Forelæsning 11: Diagonalisering af matricer

LinAlgDat 2021/2022

Henrik Holm og Henrik L. Pedersen
Institut for Matematiske Fag
holm@math.ku.dk og henrikp@math.ku.dk

Oversigt

Diagonalisering af matricer

Definition 6.6 (Diagonalisérbare matricer)

En $n \times n$ matrix $\mathbf{A}$ kaldes diagonalisérbar hvis der findes en invertibel matrix $\mathbf{P}$ og en diagonalmatrix

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

som opfylder

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{D}\,.$$

I denne situation kaldes $\mathbf{P}$ en diagonaliserende matrix for $\mathbf{A}$.

Sprogbrug. At diagonalisere en matrix $\mathbf{A}$ betyder at finde (om muligt?) matricer $\mathbf{P}$ og $\mathbf{D}$ som beskrevet i Definition 6.6.

Eksempel (En diagonalisérbar matrix)

Matricen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

er diagonalisérbar, fordi med

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{og} \qquad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

gælder

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{D}\,;$$

altså

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Spørgsmål. Lad der være givet en $n \times n$ matrix $\mathbf{A}$.

- Hvordan afgører vi om $\mathbf{A}$ er diagonalisérbar ?
- Hvordan bestemmer vi i bekræftende fald matricerne $\mathbf{P}$ og $\mathbf{D}$?

Svar. Efter lidt teori angiver vi en metode...

Diagonalisérbarhed og egenvektorer

Antag at $\mathbf{A}$ er diagonalisérbar $n \times n$ matrix, dvs. $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \mathbf{D}$ hvor

$$\mathbf{P} = (\mathbf{v}_1 | \cdots | \mathbf{v}_n) \qquad \text{og} \qquad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Vi bemærker, at

$$(\mathbf{Av}_1 | \cdots | \mathbf{Av}_n) = \mathbf{AP} = \mathbf{PD} = (\lambda_1 \mathbf{v}_1 | \cdots | \lambda_n \mathbf{v}_n).$$

Vi konkluderer, at

- λ_i er en egenværdi for $\mathbf{A}$ med tilhørende egenvektor $\mathbf{v}_i$.
- $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ er en basis for $\mathbb{R}^n$ bestående af egenvektorer for $\mathbf{A}$.

Theorem 6.3 (Karakterisering af diagonalisérbarhed)

En $n \times n$ matrix $\mathbf{A}$ er diagonalisérbar netop hvis $\mathbb{R}^n$ har en basis bestående af egenvektorer for $\mathbf{A}$.

Theorem 6.4 (Kriterium for diagonalisérbarhed)

Lad $\mathbf{A}$ være en $n \times n$ matrix med k indbyrdes forskellige (komplekse) egenværdier $\lambda_1, \dots, \lambda_k$. Vælg for hvert $1 \leqslant i \leqslant k$ en

$$\text{basis } \mathcal{B}_i \text{ for egenrummet } E_{\lambda_i} = \mathrm{null}(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I}).$$

Så er mængden

$$\mathcal{B} := \mathcal{B}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_k$$

lineært uafhængig, og der gælder:

$$\mathbf{A} \text{ er diagonalisérbar} \iff (\text{antallet af vektorer i } \mathcal{B}) = n.$$

I så fald er $\mathcal{B}$ en basis for $\mathbb{R}^n$ bestående af egenvektorer for $\mathbf{A}$.

En konsekvens af ovenstående sætning (hvis $k = n$) er:

Theorem 6.5 (Hvis *alle* egenværdierne er forskellige)

En $n \times n$ matrix $\mathbf{A}$ med n indbyrdes forskellige (komplekse) egenværdier er diagonalisérbar.

Bemærkning til Theorem 6.4. Per definition af geometrisk multiplicitet gælder

$$(\text{antallet af vektorer i } \mathcal{B}) = g_{\lambda_1} + \cdots + g_{\lambda_k}.$$

Vi ved, at

$$g_{\lambda_1} \leqslant a_{\lambda_1}, \dots, g_{\lambda_k} \leqslant a_{\lambda_k} \qquad \text{og} \qquad a_{\lambda_1} + \cdots + a_{\lambda_k} = n,$$

og derfor gælder:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \text{ er diagonalisérbar} &\iff (\text{antallet af vektorer i } \mathcal{B}) = n \\ &\iff g_{\lambda_1} = a_{\lambda_1}, \dots, g_{\lambda_k} = a_{\lambda_k} \end{aligned}$$

En matrix $\mathbf{A}$ er altså diagonalisérbar netop hvis de geometriske og algebraiske multipliciteter for dens egenværdier er parvist ens.

Theorem 6.4 (og dets bevis) rummer en metode til at diagonalisere en matrix (altså til at finde $\mathbf{P}$ *og* $\mathbf{D}$*), som måske nok burde være skrevet mere eksplicit ud i Hardy's bog. Her er metoden:*

Metode til at diagonalisere en matrix

Lad $\mathbf{A}$ være en $n \times n$ matrix med indbyrdes forskellige (komplekse) egenværdier $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ (rødderne i det karakteristiske polynomium).

- Vælg basis $\mathcal{B}_1 = \{\mathbf{v}_1^{(1)}, \dots, \mathbf{v}_{g_{\lambda_1}}^{(1)}\}$ for $E_{\lambda_1} = \mathrm{null}(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I})$.

  $\vdots$
- Vælg basis $\mathcal{B}_k = \{\mathbf{v}_1^{(k)}, \dots, \mathbf{v}_{g_{\lambda_k}}^{(k)}\}$ for $E_{\lambda_k} = \mathrm{null}(\mathbf{A} - \lambda_k \mathbf{I})$.

Hvis $g_{\lambda_1} + \cdots + g_{\lambda_k} = n$ så er $\mathbf{A}$ diagonalisérbar (og ellers ikke!) og

$$\mathbf{P} = (\underbrace{\mathbf{v}_1^{(1)} | \cdots | \mathbf{v}_{g_{\lambda_1}}^{(1)}}_{\mathcal{B}_1} | \cdots | \underbrace{\mathbf{v}_1^{(k)} | \cdots | \mathbf{v}_{g_{\lambda_k}}^{(k)}}_{\mathcal{B}_k})$$

er en diagonaliserende matrix for $\mathbf{A}$, som opfylder

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & \lambda_k & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \lambda_k \end{pmatrix} =: \mathbf{D} \qquad \begin{matrix} g_{\lambda_1} \text{ forekomster af } \lambda_1 \\ \vdots \\ g_{\lambda_k} \text{ forekomster af } \lambda_k \end{matrix}$$

Eksempel (Diagonalisering af en 2×2 matrix)

Betragt 2×2 matricen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Vi har set, at egenværdierne for $\mathbf{A}$ er $\lambda_1 = 2$ og $\lambda_2 = 3$.

- En basis for egenrummet

$$E_{\lambda_1} = E_2 = \mathrm{null}(\mathbf{A} - 2\mathbf{I}) = \mathrm{null}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{er fx} \quad \mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

- En basis for egenrummet

$$E_{\lambda_2} = E_3 = \mathrm{null}(\mathbf{A} - 3\mathbf{I}) = \mathrm{null}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{er fx} \quad \mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

Da $g_{\lambda_1} + g_{\lambda_2} = g_2 + g_3 = 1 + 1 = 2$ så er $\mathbf{A}$ diagonalisérbar, og

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{opfylder} \quad \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

At $\mathbf{A}$ er diagonalisérbar stemmer med Theorem 6.5, idet jo $\mathbf{A}$ er en 2×2 matrix med 2 forskellige egenværdier.

Eksempel (Diagonalisering af en 3×3 matrix) 1/2

Betragt 3×3 matricen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & -4 & 4 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{hvor} \quad \begin{aligned} p(\lambda) &= \lambda^3 + \lambda^2 - 8\lambda - 12 \\ &= (\lambda + 2)^2(\lambda - 3) \end{aligned}$$

Egenværdierne for $\mathbf{A}$ er $\lambda_1 = -2$ og $\lambda_2 = 3$.

- Udregningen

$$\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I} = \mathbf{A} + 2\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 3 & -2 & 4 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Gauss-Jordan}} \begin{pmatrix} 1 & -2/3 & 4/3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

viser, at en basis for egenrummet $E_{\lambda_1} = E_{-2} = \mathrm{null}(\mathbf{A} + 2\mathbf{I})$ fx er

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4/3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{eller} \quad \mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}.$$

Vi har altså $g_{\lambda_1} = g_{-2} = 2$.

Eksempel (Diagonalisering af en 3×3 matrix) 2/2

- Udregningen

$$\mathbf{A} - \lambda_2\mathbf{I} = \mathbf{A} - 3\mathbf{I} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 4 \\ 3 & -7 & 4 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Gauss-Jordan}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

viser, at en basis for egenrummet $E_{\lambda_2} = E_3 = \mathrm{null}(\mathbf{A} - 3\mathbf{I})$ fx er

$$\mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Vi har altså $g_{\lambda_2} = g_3 = 1$.

Da $g_{\lambda_1} + g_{\lambda_2} = g_{-2} + g_3 = 2 + 1 = 3$ så er $\mathbf{A}$ diagonalisérbar, og

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{giver} \quad \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Eksempel (En IKKE-diagonalisérbar matrix)

Følgende matrix er IKKE diagonalisérbar:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Det karakteristiske polynomium er

$$p(\lambda) = \det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \det\begin{pmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ 0 & \lambda - 1 \end{pmatrix} = (\lambda - 1)^2.$$

Dvs. $\lambda = 1$ er eneste egenværdi, og den algebraiske multiplicitet er:

$$a_\lambda = a_1 = 2.$$

En basis for det til $\lambda = 1$ hørende egenrum

$$E_\lambda = E_1 = \mathrm{null}(\mathbf{A} - 1\mathbf{I}) = \mathrm{null}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{er fx} \quad \mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Den geometriske multiplicitet for $\lambda = 1$ er derfor

$$g_\lambda = g_1 = \dim(E_1) = 1.$$

Da $a_\lambda = 2$ og $g_\lambda = 1$ er forskellige, så er $\mathbf{A}$ IKKE diagonalisérbar.

Potenser af diagonalisérbare matricer

For matricen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

udregner vi (med lidt besvær) potenserne:

$$\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -10 & 14 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}^3 = \begin{pmatrix} -11 & 19 \\ -38 & 46 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}^4 = \begin{pmatrix} -49 & 65 \\ -130 & 146 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}^5 = \begin{pmatrix} -179 & 211 \\ -422 & 454 \end{pmatrix}$$

Spørgsmål. Hvordan ser $\mathbf{A}^k$ ud?

En smart udregning

Antag at en matrix $\mathbf{A}$ er diagonalisérbar, dvs.

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{D} \qquad \text{hvor} \qquad \mathbf{P} \text{ er invertibel} \quad \text{og} \quad \mathbf{D} \text{ er diagonal.}$$

Da gælder:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^{-1} \\ \mathbf{A}^2 &= \mathbf{A}\mathbf{A} = (\mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^{-1})(\mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^{-1}) = \mathbf{P}\mathbf{D}^2\mathbf{P}^{-1} \\ \mathbf{A}^3 &= \mathbf{A}^2\mathbf{A} = (\mathbf{P}\mathbf{D}^2\mathbf{P}^{-1})(\mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^{-1}) = \mathbf{P}\mathbf{D}^3\mathbf{P}^{-1} \end{aligned}$$

Hvis en matrix $\mathbf{A}$ er diagonalisérbar med $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{D}$, så gælder

$$\mathbf{A}^k = \mathbf{P}\mathbf{D}^k\mathbf{P}^{-1}$$

Pointe. Det er som udgangspunkt svært at udregne $\mathbf{A}^k$, men det er nemt at udregne $\mathbf{D}^k$ fordi

$$\mathbf{D}^k = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{pmatrix}.$$

Eksempel (Udregning af potenser)

Matricen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

er diagonalisérbar, fordi med

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{og} \qquad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

gælder $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{D}$. Vi har nu

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^k = \mathbf{P}\mathbf{D}^k\mathbf{P}^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^k & 0 \\ 0 & 3^k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^{k+1} - 3^k & 3^k - 2^k \\ 2^{k+1} - 2 \cdot 3^k & 2 \cdot 3^k - 2^k \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ved indsættelse af $k = 5$ og $k = 20$ fås hhv.

$$\mathbf{A}^5 = \begin{pmatrix} -179 & 211 \\ -422 & 454 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{20} = \begin{pmatrix} -3484687249 & 3485735825 \\ -6971471650 & 6972520226 \end{pmatrix}$$

Fibonaccitallene

Definition af Fibonaccitallene

Fibonaccitallene er defineret rekursivt som følger:

$$f_0 = f_1 = 1 \qquad \text{og} \qquad f_{k+2} = f_k + f_{k+1} \quad \text{for} \quad k \geqslant 0.$$

$$\begin{aligned} f_2 &= 1 + 1 = 2 \\ f_3 &= 1 + 2 = 3 \\ f_4 &= 2 + 3 = 5 \\ f_5 &= 3 + 5 = 8 \\ f_6 &= 5 + 8 = 13 \\ f_7 &= 8 + 13 = 21 \\ f_8 &= 13 + 21 = 34 \\ f_9 &= 21 + 34 = 55 \\ f_{10} &= 34 + 55 = 89 \end{aligned}$$

Spørgsmål. Er der en lukket formel for f_k ?

Sæt

$$\mathbf{u}_k = \begin{pmatrix} f_k \\ f_{k+1} \end{pmatrix} \qquad \text{og} \qquad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Da gælder

$$\mathbf{u}_{k+1} = \begin{pmatrix} f_{k+1} \\ f_{k+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{k+1} \\ f_k + f_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_k \\ f_{k+1} \end{pmatrix} = \mathbf{A}\mathbf{u}_k \,.$$

Vi har

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= \mathbf{A}\mathbf{u}_0 \\ \mathbf{u}_2 &= \mathbf{A}\mathbf{u}_1 = \mathbf{A}(\mathbf{A}\mathbf{u}_0) \;\; = \mathbf{A}^2\mathbf{u}_0 \\ \mathbf{u}_3 &= \mathbf{A}\mathbf{u}_2 = \mathbf{A}(\mathbf{A}^2\mathbf{u}_0) = \mathbf{A}^3\mathbf{u}_0 \,. \end{aligned}$$

Generelt gælder:

$$\mathbf{u}_k = \mathbf{A}^k\mathbf{u}_0 \qquad \text{dvs.} \qquad \begin{pmatrix} f_k \\ f_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Matricen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{har karakteristisk polynomium} \quad p(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 1$$

og

- egenværdi $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ med tilhørende egenvektor $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 - 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- egenværdi $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ med tilhørende egenvektor $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} \lambda_2 - 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Derfor er **A** diagonalisérbar med

$$\mathbf{P} = (\mathbf{v}_1|\mathbf{v}_2) = \begin{pmatrix} \lambda_1 - 1 & \lambda_2 - 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{og} \qquad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Om potensen $\mathbf{A}^k$ gælder derfor

$$\mathbf{A}^k = \mathbf{P}\mathbf{D}^k\mathbf{P}^{-1}\,,$$

og heraf følger

$$\mathbf{u}_k = \mathbf{A}^k\mathbf{u}_0 = \mathbf{P}\mathbf{D}^k\mathbf{P}^{-1}\mathbf{u}_0\,.$$

Ved indsættelse af tal i identiteten

$$\mathbf{u}_k = \mathbf{P}\mathbf{D}^k\mathbf{P}^{-1}\mathbf{u}_0$$

fås (udregningerne er ikke helt lette):

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} f_k \\ f_{k+1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \lambda_1 - 1 & \lambda_2 - 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 \\ 0 & \lambda_2^k \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 1 - \lambda_2 \\ -1 & \lambda_1 - 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \lambda_1^k(\lambda_1 - 1) & \lambda_2^k(\lambda_2 - 1) \\ \cdots & \cdots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 - \lambda_2 \\ \lambda_1 - 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \lambda_1^k(\lambda_1 - 1)(2 - \lambda_2) - \lambda_2^k(\lambda_2 - 1)(2 - \lambda_1) \\ \cdots \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \lambda_1^{k+1} - \lambda_2^{k+1} \\ \cdots \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Lukket formel for det k'te Fibonaccital

$$f_k = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}\right)$$

Eksempel (Beregning af Fibonaccital uden rekursion)

$$\begin{aligned} f_{50} &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{51} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{51}\right) \\ &= 20.365.011.074 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{100} &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{101} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{101}\right) \\ &= 573.147.844.013.817.084.101 \end{aligned}$$

Symmetriske matricer

Vi minder om, at en matrix **A** er symmetrisk hvis $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$, dvs. hvis **A** er symmetrisk omkring diagonalen.

Eksempel (Nogle symmetriske matricer)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & 3 \\ 7 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 & 6 & 1 & 1 \\ 6 & 0 & 3 & 8 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \\ 1 & 8 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Theorem 6.6 (Symmetrisk medfører diagonalisérbar)

Lad **A** være en symmetrisk matrix med reelle indgange. Da er alle *n* egenværdier for **A** reelle (ikke komplekse) og **A** er diagonalisérbar.

Eksempel (Diagonalisering af symmetrisk matrix) 1/3

Betragt den symmetriske matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Det karakteristiske polynomium er

$$p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 \end{pmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda + 1)(\lambda - 3).$$

Egenværdierne er altså $\lambda_1 = -1$ og $\lambda_2 = 3$.

Vi bemærker følgende overensstemmelser med Theorem 6.6:

- Faktisk er alle egenværdierne for **A** relle.
- Faktisk er **A** diagonalisérbar. Dette følger fx af Theorem 6.5 idet **A** er en 2×2 matrix med 2 *forskellige* egenværdier.

Eksempel (Diagonalisering af symmetrisk matrix) 2/3

Lad os nu faktisk diagonalisere den symmetriske matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

- En basis for egenrummet

$$E_{-1} = \mathrm{null}(\mathbf{A} + 1\mathbf{I}) = \mathrm{null} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{er fx} \quad \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

- En basis for egenrummet

$$E_3 = \mathrm{null}(\mathbf{A} - 3\mathbf{I}) = \mathrm{null} \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{er fx} \quad \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Derfor er

$$\mathbf{P} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

en diagonaliserende matrix for **A** som opfylder:

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Eksempel (Diagonalisering af symmetrisk matrix) 3/3

Bemærk, at den diagonaliserende matrix for **A**, altså

$$\mathbf{P} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

er en ortogonal matrix, dvs. $\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}^T$.

Følgende står kun delvist i Hardy's bog (bl.a. Theorem 6.6):

Spektralsætningen (reel udgave)

En reel symmetrisk matrix **A** er ortogonalt diagonalisérbar, dvs. der er en ortogonal matrix **P** og en reel diagonalmatrix **D** så $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{D}$.

Følgende står kun delvist i Hardy's bog §8.5 (Theorem 8.8 og 8.9):

Spektralsætningen (kompleks udgave)

En kompleks Hermitisk matrix **A** er unitært diagonalisérbar, dvs. der findes en unitær matrix **U** og en diagonalmatrix **D** så $\mathbf{U}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{U} = \mathbf{D}$.