Introduktion til rekursive definitioner og funktioner

$$S(n) = 1 + 2 + \ldots + n$$

Mikkel Abrahamsen

Eksempel på rekursiv funktion

Definér $S(n) = 1 + 2 + \ldots + n$.

Mål: Udregn $S(n)$ når n er givet.

Eksempel på rekursiv funktion

Definér $S(n) = 1 + 2 + \ldots + n$.

Mål: Udregn $S(n)$ når n er givet.

Observér, når $n \geq 2$:

$$S(n) = \underbrace{1 + 2 + \ldots + (n-1)}_{= S(n-1)} + n.$$

Eksempel på rekursiv funktion

Definér $S(n) = 1 + 2 + \ldots + n$.

Mål: Udregn $S(n)$ når n er givet.

Observér, når $n \geq 2$:

$$S(n) = \underbrace{1 + 2 + \ldots + (n-1)}_{= S(n-1)} + n.$$

Alternativ def.:

$$\begin{aligned} S(1) &= 1 \\ S(n) &= S(n-1) + n, \quad n \geq 2 \end{aligned}$$

Eksempel på rekursiv funktion

Definér $S(n) = 1 + 2 + \ldots + n$.

Mål: Udregn $S(n)$ når n er givet.

Observér, når $n \geq 2$:

$$S(n) = \underbrace{1 + 2 + \ldots + (n-1)}_{= S(n-1)} + n.$$

Alternativ def.:

$$\begin{aligned} S(1) &= 1 \\ S(n) &= S(n-1) + n, \quad n \geq 2 \end{aligned}$$

Rekursiv def.: Definere noget ved at referere til sig selv (i et simplere tilfælde).

Pseudokode

$$S(1) = 1$$
$$S(n) = S(n-1) + n, \quad n \geq 2$$

```
Sr(n)
  if n == 1
      return 1
  return Sr(n − 1)+n
```

Rekursiv definition: den kalder sig selv.

Pseudokode

$$S(1) = 1$$

$$S(n) = S(n-1) + n, \quad n \geq 2$$

```
Sr(n)
  if n == 1
      return 1
  return Sr(n − 1)+n
```

Rekursiv definition: den kalder sig selv.

Sr(4)

Pseudokode

$$S(1) = 1$$
$$S(n) = S(n-1) + n, \quad n \geq 2$$

```
Sr(n)
  if n == 1
      return 1
  return Sr(n − 1)+n
```

Rekursiv definition: den kalder sig selv.

Sr(4)
return Sr(3)+4

Pseudokode

$$S(1) = 1$$
$$S(n) = S(n-1) + n, \quad n \geq 2$$

```
Sr(n)
1:  if n == 1
2:      return 1
3:  return Sr(n − 1)+n
```

Rekursiv definition: den kalder sig selv.

Sr(4)	Sr(3)
return Sr(3)+4	return Sr(2)+3

Pseudokode

$$S(1) = 1$$
$$S(n) = S(n-1) + n, \quad n \geq 2$$

```
Sr(n)
if n == 1
    return 1
return Sr(n − 1)+n
```

Rekursiv definition: den kalder sig selv.

Sr(4)
return Sr(3)+4

Sr(3)
return Sr(2)+3

Sr(2)
return Sr(1)+2

Pseudokode

$$S(1) = 1$$
$$S(n) = S(n-1) + n, \quad n \geq 2$$

```
Sr(n)
  if n == 1
      return 1
  return Sr(n − 1)+n
```

Rekursiv definition: den kalder sig selv.

Sr(4) → Sr(3) → Sr(2) → Sr(1)

return Sr$(3)+4$ return Sr$(2)+3$ return Sr$(1)+2$

Pseudokode

$$S(1) = 1$$
$$S(n) = S(n-1) + n, \quad n \geq 2$$

```
Sr(n)
  if n == 1
      return 1
  return Sr(n − 1)+n
```

Rekursiv definition: den kalder sig selv.

Sr(4)
return Sr$(3)+4$

Sr(3)
return Sr$(2)+3$

Sr(2)
return Sr$(1)+2$

Sr(1)
return 1

Pseudokode

$$S(1) = 1$$
$$S(n) = S(n-1) + n, \quad n \geq 2$$

```
Sr(n)
  if n == 1
      return 1
  return Sr(n − 1)+n
```

Rekursiv definition: den kalder sig selv.

Sr(4)	Sr(3)	Sr(2)	Sr(1)
return Sr(3)+4	return Sr(2)+3	return $\underbrace{\text{Sr}(1)+2}_{3}$	return 1

Pseudokode

$$S(1) = 1$$
$$S(n) = S(n-1) + n, \quad n \geq 2$$

```
Sr(n)
    if n == 1
        return 1
    return Sr(n − 1)+n
```

Rekursiv definition: den kalder sig selv.

Sr(4)
return Sr$(3)+4$

Sr(3)
return $\underbrace{\mathsf{Sr}(2)+3}_{6}$

Sr(2)
return $\underbrace{\mathsf{Sr}(1)+2}_{3}$

Sr(1)
return 1

Pseudokode

$$S(1) = 1$$
$$S(n) = S(n-1) + n, \quad n \geq 2$$

```
Sr(n)
  if n == 1
      return 1
  return Sr(n − 1)+n
```

Rekursiv definition: den kalder sig selv.

Sr(4) | Sr(3) | Sr(2) | Sr(1)
return $\underbrace{\text{Sr}(3)+4}_{10}$ | return $\underbrace{\text{Sr}(2)+3}_{6}$ | return $\underbrace{\text{Sr}(1)+2}_{3}$ | return 1

Pseudokode

$$S(1) = 1$$
$$S(n) = S(n-1) + n, \quad n \geq 2$$

```
Sr(n)
1:   if n == 1
2:       return 1
3:   return Sr(n − 1)+n
```

Pseudocode

$$S(1) = 1$$
$$S(n) = S(n-1) + n, \quad n \geq 2$$

```
Sr(n)
    if n == 1
        return 1
    return Sr(n − 1)+n
```

Sr(4)

Call stack: Hvor var vi, da vi lavede et funktionskald?

Pseudokode

$S(1) = 1$

$S(n) = S(n-1) + n, \quad n \geq 2$

```
Sr(n)
1:   if n == 1
2:       return 1
3:   return Sr(n − 1)+n
```

Sr(4)
return Sr(3)+4

Line 3, $n = 4$

Call stack: Hvor var vi, da vi lavede et funktionskald?

Pseudokode

$$S(1) = 1$$

$$S(n) = S(n-1) + n, \quad n \geq 2$$

```
Sr(n)
1:  if n == 1
2:      return 1
3:  return Sr(n − 1)+n
```

Sr(4)
return Sr(3)+4

Sr(3)
return Sr(2)+3

Line 3, $n = 3$
Line 3, $n = 4$

Call stack: Hvor var vi, da vi lavede et funktionskald?

Pseudokode

$$S(1) = 1$$

$$S(n) = S(n-1) + n, \quad n \geq 2$$

```
Sr(n)
1:  if n == 1
2:      return 1
3:  return Sr(n − 1)+n
```

Sr(4)	Sr(3)	Sr(2)
return Sr(3)+4	return Sr(2)+3	return Sr(1)+2

Line 3, $n = 2$
Line 3, $n = 3$
Line 3, $n = 4$

Call stack: Hvor var vi, da vi lavede et funktionskald?

Pseudocode

$$S(1) = 1$$
$$S(n) = S(n-1) + n, \quad n \geq 2$$

```
Sr(n)
1:  if n == 1
2:      return 1
3:  return Sr(n − 1)+n
```

Sr(4) → Sr(3) → Sr(2) → Sr(1)

return Sr(3)+4 return Sr(2)+3 return Sr(1)+2

Line 3, $n = 2$
Line 3, $n = 3$
Line 3, $n = 4$

Call stack: Hvor var vi, da vi lavede et funktionskald?

Pseudokode

$$S(1) = 1$$
$$S(n) = S(n-1) + n, \quad n \geq 2$$

```
Sr(n)
1:  if n == 1
2:      return 1
3:  return Sr(n − 1)+n
```

Sr(4)	Sr(3)	Sr(2)	Sr(1)
return Sr(3)+4	return Sr(2)+3	return Sr(1)+2	return 1

Line 3, $n = 2$
Line 3, $n = 3$
Line 3, $n = 4$

Call stack: Hvor var vi, da vi lavede et funktionskald?

Pseudokode

$$S(1) = 1$$
$$S(n) = S(n-1) + n, \quad n \geq 2$$

```
Sr(n)
1:   if n == 1
2:       return 1
3:   return Sr(n − 1)+n
```

Sr(4)
return Sr$(3)+4$

Sr(3)
return Sr$(2)+3$

Sr(2)
return $\underbrace{\text{Sr}(1)+2}_{3}$

Sr(1)
return 1

Line 3, $n = 2$
Line 3, $n = 3$
Line 3, $n = 4$

Call stack: Hvor var vi, da vi lavede et funktionskald?

Pseudokode

$$S(1) = 1$$
$$S(n) = S(n-1) + n, \quad n \geq 2$$

```
Sr(n)
1:  if n == 1
2:      return 1
3:  return Sr(n − 1)+n
```

Sr(4)	Sr(3)	Sr(2)	Sr(1)
return Sr$(3)+4$	return $\underbrace{\text{Sr}(2)+3}_{6}$	return $\underbrace{\text{Sr}(1)+2}_{3}$	return 1

~~Line 3, $n = 2$~~
Line 3, $n = 3$ ←
Line 3, $n = 4$

Call stack: Hvor var vi, da vi lavede et funktionskald?

Pseudokode

$$S(1) = 1$$
$$S(n) = S(n-1) + n, \quad n \geq 2$$

```
Sr(n)
1:  if n == 1
2:      return 1
3:  return Sr(n − 1)+n
```

Sr(4)	Sr(3)	Sr(2)	Sr(1)
return $\underbrace{\text{Sr}(3)+4}_{10}$	return $\underbrace{\text{Sr}(2)+3}_{6}$	return $\underbrace{\text{Sr}(1)+2}_{3}$	return 1

~~Line 3, $n = 2$~~
~~Line 3, $n = 3$~~
Line 3, $n = 4$

Call stack: Hvor var vi, da vi lavede et funktionskald?

Pseudokode

$$S(1) = 1$$
$$S(n) = S(n-1) + n, \quad n \geq 2$$

```
Sr(n)
1:  if n == 1
2:      return 1
3:  return Sr(n − 1)+n
```

Sr(4)
return $\underbrace{\text{Sr}(3)+4}_{10}$

Sr(3)
return $\underbrace{\text{Sr}(2)+3}_{6}$

Sr(2)
return $\underbrace{\text{Sr}(1)+2}_{3}$

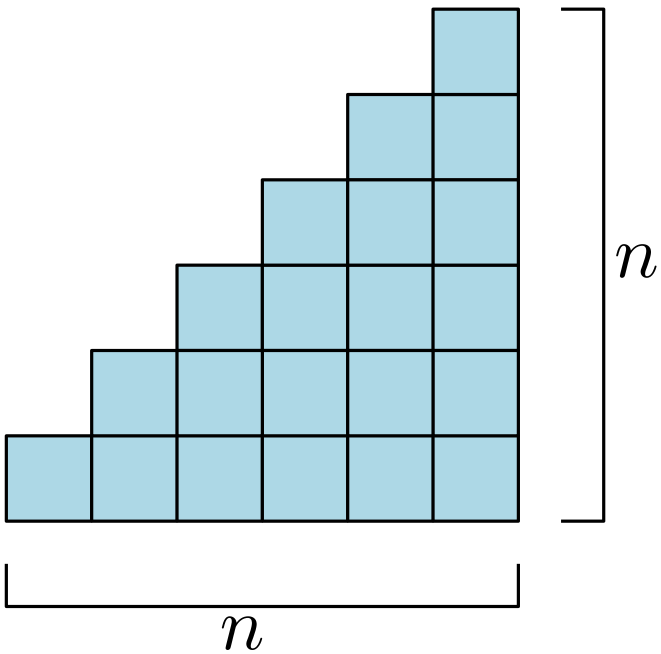
Sr(1)
return 1

~~Line 3, $n = 2$~~
~~Line 3, $n = 3$~~
~~Line 3, $n = 4$~~

Call stack: Hvor var vi, da vi lavede et funktionskald?

Hvad gi'r det så?

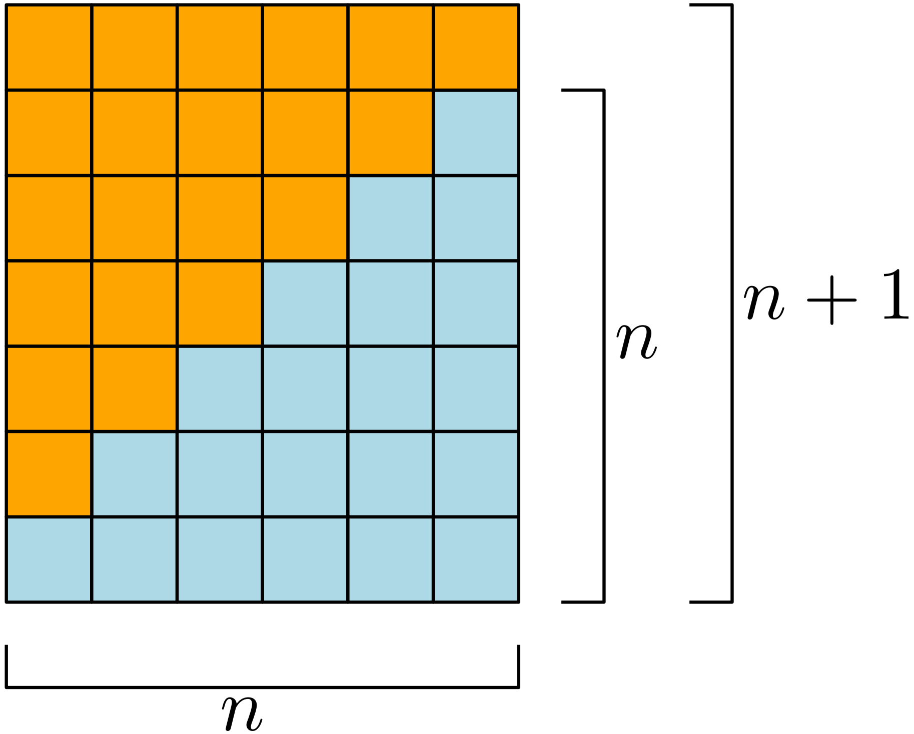
Definér $S(n) = 1 + 2 + \ldots + n$.



$S(n) =$ areal af blå kvadrater

Hvad gi'r det så?

Definér $S(n) = 1 + 2 + \ldots + n$.

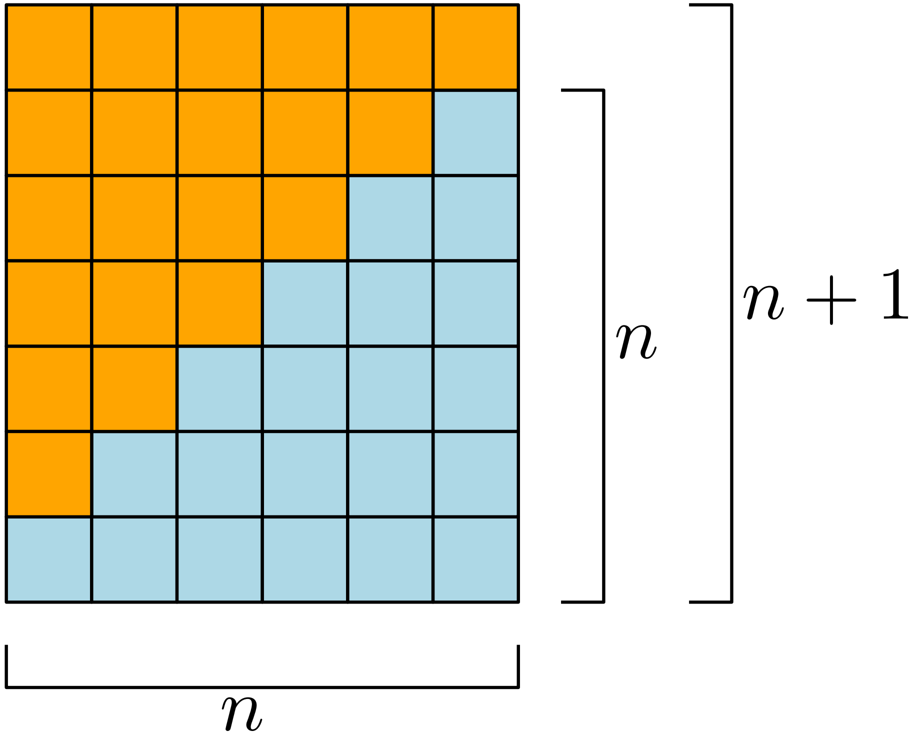


$S(n) =$ areal af blå kvadrater

Hvad gi'r det så?

Definér $S(n) = 1 + 2 + \ldots + n$.

areal af blå og orange $= n \cdot (n+1) = 2 \cdot S(n) \implies S(n) = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$



$S(n) =$ areal af blå kvadrater