LinAlgDat — Projekt B

Helga Rykov Ibsen <mcv462> Hold 2

20. maj 2022

1 Opgave 1

(a)

Vi bestemmer matricen $\mathbf{A_a}$ som opfylder $\mathbf{T_a(x)}$=$\mathbf{A_a x}$ for alle $\mathbf{x} \in \mathbf{R^3}$:

$$A_a = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & a \end{bmatrix}$$

(b)

Vi skal vise at $\mathbf{T_a}$ er bijektiv, dvs. både injektiv og surjektiv, hvis $\mathbf{a} \neq 0$.

Ifølge definitionen (cf. f6-handouts) er matricen bijektiv, hvis den er invertibel. Vi skal med andre ord vise at der finders den inverse lineære transformation $\mathbf{T_a}^{\mathbf{-1}}$.

Vi anvender metoden COMPUTATION (s. 78 i bogen) og bestemmer $\mathbf{T_a}^{\mathbf{-1}}$ ved at bruge matricen $\mathbf{A_a}$ fra (a):

1.rækkeoperation: $(-3)r_1 + r_2 \to r_2$:

$$[A_a|I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & a & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & a & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

2.rækkeoperation: $(-1)r_1 + r_3 \to r_3$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a-1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

3.rækkeoperation: $(-1)r_2 + r_3 \to r_3$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 2 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

4.rækkeoperation: $(1/a)r_3 \to r_3$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{a} & \frac{-1}{a} & \frac{1}{a} \end{array}\right]$$

5. og 6. rækkeoperationer: $r_3 + r_2 \rightarrow r_2$ og $r_2 + r_1 \rightarrow r_1$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2-3a}{a} & \frac{a-1}{a} & \frac{1}{a} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{a} & \frac{-1}{a} & \frac{1}{a} \end{array}\right] = [I|A_a^{-1}]$$

Som det tydeligt kan ses på den inverse matrice, er $\mathbf{A_a}^{\mathbf{-1}}$ defineret kun hvis $\mathbf{a} \neq 0$.

Vi har hermed vist at, hvis $\mathbf{a} \neq 0$, er $\mathbf{T_a}$ bijektiv.

(c)

Da vi ved at sammensætninger af funktioner/transformationer/matricer er det samme som at gange dem med hinanden i den rigtige rækkefølge (dvs. $T_{\mathrm{a}} \circ T_{\mathrm{a}} = T_{\mathrm{a}}{}^2$) og vi ved, at en transformation indebærer, at man ganger en matrice med en vektor x, kan vi omskrive den givne ligning med transformationer om til matricer (dvs. alle $\mathbf{T_a}$ til $\mathbf{A_a}$) og får følgende ligning:

$$A_{\mathrm{a}}{}^{\text{-1}} \cdot x = \frac{1}{a} \cdot A_{\mathrm{a}}{}^2 \cdot x - \frac{a-1}{a} \cdot A_{\mathrm{a}} \cdot x - x.$$

Da x står alene i den højre side af ligningen, tillader vi os at gange x med indentitetsmatricen $\mathbf{I}$, fordi det svarer til at gange med et 1-tal, hvorefter vi så tager x udenfor parentesen:

$$\begin{aligned} A_{\mathrm{a}}{}^{\text{-1}} \cdot x &= \frac{1}{a} \cdot A_{\mathrm{a}}{}^2 \cdot x - \frac{a-1}{a} \cdot A_{\mathrm{a}} \cdot x - x \cdot I \\ &= (\frac{1}{a} \cdot A_{\mathrm{a}}{}^2 - \frac{a-1}{a} \cdot A_{\mathrm{a}} - I) \cdot x \end{aligned}$$

Vi ganger begge sider af ligningen med $\mathbf{A_a}$, fordi ifølge definitionen:

$$A_{\mathrm{a}} \cdot A_{\mathrm{a}}{}^{\text{-1}} = I_{\mathrm{a}}.$$

og får:

$$A_{\text{a}} \cdot A_{\text{a}}^{\text{-1}} \cdot x = A_{\text{a}} \cdot (\frac{1}{a} \cdot A_{\text{a}}{}^{2} - \frac{a-1}{a} \cdot A_{\text{a}} - I) \cdot x$$

Vi ganger $\mathbf{A_a}$ ind i parentesen og får:

$$I_{\text{a}} \cdot x = (\frac{1}{a} \cdot A_{\text{a}}{}^{3} - \frac{a-1}{a} \cdot A_{\text{a}}{}^{2} - A_{\text{a}}) \cdot x$$

Til sidst ganger vi begge sider af ligningen med a:

$$a \cdot x = (A_{\text{a}}{}^{3} - (a-1) \cdot A_{\text{a}}{}^{2} - A_{\text{a}} \cdot a) \cdot x \tag{1}$$

Da det oplyses at:

$$A_{\text{a}}{}^{3} - (a-1) \cdot A_{\text{a}}{}^{2} - a \cdot A_{\text{a}} - a \cdot I = \mathbf{O}$$

lægger vi $a \cdot I$ til på begge sider og får:

$$A_{\text{a}}{}^{3} - (a-1) \cdot A_{\text{a}}{}^{2} - a \cdot A_{\text{a}} = a \cdot I \tag{2}$$

Vi kan nu se at parentesen i den højre side af ligningen (1) er lig med den venstre side af ligningen (2). Vi kan derfor omskrive parentesen i (1):

$$\begin{aligned} a \cdot x &= (a \cdot I) \cdot x \\ a \cdot x &= a \cdot x \end{aligned} \tag{3}$$

Da lighed (3) er sandt, har vi hermed vist at det er sandt, at der gælder

$$T_{\text{a}}^{\text{-1}} \cdot x = \frac{1}{a} \cdot (T_{\text{a}} \circ T_{\text{a)}}(x) - \frac{a-1}{a} \cdot T_{\text{a}}(x) - x \qquad \text{for alle } \mathbf{x} \in \mathbf{R^3}$$

(d)

Ifølge definitionen 3.14 er ker $\mathbf{T_A}$ = null $\mathbf{A} = \beta$ og vi finder en basis for underrummet kerT_0 ved at løse det homogene lineære system $Ax = 0$. Vi starter med at reducere totalmatricen $\mathbf{A_a}$, hvor $a = 0$:

1. rækkeoperation: $r_1 \leftrightarrow r_3$:

$$A_0 = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

2. rækkeoperation: $(-3)r_1 + r_2 \rightarrow r_2$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

3. rækkeoperation: $(-1)r_1 + r_3 \rightarrow r_3$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

4. rækkeoperation: $(-1/2)r_2 \rightarrow r_2$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

5. rækkeoperation: $r_2 + r_3 \rightarrow r_3$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Rangen af koefficientmatricen er lig med rangen af totalmatricen, da begge er 2, og altså mindre end antallet af variable (3), dermed har ligningssystemet uendeligt mange løsninger.

Da x_3 er en fri variabel, kan vi sætte $x_3 = t$ og aflæse løsningen:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = t \cdot v$$

Hermed er basis for underrummet ker $\mathbf{T_0}$ er sættet $\beta = \{v\}$. Den består af én enkel vektor og dermed er dimensionen for dette underrum 1 (jvf. Definition 3.8 i bogen).

(e)

Ifølge definitionen 3.14 er ran $\mathbf{T_A}$ = col $\mathbf{A}$ = C. Vi skal med andre ord finde en basis for col $\mathbf{A_0}$.

Vi bruger den reducerede echalonform af $\mathbf{A_0}$ fra delopgave (d):

$$A_0 = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = A_0^*$$

Der er 2 pivot elementer i henholdsvis søjle 1 og 2 i $\mathbf{A_0}^*$, og dermed er col $\mathbf{A_0}$ = span {v1, v2}, dvs. basis C= {v1, v2}:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ifølge definitionen 3.8 er dimensionen af et underrum U lig med antal af vektorer i dets basis. Da C={v1, v2}, har ran $\mathbf{T_0}$ dimension 2.

2 Opgave 2

(a)

For at bestemme basisskiftmatricen $\mathbf{P}_{\beta \leftarrow C}$ skal vi bestemme vektorene $[\mathbf{v}_1]_\beta$, $[\mathbf{v}_2]_\beta$ og $[\mathbf{v}_3]_\beta$.

Vi bruger fremgangsmåden fra forelæsningen (cf. f6-handouts) og starter med at finde koordinaterne for $\mathbf{v}_1$ mht. basis $\beta = \{u_1, u_2, u_3\}$ ved at løse ligningen:

$$x_1 \cdot u_1 + x_2 \cdot u_2 + x_3 \cdot u_3 = v_1 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2 \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + x_3 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \cdot \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

Dernæst bringer vi totalmatricen (lad os kalde den $\mathbf{A}$) på den reducerede echalonform og aflæser vektor $\mathbf{v}_1$ koordinater mht. basis $\beta = \{u_1, u_2, u_3\}$.

1.rækkeoperation: $r_1 \leftrightarrow r_3$:

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

2.rækkeoperation: $(-1)r_4 + r_3 \to r_3$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

3.rækkeoperation: $(-1/2)r_3 \to r_3$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

4.rækkeoperation: $(-1)r_2 + r_3 \to r_3$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

5.rækkeoperation: $r_3 \leftrightarrow r_4$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

6.rækkeoperation: $(-1)r_1 + r_3 \to r_3$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

7.rækkeoperation: $(-1)r_2 + r_3 \to r_3$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = A^* \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Vi har dermed aflæst løsningerne og har fundet den første søjle i vores basissikftmatrice $\mathbf{P}_{\beta \leftarrow C}$:

$$u_1 + u_2 = v_1 \quad \text{eller} \quad [v_1]_\beta = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Vi andender den samme fremgangsmåde til at finde koordinaterne for $\mathbf{v}_2$ og $\mathbf{v}_3$ mht. basis $\beta = \{u_1, u_2, u_3\}$.

Vi vælger at benytte os af CAS-værktøjet og reducerer de respektive totalmatricer for at kunne aflæse koordinaterne for de sidste to vektorer.

$$x_1 \cdot u_1 + x_2 \cdot u_2 + x_3 \cdot u_3 = v_2 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2 \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + x_3 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \cdot \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$A^* = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = [v_2]_\beta$$

Dvs. $u_2 - u_3 = v_2$ og endeligt udregner vi den sidste søjle i basisskiftmatricen:

$$x_1 \cdot u_1 + x_2 \cdot u_2 + x_3 \cdot u_3 = v_3 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2 \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + x_3 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \cdot \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

$$A^* = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = [v_3]_\beta$$

Basisskiftmatricen kan dermed bestemmes som:

$$P_{\beta} \leftarrow_{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

(b)

At bestemme basiskiftmatricen $\mathbf{P}_{C\leftarrow\beta}$ er ensbetydende med at finde den inverse til matricen $\mathbf{P}_{\beta\leftarrow C}$ fra delopgave (a) netop fordi ifølge Theorem 2.9 (s. 86 i bogen) er en matrice $\mathbf{A}$ invertibel, hvis $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ kun har en nul-løsning.

Vi finder den inverse til $\mathbf{P}_{\beta\leftarrow C}$ vha. COMPUTATION-metoden, hvor vi ganger matricen med identitetsmatricen:

1.rækkeoperation: $(-1)r_1 + r_2 \rightarrow r_2$:

$$[P_{\beta\leftarrow C}|I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

2.rækkeoperation: $r_2 + r_3 \rightarrow r_3$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

3.rækkeoperation: $(-1)r_3 \rightarrow r_3$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right]$$

4. og 5. rækkeoperationer: $2r_3 + r_2 \rightarrow r_2$ og $(-2)r_3 + r_1 \rightarrow r_1$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right] = [I|P^{-1}_{\beta\leftarrow C}] = [I|P_{C\leftarrow\beta}]$$

Vi har dermed fundet basisskiftmatricen $\mathbf{P}_{C\leftarrow\beta}$.

(c)

Hvis vektoren:

$$x = u_1 + au_2 + bu_3 \tag{4}$$

skal ligge i planen udspændt af de to vektorer $\{\mathrm{v}_1,\ \mathrm{v}_2\}$, så skal den kunne skrives vha. en lineær kombination af disse to vektorer.

I delopgaven (a) har vi fundet at:

$$\begin{aligned} [v_1]_C &= [u_1]_\beta + [u_2]_\beta \\ [v_2]_C &= [u_2]_\beta - [u_3]_\beta \end{aligned}$$

Vi kan dermed udtrykke følgende lighed:

$$span\{v_1, v_2\} = span\{u_1 + u_2, u_2 - u_3\}$$

Vores vektor $\mathbf{x} = u_1 + au_2 + bu_3$ kan hermed udtrykkes som:

$$x = h \cdot (u_1 + u_2) + k \cdot (u_2 - u_3) \tag{5}$$

hvor koefficienterne h og k fortæller om hvordan vektorerne $(u_1 + u_2)$ og $(u_2 - u_3)$ (oprindeligt v_1 og v_2) indgår i x.

De 2 udtryk i (4) og (5) for vektor $\mathbf{x}$ skal kunne være direkte sammenlignelige. Derfor må vi reducere den højre side i udtrykket (5). Vi starter med at gange koefficienterne h og k ind i parenteserne:

$$\begin{aligned} x &= h \cdot (u_1 + u_2) + k \cdot (u_2 - u_3) \\ &= h \cdot u_1 + h \cdot u_2 + k \cdot u_2 - k \cdot u_3 \\ &= hu_1 + (h + k) \cdot u_2 - k \cdot u_3 \end{aligned} \tag{6}$$

Hvis vi nu sammenligner udtrykkene i (4) og (6), så må $h = 1$:

$$\begin{aligned} &x = u_1 + au_2 + bu_3 \quad \text{og} \\ &x = 1 \cdot u_1 + (1 + k) \cdot u_2 + (-k) \cdot u_3 \end{aligned}$$

Da de 2 udtryk er direkte sammenlignelige, så kan talparret (a, b) udtrykkes som:

$$\begin{aligned} a &= 1 + k \\ b &= -k \end{aligned}$$

For at eliminere k, indsætter vi b i ligningen med a og får:

$$a = 1 - b \quad \text{hvor} \quad b = 1 - a$$

Hvis der er en sammenhæng mellem a og b, så må det være sandt, at f.eks. når $a = 2$, så er $b = -1$ (og omvendt $a = 1 - (-1)$).

Vi har dermed bestemt samtlige talpar $(1 - b, 1 - a)$ som opfylder relationen mellem a og b.

(d)

Dimensionen af underrummet $\mathcal{U}$ er lig med 3, fordi det er udspændt af 3 vektorer i enten basen $\mathcal{B}$ eller $\mathcal{C}$. Vi skal først finde koordinaterne til skæringspunktet mellem underrummet $\mathcal{U}$ og linjen $\mathcal{L} = t \cdot a + b$ for alle $t \in R$.

Hvis vi udtrykker et hvilket som helst punkt i hyperrum $\mathcal{U}$ via f.eks. basen $\mathcal{B}$, så vil koefficienterne i lineære kombination af vektorerne i denne base definere skæringspunktet med linjen $\mathcal{L}$ og hyperrummet. Vi opstiller derfor følgende ligning:

$$x \cdot u_1 + y \cdot u_2 + z \cdot u_3 = t \cdot a + b \quad \Leftrightarrow \quad x \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + y \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + z \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{7}$$

Vi trækker $t \cdot a$ fra på begge sider af ligningen og opstiller koefficienterne i form af en totalmatrix $\mathbf{A}$ og reducerer den vha. CAS:

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \cdot \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right] = A^*$$

Nu aflæser vi løsningerne for $x_1 = x$, $x_2 = y$ og $x_3 = z$ i $\mathbf{A}^*$ og bestemmer koordinaterne til skæringspunktet (lad os kalde det $\mathbf{P}$) mellem hyperrum $\mathcal{U}$ udspændt af vektorerne fra basen $\mathcal{B}$ og linjen $\mathcal{L}$:

$$P(x, y, z) = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

For at finde koordinaterne til vektor $[\mathbf{x}]_\beta$, indsætter vi de fundne koefficienter ind i ligningen (7):

$$-3 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} = [x]_\beta$$

Koordinaterne for vektor $[\mathbf{x}]_\beta$ vil også gælde for vektor $[\mathbf{x}]_C$, fordi de to baser $\mathcal{B}$ og $\mathcal{C}$ definerer det samme hyperrum $\mathcal{U}$:

$$[x]_C = [x]_\beta = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(e)

Et hvilken som helst punkt i $\mathcal{U}$ skal kunne udtrykkes som en lineær kombination af enten basen $\mathcal{B}$ eller $\mathcal{C}$. Vi bruger den samme fremgangsmåde som i delopgave (d) og finder fællesmængden $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ ved at sætte ligningen for $\mathcal{U}$ udspændt af én af dets baser og planen i underrummet $\mathcal{V}$ lig med hinanden. Lad os tage f.eks. basen $\mathcal{B}$:

$$x \cdot u_1 + y \cdot u_2 + z \cdot u_3 = \mathcal{V} \quad \Leftrightarrow \quad x \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + y \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + z \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

Vi omskriver ligningen på totalmatriceformen og anvender Gauss-eliminationen for at finde retningsvektoren **r** for den linje som udgør fællesmængden $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$:

1.rækkeoperation: $(-1)r_1 + r_3 \rightarrow r_3$:

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & x_3 \\ 1 & 1 & 1 & x_4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & x_3 \\ 1 & 1 & 1 & x_4 \end{array}\right]$$

2.rækkeoperation: $(-1)r_2 + r_3 \rightarrow r_3$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & x_3 \\ 1 & 1 & 1 & x_4 \end{array}\right]$$

3.rækkeoperation: $(-1)r_3 \rightarrow r_3$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -x_3 \\ 1 & 1 & 1 & x_4 \end{array}\right]$$

4. og 5. rækkeoperationer: $r_1 \Leftrightarrow r_2$ og $r_1 \Leftrightarrow r_4$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x_4 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -x_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

6.rækkeoperation: $(-1)r_1 + r_2 \rightarrow r_2$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x_4 \\ 0 & -2 & 0 & -x_4 \\ 0 & 0 & 1 & -x_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

7.rækkeoperation: $(-1/2)r_2 \to r_2$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x_4 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2}x_4 \\ 0 & 0 & 1 & -x_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

8.rækkeoperation: $(-1)r_2 + r_4 \to r_4$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x_4 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2}x_4 \\ 0 & 0 & 1 & -x_3 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}x_4 \end{array}\right] \tag{8}$$

Hvis ligningen der svarer til række 4 skal kunne have en løsning, så må $x_4 = 0$. Vi kan dermed bestemme retningsvektoren for linjen ved at aflæse løsningerne i (8) som:

$$r = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -x_3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Endeligt skal vi vise at **r** er den linje der går igennem origo. Og hvis vi indsætter $x_3 = t$, så kan retningsvektoren skrives som:

$$r = t \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3 Opgave 3

(a)

Vi starter med at bestemme ligninger for vektorens koordinater (dvs. rumskibets position) efter tryk på Forward piltasten:

$$
\begin{aligned}
c_1^F &= c_1 + s_1 - c_1 = s_1 & \qquad c_1^F &= 0c_1 + 0c_2 + 1s_1 + 0s_2 \\
c_2^F &= c_2 + s_2 - c_2 = s_2 & \qquad c_2^F &= 0c_1 + 0c_2 + 0s_1 + 1s_2 \\
s_1^F &= s_1 + s_1 - c_1 = 2s_1 - c_1 & \qquad s_1^F &= -1c_1 + 0c_2 + 2s_1 + 0s_2 \\
s_2^F &= s_2 + s_2 - c_2 = 2s_2 - c_2 & \qquad s_2^F &= 0c_1 + -1c_2 + 0s_1 + 2s_2
\end{aligned}
$$

Nu kan vi opstille 4 x 4 Forward-matrice **F** bestående af koefficienter fra ligningssystemet ovenfor :

$$
F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}
$$

(b)

Vi ved at rumskibets centrums koordinater forbliver uændret efter tryk på Left-Rotate piltasten og kan derfor anvende den samme fremgangsmåde som i delopgave (a) (NB: det samme gælder for Right-Rotationsmatricen):

$$
\begin{aligned}
c_1^L &= c_1 & \qquad c_1^L &= 1c_1 + 0c_2 + 0s_1 + 0s_2 \\
c_2^L &= c_2 & \qquad c_2^L &= 0c_1 + 1c_2 + 0s_1 + 0s_2
\end{aligned}
$$

Koefficienterne overfor svarer til de første to rækker i Left-Rotate matrice $\mathbf{L}_\theta$.

For at udtrykke rumskibets spids' koordinater efter tryk på Left-Rotate piltasten skal vi anvende det givne udtryk:

$$
\begin{bmatrix} s_1^L \\ s_2^L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} cos_\theta & -sin_\theta \\ sin_\theta & cos_\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s_1 - c_1 \\ s_2 - c_2 \end{bmatrix}
$$

Vi starter med at gange rotationsmatricen med vektoren $\overrightarrow{CS}$:

$$\begin{bmatrix} cos_\theta & -sin_\theta \\ sin_\theta & cos_\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s_1 - c_1 \\ s_2 - c_2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} s_1 \cdot cos_\theta + -c_1 \cdot cos_\theta + -s_2 \cdot sin_\theta + c_2 \cdot sin_\theta \\ s_1 \cdot sin_\theta + -c_1 \cdot sin_\theta + s_2 \cdot cos_\theta + -c_2 \cdot cos_\theta \end{bmatrix} \Rightarrow$$

Så lægger vi rumskibets centrumskoordinater (c_1, c_2) til produktet, reducerer og får:

$$\begin{bmatrix} c_1 + s_1 \cdot cos_\theta + -c_1 \cdot cos_\theta + -s_2 \cdot sin_\theta + c_2 \cdot sin_\theta \\ c_2 + s_1 \cdot sin_\theta + -c_1 \cdot sin_\theta + s_2 \cdot cos_\theta + -c_2 \cdot cos_\theta \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} s_1 \cdot cos_\theta + c_1 \cdot (1 - cos_\theta) + -s_2 \cdot sin_\theta + c_2 \cdot sin_\theta \\ s_1 \cdot sin_\theta + -c_1 \cdot sin_\theta + s_2 \cdot cos_\theta + c_2 \cdot (1 - cos_\theta) \end{bmatrix} \Rightarrow$$

Endeligt skriver vi alle koefficienterne for koordinaterne i den rigtige rækkefølge (c_1, c_2, s_1, s_2) og får de sidste to rækker i Left-Rotate matricen:

$$\begin{bmatrix} 1 - cos_\theta & sin_\theta & cos_\theta & -sin_\theta \\ -sin_\theta & 1 - cos_\theta & sin_\theta & cos_\theta \end{bmatrix}$$

Ifølge definitionen er

$$\begin{aligned} cos(-\theta) &= cos\theta \\ sin(-\theta) &= -sin\theta \end{aligned}$$

Vi kan derfor bestemme Right-Rotationsmatricen som $\mathbf{R}_\theta = \mathbf{L}_{-\theta}$, hvor cosinuser bliver uændret, mens sinuser ændrer deres fortegn. Vi får præcist det der svarer til de sidste to række i Right-Rotationsmatricen (Bemærk! at de første to rækker i $\mathbf{R}_\theta$ er lig med de første to rækker i $\mathbf{L}_\theta$ fordi centrums koordinater ændres ikke ved left- eller right-rotation).

(c)

Vi har nu til rådighed alle tre matricer som svarer til de tre movements — Left, Forward og Right. Vi kan derfor nemt beregne rumskibets position (c_1, c_2, s_1, s_2) ved at gange den første matrice (her Forward-matricen) med rumskibets startposition (her vektor$(0, 0, 0, 1)$. Dette resultat ganger vi på den næste matrice (her Right-Rotate matricen) og så fremdeles:

$$\mathbf{L}_{20}^{3} \cdot \mathbf{F}^{2} \cdot \mathbf{R}_{20}^{2} \cdot \mathbf{F} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ved hjælp af CAS beregner vi resultatet og får rumskibets centrum- og spids-koordinater som:

$$(c_1, c_2, s_1, s_2) = \ (1.29, 2.53, 0.94, 3.47)$$

(d)

Hvis vi ganger 20°med 18, så får vi 360°. Dette svarer til at rumskibet har roteret en fuld cirkel rundt om sit centrum. Det svarer med andre ord til der ikke skete noget, som er det samme som at sige at rumskibets koordinaterne blev gangen med 1, dvs. ganget med identitetsmatricen $\mathbf{I}_4$. Det gælder derfor at $(\mathbf{L}_\theta)^{18} = \mathbf{I}_4$.