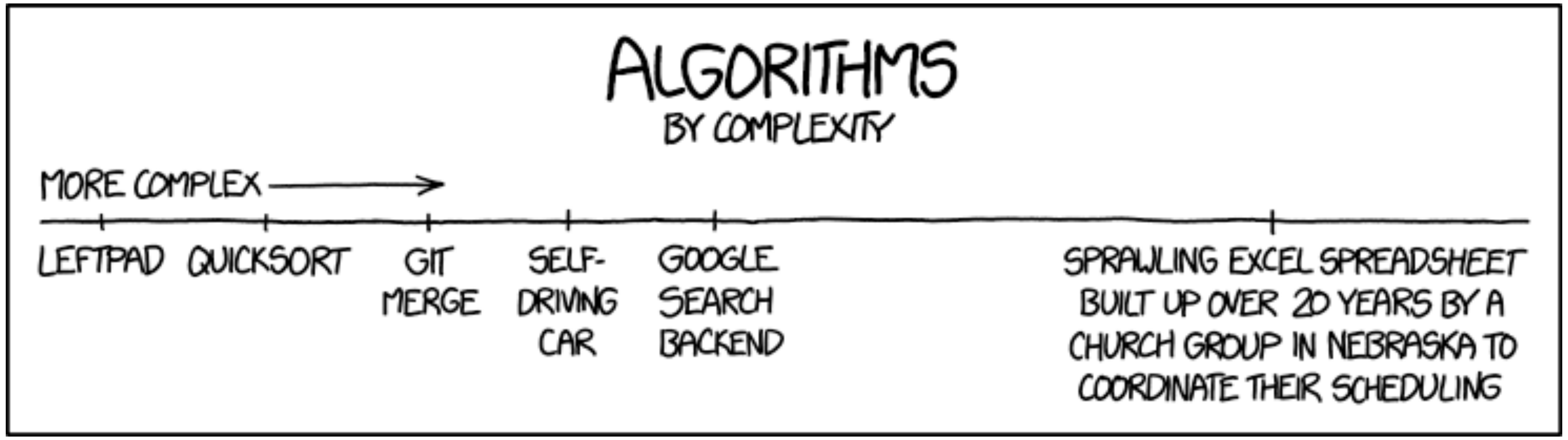


https://xkcd.com/1667/

Tidskompleksitet og asymptotisk notation

Algoritmer og Datastrukturer

Københavns Universitet, forår 2023

Rasmus Pagh

Plan for i dag

- Hvad gør en algoritme god?
- Beregningsmodeller
- Case study: Insertion sort
- Asymptotisk notation
- Nogle grundlæggende funktioner brugt i kurset

Hvad gør en algoritme god?

- **Korrekthed**: På ethvert input returneres et korrekt output
- **Hastighed**: Antal beregningsskridt for at nå frem til output skal være lille
- **Pladseffektivitet:** Mængden af hukommelse, algoritmen bruger, skal være lille
- **Enkelhed**: Kan implementeres korrekt
- **Fleksibilitet**: Kan let tilpasses hvis problemformuleringen ændres
- …
- Vi siger at en algoritme er **optimal** hvis det ikke er muligt at forbedre den

Eksempel: Binær søgning

- Kode fra Wikipedia (Pascal syntax):

```
function binary_search(A, n, T) is
    L := 0
    R := n - 1
    while L ≤ R do
        m := floor((L + R) / 2)
        if A[m] < T then
            L := m + 1
        else if A[m] > T then
            R := m - 1
        else:
            return m
    return unsuccessful
```

Input:
`A`: *Sorteret* array, elementer **`A[0],…,A[n-1]`**
`n:` Antal elementer i **`A`**
`T`: Et element, der skal søges efter

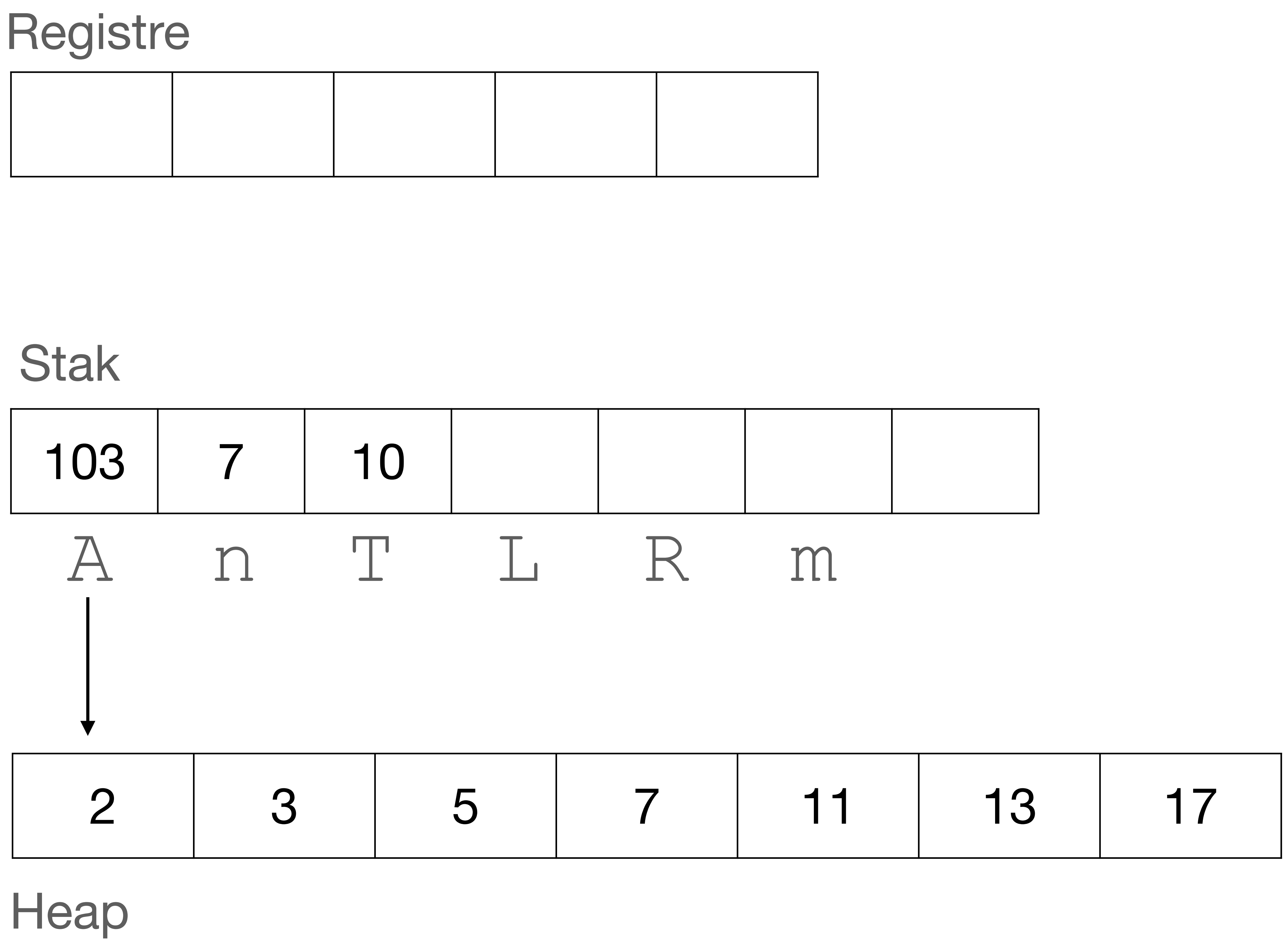
Output:
Index **`m`** hvor **`A[m]=T`** hvis det findes, ellers **`unsuccessful`**.

- Korrekthed, hastighed, pladseffektivitet?

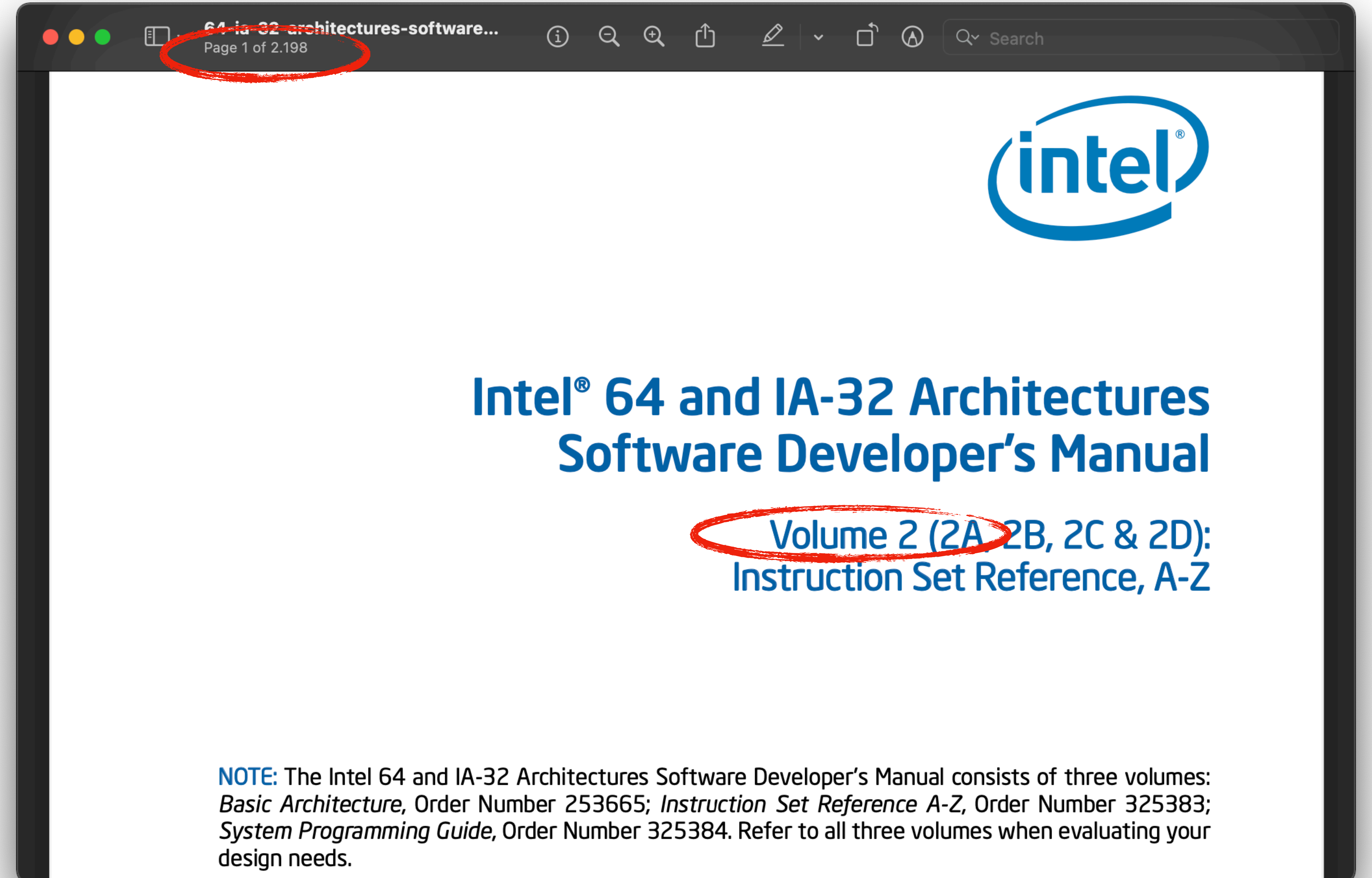
Kørsel af `binary_search(A,7,10)`

- Kode fra Wikipedia (Pascal syntax):

```
function binary_search(A, n, T) is
    L := 0
    R := n - 1
    while L ≤ R do
        m := floor((L + R) / 2)
        if A[m] < T then
            L := m + 1
        else if A[m] > T then
            R := m - 1
        else:
            return m
    return unsuccessful
```



Computere er komplekse



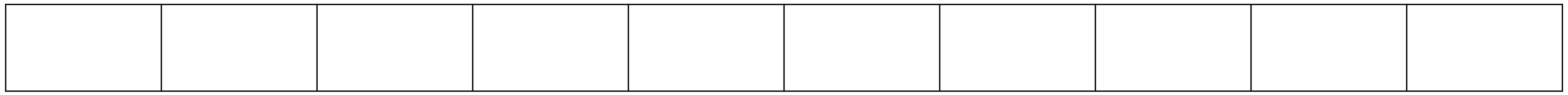
Intel® 64 and IA-32 Architectures Software Developer's Manual

Volume 2 (2A, 2B, 2C & 2D): Instruction Set Reference, A-Z

NOTE: The Intel 64 and IA-32 Architectures Software Developer's Manual consists of three volumes: *Basic Architecture*, Order Number 253665; *Instruction Set Reference A-Z*, Order Number 325383; *System Programming Guide*, Order Number 325384. Refer to all three volumes when evaluating your design needs.

Beregningsmodeller

- Vi vil gerne sige noget om en algoritme *uafhængigt* af den konkrete computer, den udføres på
- Random Access Machine (RAM) er en simpel abstraktion af en computer:
  - Har et konstant antal *registre* til at gemme mellemresultater (w bits i hver)
  - Hukommelsen er en tabel af *maskinord*, der hver består af w bits

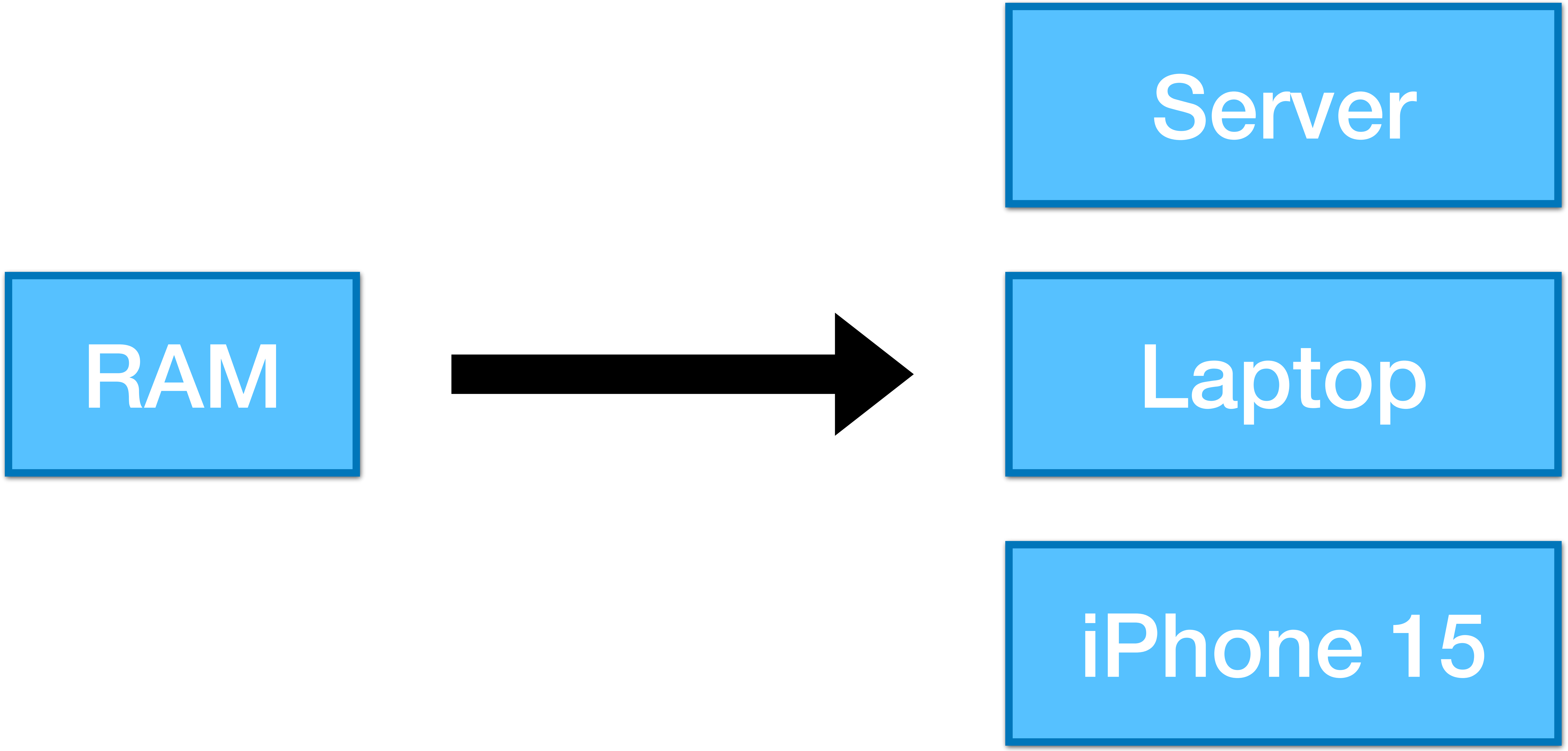


- Input til en algoritme ligger i de første n maskinord i hukommelsen

Køretid i RAM modellen

- Kan i ét tidsskridt: Udføre en aritmetisk operation, læse eller skrive et maskinord, udføre logiske operationer lave betinget hop (branching), …
- Køretiden for en RAM algoritme = antal tidsskridt indtil den terminerer
- Værstefald (worst case) køretid (for inputstørrelse n), er *maksimum* af køretiden på alle input af størrelse n
- Når vi taler om "køretid af en algoritme" mener vi oftest værstefalds analysen

Analyser kan overføres



Hvad RAM modellen abstraherer væk

- Nogle maskinoperationer gør > 1 ting (SIMD, compare-swap, …)
- Uafhængige operationer kan ofte køre parallelt
- Hukommelsesadgange er ikke lige hurtige (cache vs hukommelse vs SSD)
- Computere har flere kerner, der kan arbejde parallelt
- Computere har flere *typer* kerner (typisk CPU(er), GPU, måske FPGA)
- Store beregninger kan fordeles over mange computere
- …
- **Fokus i kurset er RAM**:
  1-trådet asymptotisk skalérbarhed, ikke optimering, parallelisme, etc.

Case study: Insertion sort

INSERTION-SORT(A, n)

for $j = 2$ **to** n
    $key = A[j]$
    // Insert $A[j]$ into the sorted sequence $A[1 \,..\, j-1]$.
    $i = j - 1$
    while $i > 0$ and $A[i] > key$
        $A[i+1] = A[i]$
        $i = i - 1$
    $A[i+1] = key$

Animation from algostructure.com

Case study: Insertion sort

INSERTION-SORT(A, n)	*cost*	*times*
for $j = 2$ **to** n	c_1	n
$key = A[j]$	c_2	$n-1$
// Insert $A[j]$ into the sorted sequence $A[1 \,..\, j-1]$.	0	$n-1$
$i = j-1$	c_4	$n-1$
while $i > 0$ and $A[i] > key$	c_5	$\sum_{j=2}^{n} t_j$
$A[i+1] = A[i]$	c_6	$\sum_{j=2}^{n} (t_j - 1)$
$i = i-1$	c_7	$\sum_{j=2}^{n} (t_j - 1)$
$A[i+1] = key$	c_8	$n-1$

Køretid: $$c_1 n + c_2(n-1) + c_4(n-1) + c_5 \sum_{j=2}^{n} t_j + c_6 \sum_{j=2}^{n} (t_j - 1) + c_7 \sum_{j=2}^{n} (t_j - 1) + c_8(n-1)$$

Øvelse

- Hvilket input giver værstefalds (størst mulige) køretid på et input af længde n?
- Hvad er t_j på dette input?
- (Hvad er køretiden som funktion af n?)

```
INSERTION-SORT(A, n)
  for j = 2 to n
      key = A[j]
      // Insert A[j] into the sorted sequence A[1 .. j − 1].
      i = j − 1
      while i > 0 and A[i] > key
          A[i + 1] = A[i]
          i = i − 1
      A[i + 1] = key
```

Køretid: $c_1 n + c_2(n-1) + c_4(n-1) + c_5 \sum_{j=2}^{n} t_j + c_6 \sum_{j=2}^{n} (t_j - 1) + c_7 \sum_{j=2}^{n} (t_j - 1) + c_8(n-1)$

Værstefalds analyse af insertion sort

Køretid med $t_j = j$:

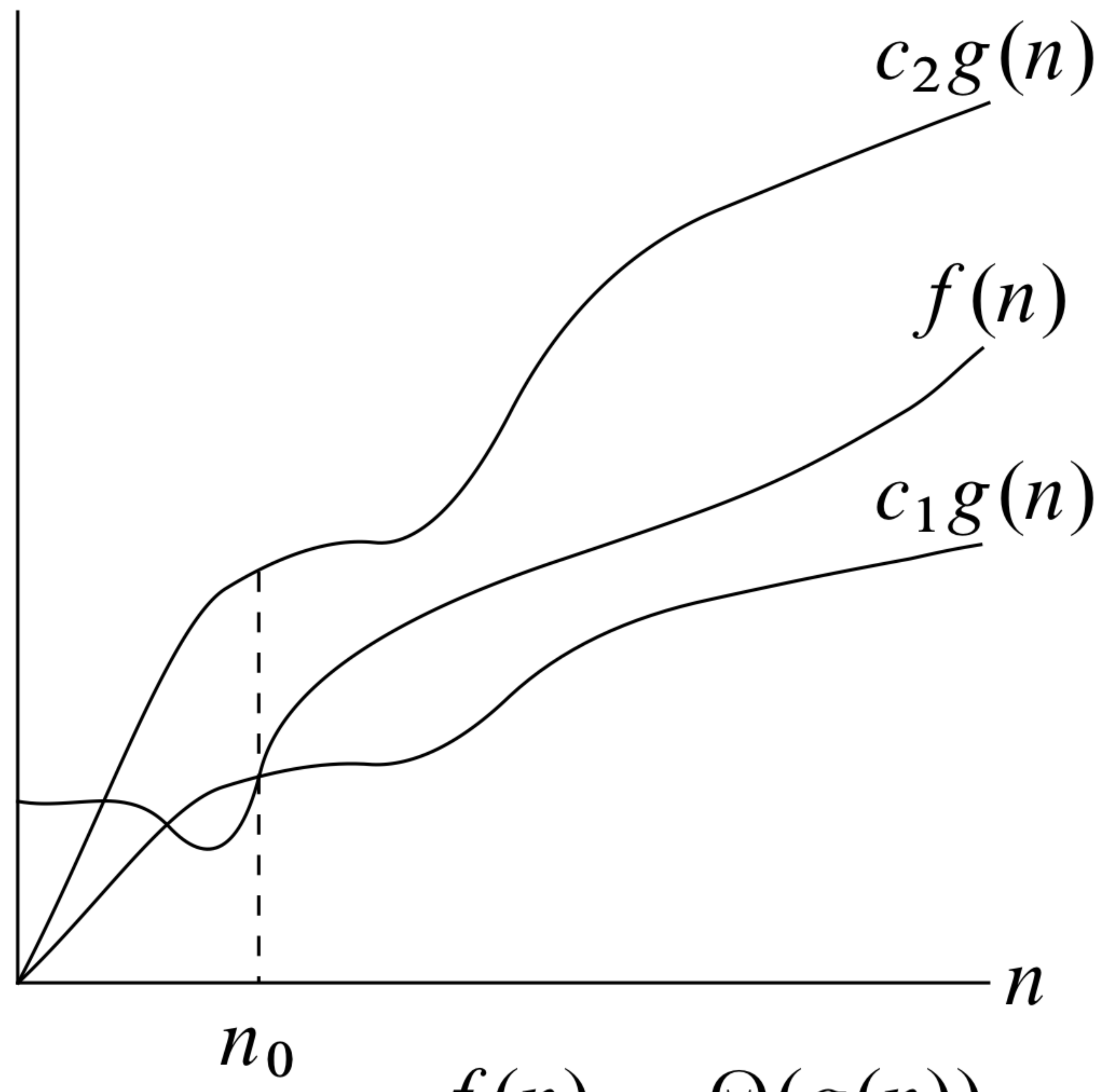
$$
\begin{aligned}
& c_1 n + c_2(n-1) + c_4(n-1) + c_5 \sum_{j=2}^{n} t_j + c_6 \sum_{j=2}^{n} (t_j - 1) + c_7 \sum_{j=2}^{n} (t_j - 1) + c_8(n-1) \\
& \leq c_1 n + c_2(n-1) + c_4(n-1) + c_5 \sum_{j=2}^{n} j + c_6 \sum_{j=2}^{n} (j - 1) + c_7 \sum_{j=2}^{n} (j - 1) + c_8(n-1) \\
& = \left(\frac{c_5}{2} + \frac{c_6}{2} + \frac{c_7}{2} \right) n^2 + \left(c_1 + c_2 + c_4 + \frac{c_5}{2} - \frac{c_6}{2} - \frac{c_7}{2} + c_8 \right) n - (c_2 + c_4 + c_5 + c_8) \\
& = a_2 n^2 + a_1 n + a_0
\end{aligned}
$$

for passende konstanter a_0, a_1, a_2.

Asymptotisk notation

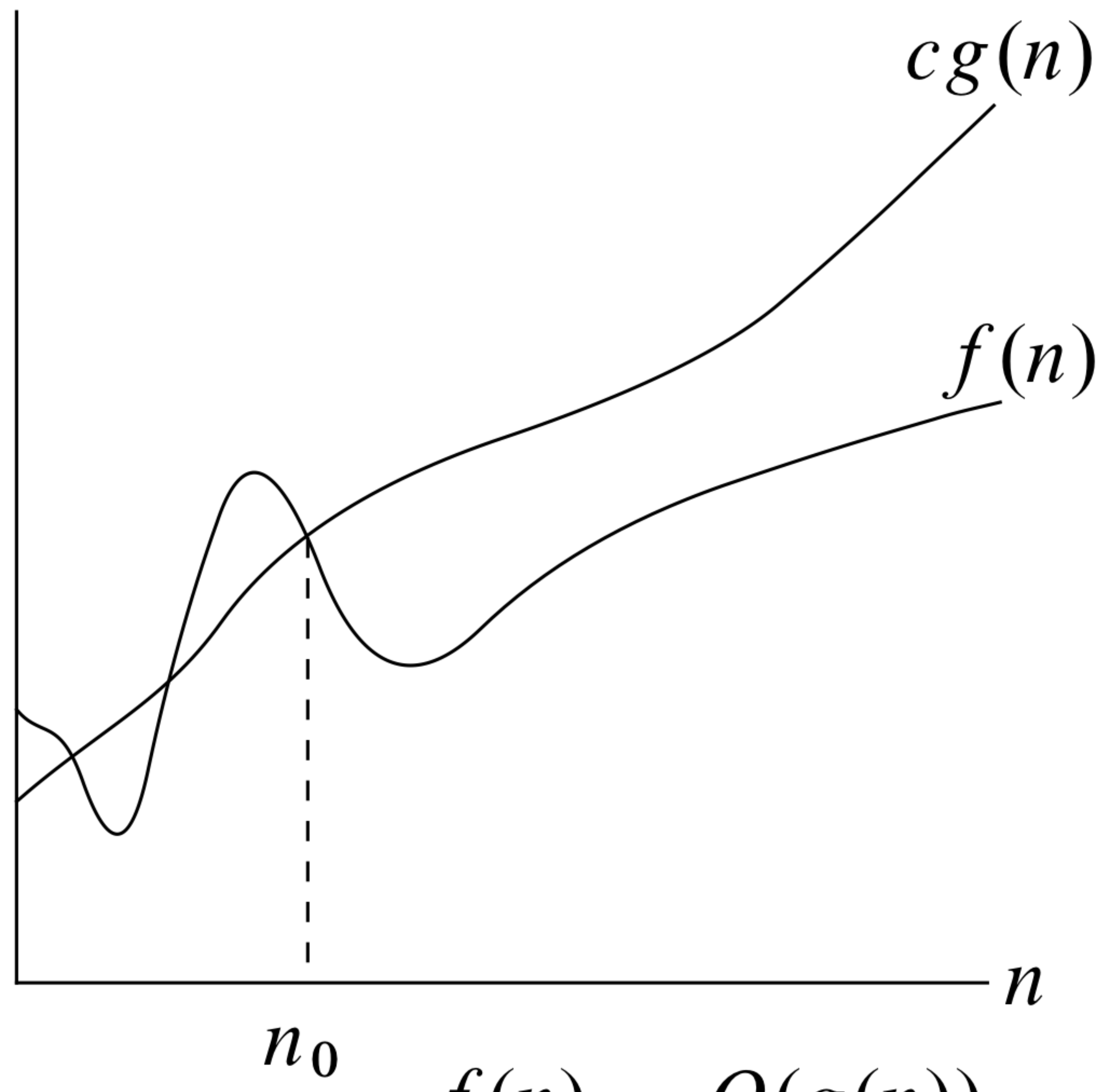
- **Idé**:
  - Abstrahér detaljerne væk, fokusér på hvad der sker når n er stor
  - Ignorér konstante faktorer (det gør RAM modellen allerede)
- Lad $T(n)$ betegne værstefalds køretiden på et input af længde n — vi så at $T(n) \leq a_2 n^2 + a_1 n + a_0$ for passende konstanter a_0, a_1, a_2
- For store n er denne grænse *domineret* af $a_2 n^2$, mens de to *lavere-ordens termer* $a_1 n$ og a_0 er ubetydelige
- I *asymptotisk notation* er værstefalds køretiden $\Theta(n^2)$

Asymptotisk notation i et billede



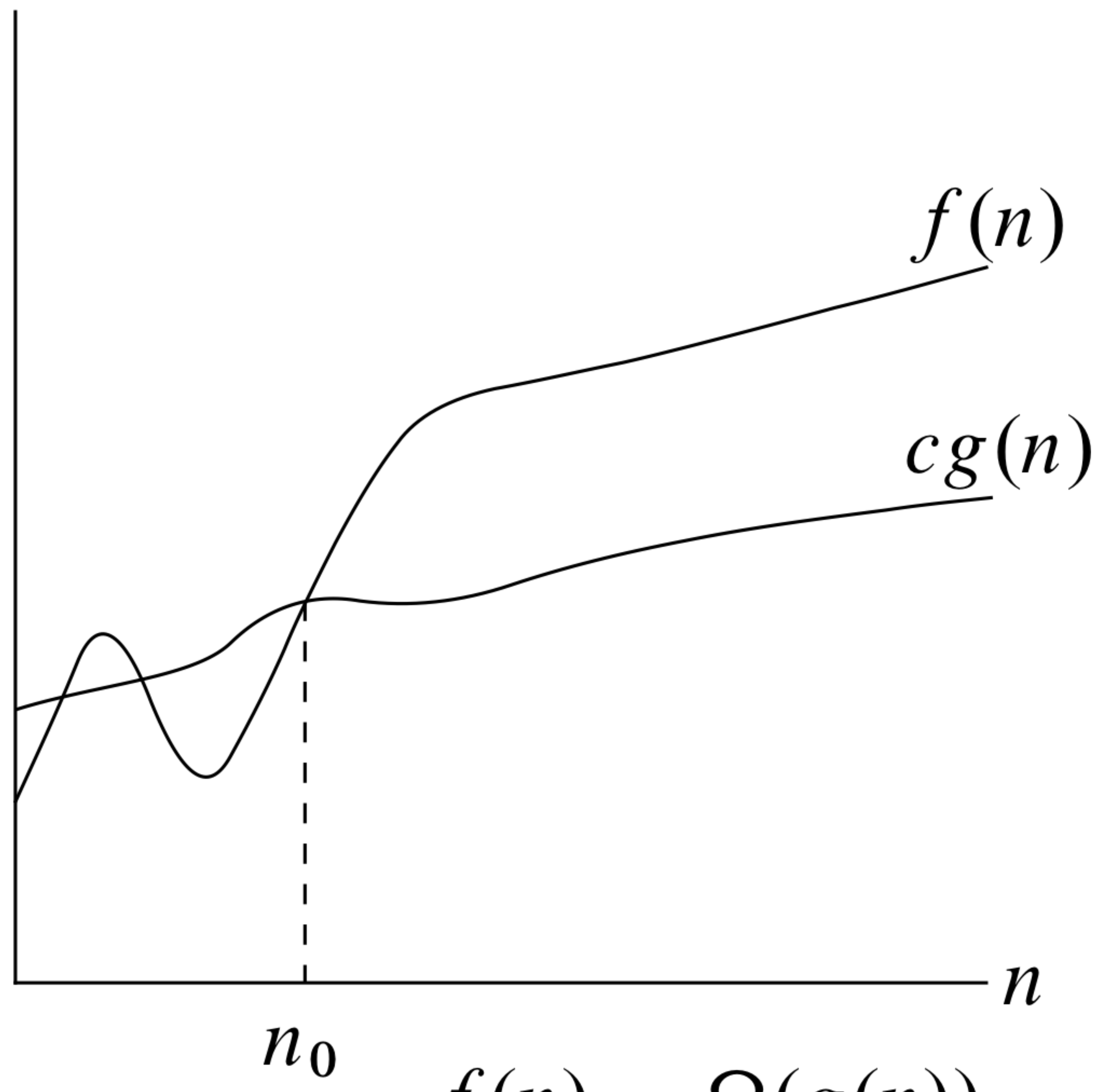
$f(n) = \Theta(g(n))$

"="



$f(n) = O(g(n))$

"$\leq$"



$f(n) = \Omega(g(n))$

"$\geq$"

Formelle definitioner

- **Formelle definitioner**: For en ikke-negativ funktion $g(n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ er

  $O(g(n)) = \{f(n) \mid \exists c > 0, n_0 > 0 : n \geq n_0 \Rightarrow 0 \leq f(n) \leq cg(n)\}$

  $\Omega(g(n)) = \{f(n) \mid \exists c > 0, n_0 > 0 : n \geq n_0 \Rightarrow cg(n) \leq f(n)\}$

  $\Theta(g(n)) = \{f(n) \mid \exists c_1, c_2 > 0, n_0 > 0 : n \geq n_0 \Rightarrow c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n)\}$

- I praksis bruges notationen oftest til at betegne en (ikke navngivet) funktion, fx:
  - $g(n) = O(n^2)$ betyder $g(n) = f(n)$ for *en eller anden* $f(n) \in O(n^2)$
  - $g(n) = n^2 + \Omega(n)$ betyder $g(n) = n^2 + f(n)$ for *en eller anden* $f(n) \in \Omega(n)$

Tilbage til insertion sort

- Værstefalds køretiden er $T(n) \leq a_2 n^2 + a_1 n + a_0$ for konstanter a_0, a_1, a_2
- Det betyder at $T(n) \leq an^2$ for $n \geq 1$ hvis vi vælger $a = |a_0| + |a_1| + |a_2|$
- Så $T(n) \in O(n^2)$
- … eller som man oftere skriver, $T(n) = O(n^2)$

- **NB!** Det er *også* sandt at $T(n) = O(n^3)$, eller at $T(n) = O(2^n)$, eller …, men det er ikke nogen præcis analyse

Store-O og addition

- Antag at $f(n) = O(g(n))$ og $f'(n) = O(g'(n))$ er ikke-negative, dvs.
  - Der findes $n_0, c > 0$ så $n \geq n_0 \Rightarrow f(n) \leq cg(n)$
  - Der findes $n_0', c' > 0$ så $n \geq n_0' \Rightarrow f'(n) \leq c'g'(n)$
- Hvad kan vi sige om $f(n) + f'(n)$?
- $n \geq \max(n_0, n_0') \Rightarrow f(n) + f'(n) \leq cg(n) + c'g(n) \leq \max(c, c') \cdot (g(n) + g'(n))$
- Det vil sige at $f(n) + f'(n) = O(g(n) + g'(n))$

Øvelse: Store-O og multiplikation

- Antag at $f(n) = O(g(n))$ og $f'(n) = O(g'(n))$ er ikke-negative, dvs.
  - Der findes n_0, $c > 0$ så $n \geq n_0 \Rightarrow f(n) \leq cg(n)$
  - Der findes n_0', $c' > 0$ så $n \geq n_0' \Rightarrow f'(n) \leq c'g'(n)$
- Hvad kan vi sige om $f(n) \cdot f'(n)$?

Simplere analyse af insertion sort

- **for**-løkken laver $O(n)$ iterationer, der hver tager $O(1)$ tid, bortset fra tiden i **while**-løkken

- I hver iteration af **for**-løkken laver **while**-løkken $O(n)$ iterationer, der hver tager $O(1)$ tid, totalt $O(1) + O(n) \cdot O(1)$ tid

```
INSERTION-SORT(A, n)
  for j = 2 to n
      key = A[j]
      // Insert A[j] into the sorted sequence A[1 .. j − 1].
      i = j − 1
      while i > 0 and A[i] > key
          A[i + 1] = A[i]
          i = i − 1
      A[i + 1] = key
```

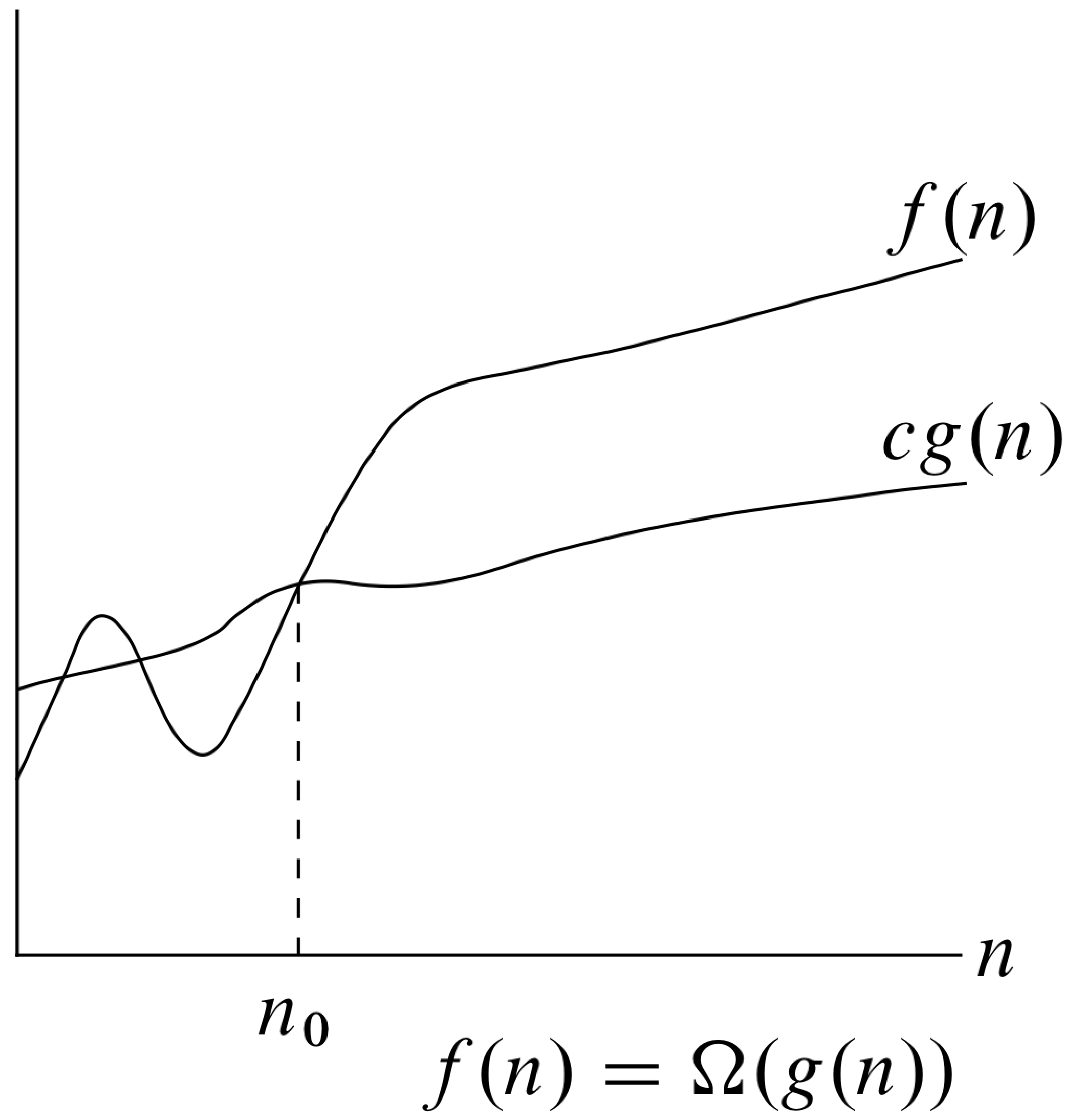
- Den totale tid for alle kørsler af **while**-løkken er $O(n) \cdot O(n) = O(n^2)$.

Store-O og subtraktion, division

- Antag at $f(n) = O(g(n))$ og $f'(n) = O(g'(n))$ er ikke-negative
- Hvad kan vi sige om $f(n) - f'(n)$?
- … næsten ingenting
- Hvad kan vi sige om $f(n)/f'(n)$?
- … næsten ingenting

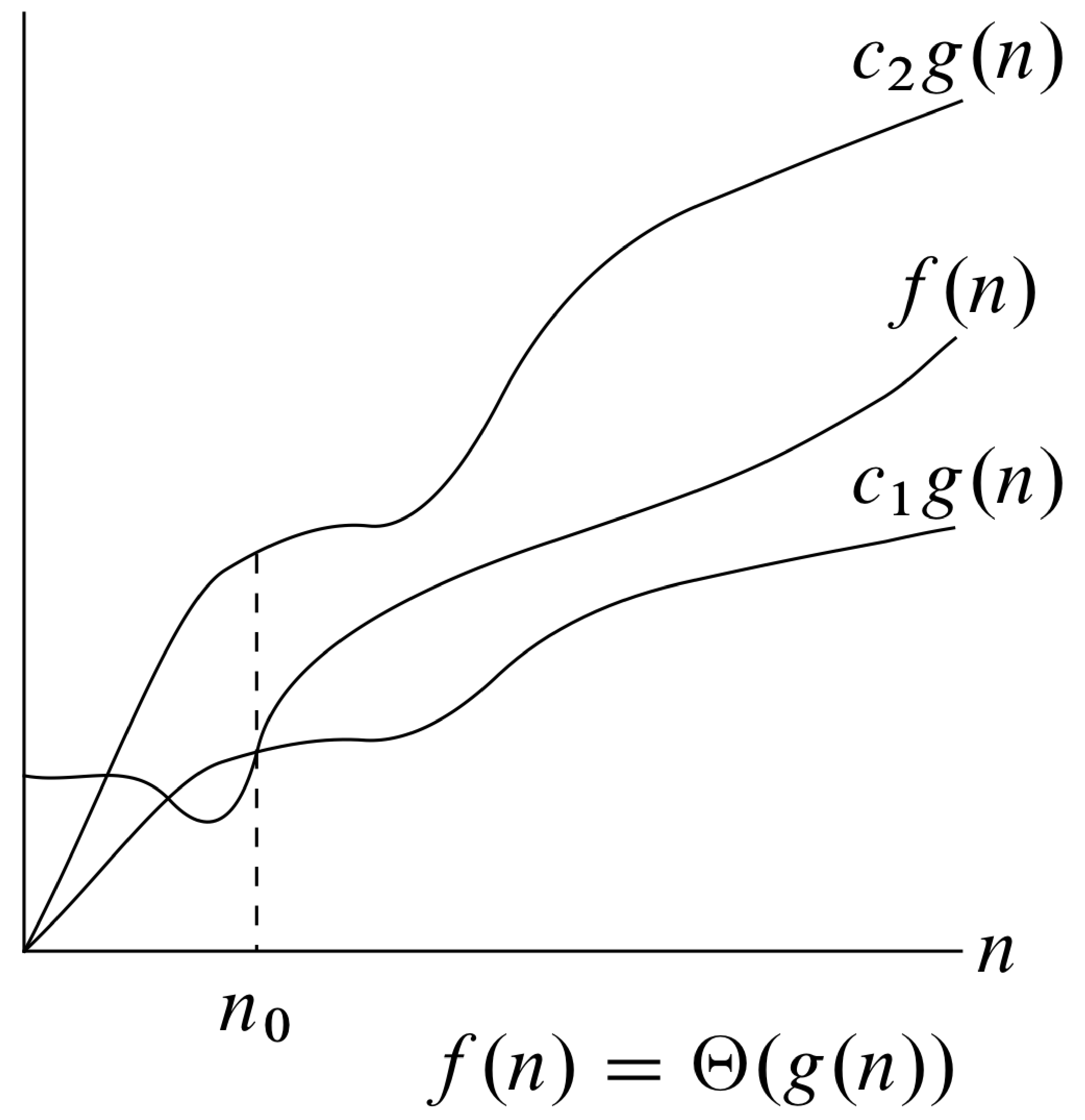
Store-Omega

- Begrænser funktioner *nedefra*
- I øvelsen tidligere så vi, at insertion sort kører i tid $\Omega(n^2)$ på et værste-falds input
- Det betyder *ikke* at algoritmen *altid* er så langsom — faktisk kører den i tid $O(n)$ hvis input allerede er sorteret



Store-Theta

- Begrænser funktioner *nedefra og oppefra*
- Vi har $T(n) = \Theta(g(n))$ hvis og kun hvis $T(n) = O(g(n))$ og $T(n) = \Omega(g(n))$ (øvelse)
- Insertion sort har værstefalds køretid $T(n) = \Theta(n^2)$



- **NB!** Det er *også* sandt insertion sort har værstefalds køretid $T(n) = \Omega(n \log n)$, men det er ikke en præcis analyse

Eksempel

- Antag at a og b er positive heltal.
- Hvad kan vi sige om $(n+a)^b$?
- $(n+a)^b = n^b + \binom{b}{1} an^{b-1} + \binom{b}{2} a^2 n^{b-2} + \ldots + \binom{b}{b-1} a^{b-1} n + \binom{b}{0} a^b$
- Vælg $c = 1 + \binom{b}{1} a + \binom{b}{2} a^2 + \ldots + \binom{b}{b-1} a^{b-1} + \binom{b}{0} a^b$, så er

  $n^b \leq (n+a)^b \leq cn^b$ for $n \geq 1$
- Dvs. $(n+a)^b = \Theta(n^b)$

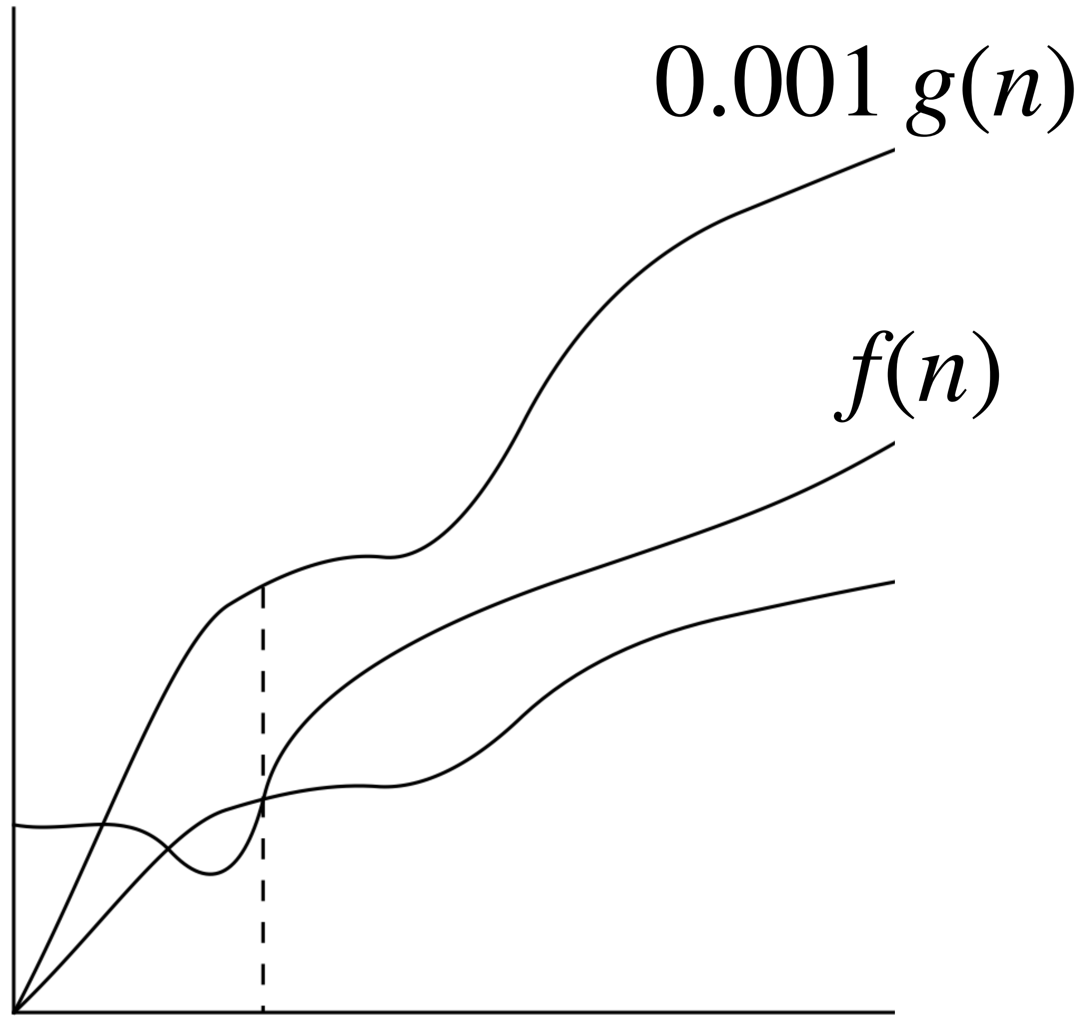
Lille-o og lille-omega

“$>$”	“$\geq$”	“$=$”	“$\leq$”	“$<$”
$f(n) = \omega(g(n))$	$f(n) = \Omega(g(n))$	$f(n) = \Theta(g(n))$	$f(n) = O(g(n))$	$f(n) = o(g(n))$

- **Formelle definitioner**: For en ikke-negativ funktion $g(n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ er

$$o(g(n)) = \{f(n) \mid \forall c > 0 : \exists n_0 > 0 : n \geq n_0 \Rightarrow 0 \leq f(n) < cg(n)\}$$

$$\omega(g(n)) = \{f(n) \mid \forall c > 0 : \exists n_0 > 0 : n \geq n_0 \Rightarrow cg(n) < f(n)\}$$



Regler og ikke-regler for lille-o og lille-omega

"$>$"	"$\geq$"	"$=$"	"$\leq$"	"$<$"
$f(n) = \omega(g(n))$	$f(n) = \Omega(g(n))$	$f(n) = \Theta(g(n))$	$f(n) = O(g(n))$	$f(n) = o(g(n))$

Regler:

- $f(n) = \omega(g(n)) \Rightarrow f(n) = \Omega(g(n))$
  "$a > b \Rightarrow a \geq b$"
- $f(n) = o(g(n)) \Rightarrow f(n) = O(g(n))$
  "$a < b \Rightarrow a \leq b$"
- $f(n) = \omega(g(n)) \Rightarrow f(n) \notin \Theta(n)$
  "$a > b \Rightarrow \neg(a = b)$"

Ikke-regler:

- $f(n) = \omega(g(n)) \vee f(n) = O(g(n))$
  "$a > b \vee a \leq b$"
- $f(n) = o(g(n)) \vee f(n) = \Omega(g(n))$
  "$a < b \vee a \geq b$"

Nogle grundlæggende funktioner brugt i kurset

Detaljer i CLRS 3.2

- Oprunding $\lceil x \rceil$ og nedrunding $\lfloor x \rfloor$
- Fakultet: $n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$
- Polynomier af grad d:

$$f(n) = a_d n^d + a_{d-1} n^{d-1} + \ldots + a_1 n + a_0 = \sum_{i=0}^{d} a_i n^i$$

- Logaritmer:

$\ln(n)$ er tallet der opfylder $e^{\ln(n)} = n$, hvor $e = \sum_{i=0}^{\infty} (1/i!) = 2{,}718\ldots$

$\lg(n) = \log_2(n)$ er tallet der opfylder $2^{\lg(n)} = n$

Nogle nyttige regneregler

Detaljer i CLRS 3.2

For $n, m > 0$ og $a, b \in \mathbb{R}$:

- $\lceil n/2 \rceil + \lfloor n/2 \rfloor = n$ for $n \in \mathbb{N}$
- $n^a \cdot n^b = n^{a+b}$
- $1/n^a = n^{-a}$
- $\log(n \cdot m) = \log n + \log m$
- $\log(n^a) = a \log n$

Store-O notation med flere variable

- Hvad betyder $f(n,m) = O(g(n,m))$, f.eks. $T(n,m) = O(m + n \log n)$?
- Opgave 3.1-8 i CLRS: Vi siger at $f(n,m) = O(g(n,m))$ hvis og kun hvis der findes $c > 0, k > 0$ så $(n \geq k \vee m \geq k) \Rightarrow 0 \leq f(n,m) \leq cg(n,m)$
- Med andre ord:
  - For ethvert fast $m = m_0$ er $f(n, m_0) = O(g(n, m_0))$, og
  - For ethvert fast $n = n_0$ er $f(n_0, m) = O(g(n_0, m))$
- NB! Ikke den *eneste* mulige definition, men den mest brugte (se også diskussion af Rodney Howell)

Quiz om asymptotisk notation

Næste skridt

- Øvelser i store-O notation
  - Kom i gang med det samme ved at se på opgaverne til mandagens øvelser
- **Næste forelæsning, mandag**:
  - Del-og-hersk paradigmet
  - Rekursionsligninger
  - Analyse af *merge sort*
  - Nedre grænse for tidskompleksiteten af *enhver* sorteringsalgoritme (sammenligningsbaseret)