Forelæsning 1: Lineære ligninger

LinAlgDat 2021/2022

Henrik Holm og Henrik L. Pedersen
Institut for Matematiske Fag
holm@math.ku.dk henrikp@math.ku.dk

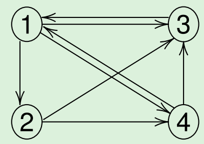
Oversigt

Google bruger lineær algebra

- Hvorfor er det altid de første forslag i en googlesøgning der er de bedste?
  - Jeg ved det ikke for jeg ser jo kun på de første
  - Det er fordi google godt kan li' neær algebra
- Svaret er som altid en kombination, men google bruger matricer, lineære ligningssytemer, egenværdier og meget mere! Og i vanlig googlestil er det meget store matricer!
- Efter LinAlgDat ved I hvordan det i princippet foregår

Et meget lille web

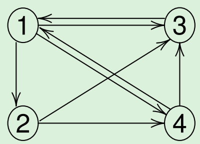
Side 1 refererer til side 2, 3 og 4
Side 2 refererer til side 3 og 4
Side 3 refererer til side 1
Side 4 refererer til side 1 og 3



Sådan en graf repræsenteres ved en nabomatrix!

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Der står 1 i i'te række, j'te søjle hvis der er et link fra side i til side j
- Der står 0 i i'te række, j'te søjle hvis der ikke er noget link fra side i til side j



Nogle gange bruges nabomatricen **N**, andre gange linkmatricen **A**

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

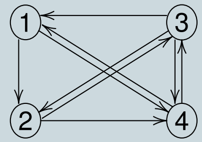
Opgave

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

1. Er der et link fra side 2 til side 4?
2. Hvor mange links er der til side 3?
3. Tegn grafen!

Opgaveløsning

1. Ja, der står et 1-tal i række 2, søjle 4.
2. Antallet af links til side 3 er antallet af 1-taller i søjle 3, dvs. 2.
3.



Information om kurset

- Al information findes på Absalon (ugesedler, opgaver osv)
- Forelæsere:
  Henrik Holm (ikke mig)
  Henrik L. Pedersen (mig)
- F#-konsulent:
  François Bernard Lauze
- Øvelseslærere:
  Adam, Arnulf, Bertram, Caroline, Cecilie, Frederik, Jacob, Laura, Maja, Marius, Niclas, Nikoline, Noah, Philip, Sebasian, Thomas.
- Spørgsmål om hvor man skal være i dag, hvilken lærebog vi bruger osv...

KURSUSOVERSIGT

Hvad er det for et kursus?

- Et matematikkursus om hvordan man bl.a. løser lineære ligningsystemer
- Det er kedeligt (vi vil gøre vores for at få jer overbevist om det modsatte ☺)
- Forelæsninger (slides, tavle, opgaver). *Husk blyant og papir!*
- Øvelser mandag: Primært hjælp ifm. projektafleveringer, samt forberedelse af øvelser og forelæsninger (færre instruktorer)
- Øvelser onsdag: I skal selv regne opgaver fra ugesedlen og kan få hjælp af jeres egen instruktor. *Husk blyant og papir!*
- Hjemmearbejde
- Løbende evaluering (tre projektopgaver og to prøver)

Projekter og tests

- Hver projekt indeholder
  - *2 standard matematikopgaver*
  - *1 kontekst matematikopgave*
  - *1 implementeringsopgave i F# eller Python*
- Individuelle besvarelser. **Afskrift er forbudt og betragtes som eksamenssnyd!**
- Aflevering via Absalon. Besvarelser skrives i LaTeX
- **Afleveringsfrister håndhæves strengt! Genaflevering er ikke muligt**
- Prøverne checker matematiske færdigheder, i stil med de to standardopgaver. Hver prøve varer 90 minutter og foregår på ITX
- Den samlede karakter gives på baggrund af resultaterne i projekterne og prøverne

Eksempel: Anders And

Løsning af lineære ligningssystemer

Eksempel: løs ligningerne

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &= 7 \\ 5x_1 + 2x_2 &= 1 \end{aligned}$$

1. Metode 1: (substitutionsmetoden)

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 = 7 &\Leftrightarrow 3x_2 = 7 - 2x_1 \\ &\Leftrightarrow x_2 = 7/3 - 2/3x_1 \\ &\text{(indsættelse i den anden ligning:)} \\ 5x_1 + 2x_2 = 1 &\Leftrightarrow 5x_1 + 2(7/3 - 2/3x_1) = 1 \\ &\Leftrightarrow 5x_1 + 14/3 - 4/3x_1 = 1 \\ &\Leftrightarrow 11/3x_1 = -11/3 \Leftrightarrow x_1 = -1 \end{aligned}$$

$x_1 = -1$ giver $x_2 = 7/3 - 2/3x_1 = 7/3 + 2/3 = 3$.

Eksempel: løs ligningerne

1. Metode 2: (lige store koefficienters metode)

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &= 7 \\ 5x_1 + 2x_2 &= 1 \end{aligned} \rightsquigarrow \begin{aligned} 10x_1 + 15x_2 &= 35 \\ 10x_1 + 4x_2 &= 2 \end{aligned} \rightsquigarrow$$

$$\begin{aligned} 10x_1 + 15x_2 &= 35 \\ 0x_1 - 11x_2 &= -33 \end{aligned} \rightsquigarrow \begin{aligned} 10x_1 + 15x_2 &= 35 \\ x_2 &= 3 \end{aligned} \rightsquigarrow$$

$$\begin{aligned} 10x_1 + 0x_2 &= -10 \\ x_2 &= 3 \end{aligned} \rightsquigarrow \begin{aligned} x_1 &= -1 \\ x_2 &= 3 \end{aligned}$$

2. Metode 3: (lige store koefficienter og totalmatrix)

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 7 \\ 5 & 2 & 1 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cc|c} 10 & 15 & 35 \\ 10 & 4 & 2 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cc|c} 10 & 15 & 35 \\ 0 & -11 & -33 \end{array}\right] \rightsquigarrow$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 10 & 15 & 35 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cc|c} 10 & 0 & -10 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Lineært ligningssystem på matrixform

Eksempel igen

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &= 7 \\ 5x_1 + 2x_2 &= 1 \end{aligned} \quad \text{opskrives som} \quad \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 7 \\ 5 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

Totalmatrix (eng. augmented matrix)

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad [\mathbf{A}|\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

Løsning af lineære ligningssystemer

Eksempel ("Illustration 1.1, p. 4" og videre)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 &= 0 \\ -x_1 + 3x_2 + 7x_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 7 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ -2r_1 \\ +r_1 \end{array} \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 8 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ +r_2 \end{array} \rightsquigarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & -1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ -1/4\, r_2 \\ 1/5\, r_3 \end{array} \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3/4 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/5 \end{array}\right] \begin{array}{l} -r_3 \\ -3/4\, r_3 \\ \\ \end{array} \rightsquigarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 6/5 \\ 0 & 1 & 0 & 13/20 \\ 0 & 0 & 1 & -1/5 \end{array}\right] \begin{array}{l} -r_2 \\ \\ \\ \end{array} \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 11/20 \\ 0 & 1 & 0 & 13/20 \\ 0 & 0 & 1 & -1/5 \end{array}\right] \text{ Dvs: } \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11/20 \\ 13/20 \\ -1/5 \end{bmatrix}$$

Løsning af lineære ligningssystemer

Eksempel (som jeg har fundet på ☺)

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= 7 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &= 3 \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & 7 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ -2r_1 \end{array} \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]. \ ???$$

Skal 0 på plads (1,2) eller på (1,3)? (1,3) er ☹, (1,2) er ☺

$$-r_2 \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \text{ svarer til: } \begin{aligned} x_1 + x_3 &= 2 \\ x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned} \text{ dvs } \begin{aligned} x_1 &= 2 - x_3 \\ x_2 &= 1 - x_3 \end{aligned}$$

Udtrykker x_1, x_2 ved x_3, og frit valg på x_3. Sæt $x_3 = t$.

Da er $x_1 = 2 - t$, $x_2 = 1 - t$ dvs

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-t \\ 1-t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{(uendeligt mange løsninger)}$$

Løsning af lineære ligningssystemer

Eksempel ("Illustration 1.3, p. 8")

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 - 6x_3 - 14x_4 &= 11 \\ -4x_1 - 8x_2 + 11x_3 + 26x_4 &= -22 \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & -6 & -14 & -11 \\ -4 & -8 & 11 & 26 & -22 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ +2r_1 \end{array} \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & -6 & -14 & -11 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \cdot(-1) \end{array} \rightsquigarrow$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & -6 & -14 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} +6r_2 \\ \\ \end{array} \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 0 & -2 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \cdot 1/2 \\ \\ \end{array} \rightsquigarrow$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 & -11/2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right]. \text{ Svarer til } x_2 = s,\ x_4 = t$$

(fordi x_1 og x_3 kan udtrykkes ved x_2 og x_4)

Konklusion:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11/2 - 2s + t \\ s \\ -2t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11/2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Obs: i den håndskrevne løsning skal -11 erstattes af 11

Løsning af lineære ligningssystemer

Eksempel (“Example 2, p. 13”)

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 &= 4 \\ 3x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 10x_4 &= 0 \\ 5x_1 + 10x_2 + 7x_3 + 17x_4 &= 23 \end{aligned}$$

Diverse række operationer (se bogen) giver løsningen

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -27.5 - 2t \\ t \\ -13.5 \\ 15 \end{bmatrix}.$$

Løsning af lineære ligningssystemer

Eksempel modificeret (“Example 2, p. 13”)

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 &= 4 \\ 3x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 10x_4 &= 0 \\ 5x_1 + 10x_2 + 7x_3 + 16x_4 &= 23 \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 5 & 10 & 0 \\ 5 & 10 & 7 & 16 & 23 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -12 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right] \rightsquigarrow$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 15 \end{array}\right]$$

Ingen løsninger! Sidste linje svarer til $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 15$!

Elementære rækkeoperationer

Giver god mening ifm ligningsløsning

- lægge et multiplum af en række til en anden række (rækkeoperation, eng: *row replacement*)
- bytte om på to af rækkerne (rækkeombytning, eng: *row interchange*)
- gange en række igennem med et tal (tal gange række, eng: *row scaling*)

Rækkeoperation

- At udføre en rækkeoperation på totalmatricen for et ligningssystem svarer til at gange en af ligningerne igennem med et tal t og så lægge den til en af de andre ligninger
- En rækkeoperation ændrer derfor ikke løsningsmængden til ligningssystemet

Rækkeombytning

- At udføre en rækkeombytning i totalmatricen for et ligningssystem svarer til bytte om på to af ligningerne i ligningssystemet, og altså blot at skrive ligningerne i systemet i en anden rækkefølge
- En rækkeombytning ændrer derfor ikke løsningsmængden til ligningssystemet

Multiplikation af en række med et tal $\neq 0$

- At multiplicere en række i totalmatricen svarer til at gange en af ligningerne i systemet igennem med et tal $\neq 0$
- Multiplikation af en række med et tal $\neq 0$ ændrer derfor ikke løsningsmængden til ligningssystemet

Hvorfor så gøre det?

- Fordi det, hvis det gøres med snilde, bliver meget nemmere at løse et forelagt lineært ligningssystem

Elementære søjleoperationer

Giver IKKE god mening ifm ligningsløsning

- Tænk at bytte om på første og sidste søjle (koefficienterne til x_1 og højresiden)...
- Tænk at lægge første søjle til anden søjle (koefficienterne til x_1 lægges til koefficienterne til x_2)...
- Tænk...

Opgave

Betragt ligningssystemet

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 1 \\ x_1 + x_2 - 5x_3 &= -3 \end{aligned}$$

1. Bestem totalmatricen for ligningssystemet
2. Lav rækkeoperationerne (i denne rækkefølge) på totalmatricen
   - række 1 trækkes fra række 2
   - række 2 ganges igennem med -1
   - 2 gange række 2 trækkes fra række 1
3. Totalmatricen er nu omformet til

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & a & -7 \\ 0 & 1 & b & 4 \end{bmatrix}$$

   Hvad er a og b?
4. Bestem løsningerne til ligningssystemet.

Opgaveløsning

1. Totalmatricen for ligningssystemet er

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -5 & -3 \end{array}\right]$$

2. Laves rækkeoperationerne (i den opgivne rækkefølge) på totalmatricen fås

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -10 & -7 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \end{array}\right]$$

   så $a = -10$ og $b = 5$.
3. Løsningerne til ligningssystemet er

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 + 10t \\ 4 - 5t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 10 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Skæring mellem to linjer

Betragt ligningssystemet

$$\begin{aligned} -x + 3y &= 1 \\ x + y &= 1 \end{aligned}$$

- Rækkeoperationer giver

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \end{bmatrix}$$

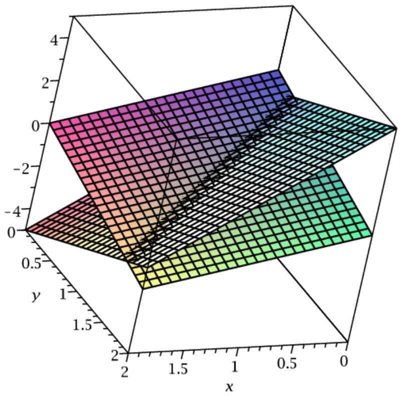
- Løsning

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

- Dette punkt er skæringspunkt mellem de to linjer!

Skæring mellem to planer “Example p. 15”

- $x + y + z = 2$ er ligning for planen igennem punktet $(1, 1, 0)$ med normalvektor $(1, 1, 1)$
- $3x - 2y + z = 1$ er ligning for planen igennem punktet $(1, 1, 0)$ med normalvektor $(3, -2, 1)$



Skæring mellem to planer

Betragt ligningssystemet

$$\begin{aligned} x + y + z &= 2 \\ 3x - 2y + z &= 1 \end{aligned}$$

- Rækkeoperationer:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -2 & -5 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2/5 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3/5 & 1 \\ 0 & 1 & 2/5 & 1 \end{bmatrix}$$

- Løsningerne skrives på vektorformen

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -3/5 \\ -2/5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Det er en parameterfremstilling for en linje i rummet, som udgør skæringen mellem de to planer.

Algoritme: forward reduction I/II

1. Vælg den første søjle, som ikke er nulsøjlen. Denne søjle kaldes pivotsøjlen.
2. Vælg et vilkårligt element $\neq 0$ i pivotsøljen. Et sådant element kaldes et pivotelement. Den række hvori elementet står kaldes pivotrækken. Ombyt pivotrækken og første række. Skaf derefter 0 på alle pladser i pivotsøjlen under første række vha rækkeoperationer.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 6 & 3 & 11 \\ -4 & -13 & 2 & 1 & -15 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 & 3 & 11 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 14 & 7 & 7 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Algoritme: forward reduction II/II

3. Betragt den delmatrix, hvor første række ikke indgår. Hvis denne matrix har mindst 1 række og hvis ikke alle søjler er lig med nulsøjlen, gentages ovenstående operationer på denne delmatrix. Ellers stoppes proceduren.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 6 & 3 & 11 \\ -4 & -13 & 2 & 1 & -15 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 & 3 & 11 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 14 & 7 & 7 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 & 3 & 11 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 14 & 7 & 7 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 & 3 & 11 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 21 & 21 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 & 3 & 11 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 21 & 21 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 & 3 & 11 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 21 & 21 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Rækkeechelonform

En matrix er på rækkeechelonform hvis der gælder følgende:

- Alle nulrækker findes i bunden af matricen
- Det første element, forskellig fra 0, i en given ikke-nulrække, findes til højre for det tilsvarende element i rækken lige over

Gauss-elimination

- Enhver matrix kan bringes på rækkeechelonform vha elementære rækkeoperationer.
- Processen “Forward reduction” kaldes for Gauss-elimination.
- Gauss-elimination kan foretages på forskellige måder, ved at anvende forskellige pivotelementer og rækkeoperationer.
- Slutresultatet afhænger af hvilke rækkeoperationer osv der er anvendt. Der er mange forskellige rækkeechelonformer for en given matrix.

Algoritme: Backward reduction

Lad **U** være en matrix på rækkeechelonform. Vælg den pivotsøjle, der står længst til højre i **U**.

1. Gang pivotrækken igennem med et tal, så pivotværdien bliver 1. Skaf derefter 0 på alle pladser i pivotsøjlen over pivotelementet ved at bruge rækkeoperationer.
2. Gentag processen ovenfor for hver pivotsøjle i **U** (idet man går mod venstre). Stop når der ikke er flere pivotsøjler.

Eksempel: Illustration 1.7

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 & 3 & 11 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 21 & 21 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Reduceret rækkeechelonform

En matrix er på reduceret rækkeechelonform hvis

- den er på rækkeechelonform og
- det første element, forskellig fra 0, i en given ikke-nulrække er lig med 1 og alle andre elementer i den tilsvarende søjle er lig med 0

Opgave

Hvilke af matricerne nedenfor er på reduceret rækkeechelonform?

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Gauss-Jordan elimination

Processen at foretage forward og dernæst backward reduction på en matrix kaldes Gauss-Jordan elimination.

Gauss-Jordan elimination

Sætning

- Antag, at **A** ved elementære rækkeoperationer omformes til $\mathbf{A}'$, hvor $\mathbf{A}'$ er på reduceret rækkeechelonform.
- Antag, at **A** ved elementære rækkeoperationer omformes til $\mathbf{A}''$, hvor også $\mathbf{A}''$ er på reduceret rækkeechelonform.
- Da gælder $\mathbf{A}' = \mathbf{A}''$

Opsummering

- Andet ord for "pivotelement" kunne være "ledende indgang"
- "Forward reduction" eller Gauss-elimination

$$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ * & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} * & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} * & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & * & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} * & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & * & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & * \end{bmatrix}$$

  bringer matricen på rækkeechelonform
- Efterfølgende "backward reduction" eller Gauss-Jordan elimination

$$\begin{bmatrix} * & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & * & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & * \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} * & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & * & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} * & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 1 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 1 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

  bringer matricen på reduceret rækkeechelonform
- Det bliver meget nemmere at løse et lineært ligningssystem!