Forelæsning 10: Egenværdier og egenvektorer

LinAlgDat 2021/2022

Henrik Holm og Henrik L. Pedersen
Institut for Matematiske Fag
holm@math.ku.dk og henrikp@math.ku.dk

Oversigt

1. Egenværdier og egenvektorer
2. Algebraisk og geometrisk multiplicitet (af egenværdier)
3. Cayley–Hamilton's sætning

Egenværdier og egenvektorer

Hvad kan man fx bruge egenværdier og egenvektorer til?

- Google's page rank ($\mathbf{Ax} = \mathbf{x}$ hvor $\mathbf{A}$ er linkmatricen)
- Diagonalisering af matricer (mere om dette næste gang...)

Definition 6.1 (Egenværdi og egenvektor)

Lad $\mathbf{A}$ være en $n \times n$ matrix. Et tal λ kaldes en egenværdi for $\mathbf{A}$ hvis der findes en vektor $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ som opfylder

$$\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$$

I det tilfælde kaldes $\mathbf{x}$ en egenvektor for $\mathbf{A}$ hørende til egenværdien λ.

Bemærkning. Ligningen $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$ udtrykker, at vektorerne $\mathbf{Ax}$ og $\mathbf{x}$ er proportionale (dvs. peger i samme eller modsat retning).

Betragt den lineære transformation $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ givet ved

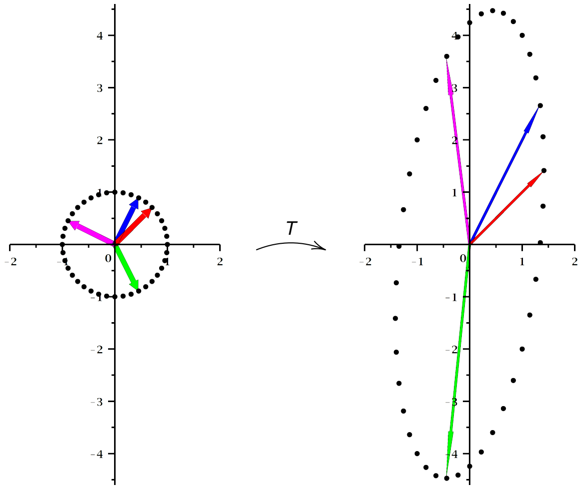
$$T(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} \qquad \text{hvor} \qquad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{x}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_3 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_4 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$



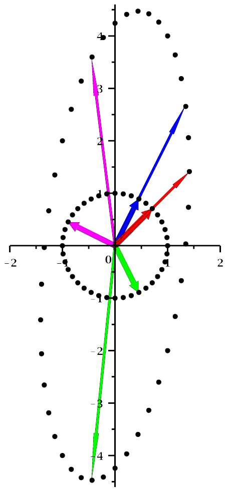
De to figurer lagt oven i hinanden:

$$\mathbf{x}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}\mathbf{x}_1 = 2\mathbf{x}_1$$

$$\mathbf{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}\mathbf{x}_2 = 3\mathbf{x}_2$$

$$\mathbf{x}_3 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}\mathbf{x}_3 \neq \lambda\mathbf{x}_3$$

$$\mathbf{x}_4 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}\mathbf{x}_4 \neq \lambda\mathbf{x}_4$$



$\mathbf{x}_1$ er egenvektor for $\mathbf{A}$ med egenværdi $\lambda = 2$.
$\mathbf{x}_2$ er egenvektor for $\mathbf{A}$ med egenværdi $\lambda = 3$.
$\mathbf{x}_3$ og $\mathbf{x}_4$ er ikke egenvektorer for $\mathbf{A}$.

Illustrationerne ovenfor bekræftes af følgende udregninger:

Eksempel (Egenværdi og egenvektor)

Betragt matricen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Der gælder

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Dvs.

- $\lambda = 2$ er egenværdi for $\mathbf{A}$ med tilhørende egenvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- $\lambda = 3$ er egenværdi for $\mathbf{A}$ med tilhørende egenvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Spørgsmål. Hvordan finder man egenværdierne for en matrix?

Man skal bruge:

Definition 6.2 (karakteristisk polynomium)

Det karakteristiske polynomium p for en $n \times n$ matrix $\mathbf{A}$ er polynomiet

$$p(\lambda) = \det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}).$$

Her er $\mathbf{I}$ enhedsmatricen af størrelse $n \times n$.

$$p(\lambda) = \det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \det\begin{pmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{pmatrix}$$
$$= \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + c_1\lambda + c_0$$

Bemærkning. $p(\lambda)$ er et polynomium af grad n.

Metode til bestemmelse af egenværdier

Lad **A** være en $n \times n$ matrix. Egenværdierne for **A** (som kan være reelle eller komplekse) bestemmes således:

1. Udregn det karakteristiske polynomium:
$$p(\lambda) = \det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}).$$
2. Løs den karakteristiske ligning:
$$p(\lambda) = \det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0.$$

Eksempel (Bestemmelse af egenværdier, 2×2)

Vi vil bestemme egenværdierne for matricen
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

1. Det karakteristiske polynomium er
$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) \\ &= \det \begin{pmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ 2 & \lambda - 4 \end{pmatrix} \\ &= (\lambda - 1)(\lambda - 4) + 2 \\ &= \lambda^2 - 5\lambda + 6\,. \end{aligned}$$
2. Den karakteristiske ligning $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$ løses:
$$\lambda = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \begin{cases} 3 \\ 2 \end{cases}$$

Egenværdierne for **A** er altså $\lambda = 2$ og $\lambda = 3$.

Eksempel (Bestemmelse af egenværdier, 2×2)

Vi vil bestemme egenværdierne for matricen
$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{pmatrix}.$$

1. Det karakteristiske polynomium er
$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{B}) \\ &= \det \begin{pmatrix} \lambda - 2 & -3 \\ -3 & \lambda - 10 \end{pmatrix} \\ &= (\lambda - 2)(\lambda - 10) - 9 \\ &= \lambda^2 - 12\lambda + 11\,. \end{aligned}$$
2. Den karakteristiske ligning $\lambda^2 - 12\lambda + 11 = 0$ løses:
$$\lambda = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 44}}{2} = \begin{cases} 11 \\ 1 \end{cases}$$

Egenværdierne for **B** er altså $\lambda = 1$ og $\lambda = 11$.

Eksempel (Bestemmelse af egenværdier, 3×3) 1/2

Vi vil bestemme egenværdierne for matricen
$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Det karakteristiske polynomium kan fx udregnes således:
$$\begin{aligned} p(\lambda) = \det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{C}) &= \det \begin{pmatrix} \lambda - 1 & 1 & 2 \\ -1 & \lambda + 1 & 2 \\ 1 & 1 & \lambda + 0 \end{pmatrix} \quad \left[\begin{array}{c}\text{lav rækkeop.} \\ \mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_2 \to \mathbf{r}_2\end{array}\right] \\ &= \det \begin{pmatrix} \lambda - 1 & 1 & 2 \\ 0 & \lambda + 2 & \lambda + 2 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix} \\ &= (\lambda + 2) \det \begin{pmatrix} \lambda - 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix} \quad \left[\begin{array}{c}\text{nu udvikles} \\ \text{efter 1. søjle}\end{array}\right] \\ &= (\lambda + 2)\left((\lambda - 1) \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} + 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

Eksempel (Bestemmelse af egenværdier, 3×3) 2/2

...og vi regner videre:

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= (\lambda+2)\left((\lambda-1)\det\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & \lambda\end{pmatrix} + 1\cdot\det\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}\right)\\ &= (\lambda+2)\left((\lambda-1)^2-1\right) = (\lambda+2)\left(\lambda^2-2\lambda\right)\\ &= (\lambda+2)\lambda(\lambda-2) \qquad \text{[gang } \textit{ikke} \text{ ud]}\end{aligned}$$

2. Den karakteristiske ligning $(\lambda+2)\lambda(\lambda-2)=0$ løses nu nemt:

$$(\lambda+2)\lambda(\lambda-2)=0 \iff \begin{cases}\lambda=-2 & \text{eller}\\ \lambda=0 & \text{eller}\\ \lambda=2\end{cases}$$

Egenværdierne for $\mathbf{C}$ er altså $\lambda=-2$ og $\lambda=0$ og $\lambda=2$.

Spørgsmål. Hvordan finder man egenvektorerne for en matrix?

Metode til bestemmelse af egenvektorer

Lad $\mathbf{A}$ være en $n\times n$ matrix.

- Bestem først alle (reelle eller komplekse) egenværdier for $\mathbf{A}$.

For hver egenværdi λ for $\mathbf{A}$ er egenvektorerne hørende til λ netop ikke-nul løsningerne $\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$ til ligningen

$$(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{x}=\mathbf{0}.$$

For at finde en egenvektor for $\mathbf{A}$ hørende til λ skal man altså:

1. Lave elementære rækkeoperationer på ligningssystemet

$$(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{x}=\mathbf{0}.$$

2. Og heraf aflæse en (eller samtlige) løsning(er) $\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$.

Eksempel (Bestemmelse af egenvektorer, 2×2)

For matricen

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -2 & 4\end{pmatrix}$$

fandt vi tidligere de to egenværdier $\lambda=2$ og $\lambda=3$.

Vi finder nu en egenvektor for $\mathbf{A}$ hørende til fx egenværdien $\lambda=2$:

1. Vi skal løse ligningssystemet $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{x}=\mathbf{0}$, dvs.

$$(\mathbf{A}-2\mathbf{I})\mathbf{x}=\mathbf{0} \qquad \text{altså} \qquad \begin{pmatrix}-1 & 1\\ -2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}.$$

Vi laver elementære rækkeoperationer på totalmatricen:

$$\left(\begin{array}{cc|c}-1 & 1 & 0\\ -2 & 2 & 0\end{array}\right) \xrightarrow{\text{Gauss-Jordan}} \left(\begin{array}{cc|c}1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right).$$

2. Løsningerne er

$$\mathbf{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}. \quad \text{Fx giver } t=1 \text{ egenvektoren } \mathbf{x}=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}.$$

Eksempel (Bestemmelse af egenvektorer, 3×3) 1/2

For matricen

$$\mathbf{C}=\begin{pmatrix}1 & -1 & -2\\ 1 & -1 & -2\\ -1 & -1 & 0\end{pmatrix}$$

fandt vi tidligere de to egenværdier $\lambda=-2$ og $\lambda=0$ og $\lambda=2$.

Vi finder nu en egenvektor for $\mathbf{C}$ hørende til fx egenværdien $\lambda=-2$:

1. Vi skal løse ligningssystemet $(\mathbf{C}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{x}=\mathbf{0}$, dvs.

$$(\mathbf{C}+2\mathbf{I})\mathbf{x}=\mathbf{0} \qquad \text{altså} \qquad \begin{pmatrix}3 & -1 & -2\\ 1 & 1 & -2\\ -1 & -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}.$$

Vi laver elementære rækkeoperationer på totalmatricen:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}3 & -1 & -2 & 0\\ 1 & 1 & -2 & 0\\ -1 & -1 & 2 & 0\end{array}\right) \xrightarrow{\text{Gauss-Jordan}} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right).$$

Eksempel (Bestemmelse af egenvektorer, 3×3) 2/2

2. Løsningerne er

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad \text{Fx giver } t=1 \text{ egenvektoren } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vi gør prøve: Gælder der

$$\mathbf{Cx} = \lambda\mathbf{x} = -2\mathbf{x}\,?$$

Ja, fordi

$$\mathbf{Cx} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -2\mathbf{x}.$$

Algebraisk og geometrisk multiplicitet

Hvorfor skal vi lære disse begreber?

Metode til at afgøre, om en matrix KAN diagonaliseres

En matrix kan diagonaliseres netop hvis de geometriske og algebraiske multipliciteter for dens egenværdier er parvist ens.

Vi lærer først om diagonalisering næste gang...

Lad $\mathbf{A}$ være en $n\times n$ matrix. Det karakteristiske polynomium

$$p(\lambda) = \det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})$$

er et n'te grads polynomium. Ifølge Algebraens fundamentalsætning (Theorem 8.5 i §8.4) kan $p(\lambda)$ faktoriseres:

$$p(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{a_{\lambda_1}}(\lambda-\lambda_2)^{a_{\lambda_2}}\cdots(\lambda-\lambda_k)^{a_{\lambda_k}}$$

hvor

- $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_k$ er de indbyrdes *forskellige* komplekse rødder i $p(\lambda)$ (altså egenværdierne for matricen $\mathbf{A}$), og
- $a_{\lambda_1} + a_{\lambda_2} + \cdots + a_{\lambda_k} = n$.

Definition 6.3 (Algebraisk multiplicitet af egenværdi)

Lad $\mathbf{A}$ være en $n\times n$ matrix og lad $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_k$ være de indbyrdes forskellige (komplekse) egenværdier for $\mathbf{A}$.

Tallet a_{λ_i} kaldes den algebraiske multiplicitet af egenværdien λ_i.

Eksempel (Algebraisk multiplicitet)

1. For matricen (fra tidligere eksempel)

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{er} \quad \begin{aligned} p(\lambda) &= \lambda^3 - 4\lambda \\ &= (\lambda+2)^1(\lambda-0)^1(\lambda-2)^1 \end{aligned}$$

Dermed gælder:

- $\lambda=-2$ er egenværdi med algebraisk multiplicitet $a_{-2}=1$.
- $\lambda=0$ er egenværdi med algebraisk multiplicitet $a_0=1$.
- $\lambda=2$ er egenværdi med algebraisk multiplicitet $a_2=1$.

2. For matricen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & -4 & 4 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{er} \quad \begin{aligned} p(\lambda) &= \lambda^3 + \lambda^2 - 8\lambda - 12 \\ &= (\lambda+2)^2(\lambda-3)^1 \end{aligned}$$

Dermed gælder:

- $\lambda=-2$ er egenværdi med algebraisk multiplicitet $a_{-2}=2$.
- $\lambda=3$ er egenværdi med algebraisk multiplicitet $a_3=1$.

Lad **A** være en $n \times n$ matrix. Mængden af alle egenvektorer for **A** hørende til en egenværdi λ er jo netop mængden

$$\mathrm{null}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) \setminus \{\mathbf{0}\}\,.$$

Definition 6.4 (Egenrum) – *rettet ift. Hardy's bog!*

Lad **A** være en $n \times n$ matrix og lad λ være en egenværdi for **A**. Underrummet

$$E_\lambda := \mathrm{null}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$$

kaldes egenrummet for **A** hørende til egenværdien λ.

Definition 6.5 (Geometrisk multiplicitet af egenværdi)

Lad **A** være en $n \times n$ matrix og lad λ være en egenværdi for **A**. Tallet

$$g_\lambda := \dim E_\lambda = \dim \mathrm{null}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$$

kaldes den geometriske multiplicitet af egenværdien λ.

Bemærkning. Husk, at dimensionen af $\mathrm{null}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ netop er nullity af matricen $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ (dvs. antallet af frie variable, som kan aflæses fra den reducerede rækkeechelonform for $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$).

Eksempel (Geometrisk multiplicitet)

For matricen (fra tidligere eksempel)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & -4 & 4 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{er} \quad \begin{aligned} p(\lambda) &= \lambda^3 + \lambda^2 - 8\lambda - 12 \\ &= (\lambda+2)^2(\lambda-3) \end{aligned}$$

så egenværdierne er $\lambda = -2$ og $\lambda = 3$.

- For $\lambda = -2$ er $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I} = \mathbf{A} + 2\mathbf{I}$ og man har

$$\mathbf{A} + 2\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 3 & -2 & 4 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Gauss–Jordan}} \begin{pmatrix} 1 & -2/3 & 4/3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Den geometriske multiplicitet af egenværdien $\lambda = -2$ er $g_{-2} = 2$.

- For $\lambda = 3$ er $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I} = \mathbf{A} - 3\mathbf{I}$ og man har

$$\mathbf{A} - 3\mathbf{I} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 4 \\ 3 & -7 & 4 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Gauss–Jordan}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Den geometriske multiplicitet af egenværdien $\lambda = 3$ er $g_3 = 1$.

For matricen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & -4 & 4 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

med egenværdierne $\lambda = -2$ og $\lambda = 3$ har vi set, at de geometriske og algebraiske multipliciteter stemmer overens:

- For $\lambda = -2$ gælder $g_{-2} = 2 = a_{-2}$
- For $\lambda = 3$ gælder $g_3 = 1 = a_3$

Generelt gælder kun en *ulighed* (og ikke lighed) mellem g_λ og a_λ:

Geometrisk versus algebraisk multiplicitet

Lad λ være en egenværdi for en $n \times n$ matrix **A**. Da gælder:

$$g_\lambda \leqslant a_\lambda$$

Cayley–Hamilton's sætning

Theorem 6.1 (Cayley–Hamilton)

Lad **A** være en $n \times n$ matrix med karakterisktisk polynomium

$$p(\lambda) = \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + c_1\lambda + c_0\,.$$

Da gælder:

$$p(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^n + c_{n-1}\mathbf{A}^{n-1} + \cdots + c_1\mathbf{A} + c_0\mathbf{I} = \mathbf{0}\,.$$

I ord: En $n \times n$ matrix er rod i sit eget karakteristiske polynomium.

Eksempel (Cayley–Hamilton) 1/2

For matricen (fra tidligere eksempel)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & -4 & 4 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{er} \quad p(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2 - 8\lambda - 12\,.$$

Cayley–Hamilton's sætning fortæller, at der gælder:

$$p(\mathbf{A}) \;=\; \mathbf{A}^3 + \mathbf{A}^2 - 8\mathbf{A} - 12\mathbf{I} \;=\; \mathbf{0}$$

dvs.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & -4 & 4 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}^3 + \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & -4 & 4 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}^2 - 8\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & -4 & 4 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix} - 12\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Eksempel (Cayley–Hamilton) 2/2

Ved at gange Cayley–Hamilton ligningen

$$\mathbf{A}^3 + \mathbf{A}^2 - 8\mathbf{A} - 12\mathbf{I} \;=\; \mathbf{0}$$

med $\mathbf{A}^{-1}$ fås et beregningsmæssigt effektivt udtryk for den inverse:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{-1} &= \frac{1}{12}\{\mathbf{A}^2 + \mathbf{A} - 8\mathbf{I}\} \\ &= \frac{1}{12}\left\{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & -4 & 4 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}^2 + \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & -4 & 4 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix} - 8\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right\} \\ &= \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 0 & -4 & 8 \\ 6 & -10 & 8 \\ 6 & -4 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Theorem 6.2 (Egenværdier of invertibilitet)

En $n \times n$ matrix $\mathbf{A}$ er invertibel (dvs. $\mathbf{A}^{-1}$ findes) netop hvis $\lambda = 0$ ikke er en egenværdi for $\mathbf{A}$.