в x5: X = 10011

$$Y_2 = 01001\textcolor{blue}{1111}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1 = x_4 + x_5 \\ y_2 = x_2 + x_3 \\ y_3 = x_1 + x_3 + x_5 \\ y_4 = x_1 + x_2 + x_4 \end{array} \right.$$

$$\textcolor{blue}{1} = 0 \oplus 1$$

$$\textcolor{blue}{1} = 1 \oplus 0$$

$$\textcolor{blue}{1} = 0 \oplus 0 \oplus 1$$

$$\textcolor{blue}{1} = 0 \oplus 1 \oplus 0$$

Помилки немає: $X = 01001$

$$Y_3 = 10001\textcolor{blue}{1010}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1 = x_4 + x_5 \\ y_2 = x_2 + x_3 \\ y_3 = x_1 + x_3 + x_5 \\ y_4 = x_1 + x_2 + x_4 \end{array} \right.$$

$$\textcolor{blue}{1} = 0 \oplus 1$$

$$\textcolor{blue}{0} = 0 \oplus 0$$

$$\textcolor{blue}{1} \neq 1 \oplus 0 \oplus 1$$

$$\textcolor{blue}{0} \neq 1 \oplus 0 \oplus 0$$

Помилка в x_1 : $X = 00001$

5.4

Визначити, які з двійкових послідовностей лінійного блокового (5,9)-коду містять помилку та виправити її, якщо відомо, що перевірна матриця коду має вигляд

$$H_{4,9} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$y_1 = 100011010$; $y_2 = 111101001$; $y_3 = 000110000$.

$$Y1 = 100011010$$

$$Y1 \cdot (H_{4,9})^T = (0011) \quad \rightarrow \quad \text{помилка в } x1: X = 00001$$

$$Y2 = 111101001$$

$$Y2 \cdot (H_{4,9})^T = (0000) \quad \rightarrow \quad \text{помилки нема: } X = 11110$$

$$Y3 = 000110000$$

$$Y3 \cdot (H_{4,9})^T = (0011) \quad \rightarrow \quad \text{помилка в } x1: X = 10011$$

5.5

Закодувати кодами Хеммінга та визначити надлишковість коду:

а) для $d_{\min} = 3$ двійкову послідовність $x = 100100111100100$,

б) для $d_{\min} = 4$ двійкову послідовність $x = 1101101$

Показати процес виправлення однократної помилки:

в) для коду з $d_{\min} = 3$, $y = 1111111111111$

або виявлення будь-якої двократної помилки

г) для коду з $d_{\min} = 4$, $y = 1001010010010100101$

у прийнятих двійкових послідовностях Y .

а) закодувати кодом Хеммінга для $d_{\min} = 3$ послідовність $x = 100100111100100$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & x_{10} & x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} \end{pmatrix}$$

$$k = 15 \Rightarrow 2^r \geq k + r + 1 \Rightarrow 2^r \geq r + 16 \Rightarrow r = 5 \Rightarrow n = 20$$

$$\rho = 1 - k/n = 1 - 15/20 = 0.25$$

$$H_{5,20} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ r_1 & r_2 & x_1 & r_3 & x_2 & x_3 & x_4 & r_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & x_{10} & x_{11} & r_5 & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} r_1 = x_1 + x_2 + x_4 + x_5 + x_7 + x_9 + x_{11} + x_{12} + x_{14} = 1 + 0 + 1 + 0 + 1 + 1 + 0 + 0 + 0 = 0 \\ r_2 = x_1 + x_3 + x_4 + x_6 + x_7 + x_{10} + x_{11} + x_{13} + x_{14} = 1 + 0 + 1 + 0 + 1 + 1 + 0 + 1 + 0 = 1 \\ r_3 = x_2 + x_3 + x_4 + x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{15} = 0 + 0 + 1 + 1 + 1 + 1 + 0 + 0 = 0 \\ r_4 = x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11} = 0 + 0 + 1 + 1 + 1 + 1 + 0 = 0 \\ r_5 = x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 0 + 1 + 0 + 0 = 1 \end{cases}$$

Code (X) = 01100010001111010100

б) закодувати кодом Хеммінга для $d_{\min} = 4$ двійкову послідовність $x = 1101101$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{pmatrix}$$

$$k = 7 \Rightarrow 2^r \geq k + r + 1 \Rightarrow 2^r \geq r + 8 \Rightarrow r = 4 \Rightarrow n = 11 \text{ (+} r_0 \text{)}$$

$$\rho = 1 - k/n = 1 - 7/12 = 0.417$$

$$H_{4,11} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ r_1 & r_2 & x_1 & r_3 & x_2 & x_3 & x_4 & r_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} r_1 = x_1 + x_2 + x_4 + x_5 + x_7 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 1 \\ r_2 = x_1 + x_3 + x_4 + x_6 + x_7 = 1 + 0 + 1 + 0 + 1 = 1 \\ r_3 = x_2 + x_3 + x_4 = 1 + 0 + 1 = 0 \\ r_4 = x_5 + x_6 + x_7 = 1 + 0 + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Code}_{d=3}(X) = 11101010101$$

$$r_0 = w(\text{Code}_{d=3}(X)) \bmod 2 = 7 \bmod 2 = 1$$

$$\text{Code}_{d=4}(X) = 111101010101$$

в) показати процес виправлення однократної помилки для коду з $d_{\min} = 3$

$$Y = 1111111111111$$

$$n = 13 \Rightarrow 2^r \geq n + 1 \Rightarrow 2^r \geq 14 \Rightarrow r = 4 \Rightarrow k = n - r = 9$$

$$H_{4,13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Y \cdot (H_{4,13})^T = (0001) \Rightarrow \text{помилка в } Y_1: Y=0111111111111; X=111111111$$

г) показати процес виявлення будь-якої двократної помилки для коду з $d_{\min} = 4$

$y = 1001010010010100101$

$$r_0 = 1 \Rightarrow n = 18 \Rightarrow 2^r \geq n + 1 \Rightarrow 2^r \geq 19 \Rightarrow r = 5 \Rightarrow k = n - r = 13$$

$$\begin{aligned} \text{I) } w(\text{Code}_{d=3}(X)) \bmod 2 &= w(001010010010100101) \bmod 2 = \\ &= 7 \bmod 2 = 1 = r_0 \Rightarrow \text{ОК} \end{aligned}$$

II) $\text{Code}_{d=3}(X) \cdot (H_{5,18})^T = (01010) \Rightarrow$ є дві помилки, оскільки на етапі I помилку не було зафіксовано