Forelæsning 7: Ortonormale baser og ortogonale matricer

LinAlgDat 2021/2022

Henrik Holm og Henrik L. Pedersen
Institut for Matematiske Fag
holm@math.ku.dk og henrikp@math.ku.dk

Oversigt

Prikprodukt

Definition 4.1 (Prikprodukt)

Prikproduktet af to vektorer

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

i $\mathbb{R}^n$ defineres som:

$$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = u_1 v_1 + \cdots + u_n v_n \in \mathbb{R}\,.$$

Eksempel (Beregning af prikprodukt)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 = 32$$

Regneregler for prikprodukt

For vektorer $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ og tal (skalar) $c \in \mathbb{R}$ gælder:

- $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = \mathbf{v} \bullet \mathbf{u}$
- $\mathbf{u} \bullet (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \bullet \mathbf{v} + \mathbf{u} \bullet \mathbf{w}$
- $c(\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}) = (c\mathbf{u}) \bullet \mathbf{v} = \mathbf{u} \bullet (c\mathbf{v})$
- $\mathbf{v} \bullet \mathbf{v} \geqslant 0$, og man har $\mathbf{v} \bullet \mathbf{v} = 0$ netop hvis $\mathbf{v} = \mathbf{0}$

Eksempel (Reduktion af udtryk)

Regnereglerne ovenfor giver fx, at der for $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ gælder

$$\begin{aligned}(\mathbf{u} + 2\mathbf{v}) \bullet (\mathbf{u} - 2\mathbf{v}) &= \mathbf{u} \bullet \mathbf{u} - \mathbf{u} \bullet 2\mathbf{v} + 2\mathbf{v} \bullet \mathbf{u} - 2\mathbf{v} \bullet 2\mathbf{v} \\ &= \mathbf{u} \bullet \mathbf{u} - 4(\mathbf{v} \bullet \mathbf{v})\end{aligned}$$

Norm

Definition 4.2 (Norm)

Normen af en vektor

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

defineres som:

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} = \sqrt{v_1^2 + \cdots + v_n^2}\,.$$

LaTeX: \| giver $\|$

Eksempel (Beregning af norm)

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14} \simeq 3.74$$

Regneregler for norm

For vektorer $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ og tal (skalar) $c \in \mathbb{R}$ gælder:

- $\|\mathbf{v}\| \geqslant 0$, og man har $\|\mathbf{v}\| = 0$ netop hvis $\mathbf{v} = \mathbf{0}$
- $\|c\mathbf{v}\| = |c|\,\|\mathbf{v}\|$
- $|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leqslant \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|$ (Cauchy–Schwarz's ulighed)
- $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leqslant \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ (Trekantsuligheden)

Eksempel (Cauchy–Schwarz og trekantsuligheden)

For vektorerne

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

checkes Cauchy–Schwarz's ulighed:

$$|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| = |32| = 32 \leqslant 32.83 \simeq \sqrt{14}\sqrt{77} = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|$$

og trekantsuligheden:

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| = \sqrt{5^2+7^2+9^2} \simeq 12.45 \leqslant 12.52 \simeq \sqrt{14} + \sqrt{77} = \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$$

Enhedsvektorer

Definition (Enhedsvektor)

En vektor $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ kaldes en enhedsvektor hvis $\|\mathbf{u}\| = 1$.

Eksempel (Normering til enhedsvektor)

For en vilkårlig vektor $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ i $\mathbb{R}^n$ er den normerede vektor

$$\mathbf{u}' = \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|}$$

en enhedsvektor. For vektoren

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \text{bliver} \qquad \mathbf{u}' = \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|} = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 0.27 \\ 0.53 \\ 0.80 \end{pmatrix},$$

som er en enhedsvektor:

$$\|\mathbf{u}'\|^2 = 0.27^2 + 0.53^2 + 0.80^2 = 1\,.$$

Euklidisk afstand

Definition 4.3 (Euklidisk afstand)

Den (Euklidiske) afstand mellem to vektorer

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

i $\mathbb{R}^n$ defineres som:

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + \cdots + (u_n - v_n)^2}\,.$$

Eksempel (Beregning af afstand)

$$d\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \right) = \sqrt{(1-4)^2 + (2-5)^2 + (3-6)^2} = \sqrt{27} \simeq 5.20$$

Vinklen mellem to vektorer

For i $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ i $\mathbb{R}^2$ (eller i $\mathbb{R}^3$) kan man vha. cosinusrelationerne vise

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|}$$

hvor θ er vinklen mellem $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$.

Samme formel bruges til at *definere* vinklen mellem vektorer i $\mathbb{R}^n$:

Definition 4.4 (Vinklen mellem to vektorer)

Vinklen θ mellem to vektorer $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ defineres ved formlen:

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|}$$

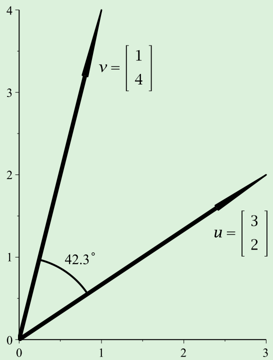
Eksempel (Bestemmelse af vinkel)

Vinklen θ mellem vektorerne

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

beregnes således:

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|} = \frac{11}{\sqrt{13}\sqrt{17}} \simeq 0.74 \qquad \Longrightarrow \qquad \theta \simeq 42.3^\circ$$



Ortogonale vektorer og Pythagoras

For vinklen θ mellem to vektorer $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ har man:

$$\theta = 90^\circ \quad \Longleftrightarrow \quad \cos\theta = \frac{\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = 0.$$

Definition 4.5 (Ortogonale vektorer)

To vektorer $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ i $\mathbb{R}^n$ kaldes ortogonale (vinkelrette) såfremt $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = 0$. I dette tilfælde skriver man $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$.

LaTeX: `\perp` giver $\perp$

Theorem 4.2 (Pythagoras)

Betragt vektorer $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ i $\mathbb{R}^n$. Hvis $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$, så gælder

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$$

(Det omvendte gælder også.)

Eksempel (Ortogonale vektorer og Pythagoras)

Vektorerne

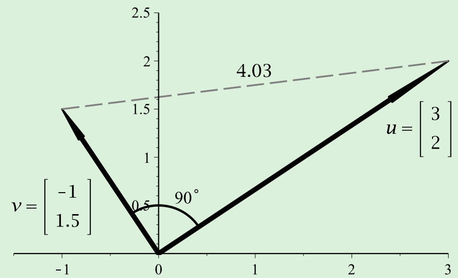
$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1.5 \end{pmatrix}$$

er ortogonale (vinkelrette) fordi

$$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} \;=\; 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 1.5 \;=\; 0$$

Derfor gælder Pythagoras:

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = 2^2 + 3.5^2 = 16.25\,(\simeq 4.03^2) = 13 + 3.25 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$$



Ortogonal projektion

Definition 4.6 (Projektion, komponent og spejling)

Lad $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ være en vektor i $\mathbb{R}^n$ og lad $\mathcal{U} = \mathrm{span}\{\mathbf{u}\}$ være underrummet udspændt af $\mathbf{u}$ (altså linien gennem $\mathbf{0}$ med retningsvektor $\mathbf{u}$).

For enhver vektor $\mathbf{v}$ i $\mathbb{R}^n$ defineres nu:

- Den ortogonale projektion af $\mathbf{v}$ på $\mathcal{U}$ er givet ved:

$$\mathrm{proj}_{\mathcal{U}}(\mathbf{v}) = \frac{\mathbf{v} \bullet \mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|^2}\,\mathbf{u}$$

- Komponenten af $\mathbf{v}$ ortogonal på $\mathcal{U}$ er givet ved:

$$\mathrm{comp}_{\mathcal{U}}(\mathbf{v}) = \mathbf{v} - \mathrm{proj}_{\mathcal{U}}(\mathbf{v}) = \mathbf{v} - \frac{\mathbf{v} \bullet \mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|^2}\,\mathbf{u}$$

- Spejlingen af $\mathbf{v}$ i $\mathcal{U}$ er givet ved:

$$\mathrm{refl}_{\mathcal{U}}(\mathbf{v}) = 2\,\mathrm{proj}_{\mathcal{U}}(\mathbf{v}) - \mathbf{v} = 2\,\frac{\mathbf{v} \bullet \mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|^2}\,\mathbf{u} - \mathbf{v}$$

Pointe: $\mathbf{v} = \mathrm{proj}_{\mathcal{U}}(\mathbf{v}) + \mathrm{comp}_{\mathcal{U}}(\mathbf{v})$ og $\mathrm{proj}_{\mathcal{U}}(\mathbf{v}) \perp \mathrm{comp}_{\mathcal{U}}(\mathbf{v})$.

Eksempel (Projektion, komponent og spejling) 1/2

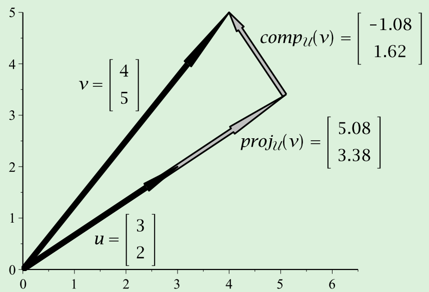
For vektorerne

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

gælder

$$\mathrm{proj}_{\mathcal{U}}(\mathbf{v}) = \frac{\mathbf{v} \bullet \mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|^2}\,\mathbf{u} = \frac{3 \cdot 4 + 2 \cdot 5}{3^2 + 2^2}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 5.08 \\ 3.38 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{comp}_{\mathcal{U}}(\mathbf{v}) = \mathbf{v} - \mathrm{proj}_{\mathcal{U}}(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5.08 \\ 3.38 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} -1.08 \\ 1.62 \end{pmatrix}$$



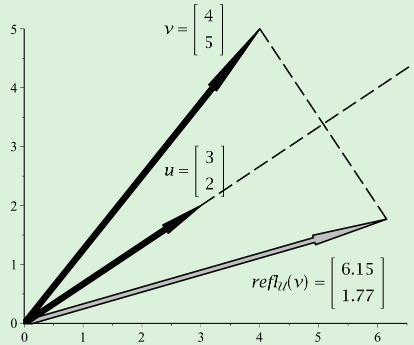
Eksempel (Projektion, komponent og spejling) 2/2

For vektorerne

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

gælder endvidere

$$\mathrm{refl}_{\mathcal{U}}(\mathbf{v}) = 2\,\mathrm{proj}_{\mathcal{U}}(\mathbf{v}) - \mathbf{v} = 2\begin{pmatrix} 5.08 \\ 3.38 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 6.15 \\ 1.77 \end{pmatrix}$$



Projektionsmatricen

Lad $\mathbf{0} \neq \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ og sæt $\mathcal{U} = \mathrm{span}\{\mathbf{u}\}$. Det er geometrisk klart, at

$$\mathrm{proj}_{\mathcal{U}}(-)\,,\ \mathrm{comp}_{\mathcal{U}}(-)\,,\ \mathrm{refl}_{\mathcal{U}}(-) \colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

er lineære transformationer. Derfor findes $n \times n$ matricer

- $\mathbf{P}$ – projektionsmatricen for $\mathcal{U}$
- $\mathbf{C}$ – komponentmatricen for $\mathcal{U}$
- $\mathbf{R}$ – spejlingsmatricen for $\mathcal{U}$

som for alle $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ opfylder:

$$\begin{aligned} \mathrm{proj}_{\mathcal{U}}(\mathbf{v}) &= \mathbf{P}\mathbf{v} \\ \mathrm{comp}_{\mathcal{U}}(\mathbf{v}) &= \mathbf{C}\mathbf{v} \\ \mathrm{refl}_{\mathcal{U}}(\mathbf{v}) &= \mathbf{R}\mathbf{v} \end{aligned}$$

Spørgsmål. *Hvordan ser matricerne* **P**, **C** *og* **R** *ud?*

Formel for projektionsmatricen

Lad $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ være en vektor i $\mathbb{R}^n$ og sæt $\mathcal{U} = \operatorname{span}\{\mathbf{u}\}$. Matricerne

$$\mathbf{P} = \frac{\mathbf{u}\mathbf{u}^T}{\mathbf{u}^T\mathbf{u}}$$
$$\mathbf{C} = \mathbf{I} - \mathbf{P} = \mathbf{I} - \frac{\mathbf{u}\mathbf{u}^T}{\mathbf{u}^T\mathbf{u}}$$
$$\mathbf{R} = 2\mathbf{P} - \mathbf{I} = 2\frac{\mathbf{u}\mathbf{u}^T}{\mathbf{u}^T\mathbf{u}} - \mathbf{I}$$

(hvor $\mathbf{I}$ er $n \times n$ enhendsmatricen) opfylder:

$$\operatorname{proj}_{\mathcal{U}}(\mathbf{v}) = \mathbf{P}\mathbf{v}$$
$$\operatorname{comp}_{\mathcal{U}}(\mathbf{v}) = \mathbf{C}\mathbf{v}$$
$$\operatorname{refl}_{\mathcal{U}}(\mathbf{v}) = \mathbf{R}\mathbf{v}$$

for alle $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$.

Eksempel (Bestemmelse af projektionsmatrix)

Betragt underrummet $\mathcal{U} = \operatorname{span}\{\mathbf{u}\}$ af $\mathbb{R}^2$ hvor

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Vi har

$$\mathbf{u}\mathbf{u}^T = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{u}^T\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 13$$

Projektionsmatricen for $\mathcal{U}$ er derfor givet ved:

$$\mathbf{P} = \frac{\mathbf{u}\mathbf{u}^T}{\mathbf{u}^T\mathbf{u}} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 0.69 & 0.46 \\ 0.46 & 0.31 \end{pmatrix}.$$

For vektoren

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

(gen)finder vi:

$$\operatorname{proj}_{\mathcal{U}}(\mathbf{v}) = \mathbf{P}\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0.69 & 0.46 \\ 0.46 & 0.31 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 5.08 \\ 3.38 \end{pmatrix}.$$

Ortonormale baser

Definition 4.7 (Ortogonale og ortonormale sæt)

Et sæt af vektorer $\mathcal{S} = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ i $\mathbb{R}^n$ kaldes

- Parvist ortogonale hvis:

$$\mathbf{u}_i \bullet \mathbf{u}_j = 0 \quad \text{for alle} \quad i \neq j.$$

- Parvist ortonormale hvis:

$$\mathbf{u}_i \bullet \mathbf{u}_j = 0 \quad \text{for alle} \quad i \neq j \qquad \text{og} \qquad \|\mathbf{u}_i\| = 1 \quad \text{for alle} \quad i.$$

Eksempel (Standardbasen er et ortonormalt sæt)

Standardbasisvektorerne i $\mathbb{R}^3$, dvs.

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

er parvist ortonormale.

Eksempel (Et ortogonalt / ortonormalt sæt)

Følgende vektorer i $\mathbb{R}^3$ er parvist ortogonale:

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 9 \\ -20 \\ 12 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 12 \\ 15 \\ 16 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

fordi $\mathbf{u}_1 \bullet \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_1 \bullet \mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_2 \bullet \mathbf{u}_3 = 0$, idet fx

$$\mathbf{u}_1 \bullet \mathbf{u}_2 = 9 \cdot 12 + (-20) \cdot 15 + 12 \cdot 16 = 108 - 300 + 192 = 0$$

Ved normering fås et parvist ortonormalt sæt:

$$\mathbf{u}_1' = \frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 9 \\ -20 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.36 \\ -0.80 \\ 0.48 \end{pmatrix}$$
$$\mathbf{u}_2' = \frac{\mathbf{u}_2}{\|\mathbf{u}_2\|} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 12 \\ 15 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.48 \\ 0.60 \\ 0.64 \end{pmatrix}$$
$$\mathbf{u}_3' = \frac{\mathbf{u}_3}{\|\mathbf{u}_3\|} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.80 \\ 0.00 \\ 0.60 \end{pmatrix}$$

Theorem 4.3 (Et ortogonalt sæt er lineært uafhængigt)

Ethvert sæt $\mathcal{S} = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k\}$ af parvist ortogonale ikke-nul vektorer i $\mathbb{R}^n$ er lineært uafhængigt.

Definition 4.8 (Ortogonal / ortonormal basis)

En ortogonal / ortonormal basis for et underrum $\mathcal{U}$ af $\mathbb{R}^n$ er en basis $\mathcal{B}$ for $\mathcal{U}$ hvori vektorerne er parvist ortogonale / ortonormale.

Gram–Schmidt processen (næste forelæsning): En metode til at lave en ortonormal basis ud fra en (almindelig) basis.

Eksempel (Standardbasen er en ortonormal basis)

Standardbasen $\mathcal{E}$ for $\mathbb{R}^3$ er en ortonormal basis:

$$\mathcal{E} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Eksempel (En ortogonal / ortonormal basis for $\mathbb{R}^3$)

Pga. det forrige Eksempel, Theorem 4.3 og $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ fås, at

- Følgende er en ortogonal basis for $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 9 \\ -20 \\ 12 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 12 \\ 15 \\ 16 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}.$$

- Følgende er en ortonormal basis for $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{B}' = \{\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2, \mathbf{u}'_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0.36 \\ -0.80 \\ 0.48 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.48 \\ 0.60 \\ 0.64 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -0.80 \\ 0.00 \\ 0.60 \end{pmatrix} \right\}.$$

Det er let at bestemme koordinater mht. en ortogonal basis:

Theorem 4.4 (Koordinater mht. en ortogonal basis)

Lad $\mathcal{U}$ være et underrum af $\mathbb{R}^n$ og lad $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k\}$ være en *ortogonal* basis for $\mathcal{U}$. For enhver vektor $\mathbf{v} \in \mathcal{U}$ gælder da:

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{v} \bullet \mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|^2}\mathbf{u}_1 + \cdots + \frac{\mathbf{v} \bullet \mathbf{u}_k}{\|\mathbf{u}_k\|^2}\mathbf{u}_k$$

Mao. koordinaterne for $\mathbf{v}$ mht. $\mathcal{B}$ er givet ved:

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \frac{\mathbf{v} \bullet \mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|^2} \\ \vdots \\ \frac{\mathbf{v} \bullet \mathbf{u}_k}{\|\mathbf{u}_k\|^2} \end{pmatrix}$$

Pointe: Man behøver ikke løse ligninger, men blot prikke vektorer.

Det er endnu lettere at finde koordinater mht. en ortonormal basis:

Theorem 4.5 (Koordinater mht. en ortonormal basis)

Lad $\mathcal{U}$ være et underrum af $\mathbb{R}^n$ og lad $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k\}$ være en *ortonormal* basis for $\mathcal{U}$. For enhver vektor $\mathbf{v} \in \mathcal{U}$ gælder da:

$$\mathbf{v} = (\mathbf{v} \bullet \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 + \cdots + (\mathbf{v} \bullet \mathbf{u}_k)\mathbf{u}_k$$

Mao. koordinaterne for $\mathbf{v}$ mht. $\mathcal{B}$ er givet ved:

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \mathbf{v} \bullet \mathbf{u}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{v} \bullet \mathbf{u}_k \end{pmatrix}$$

Eksempel (Koordinater mht. en ortonormal basis)

Betragt følgende ortonormal basis for $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{B}' = \{\mathbf{u}_1', \mathbf{u}_2', \mathbf{u}_3'\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0.36 \\ -0.80 \\ 0.48 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.48 \\ 0.60 \\ 0.64 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -0.80 \\ 0.00 \\ 0.60 \end{pmatrix} \right\}.$$

Koordinaterne for vektoren

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

mht. ortonormal basen $\mathcal{B}'$ er givet ved

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} \mathbf{v} \bullet \mathbf{u}_1' \\ \mathbf{v} \bullet \mathbf{u}_2' \\ \mathbf{v} \bullet \mathbf{u}_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 0.36 - 2 \cdot 0.80 + 3 \cdot 0.48 \\ 1 \cdot 0.48 + 2 \cdot 0.60 + 3 \cdot 0.64 \\ -1 \cdot 0.80 + 2 \cdot 0.00 + 3 \cdot 0.60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 3.6 \\ 1.0 \end{pmatrix}$$

Der gælder altså

$$\mathbf{v} = 0.2\mathbf{u}_1' + 3.6\mathbf{u}_2' + \mathbf{u}_3'$$

Ortogonale matricer

Theorem 4.6 (Matricer med parvist ortonormale søjler)

Lad $\mathbf{A}$ være en $n \times k$ matrix. Søjlerne i $\mathbf{A}$ parvist ortonormale hvis og kun hvis $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A} = \mathbf{I}_k$ (dvs. $\mathbf{A}^\mathsf{T}$ er en venstre-invers til $\mathbf{A}$).

Eksempel (En matrix med parvist ortonormale søjler)

Søjlerne i følgende 3×2 matrix er parvist ortonormale:

$$\mathbf{A} = (\mathbf{u}_1' \mid \mathbf{u}_2') = \begin{pmatrix} 0.36 & 0.48 \\ -0.80 & 0.60 \\ 0.48 & 0.64 \end{pmatrix}$$

Følgende udregning bekræfter sætningen ovenfor:

$$\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.36 & -0.80 & 0.48 \\ 0.48 & 0.60 & 0.64 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.36 & 0.48 \\ -0.80 & 0.60 \\ 0.48 & 0.64 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{I}_2$$

Derimod gælder *ikke* $\mathbf{A}\mathbf{A}^\mathsf{T} = \mathbf{I}_3$.

Definition 4.9 (Ortogonale matricer)

En kvadratisk (dvs. $n \times n$) matrix $\mathbf{Q}$ kaldes ortogonal hvis søjlerne i $\mathbf{Q}$ er parvist *ortonormale*, altså hvis $\mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{Q} = \mathbf{I}_n$.

Den inverse til en ortogonal matrix

For en ortogonal matrix $\mathbf{Q}$ gælder $\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^\mathsf{T}$.

Eksempel (En ortogonal matrix og dens inverse)

(Permutations)matricen

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

er oplagt ortogonal, og derfor gælder:

$$\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^\mathsf{T} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Theorem 4.7 (Ortogonale matricer og prikprodukt)

En kvadratisk (dvs. $n \times n$) matrix $\mathbf{Q}$ er ortogonal hvis og kun hvis

$$\mathbf{Q}\mathbf{u} \bullet \mathbf{Q}\mathbf{v} = \mathbf{u} \bullet \mathbf{v} \quad \text{for alle} \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n.$$

Eksempel (En ortogonal matrix og prikprodukt)

Betragt den ortogonale matrix

$$\mathbf{Q} = (\mathbf{u}_1' \mid \mathbf{u}_2' \mid \mathbf{u}_3') = \begin{pmatrix} 0.36 & 0.48 & -0.80 \\ -0.80 & 0.60 & 0.00 \\ 0.48 & 0.64 & 0.60 \end{pmatrix}$$

For vektorerne

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad \text{gælder} \quad \mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = 32.$$

For vektorerne

$$\mathbf{Q}\mathbf{u} = \begin{pmatrix} -1.08 \\ 0.40 \\ 3.56 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{Q}\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -0.96 \\ -0.20 \\ 8.72 \end{pmatrix} \qquad \text{gælder} \quad \mathbf{Q}\mathbf{u} \bullet \mathbf{Q}\mathbf{v} = 32.$$

Ortogonale lineære transformationer

Definition af ortogonale lineære transformationer

En ortogonal lineær transformation er en en lineær transformation

$$T\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{givet ved} \quad T(\mathbf{x}) = \mathbf{Qx}$$

hvor $\mathbf{Q}$ er en ortogonal matrix.

Theorem 4.7 giver, at en ortogonal lineær transformation T opfylder:

$$\|T(\mathbf{x})\|^2 = \|\mathbf{Qx}\|^2 = \mathbf{Qx} \cdot \mathbf{Qx} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = \|x\|^2\,,$$

dvs. T bevarer norm / længde af vektorer, så T er en isometri.

Typiske eksempler: Rotationer og spejlinger.

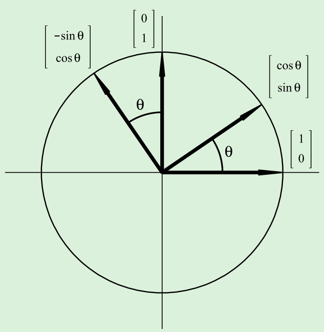
Eksempel (Rotation i planen)

Matricen for rotation med vinklen θ mod uret omkring origo er:

$$\mathbf{Q}_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Denne matrix er ortogonal idet

$$\mathbf{Q}_\theta^T\mathbf{Q}_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$



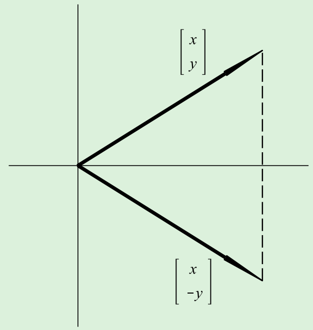
Eksempel (Spejling i førsteaksen)

Matricen for spejling i førsteaksen er givet ved

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Denne matrix er ortogonal idet

$$\mathbf{Q}^T\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$



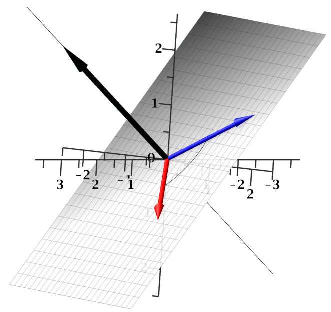
Eksempel (Rotation i rummet) 1/4

Betragt den ortogonale matrix fra tidligere eksempel:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0.36 & 0.48 & -0.80 \\ -0.80 & 0.60 & 0.00 \\ 0.48 & 0.64 & 0.60 \end{pmatrix}.$$

Spørgsmål: Hvad gør transformationen $T(\mathbf{x}) = \mathbf{Qx}$?

Svar: For $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ er $\mathbf{y} = \mathbf{Qx}$ den vektor som fås ved at rotere $\mathbf{x}$ vinklen $\theta \simeq (-)74°$ omkring linien med retningsvektor $\mathbf{v} = (-1, 2, 2)$.



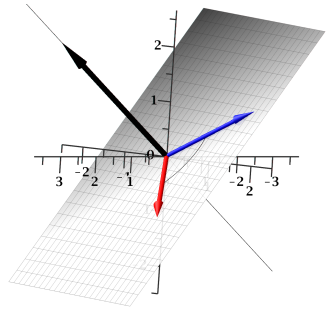
Lad os checke om T faktisk gør det påståede...

Eksempel (Rotation i rummet) 2/4

Ændres retningvektoren $\mathbf{v} = (-1, 2, 2)$ ved multiplikation med $\mathbf{Q}$? Nej!

$$\mathbf{Qv} = \begin{pmatrix} 0.36 & 0.48 & -0.80 \\ -0.80 & 0.60 & 0.00 \\ 0.48 & 0.64 & 0.60 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \mathbf{v}$$

(Man siger, at $\mathbf{v}$ er en egenvektor for $\mathbf{Q}$ med egenværdi $\lambda = 1$)

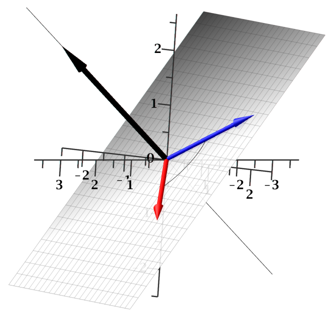


Eksempel (Rotation i rummet) 3/4

Vektoren $\mathbf{x} = (2, 1, 0)$ ligger i planen med normalvektor $\mathbf{v} = (-1, 2, 2)$ fordi $\mathbf{v} \bullet \mathbf{x} = 0$. Vi har:

$$\mathbf{y} = \mathbf{Qx} = \begin{pmatrix} 0.36 & 0.48 & -0.80 \\ -0.80 & 0.60 & 0.00 \\ 0.48 & 0.64 & 0.60 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.2 \\ -1.0 \\ 1.6 \end{pmatrix}.$$

- Ligger vektoren $\mathbf{y}$ i planen med normalvektor $\mathbf{v}$?
- Er vinklen mellem $\mathbf{x}$ og $\mathbf{y}$ faktisk $\theta \simeq 74^\circ$?



Eksempel (Rotation i rummet) 4/4

$$\mathbf{v} = (-1, 2, 2) \quad , \quad \mathbf{x} = (2, 1, 0) \quad , \quad \mathbf{y} = (1.2, -1.0, 1.6)$$

- Ja! Vektoren $\mathbf{y}$ ligger i planen med normalvektor $\mathbf{v}$ idet:

$$\mathbf{v} \bullet \mathbf{y} = -1 \cdot 1.2 + 2 \cdot (-1.0) + 2 \cdot 1.6 = 0\,.$$

- Ja! Vinklen mellem $\mathbf{x}$ og $\mathbf{y}$ er faktisk $\theta \simeq 74^\circ$ idet:

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{x} \bullet \mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|} = \frac{1.4}{\sqrt{5}\sqrt{5}} = 0.28 \quad \Longrightarrow \quad \theta \simeq 74^\circ$$