DMA 2021

– Ugeopgave 3 –

- Hele ugeopgaven skal besvares.
- Ugeopgaven skal afleveres onsdag den 29. september klokken 21:59 på Absalon.
- Ugeopgaven skal laves i **grupper** af 2-3 personer.
- Ved bedømmelsen lægges vægt på, at det overalt fremgår klart hvilke formler, regneregler og sætninger fra det udleverede notesæt der benyttes ved argumentation.

Del 1 Lad X være et array, der indeholder n heltal. Lad algoritmen $\textsc{DetectRepeat}(X, n)$ være givet ved:

```
function DetectRepeat(X, n)
    val ← FALSE
    for i ← 0 to n − 1 do
        target ← X[i]
        for j ← i + 1 to n − 1 do
            if X[j] = target then
                val ← TRUE
    return val
```

Lad T_n betegne køretiden, d.v.s. det antal simple operationer som $\textsc{DetectRepeat}(X, n)$ foretager. Udregn først T_n. Udregn dernæst $k \in \mathbb{Z}^+$ sådan, at $T_n = \Theta(n^k)$. Husk at angive mellemregninger samt at begrunde dine konklusioner!

Frivilligt: Find en asymptotisk hurtigere algoritme, der kan detektere gentagne elementer i X. Kan du finde en endnu hurtigere algoritme, hvis du ved, at alle heltal i X er skarpt mindre end n?

Del 2 Vi betragter tre følger givet ved henholdsvis

$$a_0 = 2, a_1 = 200, a_n = a_{n-2} \text{ for } n \geq 2$$

$$b_0 = 1, b_n = 3b_{n-1} \text{ for } n \geq 1$$

$$c_0 = 1, c_n = c_{n-1} + 2^n \text{ for } n \geq 1$$

(a) For hver af de 3 rekursive følger $(a_n), (b_n)$ og (c_n), find et eksplicit udtryk for det n't led. Det vil sige, find funktioner $f_a(n), f_b(n), f_c(n)$ således, at $a_n = f_a(n)$, $b_n = f_b(n)$, $c_n = f_c(n)$.

(b) List de tre følger $(a_n), (b_n)$ and (c_n) fra mindste til største størrelsesorden. Argumentér for konklusionerne ud fra notesættets sætninger og regler (R1–R8) som kan benyttes uden bevis.

Del 3 Bestem et eksplicit udtryk for sumfølgen givet ved

$$\sum_{k=0}^{n}(3 \cdot 2^k + 1)$$

Del 4 Når vi benytter Euklids algoritme på to tal a, b for at bestemme $\mathrm{GCD}(a, b)$, foretager vi et antal divisioner med rest, indtil vi opnår resten 0 og dermed har bestemt den største fælles divisor som den næstsidst beregnede rest. Vi siger, at antallet af **trin**, der skal benyttes, er antallet af divisioner. Således er antallet af trin, der skal benyttes for at bestemme $\mathrm{GCD}(273, 98)$ netop 5, jf. gennemregningen i KBR Example 1.4.5 (side 23). Antallet af trin for alle valg af a, b med $15 \geq a \geq b > 0$ – på nær to sådanne valg – er illustreret i figur 1.

(1) Beregn $\mathrm{GCD}(3, 2), \mathrm{GCD}(5, 3), \mathrm{GCD}(8, 5)$ samt $\mathrm{GCD}(13, 8)$ og bestem de fire manglende tal i figur 1.

(2) Lad t_n være det højeste (worst-case) antal trin, der skal benyttes til at bestemme $\mathrm{GCD}(a, b)$, når $n \geq a \geq b > 0$. Benyt figur 1 til at bestemme $t_1, t_2, \ldots, t_{15}$.

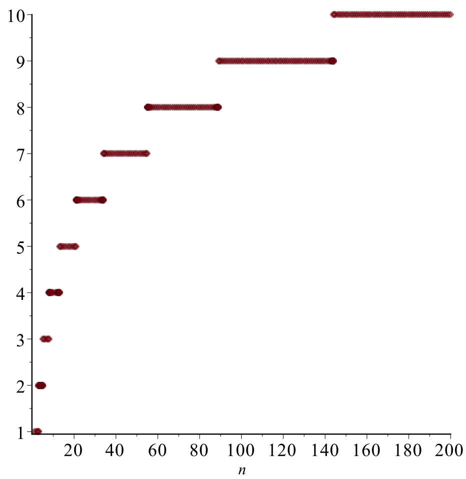
(3) For $k = 2, 3, 4, 5, 6$, find par (a_k, b_k) således, at hver $\mathrm{GCD}(a_k, b_k)$ har netop k divisioner, og $\max\{a_k, b_k\}$ bliver mindst mulig (*Hint: Du kan med fordel benytte tabellen i Figur 1*). Du kan antage, at $(a_6, b_6) = (21, 13)$.

(4) Kan du gennemskue mønstret og forudsige (a_7, b_7) og (a_8, b_8)? Betragt nu følgen defineret ved $F_0 = 1$, $F_1 = 2$, og $F_k = \max\{a_k, b_k\}$ for $k > 1$. Kan du genkende følgen (F_k) fra forelæsningen? Hvad hedder den?

(5) Vis, at t_n er $O(n)$. *Note: grafen for t_n, for n mellem 1 og 200, er vist i figur 2. Bemærk, at t_n ikke ser ud til at være $\Theta(n)$ ud fra grafen.*

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2		1		1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
3			1	2		1	2	3	1	2	3	1	2	3	1
4				1	2	2	3	1	2	2	3	1	2	2	3
5					1	2	3		3	1	2	3	4	3	1
6						1	2	2	2	3	3	1	2	2	2
7							1	2	3	3	4	4	3	1	2
8								1	2	2	4	2		3	3
9									1	2	3	2	3	4	3
10										1	2	2	3	3	2
11											1	2	3	4	4
12												1	2	2	2
13													1	2	3
14														1	2
15															1

Figur 1: Antal trin i beregningen af GCD(a, b)



Figur 2: Grafen for t_n