Física 1

Vectores

Helga Dénes 2025-10 USFQ

hdenes@usfq.edu.ec

Vectores unitarios

Un **vector unitario** es **un vector con magnitud 1, sin unidades**.

Su única finalidad consiste en **direccionar**, es decir, describir una dirección en el espacio.

Los vectores unitarios ofrecen **una notación cómoda** para muchas expresiones que incluyen componentes de vectores. Siempre incluiremos un acento circunflejo o **"sombrero" (ˆ) sobre el símbolo** de un vector unitario para distinguirlo de los vectores ordinarios cuya magnitud podría o no ser 1.

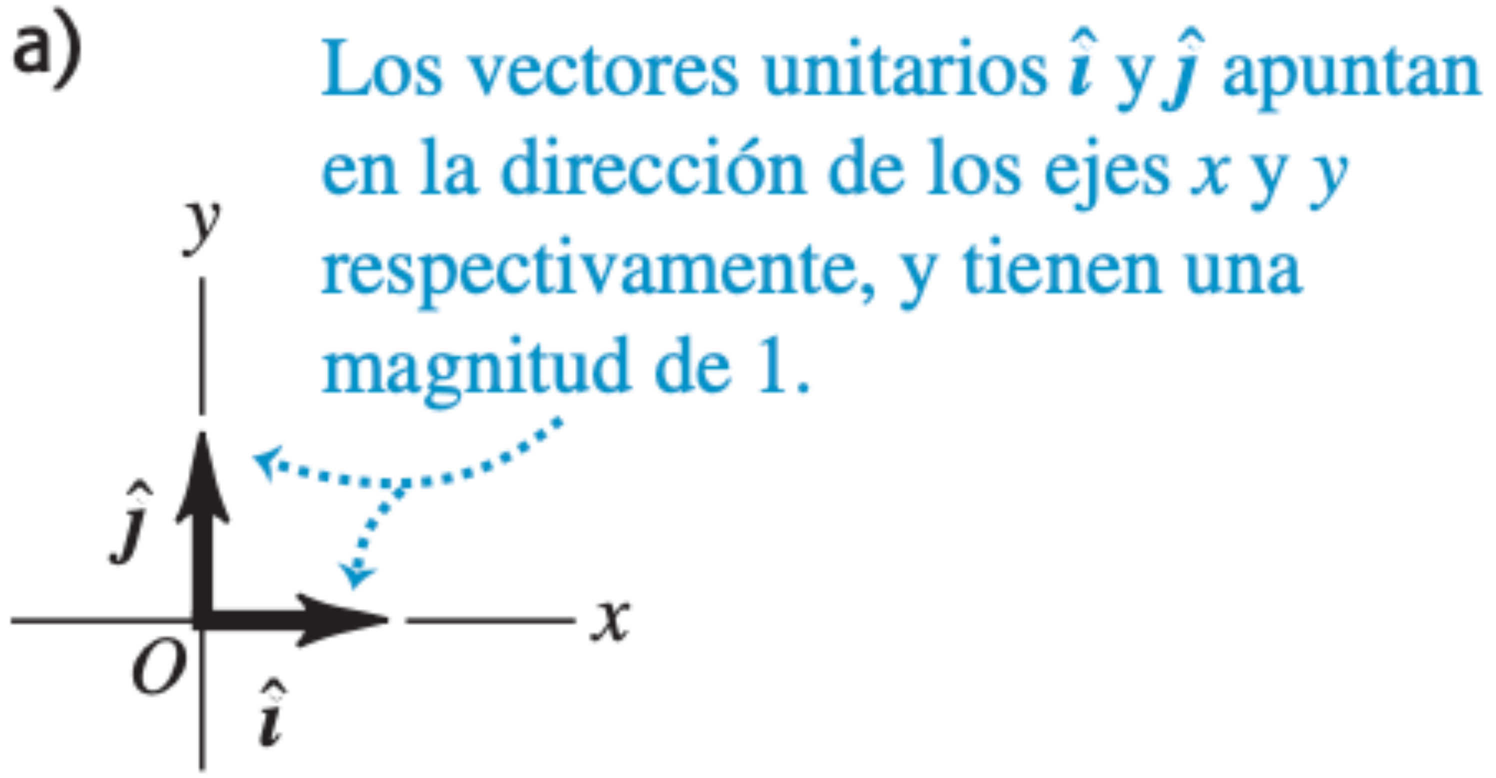
En un sistema de coordenadas *x*-*y* podemos definir un vector unitario $\hat{i}$ que apunte en la dirección del eje +*x* y un vector unitario $\hat{j}$ que apunte en la dirección del eje +*y* (figura 1.23a).

Así, expresamos **la relación entre vectores componentes y componentes:**

$$\vec{A}_x = A_x\hat{\imath}$$
$$\vec{A}_y = A_y\hat{\jmath} \tag{1.13}$$

1.23 a) Los vectores unitarios $\hat{\imath}$ y $\hat{\jmath}$. b) Expresión de un vector $\vec{A}$ en términos de sus componentes.

a)



Vectores unitarios

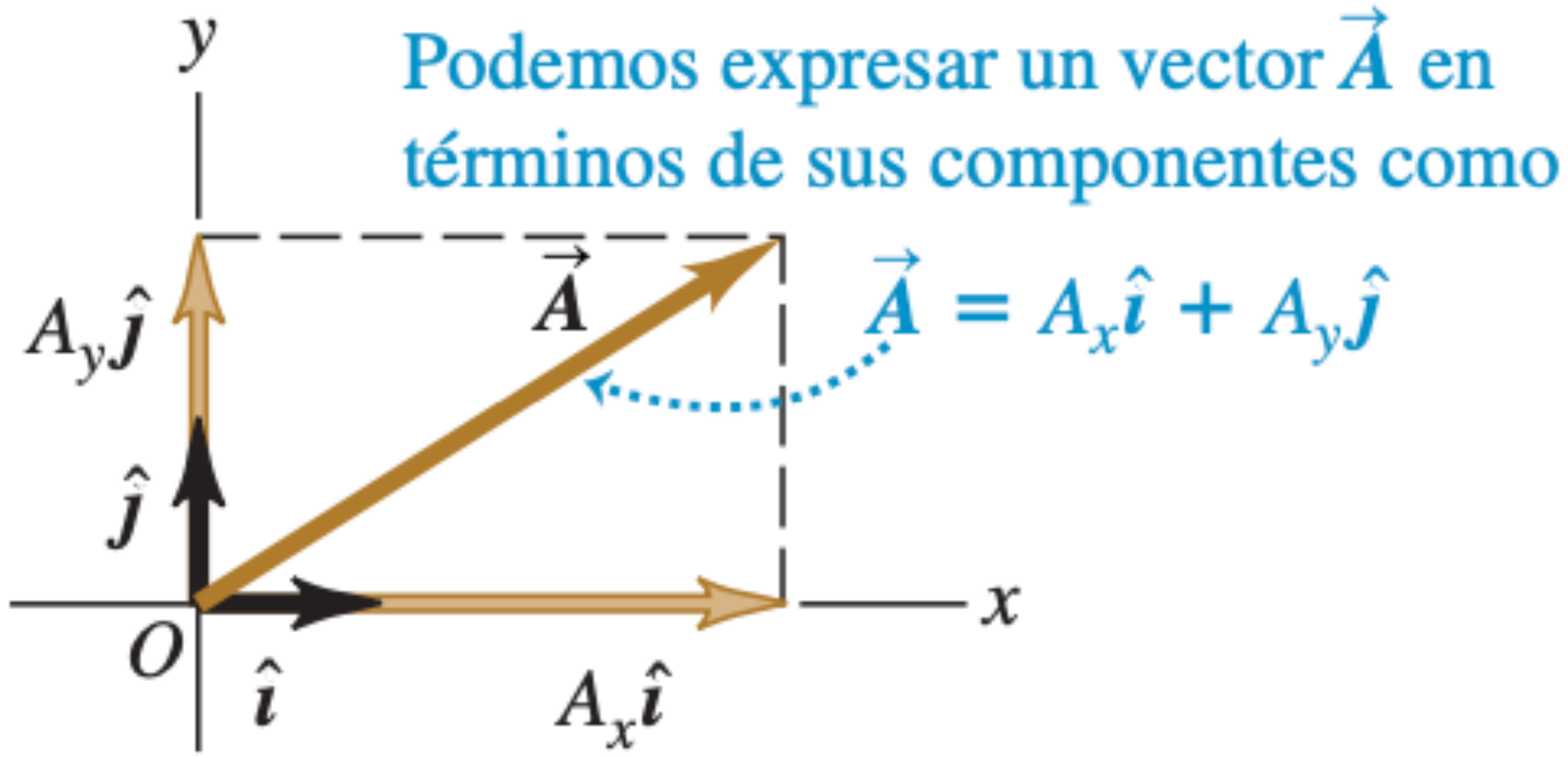
Asimismo, escribimos un vector $\overrightarrow{A}$ en términos de sus vectores componentes como

$$\vec{\boldsymbol{A}} = A_x\hat{\boldsymbol{\imath}} + A_y\hat{\boldsymbol{\jmath}} \qquad (1.14)$$

Las ecuaciones (1.13) y (1.14) son vectoriales; cada término, como $A_x\hat{i}$, es una cantidad vectorial.

Los signos igual y más en negritas indican igualdad y suma de vectores.

b)

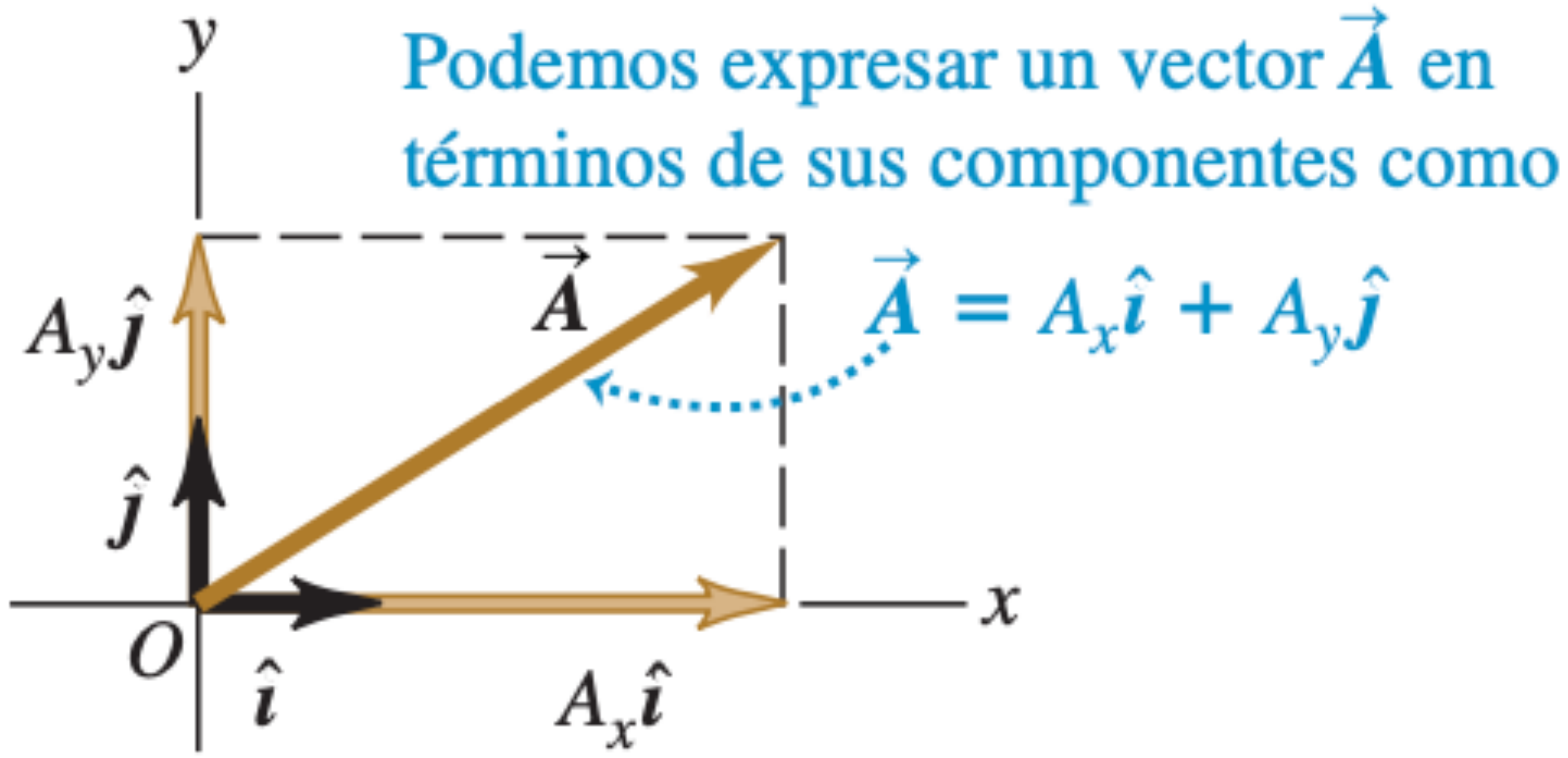


Vectores unitarios

Cuando representamos dos vectores $\overrightarrow{A}$ y $\overrightarrow{B}$ en términos de sus componentes, podemos expresar la resultante $\overrightarrow{R}$ usando vectores unitarios como sigue:

$$\vec{A} = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath}$$
$$\vec{B} = B_x\hat{\imath} + B_y\hat{\jmath}$$
$$\begin{aligned}\vec{R} &= \vec{A} + \vec{B}\\ &= (A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath}) + (B_x\hat{\imath} + B_y\hat{\jmath})\\ &= (A_x + B_x)\hat{\imath} + (A_y + B_y)\hat{\jmath}\\ &= R_x\hat{\imath} + R_y\hat{\jmath}\end{aligned} \tag{1.15}$$

b)



La ecuación (1.15) replantea el contenido de las ecuaciones (1.10) en forma de una sola ecuación vectorial, en vez de dos ecuaciones de componentes.

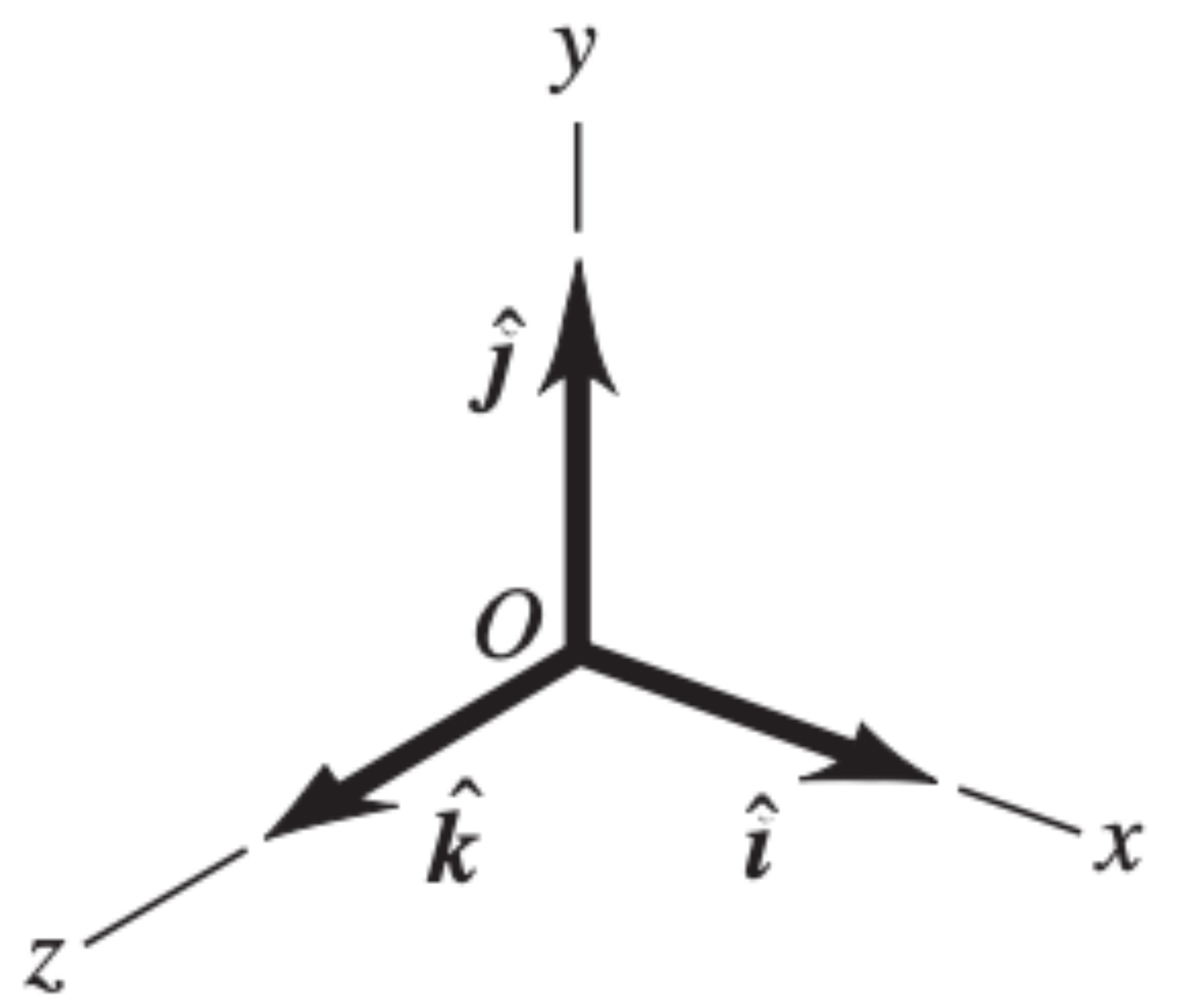
Vectores unitarios

Si todos los vectores no están en el plano xy, necesitaremos una tercera componente. Introducimos un tercer vector unitario $\hat{k}$ que apunta en la dirección del eje $+z$ (figura 1.24). Las ecuaciones (1.14) y (1.15) se vuelven, entonces,

$$\vec{A} = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k}$$
$$\vec{B} = B_x\hat{\imath} + B_y\hat{\jmath} + B_z\hat{k} \quad (1.16)$$

$$\vec{R} = (A_x + B_x)\hat{\imath} + (A_y + B_y)\hat{\jmath} + (A_z + B_z)\hat{k}$$
$$= R_x\hat{\imath} + R_y\hat{\jmath} + R_z\hat{k} \quad (1.17)$$

1.24 Los vectores unitarios $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ y $\hat{k}$.



Vectores unitarios

Ejemplo: Dados los dos desplazamientos

$$\vec{D} = (6\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} - \hat{k})\ \text{m} \qquad \text{y} \qquad \vec{E} = (4\hat{\imath} - 5\hat{\jmath} + 8\hat{k})\ \text{m}$$

obtenga la magnitud del desplazamiento $2\vec{D} - \vec{E}$.

Vectores unitarios

Ejemplo: Dados los dos desplazamientos

$$\vec{D} = (6\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} - \hat{k})\ \text{m} \qquad \text{y} \qquad \vec{E} = (4\hat{\imath} - 5\hat{\jmath} + 8\hat{k})\ \text{m}$$

obtenga la magnitud del desplazamiento $2\overrightarrow{D} - \overrightarrow{E}$.

IDENTIFICAR: Multiplicamos el vector $\overrightarrow{D}$ por 2 (un escalar) y luego restamos el vector $\overrightarrow{E}$ del resultado.

P L A N T E A R : Para multiplicar $\overrightarrow{D}$ por 2 simplemente multiplicamos cada una de sus componentes por 2. Después, la ecuación (1.17) nos dice que para restar $\overrightarrow{E}$ de $2\overrightarrow{D}$ simplemente restamos las componentes de $\overrightarrow{E}$ de las componentes de $2\overrightarrow{D}$.

En cada una de estas operaciones matemáticas, los vectores unitarios $\hat{i}$, $\hat{j}$ y $\hat{k}$ permanecen iguales.

Vectores unitarios

$$\vec{D} = (6\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} - \hat{k})\ \text{m} \qquad \text{y} \qquad \vec{E} = (4\hat{\imath} - 5\hat{\jmath} + 8\hat{k})\ \text{m}$$

EJECUTAR: Si $\overrightarrow{F} = 2\overrightarrow{D} - \overrightarrow{E}$, tenemos

$$\begin{aligned}\vec{F} &= 2(6\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} - \hat{k})\ \text{m} - (4\hat{\imath} - 5\hat{\jmath} + 8\hat{k})\ \text{m} \\ &= [(12 - 4)\hat{\imath} + (6 + 5)\hat{\jmath} + (-2 - 8)\hat{k}]\ \text{m} \\ &= (8\hat{\imath} + 11\hat{\jmath} - 10\hat{k})\ \text{m}\end{aligned}$$

Las unidades de los vectores $\overrightarrow{D}$, $\overrightarrow{E}$ y $\overrightarrow{F}$ son metros, así que las componentes de estos vectores también están en metros.

$$\begin{aligned}F &= \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \\ &= \sqrt{(8\ \text{m})^2 + (11\ \text{m})^2 + (-10\ \text{m})^2} = 17\ \text{m}\end{aligned}$$

Vectores unitarios

Ejemplo: Coloque en orden los siguientes vectores, según su magnitud, donde el vector más grande sea el primero.

a) $\overrightarrow{A} = (3\hat{\imath} + 5\hat{\jmath} - 2\hat{k})$

b) $\overrightarrow{B} = (-3\hat{\imath} + 5\hat{\jmath} + 2\hat{k})$

c) $\overrightarrow{C} = (3\hat{\imath} - 5\hat{\jmath} - 2\hat{k})$

d) $\overrightarrow{D} = (3\hat{\imath} + 5\hat{\jmath} + 2\hat{k})$

Vectores unitarios

Ejemplo: Coloque en orden los siguientes vectores, según su magnitud, donde el vector más grande sea el primero.

a) $\overrightarrow{A} = (3\hat{\imath} + 5\hat{\jmath} - 2\hat{k})$

b) $\overrightarrow{B} = (-3\hat{\imath} + 5\hat{\jmath} + 2\hat{k})$

c) $\overrightarrow{C} = (3\hat{\imath} - 5\hat{\jmath} - 2\hat{k})$

d) $\overrightarrow{D} = (3\hat{\imath} + 5\hat{\jmath} + 2\hat{k})$

Todos tienen la misma magnitud.

Producto de vectores

También podemos expresar muchas relaciones físicas de forma concisa usando ***producto* de vectores**. Los vectores no son números ordinarios, así que no podemos aplicarles directamente la multiplicación ordinaria. Definiremos **dos tipos diferentes de productos de vectores.**

El primero, llamado ***producto escalar***, produce un resultado escalar.

El segundo, el ***producto vectorial***, produce otro vector.

Producto escalar

El **producto escalar** de dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ se denota con $\vec{A} \cdot \vec{B}$. Por esta notación, el producto escalar también se denomina **producto punto**.

Aun cuando $\vec{A}$ y $\vec{B}$ sean vectores, la cantidad $\vec{A} \cdot \vec{B}$ **es un escalar.**

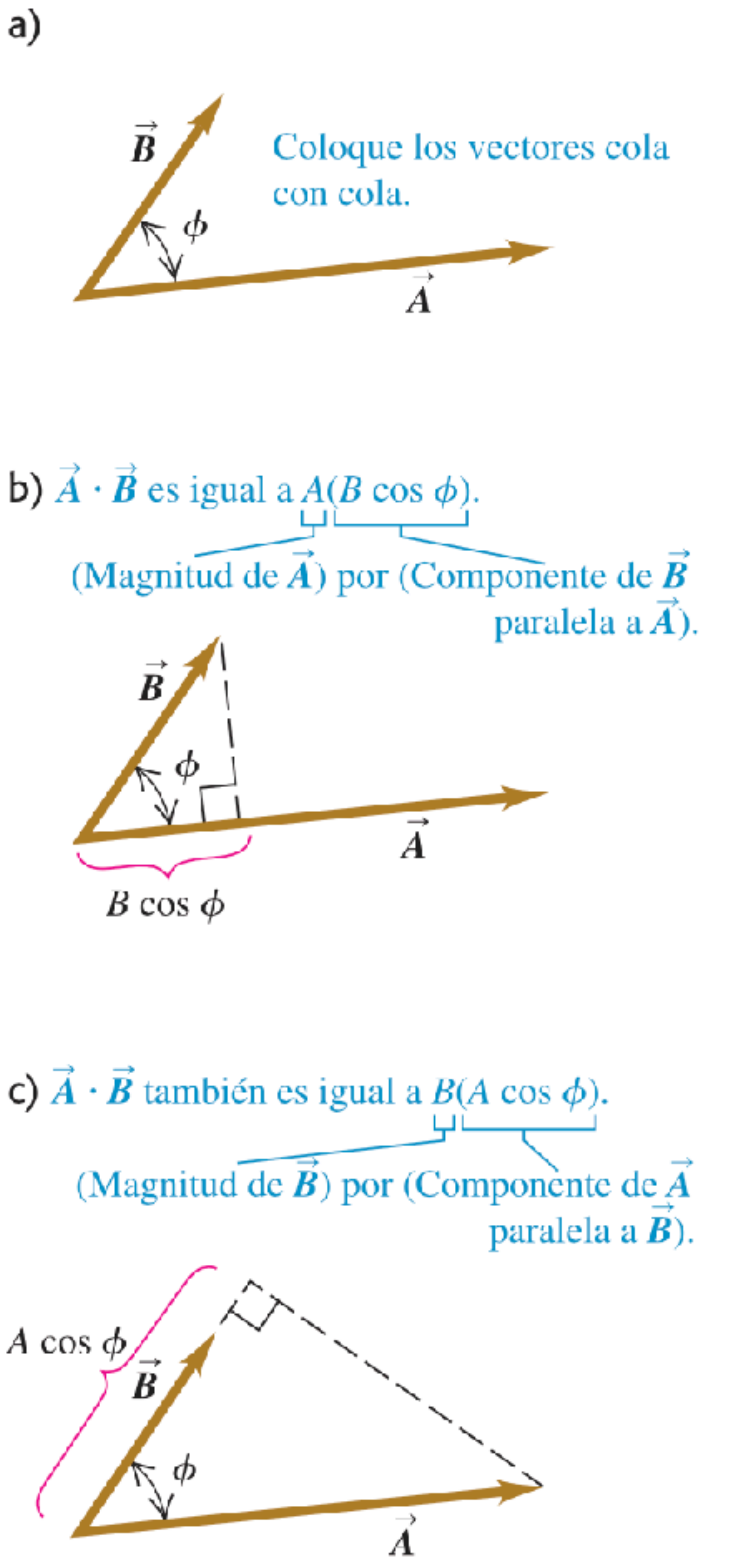
Para definir el producto escalar $\vec{A} \cdot \vec{B}$ dibujamos $\boldsymbol{A}$ y $\vec{B}$, con su cola en el mismo punto (figura 1.25a). El ángulo ϕ puede tomar valores entre 0 y 180°.

La figura 1.25b muestra **la proyección del vector $\vec{B}$ sobre la dirección de $\vec{A}$;** esta proyección es la componente de $\vec{B}$ paralela a $\vec{A}$ y es igual a $\boldsymbol{B} \cos \phi$. (Podemos obtener componentes en cualquier dirección conveniente, no sólo en los ejes x y y.)

Definimos $\vec{A} \cdot \vec{B}$ como la magnitud de $\vec{A}$ multiplicada por la componente de $\vec{B}$ paralela a $\vec{A}$. Expresado como por la ecuación,

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB\cos\phi = |\vec{A}||\vec{B}|\cos\phi \qquad \text{(definición del producto escalar (punto))} \qquad (1.18)$$

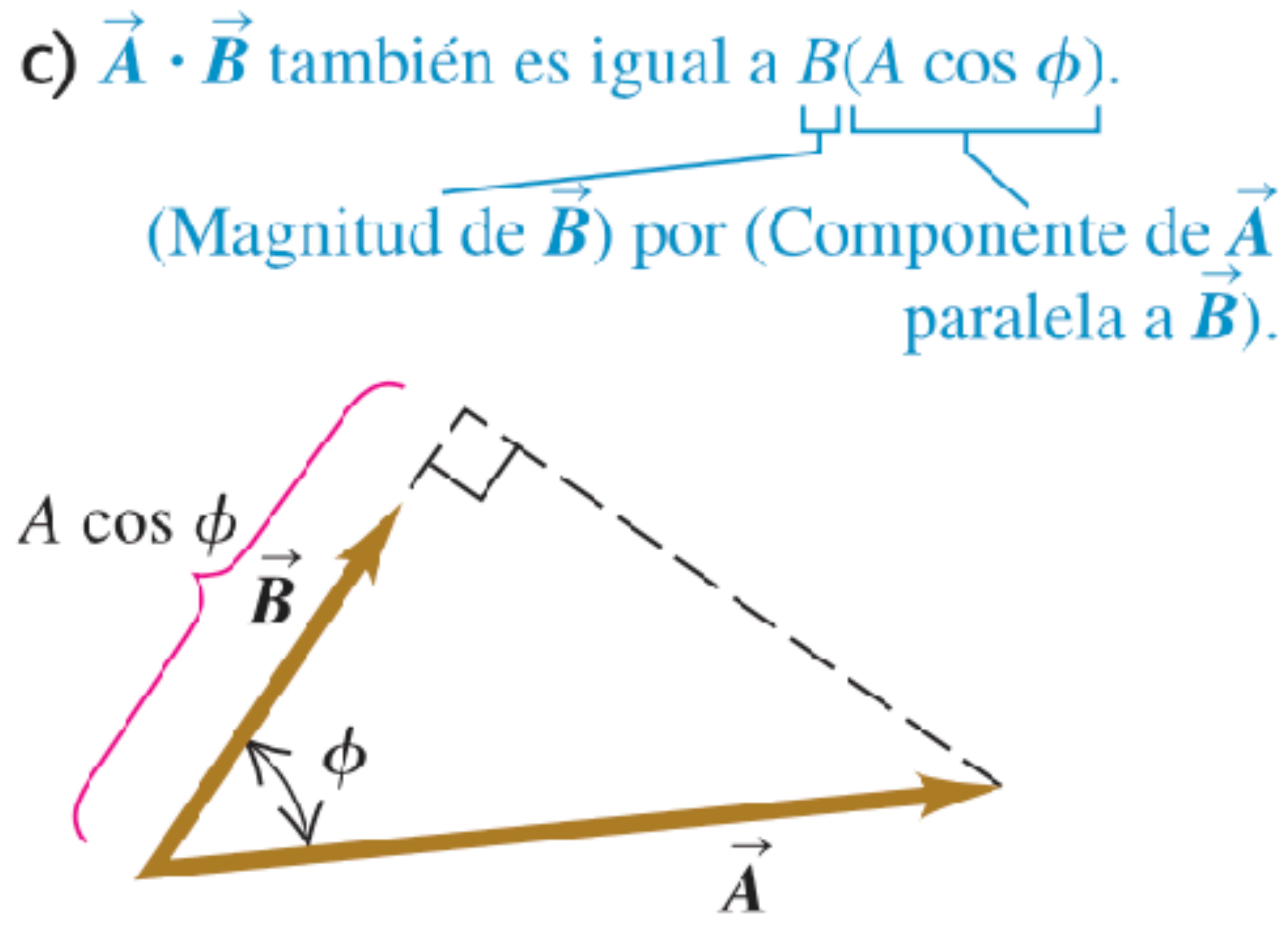
1.25 Cálculo del producto escalar de dos vectores, $\vec{A} \cdot \vec{B} = AB\cos\phi$.



Producto escalar

También podemos definir $\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B}$ como la magnitud de $\overrightarrow{B}$ multiplicada por la componente de $\overrightarrow{A}$ paralela a $\overrightarrow{B}$, como en la figura 1.25c.

Así, $\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B} = B(A \cos \phi) = AB \cos \phi$.



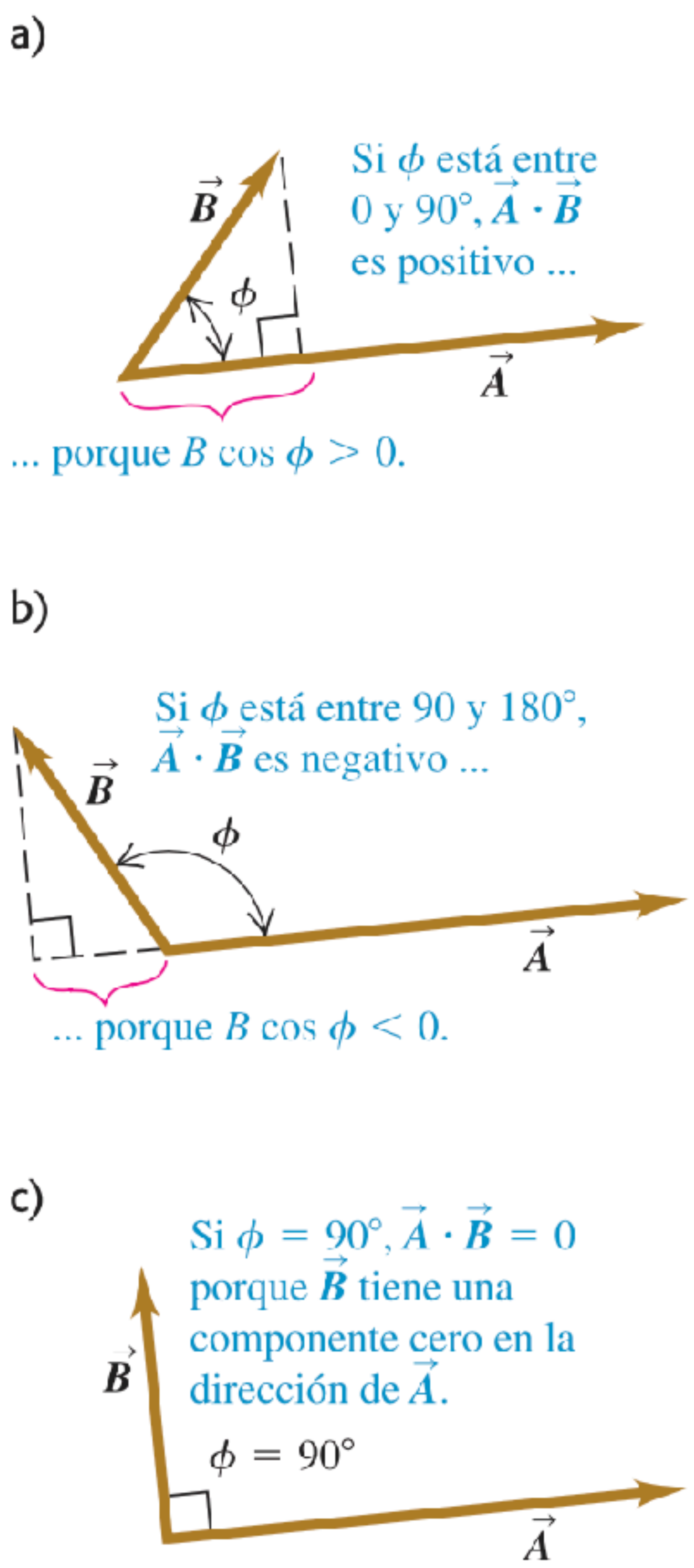
Producto escalar

El producto escalar es una **cantidad escalar**, no un vector, y **puede ser positivo, negativo o cero.**

- Si ϕ está entre 0 y 90°, cos $\phi > 0$ y el producto escalar es positivo (figura 1.26a).
- Cuando ϕ está entre 90° y 180°, cos $\phi < 0$, y la componente de $\vec{B}$ paralela a $\vec{A}$ es negativa y $\vec{A} \cdot \vec{B}$ también es negativo (figura 1.26b).
- Por último, cuando **ϕ = 90°, $\vec{A} \cdot \vec{B}$ = 0 (figura 1.26c). El producto escalar de dos vectores perpendiculares siempre es cero.**

Para dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$, cualesquiera, AB cos ϕ = BA cos ϕ. Esto implica que $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$. El producto escalar obedece la ley **conmutativa** de la multiplicación; el orden de los dos vectores no importa.

1.26 El producto escalar $\vec{A} \cdot \vec{B} = AB\cos\phi$ puede ser positivo, negativo o cero, dependiendo del ángulo entre $\vec{A}$ y $\vec{B}$.



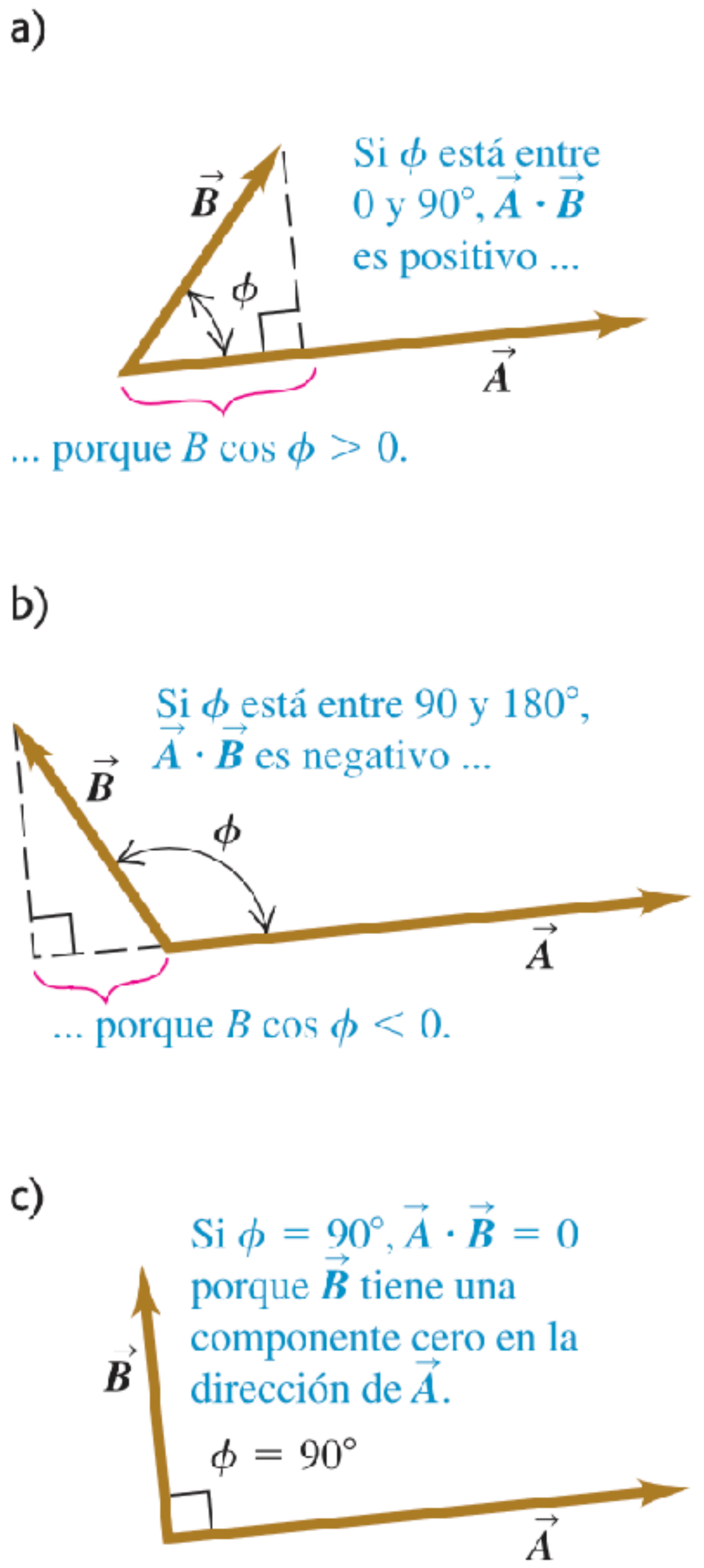
Producto escalar

Ejemplo: Usaremos el producto escalar para describir el **trabajo realizado por una fuerza**. Si una fuerza constante $\overrightarrow{F}$ se aplica a un cuerpo que sufre un desplazamiento $\vec{s}$, el trabajo W (una cantidad escalar) realizado por la fuerza es

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s}$$

El trabajo hecho por la fuerza es positivo si el ángulo entre $\overrightarrow{F}$ y $\vec{s}$ está entre 0 y 90 °, negativo si el ángulo está entre 90° y 180°, y cero si $\overrightarrow{F}$ y $\vec{s}$ son perpendiculares.

1.26 El producto escalar $\vec{A} \cdot \vec{B} = AB\cos\phi$ puede ser positivo, negativo o cero, dependiendo del ángulo entre $\vec{A}$ y $\vec{B}$.



Producto escalar con componentes

Podemos calcular el producto escalar $\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B}$ directamente si conocemos las componentes x, y y z de $\overrightarrow{A}$ y $\overrightarrow{B}$. Para saber cómo se hace, **obtengamos primero los productos escalares de los vectores unitarios**. Esto es fácil, pues $\hat{i}$, $\hat{j}$ y $\hat{k}$ tienen magnitud 1 y son perpendiculares entre sí. Por la ecuación (1.18),

$$\begin{aligned} \hat{\imath}\cdot\hat{\imath} = \hat{\jmath}\cdot\hat{\jmath} = \hat{k}\cdot\hat{k} &= (1)(1)\cos 0^\circ = 1 \\ \hat{\imath}\cdot\hat{\jmath} = \hat{\imath}\cdot\hat{k} = \hat{\jmath}\cdot\hat{k} &= (1)(1)\cos 90^\circ = 0 \end{aligned} \tag{1.19}$$

Producto escalar con componentes

Ahora expresamos $\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B}$ en términos de sus componentes, expandimos el producto y usamos estos productos de vectores unitarios:

$$
\begin{aligned}
\vec{\boldsymbol{A}} \cdot \vec{\boldsymbol{B}} &= (A_x\hat{\boldsymbol{\imath}} + A_y\hat{\boldsymbol{\jmath}} + A_z\hat{\boldsymbol{k}}) \cdot (B_x\hat{\boldsymbol{\imath}} + B_y\hat{\boldsymbol{\jmath}} + B_z\hat{\boldsymbol{k}}) \\
&= A_x\hat{\boldsymbol{\imath}} \cdot B_x\hat{\boldsymbol{\imath}} + A_x\hat{\boldsymbol{\imath}} \cdot B_y\hat{\boldsymbol{\jmath}} + A_x\hat{\boldsymbol{\imath}} \cdot B_z\hat{\boldsymbol{k}} \\
&\quad + A_y\hat{\boldsymbol{\jmath}} \cdot B_x\hat{\boldsymbol{\imath}} + A_y\hat{\boldsymbol{\jmath}} \cdot B_y\hat{\boldsymbol{\jmath}} + A_y\hat{\boldsymbol{\jmath}} \cdot B_z\hat{\boldsymbol{k}} \\
&\quad + A_z\hat{\boldsymbol{k}} \cdot B_x\hat{\boldsymbol{\imath}} + A_z\hat{\boldsymbol{k}} \cdot B_y\hat{\boldsymbol{\jmath}} + A_z\hat{\boldsymbol{k}} \cdot B_z\hat{\boldsymbol{k}} \qquad (1.20) \\
&= A_xB_x\hat{\boldsymbol{\imath}} \cdot \hat{\boldsymbol{\imath}} + A_xB_y\hat{\boldsymbol{\imath}} \cdot \hat{\boldsymbol{\jmath}} + A_xB_z\hat{\boldsymbol{\imath}} \cdot \hat{\boldsymbol{k}} \\
&\quad + A_yB_x\hat{\boldsymbol{\jmath}} \cdot \hat{\boldsymbol{\imath}} + A_yB_y\hat{\boldsymbol{\jmath}} \cdot \hat{\boldsymbol{\jmath}} + A_yB_z\hat{\boldsymbol{\jmath}} \cdot \hat{\boldsymbol{k}} \\
&\quad + A_zB_x\hat{\boldsymbol{k}} \cdot \hat{\boldsymbol{\imath}} + A_zB_y\hat{\boldsymbol{k}} \cdot \hat{\boldsymbol{\jmath}} + A_zB_z\hat{\boldsymbol{k}} \cdot \hat{\boldsymbol{k}}
\end{aligned}
$$

Producto escalar con componentes

Por las ecuaciones (1.19), es evidente que seis de estos nueve términos son cero, y los otros tres que quedan simplemente dan

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \quad \text{(producto escalar (punto) en términos de sus componentes)} \quad (1.21)$$

Por lo tanto, *el producto escalar de dos vectores es la suma de los productos de sus respectivas componentes.*

El producto escalar permite **calcular directamente el ángulo ϕ entre dos vectores** $\vec{A}$ y $\vec{B}$ cualesquiera cuyas componentes conocemos.

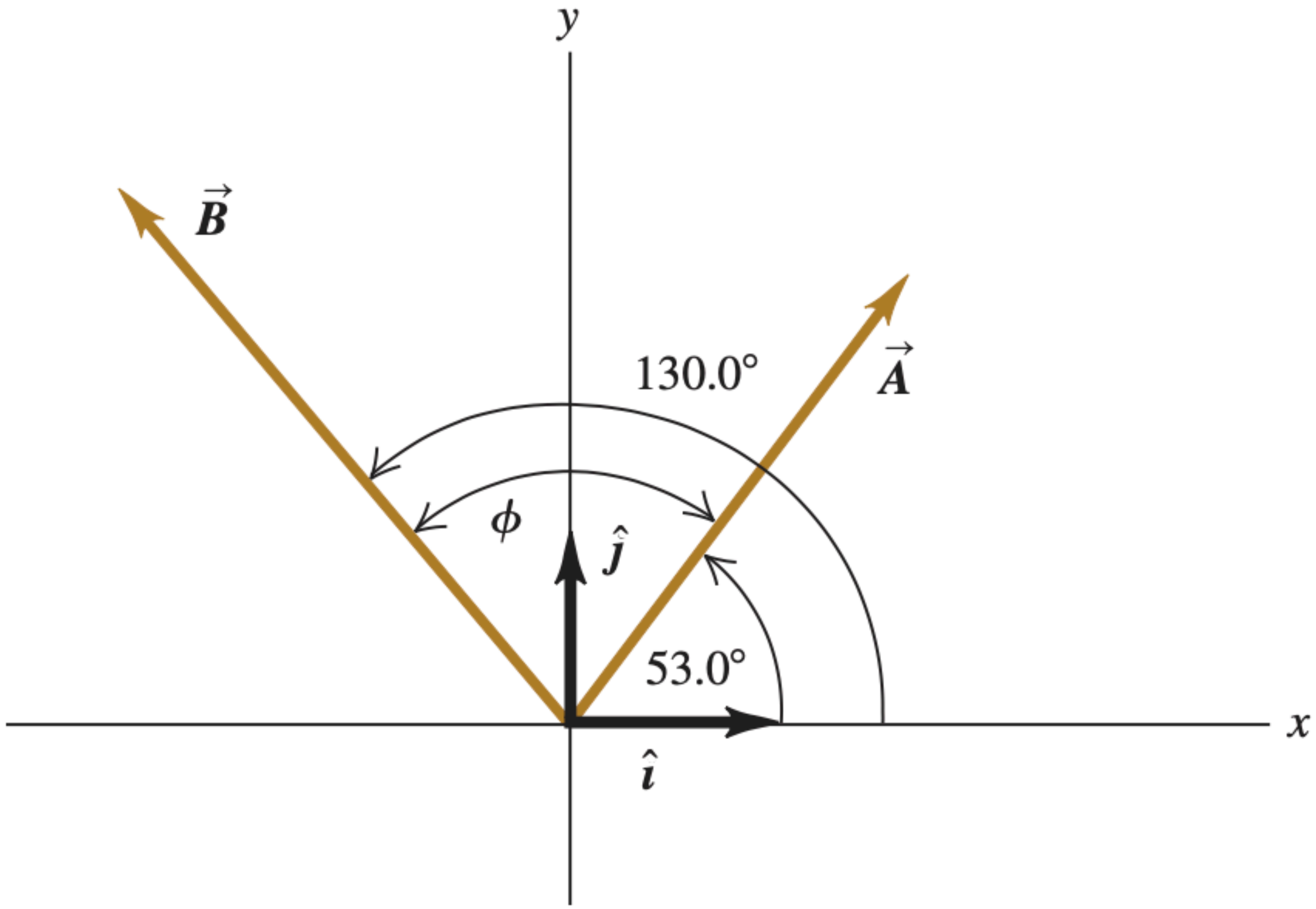
- En este caso, obtenemos el producto escalar de $\vec{A}$ y $\vec{B}$ con la ecuación (1.21).
- Por la ecuación (1.18), dicho producto escalar también es igual a **$AB \cos \phi$.**
- Las magnitudes vectoriales de $\vec{A}$ y $\vec{B}$ pueden obtenerse de los vectores componentes utilizando la ecuación (1.12),
- así que podemos determinar cos ϕ y de ahí el ángulo ϕ.

Producto escalar con componentes

Ejemplo: **Obtenga el producto escalar $\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B}$ de los dos vectores de la figura 1.27.**

Las magnitudes de los vectores son $A = 4.00$ y $B = 5.00$.

1.27 Dos vectores en dos dimensiones.



Producto escalar con componentes

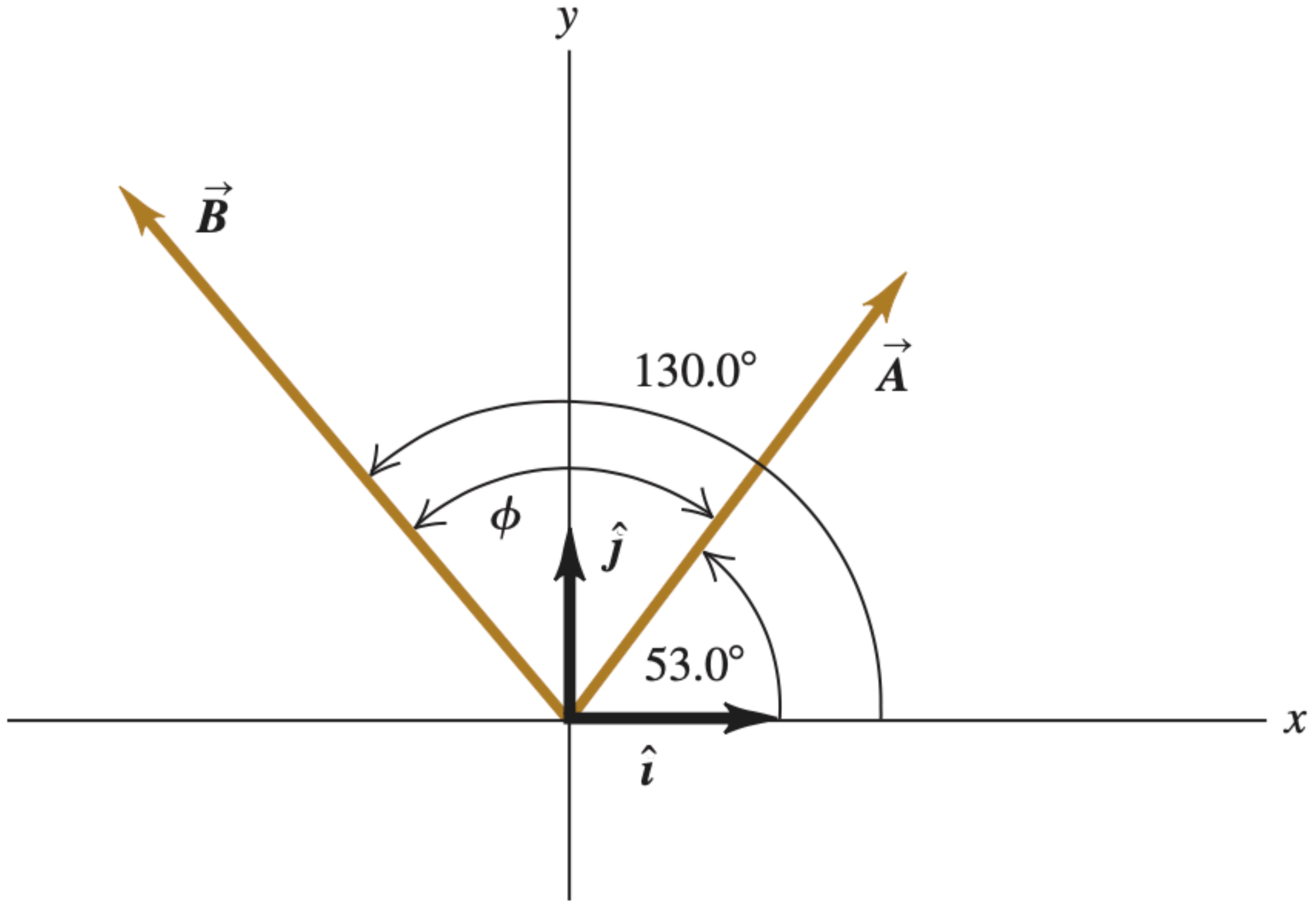
Ejemplo: **Obtenga el producto escalar $\vec{A} \cdot \vec{B}$ de los dos vectores de la figura 1.27.**

Las magnitudes de los vectores son $A = 4.00$ y $B = 5.00$.

IDENTIFICAR: Se nos dan las magnitudes y las direcciones de $\vec{A}$ y $\vec{B}$, y queremos calcular su producto escalar.

PLANTEAR: Hay dos formas de calcular el producto escalar. La primera consiste en usar las magnitudes de los vectores y el ángulo entre ellos; y la segunda, en usar las componentes de los dos vectores.

1.27 Dos vectores en dos dimensiones.

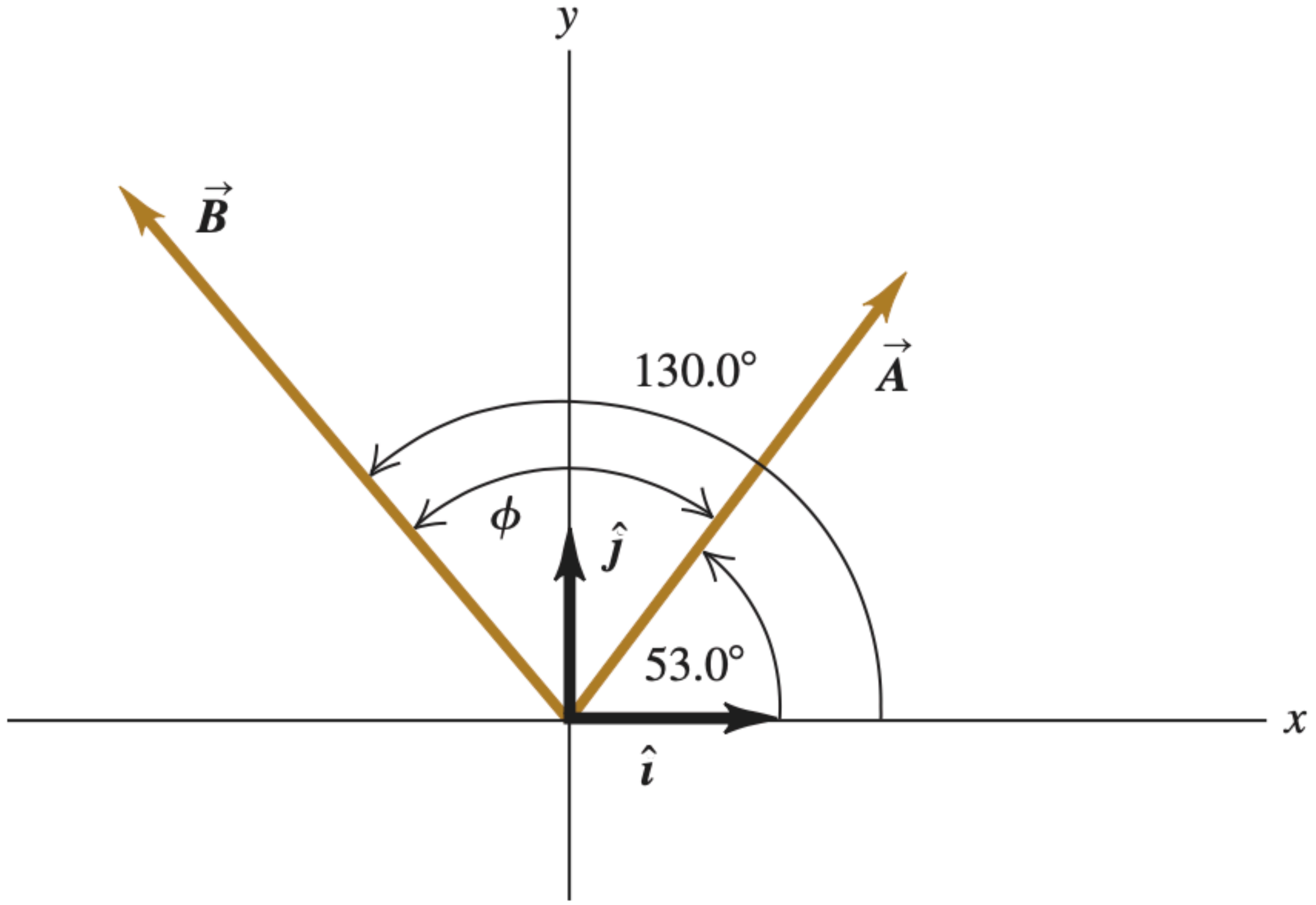


Producto escalar con componentes

E J E C U TA R : Utilizando el primer enfoque, el ángulo entre los dos vectores es ϕ = 130.0° - 53.0° = 77.0°, así que

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB\cos\phi = (4.00)(5.00)\cos 77.0° = 4.50$$

1.27 Dos vectores en dos dimensiones.



Producto escalar con componentes

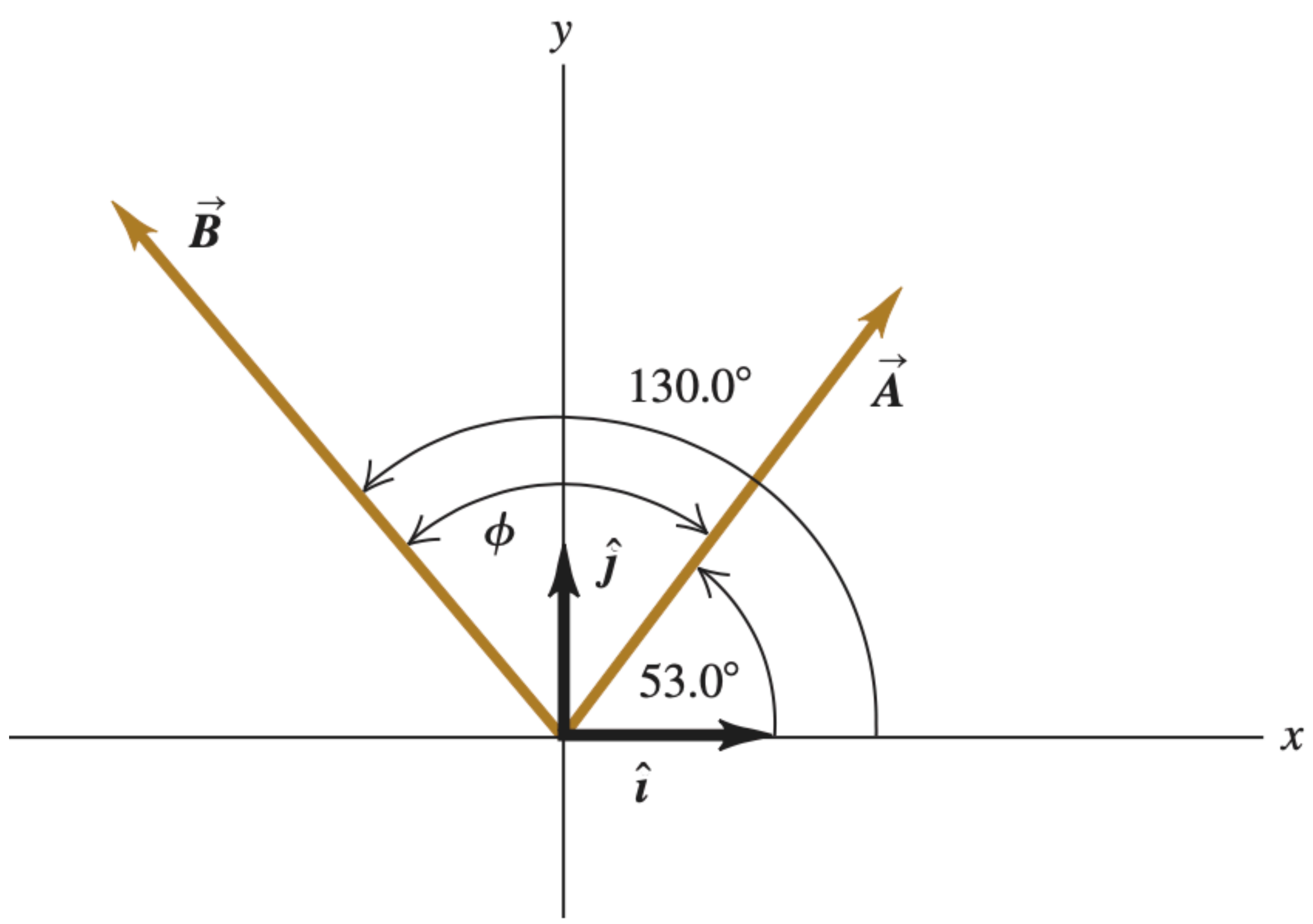
Para el segundo enfoque, primero necesitamos calcular las componentes de los dos vectores. Como los ángulos de $\vec{A}$ y $\vec{B}$ se dan con respecto al eje $+x$, medidos hacia el eje $+y$, podemos usar las ecuaciones (1.6):

$$A_x = (4.00)\cos 53.0° = 2.407$$
$$A_y = (4.00)\,\text{sen}\,53.0° = 3.195$$
$$A_z = 0$$
$$B_x = (5.00)\cos 130.0° = -3.214$$
$$B_y = (5.00)\,\text{sen}\,130.0° = 3.830$$
$$B_z = 0$$

Por la ecuación (1.21), el producto escalar es

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$
$$= (2.407)(-3.214) + (3.195)(3.830) + (0)(0) = 4.50$$

1.27 Dos vectores en dos dimensiones.



Producto escalar con componentes

Ejemplo: **Determine el ángulo entre los dos vectores**

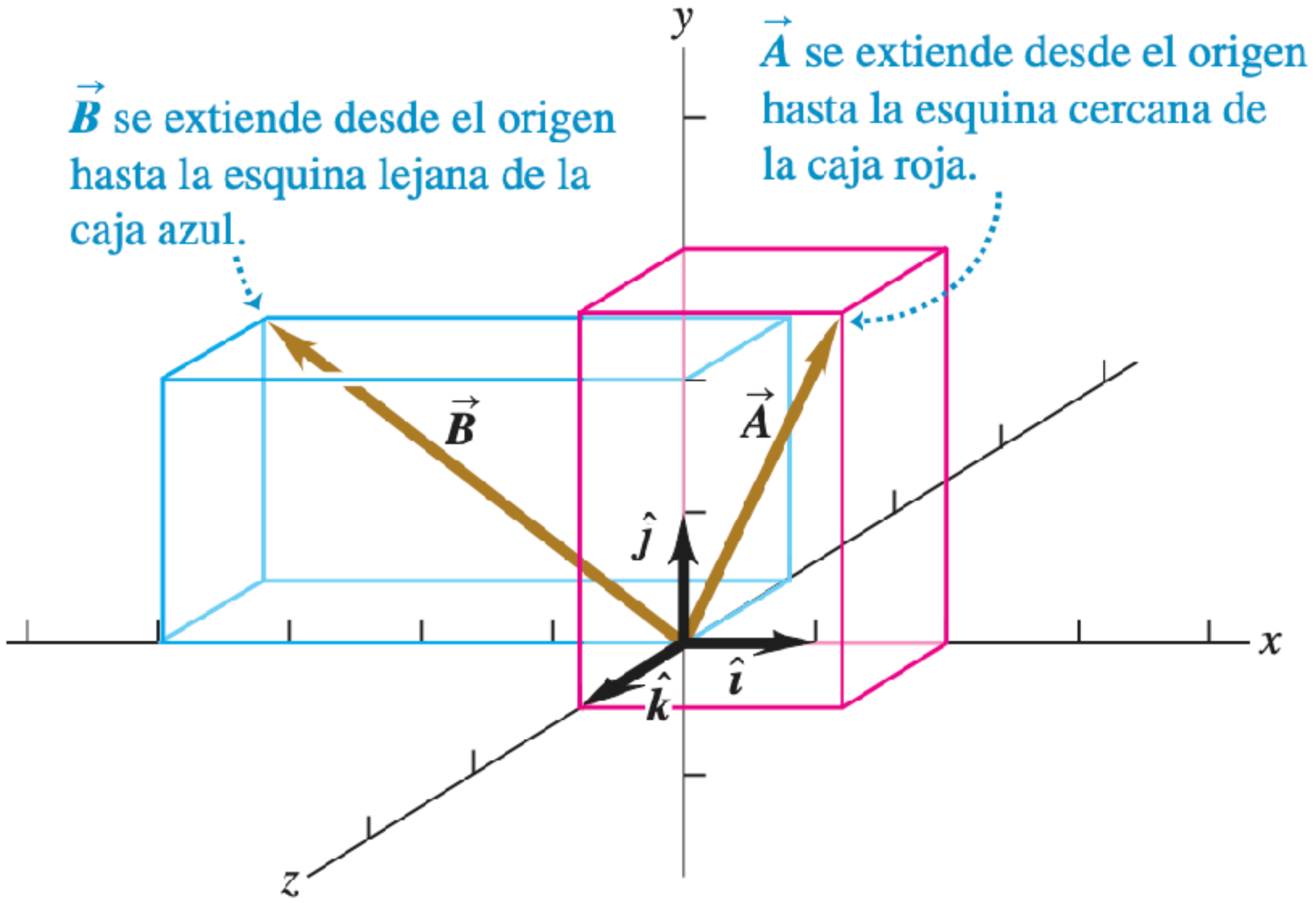
$$\vec{A} = 2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} + \hat{k} \quad \text{y} \quad \vec{B} = -4\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - \hat{k}$$

Producto escalar con componentes

Ejemplo: **Determine el ángulo entre los dos vectores**

$$\vec{A} = 2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} + \hat{k} \qquad \text{y} \qquad \vec{B} = -4\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - \hat{k}$$

1.28 Dos vectores en tres dimensiones.



IDENTIFICAR: Se nos dan las componentes x, y y z de dos vectores. Nuestra incógnita es el ángulo ϕ entre ellas.

PLANTEAR: La figura 1.28 muestra los dos vectores. El producto escalar de dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ está relacionado con el ángulo ϕ entre ellos y con las magnitudes A y B por la ecuación (1.18).

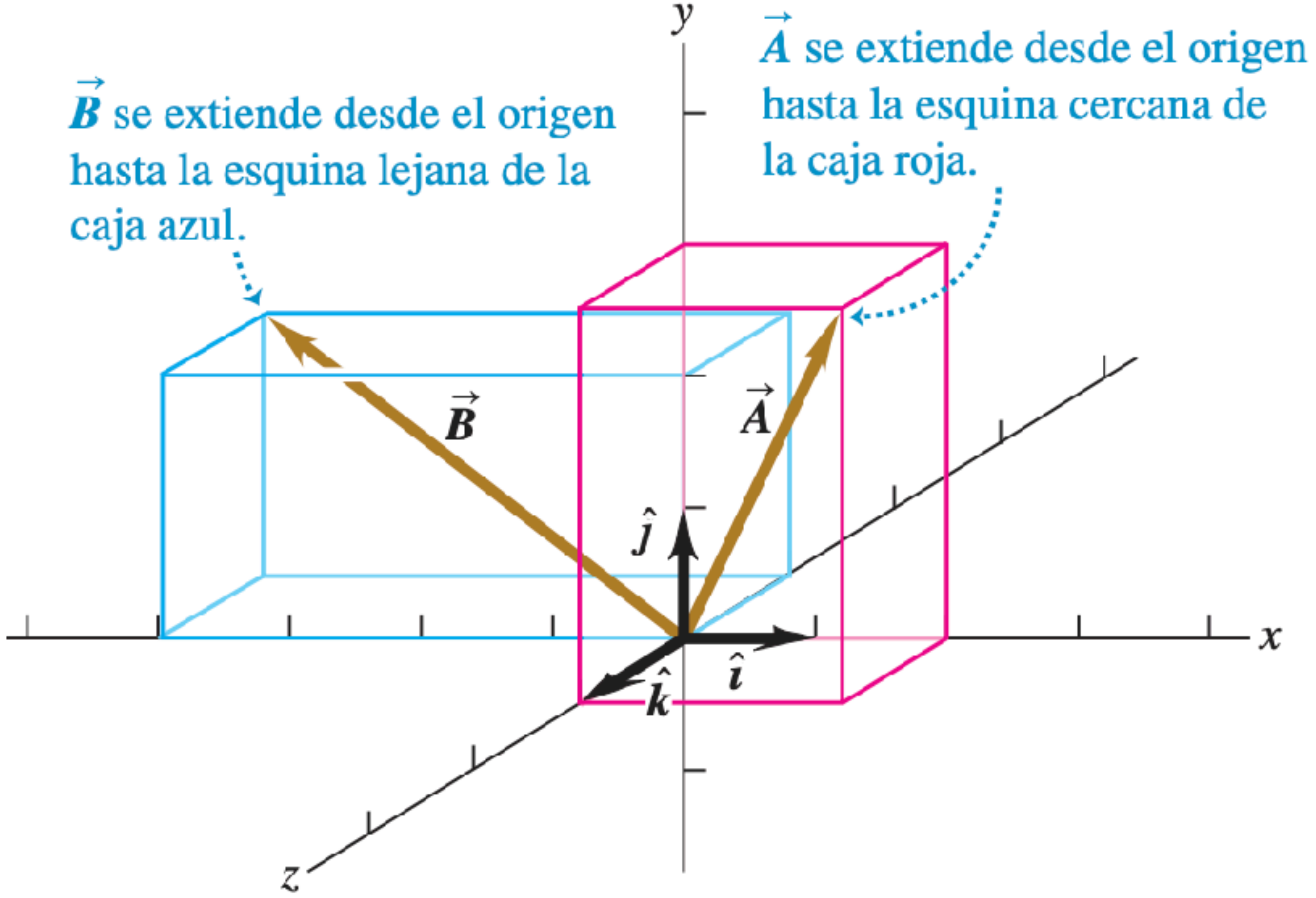
También está relacionado con las componentes de los dos vectores. Si nos dan las componentes, primero determinamos el producto escalar $\vec{A} \cdot \vec{B}$ y los valores de A y B, y luego determinamos la incógnita ϕ.

Producto escalar con componentes

Ejemplo: **Determine el ángulo entre los dos vectores**

$$\vec{A} = 2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} + \hat{k} \qquad \text{y} \qquad \vec{B} = -4\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - \hat{k}$$

1.28 Dos vectores en tres dimensiones.



E J E C U TA R : Igualamos entre sí nuestras dos expresiones para el producto escalar, ecuación (1.18) y ecuación (1.21). Reordenando, obtenemos

$$\cos\phi = \frac{A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z}{AB}$$

Esta fórmula puede utilizarse para encontrar el ángulo entre cualesquiera dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$.

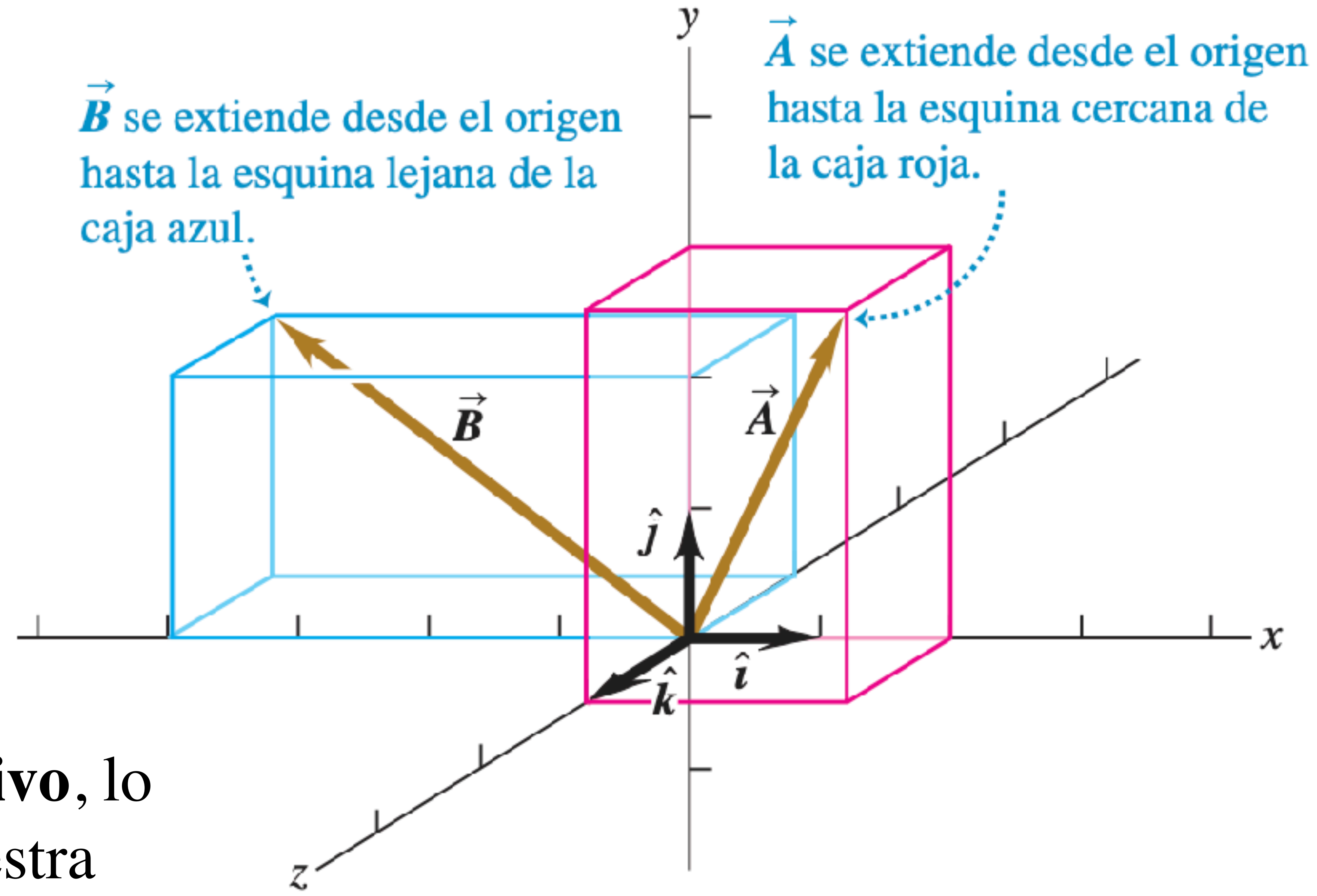
Producto escalar con componentes

En nuestro ejemplo, las componentes de $\overrightarrow{A}$ son $Ax = 2$, $Ay = 3$ y $Az = 1$, y las componentes de $\overrightarrow{B}$ son $Bx = -4$, $By = 2$ y $Bz = -1$. Entonces,

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$
$$= (2)(-4) + (3)(2) + (1)(-1) = -3$$
$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} = \sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{14}$$
$$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2} = \sqrt{(-4^2) + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{21}$$

$$\cos\phi = \frac{A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z}{AB} = \frac{-3}{\sqrt{14}\sqrt{21}} = -0.175$$
$$\phi = 100°$$

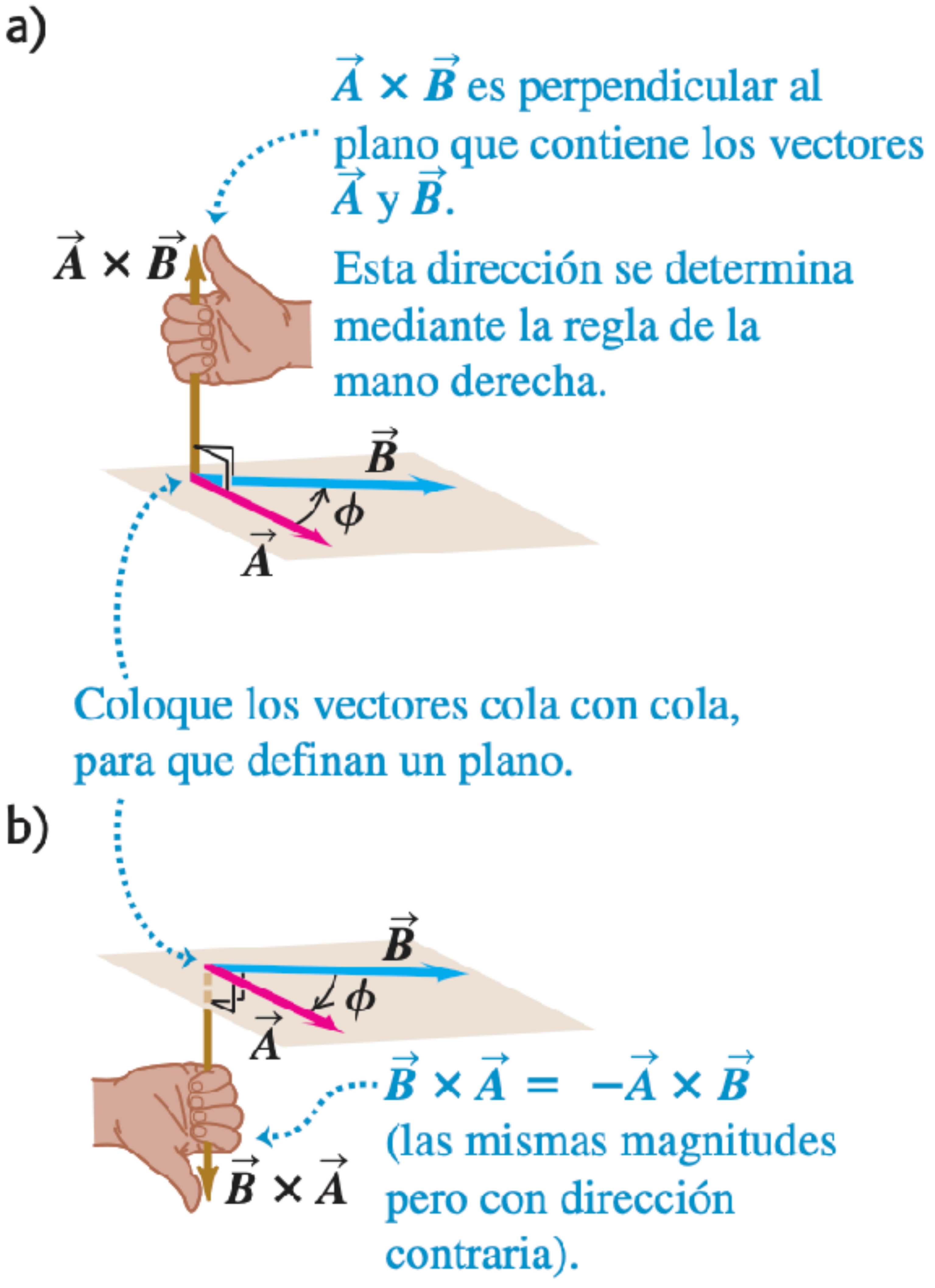
1.28 Dos vectores en tres dimensiones.



EVALUAR: **Observe que el producto escalar $\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B}$ es negativo**, lo cual significa que ϕ está entre 90 y 180°, que concuerda con nuestra respuesta.

Producto vectorial

1.29 a) El producto vectorial $\vec{A} \times \vec{B}$. determinado por la regla de la mano derecha. b) $\vec{B} \times \vec{A} = -\vec{A} \times \vec{B}$; el producto vectorial es anticonmutativo.



El **producto vectorial** de dos vectores $\vec{A}$ **y** $\vec{B}$, también llamado **producto cruz**, se denota con $\vec{A} \times \vec{B}$. Como su nombre lo indica, **el producto vectorial es un vector en sí mismo**. Usaremos este para describir el **torque** y la cantidad de **movimiento angular**; y **para describir campos magnéticos y fuerzas.**

Para definir el producto vectorial $\vec{A} \times \vec{B}$ de dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ otra vez dibujamos los dos vectores con sus colas en el mismo punto (figura 1.29a). Así, los dos vectores están en un plano. Definimos el producto vectorial como una **cantidad vectorial perpendicular a este plano** (es decir, perpendicular tanto a $\vec{A}$ como a $\vec{B}$) **con una magnitud igual a AB sen ϕ.** Esto es, si $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$, entonces,

$$C = AB \operatorname{sen} \phi \qquad \text{(magnitud del producto vectorial (cruz) de } \vec{A} \text{ y } \vec{B}) \qquad (1.22)$$

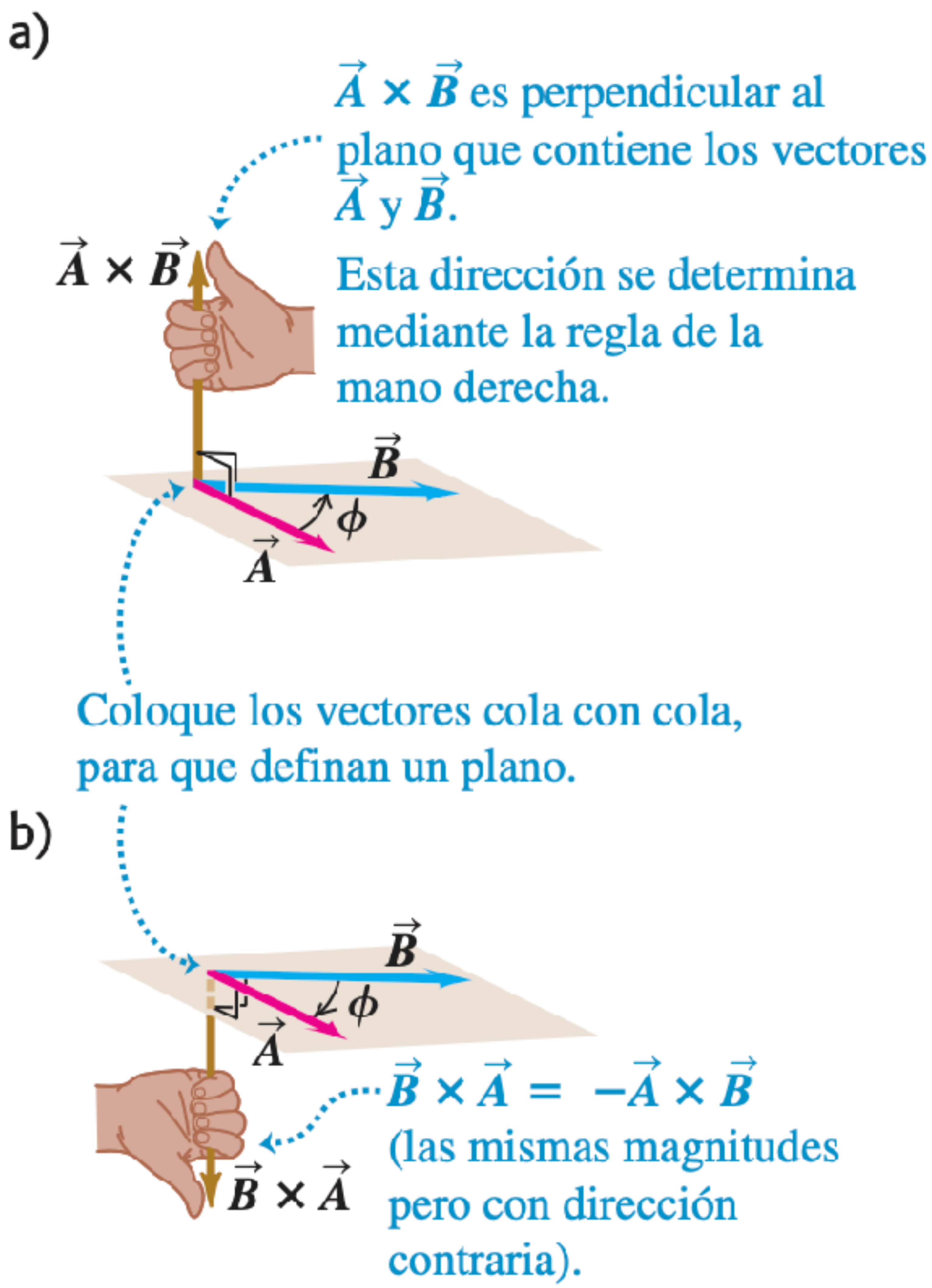
Producto vectorial

Medimos el ángulo ϕ de $\overrightarrow{A}$ hacia $\overrightarrow{B}$ tomando el más pequeño de los dos ángulos posibles, de manera que ϕ está entre 0 y 180°. Por lo tanto, sen $\phi \geq$ 0 y C **en la ecuación (1.22) nunca es negativo, como debe ser toda magnitud de vector.**

Observe también que **cuando $\overrightarrow{A}$ y $\overrightarrow{B}$ son paralelos o antiparalelos, $\phi = 0$ o 180°, y C = 0. Es decir, el producto vectorial de dos vectores paralelos o antiparalelos siempre es cero.**

En particular, el producto vectorial de un vector consigo mismo es cero.

1.29 a) El producto vectorial $\vec{A} \times \vec{B}$. determinado por la regla de la mano derecha. b) $\vec{B} \times \vec{A} = -\vec{A} \times \vec{B}$; el producto vectorial es anticonmutativo.



Producto vectorial

Siempre hay *dos* direcciones perpendiculares a un plano dado, una a cada lado.

Elegimos la dirección de $\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}$ como sigue. Imagine que gira el vector $\overrightarrow{A}$ sobre la línea perpendicular hasta alinearlo con $\overrightarrow{B}$, eligiendo el ángulo más pequeño entre $\overrightarrow{A}$ y $\overrightarrow{B}$. Gire los dedos de su mano derecha sobre la perpendicular, con las puntas señalando en la dirección de la rotación; el pulgar señalará en la dirección de $\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}$.

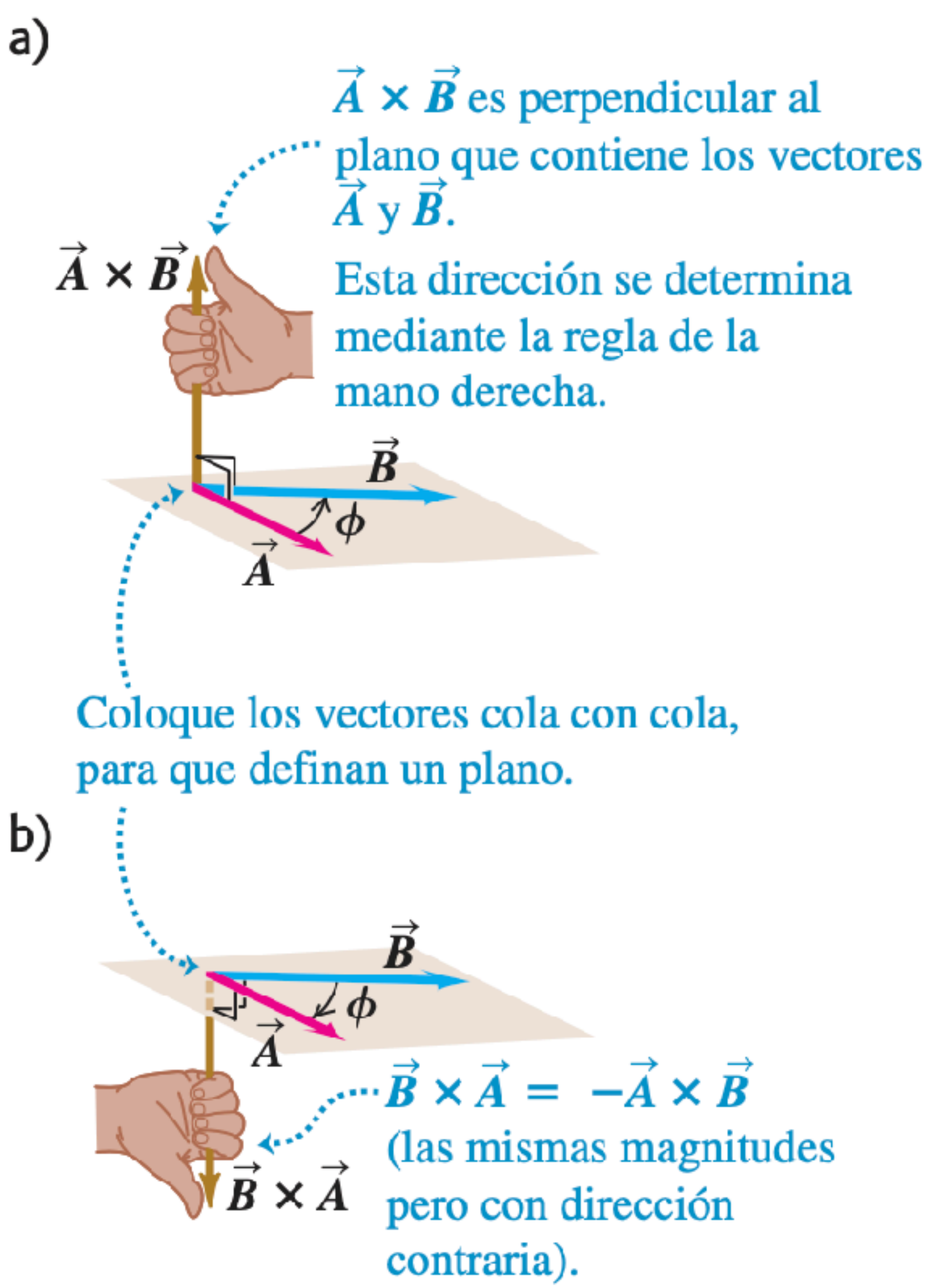
Esta **regla de la mano derecha** se ilustra en la figura 1.29a.

Asimismo, determinamos la dirección de $\overrightarrow{B} \times \overrightarrow{A}$ girando $\overrightarrow{B}$ hacia $\overrightarrow{A}$ como en la figura 1.29b. El resultado es un **vector *opuesto*** a $\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}$.

¡El producto vectorial *no* es conmutativo! De hecho, para cualesquiera dos vectores $\overrightarrow{A}$ y $\overrightarrow{B}$,

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A} \tag{1.23}$$

1.29 a) El producto vectorial $\vec{A} \times \vec{B}$. determinado por la regla de la mano derecha. b) $\vec{B} \times \vec{A} = -\vec{A} \times \vec{B}$; el producto vectorial es anticonmutativo.



Producto vectorial

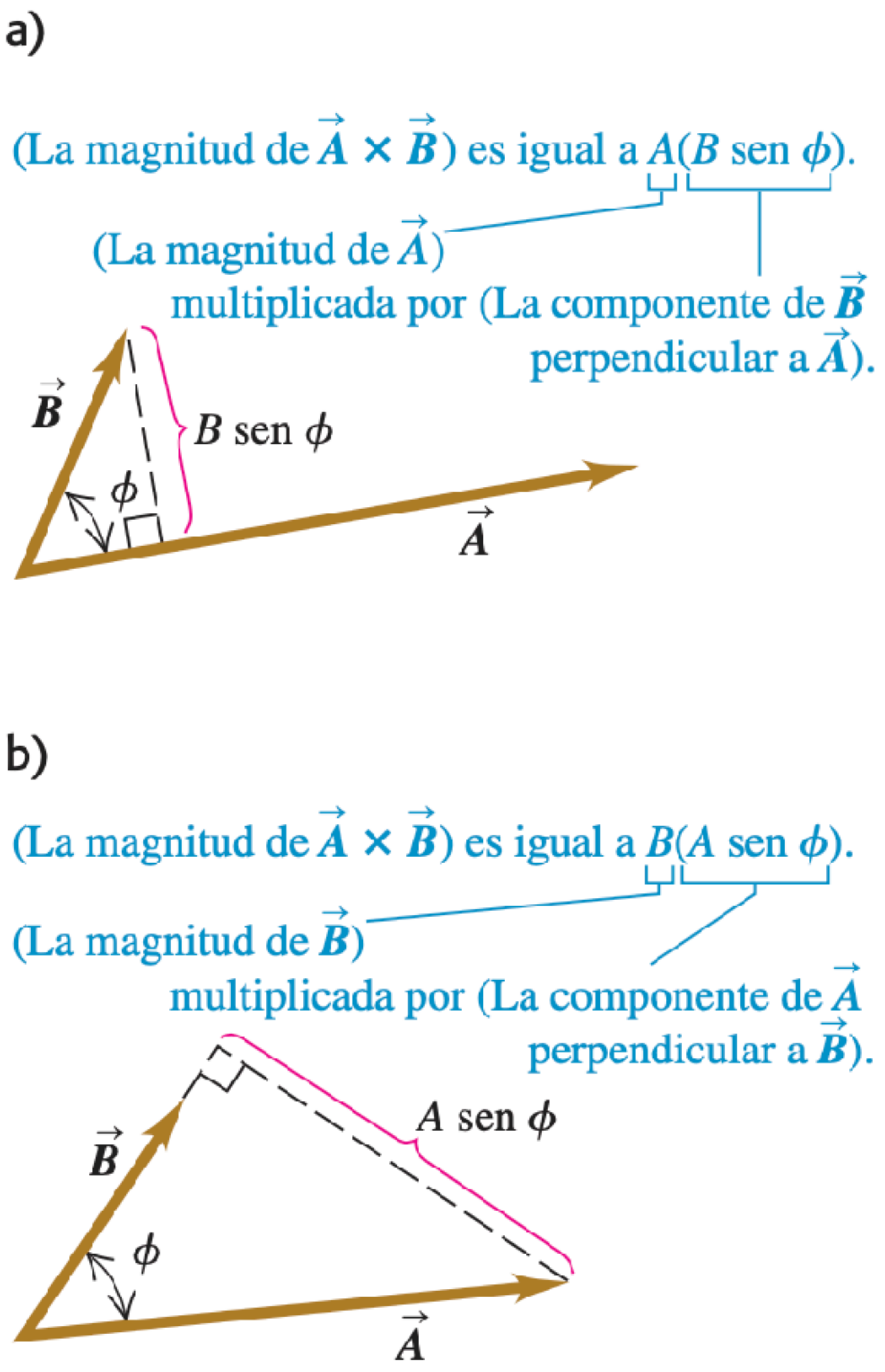
Como hicimos con el producto escalar, podemos **interpretar geométricamente la magnitud del producto vectorial.**

En la figura 1.30a, B sen ϕ es la componente del vector $\overrightarrow{B}$ que es *perpendicular* a la dirección del vector $\overrightarrow{A}$

Por la ecuación (1.22), **la magnitud de** $\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}$ es igual a la magnitud de $\overrightarrow{A}$ multiplicada por la componente de $\overrightarrow{B}$ perpendicular a $\overrightarrow{A}$.

La figura 1.30b muestra que la magnitud de $\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}$ también es igual a la magnitud de $\overrightarrow{B}$ multiplicada por la componente de $\overrightarrow{A}$ perpendicular a $\overrightarrow{B}$.

1.30 Calculo de la magnitud AB sen ϕ del producto de dos vectores, $\vec{A} \times \vec{B}$.



Producto vectorial con componentes

Si conocemos las componentes de $\vec{A}$ y $\vec{B}$, podremos calcular las componentes del producto vectorial usando un procedimiento similar al del producto escalar. Primero deducimos la tabla de **multiplicación de los vectores unitarios $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ y $\hat{k}$,** que son mutuamente perpendiculares. El producto cruz de cualquier vector consigo mismo es cero, así que

$$\hat{\imath} \times \hat{\imath} = \hat{\jmath} \times \hat{\jmath} = \hat{k} \times \hat{k} = \mathbf{0}$$

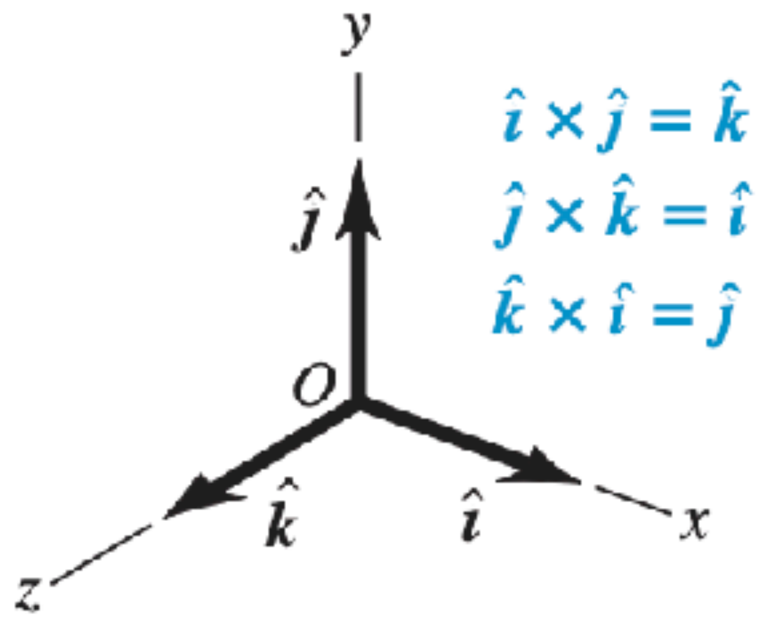
El cero en negritas nos recuerda que cada producto es un *vector* cero; es decir, uno con todas sus componentes iguales a cero y con dirección indefinida.

Usando las ecuaciones (1.22) y (1.23), y la regla de la mano derecha, tenemos

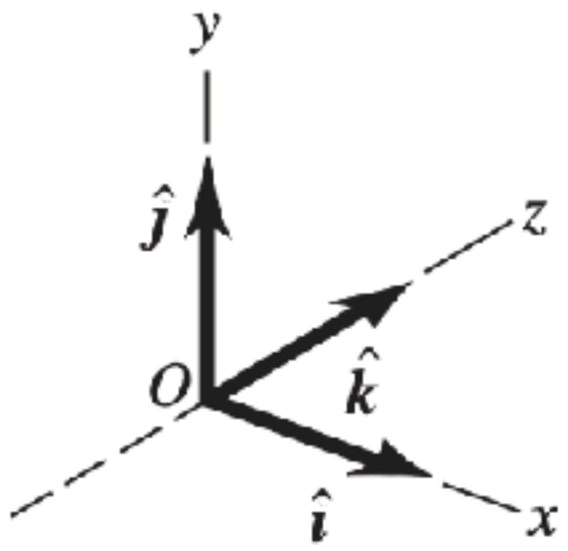
$$\hat{\imath} \times \hat{\jmath} = -\hat{\jmath} \times \hat{\imath} = \hat{k}$$
$$\hat{\jmath} \times \hat{k} = -\hat{k} \times \hat{\jmath} = \hat{\imath}$$
$$\hat{k} \times \hat{\imath} = -\hat{\imath} \times \hat{k} = \hat{\jmath}$$

1.31 a) Siempre utilizaremos un sistema de coordenadas derecho, como éste. b) Nunca usaremos un sistema de coordenadas izquierdo (donde $\hat{\imath} \times \hat{\jmath} = -\hat{k}$, y así sucesivamente).

a) Sistema de coordenadas derecho.



b) Sistema de coordenadas izquierdo; no lo usaremos aquí.



Producto vectorial con componentes

Ahora expresamos $\vec{A}$ y $\vec{B}$, en términos de sus componentes y los vectores unitarios correspondientes, y expandimos la expresión del producto cruz:

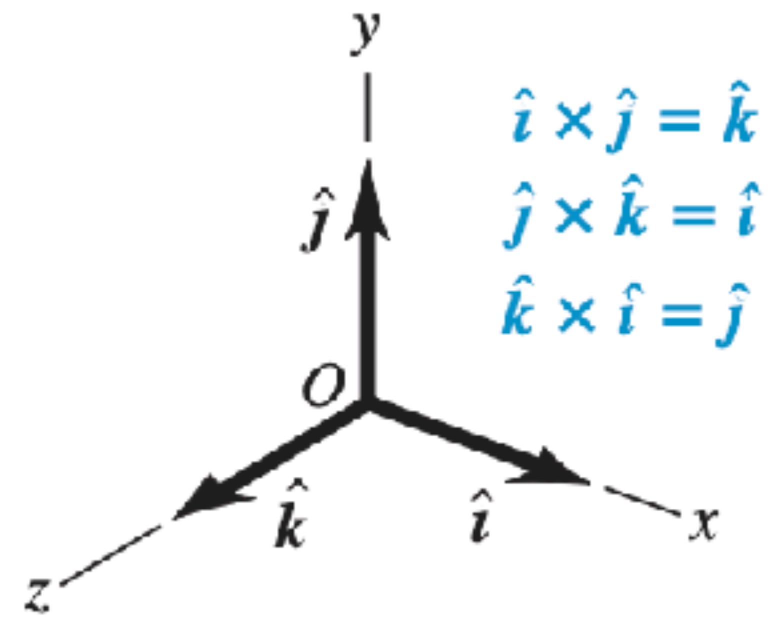
$$\begin{aligned}\vec{A} \times \vec{B} &= (A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k}) \times (B_x\hat{\imath} + B_y\hat{\jmath} + B_z\hat{k}) \\ &= A_x\hat{\imath} \times B_x\hat{\imath} + A_x\hat{\imath} \times B_y\hat{\jmath} + A_x\hat{\imath} \times B_z\hat{k} \\ &\quad + A_y\hat{\jmath} \times B_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} \times B_y\hat{\jmath} + A_y\hat{\jmath} \times B_z\hat{k} \\ &\quad + A_z\hat{k} \times B_x\hat{\imath} + A_z\hat{k} \times B_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k} \times B_z\hat{k}\end{aligned} \tag{1.25}$$

También podemos reescribir los términos individuales como en la ecuación (1.25) como $A_x\hat{\imath} \times B_y\hat{\jmath} = (A_xB_y)\hat{\imath} \times \hat{\jmath}$, etcétera. Evaluamos éstos usando la tabla de multiplicar de los vectores unitarios en las ecuaciones (1.24) y luego agrupamos términos, para obtener

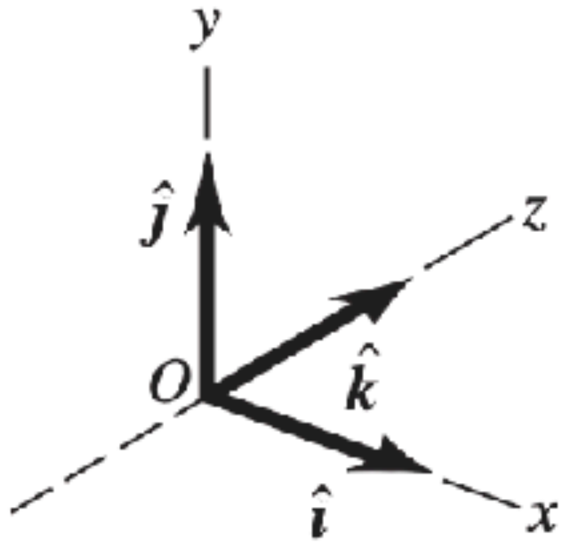
$$\vec{A} \times \vec{B} = (A_yB_z - A_zB_y)\,\hat{\imath} + (A_zB_x - A_xB_z)\hat{\jmath} + (A_xB_y - A_yB_x)\hat{k} \tag{1.26}$$

1.31 a) Siempre utilizaremos un sistema de coordenadas derecho, como éste. b) Nunca usaremos un sistema de coordenadas izquierdo (donde $\hat{\imath} \times \hat{\jmath} = -\hat{k}$, y así sucesivamente).

a) Sistema de coordenadas derecho.



b) Sistema de coordenadas izquierdo; no lo usaremos aquí.



Producto vectorial con componentes

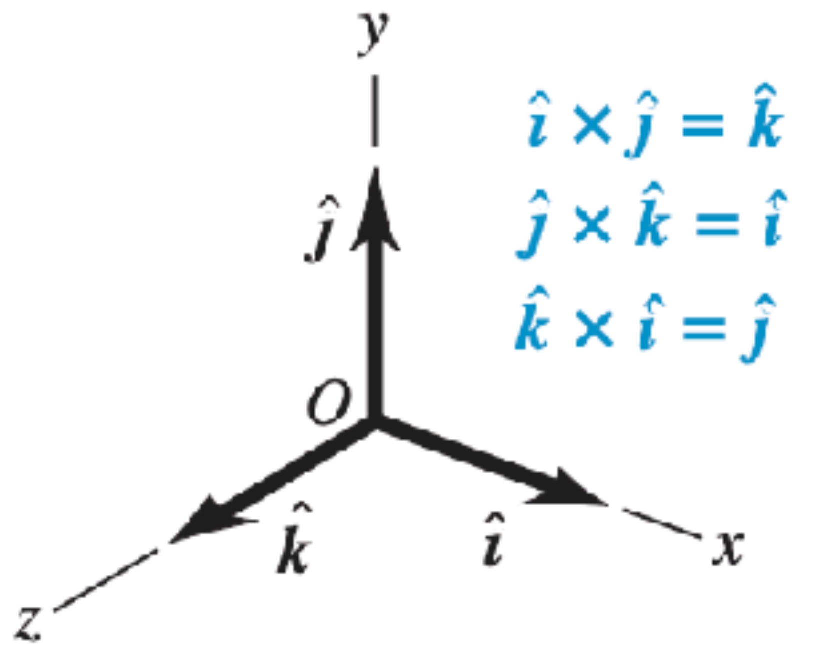
Por lo tanto, las componentes de $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ están dadas por

$$C_x = A_y B_z - A_z B_y \qquad C_y = A_z B_x - A_x B_z \qquad C_z = A_x B_y - A_y B_x \tag{1.27}$$

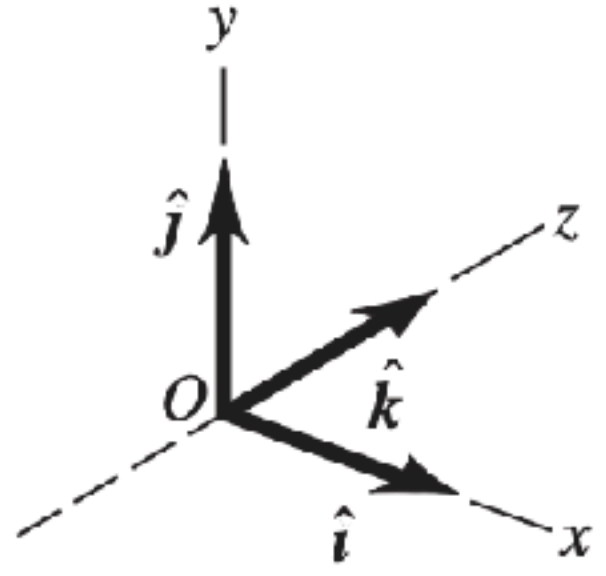
(componentes de $\vec{\boldsymbol{C}} = \vec{\boldsymbol{A}} \times \vec{\boldsymbol{B}}$)

1.31 a) Siempre utilizaremos un sistema de coordenadas derecho, como éste. b) Nunca usaremos un sistema de coordenadas izquierdo (donde $\hat{\imath} \times \hat{\jmath} = -\hat{k}$, y así sucesivamente).

a) Sistema de coordenadas derecho.



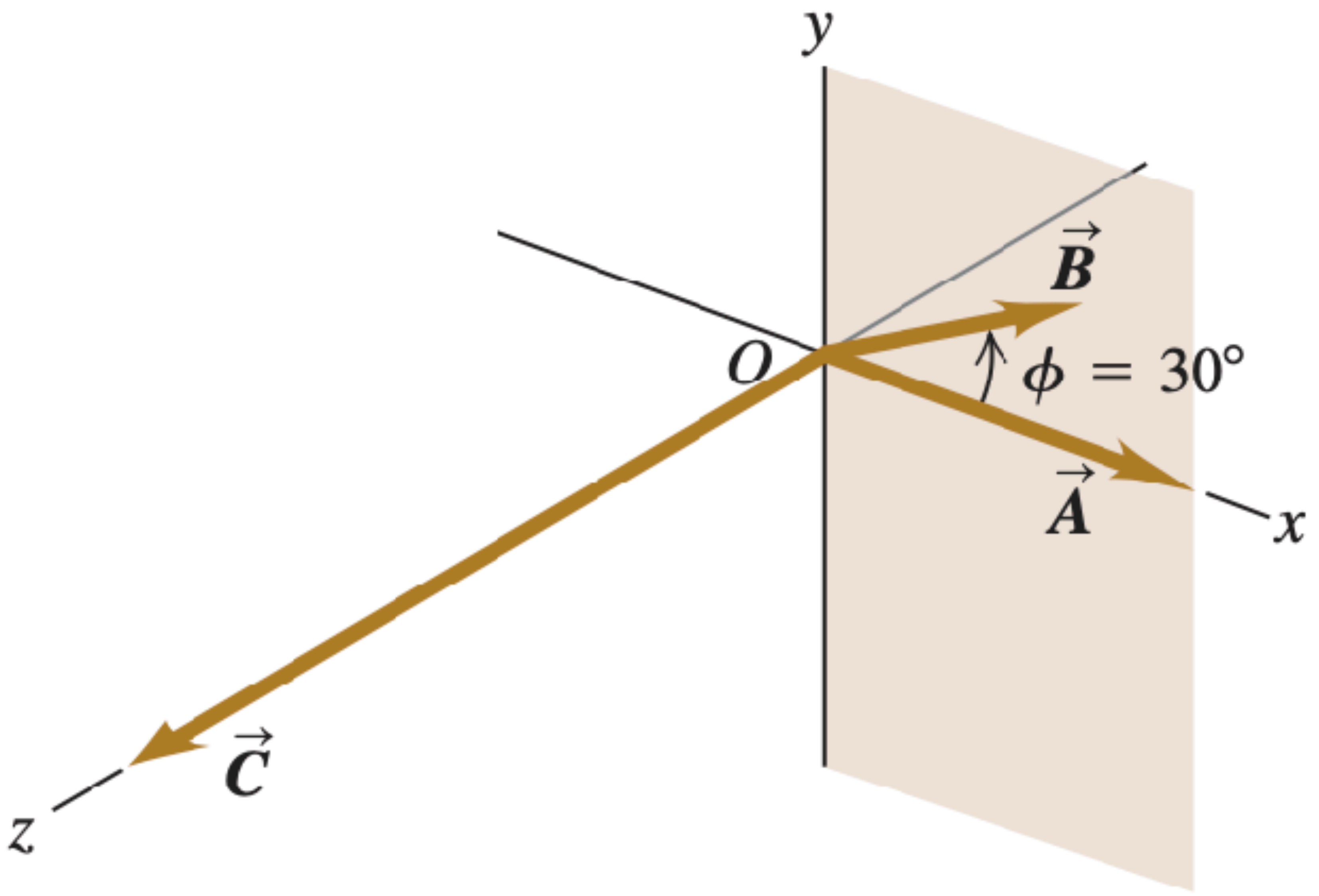
b) Sistema de coordenadas izquierdo; no lo usaremos aquí.



Producto vectorial con componentes

Ejemplo: El vector $\overrightarrow{A}$ tiene una magnitud de 6 unidades y está sobre el eje $1x$.
$\overrightarrow{B}$ tiene una magnitud de 4 unidades y está en el plano xy formando un ángulo de 30° con el eje $+x$ (figura 1.32).
Calcule el producto cruz $\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}$.

1.32 Vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ y su producto vectorial $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$. El vector $\vec{B}$ está en el plano xy.



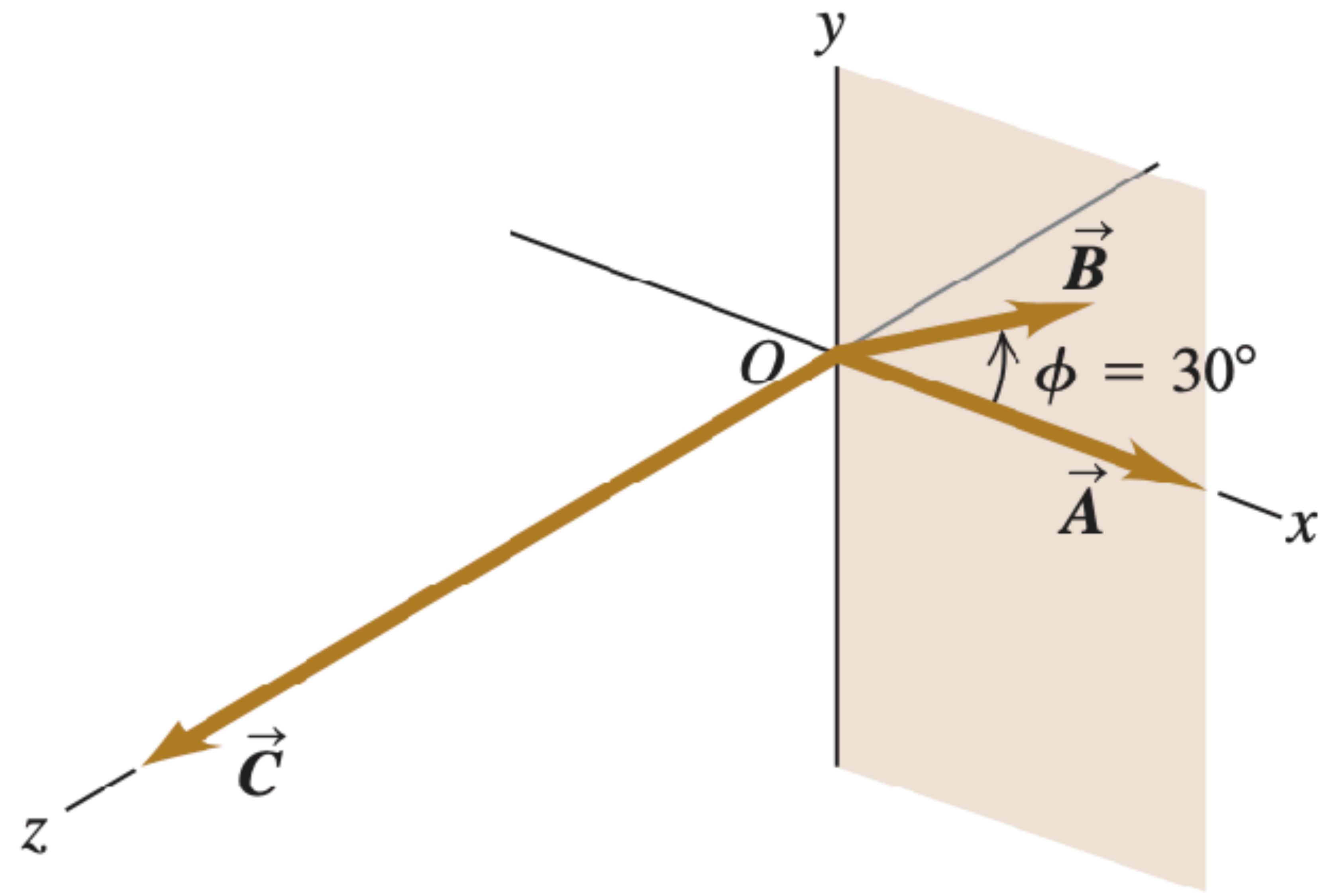
Producto vectorial con componentes

PLANTEAR: Podemos obtener el producto cruz de dos maneras.

La primera consiste en usar la ecuación (1.22) para determinar la magnitud de $\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}$ y luego utilizar la regla de la mano derecha para encontrar la dirección del producto cruz.

La segunda forma es usar las componentes de $\overrightarrow{A}$ y $\overrightarrow{B}$ para obtener las componentes del producto cruz $\overrightarrow{C} = \overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}$ usando las ecuaciones (1.27).

1.32 Vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ y su producto vectorial $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$. El vector $\vec{B}$ está en el plano *xy*.



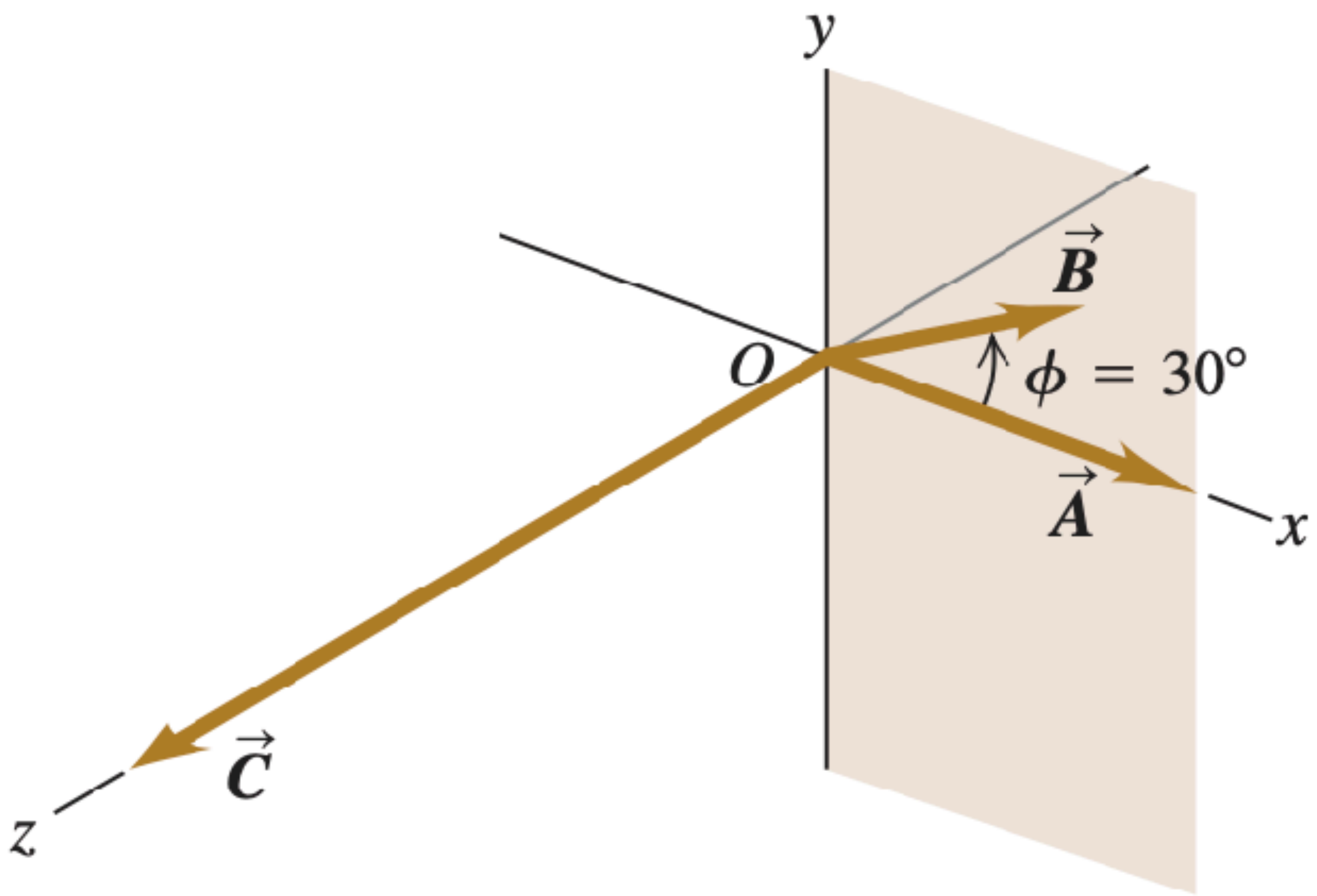
Producto vectorial con componentes

EJECUTAR: Con el primer enfoque, por la ecuación (1.22) la magnitud del producto cruz es

$$AB\,\mathrm{sen}\,\phi = (6)(4)(\mathrm{sen}\,30°) = 12$$

Por la regla de la mano derecha, $\vec{A} \times \vec{B}$ tiene la dirección del eje $+z$; por lo tanto, $\vec{A} \times \vec{B} = 12\hat{k}$.

1.32 Vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ y su producto vectorial $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$. El vector $\vec{B}$ está en el plano xy.



Producto vectorial con componentes

Para usar el segundo enfoque, primero escribimos las componentes:

$$A_x = 6 \qquad A_y = 0 \qquad A_z = 0$$

$$B_x = 4\cos 30° = 2\sqrt{3} \qquad B_y = 4\,\mathrm{sen}\,30° = 2 \qquad B_z = 0$$

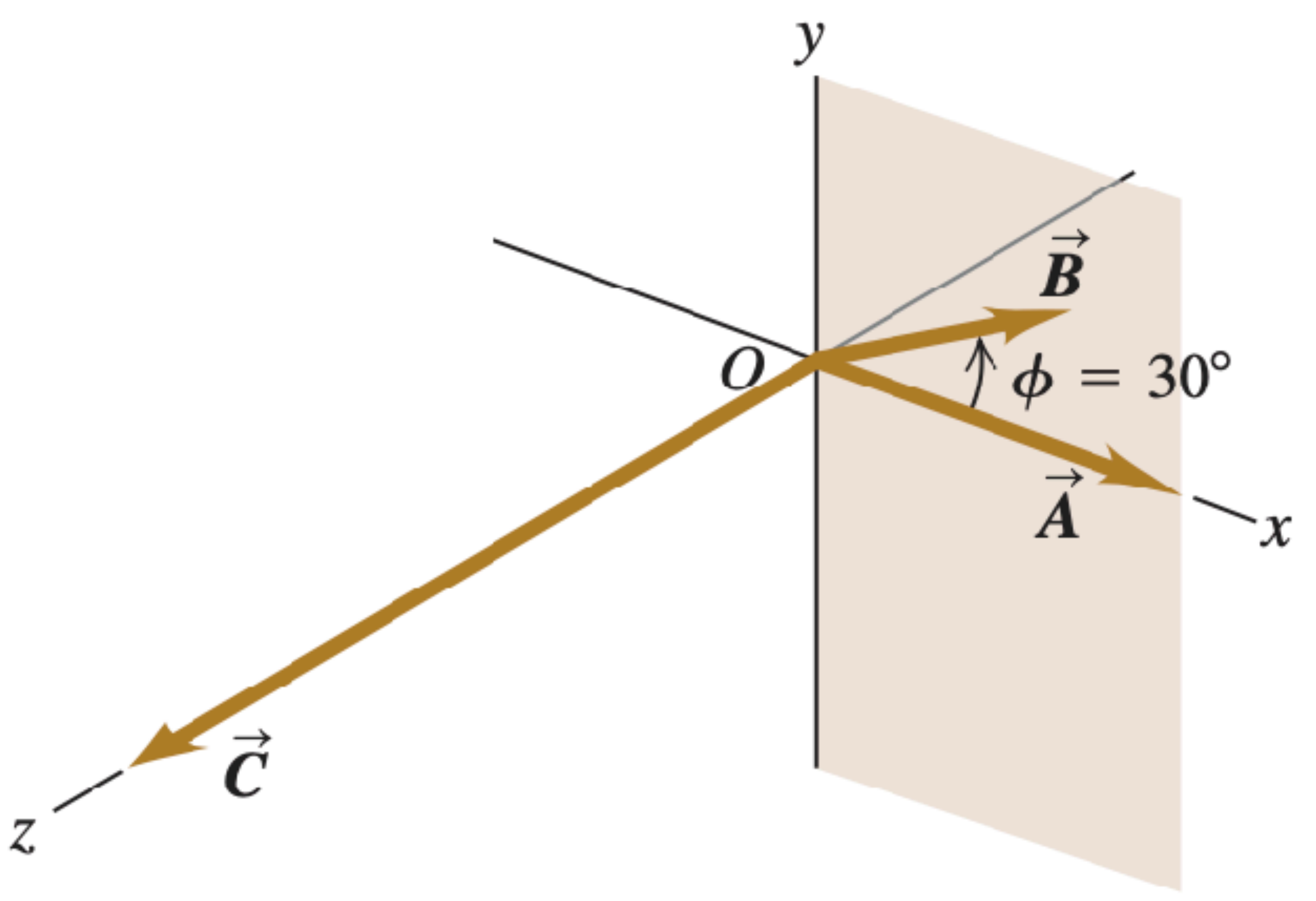
Definiendo $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$, tenemos, de las ecuaciones (1.27), que

$$C_x = (0)(0) - (0)(2) = 0$$

$$C_y = (0)(2\sqrt{3}) - (6)(0) = 0$$

$$C_z = (6)(2) - (0)(2\sqrt{3}) = 12$$

1.32 Vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ y su producto vectorial $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$. El vector $\vec{B}$ está en el plano xy.



El producto vectorial $\vec{C}$ tiene sólo una componente sobre el eje $+z$. La magnitud concuerda con el resultado obtenido antes, como debería ser.