Assignment 1 — MASD

Schmidt, Victor Alexander, `rqc908`
Ibsen, Helga Rykov, `mcv462`
Barchager, Thomas Haulik, `jxg170`

Wednesday 22:00, September 14th

Opgave 1

1.

1. Lad os for læsebarhedsskyld indføre følgende notation for det højre udtryk:

$$f(n) = \frac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12}$$

   Vi vil gerne vise at

$$\sum_{i=1}^{n} i^5 = f(n) \tag{1}$$

   er sand for alle hele positive værdier af n.

2. **[Basistrinnet]** Vi vil gerne vise at ligningen i (1) er sand for $n = 1$ og $n = 2$:

$$\begin{aligned} 1^5 &= \frac{1^2 \cdot 2^2(2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 - 1}{12} \\ 1 &= \frac{4(2+2-1)}{12} \\ 1 &= \frac{4 \cdot 3}{12} = 1 \end{aligned}$$

   For $n = 1$ er venstre udtryk lige med højre udtryk.

$$\begin{aligned} 1^5 + 2^5 &= \frac{2^2 \cdot 3^2(2 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 - 1}{12} \\ 1 + 32 &= \frac{4 \cdot 9(8+4-1)}{12} \\ 33 &= \frac{36 \cdot 11}{12} = 33 \end{aligned}$$

   For $n = 2$ er venstre udtryk lige med højre udtryk. Dermed har vi vist, at ligningen i (1) er opfyldt for $n = 1$ og $n = 2$.

3. **[Induktionsstrinnet]** Vi antager at ligningen i (1) er sand for n, og vi skal vise, at den også er sand for $n + 1$:

$$\sum_{i=1}^{n+1} i^5 = f(n+1) \tag{2}$$

Vi starter med at udregne det venstre side af ligningen (2):

$$\sum_{i=1}^{n+1} i^5 = \sum_{i=1}^{n} i^5 + (n+1)^5 \tag{3}$$

$$= f(n) + (n+1)^5 \tag{4}$$

$$= \frac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12} + (n+1)^5 \quad \text{vi sætter udtrykket på brøk} \tag{5}$$

$$= \frac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)+12(n+1)^5}{12} \tag{6}$$

$$= \frac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)+12(n+1)^2\cdot(n+1)^3}{12} \text{og omskriver} \tag{7}$$

$$= \frac{(n+1)^2}{12} \cdot [n^2(2n^2+2n-1)+12(n+1)^3] \tag{8}$$

Nu udregner vi det højre udtryk i ligningen (2):

$$f(n+1) = \frac{1}{12} \cdot (n+1)^2 \cdot (n+2)^2 \cdot (2\cdot(n+1)^2 + 2\cdot(n+1) - 1) \text{og omskriver} \tag{9}$$

$$= \frac{(n+1)^2}{12} \cdot [(n+1)^2 \cdot (n+2)^2 \cdot (2\cdot(n+1)^2 + 2\cdot(n+1) - 1)] \tag{10}$$

Vi ser at det første led i (8) og (10) er det samme, så vi ser bort fra det og udregner udtrykkene i kantede parenteser. Efter lange udregninger svarer kantede parenteser i (8) til:

$$2n^4 + 14n^3 + 35n^2 + 36n + 12 \tag{11}$$

Udtrykket i de kantede parenteser i (10) giver også:

$$2n^4 + 14n^3 + 35n^2 + 36n + 12 \tag{12}$$

Dette betyder at ligningen i (1) er opfyldt for $(n+1)$.

4. **[Konklusion]** Vi har vist basistrinnet hvor ligningen i (1) er sand for n = 1, og n = 2. Vi har vist induktionstrinnet, hvor ligningen (1) også er sand for $(n+1)$. Så er altså ligningen opfyldt for alle hele positive tal n.

2.

Vi ved at

$$\forall \varepsilon > \exists \delta > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$$

Hvis vi antager at det er sandt for $\varepsilon_0 > 0$, så eksisterer der et δ_0, som passer til ε_0. Dvs. den samme δ_0 ville være tilstrækkeligt lille for enhver $\varepsilon > \varepsilon_0$.
Sagt på en anden måde, hvis x ligger indenfor afstanden δ_0 fra x_0, så vil $f(x)$ ligge indenfor afstanden ε fra a, når $\varepsilon > \varepsilon_0$.

3.

Vi ved at funktionerne $f(x)$ og $g(x)$ har grænseværdierne i a og b for x gående mod x_0. Vi skal vise at produktet af de to funktioner har grænseværdien $a \cdot b$ for $x \to x_0$, hvis:

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) \cdot g(x) - a \cdot b| < \varepsilon \tag{13}$$

Vi starter med at omskrive påstanden i (13) ved at blande ledene og lægge et af dem til og trække det fra:

$$\begin{aligned} |f(x) \cdot g(x) - a \cdot b| = & \ |f(x)g(x) - g(x)a + g(x)a - ab| & (14) \\ \leq & \ |f(x)g(x) - g(x)a| + |g(x)a - ab| & (15) \\ \leq & \ |g(x)||f(x) - a| + |a||g(x) - b| & (16) \end{aligned}$$

Forudsætningen om eksistensen af grænseværdier kan omformuleres med lidt mindre δ_1, δ_2 og δ_3, så de to krav i (13) stadig kan være opfyldt:

$$0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow \ |f(x) - a|) < \frac{\varepsilon}{2(1 + |b|)} \tag{17}$$

$$0 < |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow \ |g(x) - b|) < \frac{\varepsilon}{2(1 + |a|)} \quad \text{hvis (18) er opfyldt så} \tag{18}$$

$$0 < |x - x_0| < \delta_3 \Rightarrow \ |g(x) - b| < 1 \tag{19}$$

Ifølge betingelsen i (19) får vi

$$|g(x)| = |g(x) - b + b| \leq |g(x) - b| + |b| < 1 + |b|$$

Vi har nu at x ligger tættere på x_0 end $\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$ $(0 < |x - x_0| < min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\})$. Vi kan derfor lave en vurdering ved at bruge betingelserne i (17) og (18):

$$\begin{aligned} |f(x) \cdot g(x) - a \cdot b| = & \ |g(x)||f(x) - a| + |a||g(x) - b| \\ < & \ (1 + |b|) \cdot \frac{\varepsilon}{2(1 + |b|)} + (1 + |a|) \cdot \frac{\varepsilon}{2(1 + |a|)} \\ = & \ \varepsilon \end{aligned}$$

Dermed eksisterer grænseværdien og $\lim_{x \to 0} f(x)g(x) = ab$.

4.

1. Vi vil gerne vise at

$$f(x) = x^n \tag{20}$$

   er kontinuer for alle hele positive værdier af n.

2. **[Basistrinnet]** Vi vil gerne vise at identiteten i (1) er sand for $n = 0$ og $n = 1$:

$$\begin{aligned} f(x) = & \ x^0 = 1 & (21) \\ f(x) = & \ x^1 = x & (22) \end{aligned}$$

Vi ved jf. Theorem 5 (s. 118 i bogen) at konstante funktioner, som i (21), og lineære funktioner, som i (22), er kontinuere. Dermed har vi vist at identiteten i (20) er sand for $n = 0$ og $n = 1$.

3. **[Induktionsstrinnet]** Vi antager at funktionen i (20) er kontinuer. Vi skal vise at den også er kontinuer for $(n + 1)$:

$$f(x) = x^{n+1} \tag{23}$$

Vi omskriver:

$$x^{n+1} = x^n \cdot x$$

Ifølge vores antagelse, er $f(x) = x^n$ kontinuer. Vi har også vist i Basistrinnet at $f(x) = x$ er kontinuer. Da de to funktioner er kontinuere, må deres produkt også være kontinuer jf. resultatet af Opgave 1.3 ovenfor. Dette betyder at funktionen i (20) er kontinuer for $(n + 1)$.

4. **[Konklusion]** Vi har vist basistrinnet hvor identiteten i (20) er kontinuer for n = 0, og n = 1. Vi har vist induktionstrinnet, hvor funktionen (20) også er kontinuer for $(n+1)$. Så er altså identiteten kontinuer for alle hele positive tal n.

5.

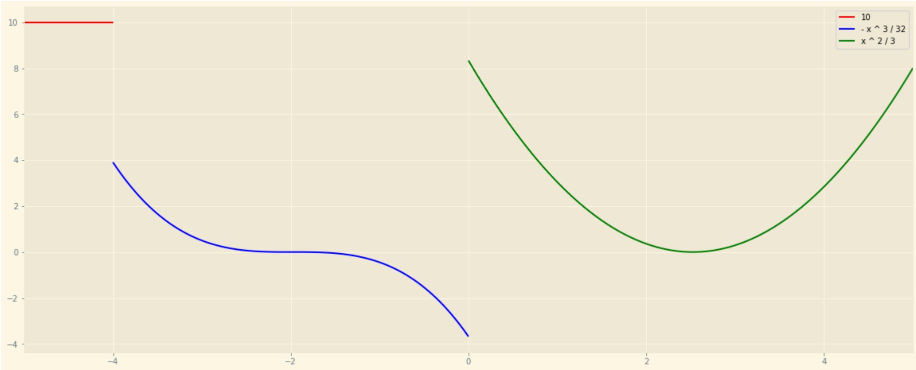
1. Lad udsagnet være at en kontinuert funktion afbilder et lukket interval [a,b] på et lukket interval [f(a),f(b)].

   Vi skal vise at, hvis den afbilder endeligt mange værdier, så må den være konstant.

   Fra Theorem 10 ved vi at, hvis billedemængden af en kontinuert funktion er et lukket interval, hvor endepunkterne ikke er sammenfaldende, så uanset hvor lille dette interval er, så vil værdismængden indeholde et uendeligt antal af funktionsværdier (N), som hver har mindst et tilsvarende c i definitonsmængden.

   Med mindre den kontinuerte funktion er lige bestemt en konstant funktion, hvor "det lukkede interval"i billedemængden falder sammen til et punkt, altså et tal. Det er den eneste måde hvorpå der kan være endeligt mange funktionsværdier. Sagt på en anden måde, hvis alle tal i definitionsmængden [a,b] har samme funktionsværdi, så betyder det at funktionen er konstant.

Opgave 2



Figur 1: Plot fra A1template. bruh denne her er forkert

$f(x)$ er givet ved:

$$f(x) = \begin{cases} 10 & \text{når } x < -4 \\ -\frac{x^3}{32} & \text{når } x \in [-4, 0] \\ \frac{x^2}{3} & \text{når } x > 0 \end{cases}$$

For at beskrive hvilke punkter i (1) der er kontinuere og diskontinuere, listes alle diskontinuere punkter, da det er implicit at alle andre punkter er kontinuere. I plottet kan der observeres diskontinuitet hvor:

1. $x = -4$

Bevis for at f er kontinuert i alle punkter i intervallet $[-5, 5]$ hvor $x \neq -4$ og $x \neq 0$

Antagelser

1. Vi antager (det vides fra sektion 2.5, Theorem 5 i bogen "*Calculus*") at ethvert polynomium altid er kontinuert (i deres domæner - så længe $x = \mathbb{R}$).

2. Vi antager at en konstant funktion (f.eks. $f(x) = 10$) ift. kontinuitet, opfører sig som et polynomium, da funktionen kan skrives som et forsimplet polynomium, hvor koefficienterne er 0, altså: Er dette overkill? Kunne ikke finde noget i bogen om at konstante funktioner var kontinuerte, og jeg synes det giver logisk mening at de aldrig er diskontinuerte, men jeg ville gerne skrive det som en antagelse, så det var klart at det jeg skrev holdt hele vejen. Skal jeg slette/simplificere det?

$$f(x) = 10 = 0 \cdot x^n + 0 \cdot x^{n-1} + \cdots + 0x^1 + 10x^0$$

3. Vi antager at så længe $f(x_0)$ hvor $x_0 = \mathbb{R}$ ikke er et endepunkt i et interval i $f(x)$ hvor $f(x)$ skifter forskrift, må antagelse (1.) og antagelse (2.) gælde.

Påstande Vi påstår, at funktion $f(x)$ er kontinuert i intervallerne, hvor $x \neq 0$ og $x \neq 4$ i intervallet $[-5, 5]$ (endepunkterne er hvor $f(x)$ skifter funktionsforskrift, hvilket strider imod antagelse (3.)).

Bevis

For at bevise at $f(x)$ er kontinuert, kan vi blot følge antagelse (1.) og (2.). Vi kan konstatere at i intervallet $[-4, 5]$ er $f(x)$ et af følgende polynomier:

$$f(x) = -\frac{x^3}{32} = -\frac{1}{32}x^3$$
$$f(x) = \frac{x^2}{3} = \frac{1}{3}x^2$$

... og i intervallet $[-5, -4[$ er $f(x) = 10$, altså er $f(x)$ konstant.

Ifølge theoremerne (antagelse (1.), og i forlængelse antagelse (2.)), betyder dette at $f(x)$ er kontinuert i de påståede intervaller.

$\square$

Bevis for at $f(-4)$ og $f(0)$ kontinuert/diskontinuert

Antagelser

1. Vi antager at definitionen for et kontinuert sted a i f er som følgende (sektion 2.5, definition 1, "*Calculus*"):

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \tag{24}$$

2. Vi antager at definitionen (sektion 2.3, definition 1, "*Calculus*") af en-sidede limits er som følgende:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \qquad \text{if and only if} \qquad \lim_{x \to a^-} f(x) = L = \lim_{x \to a^+} f(x) \tag{25}$$

Påstande

1. Vi påstår at punktet $x = -4$ kan være diskontinuert.
2. Vi påstår at punktet $x = 0$ kan være diskontinuert.

Bevis

Dette bevis føres via modstrid, altså vil vi forsøge at påstå at $x = -4$ og $x = 0$ er kontinuerte, hvis beviset strider mod antagelserne, må den pågældende værdi være diskontinuert.

Er $f(-4)$ diskontinuert? For at $x = -4$ er kontinuert, skal:

$$\lim_{x \to -4^-} f(x) = L = \lim_{x \to -4^+} f(x)$$

Vi kan nu se at:

$$\lim_{x \to -4^-} f(-4) = 10$$

$$\lim_{x \to -4^+} f(-4) = -\frac{(-4)^3}{32} = 2$$

$$\lim_{x \to -4^-} f(-4) \neq \lim_{x \to -4^+} f(-4)$$

Højre limitten og venstre limitten er altså ikke lig hinanden, hvilket strider mod antagelse (2.) og derfor også antagelse (1.), hvilket betyder at $f(x)$ ikke kan være kontinuert hvor $x = -4$, da antagelse (1.) er definitionen for, hvornår et punkt i en funktion opnår kontinuitet.
$f(-4)$ er derfor diskontinuert. □

Er $f(0)$ diskontinuert? Hvis samme fremgangsmåde følges, fås det at:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\frac{0^3}{32} = 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \frac{0^2}{3} = 0$$

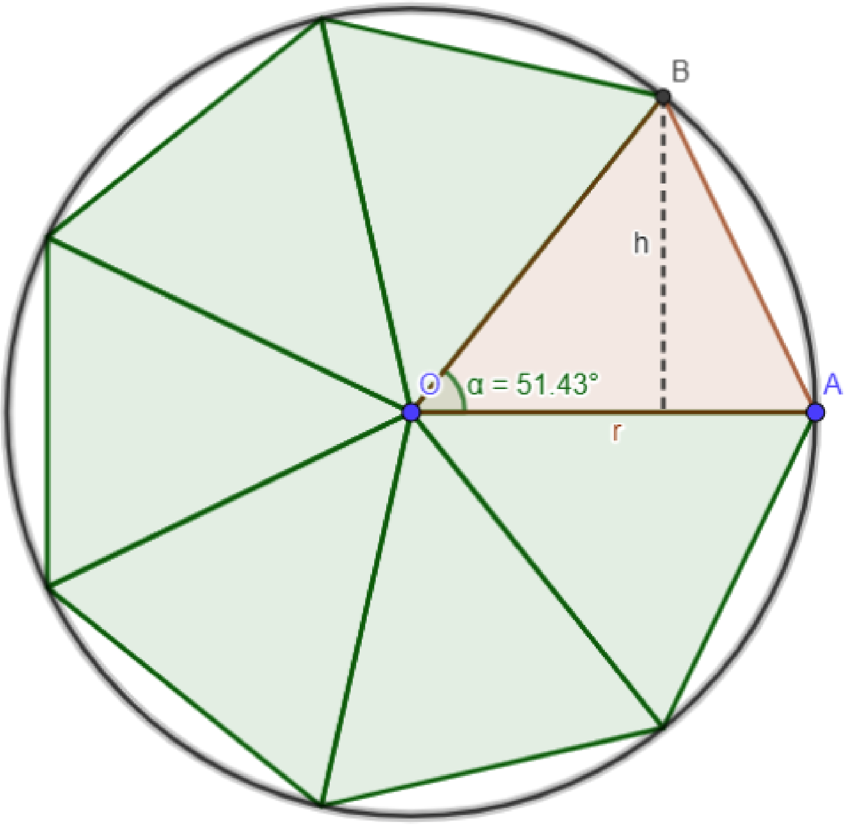
$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} f(x)$$

Hvilket betyder at $f(0)$ er kontinuert. □

Opgave 3

[Påstand] Det regulære polygon S_n indskrevet i cirklen med radius r har arealet , og , hvor .



Figur 2: GeoGebra temp

[Argumentation] Vi har dermed:
[Konklusion] Jævnfør den nævnte sætning har vi altså, at