DMA — Ugeopgave 6

Helga Rykov Ibsen <mcv462>

1. november 2021

Del 1

Lad $f(n) = n^2 + n \cdot log(n)$ og $g(n) = n^2$.

Definitionen siger at for asymptotisk positive funktioner f og g: $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ gælder det at f er $\mathcal{O}(g)$ hvis der findes $c > 0$ og $x_0 \in \mathbb{R}^+$ så det passer at:

$$f(x) \leq c \cdot g(x) \quad \text{for alle } x \geq x_0$$

Vi skal vise at:

$$f(n) \text{ er } O(g(n))$$

eller

$$n^2 + n \cdot log(n) \ \leq \ c \cdot n^2$$

Ifølge definitionen er n et positivt reeltal. Vi kan derfor starte med at dividere uligheden på begge sider med n:

$$n + log(n) \ \leq \ c \cdot n$$

Vi isolerer $log(n)$ og får:

$$log(n) \ \leq \ (c - 1) \cdot n$$

Denne ligning har ingen eksakte løsninger, men vi kan se at denne ligning kun ville være opfyldt for $c > 1$. Hvis vi eksempelvis tager $c = 1.01$, så ville:

$$log(n) \ \leq \ (1.01 - 1) \cdot n$$

være sand for $n \geq 996$. F.eks er ligningen opfyldt for $n = 1024$:

$$\begin{aligned} log(1024) \ &\leq \ (1.01 - 1) \cdot 1024 \\ 10 \ &\leq \ 10.24 \end{aligned}$$

Da ligningen $log(n) \ \leq \ (1.01 - 1) \cdot n$ er opfyldt for alle $n \geq 996$, kan vi konkludere at ligningen

$$n^2 + n \cdot log(n) \ \leq \ c \cdot n^2$$

er sand for alle $n \geq 996$.

Vi har hermed vist at:

Bevis. $f(n)$ er $O(g(n))$

$\square$

Del 2

Lad udsagn p og q være:

$$p : r \textit{ er et irrationalt tal}$$
$$q : r^{\frac{1}{5}} \textit{ er et irrationalt tal}$$

Vi skal vise at implikationen $p \Rightarrow q$ er sand.

Vi fører beviset via kontraposition. Vi skal derfor vise at:

Bevis. $(\sim q) \Rightarrow (\sim p)$
eller: *Hvis* r *er et rationalt tal, så er* $r^{\frac{1}{5}}$ *et rationalt tal.*

1. Vi antager derfor at r er et rationalt tal. Ifølge definitionen ved vi at $r = \frac{a}{b}$ for nogle $a, b \in \mathbb{Z}^+$.
2. Det gælder så at hvis $r^{\frac{1}{5}}$ er et rationalt tal, så kan det ligeledes udtrykkes som:

$$r^{\frac{1}{5}} = \frac{a}{b} \;\Rightarrow\; (r^{\frac{1}{5}})^5 = (\frac{a}{b})^5 \;\Rightarrow\; r = \frac{a^5}{b^5}$$

Hvis a og b er hele tal, så er a^5 og b^5 hele tal — og så er r et rationalt tal.

Da både — hypotesen $(\sim q)$ og konklutionen $(\sim p)$ er sand, er vores kontrapositive udsagn $(\sim q) \Rightarrow (\sim p)$ også sand.

Ifølge teorem 2(b) ved vi at:

$$(p \Rightarrow q) \equiv ((\sim q) \Rightarrow (\sim p))$$

Vi kan derfor konkludere at vores oprindelige udsagn $(p \Rightarrow q)$ er sand.

$\square$

D3

Lad $f(n) = 2^{2n}$ og $g(n) = 2^n$.

Definitionen siger at for asymptotisk positive funktioner f og g: $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ gælder det at f er $\mathcal{O}(g)$ hvis der findes $c > 0$ og $x_0 \in \mathbb{R}^+$ så det passer at:

$$f(x) \leq c \cdot g(x) \quad \text{for alle } x \geq x_0$$

Lad udsagn p og q være:

$$p : f(n) = 2^{2n} og\ g(n) = 2^n$$
$$q : fikke\ er\ \mathrm{O(g)}$$

Vi skal via modstrid vise at q er sand og følger fra:

Bevis. $q \equiv (\sim q \Rightarrow (p \wedge (\sim p))$

Eller sagt på en anden måde — vi skal vise at $\sim q$ er sand:

$$\sim q : fer\ \mathcal{O}(g)$$

eller

$$2^{2n} \ \leq \ c \cdot 2^n \ \text{ for alle } n \ \geq \ n_0$$

Vi dividerer med 2^n på begge sider af uligheden og får:

$$\tfrac{2^{2n}}{2^n} \leq \tfrac{c \cdot 2^n}{2^n}$$

$$2^n \leq c$$

Venstre side af uligheden er en voksende funktion og højre side er en konstant. Og vi kan se at fra et vist trin — uanset hvor stor c er — ville uligheden ikke være opfyldt.

Vi har hermed vist at $\sim q$ er falsk og at q er sand.

$\square$

D4

1. Lad $T_A(n) = 2n^2 \cdot log_2 n$ og $T_B(n) = n^3$.
   Vi skal vise at

   $$2n^2 \cdot log_2 n \ < \ c \cdot n^3$$

   eller

   $$T_A \ \text{ er } o(T_B)$$

   Vi starter med at sige at $h(n) = n^2$.

   Så er $f(n) = 2 \cdot log_2 n$ og $g(n) = c \cdot n$.

   Uligheden ovenfor kan derfor udtrykkes som:

   $$h(n) \cdot f(n) \ < \ h(n) \cdot g(n)$$

   Vi anvender R1 og R5 og får:

$$log_2 n < n$$
eller
$$f(n) \text{ er } o(g(n))$$

fordi konstanter kan ignoreres og fordi polynomier vokser hurtigere end logaritmer.

R11 siger at det ikke gør nogen forskel at gange med samme funktion. Vi kan derfor konkludere at:

$$h(n) \cdot f(n) \text{ er } o(h(n) \cdot g(n))$$
eller
$$T_A \text{ er } o(T_B)$$

Og dermed er A en hurtigere algoritme end B.

2. Vi fandt at T_A er $o(T_B)$, dvs:

$$2n^2 \cdot log_2 n \; < \; n^3$$

Vi starter med at dividere begge sider af uligheden med n^2:

$$2 log_2 n \; < \; n$$

For at finde en problemstørrelse ñ, sådan at vores ulighed bliver opfyldt for alle $n >$ ñ, opstiller vi en tabel med forskellige n:

n	$2log_2 n$	$\leq$	n
1	$2 \cdot 0$	$<$	1
2	$2 \cdot 1$	$=$	2
4	$2 \cdot 2$	$=$	4
5	$2 \cdot 2.32$	$<$	5
6	$2 \cdot 2.58$	$<$	6
7	$2 \cdot 2.80$	$<$	7
8	$2 \cdot 3$	$<$	8

Vi kan se at uligheden $2 \cdot log_2 n < n$ bliver opfyldt for alle $n > 4$. Vi kan derfor konkludere at problemstørrelsen ñ $= 5$.