DMA — Ugeopgave 9

Helga Rykov Ibsen <mcv462>

20. december 2021

Del 1

(1)

Hvis vi antager at n er et hvilket som helst positivt tal og at der er 500 forskellige muligheder mellem 1 og 500 at vælge imellem, så kan vi udtrykke antallet af måder, hvorpå vi kan danne en følge af n tal fra mængden {1, 2, ..., 500} vha:

$$f(n) = 500^n$$

I og med at der er tale om ordnede lister, må det samlede antal måder at danne en ordet liste på udregnes som samtlige permutationer af lister af længde m fra mængden {1, 2, ..., 500}:

$$f(m) = \frac{500!}{(500-m)!}$$

(2)

Vi starter med at finde sandsynligheden for at der er ingen kollisioner og at de n objekter far mængden U alle får tildelt forskellige nøgler. M.a.o. finder vi sandsynligheden $p(n)_{noCollisions}$ for den komplementære hændelse, som antallet af gunstige udfald divideret med antallet af mulige udfald:

$$p(n)_{noCollisions} = (1 - \frac{1}{500}) \cdot (1 - \frac{2}{500}) \cdot ...(1 - \frac{n}{500})$$

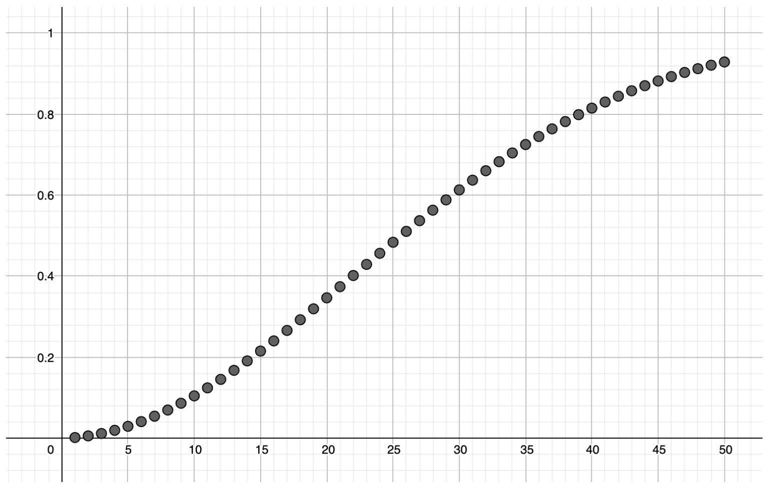
Nu kan vi udregne sandsynligheden for at der sker mindst en kollision som:

$$p(n)_{collisions} = 1 - p(n)_{noCollisions}$$

(3)

Hvis vi tildeler en nøgle til $1 < n < 50$ objekter fra mængden $U = \{1, 2, ..., 500\}$, så kan vi beregne sandsynligheden for mindst en kollision (dvs. sandsynligheden er større end 1/2) på følgende måde 1:

Ud fra grafen oven for kan man se at sandsynligheden er over 0.5 for $n = 27$.



Figur 1: Sandsynligheden for mindst en kollision for n $\leq$ 500

Del 2

(1)

Er relationen $m \; R \; n \iff 4$ går op i mn en ækvivalensrelation?

Vi starter med at se på en mængde S som består at naturlige tal, der ikke kan deles med 4 og tal for hvilke det gælder at $4 \mid mn$:

$S = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 9...\}$

1. Vi starter med at undersøge om (R) er refleksiv. Definitionen (teorem 2(a) i KBR, s, 146) siger at relationen R på mængden S er refleksiv, hvis $a \; R \; a$, eller sagt på en anden måde, hvis a står i relation til sig selv.

   Vi fører beviset via et modeksempel og skal vise at R er sand for nogen m eller n.

   Hvis $m = n = 2a$ så går 4 op i mn. F.eks.:

   $$4 \mid 2 \cdot 2$$
   $$4 \mid 6 \cdot 6$$
   $$4 \mid 10 \cdot 10$$

   Det samme gælder derimod ikke hvis $m = n = 2a - 1$

   (f.eks. $4 \nmid 1 \cdot 1$) — ergo er R ikke refleksiv.

2. Dernæst undersøger vi om (R) er symmetrisk. Ifølge teorem 2(b) i KBR, s, 146, er relationen R symmetrisk hvis og kun hvis $a \in R(b)$, når $b \in R(a)$.

   Vi ved at faktorernes orden er ligegyldig fordi $m \cdot n$ er det samme som $n \cdot m$:

$$m\ R\ n \iff 4 \text{ går op i } mn$$
$$4 \text{ går op i } nm \iff n\ R\ m$$

og dermed er (R) symmetrisk.

3. Til sidst undersøger vi om (R) er transitiv.

   Vi antager at $((m\ R\ l) \wedge (l\ R\ n)) \Rightarrow (m\ R\ n)$. Vi kan derfor argumentere at for $4 \mid ml$ skal være sandt, skal både m og l eller én af dem være et lige tal ($2m$ og/eller $2l$), da deres produkt ikke må være ulige.

   Det samme gælder $4 \mid ln$, fordi både ml og ln har l til fælles. Forudsat l er et lige tal, må både m og n være lige for $4 \mid ml$ og $4 \mid ln$ skulle holde.

   Vi kan deraf slutte at $4 \mid mn$ er sandt — ergo er R transitiv.

Vi fandt ud at R er både symmetrisk og transitiv, men ikke refleksiv — ergo er den ifølge difinitionen ikke ækvivalent.

(2)

Er relationen $l_1\ R\ l_2 \iff l_1$ og l_2 er parallelle er en ækvivalensrelation?

1. Vi starter med at undersøge om R er refleksiv. Definitionen siger at et element a er refleksiv, hvis det står i relation til sig selv. En linje er altid parallel med sig selv — ergo er relationen $l_1\ R\ l_2$ refleksiv.
2. Dernæst undersøger vi om R er symmetrisk. Hvis linjen l_1 er parallel med linjen l_2, så er l_2 jo også parallel med l_1 — ergo er relationen $l_1\ R\ l_2$ symmetrisk.
3. Til sidst undersøger vi om R er transitiv. Hvis en linje er parallel med den anden og den anden er parallel med den tredje, så er den første også parallel med den tredje:

   $$l_1 \parallel l_2$$
   $$l_2 \parallel l_3$$
   $$l_1 \parallel l_3$$

   Og dermed er relationen $l_1\ R\ l_2$ transitiv.

Vi fandt ud at R er både refleksiv, symmetrisk og transitiv — ergo er den ifølge difinitionen også ækvivalent. Dens ækvivalensklasser må være mængden af linjer der har samme hældning(f.eks. en lodret linje svarer til hældningen ∞).

(3)

Er relationen $M\ R\ N \iff MN - NM = 0$ er en ækvivalensrelation?

1. Vi starter med at undersøge om R er refleksiv.

   Hvis vi antager at $M = N$, så er det sandt at relationen R refleksiv, netop fordi :

$$M \; R \; N \iff MN - NM = 0$$
$$M \; R \; M \iff M^2 - M^2 = 0$$

2. Dernæst undersøger vi om R er symmetrisk. Dvs. vi skal undersøge om hvis $M \; R \; N$, gælder det så også at $N \; R \; M$? Eller sagt på en anden måde, hvis $MN - NM = 0$, gælder det så også at $NM - MN = 0$?

   Da R er fremstillet som en ligning, kan vi anvende de regler der gælder for ligninger. Så vi lægger NM på begge sider af ligningen, hvorefter vi trækker MN fra på begge sider, og får det ønskede resultat:

   $$MN - NM = 0$$
   $$MN = NM$$
   $$0 = NM - MN$$

   Vi har dermed vist at relationen $M \; R \; N \iff MN - NM = 0$ er symmetrisk.

3. Til sidst undersøger vi om R er transitiv. Vi skal undersøge om relationen $MN = NM$ er sandt. Vi ved at det ikke er sandt, fordi hvis vi ændrer rækkefølgen på matriser, så ville det ikke give samme resultat.

   Vi fører derfor beviset via et modeksempel. Hvis den ene matrise vi ganger med er en enhedsmatrise, så kan vi sige at faktorerens orden ikke har nogen betydning og det ville være sandt for:

   $$M \cdot I = I \cdot M$$

   Men vi kan ikke deraf slutte at $MN = NM$ er sandt, fordi vi ved at matrixmultiplikation ikke er kommunitativ (se evt. en konkret udregning af to kvadratiske matriser med multiplikation i KBR, s. 35) — ergo er relationen

   $M \; R \; N \iff MN - NM = 0$ ikke transitiv.

Da relationen $M \; R \; N \iff MN - NM = 0$ er refleksiv og symmetrisk, men ikke transitiv, kan vi konkludere at R ikke er en ækvivalensrelation.