Assignment 5 — MASD

Schmidt, Victor Alexander, `rqc908`
Ibsen, Helga Rykov, `mcv462`
Barchager, Thomas Haulik, `jxg170`

Wednesday 22:00, October 12th

Opgave 1

a)

Vi kan starte med at opstille en tabel over alle udfald (rød, grøn) eller (grøn, rød) i udfaldsrummet H(summen 2 $\rightarrow$ 12).

$\frac{green}{red}$	1	2	3	4	5	6
1	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$
2	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$
3	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$
4	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$
5	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$
6	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$

Vi læser resultaterne langs diagonalerne sådan, at der er 1 udfald i hændelsen (summen af 2), og der er 2 udfald i hændelsen (summen af 3), og der er 5 udfald i hændelsen(summen af 6), osv.

Vi kan se at der er 36 unikke udfald i udfaldsrummet H(summen 2 $\rightarrow$ 12). Og sandsynlighedsfeltet her er symmetrisk fordi alle 36 udfald er lige sandsynlige:

H	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Der er fem hændelser H(summen) i tabellen som er primtal (markeret med blåt). Vi andvender additionsprincippet og finder den samlede sandsynlighed for summen er et primtal H(prime):

$$\begin{aligned} P(prime) = &\ P(2) + P(3) + P(5) + P(7) + P(11) \\ = &\ \frac{1+2+4+6+2}{36} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12} \end{aligned}$$

b)

Der er to overordnede hændelser i udfaldsrummet(sortedet efter sprog): A(5 danske bøger, 3 engelske bøger) og B(3 engelske og 5 danske bøger). Vi finder den samlede sandsynligheden for bøger sorteret efter sprog ved at anvende additionsprincippet:

$$\text{P(sorteret efter sprog)} = \text{P(A)} + \text{P(B}$$

Vi finder P(A) ved at anvende multiplikationsprincippet idet vi skal finde sandsynligheden for udvælgelse af fem danske bøger fra hændelsen A:

$$P(A) = \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{56}$$

På samme måde finder vi P(B) for udvælgelse af tre engelske bøger fra hændelsen B:

$$P(B) = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{56}$$

Vi lægger de to sandsynligheder sammen idet der er tale om enten-eller princippet og finder sandsynligheden for bøger sorteret efter sprog:

$$P(\text{sorteret efter sprog}) = P(A) + P(B) = \frac{1}{56} + \frac{1}{56} = \frac{1}{28}$$

c)

Vi skal finde sandsynligheden for hændelsen A (mindst én mus er hvid). Den komplementære hændelse til A er B(alle tre mus er sorte). Vi kan derfor finde sandsynligheden for A som:

P(A)= 1 - P(B)

Vi finder sandsynligheden for hændelsen B(alle tre mus er sorte) som:

$$P(B) = \frac{k}{n} = \frac{\text{antal gunstige}}{\text{antal mulige}}$$

Vi finder k, antallet af gunstige kombinationer at udvælge 3 sorte mus ud af 6 sorte mus, som K(6,3):

$$K(6,3) = \frac{6!}{3! \cdot (6-3)!} = 20$$

Vi finder n, antallet af mulige kombinationer at udvælge 3 sorte mus iblandt 11 mus:

$$n(11,3) = \frac{11!}{3! \cdot (11-3)!} = 165$$

Nu kan vi finde sandsynligheden for mindst én mus er hvid:

$$P(A) = 1 - P(B) = 1 - \frac{K(6,3)}{n(11,3)} = 1 - \frac{20}{165} = \frac{145}{165} = \frac{29}{33} = 0.87$$

d)

Her er der tale om to afhængige hændelser : A_1(1. kugle er hvid) og A_2(1. kugle er sort). For at finde betinget sandsynlighed for hændelsen B(anden kugle er hvid) anvender vi sumreglen:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{2} = P(A_i \cap B) = P(A_1) \cdot P(B|A_1) + P(A_2) \cdot P(B|A_2)$$

$$\begin{aligned} P(\text{2. kugle hvid}) = \; & P(\text{1. kugle hvid}) \cdot P(\text{2. kugle hvid} \mid \text{1. kugle hvid}) \\ & + P(\text{1. kugle sort}) \cdot P(\text{2. kugle hvid} \mid \text{1. kugle sort}) = \\ = \; & \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} + \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{9} = \frac{54}{90} = 0.6 \end{aligned}$$

Opgave 2

a)

For at finde sandsynligheden for at den tilfældigt valgte terning er terning A, kan man gøre brug af Bayes' theorem:

$$P(A \mid B) = \frac{P(B \mid A)P(A)}{P(B)} \tag{1}$$

Vi sætter $A = terning_A$ og $B = O$, hvor $O = outcomes = \{5, 3, 9, 3, 8, 4, 7\}$, altså sandsynligheden for resultatet af de syv terningeslag. Vi kan altså indsætte i Bayes' 1:

$$P(terning_A \mid O) = \frac{P(O \mid terning_A)P(terning_A)}{P(O)}$$

$P(O \mid terning_A)$ er sandsynligheden for at sættet O forekommer, når $terning_A$ er valgt, $P(terning_A)$ er sandsynligheden for at terning A bliver valgt og $P(O)$ er sandsynligheden for at sættet O forekommer, uanset hvilken terning vi har slået med. Sandsynlighederne for hvert led skrives herunder:

$$\begin{aligned}
P(O \mid terning_A) &= \frac{1}{20} \cdot \frac{3}{20} \cdot \frac{1}{20} \cdot \frac{3}{20} \cdot \frac{1}{20} \cdot \frac{2}{20} \cdot \frac{1}{20} = \frac{18}{1280000000} \\
P(terning_A) &= \frac{1}{2} \\
P(O) &= P(O \mid terning_A)P(terning_A) + P(O \mid \neg terning_A)P(\neg terning_A) \\
&= \frac{18}{2560000000} + \frac{2}{20} \cdot \frac{2}{20} \cdot \frac{1}{20} \cdot \frac{2}{20} \cdot \frac{2}{20} \cdot \frac{2}{20} \cdot \frac{2}{20} \cdot \frac{1}{2} \\
&= \frac{18}{2560000000} + \frac{64}{2560000000} = \frac{82}{2560000000}
\end{aligned}$$

Når vi sætter tallene ind i Bayes' 1 får vi:

$$P(terning_A \mid O) = \frac{\frac{18}{1280000000}\frac{1}{2}}{\frac{82}{2560000000}} = \frac{18}{82} = \frac{9}{41} \approx 0.22 = 22\%$$

Der er altså en sandsynlighed på ca. 22% for at terning A var den tilfældigt valgte terning.

b)

Vil svaret fra **a)** ændre sig, når vi tilføjer terning C?

Sandsynlighederne vil ændre sig, så resultatet vil også ændre sig. Hvis vi skulle lave en forudsigelse, ville forudsigelsen være, at sandsynligheden for at den tilfældigt valgte terning er terning A vil blive mindre. Sandsynlighederne vil ændre sig på følgende måde:

$P(O \mid terning_A)$ forbliver den samme sandsynlighed, da terning A ikke har ændret sig.
$P(terning_A)$ er nu 1 ud af 3 terninger, ikke længere 1 ud af 2 terninger.

$P(O)$ ændrer sig, da $P(terning_A)$ har ændret sig, og fordi der er en ekstra terning i spil, så $P(O \mid \neg terning_A)P(\neg terning_A)$ indebærer nu også terning C, da det er ikke længere kun terning B's resultat der ikke er terning A.
De nye sandsynligheder skrives op:

$$
\begin{aligned}
P(O \mid terning_A) &= \frac{18}{1280000000} \\
P(terning_A) &= \frac{1}{3} \\
P(O) &= P(O \mid terning_A)P(terning_A) + P(O \mid terning_B)P(terning_B) \\
&\quad + P(O \mid terning_C)P(terning_C) \\
&= \frac{18}{3840000000} + \frac{2}{20} \cdot \frac{2}{20} \cdot \frac{1}{20} \cdot \frac{2}{20} \cdot \frac{2}{20} \cdot \frac{2}{20} \cdot \frac{2}{20} \cdot \frac{1}{3} + \left(\frac{2}{20}\right)^7 \cdot \frac{1}{3} \\
&= \frac{18}{3840000000} + \frac{64}{3840000000} + \frac{128}{3840000000} = \frac{210}{3840000000}
\end{aligned}
$$

Vi indsætter tallene i Bayes' 1:

$$P(terning_A \mid O) = \frac{\frac{18}{1280000000}\frac{1}{3}}{\frac{210}{3840000000}} = \frac{18}{210} = \frac{3}{35} \approx 0.09 = 9\%$$

Efter tilføjelsen af terning C, er der altså en sandsynlighed på ca. 9% for at den tilfældigt valgte terning er terning A. Dette stemmer overens med vores hypotese, altså at sandsynligheden for at terning A var den valgte terning ville falde.

... *lille tilføfelse:* opgaven bedte os om også at udregne sandsynligheden for at terningen var terning B eller terning C. Vi kan blot bytte $P(O \mid terning_A)$ ud med $P(O \mid terning_B)$ og $P(O \mid terning_C)$ for at få sandsynligheden for at terningen er B eller C. Nedenfor vil vi udregne med Bayes' 1 for at få sandsynligheden for de resterende terninger:
Terning B:

$$
\begin{aligned}
P(O \mid terning_B) =& \frac{64}{1280000000} \\
&\Rightarrow P(terning_B \mid O) = \frac{64}{210} = \frac{32}{105} \approx 0.30 = 30\%
\end{aligned}
$$

Terning C:

$$
\begin{aligned}
P(O \mid terning_C) =& \frac{128}{1280000000} \\
&\Rightarrow P(terning_C \mid O) = \frac{128}{210} = \frac{64}{105} \approx 0.61 = 61\%
\end{aligned}
$$

Opgave 3

a)

I denne opgave kan vi ganske simpel tælle antallet af måde vi kan justeret ordet "**YAMAHA**", så **A** optræder i hvert andet bogstav.

1. Y,A,M,A,H,A
2. Y,A,H,A,M,A
3. M,A,Y,A,H,A
4. M,A,H,A,Y,A
5. H,A,Y,A,M,A
6. H,A,M,A,Y,A

Vi kan dermed se, at vi kan sammesætte **6** forskellige ord ud fra ordet "**YAMAHA**".

En anden måde at tælle antallet af mulige sammensætninger, vil være at bruge denne formel:

$$P_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Hvor r er elementer fra en mængde på n mulige, hvor vi kun kan vælge hvert element én gang.

$$P_{3,3} = \frac{3!}{(3-3)!} = \frac{3!}{0!} = \frac{6}{1} = \mathbf{6}$$

b)

Vi skal finde ud af, hvor mange ulige 4-cifrede tal vi kan sammensætte, når tallet skal være det samme skrevet bagfra.
For at løse denne opgave, opdeler vi problemet i to dele. Først skal vi finde ud af hvor mange gange vi kan bruge hvert ulige tal, som det første og sidste tal i det 4-cifrede tal. Dernæst skal vi finde ud af hvor mange forskellige kombinationer vi kan lave med det 2. og 3. cifre.

Del 1: 1,3,5,7,9 er de tal vi kan bruge til sammensætte det 4-cifrede tal, og da tallet skal kunne skrives bagfra, kan vi kun bruge et af de ulige tal af gangen:

$$P_{5,1} = \frac{5!}{(5-1)!} = \frac{5!}{4!} = \frac{120}{24} = 5$$

Del 2: De tal vi kan bruge som 2. og 3. cifre er talende 0-9, og da 2. og 3. cifre skal være ens, kan vi kun bruge et tal ud af 10, så vi får:

$$P_{10,1} = \frac{10!}{(10-1)!} = \frac{10!}{9!} = \frac{3628800}{362880} = 10$$

Vi kan dermed til sidst gange **del 1** med **del 2**, så vi får antallet af mulige kombinationer:

$$5 \cdot 10 = \mathbf{50}$$

c)

I denne opgave kan vi igen manuelt tælle hvor mange subsets af {1,2,3,4,5,6}, hvor størrelsen er 3 og hvor 1 indgår, men ikke 2.

1. {1,3,4}
2. {1,3,5}
3. {1,3,6}
4. {1,4,5}
5. {1,4,6}
6. {1,5,6}

Vi kan dermed se, at vi kan sammesætte **6** subsets af {1,2,3,4,5,6}.

Ved brug af formlen:

$$P_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

får vi:

$$P_{3,2} = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{3!}{1!} = \frac{6}{1} = \mathbf{6}$$

d)

I denne opgave har vi 5 unikke bøger og 3 personer, hvor vi skal finde ud af hvor mange måde vi kan fordele bøgerne på, så hver person mindst har en bog.
Lad os splitte problemet op i to scenarier:

Scenarie 1: I det første scenarie har vi at en person får tre bøger, og resten for en bog hver.
For at løse dette problem bruger vi kombination metoden:

$${}^{n}C_{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Fordi vi skal fordele mellem 3 forskellige personer, gør vi således:

$${}^{5}C_{3} \cdot {}^{2}C_{1} \cdot {}^{1}C_{1} \cdot 3$$

$$\frac{5!}{3!(5-3)!} \cdot \frac{2!}{1!(2-1)!} \cdot \frac{1!}{1!(1-1)!} \cdot 3$$

$$\frac{120}{12} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{1}{1} \cdot 3$$

$$10 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 = 60$$

Scenarie 2: I det andet scenarie har vi at to personer får to bøger, og den sidste får en bog.

$${}^{5}C_{2} \cdot {}^{3}C_{2} \cdot {}^{1}C_{1} \cdot 3$$

$$\frac{5!}{2!(5-2)!} \cdot \frac{3!}{2!(3-2)!} \cdot \frac{1!}{1!(1-1)!} \cdot 3$$

$$\frac{120}{12} \cdot \frac{6}{2} \cdot \frac{1}{1} \cdot 3$$

$$10 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 3 = 90$$

Til sidst skal vi finde det totale antal for begge scenarier, hvilket vi gør ved at ligge dem sammen:

$$60 + 90 = \mathbf{150}$$