

Física 1

Vectores

Helga Dénes 2025-10 USFQ

hdenes@usfq.edu.ec

Vectores

Algunas cantidades físicas, como tiempo, temperatura, masa y densidad se pueden describir completamente con un número y una unidad. No obstante, **en física muchas otras cantidades importantes están asociadas con una dirección** y no pueden describirse con un solo número.

Un **ejemplo** sencillo es el movimiento de un avión: para describirlo plenamente, debemos indicar no sólo qué tan rápidamente se mueve, sino también hacia dónde. Para ir de Chicago a Nueva York, un avión debe volar al este, no al sur. La rapidez del avión combinada con su dirección constituye una cantidad llamada *velocidad*.

Otro **ejemplo es la fuerza**, que en física es un empuje o tirón aplicado a un cuerpo. Para describir una fuerza hay que indicar no sólo su intensidad, sino también en qué dirección tira o empuja.

Cuando una **cantidad física se describe con un solo número**, decimos que es una **cantidad escalar**.

En cambio, una **cantidad vectorial** tiene tanto una **magnitud** como una **dirección** en el espacio.

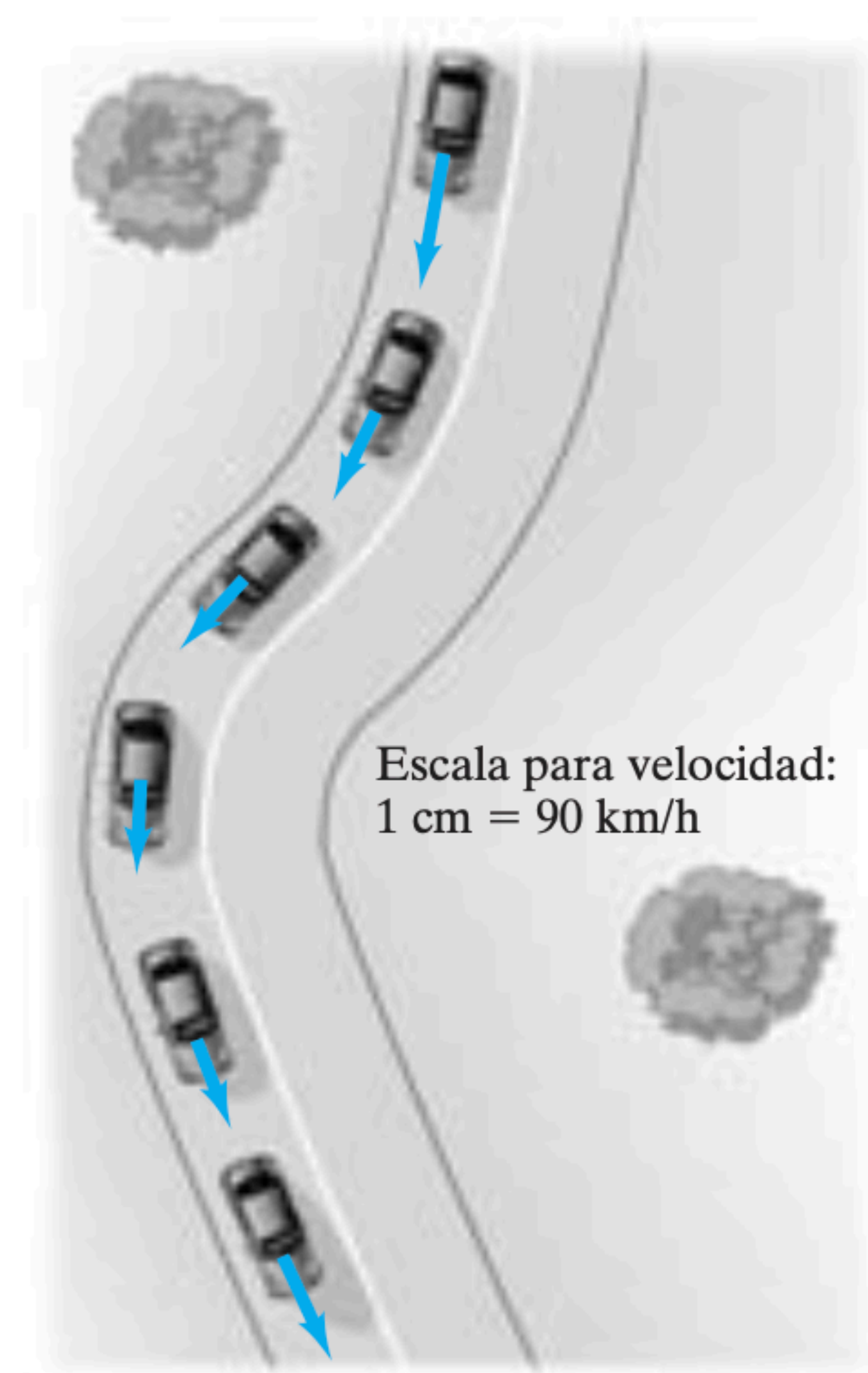


FIGURA 3-1 Automóvil que viaja por una carretera y desacelera para tomar la curva. Las flechas representan el vector velocidad en cada posición.

Vectores

Los cálculos que combinan cantidades escalares usan las operaciones aritméticas ordinarias.

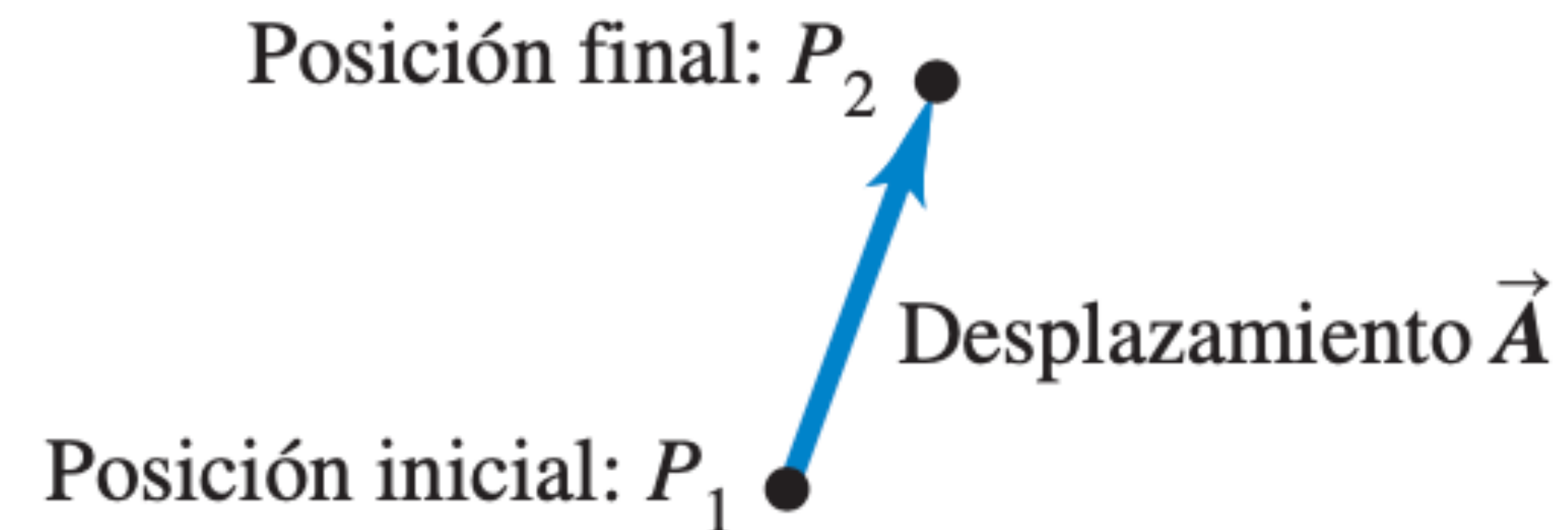
Por ejemplo, $6 \text{ kg} + 3 \text{ kg} = 9 \text{ kg}$, o $4 \times 2 \text{ s} = 8 \text{ s}$.

Combinar vectores requiere un conjunto de operaciones diferente.

Para entender mejor los vectores y su combinación, comencemos con la cantidad vectorial más sencilla, el **desplazamiento**, que es simplemente un cambio en la posición de un punto.

En la figura representamos el cambio de posición del punto P_1 al punto P_2 con una línea que va de P_1 a P_2 , con una punta de flecha en P_2 para indicar la dirección. El desplazamiento es una cantidad vectorial porque debemos decir no sólo **cuánto** se mueve la partícula, sino también **hacia dónde**.

Caminar 3 km al norte desde nuestra casa no nos lleva al mismo sitio que caminar 3 km al sureste; ambos desplazamientos tienen la misma magnitud, pero diferente dirección.

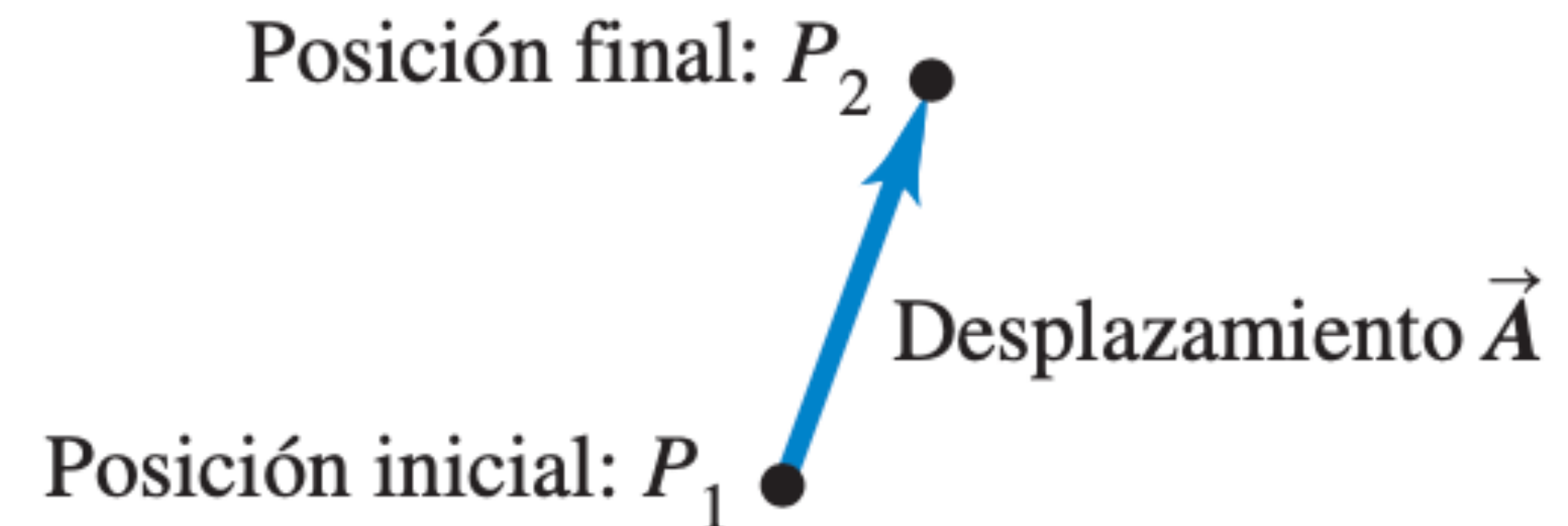


Vectores

Frecuentemente representamos una cantidad vectorial como el desplazamiento con una sola letra, como \vec{A} (o \vec{A}) en la figura 1.9a. *(letras negritas y cursivas con una flecha arriba)*; la flecha nos recuerda que los vectores tienen dirección.

Los símbolos manuscritos de los vectores suelen subrayarse o escribirse con una flecha arriba (figura 1.9a).

Siempre escriba los símbolos vectoriales con una flecha arriba.



Vectores

Al *dibujar* un vector, siempre trazamos **una línea con punta de flecha**.

La **longitud** de la línea **indica la magnitud del vector**, y su **dirección** es la del vector. El desplazamiento siempre es un segmento recto dirigido del punto inicial al punto final, aunque la trayectoria real seguida por la partícula sea curva. En la figura 1.9b, la partícula sigue el camino curvo de P_1 a P_2 , pero el desplazamiento sigue siendo el vector \vec{A} .

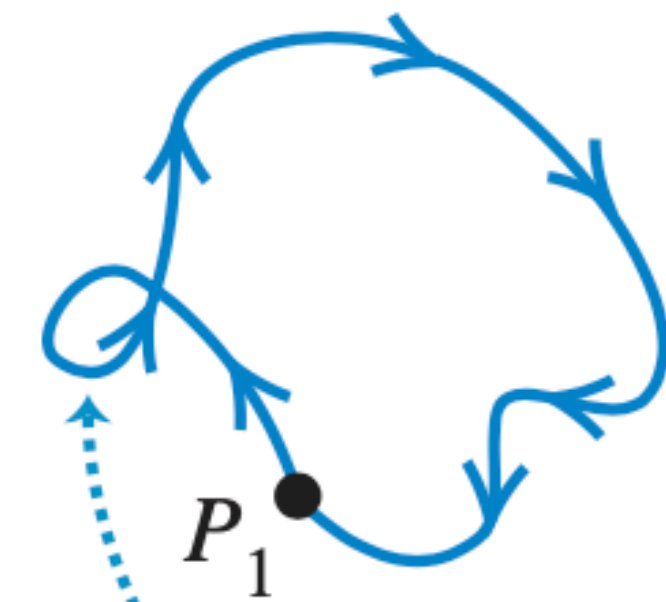
Observe que el desplazamiento no se relaciona directamente con la *distancia* total recorrida. Si la partícula siguiera a P_2 y volviera a P_1 , el desplazamiento total sería cero (figura 1.9c).

b)



El desplazamiento depende sólo de las posiciones inicial y final, no de la trayectoria que siga.

c)



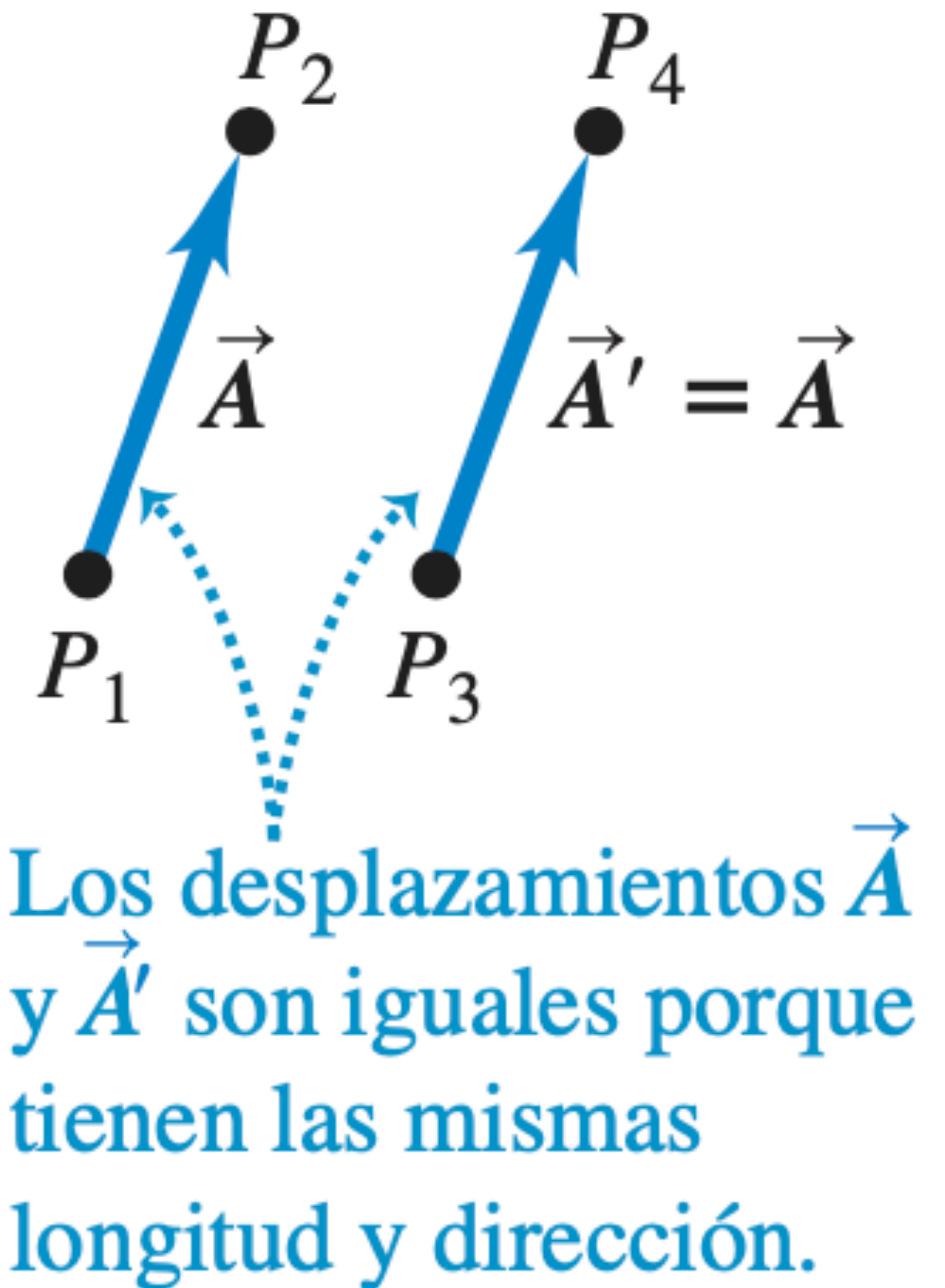
Si un objeto hace un viaje redondo, el total de desplazamiento es 0, sin que importe la distancia recorrida.

Vectores

Si dos vectores tienen la **misma dirección**, son **paralelos**; si tienen la **misma magnitud y la misma dirección**, **son iguales**, sea cual fuere su ubicación en el espacio. El vector \vec{A}' de P_3 a P_4 en la figura tiene las mismas longitud y dirección que el vector \vec{A} de P_1 a P_2 . Ambos desplazamientos son iguales, aunque parten de puntos distintos.

Escribimos esto como $\vec{A}' = \vec{A}$ en la figura, usando un signo igual en negritas para resaltar que la igualdad de dos cantidades vectoriales no es lo mismo que la igualdad de dos cantidades escalares.

Dos vectores sólo son iguales si tienen la misma magnitud y la misma dirección.



Vectores

Sin embargo, el vector \vec{B} de la figura no es igual a \vec{A} porque su **dirección es opuesta**.

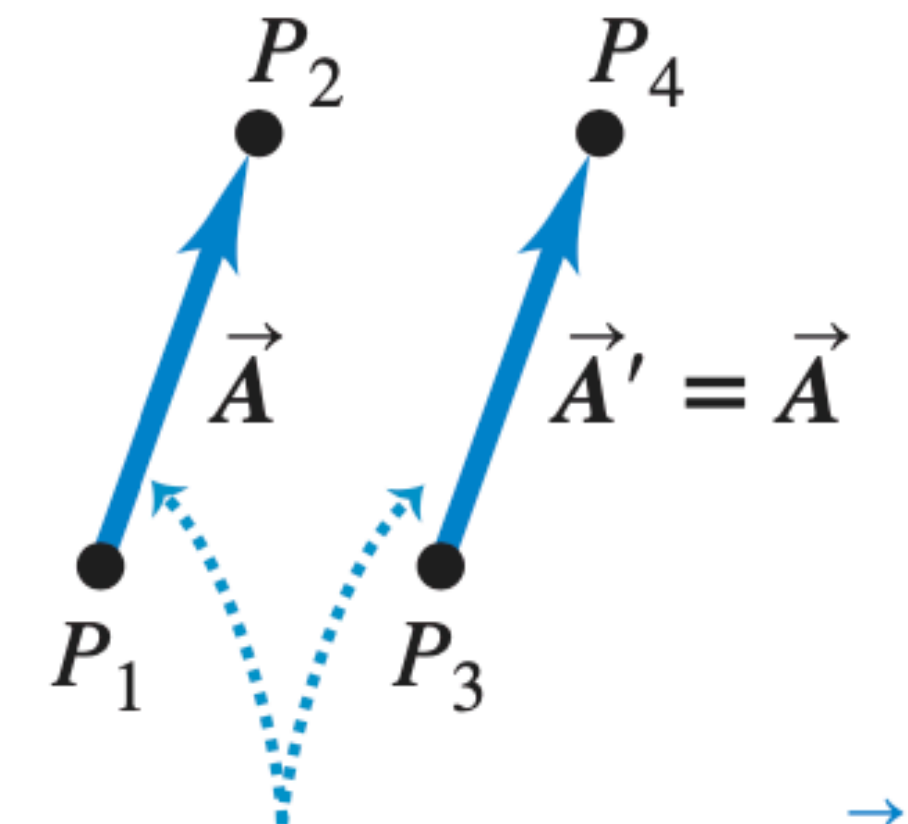
Definimos el **negativo de un vector** como un vector con la **misma magnitud** que el original **pero con la dirección opuesta**.

El negativo de \vec{A} se denota con $-\vec{A}$, y usamos un signo menos para destacar la índole vectorial de las cantidades.

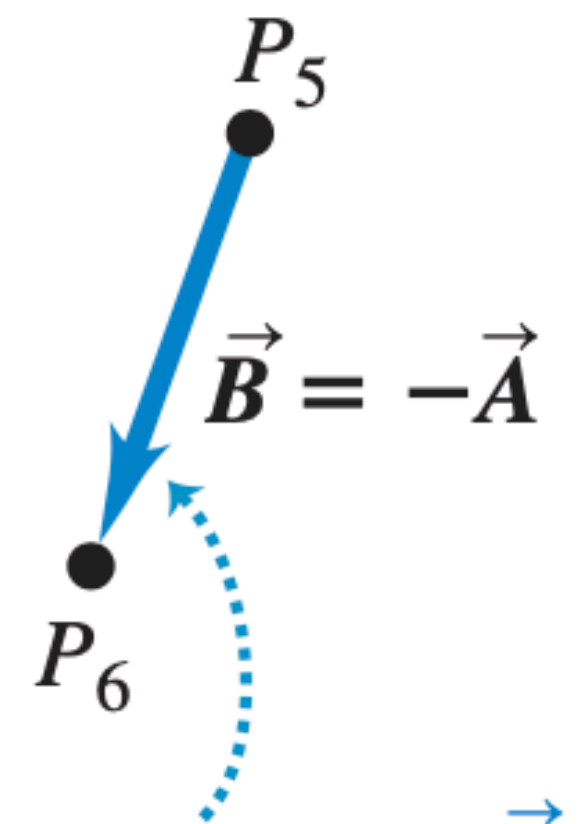
Si \vec{A} es 87 m al sur, entonces $-\vec{A}$ es 87 m al norte.

Así, la relación entre \vec{A} y \vec{B} es: $\vec{A} = -\vec{B}$ o $\vec{B} = -\vec{A}$.

Si dos vectores \vec{A} y \vec{B} tienen **direcciones opuestas**, sean sus magnitudes iguales o no, decimos que son **antiparalelos**.



Los desplazamientos \vec{A} y \vec{A}' son iguales porque tienen las mismas longitud y dirección.



El desplazamiento \vec{B} tiene la misma magnitud que \vec{A} pero en dirección opuesta; \vec{B} es el negativo de \vec{A} .

Vectores

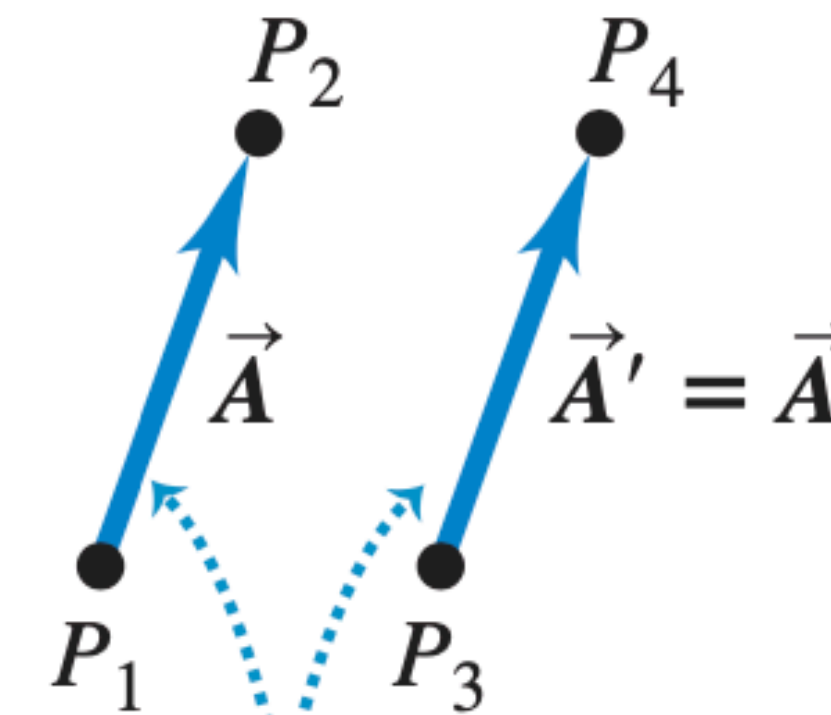
Frecuentemente representamos la *magnitud* de una cantidad vectorial con la misma letra que usamos para el vector pero en *cursiva normal sin la flecha* arriba.

Una **notación alterna** es el símbolo vectorial encerrado entre barras verticales:

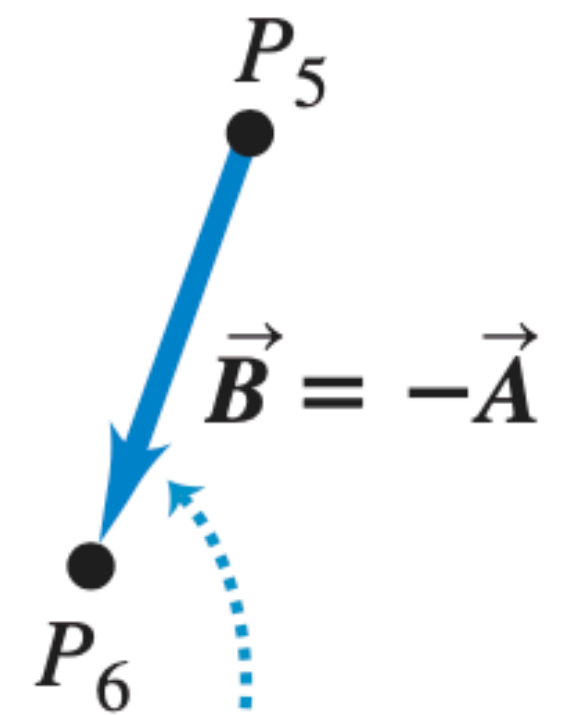
$$(\text{Magnitud de } \vec{A}) = A = |\vec{A}|$$

Por definición, la magnitud de una cantidad vectorial es una **cantidad escalar y siempre es positiva**.

Un vector nunca puede ser igual a un escalar porque son cantidades de tipo distinto.



Los desplazamientos \vec{A} y \vec{A}' son iguales porque tienen las mismas longitud y dirección.



El desplazamiento \vec{B} tiene la misma magnitud que \vec{A} pero en dirección opuesta; \vec{B} es el negativo de \vec{A} .

Vectores

Al **dibujar diagramas con vectores**, normalmente usamos una escala similar a la escala de los mapas.

Por ejemplo, un desplazamiento de 5 km podría representarse con un vector de 1 cm en un diagrama; y un desplazamiento de 10 km, con un vector de 2 cm.

En un diagrama de vectores de velocidad, podríamos usar una escala para representar un vector de 1 cm como una velocidad cuya magnitud es de 5 metros por segundo (5 m/s). Entonces, una velocidad de 20 m/s se representaría con un vector de 4 cm, con la dirección adecuada.

Suma de vectores

Suponga que una partícula sufre un desplazamiento \vec{A} , seguido por un segundo desplazamiento \vec{B} (figura 1.11a). El resultado final es el mismo que si la partícula hubiera partido del mismo punto y sufrido un solo desplazamiento \vec{C} , como se muestra.

Llamamos a \vec{C} **suma vectorial, o resultante**, de los desplazamientos \vec{A} y \vec{B} .

Expresamos esta relación simbólicamente como: $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$

Sumar dos cantidades vectoriales requiere un proceso geométrico y no es lo mismo que sumar dos cantidades escalares como $3 + 2 = 5$.

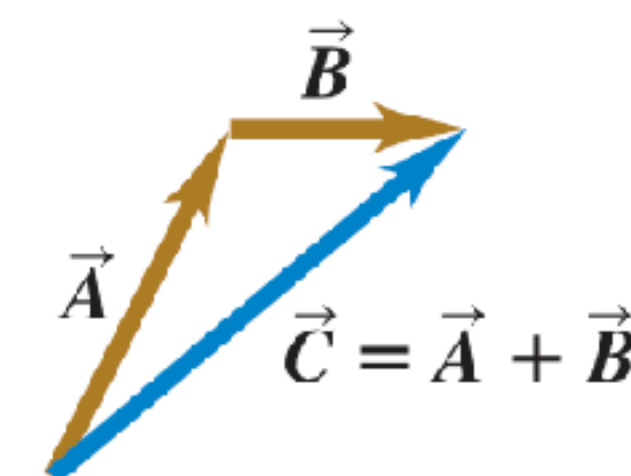
Al sumar vectores, por lo regular colocamos la *cola* del *segundo* vector en la *cabeza*, o *punta*, del *primer* vector (figura 1.11a).

Si efectuamos los desplazamientos \vec{A} y \vec{B} en **orden inverso**, primero \vec{B} y luego \vec{A} el resultado **será el mismo** (figura 1.11b).

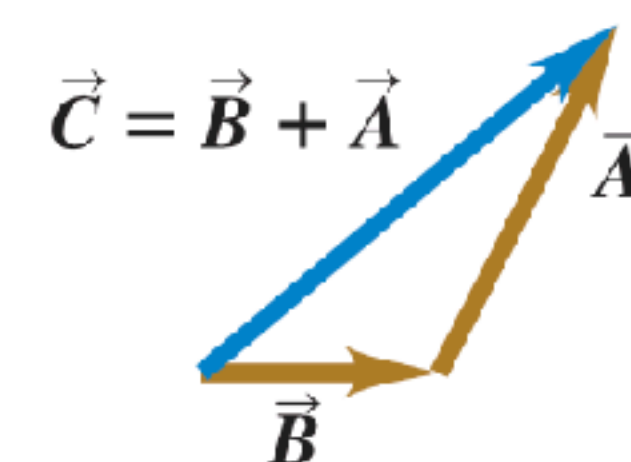
Entonces, $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$ y $\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$

1.11 Tres formas de sumar dos vectores. Como se muestra en b), el orden no importa en la suma de vectores, la cual es conmutativa.

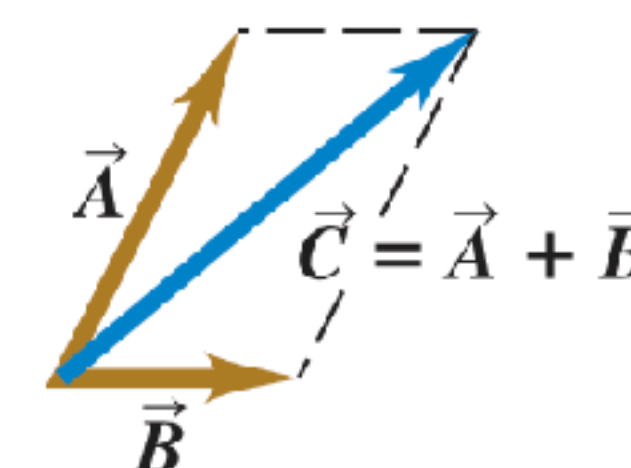
a) Podemos sumar dos vectores colocándolos punta con cola.



b) Al sumarlos a la inversa se obtiene el mismo resultado.



c) Podemos también sumarlos construyendo un paralelogramo.



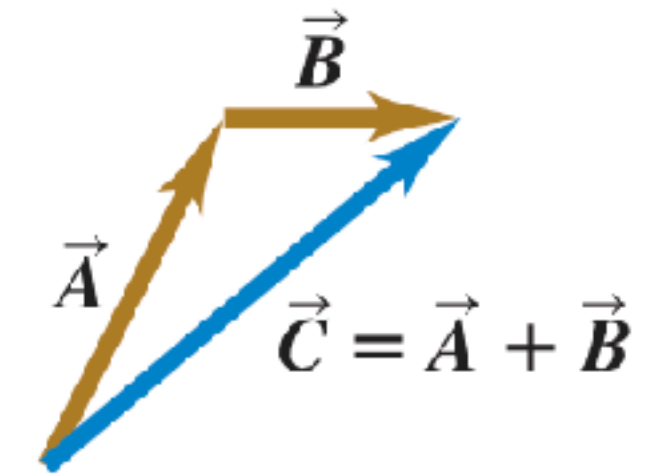
Suma de vectores

Esto indica que el orden de los términos en una suma de vectores no importa. Dicho de otro modo, **la suma de vectores sigue la ley conmutativa.**

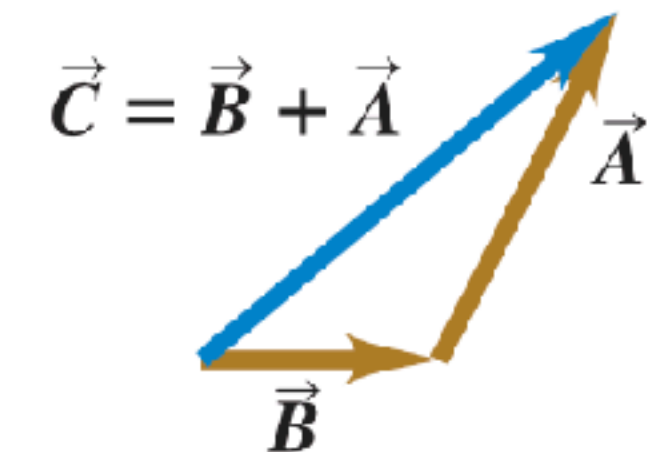
La figura 1.11c muestra otra representación de la suma vectorial: si dibujamos los vectores \vec{A} y \vec{B} con sus colas en el mismo punto, el vector \vec{C} es la diagonal de un paralelogramo construido con \vec{A} y \vec{B} como dos lados adyacentes.

1.11 Tres formas de sumar dos vectores. Como se muestra en b), el orden no importa en la suma de vectores, la cual es conmutativa.

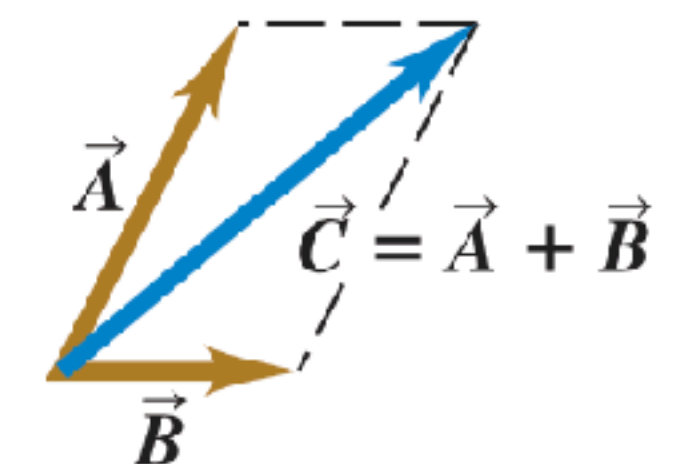
a) Podemos sumar dos vectores colocándolos punta con cola.



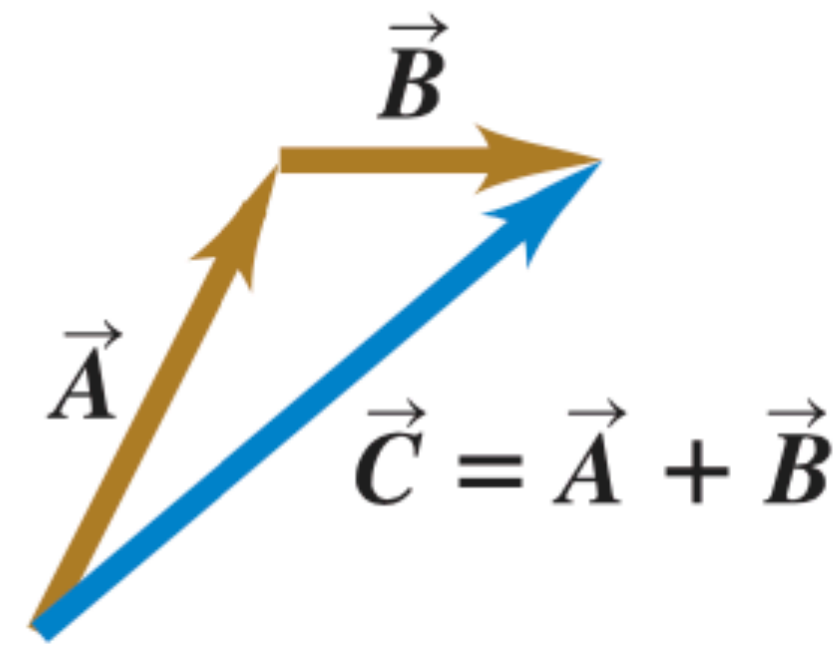
b) Al sumarlos a la inversa se obtiene el mismo resultado.



c) Podemos también sumarlos construyendo un paralelogramo.



Suma de vectores



Magnitudes en la suma de vectores

Es un error común suponer que si $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$, entonces la magnitud C debería ser igual a la magnitud A más la magnitud B . En general, tal conclusión es *errónea*;

para los vectores de la figura 1.11 es evidente que $C < A + B$.

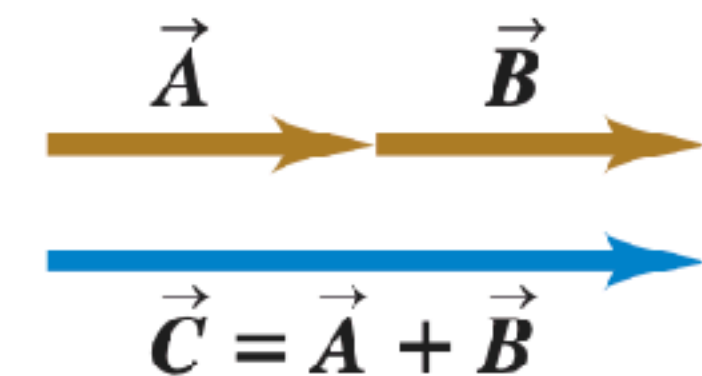
La magnitud de $\vec{A} + \vec{B}$ depende de las magnitudes de \vec{A} y \vec{B} y también del ángulo que forman \vec{A} y \vec{B} .

Sólo en el caso especial en que \vec{A} y \vec{B} sean *paralelos*, la magnitud de $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$ es igual a la suma de las magnitudes de \vec{A} y \vec{B} (figura 1.12a).

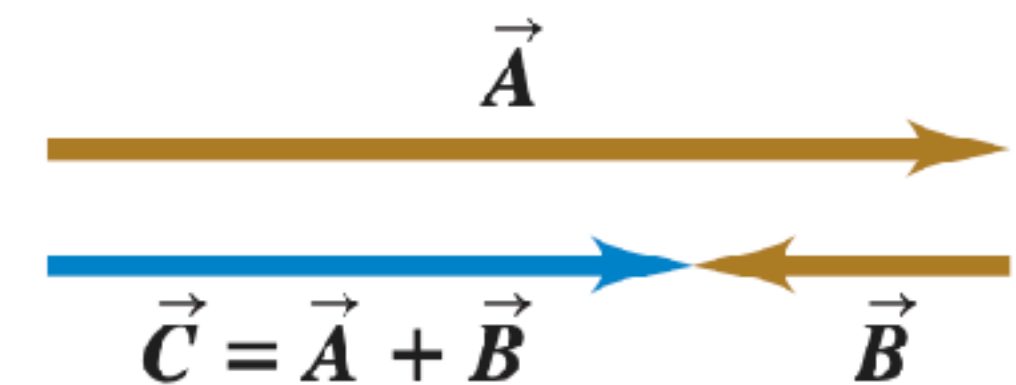
En cambio, cuando los vectores son *antiparalelos* (figura 1.12b) la magnitud de \vec{C} es la *diferencia* de las magnitudes de \vec{A} y \vec{B} .

1.12 a) En el caso especial de que dos vectores \vec{A} y \vec{B} sean paralelos, la magnitud de su suma es igual a la suma de sus magnitudes: $C = A + B$. b) Cuando \vec{A} y \vec{B} son antiparalelos, la magnitud de su suma es igual a la *diferencia* de sus magnitudes: $C = |A - B|$.

a) La suma de dos vectores paralelos



b) La suma de dos vectores antiparalelos



Suma de vectores

Si necesitamos sumar más de dos vectores, podemos sumar primero dos cualesquiera, sumar la resultante al tercero, etcétera.

La figura 1.13a muestra tres vectores \vec{A} , \vec{B} y \vec{C} .

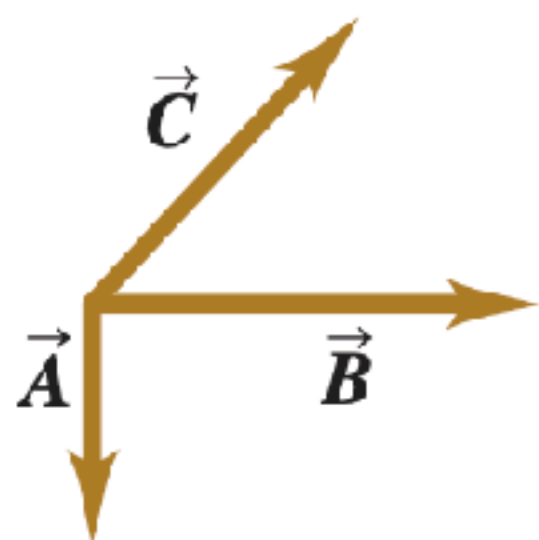
En la figura 1.13b, se suman primero \vec{A} y \vec{B} para dar la suma vectorial \vec{D} ;

luego se suman los vectores \vec{C} y \vec{D} de la misma forma para obtener la resultante \vec{R} :

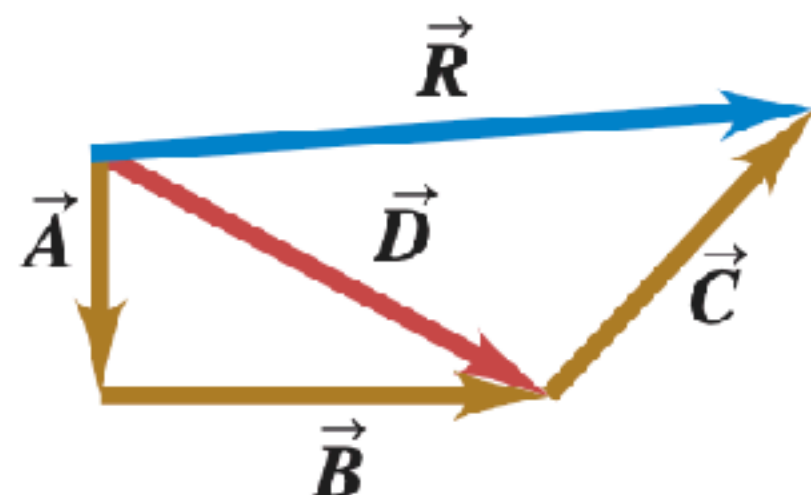
$$\vec{R} = (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} = \vec{D} + \vec{C}$$

1.13 Varias construcciones para obtener la suma vectorial $\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$.

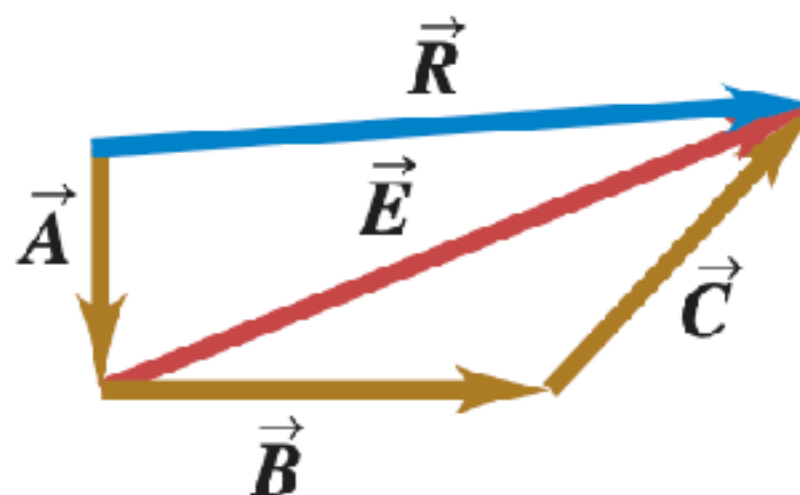
a) Para obtener la suma de estos tres vectores ...



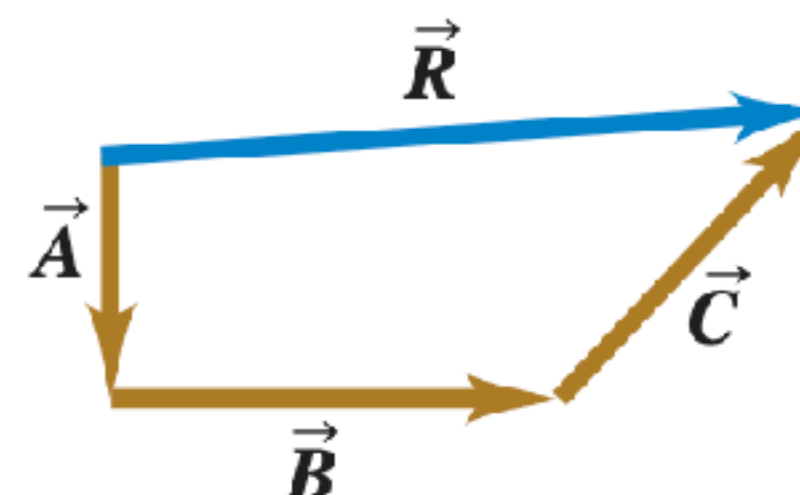
b) podríamos sumar \vec{A} y \vec{B} para encontrar \vec{D} y luego sumar \vec{C} a \vec{D} para obtener la suma final (resultante) \vec{R} , ...



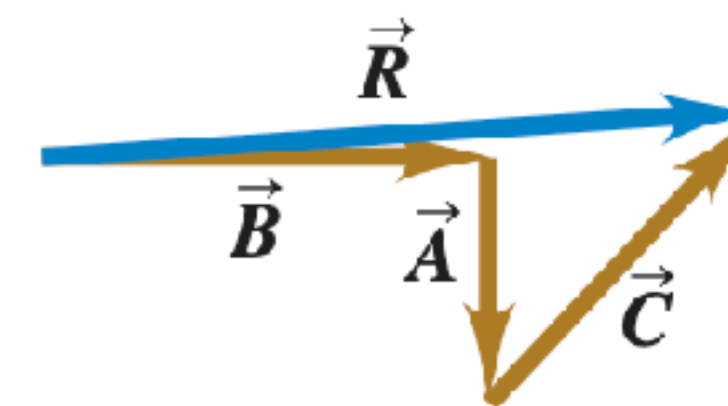
c) o podríamos sumar \vec{B} y \vec{C} para obtener \vec{E} y después sumar \vec{A} a \vec{E} para calcular \vec{R} , ...



d) o podríamos sumar \vec{A} , \vec{B} y \vec{C} para obtener \vec{R} directamente ...



e) o podríamos sumar \vec{A} , \vec{B} y \vec{C} en cualquier otro orden y aun así obtener \vec{R} .



Suma de vectores

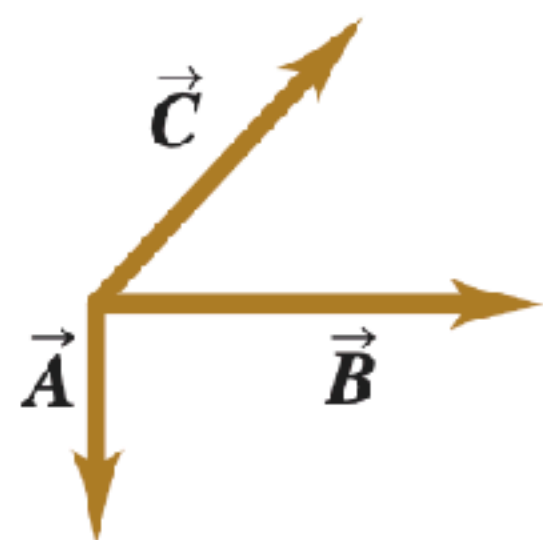
Como alternativa, podemos sumar primero \vec{B} y \vec{C} para obtener el vector \vec{E} y luego sumar \vec{A} y \vec{E} para obtener \vec{R} :

$$\vec{R} = \vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} + \vec{E}$$

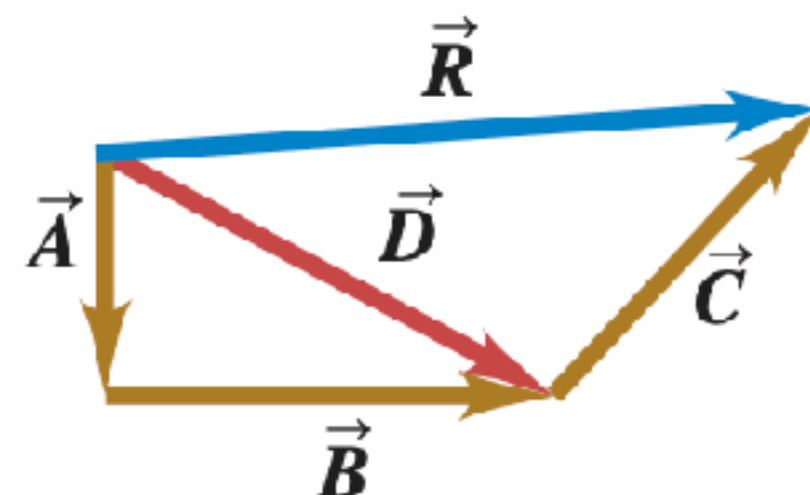
No necesitamos dibujar los vectores \vec{D} ni \vec{E} ; basta con dibujar los vectores \vec{A} , \vec{B} y \vec{C} dados en sucesión. La suma vectorial va de la cola del primero hasta la punta del último (figura 1.13d). El orden no importa.

1.13 Varias construcciones para obtener la suma vectorial $\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$.

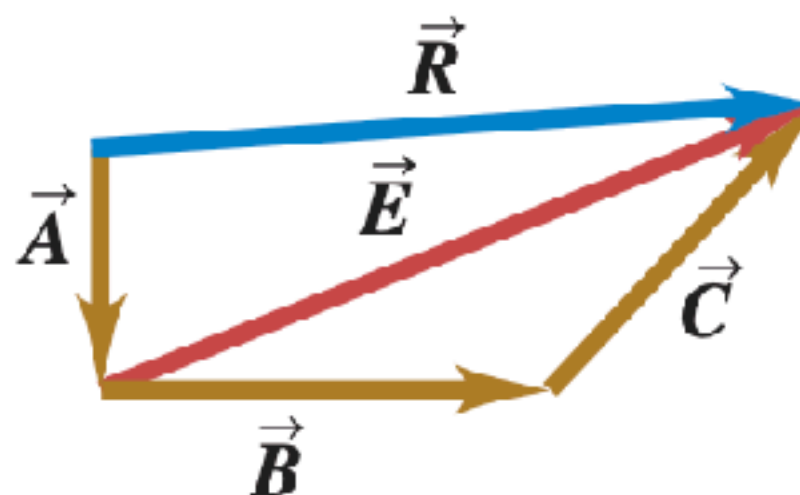
a) Para obtener la suma de estos tres vectores ...



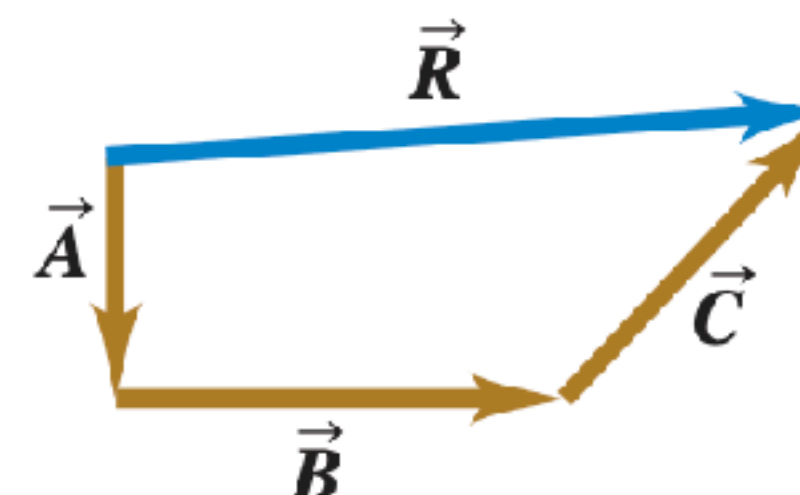
b) podríamos sumar \vec{A} y \vec{B} para encontrar \vec{D} y luego sumar \vec{C} a \vec{D} para obtener la suma final (resultante) \vec{R} , ...



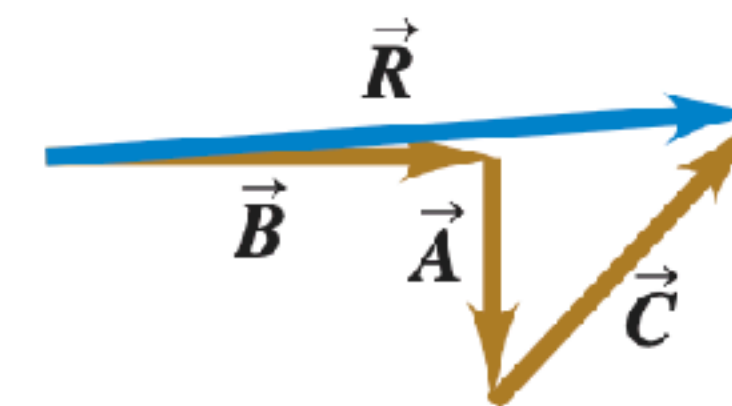
c) o podríamos sumar \vec{B} y \vec{C} para obtener \vec{E} y después sumar \vec{A} a \vec{E} para calcular \vec{R} , ...



d) o podríamos sumar \vec{A} , \vec{B} y \vec{C} para obtener \vec{R} directamente ...



e) o podríamos sumar \vec{A} , \vec{B} y \vec{C} en cualquier otro orden y aun así obtener \vec{R} .



Suma de vectores

Así como sumamos vectores también podemos *restarlos*.

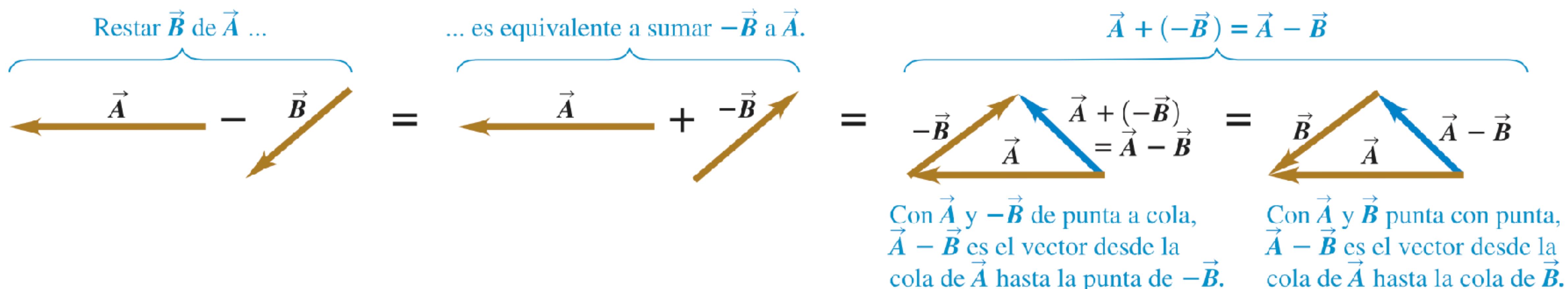
Para aprender cómo, recuerde que el vector $-\vec{A}$ tiene la misma magnitud que \vec{A} pero dirección opuesta.

Definimos la diferencia $\vec{A} - \vec{B}$ de dos vectores \vec{A} y \vec{B} como la suma vectorial de \vec{A} y $-\vec{B}$:

$$\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B})$$

La figura 1.14 muestra un ejemplo de resta de vectores.

1.14 Para construir la diferencia vectorial $\vec{A} - \vec{B}$, podrá colocar ya sea la cola de $-\vec{B}$ en la punta de \vec{A} o bien, colocar los dos vectores \vec{A} y \vec{B} punta con punta.



Suma de vectores

Una cantidad vectorial, como el desplazamiento, **se puede multiplicar por una cantidad escalar**.

El desplazamiento $2\vec{A}$ es un desplazamiento (cantidad vectorial) en la misma dirección que \vec{A} pero dos veces más largo; esto equivale a sumar \vec{A} a sí mismo (figura 1.15a).

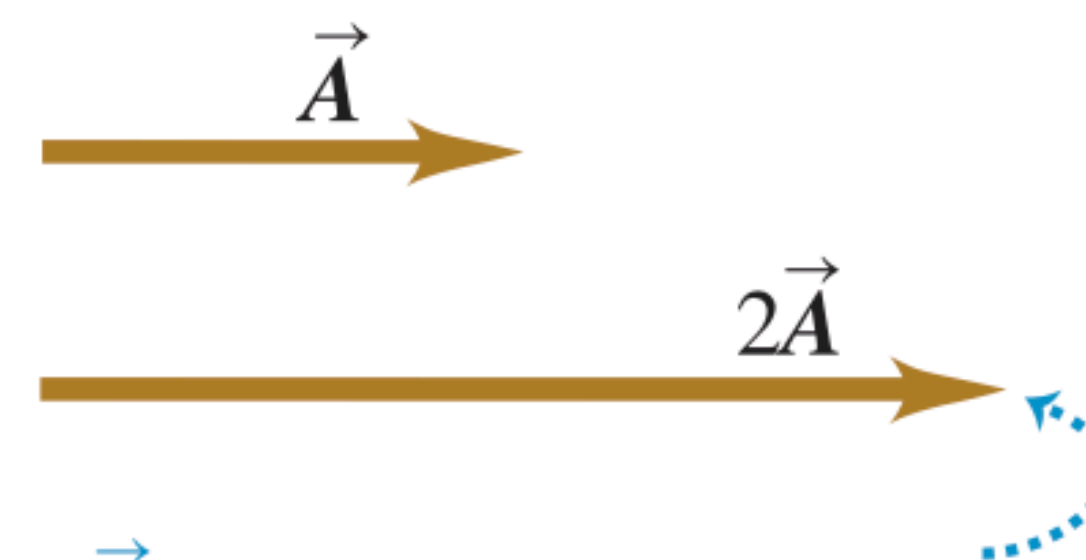
En general, cuando un vector \vec{A} se multiplica por un escalar c , el resultado $c\vec{A}$ tiene magnitud $|c|A$ (el valor absoluto de c multiplicado por la magnitud del vector \vec{A}).

Si c es positivo, $c\vec{A}$ tiene la misma dirección que \vec{A} ; si c es negativo, $c\vec{A}$ tiene la dirección opuesta a la de \vec{A} .

Así, $3\vec{A}$ es paralelo a \vec{A} , pero $-3\vec{A}$ es antiparalelo a \vec{A} (figura 1.15b).

1.15 Multiplicación de un vector a) por un escalar positivo y b) por un escalar negativo.

a) Al multiplicar un vector por un escalar positivo, la magnitud (longitud) del vector podría cambiar, pero no su dirección.



$2\vec{A}$ es dos veces más grande que \vec{A} .

b) Al multiplicar un vector por un escalar negativo, podría cambiar su magnitud e invertir su dirección.



$-3\vec{A}$ es tres veces más grande que \vec{A} y apunta en la dirección contraria.

Suma de vectores

El escalar que multiplica un vector también puede ser una **cantidad física con unidades**.

Por ejemplo, la relación $\vec{F} = m\vec{a}$; la fuerza neta \vec{F} (una cantidad vectorial) que actúa sobre un cuerpo es igual al producto de la masa del cuerpo m (una cantidad escalar positiva) y su aceleración \vec{a} (una cantidad vectorial).

La dirección de \vec{F} es la misma que la de \vec{a} porque m es positiva, y la magnitud de \vec{F} es igual a la masa m (que es positiva e igual a su propio valor absoluto) multiplicada por la magnitud de \vec{a} .

La unidad de la magnitud de la fuerza es la unidad de masa multiplicada por la unidad de la magnitud de la aceleración.

Suma de vectores

Ejemplo: Una esquiadora de fondo viaja 1.00 km al norte y luego 2.00 km al este por un campo nevado horizontal.

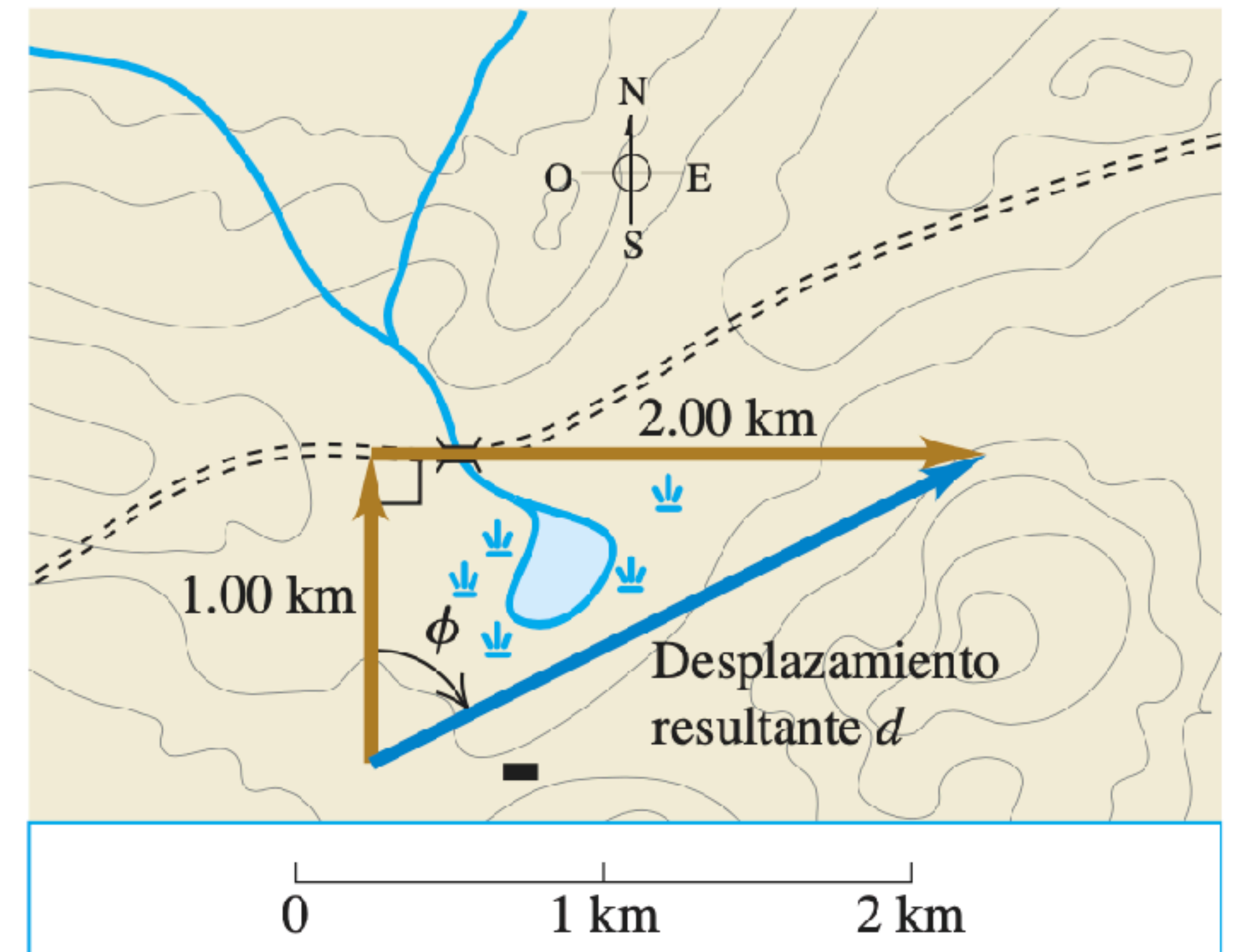
¿A qué distancia y en qué dirección está con respecto al punto de partida?

1.16 Diagrama vectorial, a escala, de un recorrido en esquí a campo traviesa.

PLANTEAR: La figura 1.16 es un diagrama a escala de los desplazamientos de la esquiadora.

Describimos la dirección desde el punto de partida con el ángulo ϕ (la letra griega fi). Si medimos con cuidado, veremos que la distancia al punto inicial es de unos 2.2 km y ϕ es aproximadamente 63° .

Podemos *calcular* un resultado mucho más exacto sumando los vectores de desplazamiento de 1.00 km y 2.00 km.



Suma de vectores

SOLUCIÓN: Los vectores del diagrama forman un triángulo rectángulo; la distancia del punto de partida al punto final es igual a la longitud de la hipotenusa. Obtenemos esta longitud usando el **teorema de Pitágoras**:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

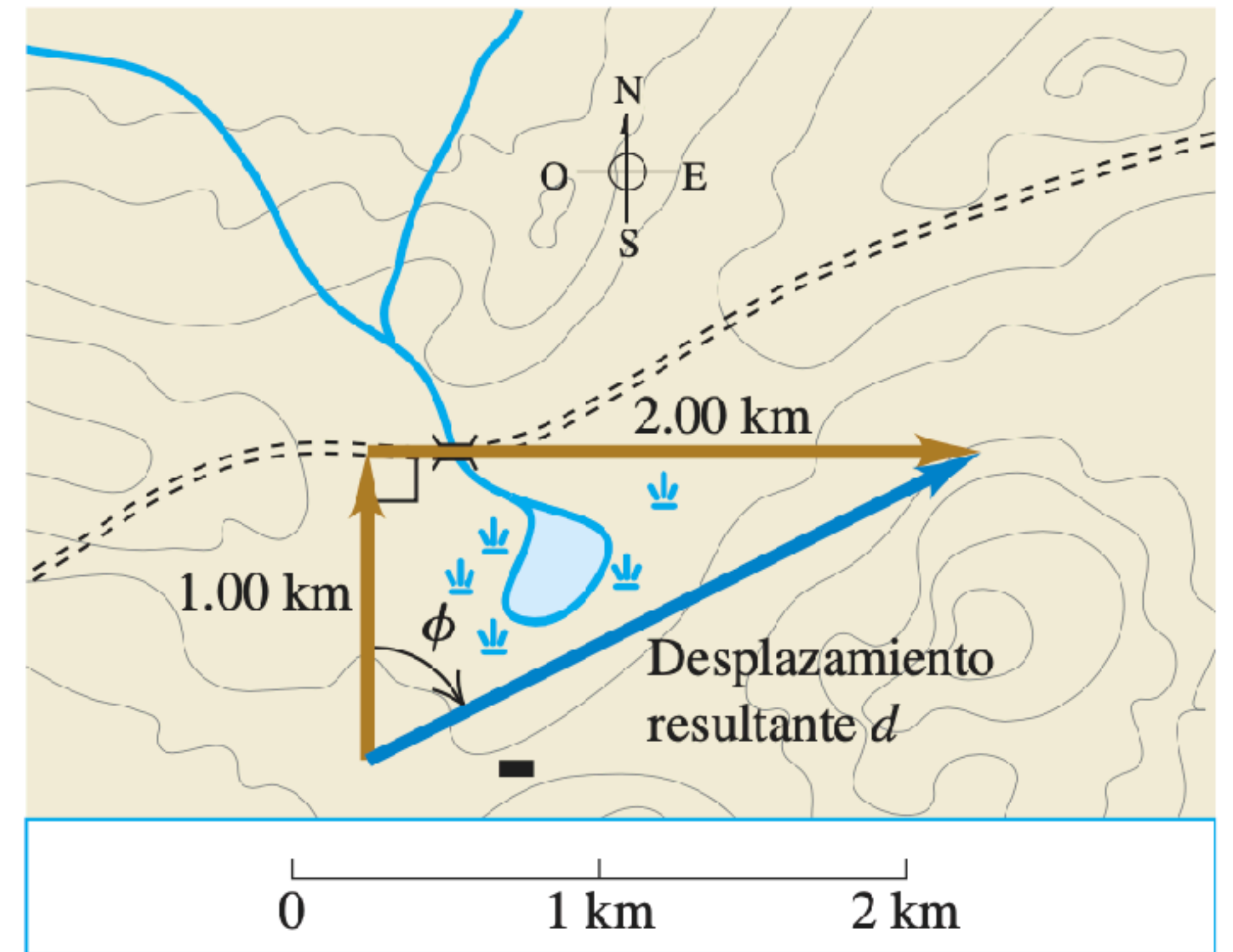
$$\sqrt{(1.00 \text{ km})^2 + (2.00 \text{ km})^2} = 2.24 \text{ km}$$

El ángulo ϕ se obtiene mediante trigonometría. Por la definición de la función tangente,

$$\tan \phi = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{2.00 \text{ km}}{1.00 \text{ km}}$$

$$\phi = 63.4^\circ$$

1.16 Diagrama vectorial, a escala, de un recorrido en esquí a campo traviesa.



Podemos describir la dirección como 63.4° al este del norte o $90^\circ - 63.4^\circ = 26.6^\circ$ al norte del este.

Suma de vectores

Ejemplo: Dos vectores de desplazamiento, \vec{S} y \vec{T} , tienen magnitudes $S = 3 \text{ m}$ y $T = 4 \text{ m}$.

¿Cuál de los siguientes resultados podría ser la magnitud de la diferencia vectorial $\vec{S} - \vec{T}$?

(Podría haber más de una respuesta correcta.)

- i) 9 m;
- ii) 7 m;
- iii) 5 m;
- iv) 1 m;
- v) 0 m;
- vi) -1 m.

Suma de vectores

Ejemplo: Dos vectores de desplazamiento, \vec{S} y \vec{T} , tienen magnitudes $S = 3 \text{ m}$ y $T = 4 \text{ m}$.

¿Cuál de los siguientes resultados podría ser la magnitud de la diferencia vectorial $\vec{S} - \vec{T}$?

(Podría haber más de una respuesta correcta.)

i) 9 m;

ii) 7 m;

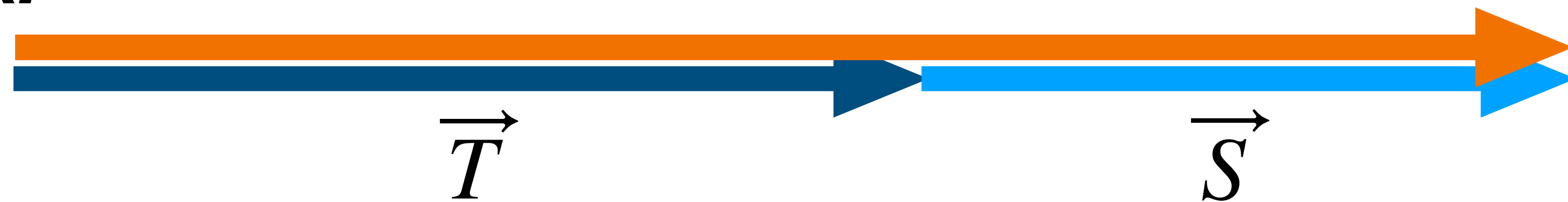
iii) 5 m;

iv) 1 m;

v) 0 m;

vi) -1 m.

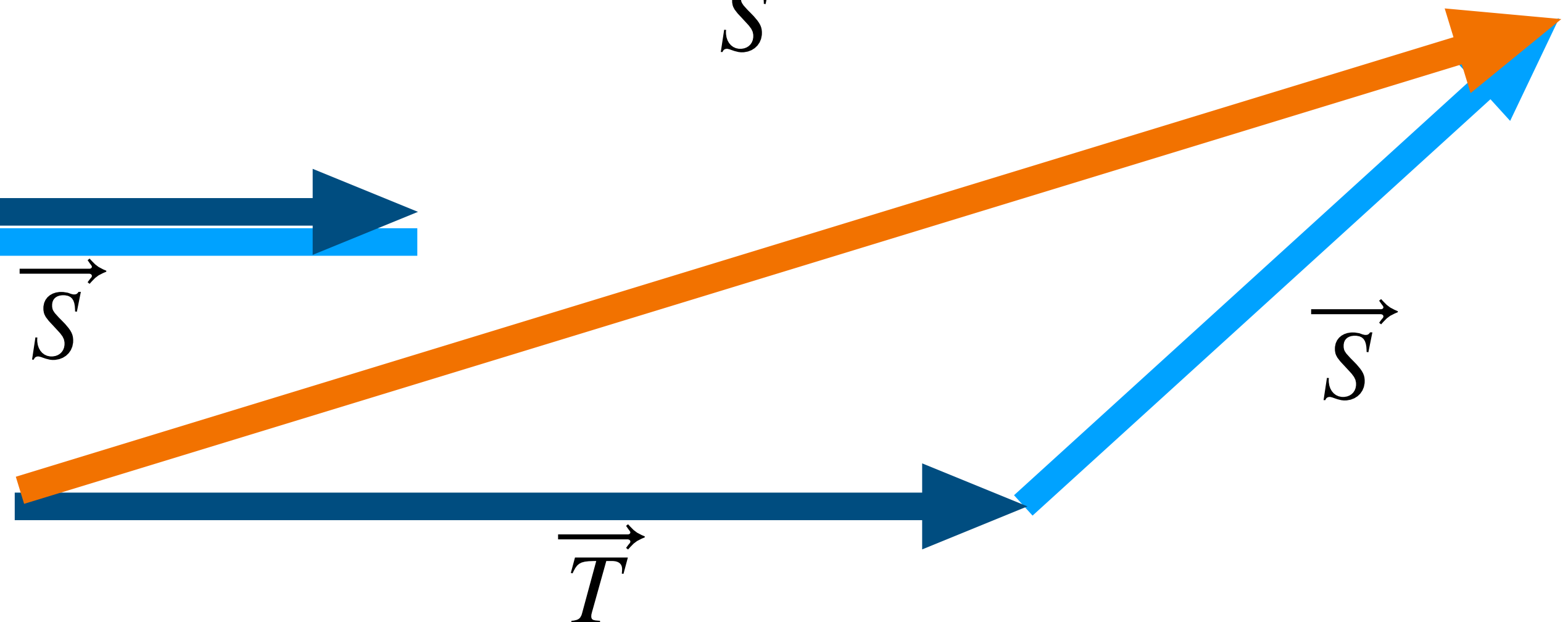
Max:



Min: \vec{T}



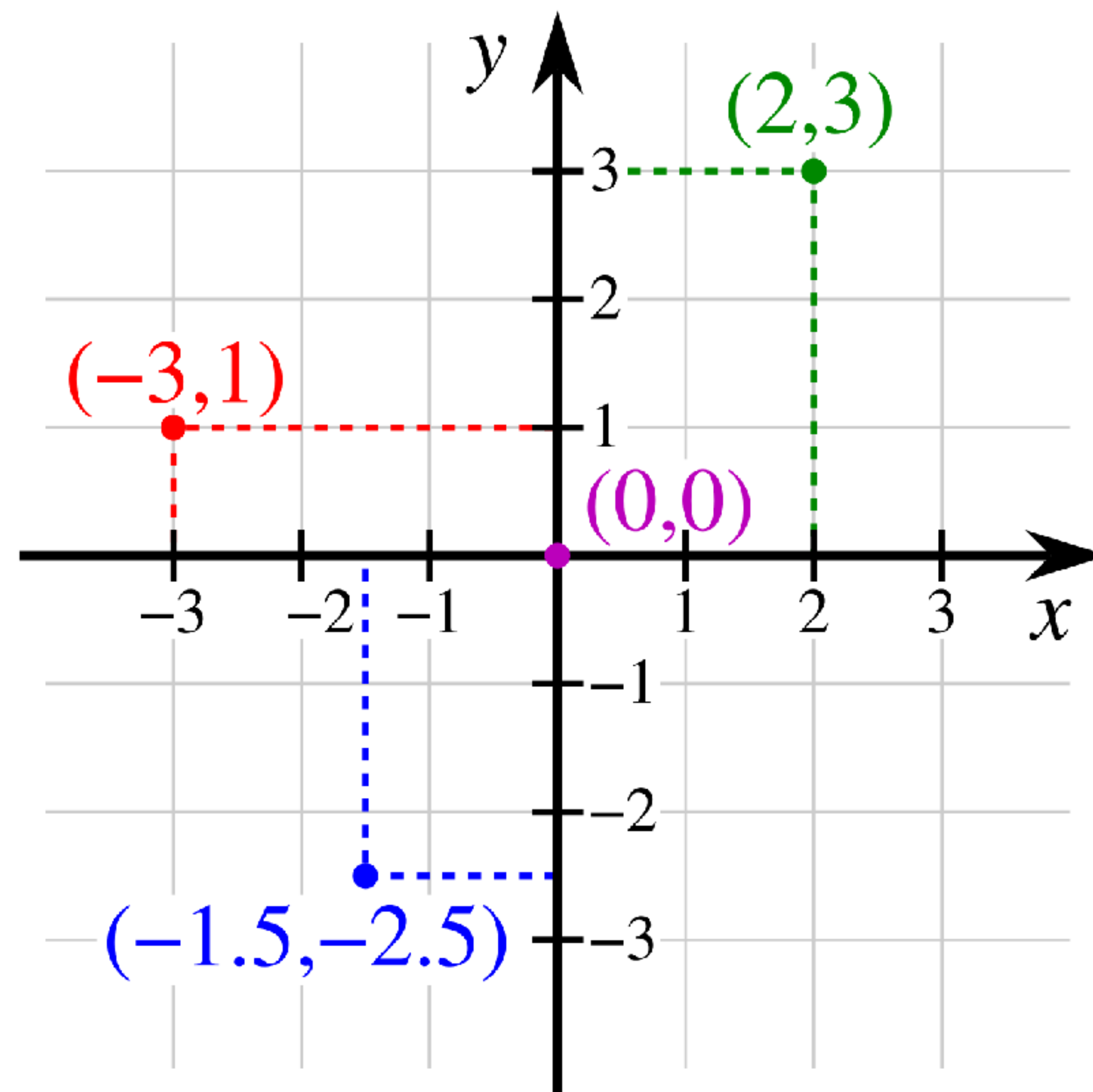
Entremedio:



Sistemas de Coordenadas

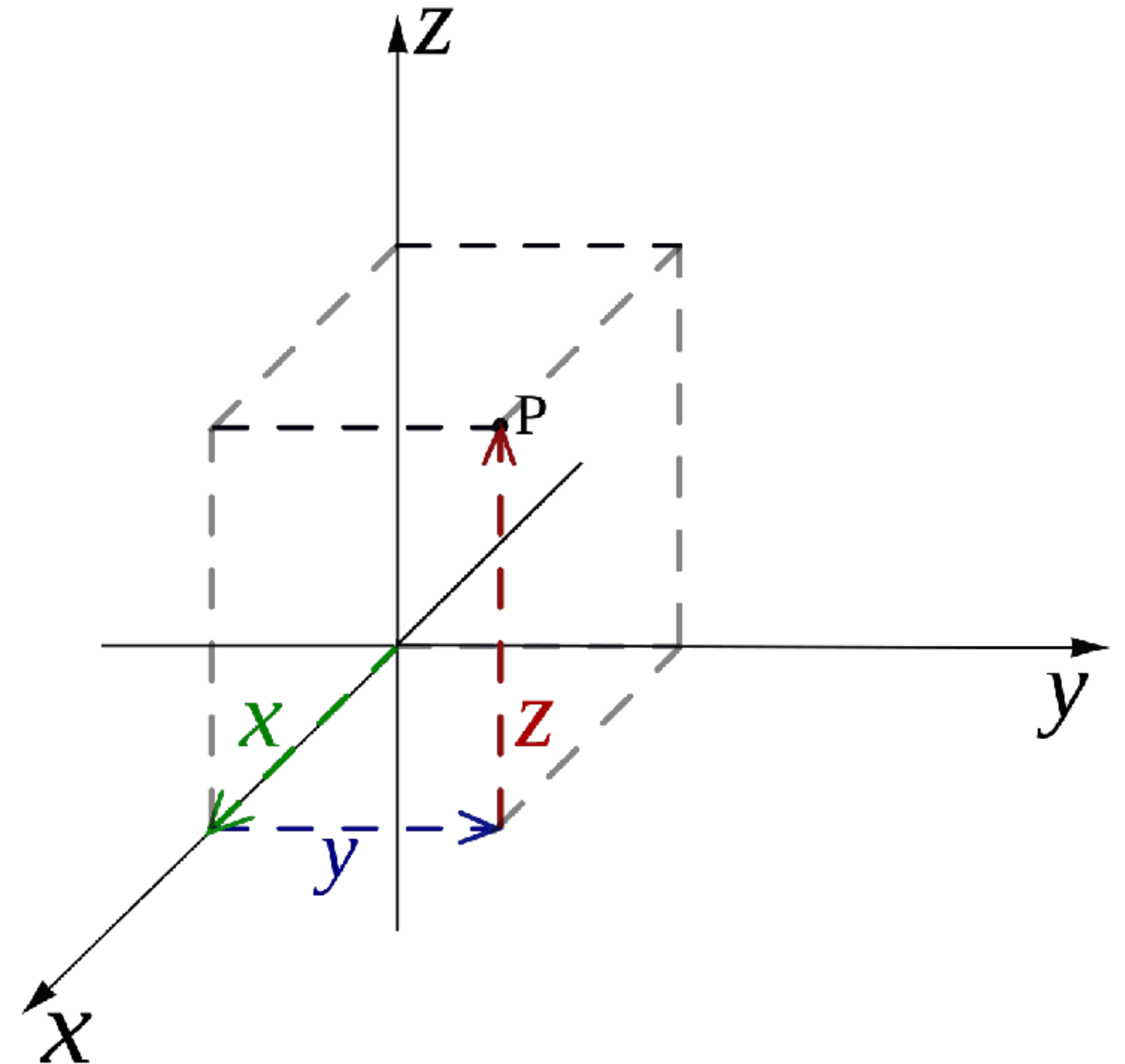
En geometría, un **sistema de coordenadas** es un **sistema de referencia** que utiliza uno o más números (coordenadas) para determinar inequívocamente la **posición de un punto u objeto geométrico**.

En un espacio euclídeo, un **sistema de coordenadas cartesianas** se define por dos o tres ejes ortogonales **igualmente escalados**, dependiendo de si es un sistema bidimensional o tridimensional (o n-dimensionales). El valor de cada una de las coordenadas de un punto es igual a la proyección ortogonal del vector de posición de dicho punto sobre un eje determinado.



Sistemas de Coordenadas

Un **sistema de coordenadas cartesianas** tridimensional.



Sistemas de Coordenadas

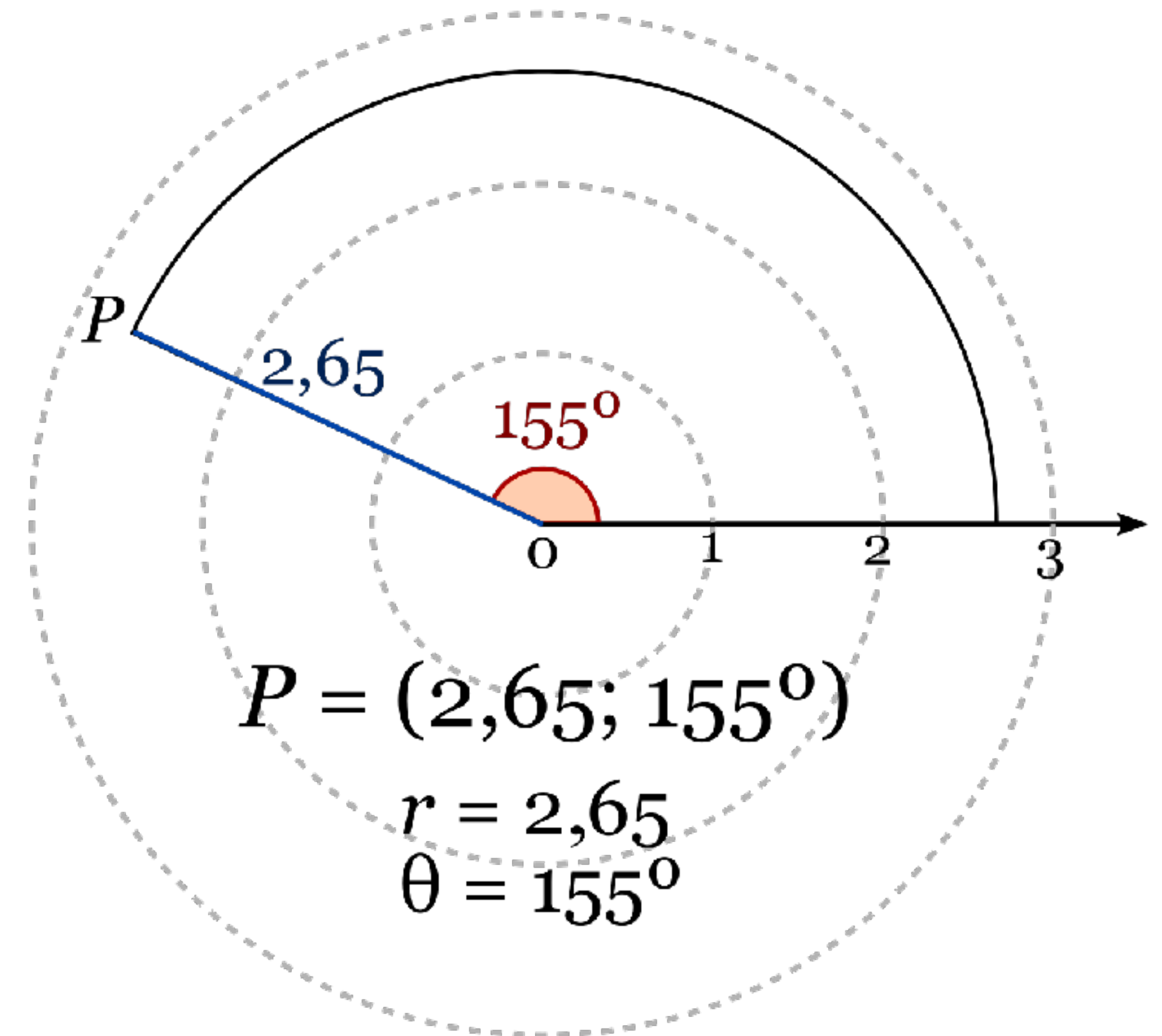
Coordenadas polares

Las **coordenadas polares** son un **sistema de coordenadas bidimensional** en el que cada punto o posición del plano se determina mediante **un ángulo y una distancia**.

Se elige un punto como polo y se toma una semirrecta desde este punto como eje polar.

Para un ángulo dado θ , hay una única línea recta que pasa por el polo cuyo ángulo con el eje polar es θ (medido en sentido contrario al de las agujas del reloj desde el eje hasta la línea).

Entonces hay un único punto en esta línea cuya distancia con signo al origen es r para un número dado r .



Sistemas de Coordenadas

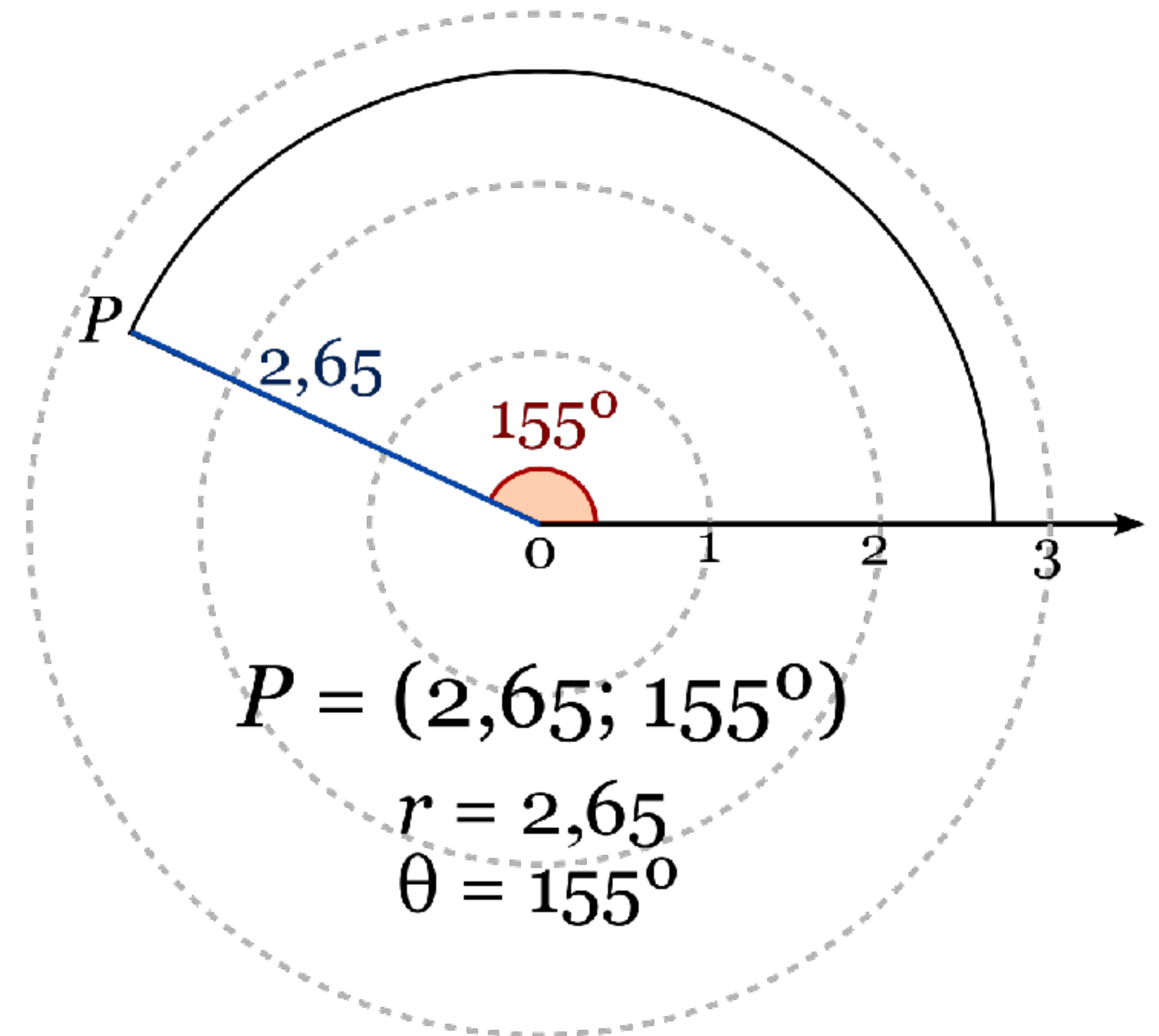
Coordenadas polares

Para un par de coordenadas dado (r, θ) hay un único punto,

pero cualquier punto está representado por muchos pares de coordenadas.

Por ejemplo, (r, θ) , $(r, \theta + 2\pi)$ y $(-r, \theta + \pi)$ son todas coordenadas polares para el mismo punto.

El polo está representado por $(0, \theta)$ para cualquier valor de θ .



Componentes de vectores

Un método sencillo pero general para sumar vectores: **el método de componentes**.

Para definir las componentes de un vector \vec{A} , partimos de un sistema rectangular de ejes de coordenadas (cartesiano) (figura 1.17) y luego dibujamos el vector con su cola en O , el origen del sistema.

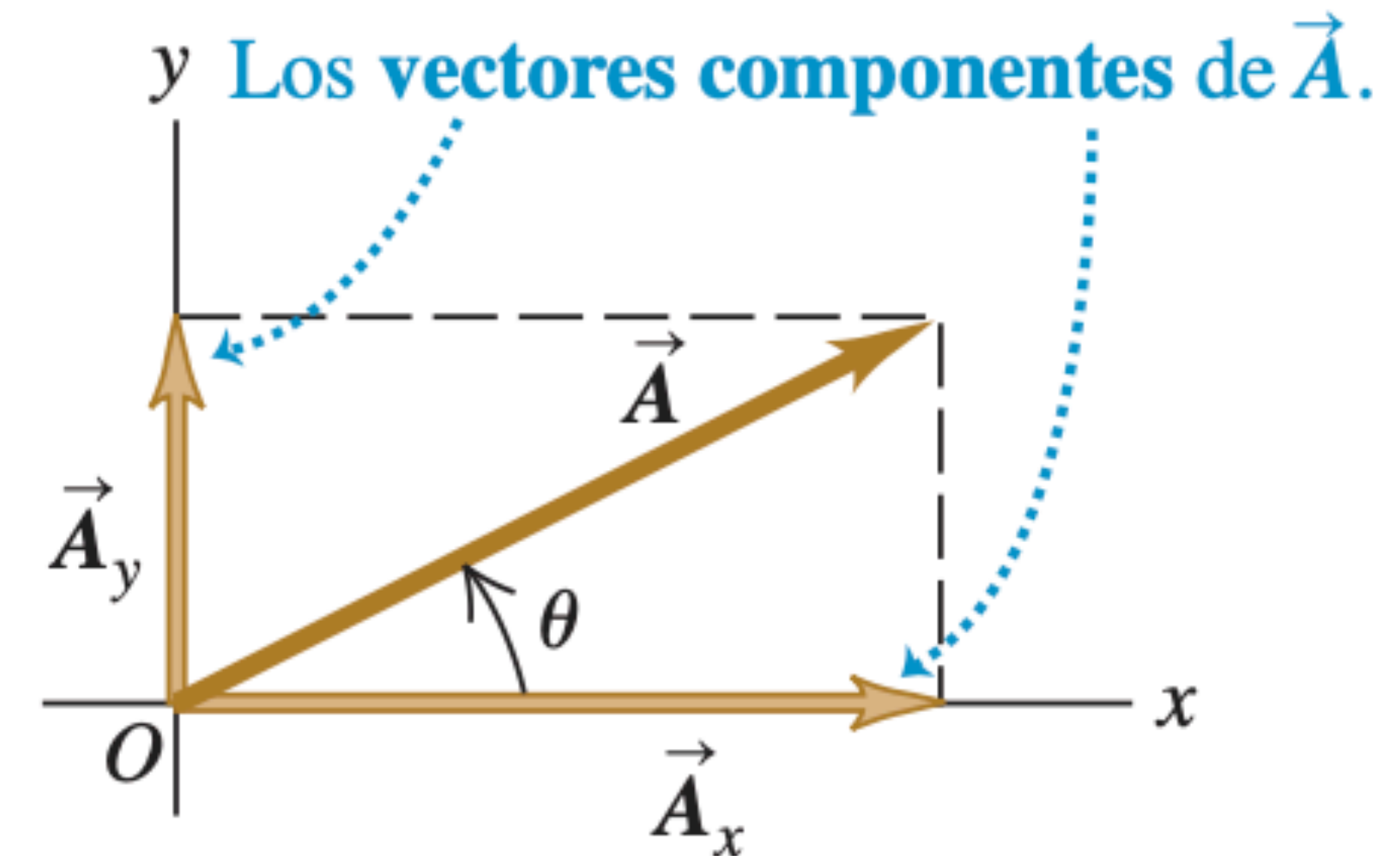
Podemos representar cualquier vector en el plano xy como la suma de un vector paralelo al eje x y un vector paralelo al eje y .

Rotulamos esos vectores como \vec{A}_x y \vec{A}_y en la figura 1.17a; son los **vectores componentes** del vector \vec{A} , y su suma vectorial es igual a \vec{A} . Simbólicamente,

$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y$$

1.17 Representación de un vector \vec{A} en términos de a) los vectores componentes \vec{A}_x y \vec{A}_y y b) las componentes A_x y A_y (en este caso, ambas son positivas).

a)



Componentes de vectores

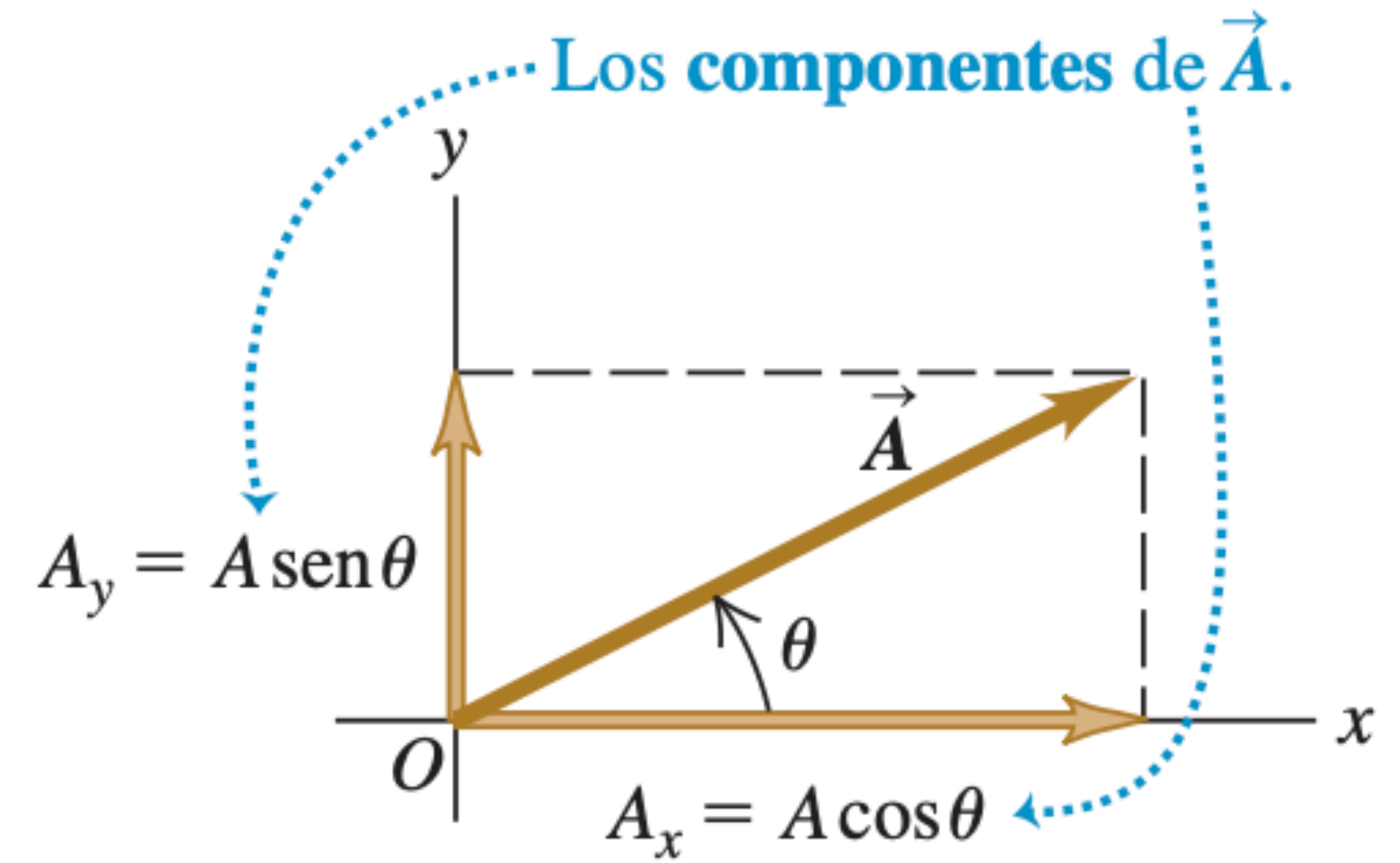
Puesto que **cada vector componente tiene la dirección de un eje de coordenadas**, sólo necesitamos un número para describirlo.

Si el vector componente \vec{A}_x apunta hacia la dirección x positiva, definimos el número A_x como la magnitud de \vec{A}_x . Si el vector componente \vec{A}_x apunta en la dirección x negativa, definimos el número A_x como el negativo de dicha magnitud (la magnitud de una cantidad vectorial en sí misma nunca es negativa).

Definimos el número A_y del mismo modo.

Los dos números A_x y A_y son las **componentes** de \vec{A} (figura 1.17b).

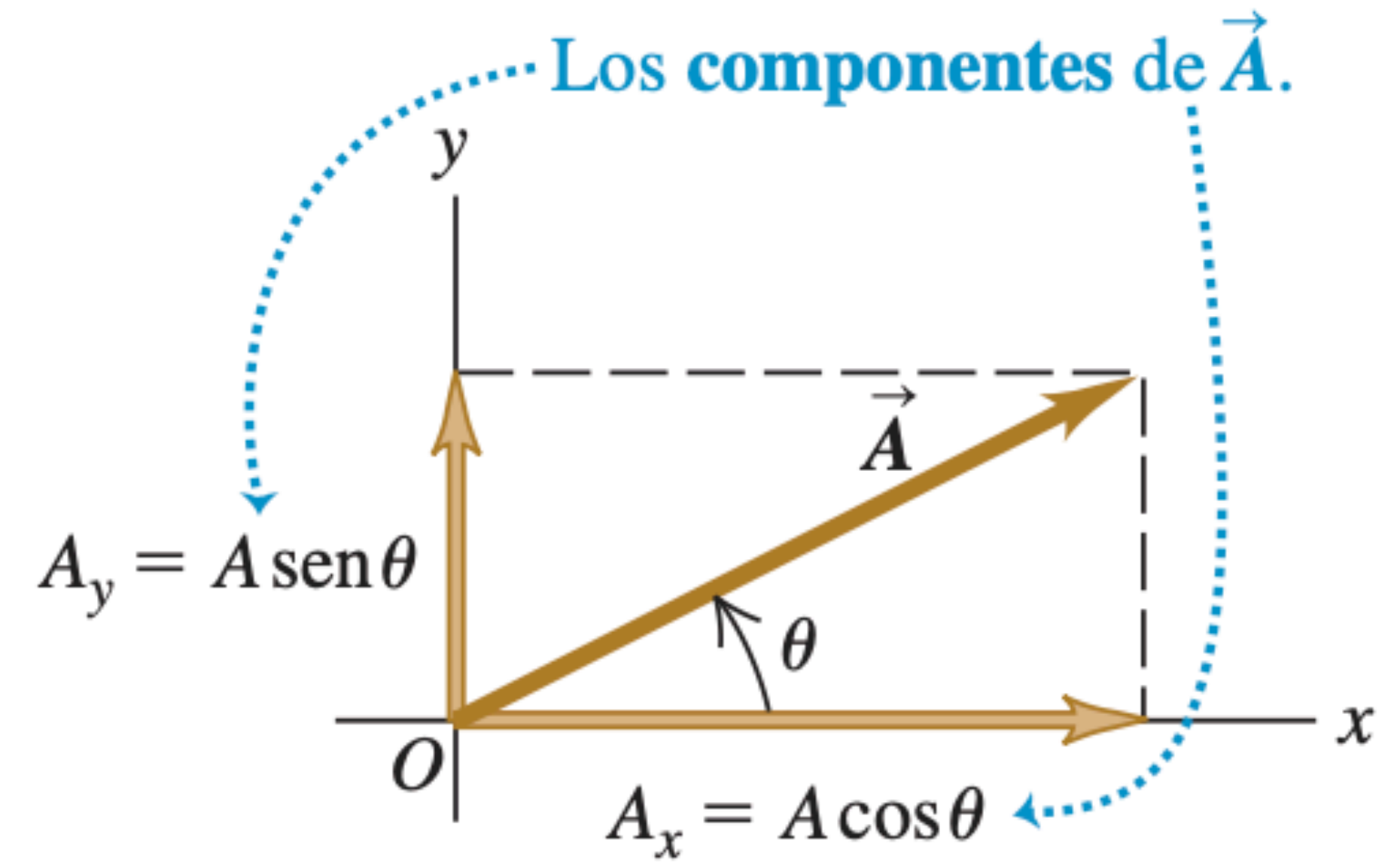
b)



Componentes de vectores

Las componentes no son vectores Las componentes A_x y A_y de un vector son tan sólo números: *no son vectores*. Por ello, las simbolizamos con letra cursiva normal *sin* flecha arriba, en vez de la letra cursiva negrita con flecha que está reservadas para los vectores.

b)



Componentes de vectores

Podemos **calcular las componentes** del vector \vec{A} si conocemos la magnitud A y su dirección.

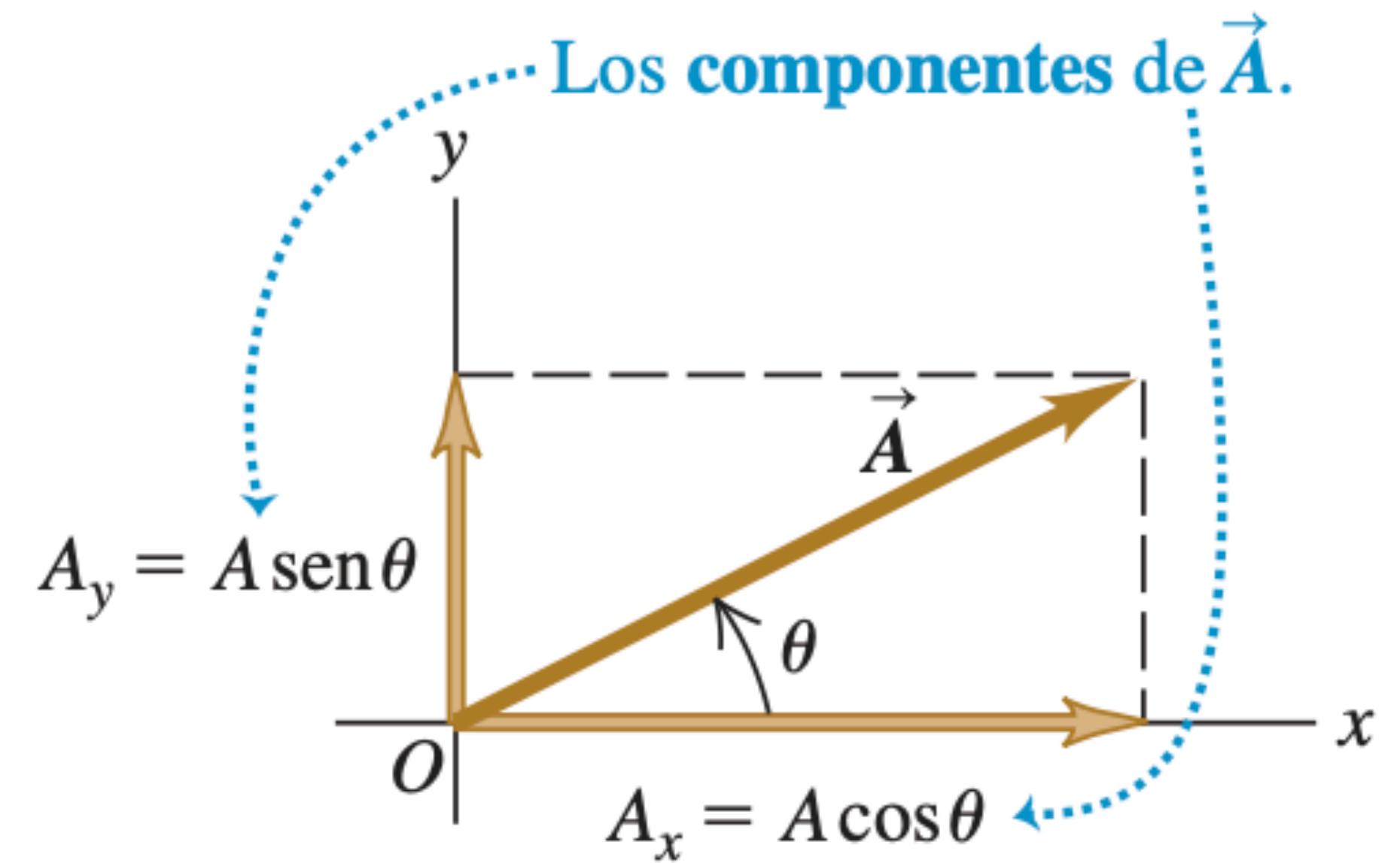
Describiremos la dirección de un vector con su **ángulo relativo a una dirección de referencia**, que en la figura 1.17b es el eje x positivo, y el ángulo entre el vector \vec{A} y el eje x positivo es θ (la letra griega theta). Imagine que el vector \vec{A} yace originalmente sobre el eje $+x$ y luego lo gira hasta su dirección correcta, como indica la flecha sobre el ángulo θ en la figura 1.17b.

Si la rotación es del eje **$+x$ al eje $+y$** , como indica la figura 1.17b, entonces θ es **positivo**;

si la rotación es del eje **$+x$ al eje $-y$** , entonces θ es **negativo**.

Por lo tanto, el eje $+y$ está a un ángulo de 90° , el eje $-x$ está a 180° y el eje $-y$ está a 270° (o -90°).

b)



Componentes de vectores

Si medimos θ de esta manera, entonces por la definición de las funciones trigonométricas,

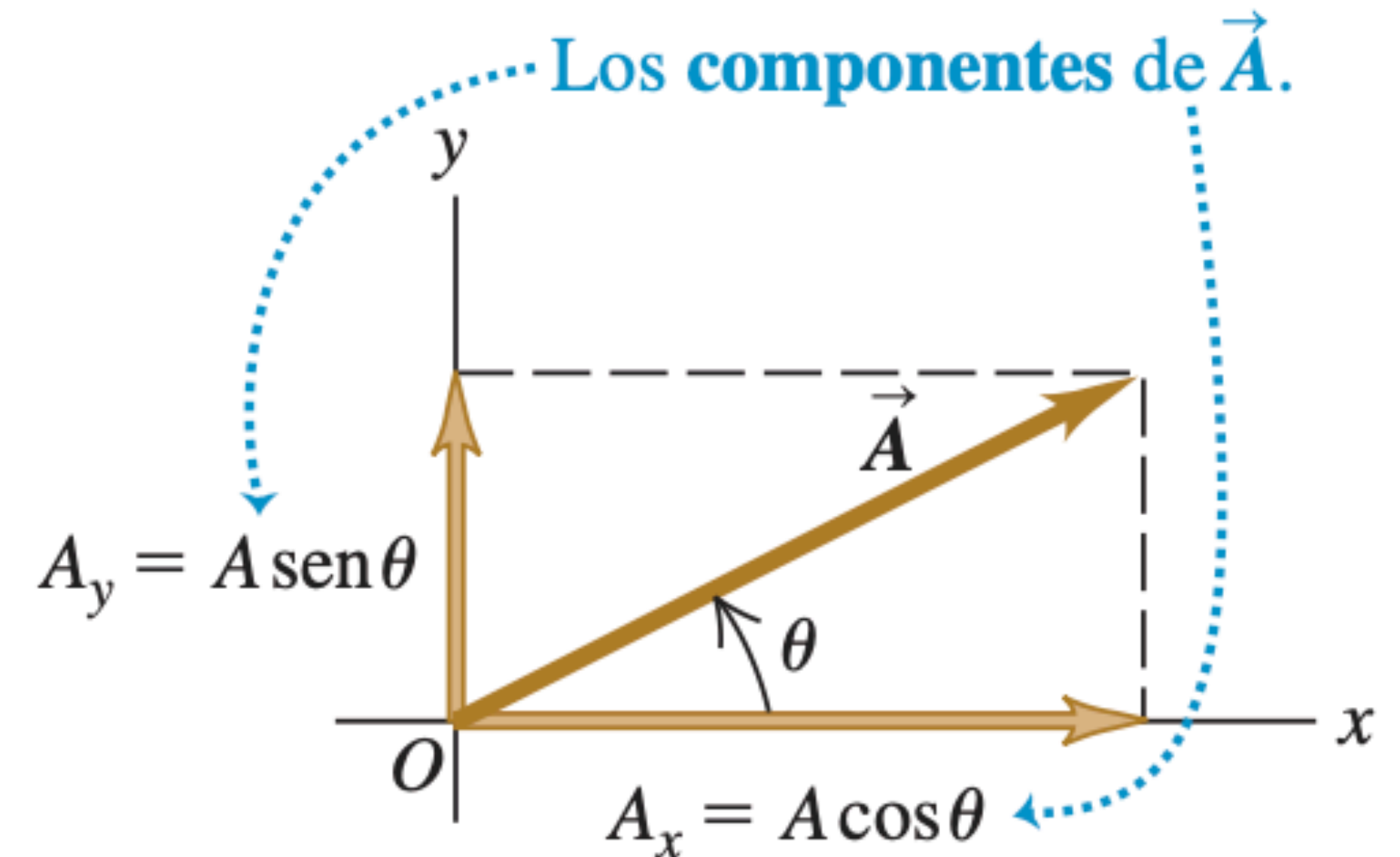
$$\frac{A_x}{A} = \cos \theta \quad \text{y} \quad \frac{A_y}{A} = \text{sen } \theta$$
$$A_x = A \cos \theta \quad \text{y} \quad A_y = A \text{sen } \theta$$

(θ medido del eje $+x$ girando hacia el eje $+y$)

En la figura 1.17b, A_x es positiva porque su dirección está sobre el eje $+x$, y A_y es positiva porque su dirección está en el eje $+y$.

θ está en el primer cuadrante (entre 0 y 90°) y tanto el coseno como el seno del ángulo son positivos en este cuadrante.

b)



Componentes de vectores

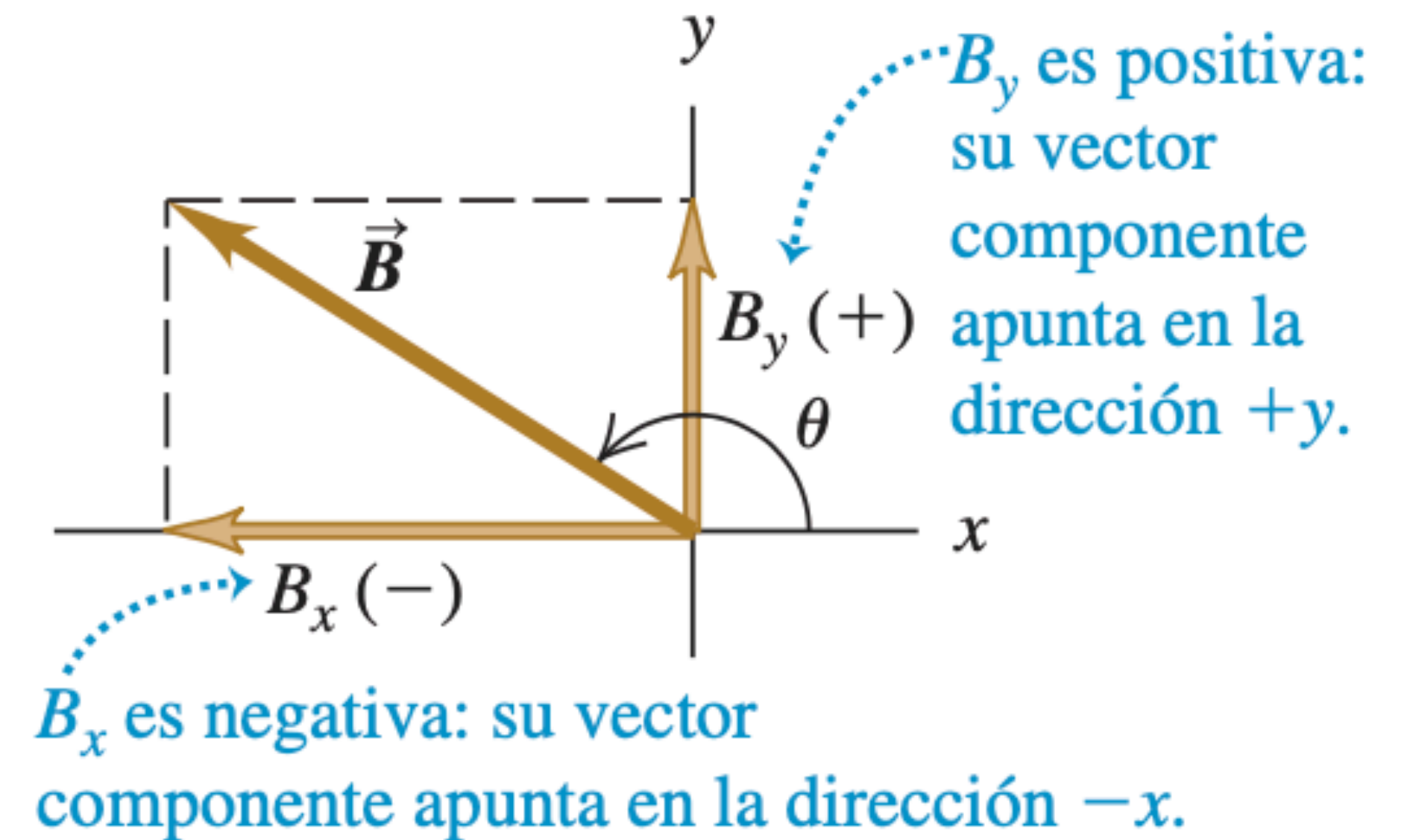
En cambio, en la figura 1.18a, la componente B_x es **negativa**: su dirección es opuesta a la dirección del eje $+x$.

El coseno de un ángulo en el segundo cuadrante es negativo.

La componente B_y es positiva (sen θ es positivo en el segundo cuadrante).

1.18 Las componentes de un vector pueden ser números positivos o negativos.

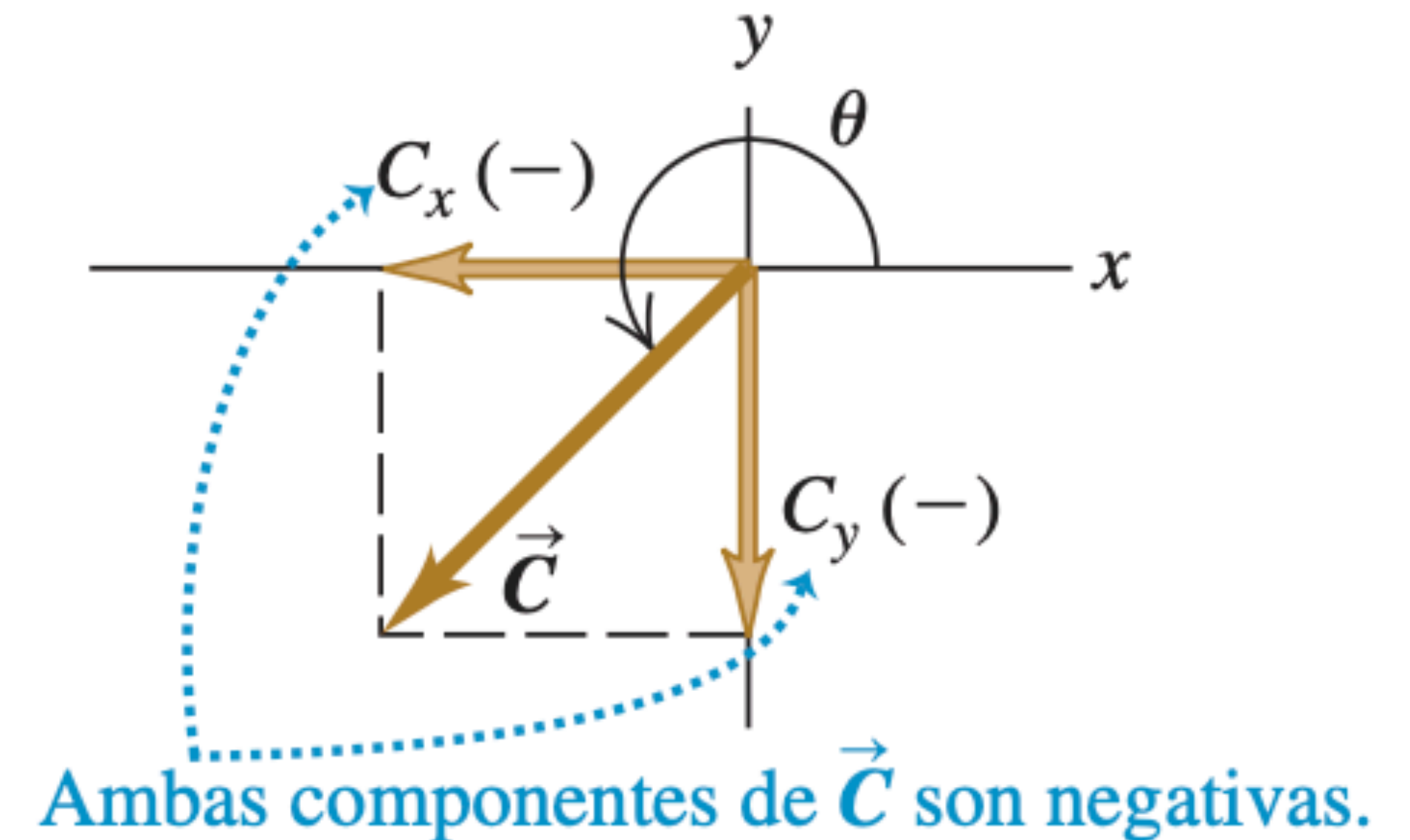
a)



Componentes de vectores

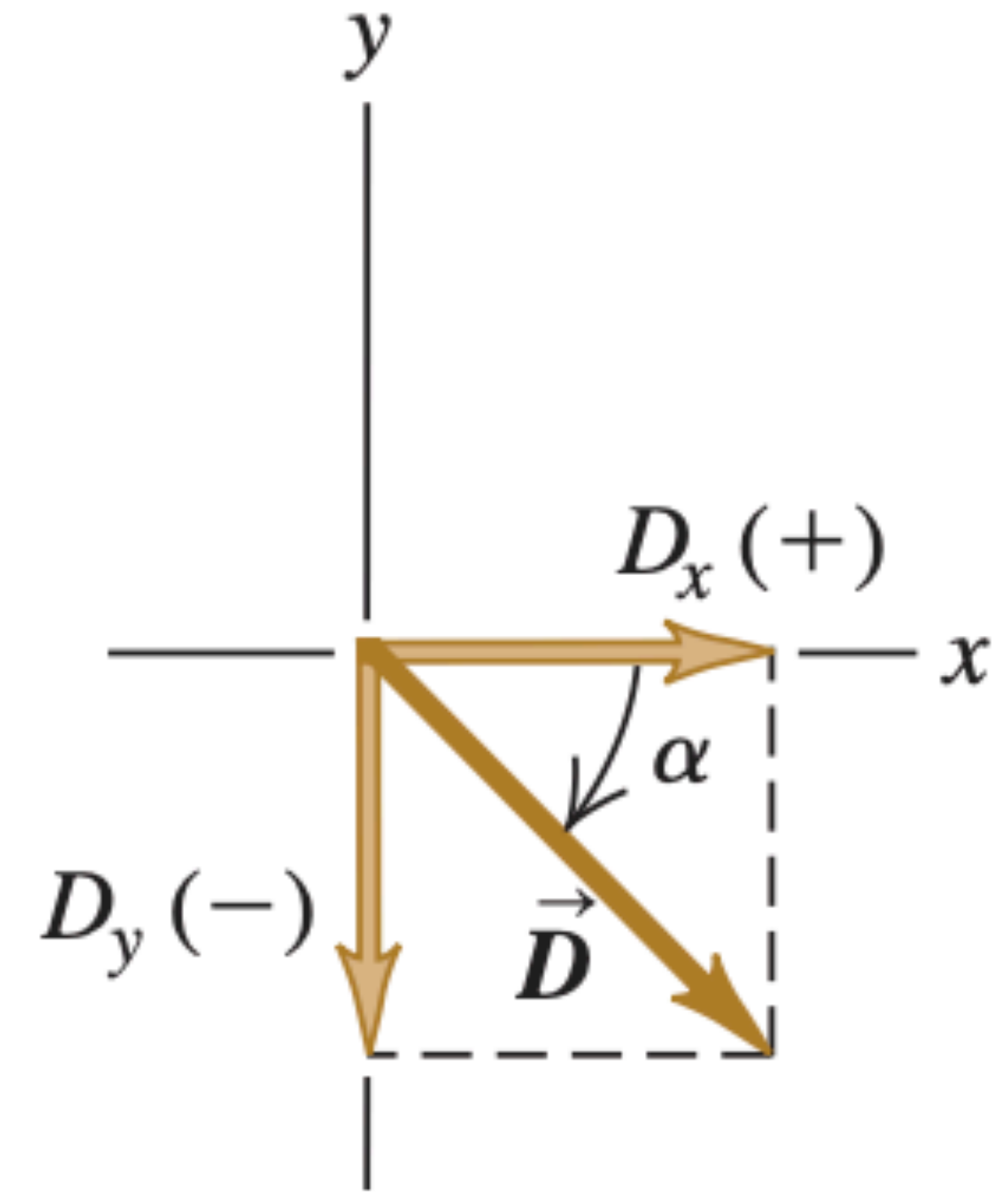
En la figura 1.18b, tanto C_x como C_y son negativas ($\cos \theta$ y $\sin \theta$ son negativos en el tercer cuadrante).

b)



Componentes de vectores

a) ¿Cuáles son las componentes x y y del vector \vec{D} en la figura?
La magnitud del vector es $D = 3.00$ m y el ángulo es $\alpha = 45^\circ$.



Componentes de vectores

a) ¿Cuáles son las componentes x y y del vector \vec{D} en la figura?

La magnitud del vector es $D = 3.00 \text{ m}$ y el ángulo es $\alpha = 45^\circ$.

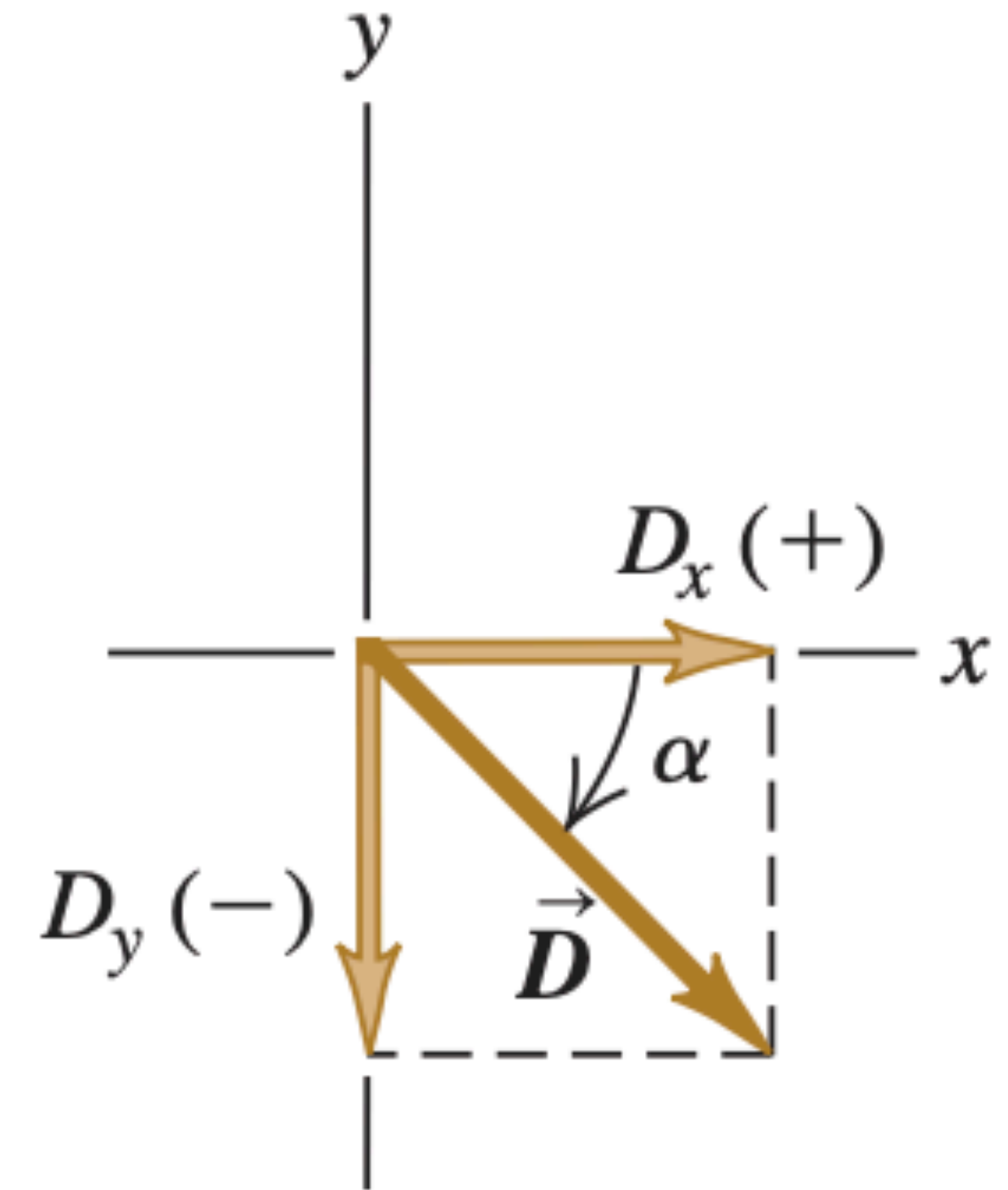
IDENTIFICAR: En cada caso, se nos dan la magnitud y la dirección de un vector, y se nos pide calcular sus componentes.

EJECUTAR: a) El ángulo entre \vec{D} y el eje x positivo es α ; pero este ángulo se mide hacia el eje y *negativo*. Por lo tanto, en las ecuaciones debemos usar el ángulo $\theta = -\alpha = -45^\circ$. Obtenemos

$$D_x = D \cos \theta = (3.00 \text{ m}) (\cos(-45^\circ)) = +2.1 \text{ m}$$

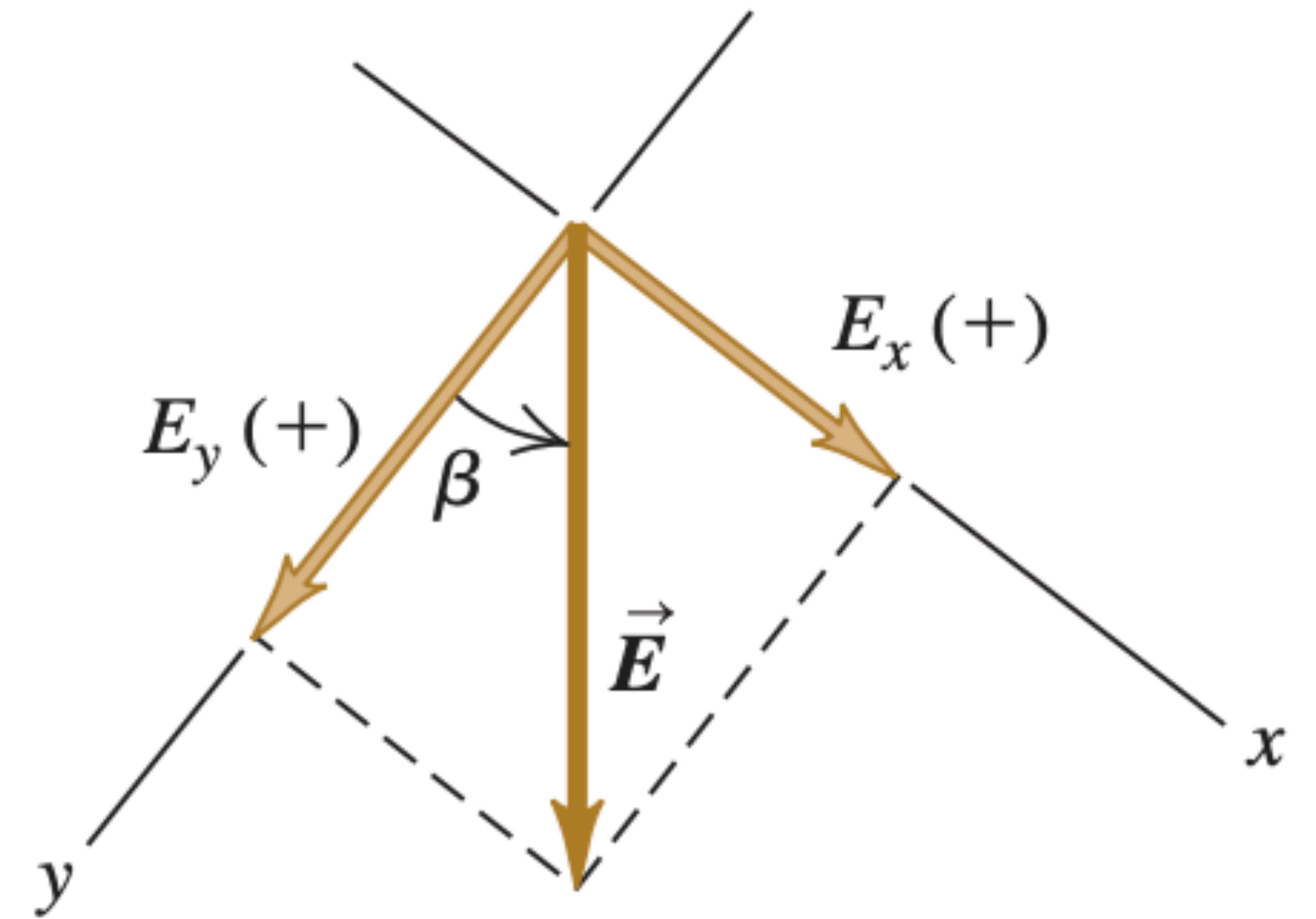
$$D_y = D \sin \theta = (3.00 \text{ m}) (\sin(-45^\circ)) = -2.1 \text{ m}$$

El vector tiene una componente x positiva y una componente y negativa, como se muestra en la figura. Si por descuido hubiéramos usado $\theta = +45^\circ$, habríamos obtenido D_y con el signo equivocado.



Componentes de vectores

b) ¿Cuáles son las componentes x y y del vector \vec{E} en la figura?
La magnitud del vector es $E = 4.50$ m y el ángulo $\beta = 37.0^\circ$.



Componentes de vectores

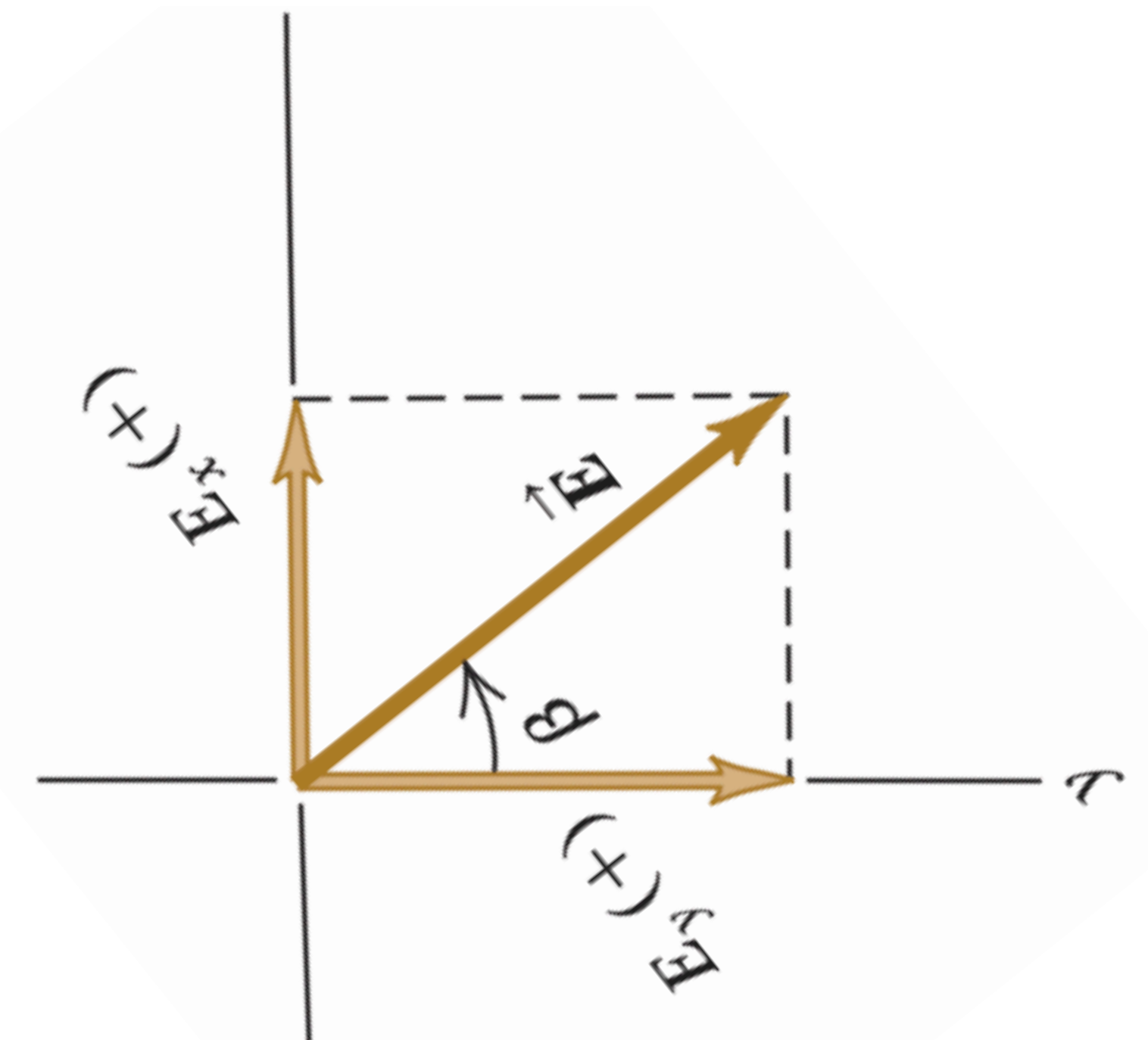
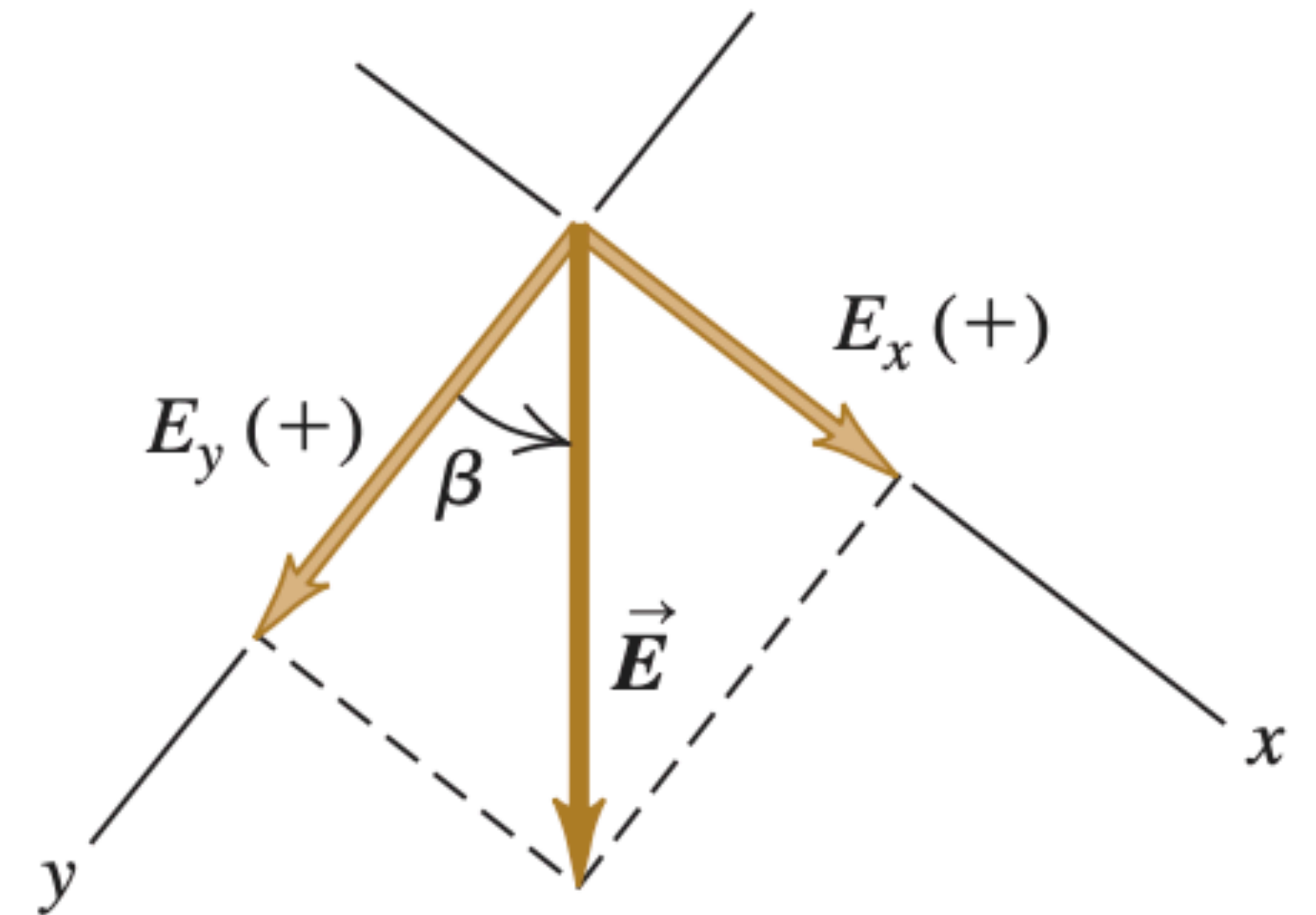
b) El eje x no es horizontal en la figura 1.19b, ni el eje y es vertical. **Los ejes x y y pueden tener *cualquier* orientación, siempre y cuando los ejes sean perpendiculares entre sí.**

Aquí el ángulo β es el ángulo entre \vec{E} y el eje $+y$, *no* el eje $+x$. Observe que \vec{E} define la hipotenusa de un triángulo **rectángulo**; los otros dos lados del triángulo son las magnitudes de E_x y E_y , es decir, las componentes x y y de \vec{E} .

El seno de β es el cateto opuesto (la magnitud E_x) dividido entre la hipotenusa (la magnitud E); en tanto que el coseno de β es el cateto adyacente (la magnitud de E_y) dividido entre la hipotenusa (otra vez, la magnitud E). **Ambas componentes de \vec{E} son positivas, así que**

$$E_x = E \sin \beta = (4.50 \text{ m})(\sin 37.0^\circ) = +2.71 \text{ m}$$

$$E_y = E \cos \beta = (4.50 \text{ m})(\cos 37.0^\circ) = +3.59 \text{ m}$$



Componentes de vectores

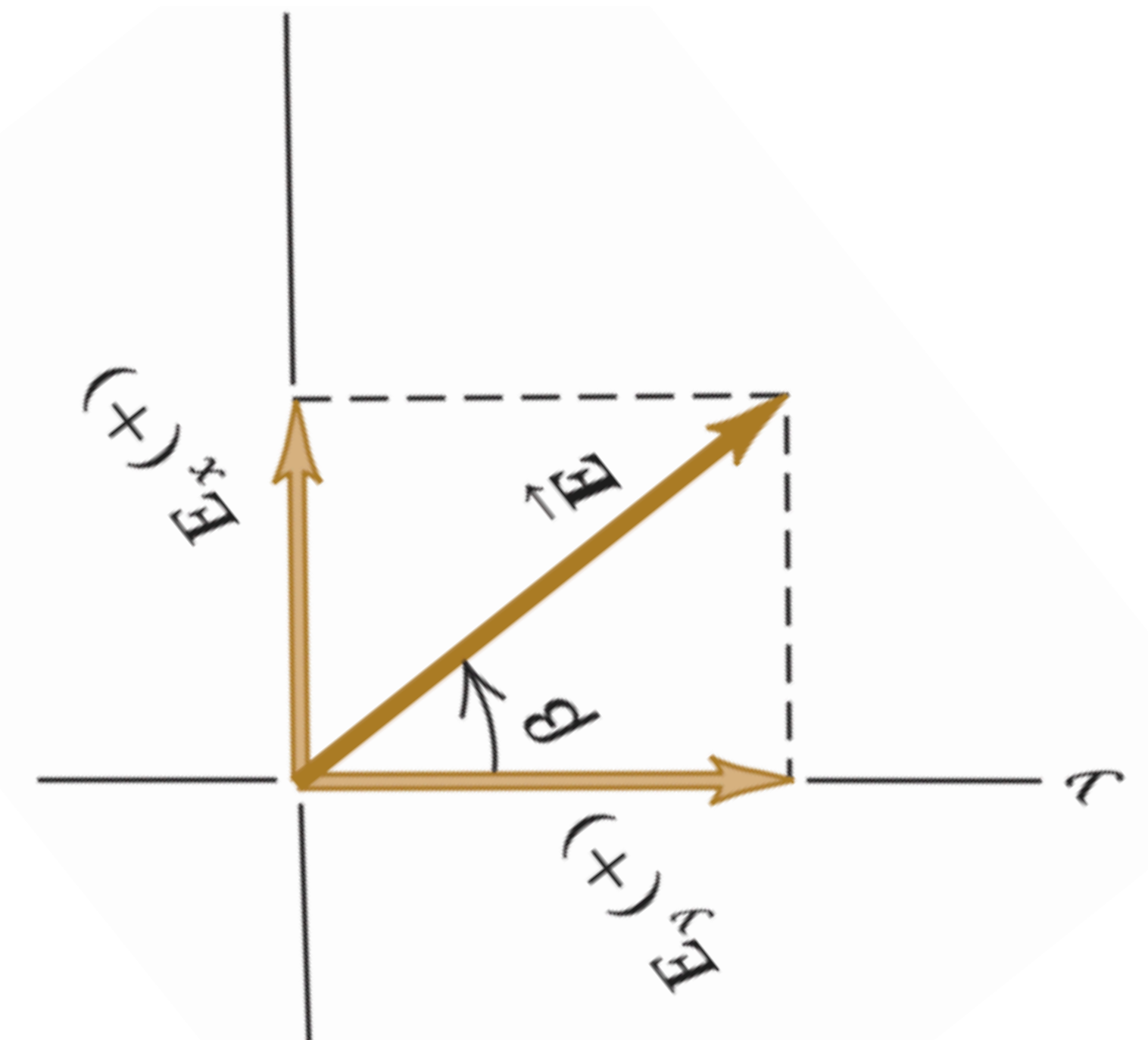
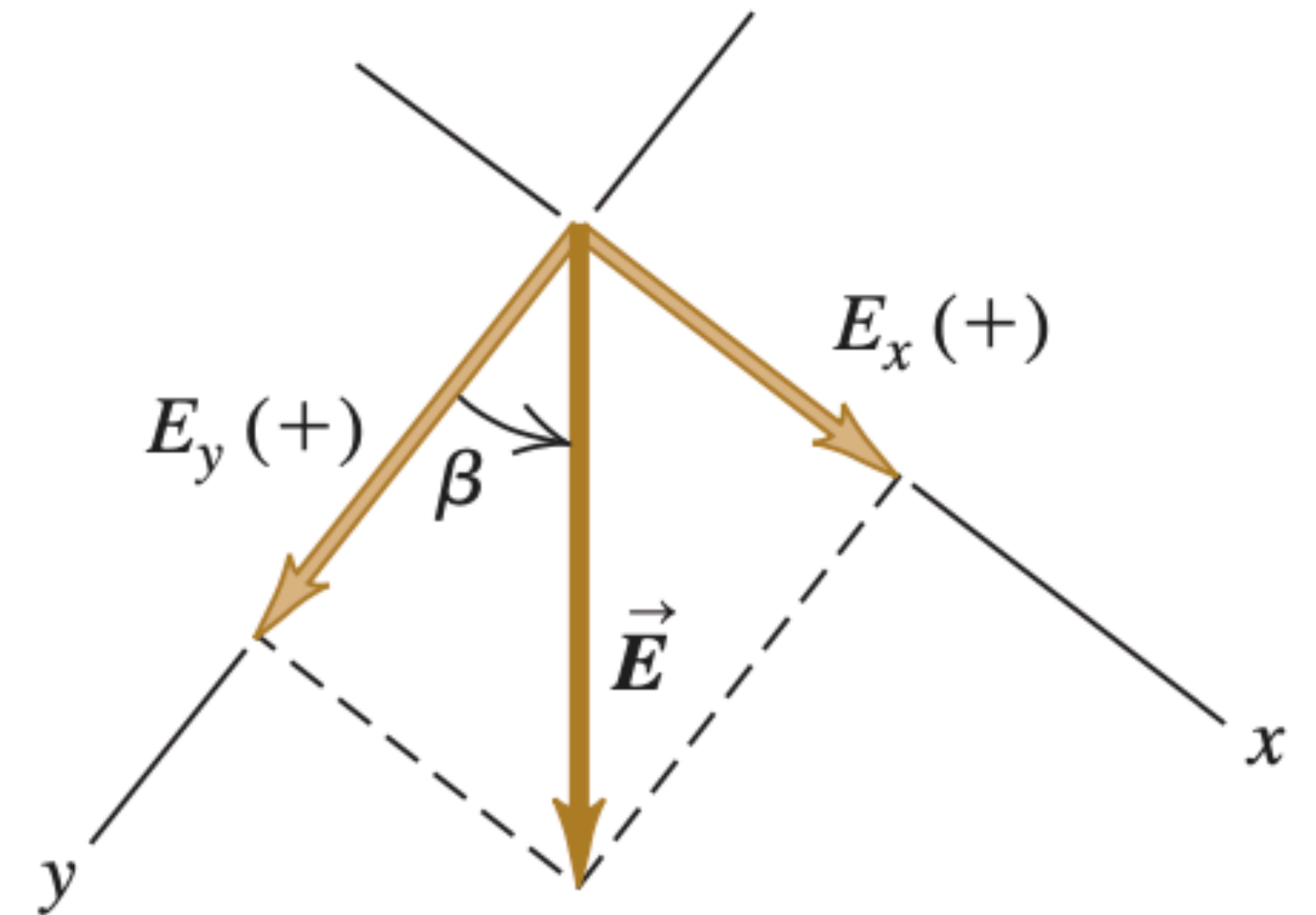
b) El eje x no es horizontal en la figura 1.19b, ni el eje y es vertical. **Los ejes x y y pueden tener *cualquier* orientación, siempre y cuando los ejes sean perpendiculares entre sí.**

Aquí el ángulo β es el ángulo entre \vec{E} y el eje $+y$, *no* el eje $+x$. Observe que \vec{E} define la hipotenusa de un triángulo **rectángulo**; los otros dos lados del triángulo son las magnitudes de E_x y E_y , es decir, las componentes x y y de \vec{E} .

El seno de β es el cateto opuesto (la magnitud E_x) dividido entre la hipotenusa (la magnitud E); en tanto que el coseno de β es el cateto adyacente (la magnitud de E_y) dividido entre la hipotenusa (otra vez, la magnitud E). **Ambas componentes de \vec{E} son positivas, así que**

$$E_x = E \sin \beta = (4.50 \text{ m})(\sin 37.0^\circ) = +2.71 \text{ m}$$

$$E_y = E \cos \beta = (4.50 \text{ m})(\cos 37.0^\circ) = +3.59 \text{ m}$$



Cálculos de vectores usando componentes

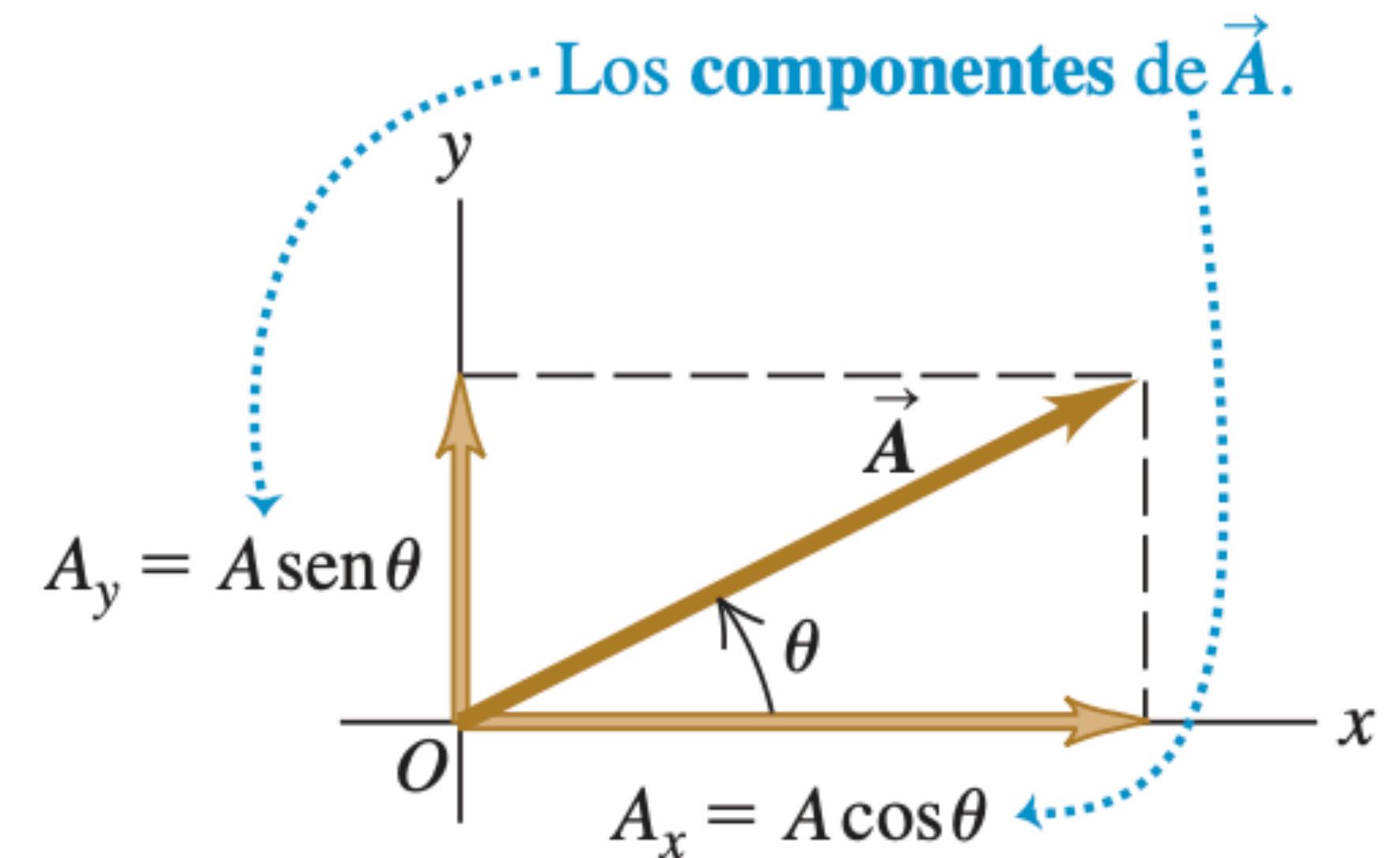
Utilizar componentes hace relativamente fáciles diversos cálculos que implican vectores. Veamos tres ejemplos importantes.

1. Cálculo de la magnitud y la dirección de un vector a partir de sus componentes. Podemos describir un vector plenamente dando su magnitud y dirección, o bien, sus componentes x . También podemos invertir el proceso y obtener la magnitud y la dirección a partir de las componentes. Aplicando el teorema de Pitágoras a la figura 1.17b, vemos que la magnitud de un vector \vec{A} es

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$$

Es válida para cualesquiera ejes x y y , siempre y cuando sean perpendiculares entre sí.

b)



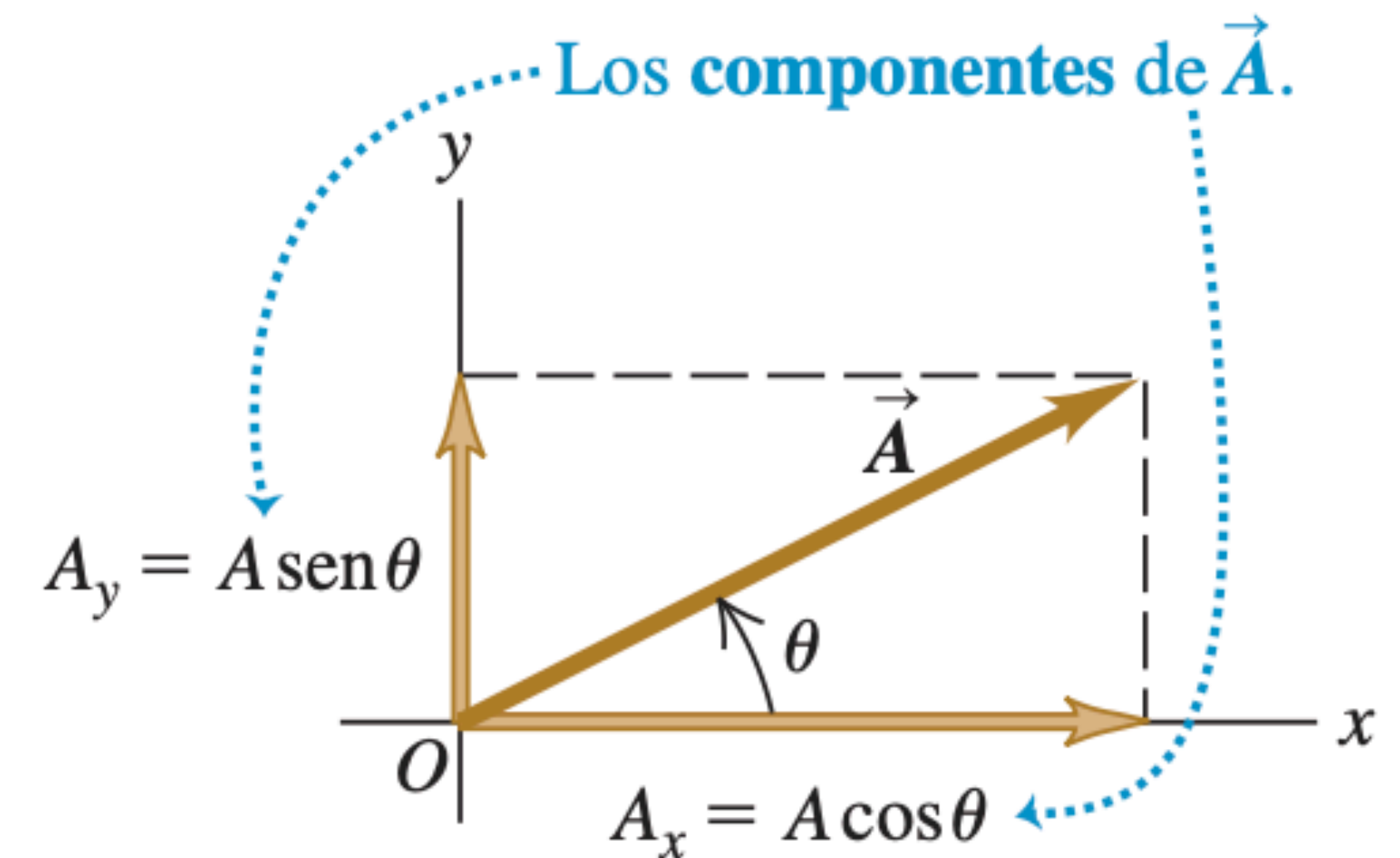
Cálculos de vectores usando componentes

La expresión para la dirección vectorial proviene de la definición de la tangente de un ángulo. Si medimos θ desde el eje $+x$, y un ángulo positivo se mide hacia el eje $+y$ (como en la figura), entonces

$$\tan \theta = \frac{A_y}{A_x} \quad \text{y} \quad \theta = \arctan \frac{A_y}{A_x}$$

Usaremos la notación \arctan para la función tangente inversa. También suele usarse la notación \tan^{-1}

b)



Cálculos de vectores usando componentes

Cálculo de la dirección de un vector a partir de sus componentes Hay un pequeño inconveniente en el uso de las ecuaciones para obtener θ .

Suponga que $A_x = 2 \text{ m}$ y $A_y = -2 \text{ m}$ como en la figura 1.20; entonces $\tan\theta = -1$. Sin embargo, hay dos ángulos con tangente -1, 135 y 315° (o -45°).

En general, cualesquiera dos ángulos que difieran en 180° tienen la misma tangente.

Para decidir cuál es correcto, debemos **examinar las componentes individuales**. Dado que A_x es positiva y A_y es negativa, el ángulo debe estar en el 4° así que $\theta = 315^\circ$ (o -45°) es el valor correcto.

La mayoría de las calculadoras dan $\arctan(-1) = -45^\circ$.

En este caso es lo correcto, pero si tuviéramos $A_x = -2 \text{ m}$ y $A_y = 2 \text{ m}$, entonces el ángulo correcto es 135°.

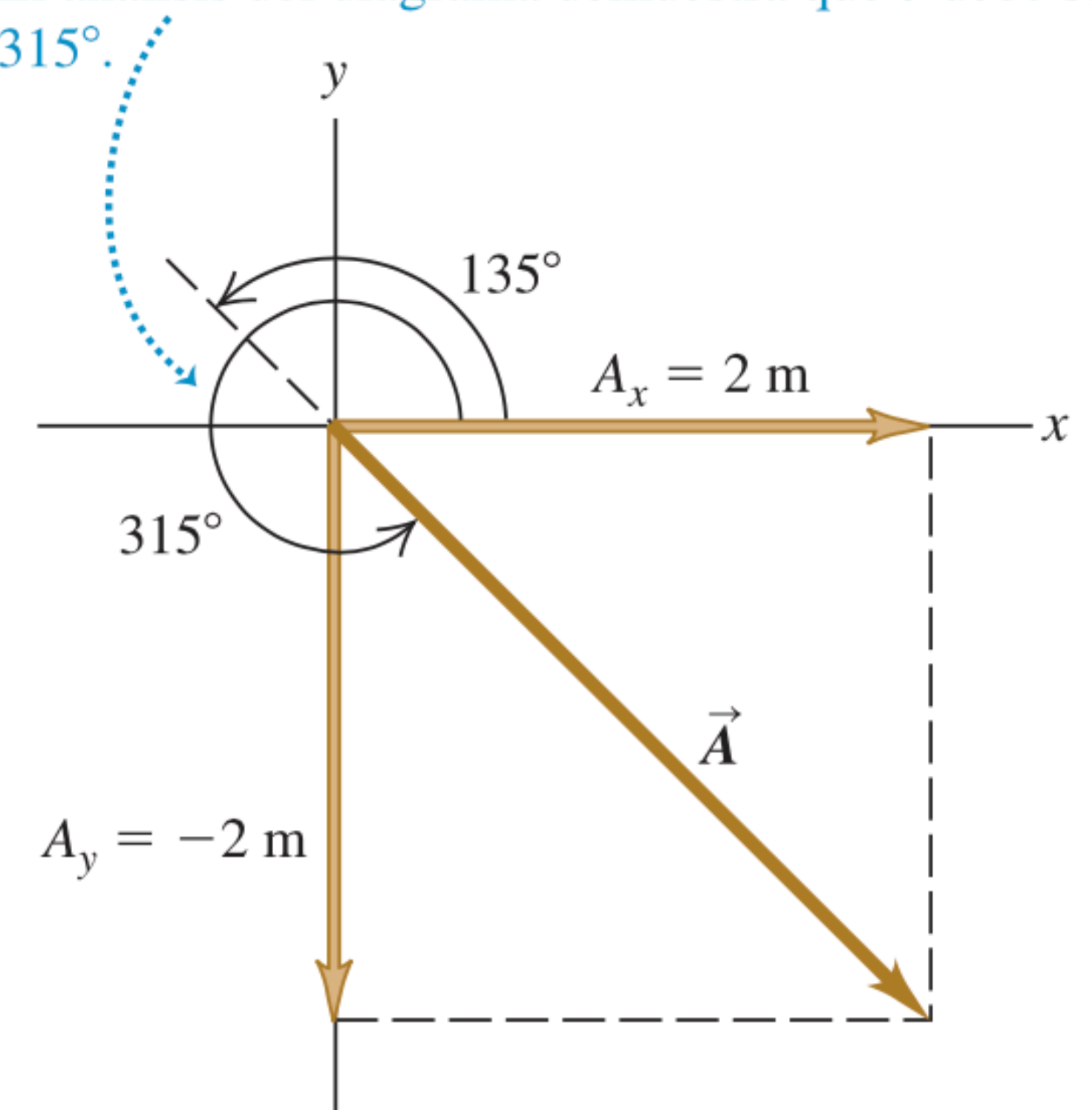
Siempre debe hacerse un dibujo, como la figura 1.20, para verificar cuál de las dos posibilidades es la correcta.

1.20 Elaborar un diagrama de vectores indica los signos de sus componentes x y y .

Suponga que $\tan\theta = \frac{A_y}{A_x} = -1$.

¿Cuál es el valor de θ ?

Dos ángulos tienen tangentes de -1: 135 y 315°. El análisis del diagrama demuestra que θ debe ser 315°.



Cálculos de vectores usando componentes

2. Multiplicación de un vector por un escalar.

Si multiplicamos un vector \vec{A} por un escalar c , cada componente del producto $\vec{D} = c\vec{A}$ es sólo el producto de c por la componente correspondiente de \vec{A} :

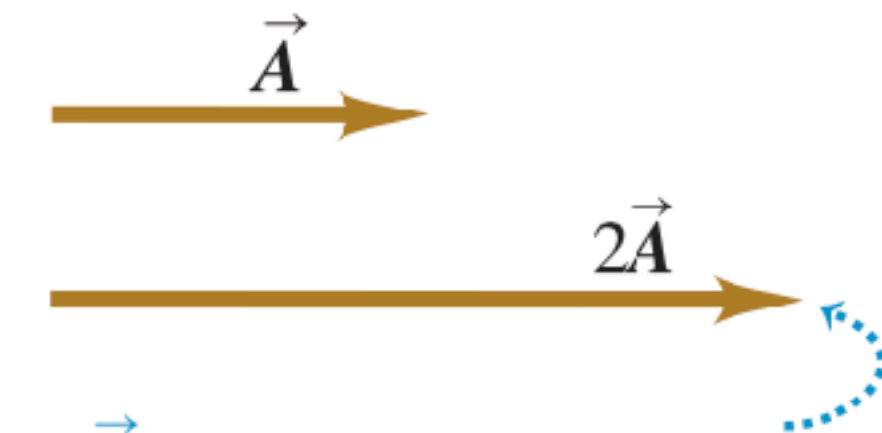
$$D_x = cA_x \quad D_y = cA_y \quad (\text{componentes de } \vec{D} = c\vec{A})$$

Por ejemplo, cada componente del vector $2\vec{A}$ es dos veces mayor que la componente correspondiente del vector \vec{A} , de manera que $2\vec{A}$ está en la misma dirección que \vec{A} pero tiene el doble de magnitud.

Cada componente del vector $-3\vec{A}$ es tres veces mayor que la componente correspondiente del vector \vec{A} pero tiene el signo contrario, así que $-3\vec{A}$ está en la dirección opuesta de \vec{A} y tiene una magnitud tres veces más grande.

1.15 Multiplicación de un vector a) por un escalar positivo y b) por un escalar negativo.

a) Al multiplicar un vector por un escalar positivo, la magnitud (longitud) del vector podría cambiar, pero no su dirección.



$2\vec{A}$ es dos veces más grande que \vec{A} .

b) Al multiplicar un vector por un escalar negativo, podría cambiar su magnitud e invertir su dirección.



$-3\vec{A}$ es tres veces más grande que \vec{A} y apunta en la dirección contraria.

Cálculos de vectores usando componentes

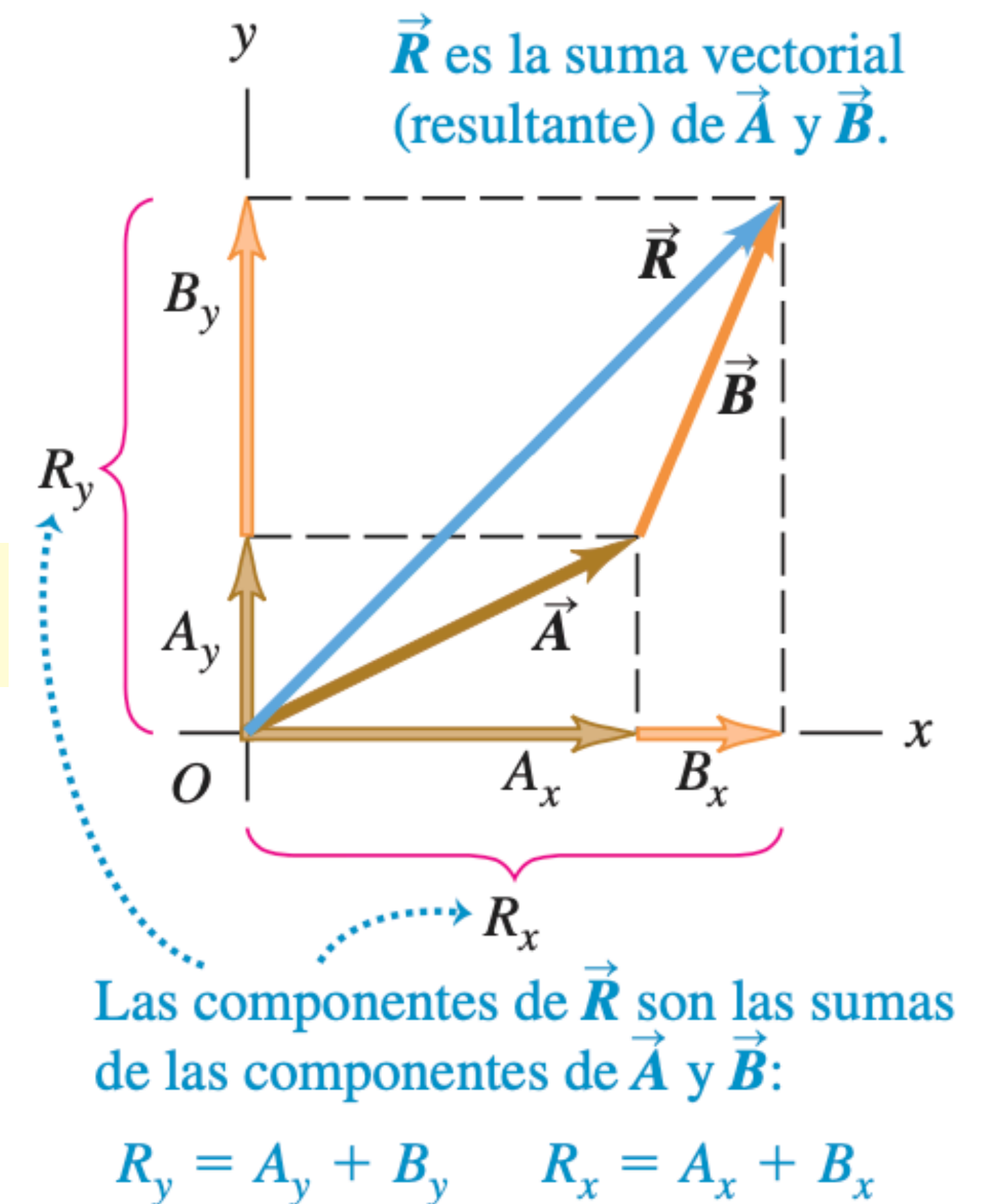
3. Uso de componentes para calcular la suma de vectores (resultante) de dos o más vectores.

La figura 1.21 muestra dos vectores, \vec{A} y \vec{B} y su suma vectorial \vec{R} , junto con las componentes x y y de los tres vectores. En el diagrama se observa que la componente R_x de la resultante es simplemente la suma ($A_x + B_x$) de las componentes x de los vectores sumados. Lo mismo sucede con las componentes y . Simbólicamente,

$$R_x = A_x + B_x \quad R_y = A_y + B_y \quad (\text{componentes de } \vec{R} = \vec{A} + \vec{B}) \quad (1.10)$$

La figura 1.21 muestra este resultado para el caso en que las componentes A_x , A_y , B_x y B_y son positivas.

1.21 Obtención de la suma vectorial (resultante) de \vec{A} y \vec{B} usando componentes.



Cálculos de vectores usando componentes

Si conocemos las componentes de dos vectores cualesquiera \vec{A} y \vec{B} , podríamos calcular las componentes de la resultante \vec{R} .

Entonces, si necesitamos la magnitud y la dirección de \vec{R} , las obtendremos de las ecuaciones (1.7) y (1.8), cambiando las A por R .

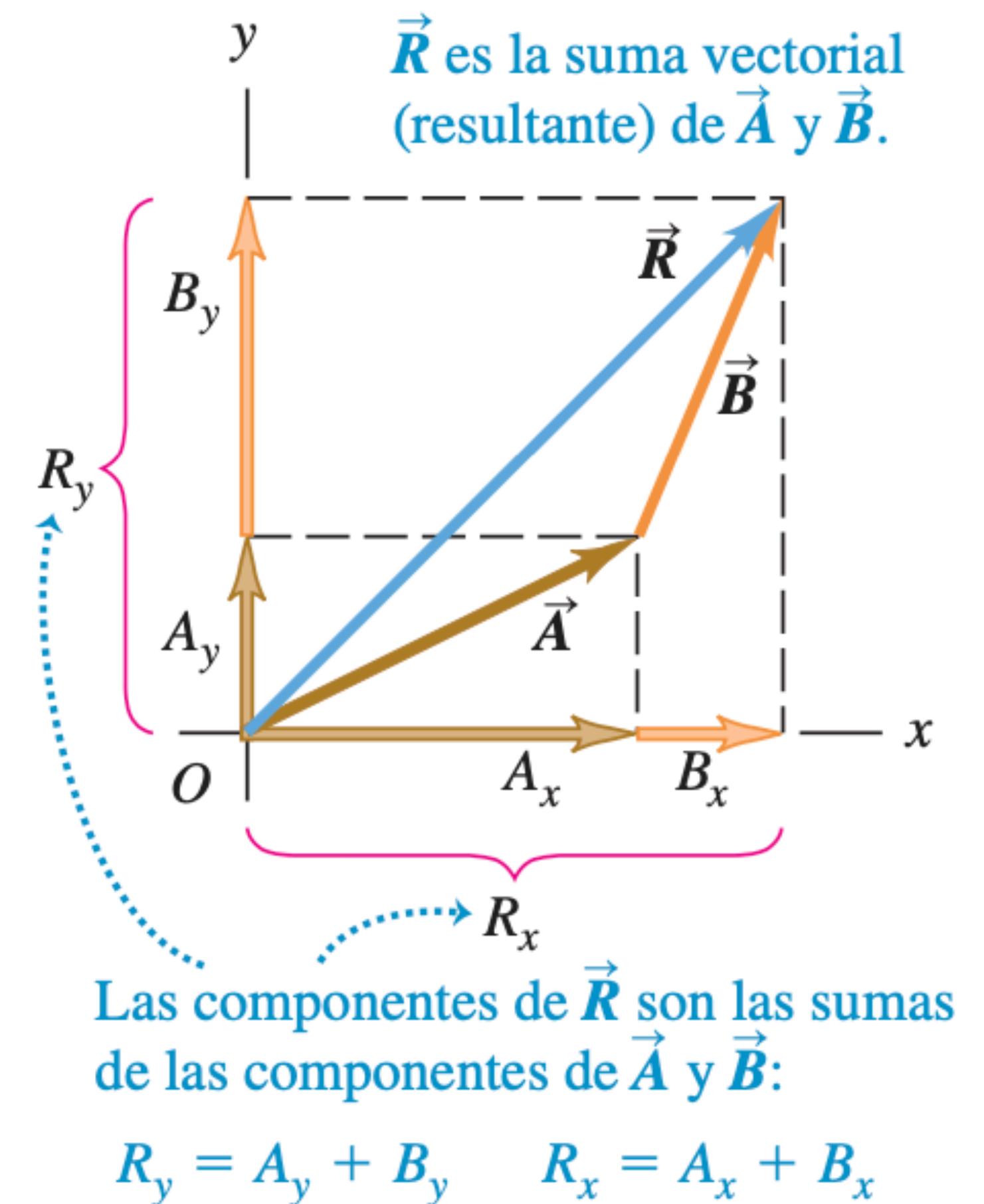
$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \quad (1.7)$$

$$\tan \theta = \frac{A_y}{A_x} \quad \text{y} \quad \theta = \arctan \frac{A_y}{A_x} \quad (1.8)$$

Es fácil extender este procedimiento para calcular la suma de cualquier cantidad de vectores. Sea \vec{R} la suma vectorial de \vec{A} , \vec{B} , \vec{C} , \vec{D} , \vec{E} , entonces, las componentes de \vec{R} son:

$$\begin{aligned} R_x &= A_x + B_x + C_x + D_x + E_x + \dots \\ R_y &= A_y + B_y + C_y + D_y + E_y + \dots \end{aligned} \quad (1.11)$$

1.21 Obtención de la suma vectorial (resultante) de \vec{A} y \vec{B} usando componentes.



Cálculos de vectores usando componentes

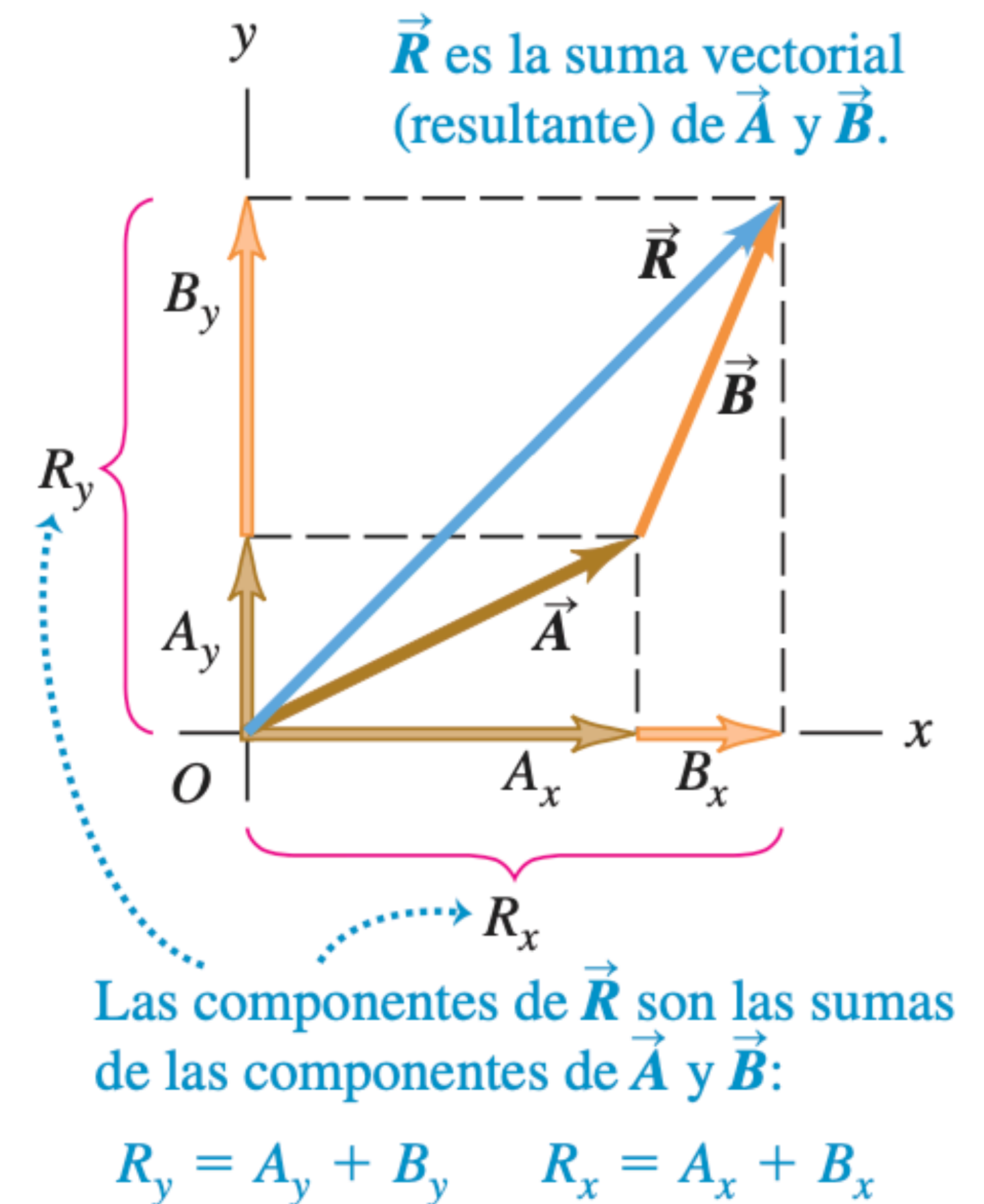
Sólo hemos hablado de vectores que están en el plano xy ; no obstante, el método de componentes funciona también para vectores con cualquier dirección en el espacio. Introducimos un eje z perpendicular al plano xy ; entonces, en general, un vector \vec{A} tiene componentes A_x , A_y y A_z en las tres direcciones de coordenadas. La magnitud A está dada por

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \quad (1.12)$$

Siempre tomamos la raíz positiva. También, las ecuaciones (1.11) para las componentes de la suma vectorial \vec{R} tienen un miembro adicional:

$$R_z = A_z + B_z + C_z + D_z + E_z + \dots$$

1.21 Obtención de la suma vectorial (resultante) de \vec{A} y \vec{B} usando componentes.



Cálculos de vectores usando componentes

Ejemplo: Dos vectores \vec{A} y \vec{B} están en el plano xy .

- a) ¿Esto es posible para \vec{A} que tiene la misma magnitud que \vec{B} pero componentes diferentes?
- b) ¿Esto es posible para \vec{A} que tiene las mismas componentes que \vec{B} pero una magnitud diferente?

Suma de vectores

Estrategia para resolver problemas:

IDENTIFICAR *los conceptos pertinentes*: **Decida cuál es la incógnita**. Podría ser la magnitud de la suma vectorial, la dirección o ambas cuestiones.

PLANTEAR *el problema*: **Dibuje los vectores** que va a sumar y los ejes de coordenadas que va a emplear. En su bosquejo, coloque la cola del primer vector en el origen de las coordenadas; coloque la cola del segundo vector en la punta del primer vector, y así sucesivamente.

Trace la suma vectorial \vec{R} desde la cola del primer vector hasta la punta del último. Examinando su dibujo, haga una estimación burda de la magnitud y la dirección de \vec{R} ; usará dichas estimaciones después para verificar sus cálculos.

EJECUTAR *la solución* como sigue:

1. **Obtenga las componentes x y y de cada vector** y anote los resultados en una tabla. Si un vector se describe con su magnitud A y su ángulo θ , medido del eje $+x$ al eje $+y$, las componentes son:

$$A_x = A \cos \theta \text{ y } A_y = A \sin \theta$$

Suma de vectores

Algunas componentes podrían ser positivas y otras negativas, dependiendo de la orientación del vector (es decir, del cuadrante donde se encuentra θ). Puede usar esta tabla de signos para verificar:

Cuadrante	I	II	III	IV
A_x	+	−	−	+
A_y	+	+	−	−

Si los ángulos de los vectores se dan de otra forma, quizá con otra referencia direccional, **conviértalos en ángulos medidos desde el eje +x** como se describió. Tenga especial cuidado con los signos.

2. **Sume algebraicamente las componentes x** , incluyendo los signos, para obtener R_x , la componente x de la resultante. Haga **lo mismo con las componentes y** para obtener R_y .

3. Entonces, **la magnitud R** y la dirección u de la resultante estarán dadas por

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \quad \theta = \arctan \frac{R_y}{R_x}$$

Suma de vectores

EVALUAR *la respuesta:*

Verifique la magnitud y la dirección obtenidas en la suma vectorial comparándolas con las estimaciones basadas en su dibujo. Recuerde que la magnitud ***R siempre es positiva***. El valor de θ obtenido con una calculadora puede ser el correcto, o quizá tenga un error de 180° . La decisión se toma examinando el dibujo.

Si sus cálculos son muy diferentes de la estimación realizada a partir del dibujo, verifique si su calculadora está en modo de “**radianes**” o de “**grados**”. Si está en modo de radianes, introducir ángulos en grados dará respuestas absurdas.

Suma de vectores

Ejemplo:

Los tres finalistas de un concurso de TV se colocan en el centro de un campo plano grande. Cada uno cuenta con una regla graduada de un metro de longitud, una brújula, una calculadora, una pala y (en diferente orden para cada concursante) los siguientes desplazamientos:

72.4 m, 32.0° al este del norte

57.3 m, 36.0° al sur del oeste

17.8 m al sur

Los tres desplazamientos llevan al punto donde están enterradas las llaves de un Porsche nuevo. Dos concursantes comienzan a medir de inmediato; sin embargo, la ganadora primero *calcula* adónde debe ir.

¿Qué calculó?

Suma de vectores

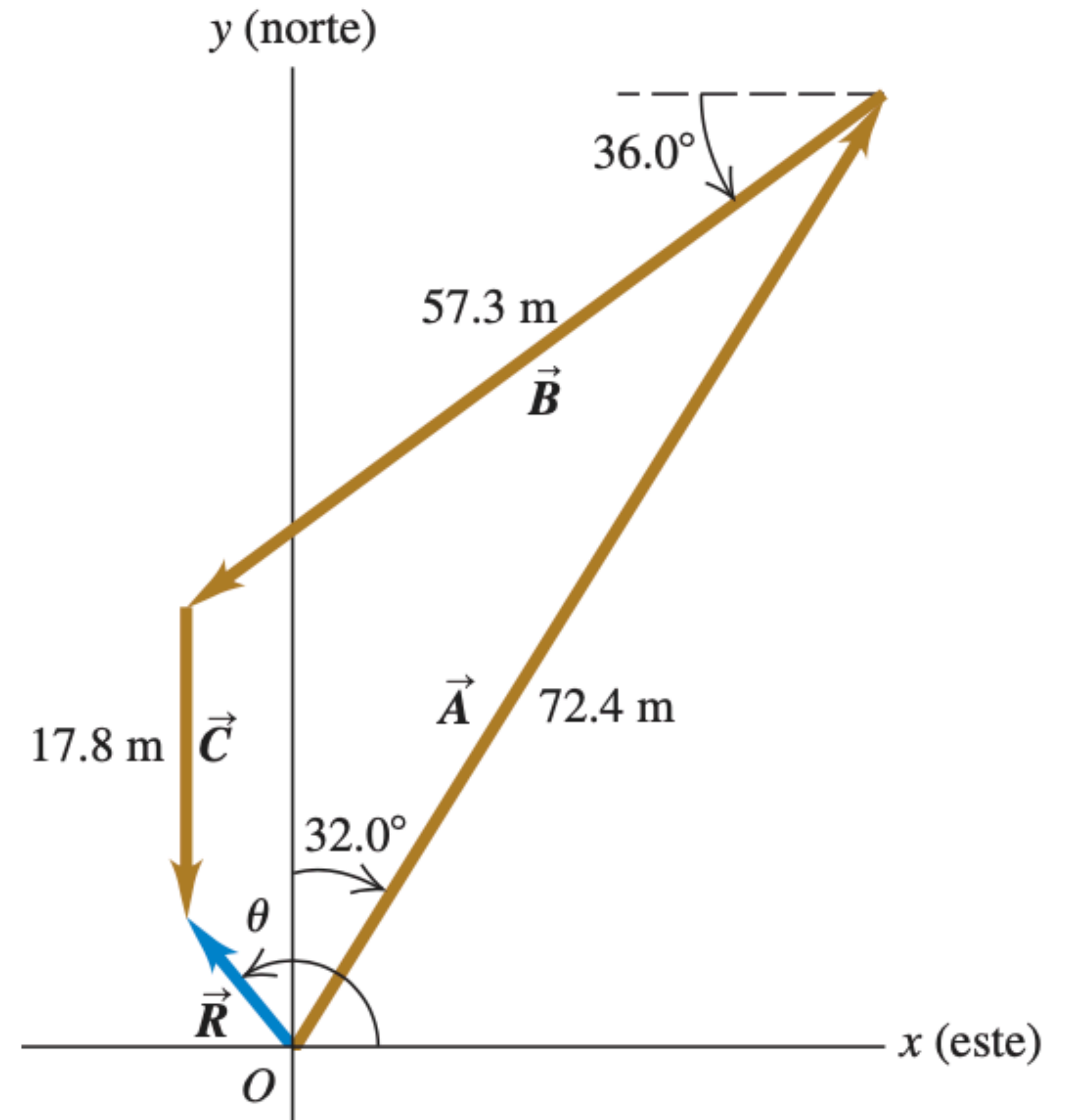
1.22 Tres desplazamientos sucesivos \vec{A} , \vec{B} y \vec{C} y el desplazamiento resultante (suma vectorial) $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$.

IDENTIFICAR: La finalidad es encontrar la suma (resultante) de los tres desplazamientos, así que se trata de un problema de suma vectorial.

PLANTEAR: La situación se muestra en la figura 1.22. Elegimos el eje $+x$ como este, y el eje $+y$ como norte, que es lo usual en los mapas.

Sea \vec{A} el primer desplazamiento, \vec{B} el segundo y \vec{C} el tercero.

Podemos **estimar en el diagrama** que la resultante \vec{R} está a unos 10 m, 40° al oeste del norte.



Suma de vectores

EJECUTAR: Los ángulos de los vectores, medidos del eje $+x$ al eje $+y$, son $(90.0^\circ - 32.0^\circ) = 58.08$, $(180.0^\circ + 36.0^\circ) = 216.0^\circ$ y 270° .

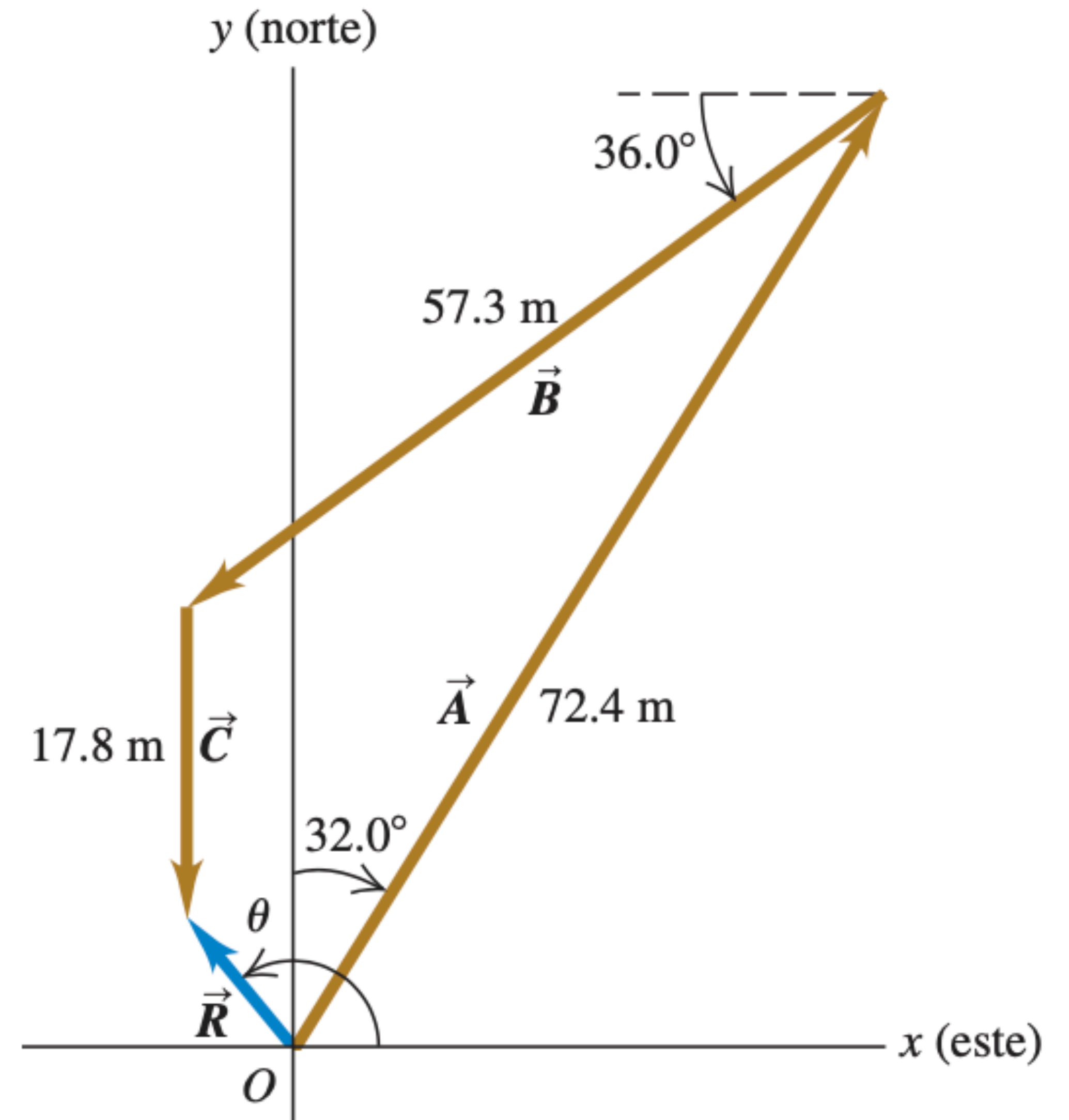
Debemos obtener sus componentes \vec{A} :

$$A_x = A \cos \theta_A = (72.4 \text{ m})(\cos 58.0^\circ) = 38.37 \text{ m}$$

$$A_y = A \sin \theta_A = (72.4 \text{ m})(\sin 58.0^\circ) = 61.40 \text{ m}$$

Observe que conservamos una cifra significativa extra en las componentes. **Esperaremos hasta el final para redondear al número correcto de cifras significativas.**

1.22 Tres desplazamientos sucesivos \vec{A} , \vec{B} y \vec{C} y el desplazamiento resultante (suma vectorial) $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$.



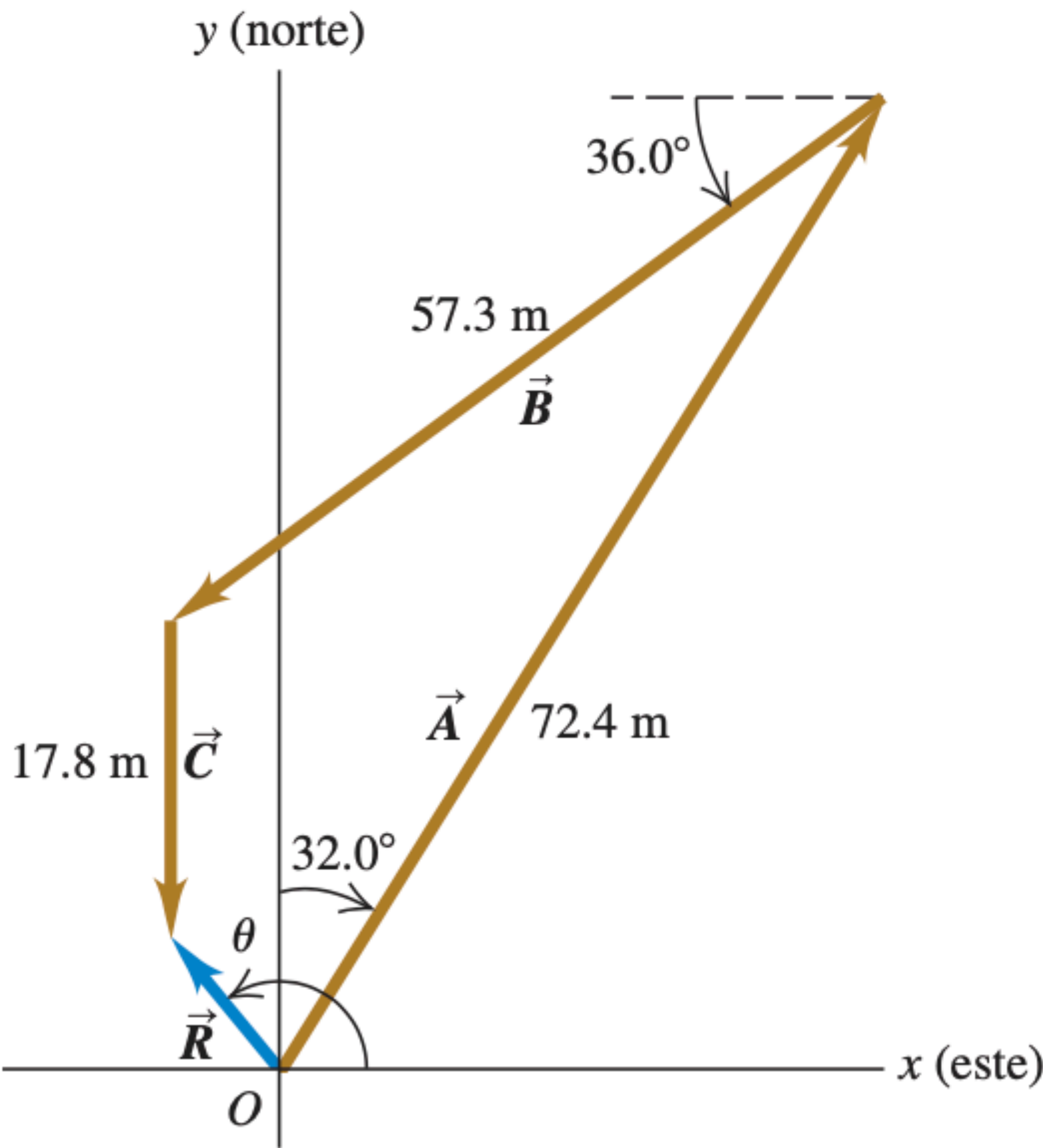
Suma de vectores

La siguiente tabla muestra las componentes de todos los desplazamientos, la suma de las componentes y los demás cálculos. Siempre ordene sistemáticamente sus cálculos.

Distancia	Ángulo	Componente x	Componente y
$A = 72.4 \text{ m}$	58.0°	38.37 m	61.40 m
$B = 57.3 \text{ m}$	216.0°	-46.36 m	-33.68 m
$C = 17.8 \text{ m}$	270.0°	0.00 m	-17.80 m
		$R_x = -7.99 \text{ m}$	$R_y = 9.92 \text{ m}$

$$R = \sqrt{(-7.99 \text{ m})^2 + (9.92 \text{ m})^2} = 12.7 \text{ m}$$

$$\theta = \arctan \frac{9.92 \text{ m}}{-7.99 \text{ m}} = 129^\circ = 39^\circ \text{ al oeste del norte}$$



Suma de vectores en 3D

Ejemplo: Un avión despegue y viajea 10.4 km al oeste, 8.7 km al norte y 2.1 km hacia arriba.

¿A qué distancia está de su punto de partida?

Suma de vectores en 3D

Ejemplo: Un avión despegue y viaje 10.4 km al oeste, 8.7 km al norte y 2.1 km hacia arriba.

¿A qué distancia está de su punto de partida?

Sea el eje $+x$ al este, el eje $+y$ al norte y el eje $+z$ hacia arriba.

Entonces, $A_x = -10.4$ km, $A_y = 8.7$ km y $A_z = 2.1$ km;

$$A = \sqrt{(-10.4 \text{ km})^2 + (8.7 \text{ km})^2 + (2.1 \text{ km})^2} = 13.7 \text{ km}$$

Relaciones Matemáticas

Álgebra

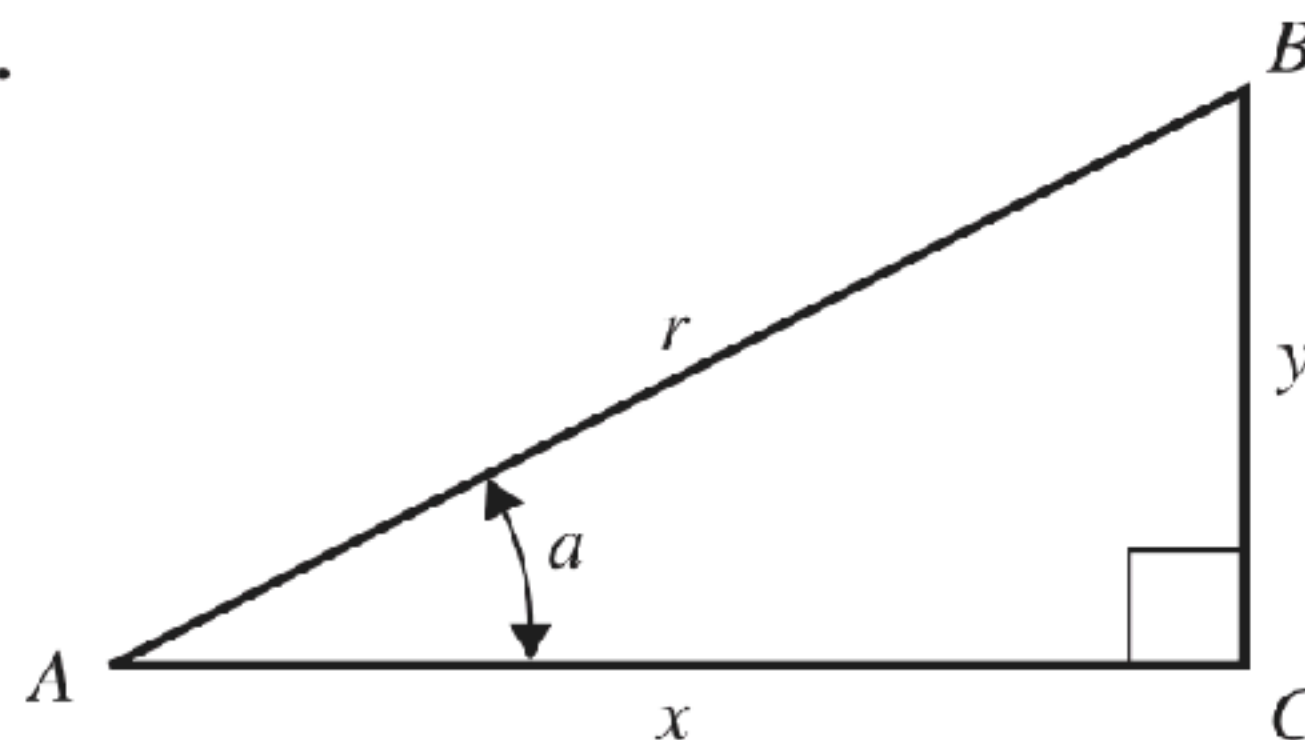
$$a^{-x} = \frac{1}{a^x} \quad a^{(x+y)} = a^x a^y \quad a^{(x-y)} = \frac{a^x}{a^y}$$

Logaritmos: Si $\log a = x$, entonces $a = 10^x$. $\log a + \log b = \log(ab)$ $\log a - \log b = \log(a/b)$ $\log(a^n) = n \log a$
Si $\ln a = x$, entonces $a = e^x$. $\ln a + \ln b = \ln(ab)$ $\ln a - \ln b = \ln(a/b)$ $\ln(a^n) = n \ln a$

Fórmula cuadrática: If $ax^2 + bx + c = 0$, $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Trigonometría

En el triángulo rectángulo ABC , $x^2 + y^2 = r^2$.



Definiciones de las funciones trigonométricas: $\operatorname{sen} a = y/r$ $\operatorname{cos} a = x/r$ $\operatorname{tan} a = y/x$

Identidades: $\operatorname{sen}^2 a + \operatorname{cos}^2 a = 1$

$$\operatorname{tan} a = \frac{\operatorname{sen} a}{\operatorname{cos} a}$$

$$\operatorname{sen} 2a = 2 \operatorname{sen} a \operatorname{cos} a$$

$$\begin{aligned} \operatorname{cos} 2a &= \operatorname{cos}^2 a - \operatorname{sen}^2 a = 2 \operatorname{cos}^2 a - 1 \\ &= 1 - 2 \operatorname{sen}^2 a \end{aligned}$$

$$\operatorname{sen} \frac{1}{2} a = \sqrt{\frac{1 - \operatorname{cos} a}{2}}$$

$$\operatorname{cos} \frac{1}{2} a = \sqrt{\frac{1 + \operatorname{cos} a}{2}}$$

$$\operatorname{sen}(-a) = -\operatorname{sen} a$$

$$\operatorname{sen}(a \pm b) = \operatorname{sen} a \operatorname{cos} b \pm \operatorname{cos} a \operatorname{sen} b$$

$$\operatorname{cos}(-a) = \operatorname{cos} a$$

$$\operatorname{cos}(a \pm b) = \operatorname{cos} a \operatorname{cos} b \mp \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$$

$$\operatorname{sen}(a \pm \pi/2) = \pm \operatorname{cos} a$$

$$\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b = 2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}(a + b) \operatorname{cos} \frac{1}{2}(a - b)$$

$$\operatorname{cos}(a \pm \pi/2) = \mp \operatorname{sen} a$$

$$\operatorname{cos} a + \operatorname{cos} b = 2 \operatorname{cos} \frac{1}{2}(a + b) \operatorname{cos} \frac{1}{2}(a - b)$$

Geometría

Circunferencia de un círculo de radio r :	$C = 2\pi r$
Área de un círculo de radio r :	$A = \pi r^2$
Volumen de una esfera de radio r :	$V = 4\pi r^3/3$
Área de la superficie de una esfera de radio r :	$A = 4\pi r^2$
Volumen de un cilindro de radio r y altura h :	$V = \pi r^2 h$