LinAlgDat — Projekt A

Helga Rykov Ibsen <mcv462> Hold 2

6. maj 2022

1 Opgave 1

(a)

For at foretage rækkeoperationer i den nævnte rækkefølge, starter vi med at omskrive ligningssystemet til matrixform:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & a \\ a & a & 4 & 1 \\ a & 2 & 2a & 1 \end{array}\right]$$

1.rækkeoperation: $-a/2 \cdot r_1 + r_2 \rightarrow r_2$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & a \\ 0 & 0 & 4-\frac{a}{2} & 1-\frac{a^2}{2} \\ a & 2 & 2a & 1 \end{array}\right]$$

2.rækkeoperation: $-a/2 \cdot r_1 + r_3 \rightarrow r_3$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & a \\ 0 & 0 & 4-\frac{a}{2} & 1-\frac{a^2}{2} \\ 0 & 2-a & \frac{3a}{2} & 1-\frac{a^2}{2} \end{array}\right]$$

3.rækkeoperation: $r_2 \leftrightarrow r_3$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & a \\ 0 & 2-a & \frac{3a}{2} & 1-\frac{a^2}{2} \\ 0 & 0 & 4-\frac{a}{2} & 1-\frac{a^2}{2} \end{array}\right]$$

4.rækkeoperation: $1/(2-a) \cdot r_2 \rightarrow r_2$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & a \\ 0 & 1 & \frac{3a}{4-2a} & \frac{2-a^2}{4-2a} \\ 0 & 0 & 4-\frac{a}{2} & 1-\frac{a^2}{2} \end{array}\right]$$

5.rækkeoperation: $2/(8-a) \cdot r_3 \rightarrow r_3$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & a \\ 0 & 1 & \frac{3a}{4-2a} & \frac{2-a^2}{4-2a} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2-a^2}{8-a} \end{array}\right]$$

6.rækkeoperation: $-3a/(4-2a) \cdot r_3 + r_2 \rightarrow r_2$ og den fremkomne matrix:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & a \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4-2a^2}{8-a} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2-a^2}{8-a} \end{array}\right]$$

(b)

Vi indsætter $a = 8$ ind i ligningssystemet og omsriver det til matrixform:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 8 \\ 8 & 8 & 4 & 1 \\ 8 & 2 & 16 & 1 \end{array}\right]$$

1.rækkeoperation: $r_1 \leftrightarrow r_3$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 8 & 2 & 16 & 1 \\ 8 & 8 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 8 \end{array}\right]$$

2.rækkeoperation: $r_2 - r_1 \rightarrow r_2$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 8 & 2 & 16 & 1 \\ 0 & 6 & -12 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 8 \end{array}\right]$$

3.rækkeoperation: $4r_3 - r_2 \rightarrow r_3$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 8 & 2 & 16 & 1 \\ 0 & 6 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 31 \end{array}\right]$$

Da rank af totalmatrix $\mathbf{A}$ er 3 og rank af den reducerede matrix, lad os kalde den $\mathbf{R}$, er 2 — altså rank $\mathbf{A} >$ rank $\mathbf{R}$ — er løsningsmængden tom.

(c)

Vi indsætter $a = 2$ ind i ligningssystemet og omsriver det til matrixform:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \end{array}\right]$$

1.rækkeoperation: $r_3 - r_2 \to r_3$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

2.rækkeoperation: $r_2 - r_1 \to r_2$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Vi kan finde nu x_3 som:

$$\begin{aligned} 3x_3 &= -1 \\ x_3 &= -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

Nu finder vi x_2 og x_1 ved bagudsubstitution ved at sætte x_3 ind i den første ligning:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 - \frac{1}{3} &= 2 \\ x_1 + x_2 &= \frac{7}{6} \\ x_2 &= \frac{7}{6} - x_1 \\ x_1 &= \frac{7}{6} - x_2 \end{aligned}$$

Vi kan skrive det endelige resultat på følgende måde:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{6} - x_2 \\ \frac{7}{6} - x_1 \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Hvis $a = 2$, så har ligningssystemet uendeligt mange løsninger.

Den rækkereducerede totalmatrix i (1) kan nemt bruges til at finde x_1, x_2 og x_3, når $a = 2$:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2\cdot 2^2+4\cdot 2-5}{2-8} \\ \frac{2(2^2-2)}{2-8} \\ \frac{2^2-2}{2-8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{11}{6} \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

(d)

Vi starter med at indsætte $a = 0$ ind i koefficientmatricen **A** og udregner dens inverse $\mathbf{A}^{-1}$ på følgende måde (cf. bogen s. 78):

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

1.rækkeoperation: $r_2 \leftrightarrow r_3$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

2-4 rækkeoperationer: Vi skalerer række 1 og 2 med 1/2 og række 3 med 1/4:

$$\begin{aligned} 1/2r_1 &\to r_1 \\ 1/2r_2 &\to r_2 \\ 1/4r_3 &\to r_3 \end{aligned}$$

og får:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{array}\right]$$

5.rækkeoperation: $(-1/2)r_3 + r_1 \to r_1$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{array}\right]$$

6.rækkeoperation: $(-1)r_2 + r_1 \to r_1$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{array}\right]$$

Ifølge COMPUTATION på s. 78 er

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{I}_3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{I}_3 & \mathbf{X} \end{array}\right]$$

Hermed har vi fundet $\mathbf{X} = \mathbf{A^{-1}}$:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix}$$

Nu ganger vi $\mathbf{A^{-1}}$ med den givne vektor og får:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

2 Opgave 2

(a)

Vi starter med at bestemme den elementære matrix $\mathbf{E_i}$, som svarer til rækkeoperationerne ero_i.

ero_1: $-3r_1 + r_2 \to r_2$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ero_2: $(-3)r_3 \to r_3$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

ero_3: $r_1 \leftrightarrow r_2$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ero_4: $5r_3 + r_1 \to r_1$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim E_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Da vi ved at **A** er en kvadratisk matrix 3 x 3, og **X** er en unik matrix ifølge Theorem 2.3, så gælder det ifølge Theorem 2.4, at **X** er både venstre-invers og højre-invers for **A**.

Da $\mathbf{X} = \mathbf{E_4}, \mathbf{E_3}, \mathbf{E_2}, \mathbf{E_1}$, så er den venstre-invers for **A** lig med:

$$\mathbf{E_4} \cdot \mathbf{E_3} \cdot \mathbf{E_2} \cdot \mathbf{E_1} \cdot \mathbf{A}$$

Og da vi ved at **X** også er højre-invers for **A** (Theorem 2.4), får vi den højre-invers for **A**:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{E_4} \cdot \mathbf{E_3} \cdot \mathbf{E_2} \cdot \mathbf{E_1}$$

(b)

Vi starter med at finde de elementære inverse matricer for $\mathbf{E_i}^{\mathbf{-1}}$ ved at udføre samme rækkeoperationer som i 2.(a):

ero_1: $-3r_1 + r_2 \rightarrow r_2$:

$$[E_1|I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim [I|E_1^{-1}] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

ero_2: $(-3)r_3 \rightarrow r_3$:

$$[E_2|I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim [I|E_2^{-1}] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{array}\right]$$

ero_3: $r_1 \leftrightarrow r_2$:

$$[E_3|I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim [I|E_3^{-1}] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

ero_4: $5r_3 + r_1 \rightarrow r_1$:

$$[E_4|I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim [I|E_4^{-1}] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Da vi ved at $\mathbf{A}$ er produkt af elementære matricer (cf. (2.31) i bogen):

$$\mathbf{A} = \mathbf{E_1}^{\mathbf{-1}} \cdot \mathbf{E_2}^{\mathbf{-1}} \cdot \mathbf{E_3}^{\mathbf{-1}} \cdot \mathbf{E_4}^{\ \mathbf{-1}}$$

kan vi nemt udregne det i den rækkefølge der fremgår af difinitionen ovenfor og får:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

(c)

Lad os gange $\mathbf{E_4E_3E_2E_1}$ sammen og kalde det endelige resultat $\mathbf{M}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim M = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -15 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Lad $\mathbf{X}$ være lig med to sidste rækker i matrix $\mathbf{M}$:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Vi skal nu vise at $\mathbf{X}$ er en venstre-invers til $\mathbf{B}$, dvs. $\mathbf{XB} = \mathbf{I_2}$ (cf. (2.29) i bogen, s. 84):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -5 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \sim I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Vi har hermed vist at $\mathbf{X}$ er en venstre-invers til $\mathbf{B}$.

For at finde alle venstre-inverser til $\mathbf{B}$, starter vi med at opstille et ligningssystem hvor $\mathbf{XB} = \mathbf{I_2}$:

$$\left[\begin{array}{ccc:c:c} & & & 1 & 0 \\ & & & 3 & -5 \\ & & & 0 & -\frac{1}{3} \\ \hline x_1 & x_2 & x_3 & x_1 + 3x_2 = 1 & -5x_2 - \frac{1}{3}x_3 = 0 \\ x_4 & x_5 & x_6 & x_4 + 3x_5 = 0 & -5x_5 - \frac{1}{3}x_6 = 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 1 \\ -5x_2 - \frac{1}{3}x_3 = 0 \\ x_4 + 3x_5 = 0 \\ -5x_5 - \frac{1}{3}x_6 = 1 \end{cases}$$

Nu omskriver vi ligningssytemet til matrixform hvor vi kan se at øverste venstre hjørne og nederste højre hjørne svarer til $\mathbf{B^T}$:

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & -\frac{1}{3} & 1 \end{array}\right]$$

For at kunne aflæse alle de eventuelle løsninger til ligningssystemet, anvender vi Gauss-elimination i form af $-\frac{1}{5}r_2 \to r_2$ og $-\frac{1}{5}r_4 \to r_4$ og får:

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{15} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{15} & -\frac{1}{5} \end{array}\right]$$

Pivotelementerne står i positionerne $(1,1)$, $(2,2)$, $(3,4)$ og $(4,5)$. Dermed er x_6 en fri variabel. Sætter vi $x_6 = t$ finder vi ved bagudsubstitution: $x_5 + \frac{1}{15} = -\frac{1}{5}$ dvs.

$$x_5 = -\frac{1}{5} - \frac{1}{15}t$$

Dette giver (svarende til tredje ligning):

$$x_4 + 3 \cdot \left(-\frac{1}{5} - \frac{1}{15}t\right) = 0 \quad \text{dvs} \quad x_4 = \frac{3}{5} + \frac{1}{5}t,$$

Pivotelementet står ikke i positionen $(2,3)$, så x_3 også er en fri variabel. Vi sætter $x_3 = s$ og finder løsningen til anden ligning:

$$x_2 + \frac{1}{15}s = 0 \quad \text{dvs} \quad x_2 = -\frac{1}{15}s,$$

og endeligt

$$x_1 = 1 - 3x_2 = 1 - 3 \cdot \left(-\frac{1}{15}s\right) = 1 + \frac{1}{5}s.$$

Dette kan skrives som

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{1}{5}s \\ -\frac{1}{15}s \\ s \\ \frac{3}{5} + \frac{1}{5}t \\ -\frac{1}{5} - \frac{1}{15}t \\ t \end{bmatrix}$$

Vi kan konkludere at ligningssystemet har altså uendeligt mange venstre-inverser til $\mathbf{B}$.

Det viser sig at rank $\mathbf{B} = 2$, fordi den har en venstre-invers (cf. Theorem 2.10). Hvis $\mathbf{B}$ også skal have en højre-invers, skal rank $\mathbf{B} = 3$, og den er 2. $\mathbf{B}$ har altså ingen højre-invers.

3 Opgave 3

(a)

Vi fremstiller den orienterede graf med 5 knuder som en nabomatrix **N**:

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vi ved at potenser af nabomatricen kan fortælle os om antallet af vejer af en given længde i en graf. Hvis vi skal finde antallet af veje af længde 5 fra i til k, så skal vi se på elementet a_{ik} i $\mathbf{N^5}$.

Den ene fremgangsmåde er at gange den givne $\mathbf{N^4}$ med **N** for at få $\mathbf{N^5}$, hvorefter vi aflæser elementet a_{41}.

Hvis vi vil slippe for det store regnearbejde ved at gange en $5x5$ matrix med sig selv, kan vi bruge nabomatricen **N** og den givne $\mathbf{N^4}$.

Vi ser på, hvor i 1. søjle i **N** der er 1-taller: her er elementerne $a_{31} = 1$, $a_{41} = 1$ og $a_{51} = 1$.

Nu betragter vi $\mathbf{N^4}$ og ser på elementerne i 4. række, som har 1-taller i 1.søjle af **N**: nemlig $a_{43} = 9$, $a_{44} = 5$ og $a_{45} = 3$.

Og endeligt lægger vi dem sammen og få antallet af veje fra knude 4 til knude 1 af længde netop 5:

$$\begin{aligned} a_{43} + a_{44} + a_{45} &= \\ 9 + 5 + 3 &= 17 \end{aligned}$$

(b)

Vi omskriver nabomatix **N** til linkmatrix **A** ved at normalisere sidernes samlede score og transformere **N**, så $\mathbf{N^T} = \mathbf{A}$:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix}$$

(c)

Vi anvender fremgangsmåden i artiklen "Google's page rank" for at bestemme en vektor $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ som opfylder ligningen $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ og foretage på grundlag af dette en rangordning af siderne i webbet.

Vi starter med at omskrive $\mathbf{Ax} = \mathbf{x}$ til $\mathbf{Ax}$ **-** $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ og opskriver den tilsvarende totalmatrix:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} -1 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & -1 & 0 \end{array}\right]$$

Vi skalerer hver række i $\mathbf{A}$ med 4 for at komme af med brøker:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} -4 & 0 & 4 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -4 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -4 & 0 \end{array}\right]$$

Vi bringer totalmatrix $\mathbf{A}$ på den reducerede echalonform vha. CAS-værktøjet og får:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{16}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{25}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{8}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Da x_5 er en fri variabel, kan vi sætte $x_5 = t$ og finde løsningen til x_4 ved bagudsubstitution: $x_4 - \frac{8}{3}t = 0$ dvs.

$$x_4 = \frac{8}{3}t$$

Dette giver (svarende til tredje ligning):

$$x_3 - \frac{25}{6}t = 0 \quad \text{dvs} \quad x_3 = \frac{25}{6}t,$$

Dernæst kan finde løsningen svarende til anden ligning:

$$x_2 - \frac{2}{3}t = 0 \quad \text{dvs} \quad x_2 = \frac{2}{3}t,$$

Endeligt kan vi finde løsningen til første ligning:

$$x_1 - \frac{16}{3}t = 0 \quad \text{dvs} \quad x_1 = \frac{16}{3}t,$$

Dette kan skrives som

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{16}{3}t \\ \frac{2}{3}t \\ \frac{25}{6}t \\ \frac{8}{3}t \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} \frac{16}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{25}{6} \\ \frac{8}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Vi kan nu konkludere at side 1 er den vigtigste, så kommer side 3, dernæst side 4, så side 5 og til sidst side 2.