

Forelæsning 6: Koordinater, bestemmelse af baser, og lineære transformationer

LinAlgDat 2021/2022

Henrik Holm og Henrik L. Pedersen
Institut for Matematiske Fag
holm@math.ku.dk og henrikp@math.ku.dk

11. maj 2022 — Dias 1/43

Koordinater

Definition 3.7 og Theorem 3.8 (Koordinater)

Lad $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k\}$ være en (ordnet) basis for et underrum $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$.
Til hvert $\mathbf{v} \in \mathcal{U}$ findes entydigt bestemte tal $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}$ så

$$\mathbf{v} = x_1 \mathbf{b}_1 + \dots + x_k \mathbf{b}_k.$$

Vektoren med disse tal kaldes **koordinaterne** for \mathbf{v} mht. basen \mathcal{B} :

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}.$$

Eksempel (Koordinater mht. standardbasen)

Lad $\mathcal{E} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ være standardbasen $\mathcal{U} = \mathbb{R}^2$. For $\mathbf{v} = (3, 7)$ gælder

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 7 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{dvs.} \quad \mathbf{v} = 3\mathbf{e}_1 + 7\mathbf{e}_2$$

og derfor er

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Dias 3/43

Oversigt

- 1 Koordinater
- 2 Nulrum
- 3 Søjlerum
- 4 Rækkerum
- 5 Lineære transformationer

Dias 2/43

Eksempel (Bestemmelse af koordinater)

1/2

Mængden

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

er pga. fx Theorem 3.10(a) en (ordnet) basis for \mathbb{R}^3 idet

$$(\mathbf{b}_1 \mid \mathbf{b}_2 \mid \mathbf{b}_3) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Gauss-Jordan}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{I}.$$

Betragt desuden vektoren

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vi vil bestemme koordinaterne for \mathbf{v} mht. basen $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$.

Dias 4/43

Eksempel (Bestemmelse af koordinater)

2/2

Vi løser ligningen:

$$\begin{aligned}
 x_1 \mathbf{b}_1 + x_2 \mathbf{b}_2 + x_3 \mathbf{b}_3 = \mathbf{v} &\iff x_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 &\iff \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 &\iff \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Dvs.

$$\mathbf{b}_1 - 3\mathbf{b}_2 + 2\mathbf{b}_3 = \mathbf{v}$$

og derfor er

$$[\mathbf{v}]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Dias 5/43

Eksempel (Basisskift matrix)

1/3

Betragt følgende to (ordnede) baser for $\mathcal{U} = \mathbb{R}^3$:

$$B = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{og}$$

$$C = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Vi har

$$\mathbf{c}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 6 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{b}_1 - 6\mathbf{b}_2 + 5\mathbf{b}_3$$

$$\mathbf{c}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 6 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{b}_1 - 6\mathbf{b}_2 + 4\mathbf{b}_3$$

$$\mathbf{c}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2 + 2\mathbf{b}_3$$

Dias 7/43

Basisskift

§3.2.5 (Basisskift matricen)

Lad der være givet to forskellige (ordnede) baser,

$$B = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k\} \quad \text{og} \quad C = \{\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_k\}$$

for et og samme underrum $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$. Basisskift matricen fra C til B er, med notation fra (7.32), defineret ved

$$\mathbf{P}_{B \leftarrow C} := ([\mathbf{c}_1]_B \mid \dots \mid [\mathbf{c}_k]_B),$$

og den opfylder

$$[\mathbf{v}]_B = \mathbf{P}_{B \leftarrow C} [\mathbf{v}]_C \quad \text{for alle} \quad \mathbf{v} \in \mathcal{U}.$$

Dias 6/43

Eksempel (Basisskift matrix)

2/3

Idet

$$\mathbf{c}_1 = \mathbf{b}_1 - 6\mathbf{b}_2 + 5\mathbf{b}_3$$

$$\mathbf{c}_2 = \mathbf{b}_1 - 6\mathbf{b}_2 + 4\mathbf{b}_3$$

$$\mathbf{c}_3 = 0\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2 + 2\mathbf{b}_3$$

er basisskift matricen fra C til B er givet ved

$$\mathbf{P}_{B \leftarrow C} = ([\mathbf{c}_1]_B \mid [\mathbf{c}_2]_B \mid [\mathbf{c}_3]_B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -6 & -6 & -1 \\ 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Lad os checke om

$$[\mathbf{v}]_B = \mathbf{P}_{B \leftarrow C} [\mathbf{v}]_C$$

gælder for fx vektoren

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

Dias 8/43

Eksempel (Basisskift matrix)

3/3

Vi har

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{b}_1 - 3\mathbf{b}_2 + 2\mathbf{b}_3$$

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = 4\mathbf{c}_1 - 3\mathbf{c}_2 - 3\mathbf{c}_3$$

og dermed er

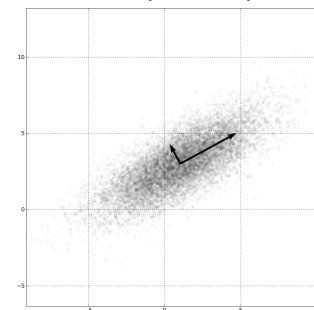
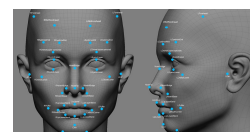
$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad [\mathbf{v}]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Og ganske rigtigt gælder

$$\mathbf{P}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}} [\mathbf{v}]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -6 & -6 & -1 \\ 5 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}.$$

Dias 9/43

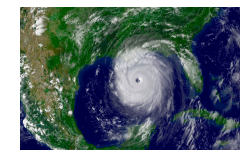
Hvor anvendes basisskift?

Basisskift er fx essensen i *Principal Component Analysis*:som bruges til at håndtere (*dimension reduction*) store datasæt i fx

Ansigtsgenkendelse



Signalbehandling



Meteorologi

Dias 11/43

Den inverse til basisskift matrixen

Lad der være givet to forskellige (ordnede) baser,

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k\} \quad \text{og} \quad \mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_k\}$$

for et og samme underrum $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$. Basisskift matrixen $\mathbf{P}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}}$ er invertibel og om dens inverse gælder

$$(\mathbf{P}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}})^{-1} = \mathbf{P}_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}$$

Eksempel (Beregning af basisskift matrix som invers)

Betragt følgende (ordnede) baser for \mathbb{R}^2 :

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{og} \quad \mathcal{E} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Vi har

$$\mathbf{P}_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{B}} = ([\mathbf{b}_1]_{\mathcal{E}} \mid [\mathbf{b}_2]_{\mathcal{E}}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{og dermed}$$

$$\mathbf{P}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{E}} = (\mathbf{P}_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{B}})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dias 10/43

Nulrum

Definition 3.9 (Nulrum)

Lad \mathbf{A} være en $m \times n$ matrix. **Nulrummet** (*null space*) af \mathbf{A} er

$$\text{null } \mathbf{A} = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0} \}.$$

Faktum. For en $m \times n$ matrix \mathbf{A} er $\text{null } \mathbf{A}$ er et *underrum* af \mathbb{R}^n idet

- $\mathbf{0} \in \text{null } \mathbf{A}$ idet $\mathbf{A}\mathbf{0} = \mathbf{0}$.
- Hvis $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \text{null } \mathbf{A}$ da er $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in \text{null } \mathbf{A}$ idet $\mathbf{A}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{A}\mathbf{y}$.
- Hvis $s \in \mathbb{R}$ og $\mathbf{x} \in \text{null } \mathbf{A}$ da er $s\mathbf{x} \in \text{null } \mathbf{A}$ idet $\mathbf{A}(s\mathbf{x}) = s\mathbf{A}\mathbf{x}$.

Vi skal lære hvordan man bestemmer en basis for $\text{null } \mathbf{A}$.

Dias 12/43

Eksempel (Basis for nulrum)

1/3

Betragt 4×5 matricen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Per definition er

$$\text{null } A = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^5 \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0} \}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5 \mid \begin{array}{rrcr} x_1 & + & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & 5x_5 & = & 0 \\ 3x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & + & x_5 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & & & + & 3x_5 & = & 0 \end{array} \right\}.$$

Den reducerede rækkeechelonform for A er

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dias 13/43

Eksempel (Basis for nulrum)

3/3

Placeringen af 0'er og 1'er i de to vektorer

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ \mathbf{1} \\ 0 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ \mathbf{0} \\ 2 \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

viser, at de er **lineært uafhængige**, og vi konkluderer, at

$$\text{En basis for null } A \text{ er: } B = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

For dimensionen af null A gælder altså:

$$\dim(\text{null } A) = 2$$

$$= \text{antal frie variable i ligningssystemet } A\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

$$= (\text{antal søjler i } A) - (\text{rank } A) \quad [\text{dvs. } 5 - 3 = 2]$$

Dias 15/43

Eksempel (Basis for nulrum)

2/3

Fra den reducerede rækkeechelonform

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

aflæses, at samtlige løsninger til ligningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ er

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{hvor} \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

Ovenstående to vektorer **udspænder** altså null A , dvs.

$$\text{null } A = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Dias 14/43

Eksemplet illustrerer følgende generelle princip:

Theorem 3.11 (Basis for nulrum)Lad A være en $m \times n$ matrix. En basis for null A findes således:

- Benyt den reducerede rækkeechelonform for A til, på sædvanlig måde, at aflæse alle løsninger til ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$:

$$\mathbf{x} = t_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + t_p \mathbf{v}_p \quad (p = \text{antal frie variable})$$

- En basis for null A er da

$$B = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}.$$

Om dimensionen, p , af null A gælder:

$$p = \dim(\text{null } A) = n - \text{rank } A.$$

Nullity. Lad A være en $m \times n$ matrix. Man definerer

$$\text{nullity } A := \dim(\text{null } A).$$

Sidste ligning i Theorem 3.11 kan derfor udtrykkes [se (3.38)]:

$$\text{rank } A + \text{nullity } A = n.$$

Dias 16/43

Søjlerum

Definition 3.10 (Søjlerum)

Lad \mathbf{A} være en $m \times n$ matrix. **Søjlerummet** (*column space*) af \mathbf{A} er

$$\text{col } \mathbf{A} = \text{span} \{ \text{alle } n \text{ søjlevektorer i } \mathbf{A} \}.$$

Faktum. Søjlerummet $\text{col } \mathbf{A}$ er et *underrum* af \mathbb{R}^m (det er et "span").

Da $\text{col } \mathbf{A}$ er et "span", kan man i princippet benytte Udtyndingsalgoritmen, Theorem 3.7(a), til at bestemme en basis for $\text{col } \mathbf{A}$.

Vi skal lære en anden/bedre metode...

Dias 17/43

Eksempel (Basis for søjlerum)

2/3

Den reducerede rækkeechelonform for \mathbf{A} er

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Med $x_3 = 1$ og $x_5 = 0$ fås:

$$\mathbf{A} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \iff -\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_3 = \mathbf{0}$$

$$\iff \mathbf{A}_3 = \mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2 \in \text{span}\{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_4\}$$

Med $x_3 = 0$ og $x_5 = 1$ fås:

$$\mathbf{A} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \iff -2\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2 + 2\mathbf{A}_4 + \mathbf{A}_5 = \mathbf{0}$$

$$\iff \mathbf{A}_5 = 2\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 - 2\mathbf{A}_4 \in \text{span}\{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_4\}$$

Dias 19/43

Eksempel (Basis for søjlerum)

1/3

Betragt 4×5 matricen

$$\mathbf{A} = (\mathbf{A}_1 | \mathbf{A}_2 | \mathbf{A}_3 | \mathbf{A}_4 | \mathbf{A}_5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Per definition er

$$\text{col } \mathbf{A} = \text{span} \{ \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3, \mathbf{A}_4, \mathbf{A}_5 \}$$

$$= \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^4.$$

Den reducerede rækkeechelonform for \mathbf{A} er

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dias 18/43

Eksempel (Basis for søjlerum)

3/3

Derfor vil søjlerne $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_4$ **udspænde** søjlerummet for \mathbf{A} , dvs.

$$\text{col } \mathbf{A} = \text{span} \{ \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_4 \} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Desuden er $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_4$ **lineært uafhængige** fordi udregningen

$$(\mathbf{A}_1 | \mathbf{A}_2 | \mathbf{A}_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cancel{1} & 1 & \cancel{0} \\ 2 & 1 & \cancel{1} & 0 & \cancel{5} \\ 3 & 1 & \cancel{2} & 3 & \cancel{1} \\ 1 & 1 & \cancel{0} & 0 & \cancel{3} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Gauss-Jordan}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cancel{1} & 0 & \cancel{2} \\ 0 & 1 & \cancel{1} & 0 & \cancel{1} \\ 0 & 0 & \cancel{0} & 1 & \cancel{2} \\ 0 & 0 & \cancel{0} & 0 & \cancel{0} \end{pmatrix}$$

viser, at $\text{rank}(\mathbf{A}_1 | \mathbf{A}_2 | \mathbf{A}_4) = 3$. Vi konkluderer:

$$\text{En basis for } \text{col } \mathbf{A} \text{ er: } \mathcal{B} = \{ \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_4 \} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Det følger, at: $\dim(\text{col } \mathbf{A}) = 3 = \text{rank } \mathbf{A}$.

Dias 20/43

Eksemplet illustrerer følgende generelle princip:

Theorem 3.13 (Basis for søjlerum)

Lad $\mathbf{A} = (\mathbf{A}_1 | \dots | \mathbf{A}_n)$ være en $m \times n$ matrix. En basis for $\text{col } \mathbf{A}$ findes således:

- Find de søjlenumre j_1, \dots, j_r i den reducerede rækkeechelonform for \mathbf{A} som har et pivot 1-tal (hvor $r = \text{rank } \mathbf{A}$).
- En basis \mathcal{B} for $\text{col } \mathbf{A}$ udgøres af de tilsvarende søjler i \mathbf{A} , dvs.

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{A}_{j_1}, \dots, \mathbf{A}_{j_r}\}.$$

Om dimensionen af $\text{col } \mathbf{A}$ gælder:

$$\dim(\text{col } \mathbf{A}) = \text{rank } \mathbf{A}.$$

Dias 21/43

Eksempel (Basis for rækkerum)

1/3

Betragt 4×5 matricen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_3 \\ \mathbf{A}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

I udregninger skrives rækkerne ${}_1\mathbf{A}, {}_2\mathbf{A}, {}_3\mathbf{A}, {}_4\mathbf{A}$ ofte som søjler(!)

$$\text{row } \mathbf{A} = \text{span} \{ {}_1\mathbf{A}, {}_2\mathbf{A}, {}_3\mathbf{A}, {}_4\mathbf{A} \}$$

$$= \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^5.$$

Den reducerede rækkeechelonform for \mathbf{A} er

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{B}_3 \\ \mathbf{B}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dias 23/43

Rækkerum

Definition 3.11 (Rækkerum)

Lad \mathbf{A} være en $m \times n$ matrix. **Rækkerummet** (row space) af \mathbf{A} er

$$\text{row } \mathbf{A} = \text{span} \{ \text{alle } m \text{ rækkevektorer i } \mathbf{A} \}.$$

Faktum. Rækkerummet $\text{row } \mathbf{A}$ er et *underrum* af \mathbb{R}^n .

Da $\text{row } \mathbf{A}$ er et "span", kan man i princippet benytte Udtyndingsalgoritmen, Theorem 3.7(a), til at bestemme en basis for $\text{row } \mathbf{A}$.

Vi skal lære en anden/bedre metode...

Dias 22/43

Eksempel (Basis for rækkerum)

2/3

Der gælder $\text{span} \{ {}_1\mathbf{B}, {}_2\mathbf{B}, {}_3\mathbf{B} \} \subseteq \text{row } \mathbf{A}$ fordi:

$${}_1\mathbf{B} = \frac{3}{2}({}_1\mathbf{A}) + \frac{1}{2}({}_2\mathbf{A}) - \frac{1}{2}({}_3\mathbf{A})$$

$${}_2\mathbf{B} = -3({}_1\mathbf{A}) + {}_3\mathbf{A}$$

$${}_3\mathbf{B} = -\frac{1}{2}({}_1\mathbf{A}) - \frac{1}{2}({}_2\mathbf{A}) + \frac{1}{2}({}_3\mathbf{A})$$

Der gælder $\text{span} \{ {}_1\mathbf{B}, {}_2\mathbf{B}, {}_3\mathbf{B} \} \supseteq \text{row } \mathbf{A}$ fordi:

$${}_1\mathbf{A} = ({}_1\mathbf{B}) + ({}_3\mathbf{B})$$

$${}_2\mathbf{A} = 2({}_1\mathbf{B}) + ({}_2\mathbf{B})$$

$${}_3\mathbf{A} = 3({}_1\mathbf{B}) + ({}_2\mathbf{B}) + 3({}_3\mathbf{B})$$

$${}_4\mathbf{A} = ({}_1\mathbf{B}) + ({}_2\mathbf{B})$$

Altså vil ikke-nulrækkerne ${}_1\mathbf{B}, {}_2\mathbf{B}, {}_3\mathbf{B}$ i matricen \mathbf{B} **udspænde** $\text{row } \mathbf{A}$:

$$\text{span} \{ {}_1\mathbf{B}, {}_2\mathbf{B}, {}_3\mathbf{B} \} = \text{row } \mathbf{A}.$$

Dias 24/43

Eksempel (Basis for rækkerum)**3/3**

Placeringen af 0'er og 1'er i vektorerne

$${}_1\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad {}_2\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad {}_3\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

viser, at de er **lineært uafhængige**, og vi konkluderer, at

$$\text{En basis for row } \mathbf{A} \text{ er: } \mathcal{B} = \{{}_1\mathbf{B}, {}_2\mathbf{B}, {}_3\mathbf{B}\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

For dimensionen af row \mathbf{A} gælder altså:

$$\dim(\text{row } \mathbf{A}) = 3 = \text{rank } \mathbf{A}$$

Dias 25/43

Theorem 3.15 (Rank og transponering)Lad \mathbf{A} være en $m \times n$ matrix. Da er $\text{rank } \mathbf{A}^T = \text{rank } \mathbf{A}$.*Bevis.* Vi har $\text{rank } \mathbf{A}^T = \dim(\text{col } \mathbf{A}^T) = \dim(\text{row } \mathbf{A}) = \text{rank } \mathbf{A}$. \square

Dias 27/43

Eksemplet illustrerer følgende generelle princip:

Theorem 3.14 (Basis for rækkerum)Lad \mathbf{A} være en $m \times n$ matrix med reduceret rækkeechelonform

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{1B} \\ \vdots \\ \mathbf{rB} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (\text{hvor } r = \text{rank } \mathbf{A})$$

En basis \mathcal{B} for row \mathbf{A} udgøres af ikke-nulrækkerne i \mathbf{B} , dvs.

$$\mathcal{B} = \{{}_1\mathbf{B}, \dots, {}_r\mathbf{B}\}.$$

Om dimensionen af row \mathbf{A} gælder:

$$\dim(\text{row } \mathbf{A}) = \text{rank } \mathbf{A}.$$

Dias 26/43

Lineære transformationer**Definition 3.12 (Lineære transformationer)**En funktion $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ som opfylder

$$T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}) \quad \text{og} \quad T(s\mathbf{v}) = sT(\mathbf{v})$$

for alle $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ og $s \in \mathbb{R}$ kaldes en **lineær transformation**.**Definition 3.13 (Matrixtransformationer)**Lad \mathbf{A} være en $m \times n$ matrix. Funktionen

$$T_{\mathbf{A}}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \quad \text{givet ved} \quad T_{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad \text{for alle } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

kaldes **matrixtransformationen** givet ved matrixen \mathbf{A} .**Theorem 3.17 (Matrixtransformationer er lineære)**Enhver matrixtransformation $T_{\mathbf{A}}$ er lineær.

$$T_{\mathbf{A}}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathbf{A}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathbf{A}\mathbf{u} + \mathbf{A}\mathbf{v} = T_{\mathbf{A}}(\mathbf{u}) + T_{\mathbf{A}}(\mathbf{v})$$

$$T_{\mathbf{A}}(s\mathbf{v}) = \mathbf{A}(s\mathbf{v}) = s\mathbf{A}\mathbf{v} = sT_{\mathbf{A}}(\mathbf{v})$$

Dias 28/43

Eksempel (Matrixtransformation)

Betragt 4×5 matricen

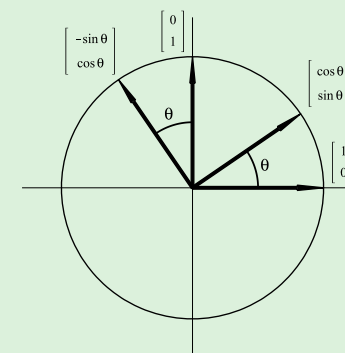
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Matrixtransformationen givet ved \mathbf{A} er funktionen $T_{\mathbf{A}}: \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^4$ hvor

$$T_{\mathbf{A}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_3 + x_4 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 5x_5 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 + x_5 \\ x_1 + x_2 + 3x_5 \end{pmatrix}$$

Eksempel (Rotation i planen)

2/3



Rotationsmatricen

$$\mathbf{A}_{\theta} = (R_{\theta}(\mathbf{e}_1) \mid R_{\theta}(\mathbf{e}_2)) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

opfylder

$$R_{\theta} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cos \theta - y \sin \theta \\ x \sin \theta + y \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Theorem 3.17 viser, at matrixtransformationer er eksempler på lineær transformationer. Faktisk er der ikke andre eksempler:

Theorem 3.18 ("Omvendt" til Theorem 3.17)

Enhver lineær transformation er en matrixtransformation:

Hvis $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ er en vilkårlig lineær transformation, da findes netop én $m \times n$ matrix \mathbf{A} , nemlig

$$\mathbf{A} = (T(\mathbf{e}_1) \mid \dots \mid T(\mathbf{e}_n)),$$

som opfylder $T = T_{\mathbf{A}}$, dvs. så $T(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$ for alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Eksempel (Rotation i planen)

1/3

Lad θ være en vinkel og lad $R_{\theta}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ være den funktion der roterer en vektor i planen vinklen θ mod uret omkring origo $(0, 0)$.

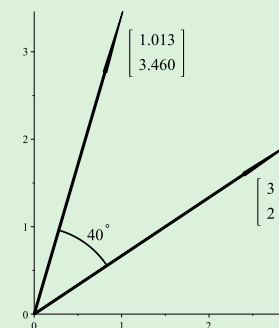
Det er geomtrisk klart, at R_{θ} er en lineær transformation.

Eksempel (Rotation i planen)

3/3

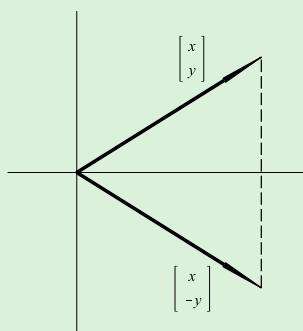
Ved fx at rotere $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ vinklen $\theta = 40^\circ$ fås vektoren:

$$\begin{pmatrix} \cos 40^\circ & -\sin 40^\circ \\ \sin 40^\circ & \cos 40^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.766 & -0.643 \\ 0.643 & 0.766 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.013 \\ 3.460 \end{pmatrix}$$



Eksempel (Spejling i førsteaksen)

Lad $S: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ være den funktion spejler et punkt i førsteaksen.



Det er geometrisk klart, at S er en lineær transformation, og vi ser at

$$S\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Dias 33/43

Sammensætning af lineære transformationer

Lad der være givet to lineære transformationer

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{T} \mathbb{R}^m \xrightarrow{S} \mathbb{R}^k$$

$$T(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad S(\mathbf{y}) = \mathbf{B}\mathbf{y}$$

Den sammensatte transformation $S \circ T$ er givet ved matricen \mathbf{BA} idet

$$(S \circ T)(\mathbf{x}) = S(T(\mathbf{x})) = S(\mathbf{A}\mathbf{x}) = \mathbf{B}(\mathbf{A}\mathbf{x}) = (\mathbf{BA})\mathbf{x}.$$

Eksempel (Sammensætning af transformationer) 1/2

Vi betragter

- Rotation med vinklen 40° mod uret omkring origo:

$$R\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.766 & -0.643 \\ 0.643 & 0.766 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

- Spejling i førsteaksen:

$$S\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Dias 35/43

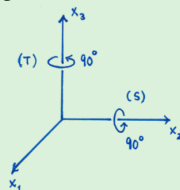
Eksempel (Rotation i rummet)

Betragt de lineære transformationer $S, T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ givet ved:

S = rotation 90° omkring x_2 -aksen (se figur).

T = rotation 90° omkring x_3 -aksen (se figur).

(Rotationerne foregår i **positiv omløbsretning**.)



Vi vil bruge Theorem 3.18 til at bestemme matricer \mathbf{A} og \mathbf{B} så

$$S(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad \text{og} \quad T(\mathbf{x}) = \mathbf{B}\mathbf{x} \quad \text{for alle} \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3.$$

Det er geometrisk klart at

$$\begin{aligned} S(\mathbf{e}_1) &= -\mathbf{e}_3 & T(\mathbf{e}_1) &= \mathbf{e}_2 \\ S(\mathbf{e}_2) &= \mathbf{e}_2 & T(\mathbf{e}_2) &= -\mathbf{e}_1 \\ S(\mathbf{e}_3) &= \mathbf{e}_1 & T(\mathbf{e}_3) &= \mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

og dermed er:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dias 34/43

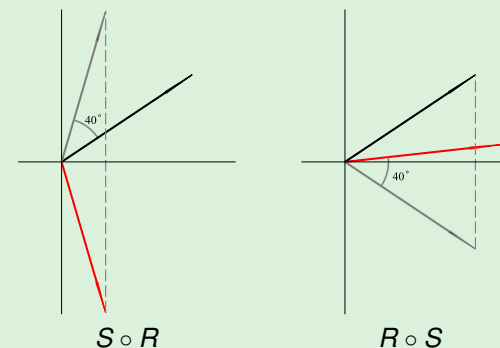
Eksempel (Sammensætning af transformationer) 2/2

- Først rotation 40° og dernæst spejling i førsteaksen:

$$(S \circ R)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.766 & -0.643 \\ -0.643 & -0.766 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

- Først spejling i førsteaksen og dernæst rotation 40° :

$$(R \circ S)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.766 & 0.643 \\ 0.643 & -0.766 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$



Dias 36/43

Kerne (kernel) og billede (range)

Definition 3.14 (Kerne og billede)

Lad $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ være en lineær transformation. Man definerer

$$\ker T = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid T(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \} \quad (\text{kernen / kernel af } T)$$

$$\text{ran } T = \{ T(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^m \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \} \quad (\text{billedet / range af } T)$$

Delmængderne $\ker T$ og $\text{ran } T$ er underrum som vi allerede kender:

Observation efter Definition 3.14

Lad $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ være en lineær transformation givet ved en $m \times n$ matrix \mathbf{A} , dvs.

$$T(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad \text{for alle } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

Da gælder:

$$\ker T = \text{null } \mathbf{A}$$

$$\text{ran } T = \text{col } \mathbf{A} \quad (= \text{row } \mathbf{A}^T)$$

Dias 37/43

Injektivitet og surjektivitet

Definition 3.14 og 3.16 (Injektivitet og surjektivitet)

En lineær transformation $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ kaldes

- **Injektiv** (*one-to-one*) hvis: $\ker T = \{\mathbf{0}\}$.
- **Surjektiv** (*onto*) hvis: $\text{ran } T = \mathbb{R}^m$.

Eksempel (Hverken injektiv eller surjektiv)

Den lineære transformation $T: \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^4$ i eksemplet fra forrige slide er *hverken* injektiv *eller* surjektiv.

Eksempel (Både injektiv og surjektiv)

1/2

Betragt rotation $R_\theta: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ med vinklen θ mod uret omkring origo:

$$R_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{A}_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Denne lineære transformation er *både* injektiv *og* surjektiv.

Dias 39/43

Eksempel (Kerne og billede)

For den lineære transformation $T: \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^4$ givet ved

$$T(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_3 + x_4 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 5x_5 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 + x_5 \\ x_1 + x_2 + 3x_5 \end{pmatrix}$$

gælder:

$$\ker T = \text{null } \mathbf{A} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad (\text{som er en basis})$$

$$\text{ran } T = \text{col } \mathbf{A} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad (\text{som er en basis})$$

Dias 38/43

Eksempel (Både injektiv og surjektiv)

2/2

- **Injektivitet** ($\ker R_\theta = \text{null } \mathbf{A}_\theta = \{\mathbf{0}\}$)

Geometrisk forklaring: Den eneste vektor \mathbf{x} som drejes over i nulvektoren $\mathbf{0}$ er $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Derfor er $\ker R_\theta = \{\mathbf{0}\}$.

Udregninger: Vis selv $\text{null } \mathbf{A}_\theta = \{\mathbf{0}\}$ ved de metoder vi har lært.

- **Surjektivitet** ($\text{ran } R_\theta = \text{col } \mathbf{A}_\theta = \mathbb{R}^2$)

Geometrisk forklaring: Ethvert $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$ har formen $\mathbf{y} = R_\theta(\mathbf{x})$ for et \mathbf{x} (lad nemlig \mathbf{x} være den vektor der fremkommer ved at rotere \mathbf{y} vinklen $-\theta$). Derfor er $\text{ran } R_\theta = \mathbb{R}^2$.

Udregninger: Vis selv $\text{col } \mathbf{A}_\theta = \mathbb{R}^2$ ved de metoder vi har lært.

Dias 40/43

Inverse lineære transformationer

Lad der være givet en lineær transformation

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{T} \mathbb{R}^n$$

$$T(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

som både er injektiv og surjektiv (dvs. T er **bijektiv**). Dette svarer til, at matricen \mathbf{A} er invertibel. Den **inverse** lineære transformation er:

$$\mathbb{R}^n \xleftarrow{T^{-1}} \mathbb{R}^n$$

$$T^{-1}(\mathbf{y}) = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}$$

Eksempel (Invers lineær transformation)

1/2

Betragt rotation $R_\theta: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ med vinklen θ mod uret omkring origo:

$$R_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{A}_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Dias 41/43

Hvor anvendes lineære transformationer?

- Computergrafik (se også Projekt B)



- Kryptografi



Dias 43/43

Eksempel (Invers lineær transformation)

2/2

Den inverse lineære transformation R_θ^{-1} er givet ved matricen

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_\theta^{-1} &= \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \\ &\stackrel{(!)}{=} \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{A}_{-\theta} \end{aligned}$$

Derfor gælder

$$R_\theta^{-1} = R_{-\theta}$$

Med andre ord: Det inverse/modsatte af at rotere et punkt vinklen θ (effekten af R_θ) er at rotere punktet vinklen $-\theta$ (effekten af R_θ^{-1}).

Dias 42/43