

Forelæsning 3: Invers matrix, elementærmatrixer og anvendelser

LinAlgDat 2021/2022

Henrik Holm og Henrik L. Pedersen

Institut for Matematiske Fag

holm@math.ku.dk henrikp@math.ku.dk

2. maj 2022 — Dias 1/20

Oversigt

- 1 Kvadratiske matrixer
- 2 Invers matrix
- 3 Elementærmatrixer

Dias 2/20

Kvadratiske matrixer

Diagonalmatrix og enhedsmatrix

- En $n \times n$ matrix \mathbf{D} er en diagonalmatrix hvis $d_{ij} = 0$ for $i \neq j$.

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

- Enhedsmatrixen \mathbf{I}_n er denne $n \times n$ diagonalmatrix

$$\mathbf{I}_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Enhedsmatrixen opfylder $\mathbf{I}_n \mathbf{A} = \mathbf{A} \mathbf{I}_n = \mathbf{A}$ for alle $n \times n$ matrixer \mathbf{A} .

Dias 3/20

Matrixpotenser

- Når \mathbf{A} er kvadratisk kan vi udregne $\mathbf{A}^k = \mathbf{A} \mathbf{A} \cdots \mathbf{A}$.
- Induktion kan bruges når man skal eftervise et generelt udtryk for \mathbf{A}^k , fx

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} 2^k & 1 - 2^k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad k = 1, 2, \dots$$

- Matrixprodukter og -potenser elektronisk

```
A<-matrix(1:4,2)
B<-matrix(c(1,0,0,1),2)
for (j in (1:20)) {B<-A%*%B}
B
```

Web og potenser

Potenser af nabomatrixen for et web kan bruges til at bestemme på hvor mange måder kan vi komme fra en side til en anden i et web ved at bruge et givet antal links.

Dias 4/20

Induktion - repetition

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} 2^k & 1-2^k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Induktionsstart: Gælder formelen for $k=1$? Ja!

Induktionsskridt: Antag at formelen gælder for k . Vis at den også gælder for $k+1$:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{k+1} &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^k & 1-2^k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \text{matrixmultiplikation} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2^k + (-1) \cdot 0 & 2(1-2^k) - 1 \cdot 1 \\ 0 \cdot 2^k + 1 \cdot 0 & 0(1-2^k) + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^{k+1} & 2-2^{k+1}-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{k+1} & 1-2^{k+1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dias 5/20

Definition 2.7: invers matrix

En $n \times n$ matrix \mathbf{A} er invertibel hvis der findes en $n \times n$ matrix \mathbf{X} så

$$\mathbf{XA} = \mathbf{AX} = \mathbf{I}_n$$

Matricen \mathbf{X} kaldes en invers til \mathbf{A} . En invertibel matrix \mathbf{A} kaldes også regulær (eng. *non singular*), ellers kaldes den singulær.

- Hvis både \mathbf{X}_1 og \mathbf{X}_2 er inverse til \mathbf{A} så gælder

$$\mathbf{X}_2 = \mathbf{X}_2 \mathbf{I}_n = \mathbf{X}_2 (\mathbf{A} \mathbf{X}_1) = (\mathbf{X}_2 \mathbf{A}) \mathbf{X}_1 = \mathbf{I}_n \mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_1.$$

Konklusion: den inverse er entydigt bestemt. Den betegnes \mathbf{A}^{-1} .

Theorem 2.9 Highlight I: n ligninger med n ubekendte

Hvis \mathbf{A} er invertibel så har ligningen $\mathbf{Ax} = \mathbf{y}$ netop en løsning $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}$.

Bevis: Vi ganger med den inverse matrix fra venstre

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{y} \Leftrightarrow \mathbf{A}^{-1}\mathbf{Ax} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{y} \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{I}_n \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}$$

Dias 6/20

Regning med inverse matricer

- Hvis \mathbf{A} og \mathbf{B} er invertible, så er \mathbf{AB} også invertibel og der gælder

$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$$

- Hvis \mathbf{A} er invertibel, så er \mathbf{A}^T også invertibel og $(\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T$
- Hvis \mathbf{A} er invertibel, så er \mathbf{A}^{-1} også invertibel og $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$
- Hvis \mathbf{A} er invertibel, og $s \neq 0$ så er $s\mathbf{A}$ også invertibel og $(s\mathbf{A})^{-1} = s^{-1}\mathbf{A}^{-1}$

To spørgsmål - og svar

- Hvordan afgør vi om en given matrix er invertibel?
- Hvis en matrix er invertibel, hvordan kan vi så bestemme den inverse?
- Bruge rækkeoperationer og rang
- Udvikle teori for determinant (Kapitel 5)

Dias 7/20

Illustration 2.2: Invers matrix og rækkeoperationer

Afgør, om

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

er invertibel og bestem i givet fald den inverse matrix.

- Bestem en matrix \mathbf{X} sådan at $\mathbf{AX} = \mathbf{I}$ (højreinvert).
- Man kan vise, at \mathbf{X} også opfylder at $\mathbf{XA} = \mathbf{I}$ (venstreinvert).
- Dermed er \mathbf{X} den inverse matrix til \mathbf{A} .

$$\mathbf{AX} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dette svarer til tre ligningssystemer, fx

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dias 8/20

Disse skal løses hver for sig ved rækkeoperationer

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{totalmatrix: } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{totalmatrix: } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{totalmatrix: } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Smart at sætte dem sammen til en total totalmatrix

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5/2 & -3/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3/2 & 3/2 & -1/2 \end{array} \right]$$

Dias 9/20

Bestemmelse af invers ved rækkeoperationer

Computation, p. 78

Lad \mathbf{A} være en $n \times n$ matrix og lad $\mathbf{I} = \mathbf{I}_n$.

- ① Opskriv matricen $[\mathbf{A}|\mathbf{I}]$.
- ② Lav elementære rækkeoperationer på matricen $[\mathbf{A}|\mathbf{I}]$ og bring den på reduceret rækkeechelonform.
- ③ Hvis den reducerede rækkeechelonform er $[\mathbf{I}|\mathbf{X}]$ da er $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{X}$, hvis ikke da er \mathbf{A} ikke invertibel.

Theorem 2.5 og 2.6

En $n \times n$ matrix \mathbf{A} er invertibel hvis og kun hvis $\text{rank } \mathbf{A} = n$.

Opgave

Brug "Computation" til at vise

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -7/8 & 3/8 \\ 5/8 & -1/8 \end{bmatrix}.$$

Dias 10/20

Opgaveløsning

Opgaveløsning

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 5 & 7 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{-5r_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -8 & -5 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\cdot -1/8} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5/8 & -1/8 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{-3r_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -7/8 & 3/8 \\ 0 & 1 & 5/8 & -1/8 \end{array} \right]$$

Dias 11/20

Invers til 2×2 matrix, p. 80

Matricen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

har en invers netop hvis $\det \mathbf{A} = ad - bc \neq 0$ og der gælder da

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Reglen er:

- divider med determinanten
- skift fortegn udenfor diagonalen
- byt om i diagonalen

Eksempel

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{1 \cdot 7 - 3 \cdot 5} \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7/8 & 3/8 \\ 5/8 & -1/8 \end{bmatrix}.$$

Dias 12/20

Definition 2.9

En matrix er en elementærmatrix hvis den er resultatet af at udføre netop en af tre nedenstående rækkeoperationer på enhedsmatricen.

- tal gange en række lægges til en anden række
- en række ganges med et tal, forskellig fra 0
- to rækker ombyttes

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{3r_1 + r_3 \rightarrow r_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{5r_2 \rightarrow r_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dias 13/20

Multiplikation med elementærmatrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & \cdot & \cdot \\ b & \cdot & \cdot \\ c & \cdot & \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & \cdot & \cdot \\ c & \cdot & \cdot \\ b & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & \cdot & \cdot \\ b & \cdot & \cdot \\ c & \cdot & \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & \cdot & \cdot \\ 5b & \cdot & \cdot \\ c & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & \cdot & \cdot \\ b & \cdot & \cdot \\ c & \cdot & \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & \cdot & \cdot \\ b & \cdot & \cdot \\ c+3a & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

Theorem 2.7 (morale)

At lave en rækkeoperation på en matrix er det samme som at gange den tilsvarende elementærmatrix på matrixen fra venstre.

Dias 14/20

Example 4, p. 82

Eksemplet viser, at flere rækkeoperationer efter hinanden svarer til at gange flere elementærmatricer på i den rigtige rækkefølge!

Eksempel 4 p. 82

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \rightsquigarrow A^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{-4r_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow{-1/3 r_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{-2r_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Dias 15/20

Theorem 2.8

Elementærmatricer er invertible

Hvorfor er det nu sådan?

- Har byttet om på to rækker, så byt om igen
- Har du ganget en række med $t \neq 0$, så gang den med $1/t$
- Har du lagt s gange række i til række j , så læg $-s$ gange række i til række j

Example 5, p. 83

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dias 16/20

Opgave

- 1 Hvilke af følgende matricer er elementære?

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

- 2 Hvilke af følgende matricer er invers til matricen E_1 ?

$$F_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad F_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad F_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dias 17/20

Illustration 2.3

Skriv $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$ som et produkt af elementærmatrixer.

Illustration 2.3

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{-5r_1} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -8 \end{bmatrix} \xrightarrow{-1/8r_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-3r_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1/8 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_3 E_2 E_1 A = I$$

$$A = (E_3 E_2 E_1)^{-1} I = E_1^{-1} E_2^{-1} E_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(A^{-1} = E_3 E_2 E_1).$$

Dias 18/20

Produkter af elementærmatrixer

- 1 Antag, at A er invertibel.
- 2 Lav rækkeoperationer (k stk i alt) sådan, at $[A|I] \sim [I|A^{-1}]$.
- 3 Rækkeoperationerne svarer til $E_k \cdots E_1 A = I$.
- 4 Dette giver: $A = E_1^{-1} \cdots E_k^{-1}$.
- 5 Da er A et produkt af elementærmatrixer.

Theorem 2.9 Highlight II

Lad A være en $n \times n$ matrix. Da er følgende betingelser ensbetydende:

- 1 A er invertibel
- 2 Ligningen $Ax = b$ har netop en løsning for hvert b
- 3 Ligningen $Ax = 0$ har kun løsningen $x = 0$
- 4 Rang af A er lig n
- 5 Den reducerede rækkeechelonform af A er I
- 6 A er et produkt af elementære matricer

Dias 19/20

Højre- og venstreinverse

Theorem 2.9 Highlight III

Lad A være en $n \times n$ matrix. Da er følgende ensbetydende:

- 1 A er invertibel
- 2 A har en venstreinverse
- 3 A har en højreinverse

En ikke kvadratisk matrix kan ikke have nogen invers matrix. Der kan dog godt være højre- eller venstreinverse:

- X er en venstreinverse til $m \times n$ matricen A hvis $XA = I_m$
- X er en højreinverse til $m \times n$ matricen A hvis $AX = I_m$

Theorem 2.10: generelle inverse

Lad A være en $m \times n$ matrix med $\text{rank } A = r$. Da gælder

- 1 A har en højreinverse netop hvis $r = m \leq n$
- 2 A har en venstreinverse netop hvis $r = n \leq m$

Dias 20/20