Forelæsning 5: Underrum af $\mathbb{R}^n$, baser og dimension

LinAlgDat 2021/2022

Henrik Holm og Henrik L. Pedersen
Institut for Matematiske Fag
holm@math.ku.dk og henrikp@math.ku.dk

Oversigt

Vektorrummet $\mathbb{R}^n$

Definition 3.1 (Vektoraddition og skalarmultiplikation)

Lad $\mathbb{R}^n$ være mængden af alle (søjle)vektorer

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \qquad \text{hvor} \qquad u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{R}$$

Vektoraddition/subtraktion og skalarmultiplikation defineres pladsvis:

$$\mathbf{u} \pm \mathbf{v} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} u_1 \pm v_1 \\ \vdots \\ u_n \pm v_n \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad s\mathbf{u} = s\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} su_1 \\ \vdots \\ su_n \end{pmatrix}$$

Eksempel (Regning med vektorer)

I $\mathbb{R}^2$ gælder fx

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} \quad , \quad 7\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 14 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad -\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Theorem 3.1 (Regneregler i $\mathbb{R}^n$)

Nulvektoren i $\mathbb{R}^n$ har per definition 0'er på alle n koordinater:

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vektoraddition og skalarmultiplikation opfylder følgende regler:

- $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$
- $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$
- $\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}$
- $\mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0}$
- $s(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = s\mathbf{u} + s\mathbf{v}$
- $(s + t)\mathbf{v} = s\mathbf{v} + t\mathbf{v}$
- $s(t\mathbf{v}) = (st)\mathbf{v}$
- $1\mathbf{v} = \mathbf{v}$

for alle vektorer $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ og alle tal (skalarer) $s, t \in \mathbb{R}$.

Abstakte vektorrum

Definition 7.1 (Vektorrum)

En mængde V (hvis elementer vi omtaler som "vektorer") med

- Vektoraddition: $V \times V \to V$, $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mapsto \mathbf{u} + \mathbf{v}$, og
- Skalarmultiplikation: $\mathbb{R} \times V \to V$, $(s, \mathbf{u}) \mapsto s\mathbf{u}$

som opfylder reglerne i Theorem 3.1 kaldes et (reelt) vektorrum.

Theorem 3.1 (reformulering)

Mængden $V = \mathbb{R}^n$ er et (reelt) vektorrum.

Eksempel (Abstrakte vektorrum §7.1)

$$V = \mathbb{R}^{m \times n} = \{m \times n \text{ matricer med indgange fra } \mathbb{R}\}$$
$$V = \mathbf{F}(-\infty, \infty) = \{\text{funktioner } f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$$
$$V = \mathbf{P}_n = \{\text{polynomier } p(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n \text{ hvor } a_i \in \mathbb{R}\}$$

Vi holder os fra abstakte vektorrum!

Vi vil udelukkende fokusere på vektorrummet $V = \mathbb{R}^n$.

Men alt hvad vi skal lære om $\mathbb{R}^n$ (fx underrum, span, lineær uafhængighed, baser, ...) gælder også i et abstrakt vektorrum V.

Underrum

Følgende begreb er helt centralt:

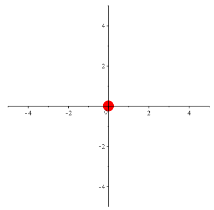
Definition 3.2 (Underrum)

En delmængde $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ kaldes et underrum såfremt:

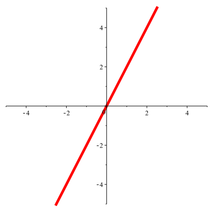
- $\mathbf{0} \in \mathcal{U}$
- For alle $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{U}$ gælder $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathcal{U}$
- For alle $s \in \mathbb{R}$ og $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ gælder $s\mathbf{u} \in \mathcal{U}$

Illustrationer af underrum af $\mathbb{R}^2$ og $\mathbb{R}^3$

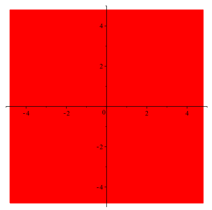
Der er tre typer underrum af $\mathbb{R}^2$:



$\mathcal{U} = \{(0,0)\}$

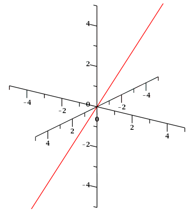


$\mathcal{U} =$ linie gennem $(0,0)$

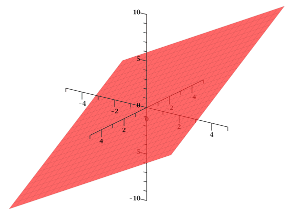


$\mathcal{U} = \mathbb{R}^2$

Foruden $\mathcal{U} = \{(0,0,0)\}$ og $\mathcal{U} = \mathbb{R}^3$ er der to typer underrum i $\mathbb{R}^3$:



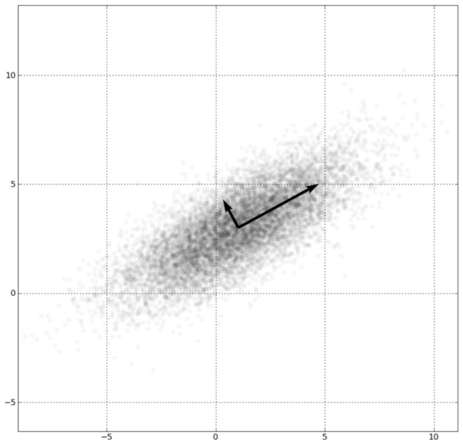
$\mathcal{U} =$ linie gennem $(0,0,0)$



$\mathcal{U} =$ plan gennem $(0,0,0)$

Hvad kan man fx bruge underrum til?

I *Principal Component Analysis (PCA)* tilnærmer man et højdimensional datasæt med et lavdimensionalt underrum.



http://en.wikipedia.org/wiki/Principal_component_analysis

Eksempel (Et underrum af $\mathbb{R}^4$)

Følgende delmængde af $\mathbb{R}^4$ er et underrum:

$$\mathcal{U} = \{\, (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 = 0 \text{ og } x_2 + x_3 + x_4 = 0 \,\}$$

En måde at indse dette på er ved at bemærke, at

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathcal{U} \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \mathbf{Ax} = \mathbf{0}$$

- Da $\mathbf{A0} = \mathbf{0}$ gælder $\mathbf{0} \in \mathcal{U}$.
- Hvis $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{U}$ gælder $\mathbf{Au} = \mathbf{0}$ og $\mathbf{Av} = \mathbf{0}$. Matrixregning giver
$$\mathbf{A}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathbf{Au} + \mathbf{Av} = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}\,,$$
og dermed gælder $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathcal{U}$.
- Lad $s \in \mathbb{R}$. Hvis $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ gælder $\mathbf{Au} = \mathbf{0}$. Matrixregning giver
$$\mathbf{A}(s\mathbf{u}) = s\mathbf{Au} = s\mathbf{0} = \mathbf{0}\,,$$
og dermed gælder $s\mathbf{u} \in \mathcal{U}$.

Span

Definition 3.3 (Span af vektorer)

Lad $\mathcal{S} = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ være en mængde af vektorer i $\mathbb{R}^n$. Sæt

$$\text{span}\,\mathcal{S} = \text{span}\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\} := \{\, x_1\mathbf{v}_1 + \cdots + x_k\mathbf{v}_k \mid x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R} \,\},$$

dvs. $\text{span}\,\mathcal{S}$ er mængden af alle linearkombinationer af $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$.
Man definerer $\text{span}\,\emptyset = \{\mathbf{0}\}$.

Eksempel (Span) 1/3

Betragt i $\mathbb{R}^3$ vektorerne

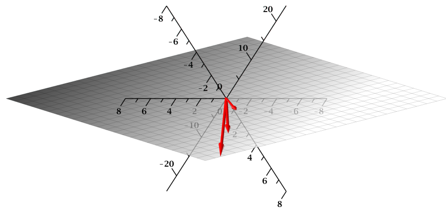
$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Vi vil undersøge om vektorerne

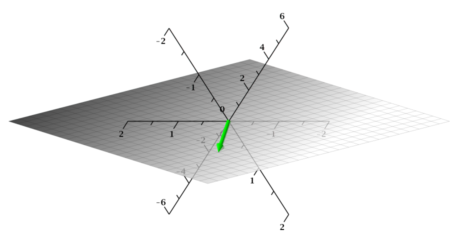
$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

tilhører mængden $\text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$.

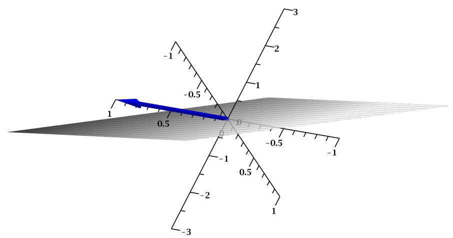
Illustration af eksemplet



$\mathcal{U} = \text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$



$\mathbf{u} \in \mathcal{U}$



$\mathbf{e}_1 \notin \mathcal{U}$

Eksempel (Span) 2/3

Vektoren $\mathbf{u}$ tilhører $\mathrm{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ hvis der findes $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ så

$$x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{u} \quad \text{dvs.} \quad x_1\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Dette kan også skrives som

$$\begin{pmatrix}1 & 4 & 7\\2 & 5 & 8\\3 & 6 & 9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Vi undersøger om ligningssystemet kan løses:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 4 & 7 & 1\\2 & 5 & 8 & 1\\3 & 6 & 9 & 1\end{array}\right) \xrightarrow{\text{Gauss-Jordan}} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & -1 & -1/3\\0 & 1 & 2 & 1/3\\0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right).$$

Der gælder altså fx

$$-\tfrac{1}{3}\mathbf{v}_1 + \tfrac{1}{3}\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}$$

Konklusion: $\mathbf{u} \in \mathrm{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ (endda er $\mathbf{u} \in \mathrm{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$).

Eksempel (Span) 3/3

Tilsvarende undersøges om vektoren $\mathbf{e}_1$ tilhører $\mathrm{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 4 & 7 & 1\\2 & 5 & 8 & 0\\3 & 6 & 9 & 0\end{array}\right) \xrightarrow{\text{Gauss-Jordan}} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & -1 & 0\\0 & 1 & 2 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right).$$

Ligningssystemet kan altså *ikke* løses.

Konklusion: $\mathbf{e}_1 \notin \mathrm{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$.

Eksemplet viser følgende:

Metode til at afgøre om en vektor tilhører et span

Lad $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$ og sæt $\mathbf{A} = (\mathbf{v}_1 \mid \cdots \mid \mathbf{v}_k)$. For en vektor $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ er følgende betingelser ækvivalente:

(i) $\mathbf{u}$ tilhører $\mathrm{span}\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$.

(ii) Ligningssystemet $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{u}$ har (mindst) en løsning.

Det nye (i) kan altså "oversættes" til det velkendte (ii).

Theorem 3.2 (Span er et underrum)

Lad $\mathcal{S} = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ være en mængde af vektorer i $\mathbb{R}^n$. Mængden $\mathrm{span}\,\mathcal{S} = \mathrm{span}\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ er et underrrum af $\mathbb{R}^n$.

Definition 3.4

Lad $\mathcal{U}$ være et underrum af $\mathbb{R}^n$ og lad $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{U}$ være en endelig delmængde. Man siger, at $\mathcal{S}$ udspænder $\mathcal{U}$ hvis $\mathrm{span}\,\mathcal{S} = \mathcal{U}$.

Eksempel (Tre vektorer der udspænder $\mathbb{R}^3$) 1/2

Vi har set, at vektorerne

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix}$$

ikke udspænder $\mathcal{U} = \mathbb{R}^3$ (de udspænder en plan), men det gør faktisk

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Eksempel (Tre vektorer der udspænder $\mathbb{R}^3$) 2/2

Bevis: Vi skal godtgøre, at uanset hvilket $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$ man vælger, så har ligningssystemet

$$\begin{pmatrix}1 & 4 & 1\\2 & 5 & 0\\3 & 6 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}.$$

mindst en løsning. Det har faktisk en entydig løsning:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 4 & 1 & u_1\\2 & 5 & 0 & u_2\\3 & 6 & 0 & u_3\end{array}\right) \xrightarrow{\text{Gauss-Jordan}} \left(\begin{array}{ccc|r}1 & 0 & 0 & -2u_2 + \frac{5}{3}u_3\\0 & 1 & 0 & u_2 - \frac{2}{3}u_3\\0 & 0 & 1 & u_1 - 2u_2 + u_3\end{array}\right).$$

dvs.

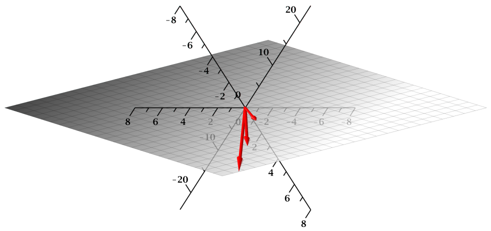
$$x_1 = -2u_2 + \tfrac{5}{3}u_3, \quad x_2 = u_2 - \tfrac{2}{3}u_3, \quad x_3 = u_1 - 2u_2 + u_3$$

Bemærkning: Vi har altså $\mathrm{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{e}_1\} = \mathbb{R}^3$. Hvis $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ er en vilkårlig vektor, så gælder derfor også $\mathrm{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{e}_1, \mathbf{w}\} = \mathbb{R}^3$.

Vi har tidligere set, at de tre vektorer

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$$

udspænder en ("2-dimensional") plan i $\mathbb{R}^3$:



Dette skyldes, at (fx) $\mathbf{v}_3$ ligger i planen udspændt af $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$, dvs.

$$\mathbf{v}_3 \in \operatorname{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}.$$

I en vis forstand er $\mathbf{v}_3$ altså "overflødig". I denne situation siges vektorerne $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ at være lineært afhængige.

Definition 3.5 (Lineær (u)afhængighed)

Et sæt $\mathcal{S} = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ af vektorer i $\mathbb{R}^n$ kaldes lineært uafhængigt hvis den eneste løsning til ligningen

$$x_1\mathbf{v}_1 + \cdots + x_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$$

er $x_1 = \cdots = x_k = 0$. I modsat fald kaldes $\mathcal{S}$ for lineært afhængigt.

Eksempel (Lineær (u)afhængighed) 1/3

Vi vil undersøge, om vektorerne

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$$

er lineært (u)afhængige? Vi skal altså interesse os for løsningerne $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ til ligningen:

$$x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0} \quad \text{dvs.} \quad x_1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Eksempel (Lineær (u)afhængighed) 2/3

Dette kan også skrives som

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Udregningen

$$(\mathbf{v}_1|\mathbf{v}_2|\mathbf{v}_3|\mathbf{0}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 7 & 0 \\ 2 & 5 & 8 & 0 \\ 3 & 6 & 9 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{Gauss-Jordan}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

viser, at ligningen $x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$ har mange løsninger, fx

$$\mathbf{v}_1 - 2\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}.$$

Konklusion: $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ lineært *afhængige*.

Bemærkning: Hvis $\mathbf{v}_4 \in \mathbb{R}^3$ er en vilkårlig vektor, da er $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ også lineært *afhængige* fordi

$$\mathbf{v}_1 - 2\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 + 0\mathbf{v}_4 = \mathbf{0}.$$

Eksempel (Lineær (u)afhængighed) 3/3

Vektorerne

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

er lineært *uafhængige* fordi udregningen

$$(\mathbf{v}_1|\mathbf{v}_2|\mathbf{0}) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{Gauss-Jordan}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

viser, at ligningen $x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$ kun har løsningen $x_1 = x_2 = 0$.

Eksemplet viser følgende:

Metode til at afgøre lineær (u)afhængighed

Lad $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$ og sæt $\mathbf{A} = (\mathbf{v}_1 \mid \cdots \mid \mathbf{v}_k)$ (en $n \times k$ matrix). Da er følgende betingelser ækvivalente:

(i) Vektorerne $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ er lineært *uafhængige*.

(ii) Ligningssystemet $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ har kun løsningen $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

En alternativ formulering af metoden er følgende (pga. Theorem 1.6):

Theorem 3.4 (Lineær uafhængighed og rank)

Lad $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$ og sæt $\mathbf{A} = (\mathbf{v}_1 \mid \cdots \mid \mathbf{v}_k)$ (en $n \times k$ matrix).
Da er følgende betingelser ækvivalente:

(i) Vektorerne $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ er lineært *uafhængige*.

(ii) $\operatorname{rank} \mathbf{A} = k$.

Følgende er en konsekvens af Theorem 3.4 (med $k = n$):

Theorem 3.5 (Lineær uafhængighed og invertibilitet)

Lad $n \times n$ matrix er invertibel hvis og kun hvis søjlerne (eller rækkerne) er lineært *uafhængige*.

En anden konsekvens af Theorem 3.4 er:

Theorem 3.6 (Antallet af lineært uafhængige vektorer)

Hvis $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$ er lineært uafhængige, da er $k \leqslant n$.

Eksempel (Lineær afhængighed)

Følgende 5 vektorer i $\mathbb{R}^4$ må nødvendigvis være lineært *afhængige*:

$$\begin{pmatrix} 0.96 \\ 0.28 \\ 0.12 \\ 0.27 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.56 \\ 0.80 \\ 0.65 \\ 0.96 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.61 \\ 0.02 \\ 0.35 \\ 0.57 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.70 \\ 0.62 \\ 0.75 \\ 0.68 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.46 \\ 0.42 \\ 0.85 \\ 0.19 \end{pmatrix}.$$

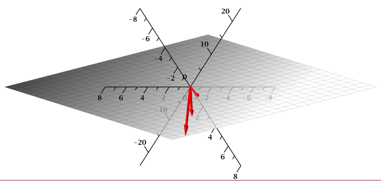
En alternativ karakterisering af lineær (u)afhængighed:

Theorem 3.3 (Lineær afhængighed og span)

Lad $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$. Da er følgende betingelser ækvivalente:

(i) Vektorerne $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ er lineært *afhængige*.

(ii) Der findes et index i så $\mathbf{v}_i \in \operatorname{span}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}_{i+1}, \dots, \mathbf{v}_k\}$.



$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{v}_3 \in \operatorname{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$$

Baser

Definition 3.6 (Basis for underrum)

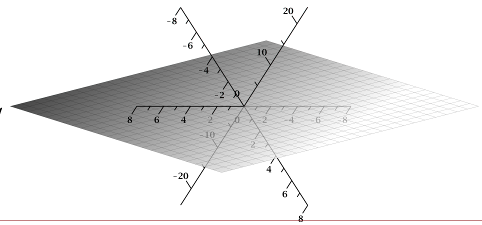
Lad $\mathcal{U}$ være et underrum af $\mathbb{R}^n$. En endelig delmængde af $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{U}$ kaldes en basis for $\mathcal{U}$ hvis:

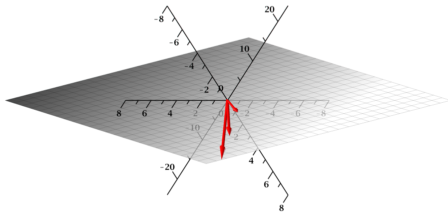
$\mathcal{B}$ er lineært uafhængig og $\operatorname{span} \mathcal{B} = \mathcal{U}$.

Vi har tidligere set, at de tre vektorer

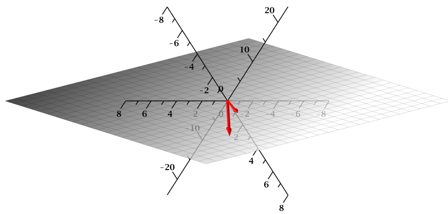
$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$$

udspænder en plan $\mathcal{U} = \operatorname{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ i $\mathbb{R}^3$:

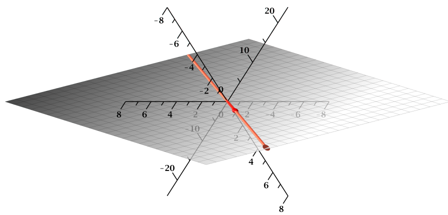




$\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$	
Er $\mathcal{B}$ linært uafh. ?	Nej
Er $\operatorname{span} \mathcal{B} = \mathcal{U}$?	Ja
Er $\mathcal{B}$ basis for $\mathcal{U}$?	Nej



$\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$	
Er $\mathcal{B}$ linært uafh. ?	Ja
Er $\operatorname{span} \mathcal{B} = \mathcal{U}$?	Ja
Er $\mathcal{B}$ basis for $\mathcal{U}$?	Ja



$\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1\}$	
Er $\mathcal{B}$ linært uafh. ?	Ja
Er $\operatorname{span} \mathcal{B} = \mathcal{U}$?	Nej
Er $\mathcal{B}$ basis for $\mathcal{U}$?	Nej

Bemærkninger

Hvad har vi lært?

Antag at vi har givet en endelig delmængde $\mathcal{B}$ af et underrum $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$.

Vi har lært metoder til at afgøre:

- Om $\mathcal{B}$ er lineært uafhængig ?
- Om $\operatorname{span} \mathcal{B} = \mathcal{U}$?

Og vi kan derfor også afgøre:

- Om $\mathcal{B}$ er en basis for $\mathcal{U}$?

Hvad mangler vi at lære?

Lad $\mathcal{U}$ være et underrum af $\mathbb{R}^n$.

- Kan vi være sikre på, at $\mathcal{U}$ har en basis ?
- Hvordan finder vi i givet fald en basis $\mathcal{B}$ for $\mathcal{U}$?

KØBENHAVNS UNIVERSITET INSTITUT FOR MATEMATISKE FAG

Standardbasen for $\mathbb{R}^n$

Faktum (Eksistens af baser)

Ethvert underrum $\mathcal{U}$ af $\mathbb{R}^n$ har en basis.

Hvis $\mathcal{U} \neq \{\mathbf{0}\}$, så har $\mathcal{U}$ endda uendeligt mange forskellige baser.

Underrummet $\mathcal{U} = \mathbb{R}^n$ har en særlig pæn basis:

Definition (Standardbasen for $\mathbb{R}^n$)

Standardbasen (som *er* en basis!) for $\mathbb{R}^n$ er $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ hvor

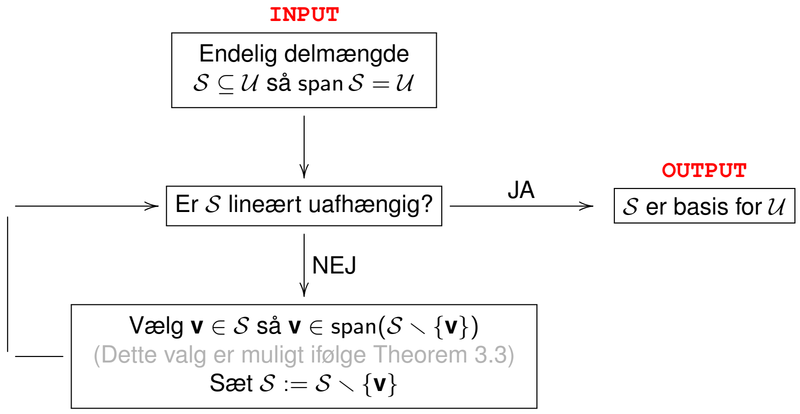
$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vi skal senere lære hvordan man konkret finder baser for diverse typer af underrum af $\mathbb{R}^n$. Vi nævner her to generelle algoritmer, som vi dog ikke vil bruge ud over i denne forelæsning.

KØBENHAVNS UNIVERSITET INSTITUT FOR MATEMATISKE FAG

Konstruktion af baser: Udtyndingsalgoritmen

Indholdet af Theorem 3.7(a) er en algoritme til at udtynde en endelig udspændende mængde $\mathcal{S}$ for et underrum $\mathcal{U}$ til en basis:

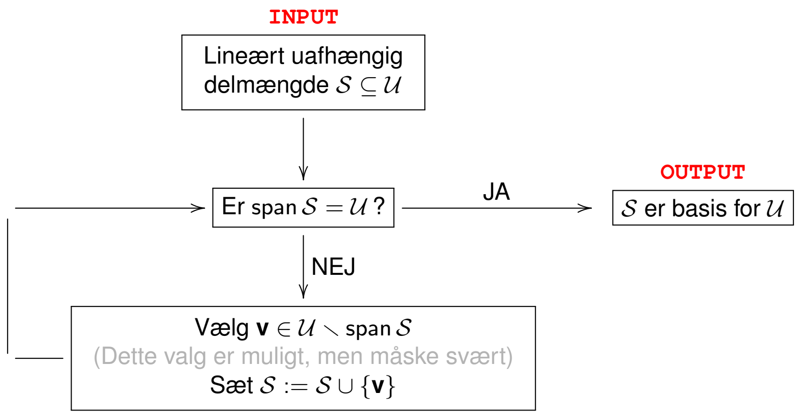


Vi vil ikke bruge Udtyndingsalgoritmen. Vi vil lære en anden og bedre algoritme til at konstruere en basis for søjlerummet af en matrix.

KØBENHAVNS UNIVERSITET INSTITUT FOR MATEMATISKE FAG

Konstruktion af baser: Suppleringsalgoritmen

Indholdet af Theorem 3.7(b) er en algoritme til at supplere en lineært uafhængig delmængde $\mathcal{S}$ af et underrum $\mathcal{U}$ til en basis:



Vi vil generelt ikke bruge Suppleringsalgoritmen. Vi giver dog alligevel et enkelt eksempel til at illustrere idéen i algoritmen.

Eksempel (Suppleringsalgoritmen) 1/2

Vi har vist, at følgende er et underrum af $\mathbb{R}^4$:

$$\mathcal{U} = \{\,(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 = 0 \;\text{ og }\; x_2 + x_3 + x_4 = 0\,\}$$

Vi vil bruge Suppleringsalgoritmen til at finde en basis for $\mathcal{U}$.

- **INPUT**: $\mathcal{S} = \emptyset$ er en lineært uafhængig delmængde af $\mathcal{U}$.
- Er $\mathcal{U} = \operatorname{span}\emptyset$?
  NEJ: $\operatorname{span}\emptyset = \{\mathbf{0}\}$ og fx er $\mathbf{v}_1 = (1,-1,1,0) \in \mathcal{U} \setminus \{\mathbf{0}\}$.
- Sæt $\mathcal{S} = \emptyset \cup \{\mathbf{v}_1\} = \{(1,-1,1,0)\}$.
  Er $\mathcal{U} = \operatorname{span}\{(1,-1,1,0)\}$?
  NEJ: Fx er $\mathbf{v}_2 = (1,-1,0,1) \in \mathcal{U} \setminus \operatorname{span}\{(1,-1,1,0)\}$.
- Sæt $\mathcal{S} = \{(1,-1,1,0)\} \cup \{\mathbf{v}_2\} = \{(1,-1,1,0),(1,-1,0,1)\}$.
  Er $\mathcal{U} = \operatorname{span}\{(1,-1,1,0),(1,-1,0,1)\}$?
  JA: Forklaring følger...

Eksempel (Suppleringsalgoritmen) 2/2

Lad $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathcal{U}$, dvs. der gælder

$$(*) \quad \begin{cases} x_1 + x_2 \phantom{{}+x_3+x_4} = 0 \\ \phantom{x_1+{}} x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Udregningen

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{Gauss-Jordan}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

viser, at samtlige løsninger til ligningssystemet $(*)$ er

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad s, t \in \mathbb{R}$$

Derfor gælder

$$\mathcal{U} = \operatorname{span}\{(1,-1,1,0),(1,-1,0,1)\}.$$

- **OUTPUT**: Basis $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\} = \{(1,-1,1,0),(1,-1,0,1)\}$ for $\mathcal{U}$.

Dimension

Antallet af vektorer i en basis for et underrum er entydigt bestemt:

Theorem 3.9 (Om antallet af vektorer i en basis)

Lad $\mathcal{U}$ være et underrum af $\mathbb{R}^n$. Hvis

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m\} \qquad \text{og} \qquad \mathcal{C} = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$$

begge er baser for $\mathcal{U}$, så er $m = n$.

...og dette antal vektorer er dimensionen af underrummet:

Definition 3.8 (Dimension af underrum)

Lad $\mathcal{U}$ være et underrum af $\mathbb{R}^n$. Antallet af vektorer i en basis for $\mathcal{U}$ kaldes dimensionen af $\mathcal{U}$ og skrives $\dim \mathcal{U}$. Vi definerer $\dim\{\mathbf{0}\} = 0$.

Eksempel (Dimensionen af $\mathbb{R}^n$)

Vektorrummet $\mathcal{U} = \mathbb{R}^n$ har en basis med n vektorer, nemlig standardbasen $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$, og derfor gælder $\dim \mathbb{R}^n = n$.

Eksempel (Et 2-dimensionalt underrum af $\mathbb{R}^4$)

Vi har tidligere vist, at

$$\mathcal{B} = \{(1,-1,1,0),(1,-1,0,1)\}$$

er en basis (blandt mange mulige) for underrummet

$$\mathcal{U} = \{\,(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 = 0 \;\text{ og }\; x_2 + x_3 + x_4 = 0\,\}.$$

Da $\mathcal{B}$ indeholder to vektorer, er

$$\dim \mathcal{U} = 2 \qquad (\text{dvs. } \mathcal{U} \text{ er en plan i } \mathbb{R}^4)$$

Hvis dimensionen af et underrum $\mathcal{U}$ er kendt, så er det lettere at afgøre, om en forelagt delmængde $\mathcal{B}$ er en basis for $\mathcal{U}$.

Theorem 3.10 (Kriterium for at være en basis)

Lad $\mathcal{U}$ være et underrum af $\mathbb{R}^n$ med $\dim \mathcal{U} = k$. Lad $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ være en delmængde af $\mathcal{U}$ indeholdende k vektorer.

- a) Hvis $\mathcal{B}$ er lineært uafhængigt, da er $\mathcal{B}$ en basis for $\mathcal{U}$.
- b) Hvis $\operatorname{span}\mathcal{B} = \mathcal{U}$, da er $\mathcal{B}$ en basis for $\mathcal{U}$.

Eksempel (Check af basis vha. Theorem 3.10)

Vi har tidligere vist, at der for underrummet

$$\mathcal{U} = \{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 = 0 \text{ og } x_2 + x_3 + x_4 = 0 \}$$

gælder $\dim \mathcal{U} = 2$. Betragt følgende 2 vektorer:

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{U}\,.$$

For at afgøre om $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ er en basis for $\mathcal{U}$, er det ifølge Theorem 3.10 nok at checke, om $\mathbf{u}_1$ og $\mathbf{u}_2$ er lineært uafhængige.

Og det er de, fordi udregningen

$$\mathbf{A} = (\mathbf{u}_1 \mid \mathbf{u}_2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Gauss}-\text{Jordan}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

viser, at $\operatorname{rank} \mathbf{A} = 2$, jfr. Theorem 3.4.