

Forelæsning 8: Ortogonal komplement, ortogonal projektion og Gram–Schmidt processen

LinAlgDat 2021/2022

Henrik Holm og Henrik L. Pedersen
Institut for Matematiske Fag
holm@math.ku.dk og henrikp@math.ku.dk

18. maj 2022 — Dias 1/41

Ortogonal komplement

Definition 4.10 (Ortogonale underrum)

To underrum \mathcal{U} og \mathcal{V} af \mathbb{R}^n kaldes **ortogonale** hvis enhver vektor i \mathcal{U} er ortogonal på enhver vektor i \mathcal{V} , dvs. hvis

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \text{for alle} \quad \mathbf{u} \in \mathcal{U} \text{ og } \mathbf{v} \in \mathcal{V}.$$

I dette tilfælde skriver man $\mathcal{U} \perp \mathcal{V}$.

Dias 3/41

Oversigt

- 1 Ortogonal komplement
- 2 Ortogonal projektion
- 3 Gram–Schmidt processen og QR-faktorisering
- 4 Mindste kvadraters metode

Dias 2/41

Eksempel (Ortogonale underrum)

Følgende to underrum \mathcal{U} og \mathcal{V} af \mathbb{R}^3 er ortogonale:

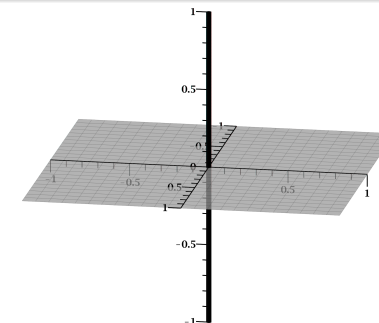
- $\mathcal{U} = x_1x_2$ -planen, dvs.

$$\mathcal{U} = \{(x_1, x_2, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$$

- $\mathcal{V} =$ linien med retningsvektor $(0, 0, 1)$, altså x_3 -aksen:

$$\mathcal{V} = \{(0, 0, t) \in \mathbb{R}^3 \mid t \in \mathbb{R}\}$$

Fordi for alle $\mathbf{u} = (x_1, x_2, 0) \in \mathcal{U}$ og $\mathbf{v} = (0, 0, t) \in \mathcal{V}$ gælder $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$.



Dias 4/41

Eksempel (Underrum som ikke er ortogonale)

Følgende to underrum \mathcal{U} og \mathcal{V} af \mathbb{R}^3 er *ikke* ortogonale:

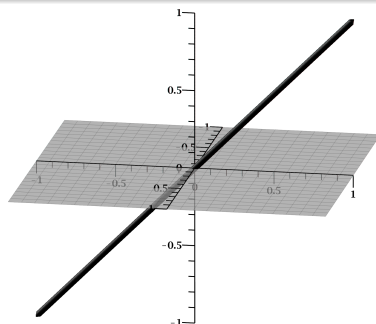
- $\mathcal{U} = x_1x_2$ -planen, dvs.

$$\mathcal{U} = \{(x_1, x_2, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$$

- \mathcal{V} = linien med retningsvektor $(0, 1, 1)$, dvs.

$$\mathcal{V} = \{(0, t, t) \in \mathbb{R}^3 \mid t \in \mathbb{R}\}$$

Fordi fx er $\mathbf{u} = (0, 1, 0) \in \mathcal{U}$ og $\mathbf{v} = (0, 1, 1) \in \mathcal{V}$ men $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 1 \neq 0$.



Dias 5/41

Theorem 4.8 (Ortogonalitet af "span-underrum")

Lad $\mathcal{U} = \text{span}\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p\}$ og $\mathcal{V} = \text{span}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_q\}$ være underrum af \mathbb{R}^n . Da gælder $\mathcal{U} \perp \mathcal{V}$ netop hvis

$$\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{v}_j = 0 \quad \text{for alle} \quad i = 1, \dots, p \quad \text{og} \quad j = 1, \dots, q.$$

I ord: For at checke orthogonalitet af to underrum, er det nok at checke om de to frembringersæt er ortogonale på hinanden.

Dias 7/41

Eksempel (Underrum som ikke er ortogonale)

Følgende to underrum \mathcal{U} og \mathcal{V} af \mathbb{R}^3 er *ikke* ortogonale:

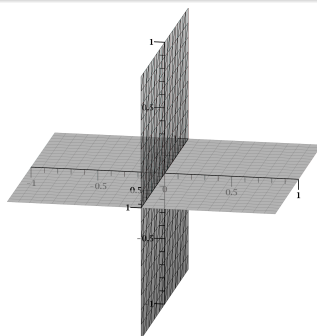
- $\mathcal{U} = x_1x_2$ -planen, dvs.

$$\mathcal{U} = \{(x_1, x_2, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$$

- $\mathcal{V} = x_1x_3$ -planen, dvs.

$$\mathcal{V} = \{(x_1, 0, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1, x_3 \in \mathbb{R}\}$$

Fordi fx er $\mathbf{u} = (1, 0, 0) \in \mathcal{U}$ og $\mathbf{v} = (1, 0, 0) \in \mathcal{V}$ men $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 1 \neq 0$.



Dias 6/41

Eksempel (Ortogonale "span-underrum")

1/2

Betrakt 4×5 matricen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Sidste uge lærte vi at bestemme baser for diverse typer af underrum:

$$\text{En basis for null } \mathbf{A} \text{ er: } \mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\text{En basis for row } \mathbf{A} \text{ er: } \mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

Dias 8/41

Eksempel (Ortogonal "span-underrum")

2/2

Specielt gælder altså:

$$\text{null } \mathbf{A} = \text{span}\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\} \quad \text{og} \quad \text{row } \mathbf{A} = \text{span}\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3\}.$$

Vi vil indse, at

$$\text{null } \mathbf{A} \perp \text{row } \mathbf{A}.$$

Ifølge Theorem 4.8 er det nok at undersøge, om

$$\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{c}_1 = \mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{c}_2 = \mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{c}_3 = \mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{c}_1 = \mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{c}_2 = \mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{c}_3 = 0.$$

Og det checkes let; fx er

$$\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{c}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{og} \quad \mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{c}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 0.$$

Eksemplet illustrerer følgende generelle fænomen:

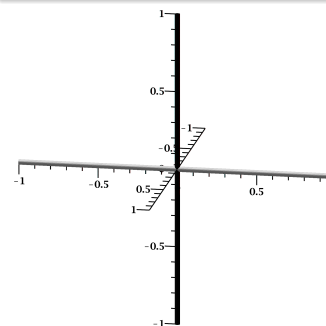
Dias 9/41

Eksempel (Ortogonal komplement)Betragt følgende tre underrum \mathcal{U} , \mathcal{V} og \mathcal{W} af \mathbb{R}^3 :

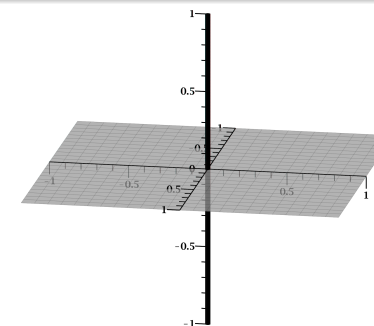
$$\mathcal{U} = \{(0, 0, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 \in \mathbb{R}\} \quad (x_3\text{-aksen})$$

$$\mathcal{V} = \{(0, x_2, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 \in \mathbb{R}\} \quad (x_2\text{-aksen})$$

$$\mathcal{W} = \{(x_1, x_2, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\} \quad (x_1x_2\text{-planen})$$

Da gælder: $\mathcal{V} \perp \mathcal{U}$ men $\mathcal{V} \neq \mathcal{U}^\perp$ og $\mathcal{W} = \mathcal{U}^\perp$.

$$\mathcal{V} \perp \mathcal{U} \text{ men } \mathcal{V} \neq \mathcal{U}^\perp$$



$$\mathcal{W} = \mathcal{U}^\perp$$

Dias 11/41

Ortogonalitet af nulrum og rækkerumFor enhver $m \times n$ matrix \mathbf{A} gælder

$$\text{null } \mathbf{A} \perp \text{row } \mathbf{A}.$$

Det følger, at

$$\text{null } \mathbf{A} \perp \text{col } \mathbf{A}^T \quad \text{og} \quad \text{null } \mathbf{A}^T \perp \text{col } \mathbf{A}.$$

Definition 4.11 (Ortogonal komplement)Lad \mathcal{U} være et underrum af \mathbb{R}^n . Det **ortogonale komplement** \mathcal{U}^\perp til \mathcal{U} består af samtlige vektorer som er ortogonale på alle vektorer i \mathcal{U} , dvs

$$\mathcal{U}^\perp = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = 0 \text{ for alle } \mathbf{u} \in \mathcal{U}\}.$$

Thm. 4.9 (Egenskaber ved ortogonalt komplement)For ethvert underrum \mathcal{U} af \mathbb{R}^n gælder:

- \mathcal{U}^\perp er et underrum af \mathbb{R}^n .
- $\mathcal{U}^\perp \cap \mathcal{U} = \{\mathbf{0}\}$.
- $(\mathcal{U}^\perp)^\perp = \mathcal{U}$.

Dias 10/41

Vi har set, at der for enhver matrix \mathbf{A} gælder:

$$\text{null } \mathbf{A} \perp \text{row } \mathbf{A} \quad [\text{og derfor vil } \text{null } \mathbf{A} \subseteq (\text{row } \mathbf{A})^\perp]$$

Theorem 4.10 (Formler for ortogonale komplement)For enhver matrix \mathbf{A} gælder

$$(\text{row } \mathbf{A})^\perp = \text{null } \mathbf{A}.$$

Det følger, at

$$(\text{col } \mathbf{A})^\perp = \text{null } \mathbf{A}^T$$

$$(\text{null } \mathbf{A})^\perp = \text{row } \mathbf{A}$$

Bemærkning. For enhver $m \times n$ matrix \mathbf{A} gælder

$$\text{rank } \mathbf{A} + \text{nullity } \mathbf{A} = n \quad \text{dvs.} \quad \dim(\text{row } \mathbf{A}) + \dim((\text{row } \mathbf{A})^\perp) = n.$$

Vi skal senere se, at der for ethvert underrum \mathcal{U} af \mathbb{R}^n gælder

$$\dim \mathcal{U} + \dim \mathcal{U}^\perp = n.$$

Dias 12/41

Eksempel (Basis for ortogonalt komplement) 1/2

Betragt 4×5 matricen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Vi betragter først rækkerummet:

$$\mathcal{U} = \text{row } \mathbf{A} \subseteq \mathbb{R}^5.$$

Vi har en beskrivelse af det ortogonale komplement:

$$\mathcal{U}^\perp = (\text{row } \mathbf{A})^\perp \stackrel{!}{=} \text{null } \mathbf{A}.$$

Vores metode til bestemmelse af basis for nulrum giver derfor:

$$\text{En basis for } \mathcal{U}^\perp \text{ er: } \mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Dias 13/41

Theorem 4.11 (Dimension af ortogonalt komplement)

Lad \mathcal{U} være et underum af \mathbb{R}^n . Så gælder:

$$\dim \mathcal{U}^\perp = n - \dim \mathcal{U}.$$

Ydermere gælder, at hvis

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k\} \text{ er en basis for } \mathcal{U}$$

$$\mathcal{C} = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_\ell\} \text{ er en basis for } \mathcal{U}^\perp \quad (\text{hvor } \ell = n - k)$$

da er

$$\mathcal{B} \cup \mathcal{C} = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_\ell\} \text{ en basis for } \mathbb{R}^n.$$

I ord: Hvis man samler baserne for \mathcal{U} og \mathcal{U}^\perp så fås en basis for \mathbb{R}^n .

Dias 15/41

Eksempel (Basis for ortogonalt komplement) 2/2

Vi betragter dernæst søjlerummet:

$$\mathcal{V} = \text{col } \mathbf{A} \subseteq \mathbb{R}^4.$$

Vi har igen en beskrivelse af det ortogonale komplement:

$$\mathcal{V}^\perp = (\text{col } \mathbf{A})^\perp \stackrel{!}{=} \text{null } \mathbf{A}^\top.$$

Udregningen

$$\mathbf{A}^\top = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Gauss-Jordan}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

og vores metode til bestemmelse af basis for nulrum giver derfor:

$$\text{En basis for } \mathcal{V}^\perp \text{ er: } \mathcal{D} = \{\mathbf{d}_1\} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Dias 14/41

Eksempel (Baser for ortogonale komplement) 1/2

Betragt 4×5 matricen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Vi har fundet:

$$\text{En basis for null } \mathbf{A} \text{ er: } \mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\text{En basis for row } \mathbf{A} \text{ er: } \mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

Dias 16/41

Eksempel (Baser for ortogonale komplementer) 2/2

Da null **A** og row **A** er hinandens ortogonale komplementar vil

$$B \cup C = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

ifølge Theorem 4.10 være en basis for \mathbb{R}^5 .

Check:

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Gauss-Jordan}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{I}_5$$

Dias 17/41

Definition 4.12 (Ortogonal projektion – generelt)

Lad \mathcal{U} være et underrum af \mathbb{R}^n og **antag at vi kender en ortogonal basis** $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k\}$ for \mathcal{U} . For enhver vektor \mathbf{v} i \mathbb{R}^n defineres nu:

- Den ortogonale **projektion** af \mathbf{v} på \mathcal{U} er givet ved:

$$\text{proj}_{\mathcal{U}}(\mathbf{v}) = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|^2} \mathbf{u}_1 + \dots + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_k}{\|\mathbf{u}_k\|^2} \mathbf{u}_k \quad (\in \mathcal{U})$$

- Komponenten** af \mathbf{v} ortogonal på \mathcal{U} er givet ved:

$$\text{comp}_{\mathcal{U}}(\mathbf{v}) = \mathbf{v} - \text{proj}_{\mathcal{U}}(\mathbf{v}) \quad (\in \mathcal{U}^\perp)$$

- Spejlingen** af \mathbf{v} i \mathcal{U} er givet ved:

$$\text{refl}_{\mathcal{U}}(\mathbf{v}) = 2 \text{proj}_{\mathcal{U}}(\mathbf{v}) - \mathbf{v}$$

(Faktisk er spejlingen ikke defineret i lærebogen.)

Pointe: $\mathbf{v} = \text{proj}_{\mathcal{U}}(\mathbf{v}) + \text{comp}_{\mathcal{U}}(\mathbf{v})$ og $\text{proj}_{\mathcal{U}}(\mathbf{v}) \perp \text{comp}_{\mathcal{U}}(\mathbf{v})$.

Bemærkning. Hvis $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k\}$ er en **ortonormal** basis for \mathcal{U} så er

$$\text{proj}_{\mathcal{U}}(\mathbf{v}) = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_1) \mathbf{u}_1 + \dots + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_k) \mathbf{u}_k$$

Dias 19/41

Ortogonal projektion

Vi kender: Ortogonal projektion på et **1-dimensionalt** underrum:

$$\text{proj}_{\mathcal{U}}(\mathbf{v}) = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|^2} \mathbf{u} \quad \text{hvor} \quad \mathcal{U} = \text{span}\{\mathbf{u}\}.$$

Vi skal lære om: Ortogonal projektion på et **generelt** underrum \mathcal{U} .

Dias 18/41

Eksempel (Ortogonal projektion på en plan)

Betrakt følgende vektorer i \mathbb{R}^3 :

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Sæt $\mathcal{U} = \text{span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$. Da $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ er en ortogonal basis for \mathcal{U} er:

$$\text{proj}_{\mathcal{U}}(\mathbf{v}) = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|^2} \mathbf{u}_1 + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_2}{\|\mathbf{u}_2\|^2} \mathbf{u}_2 = \frac{2}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{2}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{comp}_{\mathcal{U}}(\mathbf{v}) = \mathbf{v} - \text{proj}_{\mathcal{U}}(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

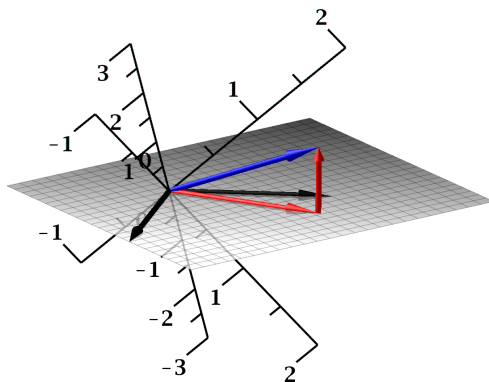
Check:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \perp \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dias 20/41

Illustration af eksemplet

$$\mathcal{U} = \text{span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \quad \text{og} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$



$$\text{proj}_{\mathcal{U}}(\mathbf{v}) = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \text{comp}_{\mathcal{U}}(\mathbf{v}) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dias 21/41

Projektionsmatricen

Lad \mathcal{U} være et underrum af \mathbb{R}^n . Det er geometrisk klart, at

$$\text{proj}_{\mathcal{U}}(-), \text{comp}_{\mathcal{U}}(-), \text{refl}_{\mathcal{U}}(-): \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

er lineære transformationer. Derfor findes $n \times n$ matricer

P – **projektionsmatricen** for \mathcal{U}

C – **komponentmatricen** for \mathcal{U}

R – **spejlingsmatricen** for \mathcal{U}

som for alle $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ opfylder:

$$\text{proj}_{\mathcal{U}}(\mathbf{v}) = \mathbf{P}\mathbf{v}$$

$$\text{comp}_{\mathcal{U}}(\mathbf{v}) = \mathbf{C}\mathbf{v}$$

$$\text{refl}_{\mathcal{U}}(\mathbf{v}) = \mathbf{R}\mathbf{v}$$

Spørgsmål. Hvordan ser matricerne **P**, **C** og **R** ud?

Dias 23/41

Af illustrationen ovenfor fremgår, at $\text{proj}_{\mathcal{U}}(\mathbf{v})$ er den vektor i \mathcal{U} som ligger tættest på (og derfor bedst tilnærmer) \mathbf{v} . Mere præcist:

Theorem 4.13 (Projektion som bedste tilnærmelse)

Lad \mathcal{U} være et underrum af \mathbb{R}^n . For $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ gælder uligheden

$$\|\mathbf{v} - \mathbf{u}\| \geq \|\mathbf{v} - \text{proj}_{\mathcal{U}}(\mathbf{v})\|$$

for enhver vektor $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ som er forskellig fra $\text{proj}_{\mathcal{U}}(\mathbf{v})$.

Dias 22/41

Formel for projektionsmatricen

Lad \mathcal{U} være et underrum af \mathbb{R}^n og **antag at vi kender en ortonormal basis** $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k\}$ for \mathcal{U} . Sæt

$$\mathbf{Q} = (\mathbf{u}_1 \mid \dots \mid \mathbf{u}_k)$$

Matricerne

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q}\mathbf{Q}^T$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{I} - \mathbf{P}$$

$$\mathbf{R} = 2\mathbf{P} - \mathbf{I}$$

(hvor \mathbf{I} er $n \times n$ enhedsmatricen) opfylder:

$$\text{proj}_{\mathcal{U}}(\mathbf{v}) = \mathbf{P}\mathbf{v}$$

$$\text{comp}_{\mathcal{U}}(\mathbf{v}) = \mathbf{C}\mathbf{v}$$

$$\text{refl}_{\mathcal{U}}(\mathbf{v}) = \mathbf{R}\mathbf{v}$$

for alle $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$.

Dias 24/41

Eksempel (Bestemmelse af projektionsmatrix) 1/2

Vi har tidligere set, at vektorerne

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

udgør en **ortogonal** basis for underrummet $\mathcal{U} = \text{span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ af \mathbb{R}^3 .

Derfor vil de normerede vektorer

$$\mathbf{u}'_1 = \frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 0.41 \\ -0.41 \\ 0.82 \end{pmatrix}, \quad \text{og}$$

$$\mathbf{u}'_2 = \frac{\mathbf{u}_2}{\|\mathbf{u}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 0.71 \\ 0.71 \\ 0.00 \end{pmatrix}$$

udgøre en **ortonormal** basis for \mathcal{U} .

Dias 25/41

Gram–Schmidt processen

Lad \mathcal{U} være et underrum af \mathbb{R}^n .

Hvis \mathcal{U} er af en bestemt type, fx row \mathbf{A} , col \mathbf{A} eller null \mathbf{A} , så har vi lært af bestemme en **basis** for \mathcal{U} .

For at beregne ortogonale projektioner på \mathcal{U} skal man bruge en **ortonormal basis** (eller en ortogonal basis) for \mathcal{U} .

Spørgsmål. Givet en (almindelig) basis for \mathcal{U} , er der så en metode til at konstruere en ortonormal basis for \mathcal{U} ?

Svar. Ja! Brug Gram–Schmidt processen.

Dias 27/41

Eksempel (Bestemmelse af projektionsmatrix) 2/2

Sæt

$$\mathbf{Q} = (\mathbf{u}'_1 \mid \mathbf{u}'_2) \simeq \begin{pmatrix} 0.41 & 0.71 \\ -0.41 & 0.71 \\ 0.82 & 0.00 \end{pmatrix}.$$

Projektionsmatricen $\mathbf{P} = \mathbf{Q}\mathbf{Q}^T$ for underrummet \mathcal{U} er nu

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.41 & 0.71 \\ -0.41 & 0.71 \\ 0.82 & 0.00 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.41 & -0.41 & 0.82 \\ 0.71 & 0.71 & 0.00 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

For vektoren

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(gen)finder vi

$$\text{proj}_{\mathcal{U}}(\mathbf{v}) = \mathbf{P}\mathbf{v} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dias 26/41

Algoritme (4.52): Gram–Schmidt processen

Lad $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ være **lineært uafhængige** vektorer, og dermed en basis for underrummet $\mathcal{U} = \text{span}\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$. Definér vektorerne:

Normering af vektoren:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_1 &= \frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|} && \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{q}_2 &= \frac{\mathbf{u}_2 - (\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{q}_1)\mathbf{q}_1}{\|\mathbf{u}_2 - (\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{q}_1)\mathbf{q}_1\|} && \text{comp}_{\text{span}\{\mathbf{q}_1\}}(\mathbf{u}_2) \\ \mathbf{q}_3 &= \frac{\mathbf{u}_3 - (\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{q}_1)\mathbf{q}_1 - (\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{q}_2)\mathbf{q}_2}{\|\mathbf{u}_3 - (\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{q}_1)\mathbf{q}_1 - (\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{q}_2)\mathbf{q}_2\|} && \text{comp}_{\text{span}\{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2\}}(\mathbf{u}_3) \\ \vdots &&& \vdots \end{aligned}$$

Da er $\{\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n\}$ en ortonormal basis for \mathcal{U} .

Dias 28/41

Eksempel (Gram–Schmidt processen)

1/3

Betragt de lineært uafhængige vektorer

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Gram–Schmidt processen giver:

$$\mathbf{q}_1 = \frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Vi beregner nu

$$\begin{aligned} \mathbf{q}'_2 &= \mathbf{u}_2 - (\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{q}_1) \mathbf{q}_1 \\ &= \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} - \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{4}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dias 29/41

Eksempel (Gram–Schmidt processen)

3/3

Vi konkluderer, at

$$\{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3\} = \left\{ \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

er en ortonormal basis for underrummet

$$\mathcal{U} = \text{span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}.$$

Bemærkning. Eksemplet viser hvordan Gram–Schmidt processen fungerer i praksis. Men faktisk er $\mathcal{U} = \text{span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ hele \mathbb{R}^3 , så

$$\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

er en simple ortonormal basis for \mathcal{U} .

Dias 31/41

Eksempel (Gram–Schmidt processen)

2/3

Dermed er

$$\mathbf{q}_2 = \frac{\mathbf{q}'_2}{\|\mathbf{q}'_2\|} = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Endelig beregnes

$$\begin{aligned} \mathbf{q}'_3 &= \mathbf{u}_3 - (\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{q}_1) \mathbf{q}_1 - (\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{q}_2) \mathbf{q}_2 \\ &= \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} - \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dermed er

$$\mathbf{q}_3 = \frac{\mathbf{q}'_3}{\|\mathbf{q}'_3\|} = \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dias 30/41

QR-faktoriserings

Ved at holde lidt nøjere regnskab med hvad der foregår i Gram–Schmidt processen kan man opnå følgende:

QR-faktoriserings

Lad $\mathbf{A} = (\mathbf{u}_1 | \dots | \mathbf{u}_n)$ være en $m \times n$ matrix med $\text{rank } \mathbf{A} = n$.

Brug Gram–Schmidt på søjlerne i \mathbf{A} og definér tallene r_{ij} som følger:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_1 &= \frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|} = \frac{\mathbf{u}_1}{r_{11}} \\ \mathbf{q}_2 &= \frac{\mathbf{u}_2 - (\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{q}_1) \mathbf{q}_1}{\|\mathbf{u}_2 - (\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{q}_1) \mathbf{q}_1\|} = \frac{\mathbf{u}_2 - r_{12} \mathbf{q}_1}{r_{22}} \\ \mathbf{q}_3 &= \frac{\mathbf{u}_3 - (\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{q}_1) \mathbf{q}_1 - (\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{q}_2) \mathbf{q}_2}{\|\mathbf{u}_3 - (\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{q}_1) \mathbf{q}_1 - (\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{q}_2) \mathbf{q}_2\|} = \frac{\mathbf{u}_3 - r_{13} \mathbf{q}_1 - r_{23} \mathbf{q}_2}{r_{33}} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Dvs.

$$r_{ij} = \mathbf{q}_i \cdot \mathbf{u}_j \quad \text{for } i < j$$

$$r_{jj} = \|\mathbf{u}_j - r_{1j} \mathbf{q}_1 - r_{2j} \mathbf{q}_2 - \dots - r_{j-1,j} \mathbf{q}_{j-1}\| = \|\mathbf{q}'_j\|.$$

Dias 32/41

QR-faktorisering (fortsat)

Da opnås følgende QR-faktorisering af \mathbf{A} :

$$\mathbf{A} = \mathbf{QR} = \underbrace{(\mathbf{q}_1 | \mathbf{q}_2 | \dots | \mathbf{q}_n)}_{\mathbf{Q}} \underbrace{\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ 0 & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & r_{nn} \end{pmatrix}}_{\mathbf{R}}$$

hvor

- \mathbf{Q} er en $m \times n$ matrix med ortonormale søjler, og
- \mathbf{R} er en invertibel $n \times n$ øvre trekantsmatrix.

Ved løsning af problemer som kræver lineær algebra kan det, i datalogiske sammenhænge, være ganske tidsbesparende at lave QR-faktoriseringer af de involverede matrixer.

Dias 33/41

Eksempel (QR-faktorisering)

2/2

$$\begin{aligned} r_{13} &= \mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{u}_3 \simeq 13.63 \\ r_{23} &= \mathbf{q}_2 \cdot \mathbf{u}_3 \simeq 2.63 \end{aligned} \quad \mathbf{q}'_3 = \mathbf{u}_3 - r_{13}\mathbf{q}_1 - r_{23}\mathbf{q}_2 \simeq \begin{pmatrix} -0.20 \\ 0.10 \\ 0.40 \\ -0.30 \end{pmatrix}$$

$$r_{33} = \|\mathbf{q}'_3\| \simeq 0.55 \quad \mathbf{q}_3 = \frac{\mathbf{q}'_3}{r_{33}} \simeq \begin{pmatrix} -0.37 \\ 0.18 \\ 0.73 \\ -0.55 \end{pmatrix}$$

Vi har nu

$$\mathbf{A} = \mathbf{QR} = (\mathbf{q}_1 | \mathbf{q}_2 | \mathbf{q}_3) \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ 0 & r_{22} & r_{23} \\ 0 & 0 & r_{33} \end{pmatrix}$$

dvs.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.00 & 0.84 & -0.37 \\ 0.27 & 0.48 & 0.18 \\ 0.53 & 0.12 & 0.73 \\ 0.80 & -0.24 & -0.55 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11.22 & 12.83 & 13.63 \\ 0 & 1.20 & 2.63 \\ 0 & 0 & 0.55 \end{pmatrix}$$

Dias 35/41

Eksempel (QR-faktorisering)

1/2

Betragt 4×3 matrixen

$$\mathbf{A} = (\mathbf{u}_1 | \mathbf{u}_2 | \mathbf{u}_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 10 \end{pmatrix}$$

Vi udregner (linje for linje):

$$\begin{aligned} r_{11} &= \|\mathbf{u}_1\| \simeq 11.22 & \mathbf{q}_1 &= \frac{\mathbf{u}_1}{r_{11}} \simeq \begin{pmatrix} 0.00 \\ 0.27 \\ 0.53 \\ 0.80 \end{pmatrix} \\ r_{12} &= \mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{u}_2 \simeq 12.83 & \mathbf{q}'_2 &= \mathbf{u}_2 - r_{12}\mathbf{q}_1 \simeq \begin{pmatrix} 1.00 \\ 0.57 \\ 0.14 \\ -0.29 \end{pmatrix} \\ r_{22} &= \|\mathbf{q}'_2\| \simeq 1.20 & \mathbf{q}_2 &= \frac{\mathbf{q}'_2}{r_{22}} \simeq \begin{pmatrix} 0.84 \\ 0.48 \\ 0.12 \\ -0.24 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dias 34/41

Mindste kvadraters metode

For $m \times n$ matrix \mathbf{A} betragter vi et lineært ligningssystem

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}.$$

Hvis ligningssystemet er inkonsistent (dvs. det har ingen løsning), så efterspørger vi i stedet den vektor \mathbf{x} som gør størrelsen

$$\|\mathbf{b} - \mathbf{Ax}\|$$

mindst mulig. Theorem 4.13 viser, at vi skal vælge $\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}}$ hvor

$$\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} = \text{proj}_{\text{col } \mathbf{A}}(\mathbf{b}).$$

For $\bar{\mathbf{x}}$ gælder altså

$$\mathbf{b} - \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{b} - \text{proj}_{\text{col } \mathbf{A}}(\mathbf{b}) = \text{comp}_{\text{col } \mathbf{A}}(\mathbf{b}) \in (\text{col } \mathbf{A})^\perp = \text{null } \mathbf{A}^T$$

og dermed er

$$\mathbf{A}^T(\mathbf{b} - \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}.$$

Den søgte vektor $\bar{\mathbf{x}}$ tilfredsstiller altså følgende ligningssystem:

Normal ligningerne (Normal equations)

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} \bar{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^T \mathbf{b}$$

Dias 36/41

Men kan normalligningerne overhovedet løses?

Normalligningerne (Normal equations)

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} \bar{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^T \mathbf{b}$$

I det oprindelige inkonsistente ligningsystem

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (\text{hvor } \mathbf{A} \text{ er en } m \times n \text{ matrix})$$

er der typisk flere ligninger end ubekendte ($m > n$) og $\text{rank } \mathbf{A} = n$.

Theorem 4.16(a) (Løsning af normalligningerne)

Lad \mathbf{A} være en $m \times n$ matrix. Hvis $\text{rank } \mathbf{A} = n$ så er $n \times n$ matrixen $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ invertibel og derfor har normalligningerne

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} \bar{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^T \mathbf{b}$$

den entydigt bestemte løsning

$$\bar{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{b}.$$

Dette $\bar{\mathbf{x}}$ kaldes **mindste kvadraters løsning**.

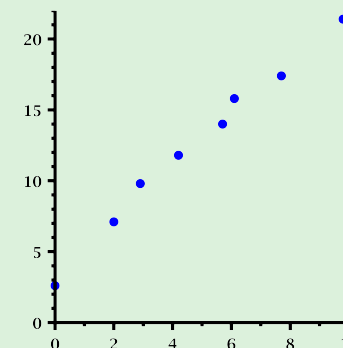
Dias 37/41

Eksempel (Mindste kvadraters metode)

1/3

Vi har givet følgende målepunkter:

x	0.0	2.0	2.9	4.2	5.7	6.1	7.7	9.8
y	2.6	7.1	9.8	11.8	14.0	15.8	17.4	21.4



Vi vil finde den bedste rette linie $y = ax + b$ gennem målepunkterne.

Dias 38/41

Vi opsummerer:

Mindste kvadraters metode (eller lineær regression)

Lad \mathbf{A} være en $m \times n$ matrix med $\text{rank } \mathbf{A} = n$. Den bedste tilnærmede løsning til ligningssystemet

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

er **mindste kvadraters løsning**, dvs.

$$\bar{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{b}.$$

Bemærkning. Lad \mathbf{A} være en $m \times n$ matrix med $\text{rank } \mathbf{A} = n$. Vi har

$$\text{proj}_{\text{col } \mathbf{A}}(\mathbf{b}) = \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{b}$$

og derfor er

$$\mathbf{P} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T$$

projektionsmatricen for underrummet $\mathcal{U} = \text{col } \mathbf{A}$.

(Hvis \mathbf{A} er ortogonal, så er $\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{I}$ og vi genfinder formelen $\mathbf{P} = \mathbf{A}\mathbf{A}^T$)

Dias 38/41

Eksempel (Mindste kvadraters metode)

2/3

Vi skal altså finde den bedste tilnærmede løsning til ligningssystemet:

$$\begin{cases} a \cdot 0.0 + b = 2.6 \\ a \cdot 2.0 + b = 7.1 \\ a \cdot 2.9 + b = 9.8 \\ a \cdot 4.2 + b = 11.8 \\ a \cdot 5.7 + b = 14.0 \\ a \cdot 6.1 + b = 15.8 \\ a \cdot 7.7 + b = 17.4 \\ a \cdot 9.8 + b = 21.4 \end{cases} \quad \text{dvs.} \quad \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

hvor

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.0 & 1 \\ 2.0 & 1 \\ 2.9 & 1 \\ 4.2 & 1 \\ 5.7 & 1 \\ 6.1 & 1 \\ 7.7 & 1 \\ 9.8 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2.6 \\ 7.1 \\ 9.8 \\ 11.8 \\ 14.0 \\ 15.8 \\ 17.4 \\ 21.4 \end{pmatrix}.$$

Dias 40/41

Eksempel (Mindste kvadraters metode)**3/3**

Den bedste tilnærmede løsning til ligningen $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ er

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{x}} &= \begin{pmatrix} \bar{a} \\ \bar{b} \end{pmatrix} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{b} \\ &= \begin{pmatrix} 255.08 & 38.40 \\ 38.40 & 8.00 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0.0 & 2.0 & 2.9 & 4.2 & 5.7 & 6.1 & 7.7 & 9.8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2.6 \\ 7.1 \\ 9.8 \\ 11.8 \\ 14.0 \\ 15.8 \\ 17.4 \\ 21.4 \end{pmatrix} \\ &\simeq \begin{pmatrix} 1.873 \\ 3.497 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Og den bedste rette linie gennem målepunkterne er derfor

$$y = \bar{a}x + \bar{b} = 1.873x + 3.497$$

