DMA — Ugeopgave 5

Helga Rykov Ibsen <mcv462>

12. oktober 2021

Del 1

(a)

Vi negerer udtrykket i (1) som følgende:

$$\sim[\exists \text{c} > 0 \; \exists x_0 \in \mathbb{R}^+ \; \forall \text{x} \geq x_0 \; f(x) \leq cg(x)]$$

og får følgende udtryk ved at vende $\exists$ og $\forall$ til deres respektive modsatte kvantorer, samt ved at vende ulighedstegnet i uligheden:

$$\forall \text{c} > 0 \; \forall x_0 \in \mathbb{R}^+ \; \exists \text{x} \geq x_0 \; f(x) > cg(x)$$

(b)

Det negerede udtryk i (a) kan formuleres som følgende:

For ethvert c større end nul og alle positive reelle tal x_0, så existerer der et x større end x_0, sådan at det gælder at $f(x)$ er større end $cg(x)$.

Vi kan altså udlede herfra at difinitionen af $f(x)$ er $\mathcal{O}(n)$ ikke er sandt.

2

(a)

For at løse denne opgave, erstatter vi Q i sanhedstabellen med P. Da P ikke kan være sand og falsk på samme tid, ignorerer vi de to tilfælde hvor begge argumenter er forskellige. Derefter undersøger vi sandhedsværdierne for (∼P) og sammenligner resultatet med $P \odot P$:

P	**P**	**∼P**	**P $\odot$ P**
T	T	F	F
F	F	T	T

Vi må altså konkludere at (∼P) $\equiv P \odot P$.

(b)

(i)

Vi ved at ifølge Teorem 1. 10:

$$\sim(P \vee Q) \equiv (\sim P) \wedge (\sim Q)$$

Vi kan negere udtrykket og får:

$$(\sim P) \wedge (\sim Q) \equiv \sim((\sim P) \wedge (\sim Q))$$

Ifølge divinitionen ved vi at $P \odot Q \equiv \sim (P \wedge Q)$. Derfor får vi:

$$\sim((\sim P) \wedge (\sim Q)) \equiv (\sim P) \odot (\sim Q)$$

$$(\sim P) \odot (\sim Q) \equiv P \vee Q$$

P	**Q**	(∼**P**) ∧ (∼**Q**)	∼((∼**P**) ∧ (∼**Q**))	(∼**P**) ⊙ (∼**Q**)	$P \vee Q$
T	T	F	T	T	T
T	F	F	T	T	T
F	T	F	T	T	T
F	F	T	F	F	F

(ii)

Vi kan skrive følgende ekvivalens:

$$P \text{ xor } Q \equiv (P \vee Q) \wedge (P \odot Q)$$

Fra delopgave (b.i) ved vi at

$$P \vee Q \equiv (\sim P) \odot (\sim Q)$$

Vi kan derfor skrive at:

$$P \text{ xor } Q \equiv ((\sim P) \odot (\sim Q)) \wedge (P \odot Q)$$

Vi negerer nu hele udtrykket til højre og ifølge difinitionen på NAN-operatoren overfor får:

$$\sim (((\sim P) \odot (\sim Q)) \wedge (P \odot Q)) \equiv ((\sim P) \odot (\sim Q)) \odot (P \odot Q)$$

Til sidst negerer vi udtrykket en gang til, som svarer til sandhedsværdierne for P xor Q. Se sandhedstabellen nedenfor:

$$\sim (((\sim P) \odot (\sim Q)) \odot (P \odot Q)) \equiv P \text{ xor } Q$$

P	Q	$P \odot Q$	$(\sim P) \odot (\sim Q)$	$(P \odot Q) \odot ((\sim P) \odot (\sim Q))$	P xor Q
T	T	F	T	T	F
T	F	T	T	F	T
F	T	T	T	F	T
F	F	T	F	T	F

Del 3

1. Lad $P(n)$ være udsagnet for:

$$P(n) : (3^n + 6n - 1)|4 \equiv True \tag{1}$$

   og vi vil gerne vise at $P(n)$ er sand for alle hele positive værdier af n.

2. **[Basistrinnet]** Vi vil gerne vise at udsagnet (1) er sand for $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$ og $P(4)$:

$$P(1) = (3^1 + 6{\cdot}1 \text{ - } 1) = 8 \mid 4 \equiv \text{True}$$
$$P(2) = (3^2 + 6{\cdot}1 \text{ - } 1) = 20 \mid 4 \equiv \text{True}$$
$$P(3) = (3^3 + 6{\cdot}1 \text{ - } 1) = 44 \mid 4) \equiv \text{True}$$
$$P(4) = (3^4 + 6{\cdot}1 \text{ - } 1) = 104| \; 4 \equiv \text{True}$$

   hvilket passer med udsagnet $3^n + 6n - 1$, da 4 går op i n = 1, n = 2, n = 3 og n = 4.

3. **[Induktionstrinnet]** Vi vil vise at hvis 4 går op i b_n, så går det også op i b_{n+1}, dvs. at så gælder:

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= 3^{n+1} + 6 \cdot (n+1) - 1 \\ &= 3 \cdot 3^n + 6n + 6 - 1 \\ &= 3^n + 2 \cdot 3^n + 6n + 6 - 1 \end{aligned} \tag{2}$$

   Fra difinitionen (1) ved vi at

$$b_n = 3^n + 6n - 1$$

   Vi simplificerer udtrykket i (2)

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= b_n + 2 \cdot 3^n + 6 \\ &= b_n + 2 \cdot (3^n + 3) \end{aligned} \tag{3}$$

   Vi antager at 4 går op i b_n. Vi skal nu vise at 4 går op i det sidste led $(2 \cdot (3^n + 3)$, for så går det også op i summen af b_n og $(2 \cdot (3^n + 3)$.

Eftersom det sidste led består af 2 gange parentesen, så vil 4 går op i ledet, hvis vi kan vise at parentesen er lige.

3^n er med garanti et ulige tal, og hvis vi lægger 3 til, så er det med garanti et lige tal. Dermed går 4 op i det sidste led fordi parentesen er lige.

Dette betyder også at 4 går op i summen af de to led:

$$b_{n+1} = ((b_n + 2 \cdot (3^n + 3))|4 \equiv True \tag{4}$$

4. **[Konklusion]** Vi har vist basistrinnet hvor $P(n)$ er sand for n = 1, 2, 3, 4. Vi har vist induktionstrinnet, hvor $P(n+1)$ også er sand. Så er altså udsagnet $P(n)$ sand for alle hele positive tal n.

D4

(1)

Vi starter med et par eksempler, når $a > b$, $a < b$ og $a = b$:

`MUL(5,2)`		
n	**x**	**y**
0	5	0
1	3	1
2	1	2
`Return (false)`		

MUL(2,5)		
n	**x**	**y**
0	2	0
Return (false)		

MUL(5,5)		
n	**x**	**y**
0	5	0
1	0	1
Return (true)		

Når x $\neq$ 0 og x < b, returnerer `MUL` false. Det betyder at `MUL` undersøger om b går op i a. Hvis det er tilfældet, returnerer den `true`, hvis det derimod ikke tilfældet, returnerer den `false`.

(2)

Lad $P(n)$ være sætningen for:

$$P(n) : x_n + by_n = a \equiv True \tag{5}$$

for hele positive tal $n > 0$.

1. **[Basistrinnet]** Vi vil gerne vise at udsagnet (5) er sand for $P(1)$ og $P(2)$. Vi tager eksemplet `MUL(5,2)` fra delopgave Del 4.1:

$$\begin{aligned} P(1) &= 3 + 2\cdot\ 1 = 5 \equiv \text{True} \\ P(2) &= 1 + 2\cdot\ 2 = 5 \equiv \text{True} \end{aligned}$$

   hvilket passer med udsagnet (5) da 2 går op i 5.

2. **[Induktionstrinnet]** Vi vil vise at hvis usagnet i (5) er sandt for $P(1)$ og $P(2)$, så er det også sandt for $P(n+1)$, dvs. at så gælder:

$$\begin{aligned} P(n+1) : a &= x_n - b + b \cdot (y_n + 1) \\ &= x_n - b + by_n + b \\ &= x_n + by_n \end{aligned} \tag{6}$$

   hvilket betyder at udsagnet i (5) er sandt for $P(n+1)$.

3. **[Konklusion]** Vi har vist basistrinnet hvor $P(n)$ er sand for n $=$ 1 og 2. Vi har vist induktionstrinnet, hvor $P(n+1)$ også er sand. Så er altså udsagnet $P(n)$ sand for alle hele positive tal n.

(3)

Hver gang `MUL` algoritmen løber igennem while-løkken, trækkes der b fra a (eller rettere sagt det der er tilabge, dvs. x) og skridttælleren y går én op. Det kører på denne måde indtil x kommer under 0. Hvis vi ender med $x = 0$, så går b op i a og algoritmen returnerer `true`. Omvendt går b ikke op i a og algoritmen returnerer `false`.

Sagt på en anden måde, x svarer til resten af divisionen og y svarer til antal gange som b går op i a:

$$a = \text{rest} + b \cdot \text{antal gange } b \text{ går op i } a$$