Практичне завдання №5

ЛІНІЙНІ БЛОКОВІ КОДИ

Кравець Ольга ПМО-21

Варіант 9

5.1. Закодувати двійкову послідовність X кодами, що виявляють помилки. Виявити, у якому з отриманих повідомлень, закодованих першим та другим кодом є помилка.

Варіант	X	Коди	Послідовності для коду 1/2
9	1101010110	ПрП, ПП	Y_1=011100010111, Y_2=0000001001101 / Y_1=0101000010101 00001, Y_2=1011000010110010

ПрП (код з перевіркою на парність):

Code(X) **= 11010101100**

Y_1=011100010111; w(01110001011) = 6; **є помилка**

Y_2=0000001001101; w(000000100110) = 3; **помилки немає**

ПП (код з простим повторенням):

Code(X) **= 11010101101101010110**

Y_1=010100001010100001; 010100001 = 010100001; **помилки немає**

Y_2=1011000010110010; 10110000 $\neq$ 10110010; **є помилка**

5.2. Закодувати двійкову послідовність X ітеративним кодом, здатним виявляти та виправляти однократні помилки, та визначити надлишковість коду. Показати процес виявлення та виправлення однократної помилки у прийнятій двійковій послідовності Y.

Варіант	Двійкова послідовність X	Прийнята послідовність Y
9	010100001001	010011110101011000001111101101111100

X = 010100001001

k = 12 → 3x4

Записуємо послідовність 0101|0000|1001 у вигляді матриці 3x4:

0101 | 0
0000 | 0
<u>1001 | 0</u>
1100 | 0

***Code(X)* = 01010000001001011000**

$\rho = 1 - \frac{12}{20} = 0.4$

Виявлення та виправлення помилки:

Y = 010011110101011000001111101101111100

k = 36 → 6x6

Записуємо послідовність 010011|110101|011000|001111|101101|111100 у вигляді матриці 6x6:

01001 | 1
11010 | 1
01100 | 0
00111 | 1
<u>10110 | 1</u>
11110 | 0

Отже, закодована послідовність має вигляд <u>0</u>1001110100110000111101 10, де 0 - помилковий елемент, який заміняємо на 1 - **11001110100110000111101 10**

5.3. Визначити, які з наведених двійкових послідовностей лінійного блокового (5,9)-коду містять помилку та виправити її, якщо відомо, що код побудований за твірною матрицею.

$$G_{5,9} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Варіант	Y_1	Y_2	Y_3
9	100011001	001101100	101010101

$$G_{5,9} = \left(\begin{array}{ccccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

k = 5;

n = 9;

r = n – k = 4

Y = Code(X) = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, y_1, y_2, y_3, y_4) = X ∙ G

Система перевірних рівнянь:

$$\begin{cases} y_1 = x_4 + x_5 \\ y_2 = x_2 + x_3 \\ y_3 = x_1 + x_3 + x_5 \\ y_4 = x_1 + x_2 + x_4 \end{cases}$$

$Y_1 = 100011001$

$$\begin{cases} 1 = 0 \oplus 1 \\ 0 = 0 \oplus 0 \\ 0 = 1 \oplus 0 \oplus 1 \\ 1 = 1 \oplus 0 \oplus 0 \end{cases}$$

Помилки немає:

X = 10001

$Y_2 = 001101100$

$$\begin{cases} 1 = 1 \oplus 0 \\ 1 = 0 \oplus 1 \\ 0 \neq 0 \oplus 1 \oplus 0 \\ 0 \neq 0 \oplus 0 \oplus 1 \end{cases}$$

Помилки в x_1:

X = 10110

$Y_3 = 101010101$

$$\begin{cases} 0 \neq 0 \oplus 1 \\ 1 = 0 \oplus 1 \\ 0 \neq 1 \oplus 1 \oplus 1 \\ 1 = 1 \oplus 0 \oplus 0 \end{cases}$$

Помилки в x_5:

X = 10100

5.4. Визначити, які з наведених двійкових послідовностей лінійного блокового (5,9)-коду містять помилку та виправити її, якщо відомо, що перевірна матриця коду має вигляд

$$H_{4,9} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Варіант	Y_1	Y_2	Y_3
9	001010101	101101100	101001111

$$(H_{4,9})^T = \begin{matrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

$Y_1 = 001010101$

$Y_1 * (H_{4,9})^T = (1001) \rightarrow$ помилка в x_4 : X = 00111

001010101	001010101	001010101	001010101
000111000	011000100	101010010	110100001
000010000	001000100	001010000	000000001

$Y_2 = 101101100$

$Y_2 * (H_{4,9})^T = (0000) \rightarrow$ помилки нема : X = 10110

101101100	101101100	101101100	101101100
000111000	011000100	101010010	110100001
000101000	001000100	101000000	100100000

$Y_3 = 101001111$

$Y_3 * (H_{4,9})^T = (1010) \rightarrow$ помилка в x_5 : X = 10111

101001111	101001111	101001111	101001111
000111000	011000100	101010010	110100001
000001000	001000100	101000010	10000000

5.5. Закодувати кодами Хеммінга для заданих параметрів d_{min} двійкову послідовність X, визначити надлишковість коду та показати процес виправлення однократної помилки (для коду з d_{min} = 3) або виявлення будь якої двократної помилки (для коду з d_{min} = 4) у прийнятих двійкових послідовностях Y.

Варіант	$X\ (d_{min} = 3)$	$Y\ (d_{min} = 3)$	$X\ (d_{min} = 4)$	$Y\ (d_{min} = 4)$
9	1010	01101100101101111	0111000111	10110001110

Закодовуємо кодом Хеммінга для $\mathbf{d_{min}}$ **= 3 *послідовність X* = 1010 :**

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}$$

$k = 4 \rightarrow 2^r \geq k + r + 1 \rightarrow 2^r \geq r + 5 \rightarrow r = 3 \rightarrow n = 7$

$\rho = 1 - \frac{4}{7} = \frac{3}{7}\ (\sim 0.43)$

Будуємо матрицю 3х7:

$$H_{3,7} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ r_1 & r_2 & x_1 & r_3 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} r_1 = x_1 + x_2 + x_4 = 1 + 0 + 0 = 1 \\ r_2 = x_1 + x_3 + x_4 = 1 + 1 + 0 = 0 \\ r_3 = x_2 + x_3 + x_4 = 0 + 1 + 0 = 1 \end{cases}$$

Code(X) **= 1011010**

Закодовуємо кодом Хеммінга для $\mathbf{d_{min}}$ **= 4 *послідовність* X = 0111000111 :**

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & x_{10} \end{pmatrix}$$

$k = 10 \rightarrow 2^r \geq k + r + 1 \rightarrow 2^r \geq r + 11 \rightarrow r = 4 \rightarrow n = 14\ (+r_0)$

$\rho = 1 - \frac{10}{14} = \frac{2}{7}\ (\sim 0.29)$

Будуємо матрицю 4х14:

$$H_{4,14} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ r_1 & r_2 & x_1 & r_3 & x_2 & x_3 & x_4 & r_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & x_{10} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} r_1 = x_1 + x_2 + x_4 + x_5 + x_7 + x_9 = 0 + 1 + 1 + 0 + 0 + 1 = 1 \\ r_2 = x_1 + x_3 + x_4 + x_6 + x_7 + x_{10} = 0 + 1 + 1 + 0 + 0 + 1 = 1 \\ r_3 = x_2 + x_3 + x_4 + x_8 + x_9 + x_{10} = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 0 \\ r_4 = x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} = 0 + 0 + 0 + 1 + 1 + 1 = 1 \end{cases}$$

$\boldsymbol{Code_{d=3}(X)} = \mathbf{11001111000111}$

$\boldsymbol{r_0}$ **= w(**$\boldsymbol{Code_{d=3}(X)}$**) mod 2 =** w(11001111000111) mod 2 = 9 mod 2 = **1**

$\boldsymbol{Code_{d=4}(X)} = \mathbf{111001111000111}$

Виправлення однократної помилки для коду з $\mathbf{d_{min}} = \mathbf{3}$ ***послідовності***
***Y* = 01101100101101111 :**

$n = 17 \rightarrow 2^r \geq n + 1 \rightarrow 2^r \geq 18 \rightarrow r = 5 \rightarrow k = n - r = 17 - 5 = 12$

Будуємо матрицю 5x17:

$$H_{5,17} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(\mathrm{H}_{5,17})^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Y = 01101100101101111

Y * $(\mathrm{H}_{5,17})^{\mathrm{T}}$ = (01100) → помилка в y_{12} :

Y = 01101100101001111;

X =111010100111

0110110010110111 1
0000000000000011
0000000000000011

0110110010110111 1
0000000111111100
0000000101101100

0110110010110111 1
0001111000111100
0000110000101100

0110110010110111 1
0110011001100110 0
0110010000100110 0

0110110010110111 1
1010101010101010 1
0010100010100010 1

Виявлення двократної помилки для коду з $d_{min} = 4$ послідовності Y = 10110001110 :

Y = 10110001110

$r_0 = 1 \rightarrow \mathrm{n} = 10 \rightarrow 2^r \geq n+1 \rightarrow 2^r \geq 11 \rightarrow r = 4 \rightarrow k = n - r = 10 - 4 = 6$

I) **w($Code_{d=3}(X)$) mod 2** = w(0110001110) mod 2 = 5 mod 2 = 1 = r_0 → **OK**

II)

$$H_{4,10} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(\mathrm{H}_{4,10})^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Y = 0110001110

$Code_{d=3}(X)$***(H$_{4,10}$)$^{\mathrm{T}}$** = (0111) → **є дві помилки, бо на I етапі не було виявлено помилку**

0110001110
0000000111
0000000110

0110001110
0001111000
0000001000

0110001110
0110011001
0110001000

0110001110
1010101010
0010001010