DMA — Ugeopgave 10

Helga Rykov Ibsen <mcv462>

27. december 2021

Del 1

(1)

Vi skal vise at relationen $(a_1, a_2) \preceq (b_1, b_2)$ indebærer at $a_1 \leq b_1$.

Den første konjunktion i difinitionen $[(a_1 \neq b_1) \wedge (a_1 \leq b_1)]$ siger at hvis a_1 er forskellige fra b_1, så indebærer denne relation at parret (a_1, a_2) går forud for (b_1, b_2), hvis a_1 er mindre end eller lige med b_1 på grund af (A, $\leq$) er en ordnet mængde. Med andre ord er relationen $a_1 \leq b_1$ bare en konsekvens af at relationen $(a_1, a_2) \preceq (b_1, b_2)$ er refleksiv.

(2)

Vi skal vise at $\preceq$ er en ordensrelation på A x A, dvs. at den er refleksiv, antisymmetrisk og transitiv.

Refleksiviteten indebærer at et element kan stå i forhold til sig selv, $a\ R\ a$. Vi undlader derfor den første parantes og får:

$$[(a_1 = a_1) \quad \wedge \quad (a_2 \leq a_2)]$$

Dette må være en konsekveks af $(A, \leq)$ er en ordnet mængde.

Denne relation er også tydeligt antisymmetrisk idet antisymmetrien indebærer at hvis man kan bytte om på parrene, så må det være fordi de er ens. Dvs. hvis a-parret går forud for b-parret eller falder oven i b-parret, så skal b-parret jo også gå forud for eller ligge oven i a-parret:

$$\begin{array}{c}
[(a_1 \neq b_1) \wedge (a_1 \leq b_1)] \quad \vee \quad [(a_1 = b_1) \wedge (a_2 \leq b_2)] \quad \wedge \\
[(b_1 \neq a_1) \wedge (b_1 \leq a_1)] \quad \vee \quad [(b_1 = a_1) \wedge (b_2 \leq a_2)] \quad \Rightarrow \\
(a_1, a_2) \quad = \quad (b_1, b_2)
\end{array}$$

Antisymmetrien forudsætter med andre ord at to par kan være ens.

Endeligt er relationen $\leq$ klart transitiv fordi hvis $a \leq b$ og $b \leq c$, så er $a \leq c$.

$$\begin{array}{c}
[(a_1 \neq b_1) \wedge (a_1 \leq b_1)] \quad \vee \quad [(a_1 = b_1) \wedge (a_2 \leq b_2)] \quad \wedge \\
[(b_1 \neq c_1) \wedge (b_1 \leq c_1)] \quad \vee \quad [(b_1 = c_1) \wedge (b_2 \leq c_2)] \quad \Rightarrow
\end{array}$$

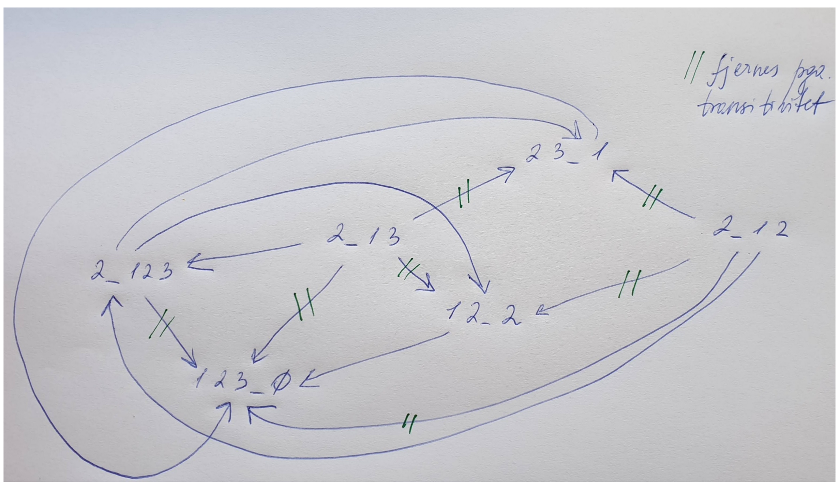
$$[(a_1 \neq c_1) \wedge (a_1 \leq c_1)] \quad \vee \quad [(a_1 = c_1) \wedge (a_2 \leq c_2)]$$

(3)

For at tegne Hassediagrammet og finde en typologisk sortering af mængden må vi starte med at finde alle parene i mængden for hvilke gælder relationen $\subseteq$. Der er i alt 15 par som enten står i relation $\preceq$ eller $\npreceq$. Vi vil nøjes her med at demonstrere tankegangen bag analysen vha. det første pars kombinationer:

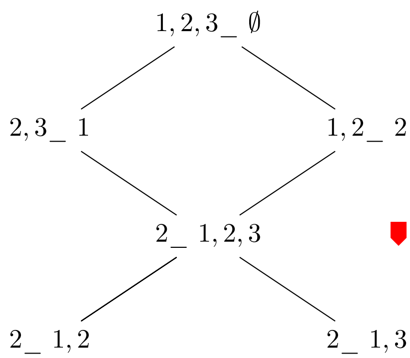
$$\begin{array}{ccccccc}
(\{2\},\{1,3\}) & \preceq & (\{2,3\},\{1\}) & \neq & \{2\} & \subseteq & \{2,3\} \\
(\{2\},\{1,3\}) & \npreceq & \{2\},\{1,2\}) & = & \{1,3\} & \nsubseteq & \{1,2\} \\
(\{2\},\{1,3\}) & \preceq & (\{1,2\},\{2\} & \neq & \{2\} & \subseteq & \{1,2\} \\
(\{2\},\{1,3\}) & \preceq & (\{1,2,3\},\{\emptyset\}) & = & \{1,3\} & \subseteq & \{1,2,3\}
\end{array}$$

I det næste trin tegner vi digrafen (Figure 1), hvor relationerne imellem parrene er tegnet som pile. Refleksivitetspile er undladt og transitivitetspile er krydset over med to strege. Vi har desuden forenklet notation sådan at f.eks talparret ({2},{1,2}) præsenteres som 2_ 1, 2.



Figur 1: Digrafen af mængden

Nu kan vi tegne Hassediagrammet og placerer talparrene sådan at pilene peger opad:



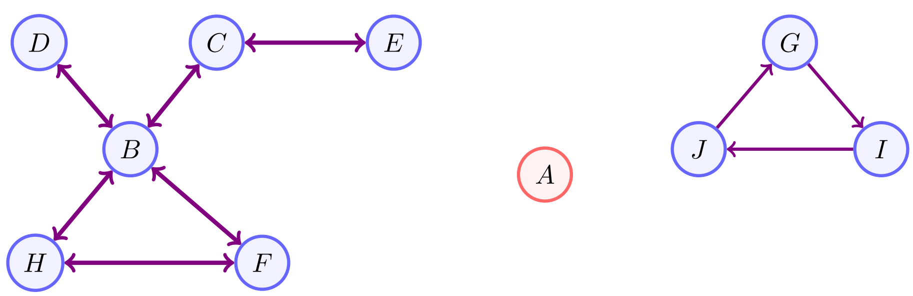
Til sidst finder vi en typologisk sortering af mængden. Vi anvender algoritmen fra Slides [Tue, week 13, TopSort, O and Theta, slide 16], hvor vi starter med at fjerne kanten til venstre i bunden af diagrammet (vi valgte parret til venstre som det mindste, selvom det kunne lige så godt være parret til højre) og tilføje parret $(\{2\},\{1,2\})$ som det første element i listen L. Vi gentager metoden indtil der ikke er flere kanter at fjerne og tilføjer det største talpar $(\{1,2,3\},\{\emptyset\})$ som det sidste element i listen:

$$L=\{(\{2\},\{1,2\}),(\{2\},\{1,3\}),(\{2\},\{1,2,3\}),(\{2,3\},\{1\}),(\{1,2\},\{2\}),\\ (\{1{,}2{,}3\},\{\emptyset\})\}$$

Del 2

(a)

Relationen R på mængden {A, B, C, D, E, F, G, H, I J} kan enten presenteres som en digraf:



eller som en kvadratisk matrice 10 x 10:

$$M_R = \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&1&1&0&1&0&1&0&0 \\ 0&1&0&0&1&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0 \\ 0&1&0&0&0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0 \end{bmatrix}$$

(b)

Jeg bestemmer relationen R^∞ ved at bruge metoden 2 fra KBR (s. 170). Jeg starter med at finde $(M_R)^2_\odot$ og $(M_R)^3_\odot$:

$$(M_R)^2_\odot = \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&1&1&0&1&0&0 \\ 0&0&1&1&0&1&0&1&0&0 \\ 0&0&1&1&0&1&0&1&0&0 \\ 0&1&0&0&1&0&0&0&0&0 \\ 0&1&1&1&0&1&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0 \\ 0&1&1&1&0&1&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0 \end{bmatrix}$$

$$(M_R)^3_\odot = \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&1&1&1&0&1&0&1&0&0 \\ 0&1&0&0&1&1&0&1&0&0 \\ 0&1&0&0&1&1&0&1&0&0 \\ 0&0&1&1&0&1&0&1&0&0 \\ 0&1&1&1&1&1&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1 \\ 0&1&1&1&1&1&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1 \end{bmatrix}$$

Relationen R^∞ kan nu bestemmes som disjunktionen af de tre matricer:

$$M_{R^\infty} = M_R \vee (M_R)^2_\odot \vee (M_R)^3_\odot$$

$$M_{R^\infty} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(c)

Vi skal vise at den refleksive afslutning af R^∞ er en ækvivalensrelation. Vi ved at en relation R er en ækvivalensrelation, hvis den er refleksiv, symmetrisk og transitiv.

- Hvis vi antager at det er muligt at gå ind i gaten og går ud af den igen, så må det være muligt at påstå at $a\ R\ a$ og dermed er R^∞ er refleksiv. Det kan vi vise ved at udskifte alle 0'er med 1'er i hoveddiagonalen i M_{R^∞}.
- Det er nemt at se ved blot at kigge på matricen M_{R^∞} at relationen R^∞ er symmetrisk: elementerne er ens på hver side af hoveddiagonalen.
- Transitivitetsegenskaben af R^∞ fremgår af teorem 1 (KBR, s. 169). Dette kan ligeledes nemt ses ved eksemplevis at vælge tre tilfældige byer fra mængden og se om relationen $((a\ R\ b) \wedge (b\ R\ c)) \Rightarrow (a\ R\ c)$ er sandt for M_{R^∞}.

  Hvis a = Berlin, b = Cambridge og c = Frankfurt, så er relationen $(a\ R\ b) \wedge (b\ R\ c)) \Rightarrow (a\ R\ c)$ sandt.

Ækvivalensklasserne for den refleksive afslutning af R^∞ må derfor defineres ud fra de tre relationer:

1. Refleksiviteten: Byerne som er destination i sig selv.
2. Symmetri: Byerne med direkte tur-retur forbindelse, samt byerne uden direkte tur-retur forbindelse.
3. Transitivitet: Transitbyerne.

Der må altså være fire ækvivalensklasser som er defineret af denne relation.