LinAlgDat — Projekt C

Helga Rykov Ibsen <mcv462> Hold 2

9. juni 2022

1 Opgave 1

(a)

For at bestemme en QR-faktorisering af $\mathbf{A}$ bestående af søjlerne $\{a_1, a_2, a_3\}$, anvender vi Gram-Schmidts algoritme (4.52) (se "f8-slides") og bestemmer en m x n $\mathbf{Q}$ matrix bestående af en ortonormal basis $\{v_1, v_2, v_3\}$ for underrummet $\mathcal{U}$, samt en invertibel n x n $\mathbf{R}$ øvre trekantsmatrix, bestående af kofaktorer (:= normer af ortogonale vektorer samt prikprodukter af de oprindelige vektorer $\{a_1, a_2, a_3\}$ i $\mathbf{A}$ og deres ortogonale pendanter). Kort sagt består Gram-Schmidts algoritme i at man finder de ortogonale vektorer og normaliserer dem bagefter. I fremstillingen nedenfor gør vi begge dele på én gang:

$$v_1 = \frac{a_1}{||a_1||} = \frac{a_1}{r_{11}} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.17 \\ 0.83 \\ -0.5 \\ 0.17 \end{bmatrix} \quad r_{11} = \sqrt{\text{Prik} a_1 \cdot a_1} = 6 \tag{1}$$

$$v_2 = \frac{a_2 - (\text{Prik} a_2 \cdot v_1) \cdot v_1}{||a_2 - (\text{Prik} a_2 \cdot v_1) \cdot v_1||} = \frac{a_2 - r_{12} \cdot v_1}{r_{22}} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} v_2' = {} & a_2 - (\text{Prik} a_2 \cdot v_1) \cdot v_1 \\ = {} & \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad r_{12} = \text{Prik} a_2 \cdot v_1 = -3 \\ = {} & \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} - (-3 \cdot \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}) \\ = {} & \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad r_{22} = \sqrt{\text{Prik} v_2' \cdot v_2'} = \sqrt{\begin{bmatrix} 5/2 \\ 1/2 \\ 3/2 \\ -1/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5/2 \\ 1/2 \\ 3/2 \\ -1/2 \end{bmatrix}} = 3 \end{aligned}$$

$$v_2 = \frac{v_2'}{r_{22}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.83 \\ 0.17 \\ 0.5 \\ -0.17 \end{bmatrix}$$

$$v_3 = \frac{a_3 - (\text{Prik}a_3 \cdot v_1) \cdot v_1 - (\text{Prik}a_3 \cdot v_2) \cdot v_2}{||a_3 - (\text{Prik}a_3 \cdot v_1) \cdot v_1 - (a_3 \cdot v_2) \cdot v_2||} = \frac{a_3 - r_{13} \cdot v_1 - r_{23} \cdot v_2}{r_{33}} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} v_3' = {} & a_3 - (\text{Prik}a_3 \cdot v_1) - (a_3 \cdot v_2) \cdot v_2 \\ = {} & \begin{bmatrix} -5 \\ -13 \\ 15 \\ 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -5 \\ -13 \\ 15 \\ 7 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} - & r_{13} = -18 \\ - {} & \begin{bmatrix} -5 \\ -13 \\ 15 \\ 7 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot v_2 & r_{23} = 0 \\ = {} & \begin{bmatrix} -5 \\ -13 \\ 15 \\ 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 \\ -15 \\ 9 \\ -3 \end{bmatrix} - 0 \\ = {} & \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 6 \\ 10 \end{bmatrix} & r_{33} = \sqrt{\text{Prik}v_3' \cdot v_3'} = 12 \end{aligned}$$

$$v_3 = \frac{v_3'}{r_{33}} = \frac{1}{12} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 6 \\ 10 \end{bmatrix} = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 6 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.17 \\ 0.17 \\ 0.5 \\ 0.83 \end{bmatrix}$$

Vi har nu

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{R} = (v_1|v_2|v_3) \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ 0 & r_{22} & r_{23} \\ 0 & 0 & r_{33} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.17 & 0.83 & -0.17 \\ 0.83 & 0.17 & 0.17 \\ -0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0.17 & -0.17 & 0.83 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & -3 & -18 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} \tag{4}$$

(b)

Vi ved at matricen $\mathbf{Q}$ fra opgaven (a) overfor består af vektorerne $\{v_1, v_2, v_3\}$ som udgør en ortonormal basis for $\mathcal{U}$. Vi anvender derfor formlen (se f8-slidsene) $\mathbf{P} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^\mathbf{T}$ og bestemmer projektionsmatricen $\mathbf{P}$ for underrummet $\mathcal{U}$ først ved at transponere $\mathbf{Q}$ og dernæst ved at gange $\mathbf{Q}$ og $\mathbf{Q}^\mathbf{T}$ sammen:

$$\mathbf{Q}^\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0.17 & 0.83 & -0.5 & 0.17 \\ 0.83 & 0.17 & 0.5 & -0.17 \\ -0.17 & 0.17 & 0.5 & 0.83 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^\mathbf{T} \begin{bmatrix} 0.17 & 0.83 & -0.17 \\ 0.83 & 0.17 & 0.17 \\ -0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0.17 & -0.17 & 0.83 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.17 & 0.83 & -0.5 & 0.17 \\ 0.83 & 0.17 & 0.5 & -0.17 \\ -0.17 & 0.17 & 0.5 & 0.83 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.75 & 0.25 & 0.25 & -0.25 \\ 0.25 & 0.75 & -0.25 & 0.25 \\ 0.25 & -0.25 & 0.75 & 0.25 \\ -0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.75 \end{bmatrix}$$

(c)

Fra opgaven (a) ved vi at søjlerne i matricen $\mathbf{Q}$ $\{v_1, v_2, v_3\}$ udgør en ortonormal basis for underrummet $\mathcal{U}$. Vi kan derfor anvende Definitionen 4.12 (se f8-slidsene) og finde den ortogonale projektion af vektoren $\mathbf{x}$ på $\mathcal{U}$ som følger:

$$
\begin{aligned}
proj_{\mathrm{U}}(x) = \; & (\mathrm{Prik} x \cdot v_1) \cdot v_1 + (\mathrm{Prik} x \cdot v_2) \cdot v_2 + (\mathrm{Prik} x \cdot v_3) \cdot v_3 \\
= \; & (\mathrm{Prik} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/6 \\ 5/6 \\ -3/6 \\ 1/6 \end{bmatrix}) \cdot \begin{bmatrix} 1/6 \\ 5/6 \\ -3/6 \\ 1/6 \end{bmatrix} + (\mathrm{Prik} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5/6 \\ 1/6 \\ 3/6 \\ -1/6 \end{bmatrix}) \cdot \begin{bmatrix} 5/6 \\ 1/6 \\ 3/6 \\ -1/6 \end{bmatrix} + \\
+ \; & (\mathrm{Prik} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1/6 \\ 1/6 \\ 1/2 \\ 5/6 \end{bmatrix}) \cdot \frac{1}{12} \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 6 \\ 10 \end{bmatrix} \\
= \; & \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 1/6 \\ 5/6 \\ -3/6 \\ 1/6 \end{bmatrix} + \frac{2}{3} \cdot \begin{bmatrix} 5/6 \\ 1/6 \\ 3/6 \\ -1/6 \end{bmatrix} + \frac{2}{3} \cdot \begin{bmatrix} -1/6 \\ 1/6 \\ 1/2 \\ 5/6 \end{bmatrix} \\
= \; & \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Vi andender den samme Definition 4.12 og finder spejlingen af $\mathbf{x}$ i underrummet $\mathcal{U}$ som:

$$
\begin{aligned}
refl_{\mathrm{U}}(x) = \; & 2 \cdot proj_{\mathrm{U}}(x) - x \\
= \; & 2 \cdot \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
= \; & \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

(d)

Fra Definition 4.11 (Ortogonalt komplement) ved vi at det ortogonale komplement til underrum $\mathcal{U}$ består af samtlige vektorer som er ortogonale på alle vektorer i $\mathcal{U}$, dvs. deres prikprodukt er lig nul. Vi ved også at underrummet $\mathcal{U}$ er udspændt af søjlerne i matricen **A**. Vi anvender Theorem 4.10:

$$\mathbf{U}^{\perp} = (col\mathbf{A})^{\perp} = null\mathbf{A}^{T}$$

og finder det ortogonale komplement til $\mathcal{U}$ som en basis for nulrum $\mathbf{A}^T$. Vi transponerer matricen og bringer den på reducerede echalonformen vha. CAS:

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -3 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & -1 \\ -5 & -13 & 15 & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = A^{T*}$$

Vi kan hermed aflæse basis for $\mathcal{U}^{\perp}$ som $null\mathbf{A}^T = \text{span}\ \{\text{b}\}$:

$$b = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Vi har bestemt det ortogonale komplement til $\mathcal{U}$ korrekt, hvis prikproduktet af hver søjlevektor i matricen **A** og vektor **b** giver nul. Vi tjekker det ved at tage den første søjle i **A**:

$$\text{Prik} \quad a_1 \cdot b = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

(e)

Vi ved at matricen **Q** fra opgaven (a) er ortonormal. Det betyder altså at den også er ortogonal. Vi kan derfor anvende Definition 4.9 (Ortogonale matricer), som siger at

$$\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^T$$

Vi ved at matricen **B** består af **Q**'s ortonormale vektorer $\{q_1, q_2, q_3\}$. Den sidste vektor $\mathbf{q}_4$ fra opgaven (d) skal normaliseres inden vi kan finde $\mathbf{B}^{-1}$. For at normalisere $\mathbf{q}_4$ finder vi først normen af $\mathbf{q}_4$ ved at anvende Definition 4.2:

$$
\begin{aligned}
||q_4|| &= \sqrt{\text{Prik}\quad q_4 \cdot q_4} \\
&= \sqrt{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}} \\
&= 2
\end{aligned}
$$

Nu kan vi normere $\mathbf{q}_4$ til en enhedsvektor:

$$
\begin{aligned}
q_4' &= \frac{q_4}{||q_4||} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ -0.5 \\ -0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Matricen $\mathbf{B}$ kan nu samles og transponeres for at finde dens inverse:

$$
\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0.17 & 0.83 & -0.17 & 0.5 \\ 0.83 & 0.17 & 0.17 & -0.5 \\ -0.5 & 0.5 & 0.5 & -0.5 \\ 0.17 & -0.17 & 0.83 & 0.5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0.17 & 0.83 & -0.5 & 0.17 \\ 0.83 & 0.17 & 0.5 & -0.17 \\ -0.17 & 0.17 & 0.5 & 0.83 \\ 0.5 & -0.5 & -0.5 & 0.5 \end{bmatrix} = \mathbf{B}^T = \mathbf{B}^{-1}
$$

For at bestemme normen af $\mathbf{Bv}$ kan vi benytte os af Theorem 4.7 (s. 216 i bogen). Iht. dens betingelse (b) følger det at:

$$
||\mathbf{Bv}|| = ||\mathbf{v}||
$$

Vi bruger CAS og finder normen af vektoren $\mathbf{v}$ som:

$$
\begin{aligned}
||v|| &= \sqrt{\text{Prik}\quad v \cdot v} \\
&= \sqrt{\begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{3} \\ \sqrt{5} \\ \sqrt{6} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{3} \\ \sqrt{5} \\ \sqrt{6} \end{bmatrix}} \\
&= 4
\end{aligned}
$$

2 Opgave 2

(a)

Vi finder det karakteristiske polynomium for matricen **A** ved at bruge fremgangsmåden fra forelæsningen (se f10-handouts).

Ifølge Definitionen 6.2 kan vi bestemme det karakteristiske polynomium **p** for matrix **A** som:

$$\begin{aligned} p(\lambda) = &\ det(\lambda \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A}) \\ = &\ det \begin{bmatrix} \lambda+1 & -2 & -1 \\ 2 & \lambda-3 & -1 \\ 2 & -2 & \lambda-2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Inden vi går videre og bestemmer determinanten, udfører vi de to rækkeoperationer for at få nuller og dermed gør udregningen enklere:

1.rækkeoperation: $(-1)r_2 + r_1 \rightarrow r_1$:

$$\begin{bmatrix} \lambda+1-2 & -2-(\lambda-3) & 0 \\ 2 & \lambda-3 & -1 \\ 2 & -2 & \lambda-2 \end{bmatrix}$$

2.rækkeoperation: $(-1)r_2 + r_3 \rightarrow r_3$.
Vi omskriver $a_{12} = -2 - (\lambda - 3) = 1 - \lambda$ som $-(\lambda - 1)$
Det samme gør vi for $a_{32} = 3 - \lambda - 2 = 1 - \lambda = -(\lambda - 1)$:

$$\begin{bmatrix} \lambda-1 & -(\lambda-1) & 0 \\ 2 & \lambda-3 & -1 \\ 0 & -(\lambda-1) & \lambda-1 \end{bmatrix}$$

Ifølge Theorem 5.3 (betingelse 3), kan vi sætte faktoren $(\lambda-1)$ uden for matricen. Idet faktor $(\lambda-1)$ forekommer i række 1 og række 3, løfter vi den op i anden potens, flytter den uden for matricen og bestemmer det karakteristiske polynomium for **A** som følger:

$$
\begin{aligned}
p(\lambda) = &\ (\lambda-1)^2 \cdot det\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & \lambda-3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{[nu udvikles efter 1.søjle]} \\
= &\ (\lambda-1)^2 \cdot (1 \cdot det\begin{bmatrix} \lambda-3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}) \\
- &\ 2 \cdot det(\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}) \\
= &\ (\lambda-1)^2 \cdot (\lambda-4+2) \\
= &\ (\lambda-1)^2 \cdot (\lambda-2)
\end{aligned}
$$

(b)

Vi bestemmer alle egenværdierne for matricen **A** ved at løse den karakteristiske ligning fra opgaven 2.a. overfor: $p(\lambda) = (\lambda-1)^2 \cdot (\lambda-2)$. Vi finder med andre ord rødderne, som i dette tilfælde nemt kan aflæses direkte og svarer til $\lambda = 1$ og $\lambda = 2$.

For at finde algebraiske multipliciteter af egenværdierne $\lambda = 1$ og $\lambda = 2$ anvender vi Algebraens fundamentalsætning (Theorem 8.5, sf. f10-handouts):

$$p(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{a_{\lambda_1}}(\lambda-\lambda_2)^{a_{\lambda_2}} \cdots (\lambda-\lambda_k)^{a_{\lambda_k}}$$

hvor a_{λ_i} svarer til den algebraiske multiplicitet af egenværdien λi.

Dermed gælder:

1. $\lambda = 1$ er egenværdi med algebraisk multiplicitet $a_{\lambda_1} = 2$.
2. $\lambda = 2$ er egenværdi med algebraisk multiplicitet $a_{\lambda_2} = 1$.

(c)

Ifølge Definition 6.4 (Egenrum), hvis vi har en n x n matrix **A** og λ er en egenværdi for **A**, så er underrummet $\mathbf{E}_\lambda$ den tilhørende egenrum for denne egenværdi:

$$E_\lambda := \text{null}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$$

For $\lambda = 1$ er $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I} = \mathbf{A} - \mathbf{I}$ og vi har:

$$E_{\lambda_1} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Vi bestemmer en basis for egenrummet tilhørende egenværdi $\lambda = 1$ ved at bringe matricen $\mathbf{E}_{\lambda_1}$ om på den reducerede echalonform.

1. og 2. rækkeoperationer: $(-1)r_1 + r_2 \to r_2$ og $(-1)r_1 + r_3 \to r_3$:

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3. rækkeoperation: $(-1/2)r_1 \to r_1$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = E^*_{\lambda_1}$$

Det er nu tydeligt at egenrummet for $\lambda = 1$ er todimensionelt, fordi der er 2 fri variabler. Hvis vi sætter $x_3 = t$ og $x_2 = s$, så er $x_1 = 1/2 \cdot t + s$. Dette kan skrives som

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = s \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Hvis $t = 2$, så kan vi bestemme basis for nullrummet $\mathbf{E}_{\lambda_1} = span\{e_1, e_2\}$:

$$\text{Basis for nullrummet} \quad E_{\lambda_1} : \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right.$$

Da vi ved fra Definitionen 6.5 (Geometrisk multiplicitet af egenværdi), at den geometriske multiplicitet g_λ er lig med nullrummets dimension, kan vi konkludere at den geometriske multiplicitet af egenværdien $\lambda = 1$ er $g_1 = 2$.

For egenværdien for $\mathbf{A}$ $\lambda = 2$ er $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I} = \mathbf{A} - 2\mathbf{I}$ og vi har:

$$E_{\lambda_1} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Vi bestemmer en basis for egenrummet tilhørende egenværdi $\lambda = 2$ ved at bringe matricen $\mathbf{E}_{\lambda_2}$ om på den reducerede echalonform.

1., 2. og 3. rækkeoperationer: $(-1)r_3 + r_1 \rightarrow r_1$ og $(-1)r_3 + r_2 \rightarrow r_2$ og $(-1/2)r_3 \rightarrow r_3$:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

4. rækkeoperation: $r_1 + r_3 \rightarrow r_3$:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

5. rækkeoperation: $(-1)r_2 + r_3 \rightarrow r_3$:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Endeligt 6. og 7. rækkeoperationer: $(-1/1)r_1 \rightarrow r_1$ og $(-1/1)r_2 \rightarrow r_2$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = E^*_{\lambda_2}$$

Da der kun er én fri variabel, er dimensionen for egenrummet for $\lambda = 2$ lig med 1. Hvis vi sætter $x_3 = t$, så er $x_2 = t$ og $x_1 = t$:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Basis for egenrummet for $\lambda = 2$ er med andre ord udspændt af kun én vektor:

$$\text{Basis for nullrummet} \quad E_{\lambda_2} : \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right.$$

Som allerede nævnt før er den geometriske multiplicitet af egenværdien $\lambda = 2$ $g_2 = 1$.

(d)

Ud fra Theorem 6.4. ved vi at en matrix kan diagonaliseres netop hvis de geometriske og algebraiske multipliciteter for dens egenværdier er parvist ens, dvs.:

$$g_\lambda \leq a_\lambda$$

I delopgave 2.b fandt vi at

1. $\lambda = 1$ er egenværdi med algebraisk multiplicitet $a_{\lambda_1} = 2$.
2. $\lambda = 2$ er egenværdi med algebraisk multiplicitet $a_{\lambda_2} = 1$.

Og i delopgave 2.c. fandt vi at:

1. $\lambda = 1$ er egenværdi med geometrisk multiplicitet $g_{\lambda_1} = 2$.
2. $\lambda = 2$ er egenværdi med geometrisk multiplicitet $g_{\lambda_2} = 1$.

Da de to multipliciteter for henholdsvis $\lambda = 1$ og $\lambda = 2$ er ens, kan vi konkludere at matricen $\mathbf{A}$ er diagonaliserbar.

I og med at vi allerede har bestemt de to baser for hver egenværdi for $\mathbf{A}$ i delopgave 2.c, kan vi nemt samle den invertible matrix $\mathbf{P}$ og bestemme en diagonalmatrix $\mathbf{D}$ ved blot at følge fremgangsmåden fra forelæsningen (se f11-handouts):

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{opfylder} \quad \mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \mathbf{D}$$

(e)

Vi ved at hvis en matrix er diagonaliserbar med $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$=$\mathbf{D}$, så gælder

$$\mathbf{A}^n = \mathbf{P}\mathbf{D}^n\mathbf{P}^{-1} \tag{5}$$

Vi har bestemt matricerne $\mathbf{P}$ og $\mathbf{D}$ i opgaven ovenfor. For at bestemme et generelt udtryk for $\mathbf{A}^n$, finder vi først den inverse matrix til $\mathbf{P}$. Det gør vi at følge COMPUTATION på s. 78 i bogen:

$$[P|I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

1.rækkeoperation: $(-2)r_1 + r_3 \rightarrow r_3$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

2.rækkeoperation: $2r_2 + r_3 \rightarrow r_3$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

3. og 4. rækkeoperationer: $-r_3 + r_2 \rightarrow r_2$ og $-r_3 + r_1 \rightarrow r_1$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

5. rækkeoperation: $-r_2 + r_1 \rightarrow r_1$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & 1 \end{array}\right] = [I|P^{-1}]$$

Endeligt kan vi bestemme et generelt udtryk for $\mathbf{A}^n$ ved at bruge formlen (5):

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & 1^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \sim A^n = \begin{bmatrix} 3n - 2^{n+1} & 2^{n+1} - 2n & 2^n - n \\ 2n - 2^{n+1} & 2^{n+1} - n & 2^n - n \\ 2n - 2^{n+1} & 2^{n+1} - 2n & 2^n \end{bmatrix}$$

3 Opgave 3

(a)

Vi anvender fremgangsmåden fra forelæsningen (se f8-handouts) og bestemmer forskriften for den bedste rette linje gennem punkterne (t, ln$y$) ved at finde den bedste tilnærmede løsning til ligningssystemet af ligninger for den rette linje:

$$ax + b = y$$

Vi starter med at opstille et ligningssystem for de givne data, hvor t-koordinaterne svarer til x og lny-koordinaterne svarer til y:

$$\begin{cases} a \cdot 0 + b = 35.481 \\ a \cdot 1 + b = 36.891 \\ a \cdot 2 + b = 37.331 \\ a \cdot 3 + b = 38.061 \\ a \cdot 6 + b = 39.071 \\ a \cdot 8 + b = 39.345 \\ a \cdot 10 + b = 40.568 \\ a \cdot 12 + b = 42.140 \end{cases} \qquad \text{Ax=b}$$

hvor

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 6 & 1 \\ 8 & 1 \\ 10 & 1 \\ 12 & 1 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad b = \begin{bmatrix} 35.481 \\ 36.891 \\ 37.331 \\ 38.061 \\ 39.071 \\ 39.345 \\ 40.568 \\ 42.140 \end{bmatrix}$$

Den bedste tilnærmede løsning til ligningen **Ax**=**b** er:

$$\overline{x} = \begin{bmatrix} \overline{a} \\ \overline{b} \end{bmatrix} = (A^T A)^{-1} A^T b$$

$$= \begin{bmatrix} 358 & 42 \\ 42 & 8 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 6 & 8 & 10 & 12 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 35.481 \\ 36.891 \\ 37.331 \\ 38.061 \\ 39.071 \\ 39.345 \\ 40.568 \\ 42.140 \end{bmatrix}$$

$$\simeq \begin{bmatrix} 0.47 \\ 36.144 \end{bmatrix}$$

Og den bedste rette linje gennem målepunkterne er derfor

$$lny \simeq \overline{a}x + \overline{b} = 0.47t + 36.144 \tag{6}$$

(b)

For at begrunde at der gælder følgende tilnærmede forskrift for funktionen $y = y(t)$:

$$y = y(t) \simeq 4.98 \cdot 10^{15} \cdot e^{0.470(t-2010)} \tag{7}$$

tager vi eksponentialfunktionen på begge sider af lighedstegnet i (6) og får:

$$\begin{aligned} e^{lny} &= e^{0.47t+36.144} \\ y &= e^{0.47t} \cdot e^{36.144} \qquad \text{[udregner og bytter om på ledene]} \\ y &= 4.98 \cdot 10^{15} \cdot e^{0.47t} \end{aligned}$$

Da ligningen ovenfor og forskriften for funktionen $y = y(t)$ i (7) er ens, er det ønskede hermed vist.

(c)

1. Vi benytter tilnærmelsen i (7) og bestemmer det bedste estimat på hvor mange FLOPS verdens bedste supercomputer kunne præstere i år 2000. Da t-dataene begynder fra året 2010, som svarer i vores fremstilling til 0, finder vi $t(2000)$ som $0 - 10$:

$$\begin{aligned} y = \ & y(-10) \simeq 4.98 \cdot 10^{15} \cdot e^{0.470(-10)} \\ = \ & 45.3 \cdot 10^{12} \end{aligned}$$

   Da $45.3 \cdot 10^{12}$ FLOPS $> 7.226 \cdot 10^{12}$ FLOPS, kan vi imidlertid konkludere, at i dette tilfælde virkede modellen ikke.

2. Vi gentager proceduren i punkt 1. og finder det bedste estimat på hvor mange FLOPS verdens bedste supercomputer kan præstere i år 2030. Vi indsætter $t = 0 + 20$ og får:

$$\begin{aligned} y = \ & y(20) \simeq 4.98 \cdot 10^{15} \cdot e^{0.470(20)} \\ = \ & 6.0 \cdot 10^{19} = 60 \cdot 10^{18} \end{aligned}$$

   Hvis udviklingen iblandt supercomputere fortsætter som det gjorde i denne periode (altså 2010-2022), så er $60 \cdot 10^{18}$ FLOPS det bedste estimat som verdens bedste supercomputer kan præstere i 2030.