AD handouts 4/5

April 23, 2018

1 Forord

Meningen med disse opgaver er at læseren skal gøres tryg med beviser ved modstrid og beviser ved induktion. Nogle af opgaverne kan virke overdrevet nemme, men det er vigtigt at forstå præcist hvad der skal til for at gøre et bevis færdigt, da det ofte vil være svært at være helt sikker.

På de sidste sider er der hints til de fleste af opgaverne, så hvis man sidder fast kan man bruge disse. Bemærk at disse hints er meget udførlige og ofte vil være nærmest hele løsningen, så prøv gerne at løse opgaven uden at læse alle hints!

2 Opgave 1

Bevis at $x^2 - y^2 = 1$ ikke har nogen løsninger for positive heltal x, y (de positive heltal er tallene $\{1, \ldots\}$).

3 Opgave 2

Bevis at $x^2 - y^2 = 10$ ikke har nogen løsninger for positive heltal x, y

4 Opgave 3

Bevis at hvis a er et rationelt tal og b er et irrationelt tal, så er $a + b$ et irrationelt tal. (Et rationelt tal er et tal der kan skrives på formen x/y, hvor x og y er heltal og $y \neq 0$.)

5 Opgave 4

Giv en formel for summen af de første n ulige tal.

$$f(n) = \sum_{i=1}^{n} (2i - 1)$$

6 Opgave 5

Vis at $n! > 2^n$ for $n \geqslant 4$.

7 Opgave 6

Fibonacci tallene defineres som $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, $f_i = f_{i-1} + f_{i-2}, i \geqslant 2$. De første fibonacci tal er således $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$.

Bevis at

$$\sum_{i=1}^{n} f_i^2 = f_n f_{n+1}$$

8 Opgave 7

Vis, at

$$\sum_{i=1}^{n} f_i = f_{n+2} - 1$$

9 Opgave 8

Vis, at

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1} \ .$$

10 Løkkeinvarianter

Vi skal nu bruge induktion til at bevise korrekthed af programmer (specifikt løkker). Til at gøre det skal vi kigge på programmet i Algorithm 1. Idéen med programmet er, at vi har en urne med n glaskugler i, der hver er enten rød eller blå, samt en bunke af uendeligt mange røde glaskugler ved siden af. Vi skal nu tømme urnen ved at bruge Algorithm 1.

```
input : Jar with n marbles each of color RED or BLUE.

i ← n
while i > 1 do
    Pick two arbitrary marbles m1, m2 from the jar.
    if Color(m1) = Color(m2) then
        Throw the two marbles away
        Place a RED marble in the jar.
    end
    else
        Throw away the RED marble
        Put the BLUE marble back in the jar.
    end
    i = i − 1
end
```

Algorithm 1: `Marbles`

Vi ønsker at argumentere om to ting:

1. Algorithm 1 terminerer mde køretid $O(n)$.
2. Der er netop 1 kugle tilbage i urnen når algoritmen er færdig.
3. Hvis der var r røde og b blå kugler i urnen til at starte med, hvad er farven af den sidste kugle så?

10.1 Køretid

Køretiden afhænger af hvor lang tid operationerne inde i løkken tager, men vi kan godt antage at de er $O(1)$, så da i starter på n og tæller 1 ned hver gang er vi færdig.

10.2 Antallet af glaskugler

Rent uformelt kan vi se, at vi i hver iteration fjerner to kugler og putter én tilbage, så efter $n-1$ runder burde der altså være 1 kugle tilbage. Vi vil prøve at formalisere dette. Vi bruger opskriften fra bogen:

Opgave a) Bevis, at når Algorithm 1 er slut er der netop 1 glaskugle tilbage i urnen.

Hint: Find en invariant på formen *I starten af en iteration af løkken er der _ _ _ _ _ kugler i urnen.*

Initialization Bevis at din invariant er sand inden første iteration.

Maintenance Bevis at hvis din invariant var sand inden en iteration er den også sand inden den næste.

For at gøre dette kan du argumentere om hvor mange kugler der fjernes og tilføjes. Stil det op i tilfælde og referér til linjer i pseudokoden. Det er vigtigt at alle tilfælde er dækket.

Termination Konkluder at din invariant er brugbar efter sidste iteration af løkken således at vi kan bruge beviset til noget. (Vi vil f.eks. ikke have en invariant der siger, at der er *højest* n kugler i urnen).

10.3 Farven af sidste kugle

Opgave b) Hvis der er r røde kugler og b blå kugler i starten, hvad er så farven af den sidste kugle? (Husk at vi lige har bevist, at netop er en "sidste kugle"). – *der er hint på næste side, men prøv uden!*

Brug samme skabelon som herover. Opstil en invariant der hjælper os med at afgøre farven af den sidste kugle. En sådan invariant kunne være:

"der er altid flere blå end røde kugler"

Hvis dette var sandt, ville vi kunne konkludere at den sidste kugle altid var blå. Bemærk dog, at denne invariant *ikke* er sand – vi kan f.eks. starte med en urne der slet ikke har nogen kugler i sig!

Brug samme skabelon som før:

Initialization

Maintenance

Termination

10.3.1 Hint:

Kig på pariteten (ulige/lige) af de blå kugler.

11 Sidste opgave

Løs Problem 2-2 i bogen (side 40). Brug samme formular som i forrige sektion.

12 Hints

12.1 Hints til opgave 1

1. Brug et modstridsbevis (antag at der findes positive heltal x, y så det gælder og vis at x, y ikke begge kan være positive heltal.)
2. Brug at $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$
3. Brug udelukkelsesmetoden til at vise at $(x + y)(x - y) = 1$ ikke kan gælde uden at x eller y ikke er et positivt heltal.

12.2 Hints til opgave 2

1. Brug samme fremgangsmåde som i Opgave 1.

12.3 Hints til opgave 3

1. Brug et modstridsbevis.
2. Skriv $a + b = x/y$ og $a = z/w$ og kig på $b = x/y - a = x/y - z/w$. Sæt de to termer på fælles brøkstreg.

12.4 Hints til opgave 4

1. Observer, at rækken af tal er $f(1) = 1$, $f(2) = 4$, $f(3) = 9$, $f(4) = 16, \ldots$
2. Gæt på $f(n) = n^2$.
3. Vis induktionsbasis $f(1) = 1$ (burde være trivielt).
4. Kig nu på $f(n + 1) = f(n) + 2(n + 1) - 1$ for induktionstrinnet.

12.5 Hints til opgave 5

1. Brug induktion
2. basis: $4! = ?$
3. induktionsskridt: $(n + 1)! = n! \cdot (n + 1)$. Brug nu induktionsantagelsen på $n!$.

12.6 Hints til opgave 6

1. Brug induktion. Basis kan opnås fra tallene herover.
2. For induktionsskridtet, se at $\sum_{i=1}^{n+1} f_i^2 = f_{n+1}^2 + \sum_{i=1}^{n} f_i^2$. Brug induktionsantagelsen på dette.
3. Brug at $xy + x^2 = x(x + y)$.

12.7 Hints til opgave 8

1. Brug induktion.

2. Brug at

$$\frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)}$$

3. Brug at

$$n(n+2)+1 = (n+1)^2$$