

DMA 2021

– Ugeopgave 9 –

- Hele ugeopgaven skal besvares.
- Ugeopgaven skal afleveres onsdag den 15. december klokken 21:59 på Absalon.
- Ugeopgaven skal laves i grupper med 2-3 personer.
- Besvarelsen skal udarbejdes i L^AT_EX.

Denne ugeopgave har to helt uafhængige emner.

- Del 1 (1) Lad n være et positivt helt tal. Bestem en formel for antallet af måder, hvorpå man kan danne en følge af n tal fra mængden $\{1, 2, \dots, 500\}$, når gentagelser er tilladt. Bestem en formel for antallet af måder hvorpå man kan danne en ordnet liste, når gentagelser *ikke* er tilladt. *Husk, at $m!$ kun er defineret for heltal $m \geq 0$.*
- (2) Vi ønsker at benytte en nøglefunktion $f : U \rightarrow \{1, 2, \dots, 500\}$ til at lægge n objekter fra mængden U i en hash-tabel, og foretrækker at undgå *kollisioner*, hvor to forskellige objekter får tildelt samme nøgle. Hvis vi antager, at nøglefunktionen tildeler alle mulige værdier med samme sandsynlighed, hvad er så sandsynligheden $p(n)$ for, at der sker **mindst én** kollision?
- (3) Benyt en computer til at plotte sandsynlighederne $p(n)$ for n mellem 1 og 50 (Du kan benytte Maple eller andre programmer). Hvornår bliver sandsynligheden første gang over $1/2$? *Hint: du kan benytte plottet af grafen til at besvare dette.*

Del 2 Afgør for hver af de tre relationer (R) herunder, om de er reflektive, symmetriske eller transitive. Før beviser eller giv modeksempler. Hvis R er en ækvivalensrelation, beskriv da dens ækvivalensklasser.

- (1) Lad S være mængden af naturlige tal, der *ikke* kan deles med 4, og lad relationen R på S være givet ved

$$m R n \iff 4 \text{ deler } mn.$$

- (2) Lad A være mængden af alle linjer i planen, og lad relationen R på A være givet ved

$$\ell_1 R \ell_2 \iff \ell_1 \text{ og } \ell_2 \text{ er parallelle.}$$

- (3) Betragt relationen R på mængden af 2×2 matricer med reelle elementer, $\mathbf{M}_2(\mathbb{R})$, givet ved

$$\mathbf{M} R \mathbf{N} \iff \mathbf{M}\mathbf{N} - \mathbf{N}\mathbf{M} = \mathbf{0}.$$