Forelæsning 4: Matricer, anvendelser

LinAlgDat 2021/2022

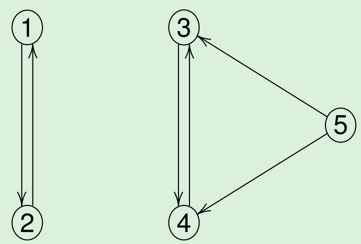
Henrik Holm og Henrik L. Pedersen
Institut for Matematiske Fag
holm@math.ku.dk henrikp@math.ku.dk

Oversigt

I Afsnit 2.4 kan delafsnittene 2.4.2, 2.4.3, 2.4.4 og 2.4.5 forbigås.

Blokmatricer og blokmultiplikation

Eksempel



Linkmatrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1/2 \\ 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^2 \end{bmatrix}$$

Blokmatricer og blokmultiplikation

- Man kan opdele en stor matrix i mindre dele eller blokke
- Det er smart (hvis fx der er mange 0'er i matricen) – så bruges meget mindre lagerplads

Eksempel på blokmultiplikation

Hvis blokkenes størrelser passer sammen gælder

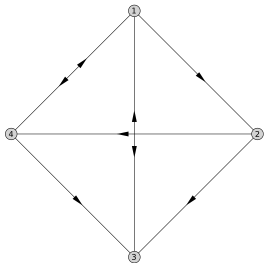
$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} \\ \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{11} & \mathbf{C}_{12} \\ \mathbf{C}_{21} & \mathbf{C}_{22} \end{bmatrix},$$

hvor

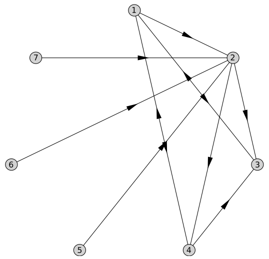
$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{11} &= \mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_{11} + \mathbf{A}_{12}\mathbf{B}_{21} \\ \mathbf{C}_{21} &= \mathbf{A}_{21}\mathbf{B}_{11} + \mathbf{A}_{22}\mathbf{B}_{21} \\ \mathbf{C}_{12} &= \mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_{12} + \mathbf{A}_{12}\mathbf{B}_{22} \\ \mathbf{C}_{22} &= \mathbf{A}_{21}\mathbf{B}_{12} + \mathbf{A}_{22}\mathbf{B}_{22} \end{aligned}$$

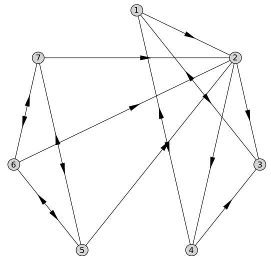
Google igen

Kan en uvigtig side gøre sig selv vigtig?



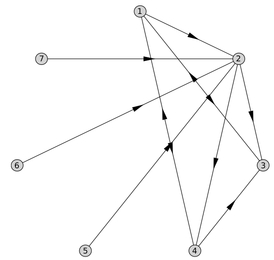
rangering: 1, 3, 4, 2





Google igen

Kan en uvigtig side gøre sig selv vigtig?

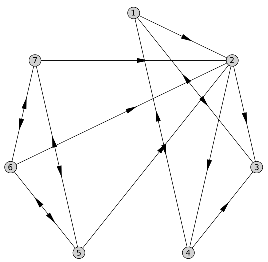


$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Side 2 er stadigvæk den mindst vigtige!

Google igen

Kan en uvigtig side gøre sig selv vigtig?



$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Side 2 er stadigvæk den mindst vigtige!

Grafer (web) og nabomatricer

- En graf $\mathcal{G}$ består af en (ikke tom) mængde V af hjørner sammen med en mængde af kanter eller forbindelseslinjer E mellem elementer i V. Vi skriver $\mathcal{G} = (V, E)$.
- En orienteret graf er en graf, hvor hver kant har en retning.
- Kanterne i en ikke orienteret graf tænkes at gå i begge retninger.

Definition 2.12

Lad $\mathcal{G}$ være en (orienteret) graf med hjørner $v_1, \dots, v_n$. Nabomatricen *(eng. adjacency matrix)* er den $n \times n$ matrix $\mathbf{N}$ der har elementerne

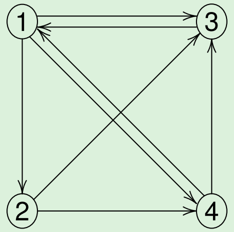
$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{hvis der er en kant fra } v_i \text{ til } v_j, \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

Observation

Lad $\mathbf{N}$ være nabomatricen for en graf. Da er:
summen af række $i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} =$ antallet af udgående kanter fra v_i,
summen af søjle $j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} =$ antallet af indgående kanter til v_j.

Nabomatrix eller graf?

Eksempel: grafen fra vores web



$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Morale

Det er sikkert smart at repræsentere grafen ved en matrix, men det er altså nemmere at se på grafen når man skal bestemme hvor mange udgående links der er fra fx side 1!

Veje i grafer

- Grafproblem: kan man komme fra et hjørne til et andet i en graf?
- Webproblem: kan man klikke sig fra en side til en anden i et web?

Definition: Veje og stier

- En *vej* i en graf $\mathcal{G}$ er en sekvens af hjørner $v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}$ i $\mathcal{G}$ sådan, at der er en kant fra v_i til v_{i+1} for hvert $i = 1, \ldots, k$. Det skrives som
$$v_1 \to v_2 \to \ldots \to v_k \to v_{k+1}$$
Længden af vejen er tallet k.
- En *sti* er en vej, hvor alle hjørnerne er indbyrdes forskellige.

Potenser af nabomatrix

Potenser af nabomatricen indeholder information om antallet veje af en given længde i en graf.

Sætning: potenser af nabomatrix

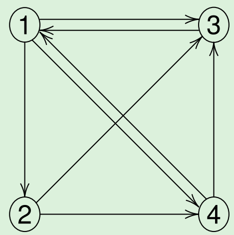
Lad $\mathbf{N}$ være nabomatricen for en (orienteret) graf med hjørner $v_1, \ldots, v_n$. Da gælder:

- Den ij'te indgang i $\mathbf{N}^k$ er lig med antallet af veje i grafen af længde k fra v_i til v_j.
- Den ij'te indgang i $\mathbf{I} + \mathbf{N} + \cdots + \mathbf{N}^k$ er lig med antallet af veje i grafen af længde højst k fra v_i til v_j.

Hvorfor er det nu sådan?

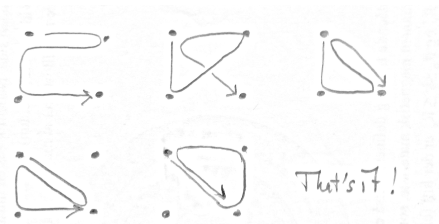
- Matricen $\mathbf{N}^2$ har elementerne $\{b_{ij}\}$, hvor
$$b_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{kj}.$$
- Fasthold i og j.
  - Hvis både $a_{ik} = 1$ og $a_{kj} = 1$ er $a_{ik}a_{kj} = 1$. Det svarer til, at der er en vej af længde 2 fra hjørne i via hjørne k til hjørne j.
  - Hvis $a_{ik} = 0$ eller $a_{kj} = 0$ er $a_{ik}a_{kj} = 0$. Det svarer til, at der ikke er nogen vej fra hjørne i via hjørne k til hjørne j.

Eksempel: grafen fra vores web



$$\mathbf{N}^4 = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 7 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

- Der er altså 5 veje af længde 4 fra side 1 til side 4
- Hvordan ser de ud?

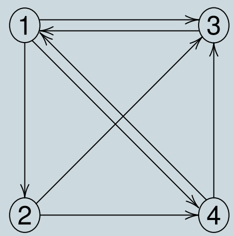


Morale

Morale

Det er definitivt lettere at aflæse antallet af veje af længde k ud fra nabomatricen i k'te potens end ud fra grafen!

Opgave

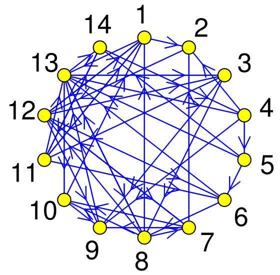


$$\mathbf{N}^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N}^3 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

1. Er det muligt at komme fra hjørne 3 til hjørne 2 ved at følge en vej af længde 2?
2. Er det muligt at komme fra hjørne 3 til hjørne 2 ved at følge en vej af længde 3?
3. Hvor mange veje af længde 3 starter og slutter i samme hjørne?

Her er en graf med 14 hjørner og 44 kanter



- Hvor mange veje af længde 4 er der fra 13 til 8?
- Svaret er elementet i række 13, og søjle 8 i matricen $\mathbf{N}^4$, dvs 15
- Mellem hvilke hjørner går der flest veje af længde 4? Og hvad er flest?
- Svaret er de pladser der indeholder den maksimale værdi i $\mathbf{N}^4$, og det er plads $[8, 13]$ og værdien er 27

Lidt om tallegemer

- De reelle tal $\mathbb{R}$ er et eksempel på et såkaldt legeme: Fx er $\mathbb{R}$ udstyret med addition $+$ og multiplikation $\cdot$, som opfylder nogle naturlige regneregler, og ethvert tal $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ har en multiplikativ invers x^{-1} som opfylder $xx^{-1} = 1$.
- De komplekse tal $\mathbb{C}$ er også et legeme (introduceres senere).
- Et vigtigt eksempel som bruges i datalogi er legemet med to elementer, $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$, hvor 0 er FALSE og 1 er TRUE.

Legemet $\mathbb{F}_2$

Addition og multiplikation defineres som følger:

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

Addition

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

Multiplikation

Matricer med elementer fra $\mathbb{F}_2$

Morale

Meget af det vi lærer i LinAlgDat, som fx matrixregning og Gauss-Jordan eliminering, fungerer problemfrit hvis vi erstatter de reelle tal med et vilkårligt andet legeme.

Eksempel: matrixmultiplikation og rækkeoperation

1. Udregn

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Læg første række til anden række i matricen

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Eksempel

Eksempel

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & C \\ B & D \end{bmatrix}$$

$A = 1\cdot 1 + 1\cdot 0 + 0\cdot 0 + 1\cdot 1 = 0$

$B = 1\cdot 1 + 0\cdot 0 + 1\cdot 0 + 1\cdot 1 = 0$

$C = 1\cdot 1 + 1\cdot 1 + 0\cdot 0 + 1\cdot 1 = 1$

$D = 1\cdot 1 + 0\cdot 1 + 1\cdot 0 + 1\cdot 1 = 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} +r_1 \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Hamming code – problemet

- En *afsender* sender en 4-bit databesked $\mathbf{d} = (d_1, d_2, d_3, d_4)$, hvor $d_i \in \mathbb{F}_2$, til en *modtager*.
- Beskeden går via en *kanal med moderat støj*: den modtagne besked $\mathbf{r} = (r_1, r_2, r_3, r_4)$ afviger højst én bit fra den afsendte besked.

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \mathbf{r} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{bmatrix}$$

- Vi vil finde (og rette) den fejlbehæftede bit!

Eksempel

Hvis $\mathbf{r} = (1,0,0,1)$ er modtaget, så må den afsendte besked have været en blandt følgende:

$$\mathbf{d} = (1,0,0,1),\ (0,0,0,1),\ (1,1,0,1),\ (1,0,1,1),\ (1,0,0,0)$$

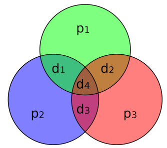
Hamming code – kodningsmatrix

- I stedet for 4 bit $\mathbf{d} = (d_1, d_2, d_3, d_4)$ sendes 7 bit:

$$\tilde{\mathbf{d}} = (\tilde{d}_1, \tilde{d}_2, \tilde{d}_3, \tilde{d}_4, \tilde{d}_5, \tilde{d}_6, \tilde{d}_7) := (p_1, p_2, d_1, p_3, d_2, d_3, d_4).$$

- De ekstra bit p_1, p_2, p_3 kaldes paritetsbit og er givet ved

$$\begin{aligned} p_1 &= d_1 + d_2 + d_4 \\ p_2 &= d_1 + d_3 + d_4 \\ p_3 &= d_2 + d_3 + d_4 \end{aligned}$$



- Forbindelsen mellem $\mathbf{d}$ og $\tilde{\mathbf{d}}$ beskrives ved *kodningsmatricen* $\mathbf{G}$:

$$\tilde{\mathbf{d}} = \begin{bmatrix} d_1 + d_2 + d_4 \\ d_1 + d_3 + d_4 \\ d_1 \\ d_2 + d_3 + d_4 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix} = \mathbf{Gd}.$$

Hamming code – afkodningsmatrix

- Definition af afkodningsmatrix:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

- Den i'te søjle giver tallet i i det binære talsystem:

i	i'te søjle i $\mathbf{H}$	Binær fremstilling af tallet i
1	1 0 0	$1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^2 = 1$
2	0 1 0	$0 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^2 = 2$
3	1 1 0	$1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^2 = 3$
4	0 0 1	$0 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2 = 4$
5	1 0 1	$1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2 = 5$
6	0 1 1	$0 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2 = 6$
7	1 1 1	$1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2 = 7$

- Modtageren får beskeden $\tilde{\mathbf{r}}$ og udregner $\mathbf{H}\tilde{\mathbf{r}}$. Derigennem kan sluttes hvilken bit der måtte være ændret!

Hamming code – løsning del 2

Sætning: Hamming code

- Modtaget besked: $\tilde{\mathbf{r}} = (\tilde{r}_1, \tilde{r}_2, \tilde{r}_3, \tilde{r}_4, \tilde{r}_5, \tilde{r}_6, \tilde{r}_7)$
- Udregn $\mathbf{z} = \mathbf{H}\tilde{\mathbf{r}} = (z_0, z_1, z_2)$ og $j = z_0 2^0 + z_1 2^1 + z_2 2^2 \in \{0, \dots, 7\}$
- Da gælder
  - Hvis $j \in \{0, 1, 2, 4\}$ så er den oprindelige besked $\mathbf{d} = (\tilde{r}_3, \tilde{r}_5, \tilde{r}_6, \tilde{r}_7)$.
  - Hvis $j = 3$ så er den oprindelige besked $\mathbf{d} = (\tilde{r}_3 + 1, \tilde{r}_5, \tilde{r}_6, \tilde{r}_7)$.
  - Hvis $j = 5$ så er den oprindelige besked $\mathbf{d} = (\tilde{r}_3, \tilde{r}_5 + 1, \tilde{r}_6, \tilde{r}_7)$.
  - Hvis $j = 6$ så er den oprindelige besked $\mathbf{d} = (\tilde{r}_3, \tilde{r}_5, \tilde{r}_6 + 1, \tilde{r}_7)$.
  - Hvis $j = 7$ så er den oprindelige besked $\mathbf{d} = (\tilde{r}_3, \tilde{r}_5, \tilde{r}_6, \tilde{r}_7 + 1)$.

- Beviset benytter, at $\mathbf{HG} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.
- Hvis fx $\tilde{\mathbf{r}} = \tilde{\mathbf{d}} + \mathbf{e}_3 = \mathbf{Gd} + \mathbf{e}_3$ så er $\mathbf{H}\tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{H}(\mathbf{Gd} + \mathbf{e}_3) = \mathbf{He}_3$.

Eksempel

- Hvis $\mathbf{d} = (1, 0, 0, 1)$ ønskes sendt så afsendes

$$\tilde{\mathbf{d}} = \mathbf{Gd} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0+1 \\ 1+0+1 \\ 1 \\ 0+0+1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- Den modtagne besked $\tilde{\mathbf{r}}$ vil højst afvige én bit fra $\tilde{\mathbf{d}}$.
- Ved at udregne $\mathbf{H}\tilde{\mathbf{r}}$ kan vi afgøre hvilken bit der blev ændret.

Eksempel: tilfælde med ingen bit ændret

- Lad os sige at modtageren får beskeden

$$\tilde{\mathbf{r}} = (\tilde{r}_1, \tilde{r}_2, \tilde{r}_3, \tilde{r}_4, \tilde{r}_5, \tilde{r}_6, \tilde{r}_7) = (0, 0, 1, 1, 0, 0, 1).$$

- Kanalen ændrede altså ingen bit i $\tilde{\mathbf{d}}$.
  (Men det ved modtageren jo ikke noget om.)
- Modtageren udregner nu vektoren

$$\mathbf{z} = \mathbf{H}\tilde{\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- $\mathbf{z} = (0, 0, 0)$ giver $j = 0 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^2 = 0$, så den oprindelige besked $\mathbf{d}$ er $(\tilde{r}_3, \tilde{r}_5, \tilde{r}_6, \tilde{r}_7) = (1, 0, 0, 1)$. Bingo!

Eksempel: tilfælde med femte bit ændret

- Lad os sige at modtageren får beskeden

$$\tilde{\mathbf{r}} = (\tilde{r}_1, \tilde{r}_2, \tilde{r}_3, \tilde{r}_4, \tilde{r}_5, \tilde{r}_6, \tilde{r}_7) = (0, 0, 1, 1, \mathbf{1}, 0, 1)\,.$$

- Kanalen ændrede altså femte plads i $\tilde{\mathbf{d}}$.
  (Men det ved modtageren jo ikke noget om.)
- Modtageren udregner nu vektoren

$$\mathbf{z} = \mathbf{H}\tilde{\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

- $\mathbf{z} = (1, 0, 1)$ giver $j = 2^0 + 0 \cdot 2^1 + 2^2 = 5$, så $\mathbf{d}$ er $(\tilde{r}_3, \tilde{r}_5 + 1, \tilde{r}_6, \tilde{r}_7) = (1, 1 + 1, 0, 1) = (1, 0, 0, 1)$. Bingo!

Opgave 1

1. Her er en totalmatrix for et ligningssystem:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & -2 & 1 \\ -8 & -5 & 3 & 1 \end{array}\right]$$

   Omform den til reduceret rækkeechelonform.
2. Opskriv alle løsningerne til ligningssystemet.

Opgave 1 løsning

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & -2 & 1 \\ -8 & -5 & 3 & 1 \end{array}\right] +2r_1 \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right] -3r_2 \rightsquigarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & 1 & -8 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right] 1/4 \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1/4 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right]$$

Løsningerne er: $(x_3 = t;\ x_2 = 3 + t;\ x_1 = -1/4\,t - 2)$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1/4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Opgave 2

Betragt omformningen $[\mathbf{A}|\mathbf{I}] \rightsquigarrow [\mathbf{A}^*|\mathbf{X}]$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -8 & -5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -8 & -5 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1/4 & -5/4 & 0 & -3/4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

Hvad kan vi sige om $\mathbf{A}$ og $\mathbf{X}$?

1. $\mathbf{A}$ er invertibel og $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}$
2. $\mathbf{A}$ er ikke invertibel
3. $\mathbf{X}$ er invertibel og $\mathbf{A} = \mathbf{X}^{-1}$
4. $\mathbf{A}$ har en venstreinvers, men ikke nogen højreinvers

Løsning:
$\mathbf{A}$ er ikke invertibel – alle andre valg fører en “down the drain”!

Opgave 3

Betragt totalmatricen

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 7 & 2 \\ 3 & 6 & 9 & 4 \end{array}\right].$$

Hvad kan vi sige om løsningerne til det tilsvarende ligningssystem?

1. Der er netop en løsning
2. Der er uendeligt mange løsninger
3. Der er ingen løsninger

Løsning: rækkeoperationen $-3\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_3 \to \mathbf{r}_3$ leder til

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 7 & 2 \\ 3 & 6 & 9 & 4 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Dvs der er ingen løsninger!

Opgave 4

Hvilken værdi har elementet i første række, anden søjle i matrixproduktet

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & a \\ 9 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 1 \\ 2 & a \end{bmatrix}?$$

1. $4a$
2. $1 + 2a$
3. Det er et trickspørgsmål; matrixproduktet er ikke defineret

Løsning: $1 + 2a$.

Opgave 5

Om nabomatricen $\mathbf{N}$ for en orienteret graf gælder, at elementet i række 7, søjle 9 i matricen $\mathbf{N}^{10}$ er lig med 13.
Hvad betyder det?

1. Der er 10 veje fra hjørne nummer 9 til hjørne nummer 7 af længde 13.
2. Der er 10 veje fra hjørne nummer 7 til hjørne nummer 9 af længde 13.
3. Der er 13 veje fra hjørne nummer 9 til hjørne nummer 7 af længde 10.
4. Der er 13 veje fra hjørne nummer 7 til hjørne nummer 9 af længde 10.
5. Der er 7 veje fra hjørne nummer 10 til hjørne nummer 13 af længde 9.

Løsning: Der er 13 veje fra hjørne nummer 7 til hjørne nummer 9 af længde 10.